

Benjamín Garza Olvera

Álgebra



ALWAYS LEARNING

PEARSON

Álgebra

Primera edición

BENJAMÍN GARZA OLVERA

Revisión técnica

Físico. Guillermo Govea Anaya
por la Universidad Nacional Autónoma de México

Maestro en matemática educativa.
Pedro Santos Tena
por la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez,
Chihuahua.
Presidente de academia de matemáticas de
Chihuahua, Chihuahua.

Ing. Jorge Rubio Zepeda
Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de
Servicios No. 162, Zapotlanejo, Jalisco.

Ing. Ind. Daniel Chagoya Gallardo
Jefe del Departamento de Servicios Docentes
Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de
Servicios No. 166
“Carmen Serdán Alatríste” (CETIS 166)

PEARSON

Datos de catalogación

Autor: Garza, Benjamín.

Álgebra

Primera edición

Pearson Educación de México, S. A. de C. V., 2014

ISBN: 978-607-32-2780-3

Área: Bachillerato/Matemáticas

Formato: 21 x 27 cm

Páginas: 144

■ **Dirección general:** Phillip De la Vega ■ **Dirección K-12:** Santiago Gutiérrez ■ **Gerencia editorial K-12:** Jorge Luis Iñiguez ■ **Coordinación de bachillerato y custom:** Lilia Moreno ■ **Edición sponsor:** Berenice Torruco ■ **Coordinación de arte y diseño:** Asbel Ramírez ■ **Supervisión de arte y diseño:** José Hernández ■ **Edición de desarrollo:** José Huerta ■ **Corrección de estilo:** Juan Carlos Hurtado ■ **Lectura de pruebas:** Mirna González ■ **Diseño de portada:** Pulso Comunicación ■ **Diagramación:** Ediciones OVA.

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-2780-3

ISBN E-BOOK: 978-607-32-2781-0

ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-2782-7

D.R. © 2014 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Atacomulco 500, 5º piso

Col. Industrial Atoto, C.P. 53519

Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg.

Núm. 1031

Impreso en México. Printed in Mexico.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 17 16 15 14

PEARSON

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

www.pearsonenespañol.com

PRESENTACIÓN, VII

COMPETENCIAS GENÉRICAS, XIII

Álgebra, 1.

Lenguaje algebraico, 1.

Evaluación diagnóstica, 2.

Expresión algebraica, 3.

Introducción al álgebra, 4.

Álgebra, 4. Introducción al álgebra, 4. Otros ejemplos demostrativos de la relación aritmética-álgebra, 5.

Geometría, 5. Física, 5. Química, 5.

Literales e incógnitas, 6.

Literales, 6. Incógnitas, 6.

Variables y constantes, 6.

Variable, 6. Constante, 6.

Traducción de expresiones del lenguaje común al algebraico y viceversa, 6.

Ejercicio 1, 7.

Notación algebraica, 8.

Signos de operación, 8. Signos de relación, 9. Signos de agrupación 9. Identificación de los elementos de una expresión algebraica, 9.

Expresión algebraica, 9.

Término algebraico, 9. Elementos de un término, 9. Términos por el signo, 9. Coeficiente, 10.

Numérico, 10. Literal, 10.

Grado de un término, 10.

Absoluto, 10. Relativo, 11.

Clases de términos, 11.

Entero, 11. Fraccionario, 11. Racional, 11. Irracional, 11.

Homogéneas, 12. Heterogéneas, 12. Semejantes, 12.

No semejantes, 12. Nulo, 12.

Clasificación de las expresiones algebraicas por el número de términos, 12.

Monomios, 12. Polinomios, 12. *Binomio*, 12. *Trinomio*, 13. Grado de polinomio, 13. Absoluto, 13. Relativo a una literal, 13.

Evaluación de expresiones algebraicas, 13

Ejercicio 2, 13.

Operaciones fundamentales, 16.

Operaciones fundamentales, 17.

Suma y resta de polinomios, 17.

Suma o adición, 17. Resta o sustracción, 18.

Reducción de términos semejantes, eliminando signos de agrupación, 19. Productos y cocientes de polinomios, 19.

Ordenación de un polinomio, 19. Multiplicación o producto, 19. Conmutativa, 20. Asociativa, 20. Distributiva, 20.

Multiplicación de monomios, 20. Multiplicación de monomios por polinomios, 20. Multiplicación de polinomios, 21. División o cociente, 21. División de monomios, 21. División de un polinomio entre un monomio, 22. División de polinomios, 23.

Comprobación, 23.

Ejercicio 3, 24.

Productos notables, 26.

El producto de la suma y la diferencia de dos números, 26. El cuadrado de un binomio, 27. El cuadrado de un polinomio, 27. El producto de dos binomios con términos semejantes, 27. Producto de binomios con término común, 27. Producto de binomios con términos semejantes, 28. El cubo de un binomio, 29.

Ejercicio 4, 29.

Factorización, 31.

Definición, 31. Factor, 31. Factores de un monomio, 32. Factores de un polinomio, 32. Factores comunes, 32. Factorización de la diferencia de dos cuadrados, 34. Suma o diferencia de dos cubos, 36. Trinomios, 38.

Factorizar trinomios de cuadrado perfecto, 38.

Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, 39. Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, 41. Sacar un factor común por agrupamiento, 42. Polinomios reducibles a suma o diferencia de dos cuadrados, 44.

Método de completar el binomio al cuadrado, 44. Reordenación de términos por efecto de cambios de signo, 46.

Polinomios que se factorizan como el cubo de un binomio, 46.

Ejercicio 5, 47.

Fracciones algebraicas, 50.

Fracción algebraica, 50. Signos de las fracciones, 50. Cambios que se hacen en los signos de una fracción sin que se altere, 51.

Regla 1, 51. Regla 2, 51.

Simplificación de fracciones algebraicas, 51. Operaciones con fracciones (adición y sustracción de fracciones algebraicas), 53. Multiplicación de fracciones algebraicas, 55. División de fracciones algebraicas, 56. Combinación de multiplicaciones y divisiones de fracciones algebraicas, 57. Simplificación de fracciones complejas, 58.

Ejercicio 6, 58.

Exponentes y radicales, 63.

Exponente, 63.

Leyes de los exponentes, 63.

Ley I, 63. Ley II, 63. Ley III, 63. Ley IV, 63. Ley V, 63.

Cero y números enteros negativos como exponentes, 64. Exponentes fraccionarios, 65. Formas radicales equivalentes, 66.

Factorización del radicando, 66. Racionalización de denominadores, 67. Reducción de radicales como otro de índice menor, 67. Introducción de un factor exterior al radical, 67.

Adición y sustracción de radicales, 68. Multiplicación de radicales, 68. División de radicales, 69. Números imaginarios, 69. Unidad imaginaria, 69. Operaciones con la unidad imaginaria, 70. Potencias de la unidad imaginaria, 70. Números complejos, 70. Casos especiales, 70.

Ejercicio 7, 71.

Autoevaluación, 74.

Ecuaciones, 75.

Evaluación diagnóstica, 76.

Ecuaciones lineales, 77.

Competencias disciplinares, 77.

Ecuaciones, 78.

Definición de ecuación, 78. Definición de identidad, 78. Grado de una ecuación, 78. Ecuaciones equivalentes, 79. Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, 81. Ecuaciones de primer grado con la incógnita en el denominador, 82. Problemas basados en palabras cuyo planteamiento genera una ecuación de primer grado con una incógnita, 84.

Ejercicio 8, 85.

Sistemas de ecuaciones lineales, 88.

Sistemas de ecuaciones, 88.

Métodos de solución para sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, 88.

Adición o sustracción (reducción), 88. Igualación, 89. Sustitución, 90. Método gráfico, 91. Solución por determinantes, 93. Determinante de segundo orden, 93.

Métodos de solución para sistemas de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, 95. Solución por determinantes, 96. Ecuaciones fraccionarias simultáneas de primer grado con dos y tres incógnitas, 100. Solución de problemas dados en palabras que conducen a un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, 105.

Ejercicio 9, 109.

Ecuaciones cuadráticas, 113.

Ecuaciones cuadráticas, 114. Ecuación cuadrática con una incógnita, 114. Ecuación cuadrática completa, 114. Ecuaciones cuadráticas incompletas, 114. Raíces de una ecuación cuadrática, 114. Solución por factorización, 115. Solución completando el cuadrado, 115. Deducción de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, 117.

Deducción de la fórmula, 117.

Solución por fórmula general, 118. Ecuaciones en forma cuadrática, 119. Naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática, 120. Problemas dados en palabras que se resuelven por ecuaciones de segundo grado, 121.

Ejercicio 10, 123.

Desigualdades e inecuaciones, 124.

Concepto de desigualdad, 124. Propiedades de las desigualdades, 125. Concepto de inecuación, 126. Solución de inecuaciones de primer grado con una incógnita, 126.

Ejercicio 11, 128.

Propiedades de los logaritmos, 128.

Definición de logaritmo, 128. Sistemas de logaritmos, 128. Propiedades generales de los logaritmos, 129. Leyes de los logaritmos, 129.

Logaritmo de un producto, 129. Logaritmo de un cociente, 129. Logaritmo de una potencia, 129. Logaritmo de una raíz, 129.

Autoevaluación, 131.

Respuestas de algunos reactivos de los distintos ejercicios propuestos, 119.

Presentación

Este libro se escribió pensando en estudiantes de bachillerato tecnológico que se inician en el estudio de las matemáticas y que requieren fortalecer su aprendizaje en el manejo y aplicación de un lenguaje matemático, ejercitar la solución de problemas, comprender la importancia del razonamiento matemático, etcétera. El objetivo principal, fue escribir un libro que ustedes los estudiantes pudieran leer, entender y disfrutar. A lo largo del libro se utiliza un lenguaje claro y preciso que propicia la generación de conocimientos que, por lo general, resultan difíciles de entender y aprender. Se utilizan oraciones cortas, explicaciones claras y muchos ejemplos resueltos a detalle. La didáctica que se desarrolla en el texto se fundamenta en una exposición de conceptos introductorios y ejemplos demostrativos, así como, una diversificación en el planteamiento del problema. Donde las técnicas empleadas en la solución de problemas, tienen por objeto desarrollar el razonamiento reflexivo y la destreza en el estudiante, fortaleciendo su dominio y provocando su interés para los cursos subsecuentes de matemáticas, donde los conocimientos de la aritmética y el álgebra son imprescindibles.

Los problemas y ejercicios que se desarrollan a lo largo de las dos unidades que presenta el libro, utilizan distintos tipos de reactivos, lo cual permite tener una evaluación continua del proceso enseñanza-aprendizaje. Se hace énfasis en el incremento gradual de la complejidad de cada ejercicio hasta lograr el cambio de la memorización por un razonamiento más analítico en el planteamiento y desarrollo del proceso de solución de un problema determinado.

Es importante recalcar que la consecución de los temas tratados en el libro dependerá del trabajo estrecho entre docente y alumnos, de manera tal que el libro sea sólo un apoyo para reforzar lo que se trabaja en el salón de clases.

Por último dedico este trabajo a mis compañeros del CETIS 71 de Reynosa, Tamaulipas; a mis ex alumnos, y especialmente a mi familia quienes distingo con este mensaje:

“La excelencia es el principio de los triunfadores, ya que sin la constancia, ninguna virtud es grande; el disfrutar del éxito es una inspiración emocional que sentimos al descubrir que alguien cree en nosotros y está dispuesto a darnos su confianza”.

EL AUTOR

Q. I. y Lic. Benjamín Garza Olvera

Metodología para el trabajo con este material

El material está dividido en dos unidades, cada una con dos temas principales, donde se desarrollan los contenidos actuales del programa general de bachillerato tecnológico. Cada unidad cuenta con una evaluación diagnóstica, el desarrollo de los diversos temas y una autoevaluación.

Evaluación diagnóstica

Es una serie de ejercicios que sirven como repaso operativo, pero en general se busca desarrollar habilidades de lógica, aritmética y álgebra.

Cuadros de competencias genéricas y disciplinares

Se localiza en cada una de las actividades que favorecen el logro de competencias; en este apartado el alumno, con la mediación del maestro, deberá determinar cuáles son las competencias genéricas y las competencias disciplinares que está desarrollando y escribir en el cuadro las que sean pertinentes.

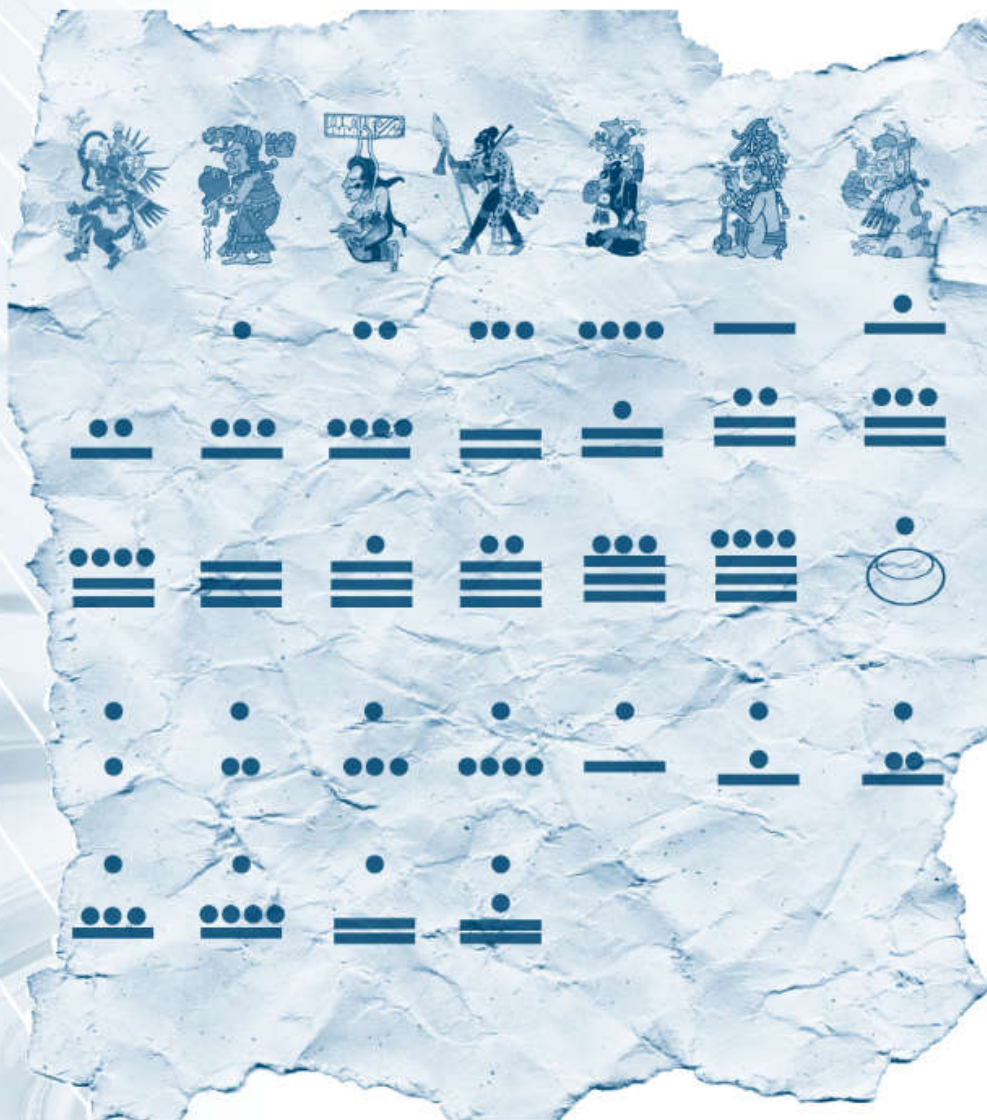
Autoevaluación

Es una colección de ejercicios que ayudan a reforzar el trabajo desarrollado a lo largo de la unidad.

Competencias genéricas

Categorías	Competencias
Se autodetermina y cuida de sí	1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue. 2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros. 3. Elige y practica estilos de vida saludables.
Se expresa y se comunica	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
Piensa crítica y reflexivamente	5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
Aprende de forma autónoma	7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
Trabaja en forma colaborativa	8. Participa y colabora de manera efectiva en diversos equipos.
Participa con responsabilidad en la sociedad	9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo. 10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales. 11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica con acciones responsables.

UNIDAD 1



Lenguaje algebraico

Evaluación diagnóstica

1. Traduce las siguientes expresiones en lenguaje algebraico al lenguaje común.

a) $3x + 4y$

b) $-3b$

c) $\sqrt{abc}$

d) $x(m + n - p)$

2. Traduce las siguientes expresiones en lenguaje común al lenguaje algebraico.

a) El producto de las edades de dos hermanos hace 17 años.

b) La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos.

c) El cociente de la raíz cuadrada de la diferencia de dos cantidades y la diferencia de los cuadrados de dichas cantidades

3. En un cine las entradas de adultos, cuestan \$35 y la de niños \$20. En un fin de semana asistieron 326 espectadores, se recaudaron \$10 090. ¿Cuántos adultos y cuántos niños asistieron?

4. En las siguientes secuencias escribe el número que hace falta.

a) 2, 5, 14, 25, __, 38, 81, __, 114.

b) 2a, 3c, 4b, 12a, 21b, 43c, __, 12c, 1b.

5. Si te ofrecen un descuento del 20% sobre un producto, pero con la opción de hacerlo efectivo antes o después de aplicarle el IVA de 16% ¿cuál es la opción que más te conviene? En ambos casos ¿Qué porcentaje del costo original habrá que pagar?

Expresión algebraica

Propósito del tema

Que el estudiante:

- ☐ Haga uso del lenguaje algebraico y aprenda las reglas básicas de notación para resolver problemas de su vida cotidiana.
- ☐ Establezca modelos algebraicos como herramienta al planteamiento de problemas y situaciones reales.
- ☐ Comprenda las ventajas del lenguaje algebraico sobre el lenguaje común al evaluar numéricamente expresiones algebraicas.
- ☐ Interprete los resultados que obtiene al evaluar expresiones en la solución de problemas.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

Contenidos que aborda el tema

Contenidos conceptuales

- ☐ Notación algebraica, uso de literales y variables para representar cantidades.
- ☐ Representación algebraica de expresiones en lenguaje común.
- ☐ Interpretación de expresiones algebraicas.
- ☐ Evaluación numérica de expresiones algebraicas.

Contenidos procedimentales

- ☐ Realizará inferencias y deducciones al usar el lenguaje algebraico.
- ☐ Usará la terminología y notación matemática, al plantear expresiones algebraicas.
- ☐ Sustituirá valores a las variables de las expresiones algebraicas e interpretará los resultados obtenidos.
- ☐ Resolverá problemas a partir de la representación algebraica de expresiones en lenguaje común.
- ☐ Evaluará numéricamente las expresiones algebraicas.

Contenidos actitudinales

- ☐ Expresará sus ideas mediante el lenguaje algebraico.
- ☐ Trabaja en equipo y respetará a sus compañeros al resolver problemas.
- ☐ Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.

Introducción al álgebra

Álgebra

Es una rama de las matemáticas que generaliza los métodos y procedimientos de la aritmética para efectuar cálculos y resolver problemas con cantidades, mediante reglas y operaciones que no necesariamente requieren de números específicos.

Introducción al álgebra

Puesto que el álgebra es una rama de las matemáticas, sus operaciones son las mismas que las de la aritmética, es decir, **adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación**.

Recordemos que en aritmética la solución de problemas se realiza siempre en forma particular, ya que únicamente se resuelve el problema planteado, pues al emplear números no es posible establecer principios generales en los procedimientos. Se hace comprender que en una gran mayoría de aspectos aritméticos se requiere de la aplicación del álgebra con el fin de establecer reglas y procedimientos que faciliten la solución de problemas similares.

Ejemplo

Un comerciante compró un automóvil en \$87 500 y lo vendió en \$103 250. ¿Cuánto ganó?

Razonamiento

Al efectuar la diferencia entre el precio de venta y el de costo, resulta la ganancia, es decir:

$$103\,250 - 87\,500 = 15\,750$$

La ganancia es de 15 750 pesos

En el álgebra además de resolver el problema dado, se trata de establecer un principio que, generalizado, pueda aplicarse en otros problemas semejantes.

El razonamiento empleado en el problema anterior establece que, puesto que la diferencia entre las dos cantidades representa la ganancia, se puede concluir que:

$$\text{Precio de venta} = V$$

$$\text{Precio de costo} = C$$

$$\text{Ganancia} = G \quad \therefore \quad V - C = G$$

De lo anterior, algebraicamente se establece que la suma de costo y ganancia dan como resultado el precio de venta. Es decir,

$$C + G = V$$

También se puede concluir que la diferencia entre el precio de la venta y la ganancia, dan como resultado el precio del costo. Es decir,

$$V - G = C$$

En la geometría se aprecia de manera más clara la relación **aritmética-álgebra**, pues los procedimientos para determinar áreas, perímetros y volúmenes se efectúan con apoyo de fórmulas que establecen un formato general de solución para problemas similares.

Ejemplo

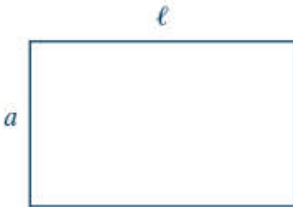
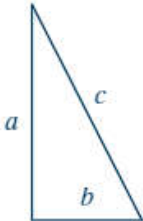
Determina el área de un rectángulo que mide 15 m de largo y 7 m de ancho.

Datos	Fórmula	Sustitución
Lado largo $\ell = 15$ m	$A = \ell a$	$A = (15 \text{ m})(7 \text{ m})$
Lado ancho $a = 7$ m		$A = 105 \text{ m}^2$

El razonamiento aritmético únicamente se limitará a resolver el problema particular de *ese* rectángulo; el razonamiento algebraico se ocupa de establecer un formato general que permita determinar el área de cualquier rectángulo sin importar sus dimensiones.

Otros ejemplos demostrativos de la relación aritmética-álgebra

Geometría

		
Cuadrado	Rectángulo	Triángulo
Perímetro $P = 4\ell$	$P = 2\ell + 2a$	$P = a + b + c$
Área $A = \ell^2$	$A = \ell a$	$A = \frac{ba}{2}$

Física

- a) F = fuerza
 m = masa
 a = aceleración

$$F = ma$$

Despejes

$$m = \frac{F}{a}$$

$$a = \frac{F}{m}$$

- b) v = velocidad
 d = distancia
 t = tiempo

$$v = \frac{d}{t}$$

$$v = vt$$

$$t = \frac{d}{v}$$

Química

- D = densidad
 m = masa
 V = volumen

$$D = \frac{m}{V}$$

$$m = DV$$

$$V = \frac{m}{D}$$

Literales e incógnitas

Puesto que las letras son los símbolos más conocidos y utilizados con mayor frecuencia por el ser humano, estas fueron tomadas para representar valores numéricos. Convencionalmente, representan determinadas condiciones o principios de los problemas, por lo que se organizan de la siguiente manera.

Literales. Son letras del abecedario que se utilizan para representar aquellos valores que son conocidos o que pueden obtenerse directamente; es decir, los datos dados en un problema se representan por medio de literales.

Incógnitas. Son letras del abecedario que se utilizan para representar aquellos valores numéricos que se desconocen y que, para ser conocidos, deberán efectuarse operaciones matemáticas.

Variables y constantes

Todas las cantidades conocidas se representan con las primeras letras del abecedario: $a, b, c, d, e, \dots$, y se denominan también **literales**.

Todas las cantidades desconocidas se representan con las últimas letras del abecedario: s, t, u, v, w, x, y, z , y se denominan **incógnitas**. Ahora se definirán los términos *variable* y *constante*.

Variable. Es una letra o símbolo que puede tomar cualquier valor de un conjunto de números, es decir, puede cambiar de valor.

Ejemplo

Si tenemos la función $y = 2x$, y le asignamos valores a la variable x , resulta que el valor de la variable y cambiará conforme *varía* el valor de x .

si $x = 1$	si $x = 2$	si $x = 3$
$y = 2(1)$	$y = 2(2)$	$y = 2(3)$
$y = 2$	$y = 4$	$y = 6$

x	1	2	3	4	5	-1	-2
y	2	4	6	8	10	-2	-4

Constante. Es cualquier letra o símbolo con un valor numérico fijo, es decir, no pueden cambiar de valor.

Ejemplo

Cualquier número, por ejemplo 9, siempre será 9; $\pi = 3.1416$ es una constante que representa la razón de la circunferencia de un círculo al diámetro; en la fórmula $A = \frac{ba}{2}$, las literales A, b y a pueden variar según los datos, pero el 2 siempre permanecerá fijo; en la función anterior $y = 2x$, la y y x pueden variar de valor, pero el 2 siempre será constante.

Traducción de expresiones del lenguaje común al algebraico y viceversa

En el lenguaje común o *natural* (el que usamos todos los días para comunicarnos) se emplean palabras, mientras que en el lenguaje algebraico se emplean letras y símbolos que permiten reducir las proposiciones verbales a proposiciones algebraicas muy simples y fáciles de comprender.

EJEMPLOS

Ejemplos

Lenguaje común	→	Lenguaje algebraico
Tres objetos cualesquiera		x, y, z
La semisuma de dos números		$\frac{b+a}{2}$
La suma de dos veces un número más tres veces el mismo número es igual a cinco veces dicho número		$2n + 3n = 5n$
El cubo de un número menos el doble del mismo número		$w^3 - 2w$
El cociente de dos fracciones comunes		$\frac{m}{n} \div \frac{p}{q}$
Lenguaje algebraico	→	Lenguaje común
$5n - 2n = 3n$		Cinco veces un número restado dos veces el mismo número es igual a tres veces dicho número
$a^2 + b^2$		Suma de los cuadrados de dos números
$2\pi r$		El doble producto de π por r (radio)
$2(u - v)$		El doble de la diferencia de dos números
$A = \ell a$		El área de un rectángulo es igual al producto de su largo por su ancho

EJERCICIO 1

I. Realiza en tu cuaderno, lo que se indica en cada caso.

- Define el concepto de álgebra.
- Explica la diferencia entre el álgebra y la aritmética.
- Describe algunos ejemplos sobre la relación de la aritmética-álgebra.
- Define los siguientes términos.

a) Literal	c) Variable
b) Incógnita	d) Constante
- Escribe cuál es la diferencia entre el lenguaje común y el lenguaje algebraico.
- Con ayuda de tu profesor, traduce las siguientes expresiones dadas en lenguaje común al lenguaje algebraico.
 - La tercera parte de un número
 - La diferencia de los cuadrados de dos números
 - La mitad de un número más el doble del mismo número
 - El cuadrado de la suma de dos números
 - El triple de un número

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

7. En equipo traduzcan las siguientes expresiones dadas en lenguaje algebraico al lenguaje común y comparen sus resultados con el resto del grupo.

a) $x + y - 7$

d) $x(a - b)$

b) $2a - 3b$

e) $(x + y)(x - y)$

c) $\sqrt{ab}$

f) $(a - b)^2$

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Notación algebraica

A continuación estudiaremos algunos de los elementos básicos de la notación algebraica: los signos de operación, los signos de relación y los signos de agrupación.

Signos de operación

En álgebra, las operaciones de **adición**, **sustracción**, **multiplicación**, **división**, **potenciación** y **radicación** se efectúan en forma similar que en la aritmética; dichas operaciones se indican con los siguientes signos:

- a) El signo de la **adición** es $+$. Por ejemplo, $2p + q$.
- b) El signo de la **sustracción** es $-$. Por ejemplo, $s - t$.
- c) El signo de la **multiplicación** es $\times$. Por ejemplo, $a \times b$; también se usa *un punto* entre los factores, es decir, $u \cdot v$; por lo general, se colocan los factores entre paréntesis $(m)(n)$.

Al tener factores literales, o un factor numérico y otra literal, no es necesario que se escriba el signo de la multiplicación, es decir: uvw , $3ab$, $2x$.

- d) El signo de la **división** es $\div$. Por ejemplo, $x \div y$; también se representa separando el dividendo y el divisor por una línea horizontal, es decir, $\frac{x}{y}$, o también por una línea diagonal, x / y .
- e) El signo de la **potenciación** es el exponente, que es un número que se escribe en la parte superior derecha de una literal, número o expresión, indicando el número de veces que la literal, número o expresión, que se denomina base, se toma como factor.

Ejemplos

$$m^4 = (m)(m)(m)(m)$$

$$2^3 = (2)(2)(2) = 8$$

$$(3xy)^2 = (3xy)(3xy) = 9x^2y^2$$

Cuando una literal, número u expresión no tiene un exponente indicado, se sobreentiende que su exponente es la unidad.

$$u = u^1$$

$$3 = 3^1$$

$$5xy = 5^1x^1y^1$$

- f) El signo de **radicación** (radical) es $\sqrt{\quad}$. Dentro de este signo se coloca la expresión a la cual se le va a extraer la raíz, que es la cantidad que al multiplicarse tantas veces como indica el radical, da por resultado la expresión ubicada en el interior del mismo.

$$\sqrt{2a} \longleftarrow \text{Extraer la raíz cuadrada de } 2a$$

$$\sqrt[3]{8x^2y} \longleftarrow \text{Extraer la raíz cúbica de } 8x^2y$$

Signos de relación

Los signos que nos permiten identificar la relación que guardan dos cantidades, son:

- a) El signo de la **igualdad** es $=$. Por ejemplo, $m = w$.
- b) El signo **mayor que** es $>$. Por ejemplo, $a > b$.
- c) El signo **menor que** es $<$. Por ejemplo, $x < y$.
- d) El signo **diferente de** es $\neq$. Por ejemplo, $p \neq q$.

Signos de agrupación

Se representan normalmente por:

- a) Paréntesis curvo: $()$
- b) Paréntesis recto o corchete: $[]$
- c) Paréntesis de llave: $\{ \}$
- d) Signo de vínculo: $-$

Los símbolos de agrupación son empleados para hacer que el significado de ciertas expresiones sea claro e indicar el orden en que las operaciones deben efectuarse.

Identificación de los elementos de una expresión algebraica

Expresión algebraica

Es una representación que se aplica a un conjunto de literales y números que conforman una o más operaciones algebraicas.

Ejemplos

$$x; 7z^2; 2a + 5b; \sqrt{8x}; \frac{x^2a^2}{x}; \text{ etc.}$$

En las expresiones algebraicas, las partes que aparecen separadas por el signo $+$ o $-$, reciben el nombre de **términos algebraicos**.

Término algebraico

Es cualesquiera de las partes de una expresión que consta de uno o varios símbolos no separados entre sí por el signo $+$ o $-$.

Ejemplos

$$3x^2; 2mn; \frac{u}{3}; \sqrt{5y^3}; 4x^2y; \text{ etc.}$$

Elementos de un término

Los elementos que constituyen un término son: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado.

Términos por el signo

Los términos que van precedidos del signo $(+)$ se denominan **positivos**; los que van precedidos del signo $(-)$ se denominan **negativos**.

Ejemplos

$$8x^2y; \frac{2x}{3y}; \sqrt[3]{4x}; 5x; 7uvw \quad \text{Términos positivos.}$$

$$-6xy^2; \frac{-3m}{n}; -\sqrt{7a^2}; -ax; -8mn \quad \text{Términos negativos.}$$

Cuando un término no es afectado por ningún signo se considera positivo, ya que el signo (+) suele no escribirse en términos positivos.

Coeficiente

Es generalmente el primero de los factores que conforman un término; el coeficiente puede ser de dos clases.

Numérico. Cuando es el factor numérico de un término.

Ejemplo

El coeficiente numérico del término $5ax$ es 5.

Literal. Cuando es el factor literal de un término.

Ejemplo

El coeficiente literal del término my es m .

Es importante señalar que el coeficiente siempre va acompañado del signo del término.

Ejemplo

En el término $-2by$, el coeficiente numérico es -2 .

Cuando un término no tiene coeficiente numérico, se sobreentiende que su coeficiente es la unidad.

Ejemplo

$$axy = 1axy$$

Parte literal

Son los factores literales que contiene el término.

Ejemplo

En el término $5ax$, la parte literal es ax .

Grado de un término

El grado de un término puede ser de dos formas, absoluto y relativo a una literal.

Absoluto. El grado absoluto de un término es el número que se obtiene al sumar los exponentes de la parte literal.

Ejemplos

$2x$	$\longrightarrow$	Primer grado	x^3y	$\longrightarrow$	Cuarto grado
$5ab$	$\longrightarrow$	Segundo grado	$3m^2n^2x$	$\longrightarrow$	Quinto grado
$8a^2x$	$\longrightarrow$	Tercer grado	x^3y^2z	$\longrightarrow$	Sexto grado

Relativo. El grado de un término relativo a una literal es el mayor exponente que tenga la literal considerada.

Ejemplos

- $xy^2 \longrightarrow$ Primer grado con respecto a x y segundo grado con respecto a y .
- $m^2n^3x \longrightarrow$ Segundo grado con respecto a m , tercer grado con respecto a n y primer grado con respecto a x .
- $2a^3b^5c^2 \longrightarrow$ Tercer grado con respecto a a , quinto grado con respecto a b y segundo grado con respecto a c .

Cuando un término se involucra en una operación de potenciación, da lugar a dos elementos que se denominan **base** y **exponente**.

Ejemplo

En el término x^3 , 3 es el exponente y x es la base.

Clases de términos

Los términos se clasifican en enteros, fraccionarios, racionales, irracionales, homogéneos y heterogéneos.

Entero. Es aquel que no tiene denominador literal.

Ejemplos

$$3a; 2x^2y; \frac{2m}{3}; \text{ etc.}$$

Fraccionario. Es aquel que contiene en el denominador una literal.

Ejemplos

$$\frac{3}{b}; \frac{7xy}{z}; \frac{5a^2b}{c^3}; \text{ etc.}$$

Racional. Es aquel que no está afectado por un radical y puede ser entero o fraccionario.

Ejemplos

$$2x; \frac{6a^2b}{x}; \frac{3m}{4}; \frac{5xy^2}{z}; \text{ etc.}$$

Irracional. Es aquel que está afectado por un radical y puede ser entero o fraccionario.

Ejemplos

$$\sqrt{2xy}; \frac{3m}{\sqrt{ab}}; 5\sqrt{ab^2x}; \frac{\sqrt{6x^3y}}{z}; \text{ etc.}$$

Homogéneos. Son aquellos que tienen el mismo grado absoluto.

Ejemplos

$$\begin{array}{lll} 2xy^2z^3 & \text{y} & 7a^2b^3c \\ 3ab^2 & \text{y} & 2a^2b \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Son de sexto grado absoluto.} \\ \text{Son de tercer grado absoluto.} \end{array}$$

Heterogéneos. Son aquellos que tienen distinto grado absoluto.

Ejemplos

$$\begin{array}{lll} 3x & \text{y} & 7y^2 \\ 8a^2b & \text{y} & 5x^2y^2x \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Son de diferente grado absoluto.} \\ \text{Son de diferente grado absoluto.} \end{array}$$

Existe entre los términos otra clasificación que los distingue como *semejantes*, *no semejantes* y *nulo*.

Semejantes. Son aquellos que tienen los mismos factores literales, variando únicamente su coeficiente.

Ejemplos

$$8a \text{ y } 4a; \quad 2mx \text{ y } -3mx; \text{ etc.}$$

No semejantes. Son aquellos que tienen diferentes factores literales.

Ejemplos

$$3ab \text{ y } 7xy; \quad 2mn \text{ y } 5ax; \quad \sqrt{2a} \text{ y } \sqrt{5b}; \text{ etc.}$$

Nulo. Si el coeficiente de un término es cero, se tiene un término cuyo valor absoluto es cero o nulo.

Ejemplos

$$(0)x^2y = 0; \quad (0)a^2 = 0; \text{ etc.}$$

Clasificación de las expresiones algebraicas por el número de términos

Las expresiones algebraicas se clasifican en **monomios** y **polinomios**.

Monomios. Son aquellos que constan de un solo término, en el que números y letras están ligados por la operación de multiplicar.

Ejemplos

$$5x; \quad -3ab; \quad \frac{x^2z}{2y}; \quad -\frac{2a^3x}{7b}; \quad \sqrt{3ab^3}; \text{ etc.}$$

Polinomios. Son aquellos que constan de más de un término, es decir, son la suma algebraica de dos o más monomios.

Ejemplos

$$a + 2b; \quad 3x^2 - 5y + z; \quad 2x^3 - 7x^2 - 3x + 8; \text{ etc.}$$

Los polinomios, de acuerdo con el número de términos que contienen, pueden ser:

Binomio. Polinomio de dos términos.

Ejemplos

$$5x^2 - 3y^2; \quad u + at; \quad 4a^2b + x^2y^6; \quad x^3 + 3x; \text{ etc.}$$

Trinomio. Polinomio de tres términos.

Ejemplos

$$x + y + z; \quad 2ab - 3a^2 + 5b^2; \quad m - 2n - 8; \quad \text{etc.}$$

Grado de polinomio. El grado de un polinomio puede ser absoluto y relativo a una literal.

Absoluto. El grado absoluto de un polinomio se determina por el exponente de sus términos con el valor más alto.

Ejemplos

$$a^4 - 5a^3 + 7a^2 + 3a + 1 \quad \text{El grado absoluto es cuarto.}$$

$$2x^5 + 6x^3y^4 + 2x^2y^6 - 4x \quad \text{El grado absoluto es sexto.}$$

$$2ab - a^2b^3 + 3a^3b^3 + 5b^5 \quad \text{El grado absoluto es quinto.}$$

Relativo a una literal. El grado relativo de un polinomio con respecto a una literal, es el mayor exponente que tiene la literal que se considere del polinomio.

Ejemplos

$$x^7 + x^4y^3 - x^2y^5 \quad \text{El grado con relación a } x \text{ es séptimo, de quinto grado con relación a } y.$$

$$a^3 + 2a^2b - 7ab^2 - 8 \quad \text{El grado con relación a } a \text{ es tercero, de segundo grado con relación a } b.$$

Evaluación de expresiones algebraicas

Es un proceso que consiste en sustituir valores numéricos asignados para las literales de una expresión algebraica y efectuar las operaciones indicadas para obtener como resultado un valor numérico específico correspondiente.

Ejemplos

- Encuentra la evaluación de las siguientes expresiones dadas para los valores numéricos asignados a sus literales.

a) $2a^2bc^3$, cuando $a = 2$, $b = 3$ y $c = 1$.

$$2(2)^2(3)(1)^3 = 2(4)(3)(1) = 24$$

b) $4\sqrt{bx^3}$, cuando $b = 8$ y $x = 2$.

$$4\sqrt{(8)(2)^3} = 4\sqrt{(8)(8)} = 4(8) = 32$$

c) $5x^2 - 3x + 8$, cuando $x = 2$.

$$5(2)^2 - 3(2) + 8 = 5(4) - 6 + 8 = 22$$

d) $\frac{8a}{x} + \frac{5b^2}{y} - \frac{2a^2b}{x^2y}$, cuando $a = 1$, $b = 2$, $x = 3$ y $y = 4$.

$$\frac{8(1)}{3} + \frac{5(2)^2}{4} - \frac{2(1)^2(2)}{(3)^2(4)} = \frac{8}{3} + 5 - \frac{4}{36} = \frac{96 + 180 - 4}{36} = \frac{272}{36} = 7\frac{5}{9} = 7.555$$

EJERCICIO 2

I. Realiza en tu cuaderno, lo que se indica en cada caso.

1. Escribe cuáles son los signos utilizados en la notación algebraica.
2. Escribe el símbolo de los signos de operación.
3. Escribe el símbolo y significado de los signos de relación.
4. Escribe el símbolo de los signos de agrupación.
5. Define el término expresión algebraica.
6. Escribe qué se entiende por término algebraico.
7. Enuncia el nombre de los elementos que constituyen un término algebraico.
8. Explica el grado absoluto y relativo de un término algebraico.
9. Desarrolla la clasificación de términos algebraicos.
10. Indica la clasificación de las expresiones algebraicas de acuerdo con el número de términos.

II. En equipo realiza las siguientes actividades y comparen sus resultados con el resto del grupo.

1. Escribe cinco expresiones algebraicas diferentes.
2. Dados los siguientes términos, identifica sus elementos.

Término	Signo	Coeficiente	Parte literal	Grado absoluto	Grado relativo
a) $-7x^2$					
b) $5(a^2 + b^2)$					
c) mx					
d) $2ab^2c$					
e) $-3x^2y^3$					
f) $\frac{a}{bx}$					

3. Identifica la clase a que pertenecen los siguientes términos.

a) $2ax$	d) $2ax, 3a^2x, 5ax^2$
b) $\frac{5ab}{c}$	e) $4x^2y, 7xy^2$
c) $\frac{5x}{\sqrt{7y}}$	f) $8xyz, 3xyz, xyz$

4. Dadas las siguientes expresiones algebraicas, identifica los monomios, binomios, trinomios y polinomios.

a) $4x^3y + 2y^2z$	f) $x^2y - xy^2 + xy$
b) $3x - 5x^2 + x^3 - a$	g) $a^2b + 2b^2c + 3c^2 - 10abc$
c) $m^2 + 4mn + 2$	h) $a^2 - x^2$
d) $\frac{-3}{5}x^3$	i) $(a + b)(a - b)$
e) $\frac{a}{b}$	j) $\frac{2x}{y} - \frac{3a}{b} + \frac{yb}{2}$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

5. Identifica el grado absoluto y relativo de los siguientes polinomios.

a) $2x^2 + 4x + 1$

d) $x^2 + y^2 = r^2$

b) $a^2x - ax^2 + a^3$

e) $ax^2y^5 - bx^3y^6 + cx^5y^2$

c) $x^2y^3 + 2xy^2z - 5x^2y^3z$

6. Escribe el grado absoluto y relativo de los siguientes términos.

a) $3b^2c$

c) x^2y^2

b) $-6x^2y$

d) a^3b^2c

7. Evalúa las siguientes expresiones algebraicas.

a) $3x^2 + 5x - 11$

cuando $x = 2$

b) $\frac{3x + 5y}{x - 2}$

cuando $x = 4, y = 2$

c) $\frac{a^2}{2b} + \frac{b^2}{2a}$

cuando $a = 2, b = 1$

d) $(x - 3y)(x - y)$

cuando $x = 3, y = -1$

e) $x^3 - 3x^2 + 5x + 7$

cuando $x = -1$

f) $5xy + 2xy^3 - 8x^2y^2 + 4y^5$

cuando $x = 3, y = -2$

g) $\sqrt{ab} - 2a + b^2$

cuando $a = 9, b = 4$

III. Escribe en el paréntesis de la derecha el número que corresponda a la respuesta correcta, tomándolo de la lista de la izquierda y compara tus resultados con el resto del grupo.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Signos empleados para la suma, resta, multiplicación, división potenciación y radicación.
2. Conjunto de literales y números que conforman una o más operaciones algebraicas.
3. Cuando un término no tiene signo indicado, se considera...
4. Es el primer factor de un término
5. Cuando un término no tiene coeficiente numérico indicado, se considera como coeficiente a la...
6. Número que se obtiene al sumar los exponentes de la parte literal.
7. Es el mayor exponente que tenga una letra considerada.
8. Es aquel que no tiene denominador literal.
9. Es aquel que no está afectado por un radical.
10. Son aquellos que tienen distinto grado absoluto.
11. Son aquellos que tienen la misma parte literal, pero diferente coeficiente.
12. Son aquellos que constan de más de un término.

- | | |
|-----|----------------------|
| () | Unidad |
| () | Binomio |
| () | Término entero |
| () | Grado absoluto |
| () | Términos semejantes |
| () | Término homogéneo |
| () | Polinomio |
| () | Signos de operación |
| () | Coeficiente |
| () | Grado relativo |
| () | Expresión algebraica |
| () | Término heterogéneo |
| () | Término racional |
| () | Positivo |

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

TEMA 2

Operaciones fundamentales

Propósito del tema

Que el estudiante:

- Utilice el lenguaje algebraico para describir y obtener información a partir de monomios y polinomios.
- Reconozca la diferencia entre monomio y polinomio.
- Aprenda a simplificar mediante suma y resta, expresiones que involucren polinomios.
- Aprenda a multiplicar y dividir, expresiones que involucren polinomios.
- Aprenda a desarrollar y factorizar mediante los productos notables.
- Establezca modelos algebraicos para resolver problemas de la vida cotidiana.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

Contenidos que aborda el tema

Contenidos conceptuales

- Concepto de monomio, grado de un monomio, coeficiente de un monomio y término semejante.
- Concepto de simplificar una expresión algebraica.
- Conceptos de suma, resta, multiplicación y división de monomios y polinomios.
- Concepto de cociente, divisor, dividendo y residuo.
- Concepto de factorización.
- Concepto de productos notables.

Contenidos procedimentales

- Identificará diversos tipos de estructuras de expresiones algebraicas.
- Sumará y restará monomios y polinomios.
- Multiplicará y dividirá monomios y polinomios.
- Resolverá problemas que involucren productos notables.
- Completará el trinomio cuadrado perfecto.
- Aprenderá y resolverá problemas haciendo uso de la factorización.

Contenidos actitudinales

- Expresará ideas utilizando la terminología relativa a monomios y mediante el lenguaje algebraico.
- Colaborará en equipo y respetará a sus compañeros al resolver problemas.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.

Operaciones fundamentales

La adición, sustracción, multiplicación y división se llaman operaciones fundamentales del álgebra.

Suma y resta de polinomios

Suma o adición. Operación que consiste en reunir dos o más expresiones algebraicas en una sola.

La adición con polinomios, se realiza sumando solo términos semejantes.

Ejemplos

$$\text{Sumandos} \longrightarrow 3a^2 + 5a^2 + 7a^2 = 15a^2 \longleftarrow \text{Suma}$$

$$2nm + 3mn = 5mn$$

$$4x^3 + 2x^3 + x^3 = 7x^3$$

$$ax^2 + 2ax^2 + 3ax^2 = 6ax^2$$

En aritmética se suman los números positivos, en álgebra la suma puede ser con cantidades positivas y negativas, proceso que se denomina **suma** o **adición algebraica**.

Al realizar sumas algebraicas de términos semejantes, se recomienda, primero sumar todos los términos positivos; después sumar todos los términos negativos y al final calcular la diferencia de los dos resultados obtenidos. Si existen términos no semejantes, la operación queda indicada.

Ejemplos

$$6x - 7y + 3x - 4y + 8y + x = 6x + 3x + x + 8y - 7y - 4y = 10x - 3y$$

$$\begin{aligned} 5a + 2b + 6c - 3a + b - 2c + 4a - 5b + c &= 5a + 4a - 3a + 2b + b - 5b + 6c + c - 2c \\ &= 9a - 3a + 3b - 5b + 7c - 2c = 6a - 2b + 5c \end{aligned}$$

$$3ax + 5bx = 3ax + 5bx$$

$$2m + 3 = 2m + 3$$

En la suma de polinomios, en forma práctica se colocan verticalmente los términos semejantes, es decir, en forma de columna, al igual que en la aritmética, para facilitar la operación.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 •• Al sumar las expresiones: $3a^2 + 5b + 2a^2 - 3ab + 4b + 7ab - b$, se acomodan los términos semejantes, es decir:

$$3a^2 - 3ab + 5b$$

$$2a^2 + 7ab + 4b$$

$$- b$$

$$5a^2 + 4ab + 8b$$

$$5a^2 + 4ab + 8b$$

- 2 ●●● Al sumar las expresiones: $5x^3y - 6x^2y^2 + 7xy^3 - 2x^3y - 3xy^3 + x^2y^2 + 3x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3$, se acomodan los términos semejantes, es decir:

$$\begin{array}{r} 5x^3y - 6x^2y^2 + 7xy^3 \\ -2x^3y + x^2y^2 - 3xy^3 \\ 3x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 \\ \hline 6x^3y - x^2y^2 + 2xy^3 \end{array}$$

- 3 ●●● Al sumar las expresiones: $\frac{1}{2}a^2x - \frac{5}{8}b^2y + xy + \frac{3}{2}a^2x + \frac{3}{4}b^2y - \frac{2}{7}xy$, se acomodan los términos semejantes, es decir:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a^2x - \frac{5}{8}b^2y + xy \\ \frac{3}{2}a^2x + \frac{3}{4}b^2y - \frac{2}{7}xy \\ \hline 2a^2x + \frac{1}{8}b^2y + \frac{5}{7}xy \end{array}$$

Resta o sustracción. Restar una cantidad m de otra cantidad ℓ , significa determinar la cantidad r tal que sumada la cantidad m de como resultado ℓ . Es decir,

$$\ell - m = r \quad \text{ya que} \quad r + m = \ell$$

La sustracción con polinomios, se realiza utilizando términos semejantes.

En aritmética la resta indica **disminución**, en álgebra puede indicar **aumento** o **disminución**. Para restar polinomios, es necesario restar del **minuendo** cada uno de los términos del **sustraendo**, cambiándole el signo a todos sus términos.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 ●●● Resta $7x - 4y + 2z$ de $11x + 9y - 5z$

$$\begin{array}{r} \text{Minuendo} \longrightarrow 11x + 9y - 5z \\ \text{Sustraendo} \longrightarrow -(7x - 4y + 2z) \\ \hline 4x + 13y - 7z \longleftarrow \text{Resultado} \end{array}$$

- 2 ●●● Resta $15a + 7ac - 8bc + 4$ de $11a - 6bc + 3ac - 1$

$$\begin{array}{r} 11a + 3ac - 6bc - 1 \\ -(15a + 7ac - 8bc + 4) \\ \hline -4a - 4ac + 2bc - 5 \end{array}$$

- 3 ●●● Resta $\frac{3}{5}xy + \frac{1}{4}xz - \frac{2}{3}yz$ de $\frac{1}{5}xy + \frac{3}{4}xz + \frac{4}{9}yz$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{5}xy + \frac{3}{4}xz + \frac{4}{9}yz \\ - \left(\frac{3}{5}xy + \frac{1}{4}xz - \frac{2}{3}yz \right) \\ \hline -\frac{2}{5}xy + \frac{1}{2}xz + \frac{10}{9}yz \end{array}$$

Reducción de términos semejantes, eliminando signos de agrupación

La reducción de términos semejantes es un proceso de simplificación de dos o más términos en uno solo, que represente la expresión algebraica dada.

A veces es necesario representar una expresión de dos o más términos en una sola cantidad, para ello se emplean los signos de agrupación, los cuales permiten **encerrar** en un todo los términos dados y representar las operaciones de un modo fácil y claro.

Los signos de agrupación indican que algunas operaciones se deben realizar antes que otras. Para agregar o eliminar signos de agrupación, es necesario tener presente las siguientes reglas:

1. Los signos de agrupación precedidos del signo $+$ pueden agregarse en una expresión o eliminarse de una expresión sin cambiar los signos de la misma.
2. Los signos de agrupación precedidos del signo $-$ pueden agregarse en una expresión o eliminarse de una expresión cambiando los signos de los términos de la expresión. Por lo general, uno o más signos de agrupación están contenidos unos en otros, por lo que se recomienda comenzar a eliminar los signos interiores.

EJEMPLOS

Ejemplos

Elimina los símbolos de agrupación y simplifica las siguientes expresiones por reducción de términos semejantes.

$$\begin{aligned} a) \quad \{8x - [5x - (-x + y) + 7y] + 2y\} &= \{8x - [5x + x - y + 7y] + 2y\} \\ &= \{8x - 5x - x + y - 7y + 2y\} \\ &= 8x - 6x + 3y - 7y = 2x - 4y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad -\{x + [2y + 3 - (x + 5y - 1) + 4 - 6x] + 3y - 7\} + 3x \\ &= -\{x + [2y + 3 - x - 5y + 1 + 4 - 6x] + 3y - 7\} + 3x \\ &= -\{x + 2y + 3 - x - 5y + 1 + 4 - 6x + 3y - 7\} + 3x \\ &= -x - 2y - 3 + x + 5y - 1 - 4 + 6x - 3y + 7 + 3x = 9x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad -\{5x - y - [3y - (z - 2y + x) - 4x] + z\} \\ &= -\{5x - y - [3y - z + 2y - x - 4x] + z\} \\ &= -\{5x - y - 3y + z - 2y + x + 4x + z\} \\ &= -5x + y + 3y - z + 2y - x - 4x - z = -10x + 6y - 2z \end{aligned}$$

Productos y cocientes de polinomios

Ordenación de un polinomio. Un polinomio se ordena con respecto al exponente de una literal en forma ascendente y descendente.

Ejemplos

$$\begin{aligned} 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 9 &\longleftarrow \text{Ordenación descendente con respecto al exponente de } x \\ 2a + 5a^2 - 8a^3 + a^4 &\longleftarrow \text{Ordenación ascendente con respecto al exponente de } a \end{aligned}$$

Multiplicación o producto. Operación en la que dos expresiones denominadas **multiplicando** y **multiplicador** dan como resultado un **producto**. Al multiplicando y multiplicador se les denomina **factores**.

La multiplicación se regula por las siguientes leyes:

Conmutativa

El orden de los factores no altera el producto.

$$(a)(b)(c) = (b)(a)(c) = (c)(b)(a) = abc$$

Asociativa

Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo.

$$a(bc) = b(ac) = c(ab) = abc$$

Distributiva

El producto de un factor por una suma es igual a la suma de los productos del factor con cada uno de los sumandos.

$$a(b + c) = ab + ac$$

La multiplicación también se regula por las leyes de los signos:

$$\begin{array}{ll} (+)(+) = + & (-)(-) = + \\ (+)(-) = - & (-)(+) = - \end{array}$$

En la multiplicación se aplica la siguiente ley de los exponentes: **cuando cantidades iguales o de la misma base, se multiplican, los exponentes se suman.** Es decir:

$$(a^x)(a^y) = a^{x+y}$$

Ejemplos

$$\begin{aligned} (5x^2y)(-2xy) &= -10x^3y^2 \\ (ax)(3a^2y)(2xy^2) &= 6a^3x^2y^3 \\ (m^2)(5mn) &= 5m^3n \end{aligned}$$

Multiplicación de monomios

Operación que se fundamenta en el producto de los coeficientes, las leyes de los signos y la ley de los exponentes, en los monomios que intervienen.

Ejemplos

1. Multiplica $3x^3$ por $4x^2$: $(3x^3)(4x^2) = 12x^5$
2. Multiplica $5ax^2$ por $-2x$: $(5ax^2)(-2x) = -10ax^3$
3. Multiplica $-x^2y$ por $3xz^2$: $(-x^2y)(3xz^2) = -3x^3yz^2$
4. Multiplica $-7a^2b^3c$ por $-2a^2bc^3$: $(-7a^2b^3c)(-2a^2bc^3) = 14a^4b^4c^4$

Multiplicación de monomios por polinomios

Operación que se fundamenta en las leyes de los signos, de los exponentes, de los coeficientes y además en la ley distributiva, que establece, multiplicar el monomio por cada término del polinomio.

Ejemplos

1. Multiplica ax por $x^2 - 2xy + y^2$:

$$ax(x^2 - 2xy + y^2) = ax^3 - 2ax^2y + axy^2$$

2. Multiplica $-3xy^2$ por $2x^2y - 7x - 2y + 5$:

$$-3xy^2(2x^2y - 7x - 2y + 5) = -6x^3y^3 + 21x^2y^2 + 6xy^3 - 15xy^2$$

3. Multiplica $a^2 + 5a + 6$ por $-2ab^2$:

$$(a^2 + 5a + 6)(-2ab^2) = -2a^3b^2 - 10a^2b^2 - 12ab^2$$

4. Multiplica $m^3 - 2mn + 3mn^2$ por m^2n^2 :

$$(m^3 - 2mn + 3mn^2)(m^2n^2) = m^5n^2 - 2m^3n^3 + 3m^3n^4$$

Multiplicación de polinomios

La multiplicación de dos polinomios es igual a la suma de los resultados obtenidos de multiplicar cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio.

Ejemplos

1. Multiplica $(x + y)$ por $(u - v)$:

$$(x + y)(u - v) = ux - vx + uy - vy$$

2. Multiplica $(m^2 + n^2)$ por $(4x^2 - 3x + 1)$:

$$(m^2 + n^2)(4x^2 - 3x + 1) = 4m^2x^2 - 3m^2x + m^2 + 4n^2x^2 - 3n^2x + n^2$$

3. Multiplica $(x^2 + 3x + 5)$ por $(x - 4)$:

$$(x^2 + 3x + 5)(x - 4) = x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 12x + 5x - 20 = x^3 - x^2 - 7x - 20$$

División o cociente

Operación en la que dos expresiones denominadas **dividendo** y **divisor** dan como resultado un **cociente**.

La división se regula por las siguientes leyes de los signos:

$$\begin{array}{ll} (+) \div (+) = + & (-) \div (-) = + \\ (+) \div (-) = - & (-) \div (+) = - \end{array}$$

En la división también se aplica la siguiente ley de los exponentes: **cuando cantidades iguales o de la misma base se dividen, los exponentes se restan**. Es decir,

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (\text{Cuando } x > y)$$

Ejemplos

1. $\frac{a^3}{a} = a^{3-1} = a^2$

2. $\frac{x^6}{x^3} = x^{6-3} = x^3$

3. $\frac{y^2}{y^2} = y^{2-2} = y^0 = 1$

4. $\frac{m^4}{m^3} = m^{4-3} = m$

División de monomios

Operación que se fundamenta en la división de los coeficientes, las leyes de los signos y la ley de los exponentes, en los monomios que intervienen.

Ejemplos

1. Divide $6x^3$ entre $2x$:

$$\frac{6x^3}{2x} = 3x^{3-1} = 3x^2$$

2. Divide $5ax^4$ entre $-3ax^2$:

$$\frac{5ax^4}{-3ax^2} = -\frac{5}{3}a^{1-1}x^{4-2} = -\frac{5}{3}a^0x^2 = -\frac{5}{3}x^2$$

3. Divide $-4a^2b^5$ entre $-16ab^3$:

$$\frac{-4a^2b^5}{-16ab^3} = \frac{a^{2-1}b^{5-3}}{4} = \frac{ab^2}{4}$$

División de un polinomio entre un monomio

Operación que se fundamenta en las leyes de los signos, de los exponentes, de los coeficientes y en la ley distributiva, que establece, la división de cada término del polinomio entre el monomio.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 ••• Divide $a^2b - 2ab^2 + 4a$ entre a :

$$\frac{a^2b - 2ab^2 + 4a}{a} = \frac{a^2b}{a} - \frac{2ab^2}{a} + \frac{4a}{a} = ab - 2b^2 + 4$$

Esta operación también se puede realizar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} \text{Divisor} \rightarrow a \overline{) \begin{array}{l} ab - 2b^2 + 4 \\ \underline{-a^2b} \\ -2ab^2 + 4a \\ \underline{+2ab^2} \\ 4a \\ \underline{-4a} \\ 0 \end{array}} \end{array}$$

Cociente $\leftarrow ab - 2b^2 + 4$
Dividendo $\leftarrow a^2b - 2ab^2 + 4a$
Residuo $\leftarrow 0$

- 2 ••• Divide $4x^3 - 12x^2 - 8x + 2$ entre $-2x$:

$$\frac{4x^3 - 12x^2 - 8x + 2}{-2x} = \frac{4x^3}{-2x} - \frac{12x^2}{-2x} - \frac{8x}{-2x} + \frac{2}{-2x} = -2x^2 + 6x + 4 - \frac{1}{x}$$

También se puede resolver de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 6x + 4 - \frac{1}{x} \\ -2x \overline{) \begin{array}{l} 4x^3 - 12x^2 - 8x + 2 \\ \underline{-4x^3} \\ -12x^2 - 8x + 2 \\ \underline{+12x^2} \\ -8x + 2 \\ \underline{-8x} \\ 2 \\ \underline{-2} \\ 0 \end{array}} \end{array}$$

División de polinomios

Con base en los ejemplos anteriores, se observa que la división de polinomios tiene un proceso de solución semejante al de la división aritmética. Es necesario ordenar el dividendo y el divisor en forma descendente (de mayor a menor) con respecto al exponente de una de las literales. El procedimiento general es:

1. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, obteniéndose el primer término del cociente, el cual se multiplica por el divisor y cuyo producto se escribe cambiando de signo bajo los términos semejantes del dividendo.
2. Se eliminan los términos semejantes para dar lugar al nuevo dividendo, se escoge el primer término del nuevo dividendo y se divide entre el primer término del divisor, obteniéndose el segundo término del cociente, el cual se multiplica por el divisor y su producto se escribe cambiando de signo bajo los términos semejantes del dividendo.
3. Se eliminan los términos semejantes para dar lugar a un nuevo dividendo.
4. Se repiten las operaciones anteriores sucesivamente hasta que el residuo sea cero.

Ejemplo

Divide $a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ entre $a^2 + a + 2$.

$$\begin{array}{r}
 a + 4 \\
 a^2 + a + 2 \overline{) a^3 + 5a^2 + 6a + 8} \\
 \underline{-a^3 - a^2 - 2a} \\
 4a^2 + 4a + 8 \\
 \underline{-4a^2 - 4a - 8} \\
 0
 \end{array}$$

Cuando el residuo no sea cero, el resultado se escribe igual forma que en aritmética cuando la división no es exacta. Los problemas de división se comprueban con base en la siguiente relación:

$$\text{Dividendo} = (\text{Cociente})(\text{Divisor}) + \text{Residuo}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{r}
 x + 3 \\
 x^2 + 2x - 1 \overline{) x^3 + 5x^2 + 9x - 2} \\
 \underline{-x^3 - 2x^2 + x} \\
 3x^2 + 10x - 2 \\
 \underline{-3x^2 - 6x + 3} \\
 4x + 1
 \end{array}
 \qquad
 x + 3 + \frac{4x + 1}{x^2 + 2x - 1}$$

Comprobación

$$\text{Dividendo} = (\text{Cociente})(\text{Divisor}) + \text{Residuo}$$

$$x^3 + 5x^2 + 9x - 2 = (x + 3)(x^2 + 2x - 1) + 4x + 1$$

$$x^3 + 5x^2 + 9x - 2 = x^3 + 2x^2 - x + 3x^2 + 6x - 3 + 4x + 1$$

$$x^3 + 5x^2 + 9x - 2 = x^3 + 5x^2 + 9x - 2$$

EJERCICIO 3

I. Resuelve las siguientes sumas:

1. $12ac - 8ac + 3ac$
2. $2mn + 6mn - 5mn$
3. $-3xy + 7xy - xy + 2xy$
4. $15ax^2 + 2y - 3ax^2 + y + 2 - 8ax^2 - 5y$
5. $11a - 7b + 4c - 3b + 6c - 5a + 4b - 8c - a + 2c$
6. $13m - n + 4 - 10m + 5n - 7 + 8n - 3$
7. $6x + 5y - 5z + 6y + 3z - 2x - 4y + x + 7z - y$
8. $3xy + 9x - 4ax + 10a - 7x + 8xy - 3a + 12ax$
9. $7x - 6y + z + 4y - 3z + 9x - 6z + 3y + 5z - 2x$
10. $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}a + \frac{5}{6}x + \frac{3}{8}a - \frac{7}{12}x$
11. $\frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{7}xy + y^2 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}xy - \frac{1}{3}y^2$
12. $\frac{4}{9}mn + \frac{11}{18}m^2 + \frac{5}{12}n^2 - \frac{7}{6}m^2 + \frac{4}{3}mn - \frac{9}{4}n^2$
13. $\frac{1}{8}x^2y - \frac{5}{13}y^2 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{3}{7}x + \frac{6}{5}y^2$
14. $3x - \frac{2}{5}z - 1 + \frac{4}{7}x + \frac{3}{10}z - \frac{4}{3}$
15. $\frac{17}{9}m^2n^2 - \frac{1}{4}m + \frac{5}{17}n - \frac{11}{6}m^2n^2 - \frac{2}{17}n + \frac{7}{4}m$

II. En equipo, resuelvan las siguientes sustracciones y comparen sus resultados con el resto del grupo.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\begin{array}{r} 3x - 2y + 16 \\ -x - 5y - 9 \end{array}$
2. $\begin{array}{r} 11ax - 7ay + 4 \\ -4ax + 8ay - 3 \end{array}$
3. $\begin{array}{r} 2x + 8y + z \\ -5x - 3y + 2z \end{array}$
4. $\begin{array}{r} 7x^2 + 10xy - 9y^2 \\ 2x^2 - 6xy + 4y^2 \end{array}$
5. $\begin{array}{r} 2a^2b + 5ab^2 - 7ab \\ -6a^2b - 4ab^2 - ab \end{array}$
6. $\begin{array}{r} 9ax^2 + 15bx - 16ab \\ -8ax^2 - 10bx + 3ab \end{array}$
7. Resta $6x - 7y + 5z + 7$ de $10x - 17y + 2z - 5$
8. Resta $15ax + 12by - 10c$ de $17ax - 7by - 4c$
9. Resta $5m^2 - 8mn - n^2$ de $7m^2 + 5mn + 6n^2$
10. Resta $-2x^2 - 5x + 7$ de $-1 + 6x^2 - 7x$
11. Resta $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{7}z$ de $\frac{5}{2}x - \frac{3}{8}y + \frac{2}{7}z$
12. $\begin{array}{r} \frac{1}{6}a^2b - \frac{3}{2}cd - 2h \\ -\frac{2}{3}a^2b + \frac{1}{4}cd + \frac{5}{3}h \end{array}$
13. $\begin{array}{r} \frac{5}{8}m + \frac{7}{9}n + 1 \\ -\frac{3}{4}m - \frac{4}{6}n - \frac{6}{5} \end{array}$
14. $\begin{array}{r} \frac{2}{5}x - 5y + \frac{7}{3}z \\ -\frac{8}{10}x + \frac{4}{7}y - 5z \end{array}$

III. Elimina los símbolos de agrupación y simplifica las expresiones por reducción de términos semejantes.

1. $5y + 2x - (y + 5x + z) + (-2x + 3y) + 7z$
2. $8a - [4b - 11c + 2 - (3b + 2c - 7) + 3a]$
3. $-[5 - (6xy - z) + 2xy + 7z + 3] + 5xy$
4. $-(4x - 3y + 2) - [y + (1 - x) + 2y + 3]$
5. $\{7 - [-8y + 3x - (-x - 10y + 3) - 7x + 2 - 3y]\}$
6. $-[x - 5y - [2z - (7x - y + 5) + 6z] - 3y] + 2$
7. $5a - \{3b - 8c - [a + 2c + 6b - (b - c) - 3a] - 5c\}$
8. $-[4m - [n - 6 - (2m - 4n + 2) + 7n] - 3m]$

IV. Resuelve las siguientes multiplicaciones, debate el procedimiento de solución con el resto del grupo.

1. $(x^2y)(-2xy)$
2. $(5mn)(m^2n)$
3. $(-3ab^2)(-a^2b^3)$
4. $(xy)(8x^2)(2xy)$
5. $(a^2b)(-2ab)(-7b^2)$
6. $ab(b^2 - a^2)$
7. $-3xy^2(2x - 1)$
8. $2mn(2m - 3n - 4mn + 1)$
9. $5a^2(-4x + 3xy + y)$
10. $-b^2c(a^3 - 2ab + 3bc^3)$
11. $(y + 2x)(x^2 + xy - y^2)$
12. $(x^2 - 2x + 4)(3x^2 - 5x - 2)$
13. $(3x^2y - 6xy^2 + 12x)(-6x^2 + 3x + 1)$
14. $(a - 7b)(a^2 + 4ab + 2b^2)$
15. $(2x + 1)(3 - x)(x + 5)$
16. $(m^2 - 4m + 5)(9m^2 + 3m - 1)$
17. $(x + z - 2y)(2z + y + 3x)$
18. $(2 - x - y + z)(6x - 5y - 3z + 4)$

V. Resuelve las siguientes divisiones y compara tus resultados con el resto del grupo.

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{2a^5x^3}{8a^8x^2}$ 2. $\frac{24a^2b^4}{6ab^2}$ 3. $\frac{10m^2n}{5n}$ 4. $\frac{15a^2x^3}{3ax}$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\frac{32x^2y}{8x^4y^3}$ 6. $\frac{21x^3}{7x}$ 7. $\frac{x^4 - 3x^2 - 2x^2}{-2x^2}$ 8. $\frac{4x^3 - 10x + 20}{2x + 3}$ |
|--|---|

9. $\frac{x^3 + 10x^2 + 12x}{x^2 + 4}$
10. $\frac{y^5 + 2y^4 - 5y^3 + 1}{y + 1}$
11. $\frac{24x^3 - 12y^2 - 24x}{4y}$
12. $\frac{a^5 + a^4 + a^3 + 3a^2 + 10a + 6}{a^2 + a + 2}$
13. $\frac{2m^5 - 6m^4 + 7m^3 + 5m^2 - 11m + 4}{m^2 - 3m + 1}$
14. $\frac{2ax^5 - 5ax^4 + 6ax^3 + 4ax^2 - 11ax + 4a}{2x^2 - 3x + 1}$
15. $\frac{6x^4 - 19x^3 + 16x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 1}$

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Productos notables

Son ciertos productos que se efectúan directamente, basándose en reglas notables que al memorizar su aplicación, permiten llegar al resultado sin necesidad de realizar la multiplicación. A continuación se analizan los principales productos notables.

El producto de la suma y la diferencia de dos números. Si se tiene la suma de dos términos multiplicados por su diferencia, resulta:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & -n^2 & \\
 & \downarrow & \\
 \begin{array}{|c|} \hline mn \\ \hline \end{array} & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (m + n)(m - n) & = & m^2 - mn + mn - n^2 = m^2 - n^2 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \begin{array}{|c|} \hline m^2 \\ \hline \end{array} & & \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 & -mn &
 \end{array}
 \end{array}$$

De lo anterior, se concluye en la siguiente regla:

El producto de la suma y la diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.

Esta operación, también se denomina **producto de binomios conjugados**, porque dos términos de éstos son iguales y los otros son simétricos.

Ejemplo

$$\begin{array}{c}
 \text{Términos simétricos} \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 (2x + y)(2x - y) = 4x^2 - y^2 \\
 \uparrow \quad \uparrow \\
 \text{Términos iguales}
 \end{array}$$

El cuadrado de un binomio. Elevar al cuadrado el binomio $(m + n)$ o $(m - n)$, equivale a multiplicarlo por sí mismo, es decir:

$$a) (m + n)^2 = (m + n)(m + n) = m^2 + 2mn + n^2$$

$$b) (m - n)^2 = (m - n)(m - n) = m^2 - 2mn + n^2$$

De lo anterior, se concluyen las siguientes reglas:

Al desarrollar el cuadrado de un binomio, se obtiene como resultado un **trinomio**, cuyos términos se determinan de acuerdo con los siguientes pasos:

1. El cuadrado del primer término del binomio.
2. El doble producto del primer término por el segundo término.
3. El cuadrado del segundo término del binomio.

Ejemplos

$$\left. \begin{aligned} (xy + 2z)^2 &= x^2y^2 + 4xyz + 4z^2 \\ (4 - 3x)^2 &= 16 - 24x + 9x^2 \\ (5ax - by)^2 &= 25a^2x^2 - 10abxy + b^2y^2 \\ (6 + 3ab)^2 &= 36 + 36ab + 9a^2b^2 \end{aligned} \right\} \text{ A estos resultados se les denomina trinomios de cuadrado perfecto.}$$

El cuadrado de un polinomio. Elevar al cuadrado un polinomio, equivale a multiplicarlo por sí mismo, es decir:

$$a) (k + \ell + m)^2 = (k + \ell + m)(k + \ell + m) = k^2 + k\ell + km + k\ell + \ell^2 + \ell m + km + \ell m + m^2 \\ = k^2 + \ell^2 + m^2 + 2k\ell + 2km + 2\ell m$$

$$b) (p - q + r - s)^2 = (p - q + r - s)(p - q + r - s) \\ = p^2 - pq + pr - ps - pq + q^2 - qr + qs + pr - qr + r^2 - rs - ps + qs - rs + s^2 \\ = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 - 2pq + 2pr - 2ps - 2qr + 2qs - 2rs$$

De lo anterior, se concluye en la siguiente regla:

Elevar al cuadrado un polinomio, tiene como resultado, la suma de los cuadrados de cada término del polinomio, más el doble producto de todos los términos tomados de dos en dos.

Ejemplos

$$(a + 2b - 3c)^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab - 6ac - 12bc$$

$$(2x - 3y - 5z)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 20xz + 30yz$$

$$(u - v + w + 1)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 1 - 2uv + 2uw + 2u - 2vw - 2v + 2w$$

El producto de dos binomios con términos semejantes. Dentro de este tipo de productos de binomios, se tienen dos productos principales.

Producto de binomios con término común

Presenta la siguiente forma $(a + x)(a + y)$ o $(2 + m)(5 + m)$, cuyo producto es:

$$(a + x)(a + y) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline xy \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline ax \quad y \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline a^2 \quad x \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline ay \\ \hline \end{array} \end{array} = a^2 + ax + ay + xy = a^2 + (x + y)a + xy$$

Término común: a

Términos no comunes: x y y

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & m^2 & \\
 & \downarrow & \\
 & 5m & \\
 & \downarrow & \\
 (2 + m)(5 + m) & = & 10 + 2m + 5m + m^2 = 10 + 7m + m^2 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 10 & & 2m
 \end{array}
 \end{array}$$

Término común: m

Términos no comunes: 2 y 3

De lo anterior se concluye la siguiente regla:

Al desarrollar el producto de dos binomios con término común, es igual al cuadrado del término común, más el producto de la suma algebraica de los términos no comunes por el término común, más el producto de los términos no comunes.

Ejemplos

$$(x + 6)(x - 3) = x^2 + 3x - 18$$

$$(a - 2)(a - 5) = a^2 - 7a + 10$$

$$(3 - k)(8 - k) = 24 - 11k + k^2$$

$$(-7 + yz)(3 + yz) = -21 - 4yz + y^2z^2$$

$$(3ax + 1)(3ax + 4) = 9a^2x^2 + 15ax + 4$$

$$(4 - x^2y)(6 - x^2y) = 24 - 10x^2y + x^4y^2$$

Producto de binomios con términos semejantes

Presenta la siguiente forma $(ax + by)(mx + ny)$, cuyo producto es:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & bny^2 & \\
 & \downarrow & \\
 & bmxxy & \\
 & \downarrow & \\
 (ax + by)(mx + ny) & = & amx^2 + anxy + bmxxy + bny^2 = amx^2 + (an + bm)xy + bny^2 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 amx^2 & & anxy
 \end{array}
 \end{array}$$

De lo anterior se concluye las siguientes reglas:

Al desarrollar el producto de binomios con términos semejantes, se obtiene como resultado un **trinomio**, cuyos términos se determinan de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Se multiplican los primeros términos de los binomios dados.
2. Se multiplican los términos extremos y los términos interiores de los binomios dados; por reducción de términos semejantes, obtenemos el resultado.
3. Se multiplican los segundos términos de los binomios dados.

Ejemplos

$$(3x - 4y)(2x - y) = 6x^2 - 11xy + 4y^2$$

$$(2a + 5b)(a - 3b) = 2a^2 - ab - 15b^2$$

$$(7m - 2n)(3m + 4n) = 21m^2 + 22mn - 8n^2$$

$$(3 + 4xy)(2 + 3xy) = 6 + 17xy + 12x^2y^2$$

A estos resultados se les denomina trinomios que no son cuadrados perfectos.

El cubo de un binomio. Elevar al cubo el binomio $(m + n)$ o $(m - n)$, equivale a multiplicarlo por sí mismo tres veces, es decir:

$$\begin{aligned} a) \quad (m + n)^3 &= (m + n)^2 (m + n) = (m + n)(m + n)(m + n) = (m^2 + 2mn + n^2)(m + n) \\ &= m^3 + m^2n + 2m^2n + 2mn^2 + mn^2 + n^3 \\ &= m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 \\ b) \quad (m - n)^3 &= (m - n)^2 (m - n) = (m - n)(m - n)(m - n) = (m^2 - 2mn + n^2)(m - n) \\ &= m^3 - m^2n - 2m^2n + 2mn^2 + mn^2 - n^3 \\ &= m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3 \end{aligned}$$

De lo anterior, se concluyen las siguientes reglas:

Al desarrollar el cubo de un binomio, se obtiene como resultado un **polinomio de cuatro términos**, cuyos términos se determinan de acuerdo con los siguientes pasos:

1. El cubo del primer término del binomio.
2. El triple producto del cuadrado del primer término por el segundo término.
3. El triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término.
4. El cubo del segundo término del binomio.

Ejemplos

$$\begin{aligned} (a - 1)^3 &= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \\ (x^2 - 5y)^3 &= x^6 - 15x^4y + 75x^2y^2 - 125y^3 \\ (2a + 3)^3 &= 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27 \\ (-m^2 - n^2)^3 &= -m^6 - 3m^4n^2 - 3m^2n^4 - n^6 \\ (a^3 + b^3)^3 &= a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9 \end{aligned}$$

EJERCICIO 4

- I. Realiza en tu cuaderno, lo que se indica en cada caso.
 1. Escribe la regla para el producto de la suma y la diferencia de dos términos.
 2. Escribe las reglas para el cuadrado de un binomio.
 3. Escribe la regla para el cuadrado de un polinomio.
 4. Escribe la regla para el producto de binomios con término común.
 5. Escribe las reglas para el producto de binomios con términos semejantes.
 6. Escribe las reglas para el cubo de un binomio.
 7. ¿Qué es un binomio conjugado?
 8. ¿Qué es un trinomio de cuadrado perfecto?
- II. Resuelve las siguientes operaciones.
 1. Resuelve los siguientes productos de la suma y la diferencia de dos términos.

$a) (x + 5)(x - 5)$
 $b) (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

$c) (3x + 2y)(3x - 2y)$
 $d) (6m^2 + n^2)(6m^2 - n^2)$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares



- e) $(7xy + z^2)(7xy - z^2)$
 f) $(5a^2b + 2c)(5a^2b - 2c)$
 g) $(4pq + 3r)(4pq - 3r)$
 h) $(9m^2n + 2xy^2)(9m^2n - 2xy^2)$
 i) $\left(\frac{1}{3}ab + \frac{3}{4}c\right)\left(\frac{1}{3}ab - \frac{3}{4}c\right)$
 j) $\left(\frac{3}{5} + \frac{5}{6}x\right)\left(\frac{3}{5} - \frac{5}{6}x\right)$
 k) $\left(\frac{11}{3}m + \frac{5}{8}n\right)\left(\frac{11}{3}m - \frac{5}{8}n\right)$
- l) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$
 m) $\left(\frac{u}{v} - w\right)\left(\frac{u}{v} + w\right)$
 n) $\left(2x - \frac{3y}{z}\right)\left(2x + \frac{3y}{z}\right)$
 ñ) $(8ab - cd)(8ab + cd)$
 o) $(11pq - rs)(11pq + rs)$
2. Desarrolla el cuadrado de los siguientes binomios y compara los resultados con el resto del grupo.
- a) $(7x + 5yz)^2$
 b) $(2ab + 3c)^2$
 c) $(4mn + 8)^2$
 d) $(x^2y - 3z)^2$
 e) $(2u^2 - 6w)^2$
 f) $(5a^2x - 3b^2y)^2$
 g) $(3ab - cd)^2$
 h) $(6xy - 1)^2$
 i) $(3m^2n + 2xy)^2$
 j) $(x^2y + 1)^2$
- k) $\left(\frac{4}{3}a - \frac{2}{5}x\right)^2$
 l) $\left(m^2 + \frac{3}{2}\right)^2$
 m) $\left(\frac{1}{2}x + y^2\right)^2$
 n) $\left(\frac{2a}{x} - \frac{bc}{y}\right)^2$
 ñ) $(1 - x)^2$
 o) $(b - 3c)^2$
 p) $(3p + 7q)^2$
 q) $(-2x^2 - 6y^2)^2$
3. Con ayuda de tu profesor desarrolla el cuadrado de los siguientes polinomios.
- a) $(a^2b - mn^2 + x^2y^2)^2$
 b) $(3m + 2q + z)^2$
 c) $(4x^2 - 3x - 1)^2$
 d) $(5a + 7b - 3c)^2$
 e) $(9 - 3xy + 6z)^2$
- f) $(2a - 4b + 3c - d)^2$
 g) $(3x + y - z + 1)^2$
 h) $(q + n^2 + mn + m^2)^2$
 i) $(4a^2 + 2bc - 5d^2 - 3)^2$
 j) $(x + 6y + z + 2)^2$
4. Resuelve los siguientes productos de, binomios con término común.
- a) $(2x + 3)(2x + 7)$
 b) $(5ax + 2)(5ax + 4)$
 c) $(3mn - 6)(3mn - 2)$
 d) $(5 - x^2y)(7 - x^2y)$
 e) $(4b + 3)(4b - 5)$
- f) $(11 + pq)(3 + pq)$
 g) $(5mx - 2)(5mx - 3)$
 h) $(ab + 8)(ab - 4)$
 i) $(-3 + ay)(1 + ay)$
 j) $(x^2 - y)(x^2 + 5z)$

5. Resuelve los siguientes productos de binomios con términos semejantes.

a) $(3x - 4yz)(2x - 2yz)$

b) $(5a^2 - 3bc)(7a^2 + 4bc)$

c) $(x^2 + 6y)(2x^2 + 7y)$

d) $(-x - 4z)(3x - z)$

e) $(2a - b)(6a + 3b)$

f) $(3x + 5y)(x - y)$

g) $(a^2 - x^2)(7a^2 + 2x^2)$

h) $(mn + 7)(2mn + 5)$

i) $(2xy - 5z)(11xy + 7z)$

j) $(8p + 3q)(2p + 5q)$

k) $(4a - 7b)(13a + 2b)$

l) $(x - 3)(5x + 2)$

6. Desarrolla el cubo de los siguientes binomios.

a) $(1 - x)^3$

b) $(x + 3)^3$

c) $(3x - 2y)^3$

d) $(ab + c)^3$

e) $(2mn - 4)^3$

f) $(x - 5)^3$

g) $(4a + 6)^3$

h) $(-x - y)^3$

i) $(3 - a^2)^3$

j) $(bc + 4a^2)^3$

k) $(m^3 - n^3)^3$

l) $(u^2 + w^2)^3$

m) $(6a^2 + 2b^2c)^3$

n) $(3xy - 4ab)^3$

ñ) $(x^2 - ay)^3$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

III. En pareja presenten en plenaria lo que se indica a continuación.

1. Representación geométrica del desarrollo de un binomio al cuadrado.

2. Representación geométrica del desarrollo del producto de la suma y la diferencia de dos términos.

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Factorización

Definición

La factorización es un proceso contrario a la multiplicación, es decir, es el proceso en el cual un producto se descomponer en factores.

Ejemplo

$$\begin{array}{rcl}
 & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \text{Factorización} \\
 24 = (2)(2)(2)(3) & \left. \vphantom{\begin{array}{l} 24 = (2)(2)(2)(3) \\ 24 = (4)(3)(2) \\ 24 = (6)(4) \\ 24 = (8)(3) \\ 24 = (12)(2) \end{array}} \right\} & \text{Factores} \\
 24 = (4)(3)(2) & & \\
 24 = (6)(4) & & \\
 24 = (8)(3) & & \\
 24 = (12)(2) & & \\
 \xleftarrow{\hspace{1cm}} & \text{Multiplicación} &
 \end{array}$$

Factor

Es cada uno de los elementos que al multiplicarse entre sí dan lugar a un producto.

Factores de un monomio

Se determinan al descomponer el monomio en factores más simples.

Ejemplos

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad 12xy = (3)(4)(x)(y) \\ \quad \quad 12xy = (2)(6)(x)(y) \end{array} \right\} \text{ Factores del monomio}$$

$$b) \quad 6a^2 = (2)(3)(a)(a)$$

$$c) \quad 15a^2b^3c = (3)(5)(a)(a)(b)(b)(b)(c)$$

Factores de un polinomio

Factorizar un polinomio, significa, transformar una suma algebraica en un producto de factores.

Ejemplos

$$a) \quad \text{Factoriza } ax + ay$$

$$ax + ay = a(x + y) \quad \text{Son factores } a \text{ y } (x + y).$$

$$b) \quad \text{Factoriza } 4x^3 - 2x^2 + 6x$$

$$4x^3 - 2x^2 + 6x = 2x(2x^2 - x + 3) \quad \text{Son factores } 2x \text{ y } (2x^2 - x + 3).$$

Aunque no todo polinomio se descompone en dos o más factores diferentes de la unidad, hay expresiones algebraicas que solo son divisibles por ellas mismas y por la unidad.

Ejemplo

$$2 + x \quad \text{No se descompone en factores diferentes de la unidad, ya que solo es divisible por } 2 + x \text{ y por la unidad.}$$

Un polinomio está completamente factorizado si ninguno de sus factores puede factorizarse más.

Factores comunes

Si cada término de un polinomio tiene un factor común, su factorización será el producto de dos factores, uno de los cuales es el factor común.

EJEMPLOS



Factoriza los siguientes polinomios.

$$a) \quad bx + 2x$$

El factor común es x .

$$\frac{bx}{x} + \frac{2x}{x}$$

Se divide el polinomio entre el factor común y se obtiene el otro factor, que es $(b + 2)$.

$$\therefore bx + 2x = x(b + 2)$$

b) $12x^2y - 2z^2y + 8w^2y$

El factor común es $2y$.

$$\frac{12x^2}{2y} - \frac{2z^2y}{2y} + \frac{8w^2y}{2y}$$

Se divide el polinomio entre el factor común y se obtiene el otro factor, que es $(6x^2 - z^2 + 4w^2)$.

$$\therefore 12x^2y - 2z^2y + 8w^2y = 2y(6x^2 - z^2 + 4w^2)$$

c) $\frac{3x^2y^3}{2} + \frac{9x^3y^2}{4} - \frac{6x^3y}{8}$

El factor común es $\frac{3x^2y}{2}$.

$$\frac{\frac{3x^2y^3}{2}}{\frac{3x^2y}{2}} + \frac{\frac{9x^3y^2}{4}}{\frac{3x^2y}{2}} - \frac{\frac{6x^3y}{8}}{\frac{3x^2y}{2}}$$

Se divide el polinomio entre el factor común y se obtiene el otro factor, que es $y^2 + \frac{3xy}{2} - \frac{x}{2}$.

$$\therefore \frac{3x^2y^3}{2} + \frac{9x^3y^2}{4} - \frac{6x^3y}{8} = \frac{3x^2y}{2} \left(y^2 + \frac{3xy}{2} - \frac{x}{2} \right)$$

Se observa que en los ejemplos anteriores, el factor común es un monomio.

Estudiemos ahora cuando el factor común es un binomio.

EJEMPLOS

Ejemplos

Factoriza los siguientes polinomios.

a) $m(x + y) + n(x + y)$

El factor común es $(x + y)$.

$$\frac{m(x + y)}{(x + y)} + \frac{n(x + y)}{(x + y)}$$

}

Se divide el polinomio entre el factor común y se obtiene el otro factor, que es $(m + n)$.

$$\therefore m(x + y) + n(x + y) = (x + y)(m + n)$$

b) $2a(3 - x^2) - 5b(3 - x^2)$

El factor común es $(3 - x^2)$.

$$\frac{2a(3 - x^2)}{(3 - x^2)} - \frac{5b(3 - x^2)}{(3 - x^2)}$$

}

Se divide el polinomio entre el factor común y se obtiene el otro factor, que es: $(2a - 5b)$.

$$\therefore 2a(3 - x^2) - 5b(3 - x^2) = (3 - x^2)(2a - 5b)$$

c) $5ax(u + v - w) - u - v + w$

Primero se colocan los tres últimos términos en un paréntesis precedido del signo menos, es decir:

$$5ax(u + v - w) - (u + v - w)$$

El factor común es $(u + v - w)$.

$$\frac{5ax(u + v - w)}{(u + v - w)} - \frac{(u + v - w)}{(u + v - w)}$$

Se divide el polinomio entre el factor común y se obtiene el otro factor que es $(5ax - 1)$.

$$\therefore 5ax(u + v - w) - (u + v - w) = (u + v - w)(5ax - 1)$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad & (3m + 8n)(ax - by) - (2m - 5n)(ax - by) && \text{Se saca el factor común.} \\
 & (ax - by) [(3m + 8n) - (2m - 5n)] && \text{Simplificando el otro factor, resulta.} \\
 & (ax - by) (3m + 8n - 2m + 5n) = && \text{Por último, se obtiene } (ax - by)(m + 13n). \\
 & \therefore (3m + 8n)(ax - by) - (2m - 5n)(ax - by) = (ax - by)(m + 13n)
 \end{aligned}$$

Factorización de la diferencia de dos cuadrados

Al recordar el tema de los **productos notables**, el caso específico del producto de binomios conjugados, se tiene:

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{Multiplicación}} \\
 (m + n)(m - n) = m^2 - n^2 \\
 \xleftarrow{\text{Factorización}}
 \end{array}$$

De lo anterior, se concluye que:

La diferencia de cuadrados de dos términos, se factoriza en el producto de la suma de los términos multiplicada por su diferencia.

Los términos de la suma y la diferencia son las raíces cuadradas de los términos que forman la diferencia de cuadrados.

EJEMPLOS

Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $4x^2 - y^2$ Se determina la raíz cuadrada de cada término de la diferencia de cuadrados.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{4x^2} = 2x \\ \sqrt{y^2} = y \end{array} \right\} \text{ Su factorización es: } 4x^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y).$$

$$\text{Diferencia de cuadrados} = (\text{Suma})(\text{Diferencia})$$

b) $am^2 - an^2$ Se saca el factor común a .

$a(m^2 - n^2)$ El segundo factor es una diferencia de cuadrados, por lo que al factorizar igual que en el caso anterior, resulta: $a(m^2 - n^2) = a(m + n)(m - n)$.

$$\therefore am^2 - an^2 = a(m^2 - n^2) = a(m + n)(m - n)$$

c) $25a^4 - 49$ Se determina la raíz cuadrada de cada término de la diferencia de cuadrados.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{25a^4} = 5a^2 \\ \sqrt{49} = 7 \end{array} \right\} \text{ Su factorización es: } 25a^4 - 49 = (5a^2 + 7)(5a^2 - 7).$$

d) $3x^4 - 3$ Se saca el factor común 3.

$3(x^4 - 1)$ El segundo factor es una diferencia de cuadrados, por lo que al factorizar igual que en el caso anterior, resulta:

$3(x^4 - 1) = 3(x^2 + 1)(x^2 - 1)$ El segundo factor es una suma de cuadrados, el cual **no se factoriza**; el tercer factor es una diferencia de cuadrados, el cual **sí se factoriza**, por lo que finalmente se tiene:
 $3(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 3(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1).$

$$\therefore 3x^4 - 3 = 3(x^4 - 1) = 3(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 3(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

e) $(3x + 2y)^2 - (7 - 5z)^2$ Se determina la raíz cuadrada de cada término de la diferencia de cuadrados.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{(3x + 2y)^2} = (3x + 2y) \\ \sqrt{(7 - 5z)^2} = (7 - 5z) \end{array} \right\} \text{ Su factorización es: } (3x + 2y)^2 - (7 - 5z)^2.$$

$$\begin{aligned} (3x + 2y)^2 - (7 - 5z)^2 &= [(3x + 2y) + (7 - 5z)][(3x + 2y) - (7 - 5z)] \\ &= (3x + 2 + 7 - 5z)(3x + 2y - 7 + 5z) \end{aligned}$$

$$\therefore (3x + 2y)^2 - (7 - 5z)^2 = (3x + 2y - 5z + 7)(3x + 2y + 5z - 7)$$

f) $9x^2 - (x + y)^2$ Se determina la raíz cuadrada de cada término de la diferencia de cuadrados.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{9x^2} = 3x \\ \sqrt{(x + y)^2} = (x + y) \end{array} \right\} \text{ Su factorización es: } 9x^2 - (x + y)^2 = [3x + (x + y)][3x - (x + y)].$$

$$\therefore 9x^2 - (x + y)^2 = [3x + (x + y)][3x - (x + y)] = (4x + y)(2x - y)$$

g) $\frac{4}{x^2} - \frac{y^2}{9}$ Se determina la raíz cuadrada de cada término de la diferencia de cuadrados.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\frac{4}{x^2}} = \frac{2}{x} \\ \sqrt{\frac{y^2}{9}} = \frac{y}{3} \end{array} \right\} \text{ Su factorización es: } \frac{4}{x^2} - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{2}{x} + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{2}{x} - \frac{y}{3}\right).$$

$$\therefore \frac{4}{x^2} - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{2}{x} + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{2}{x} - \frac{y}{3}\right)$$

h) $8y^2 - 7z^2$

Se determina la raíz cuadrada de cada término de la diferencia de cuadrados.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{8y^2} = \sqrt{8} \\ \sqrt{7z^2} = \sqrt{7} \end{array} \right\}$$

Su factorización es: $8y^2 - 7z^2 = (\sqrt{8} + \sqrt{7})(\sqrt{8} - \sqrt{7})$.

$$\therefore 8y^2 - 7z^2 = (\sqrt{8} + \sqrt{7})(\sqrt{8} - \sqrt{7})$$

En este último ejemplo, se observa que los coeficientes no son cuadrados perfectos, por lo que su raíz queda indicada en el proceso.

Suma o diferencia de dos cubos

Si se divide la suma de dos cubos $m^3 + n^3$ entre $m + n$, resulta:

$$\begin{array}{r} m^2 - mn + n^2 \\ m + n \overline{) m^3 - n^3} \\ \underline{-m^3 - m^2n} \\ -mn^2 + n^3 \\ \underline{mn^2 + mn^2} \\ mn^2 + n^3 \\ \underline{-mn^2 - n^3} \\ 0 \end{array}$$

Para comprobar el resultado de una división exacta, se tiene que:

$$\text{Dividendo} = (\text{Divisor})(\text{Cociente})$$

$$\therefore m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$$

De lo anterior, se concluye la siguiente regla:

La suma de dos cubos se factoriza en dos factores; el primer factor es la suma de la raíz cúbica de cada término de la suma de cubos; el otro factor es el cuadrado de la raíz cúbica del primer término, **menos** el producto de las dos raíces cúbicas de los términos, más el cuadrado de la raíz cúbica del segundo término.

Al dividir la diferencia de dos cubos $m^3 - n^3$ entre $m - n$, resulta:

$$\begin{array}{r} m^2 + mn + n^2 \\ m - n \overline{) m^3 - n^3} \\ \underline{-m^3 + m^2n} \\ m^2n - n^3 \\ \underline{-m^2n + mn^2} \\ mn^2 - n^3 \\ \underline{-mn^2 + n^3} \\ 0 \end{array}$$

Aplicando la ecuación para comprobar el resultado de una división exacta, resulta:

$$\therefore m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$$

De lo anterior, se concluye la siguiente regla:

La diferencia de dos cubos se factoriza en dos factores; el primer factor es la diferencia de la raíz cúbica de cada término de la diferencia de cubos; el otro factor es el cuadrado de la raíz cúbica del primer término, **más** el producto de las dos raíces cúbicas de los términos más el cuadrado de la raíz cúbica del segundo término.

EJEMPLOS

Factoriza las siguientes sumas o diferencias de cubos.

a) $x^3y^3 + z^3$ Se determina la raíz cúbica de cada término de la suma de cubos.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{x^3y^3} = xy \\ \sqrt[3]{z^3} = z \end{array} \right\} \text{ Su factorización es:}$$

$$\therefore x^3y^3 + z^3 = (xy + z)(x^2y^2 - xyz + z^2)$$

b) $a^3 - 27b^3$ Se determina la raíz cúbica de cada término de la diferencia de cubos.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{a^3} = a \\ \sqrt[3]{27b^3} = 3b \end{array} \right\} \text{ Su factorización es:}$$

$$\therefore a^3 - 27b^3 = (a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2)$$

c) $5 + 40c^3$
 $5(1 + 8c^3)$ Se saca el factor común 5.
El segundo factor es una suma de cubos, por lo que al factorizar de la misma manera que el inciso a, resulta:

$$\therefore 5 + 40c^3 = 5(1 + 8c^3) = 5(1 + 2c)(1 - 2c + 4c^2)$$

d) $125m^3 - (x + y)^3$ Se determina la raíz cúbica de cada término de la diferencia de cubos.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{125m^3} = 5m \\ \sqrt[3]{(x+y)^3} = (x+y) \end{array} \right\} \text{ Por lo que su factorización es:}$$

$$125m^3 - (x + y)^3 = [5m - (x + y)][25m^2 + 5m(x + y) + (x + y)^2]$$

$$\therefore 125m^3 - (x + y)^3 = (5m - x - y)(25m^2 + 5mx + 5my + x^2 + 2xy + y^2)$$

e) $(a + 3)^3 + (a - 5)^3$ Se determina la raíz cúbica de cada término de la suma de cubos.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{(a+3)^3} = (a+3) \\ \sqrt[3]{(a-5)^3} = (a-5) \end{array} \right\} \text{ Su factorización es:}$$

$$\begin{aligned} \therefore (a + 3)^3 + (a - 5)^3 &= [(a + 3) + (a - 5)][(a + 3)^2 - (a + 3)(a - 5) + (a - 5)^2] \\ &= (a + 3 + a - 5)(a^2 + 6a + 9 - a^2 + 5a - 3a + 15 + a^2 - 10a + 25) \\ &= (2a - 2)(a^2 - 2a + 49) = 2(a - 1)(a^2 - 2a + 49) \end{aligned}$$

Trinomios

En el tema de productos notables, aprendimos a desarrollar el cuadrado de un binomio, el producto de dos binomios con un término común y el producto de dos binomios con términos semejantes; en todos los casos el resultado es un trinomio, por lo que ahora estudiaremos su factorización.

Factorizar trinomios de cuadrado perfecto. Al desarrollar el cuadrado de un binomio, resulta un trinomio de cuadrado perfecto, el cual se identifica porque su primero y tercer términos tienen raíz cuadrada exacta, el segundo término es el doble producto de dichas raíces cuadradas.

Para factorizar trinomios de cuadrado perfecto, se aplica la siguiente regla:

Se determina la raíz cuadrada del primero y tercer términos del trinomio, el signo del segundo término se emplea para separar dichas raíces; el binomio así formado se eleva al cuadrado o se multiplica por sí mismo.

EJEMPLOS

Ejemplos

Factoriza los siguientes trinomios de cuadrado perfecto.

a) $16x^2 + 16x + 4$

Se determina la raíz cuadrada del primero y tercer términos del trinomio.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{16x^2} = 4x \\ \sqrt{4} = 2 \end{array} \right\}$$

Su factorización es:

$$\therefore 16x^2 + 16x + 4 = (4x + 2)(4x + 2) = (4x + 2)^2$$

b) $25x^2 - 30xy + 9y^2$

Se determina la raíz cuadrada del primero y tercer términos del trinomio.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{25x^2} = 5x \\ \sqrt{9y^2} = 3y \end{array} \right\}$$

Su factorización es:

$$\therefore 25x^2 - 30xy + 9y^2 = (5x - 3y)(5x - 3y) = (5x - 3y)^2$$

c) $1 - 2a^2 + a^4$

Se determina la raíz cuadrada del primero y tercer términos del trinomio.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{1} = 1 \\ \sqrt{a^4} = a^2 \end{array} \right\}$$

Su factorización es:

$$\therefore 1 - 2a^2 + a^4 = (1 - a^2)(1 - a^2) = (1 - a^2)^2$$

d) $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$

Se determina la raíz cuadrada del primero y tercer términos del trinomio.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x^2} = x \\ \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

Su factorización es:

$$\therefore x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

$$e) \frac{1}{4} - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}$$

Se determina la raíz cuadrada del primero y tercer términos del trinomio.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{9}{x^2}} = \frac{3}{x} \end{array} \right\}$$

Su factorización es:

$$\therefore \frac{1}{4} - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{x}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{x}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{x}\right)^2$$

$$f) (3+x)^2 + 2(3+x)(a+x) + (a+x)^2$$

Se determina la raíz cuadrada del primero y tercer términos del trinomio.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{(3+x)^2} = (3+x) \\ \sqrt{(a+x)^2} = (a+x) \end{array} \right\}$$

Su factorización es:

$$(3+x)^2 + 2(3+x)(a+x) + (a+x)^2 = [(3+x) + (a+x)][(3+x) + (a+x)]$$

$$\therefore (3+x) + 2(3+x)(a+x) + (a+x)^2 = (3+2x+a)(3+2x+a) = (3+2x+a)^2$$

$$g) m^2 + 2m(m-5) + (m-5)^2$$

Se determina la raíz cuadrada del primero y tercer términos del trinomio.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{m^2} = m \\ \sqrt{(m-5)^2} = (m-5) \end{array} \right\}$$

Su factorización es:

$$m^2 + 2m(m-5) + (m-5)^2 = [m + (m-5)][m + (m-5)] = (m+m-5)(m+m-5)$$

$$\therefore m^2 + 2m(m-5) + (m-5)^2 = (2m-5)(2m-5) = (2m-5)^2$$

Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Del producto de dos binomios con un término común, resulta un trinomio que no es de cuadrado perfecto, el cual se identifica porque su primer término (generalmente es el término común en los binomios). Tiene raíz cuadrada exacta; el segundo término consta de un coeficiente numérico o literal cualquiera con signo positivo o negativo y su parte literal es igual a la raíz cuadrada del primer término; el tercer término es distinto al primero y segundo términos, y es una cantidad cualquiera de signo positivo o negativo; es decir, tiene la forma general $x^2 + bx + c$.

Para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, se aplica la siguiente regla:

El trinomio se factoriza en dos factores binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada del primer término del trinomio dado; los segundos términos de los binomios son aquéllos que sumados algebraicamente den el coeficiente **[b]** del término central del trinomio y que multiplicados resulte el tercer término **[c]** del trinomio.

EJEMPLOS

Factoriza los siguientes trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

$$a) x^2 + 11x + 24$$

Se determina la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

$$\sqrt{x^2} = x$$

Primer término de los binomios factores; los segundos términos de los binomios, son aquéllos que multiplicados den 24 y que sumados sean 11. Dichos términos pueden ser (24)(1), (12)(2), (6)(4) y (8)(3), siendo la última proposición la que cumple la condición de que sumados den 11, es decir, $(8 + 3 = 11)$.

Su factorización es:

$$\therefore x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)$$

El resultado se comprueba al multiplicar los dos binomios factores.

b) $m^2 - 7m + 10$

Se determina la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

$$\sqrt{m^2} = m$$

Primer término de los binomios factores; los segundos términos de los binomios, son aquéllos que multiplicados den 10 y que sumados sean -7 . Dichos términos pueden ser $(-10)(-1)$ y $(-5)(-2)$, siendo la última proposición la que cumple la condición de que sumados den -7 , es decir, $[-5 + (-2) = -7]$.

Su factorización es:

$$\therefore m^2 - 7m + 10 = (m - 5)(m - 2)$$

c) $a^2 + 3a - 28$

Se determina la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

$$\sqrt{a^2} = a$$

Primer término de los binomios factores; los segundos términos de los binomios, son aquéllos que multiplicados den -28 y que sumados sean 3. Dichos términos pueden ser $(-28)(1)$, $(-14)(2)$, $(-7)(4)$, $(28)(-1)$, $(14)(-2)$ y $(7)(-4)$, siendo la última proposición la que cumple la condición de que sumados den 3, es decir, $[7 + (-4) = 3]$.

Su factorización es:

$$\therefore a^2 + 3a - 28 = (a + 7)(a - 4)$$

d) $r^2 - 6r - 27$

Se determina la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

$$\sqrt{r^2} = -r$$

Primer término de los binomios factores; los segundos términos de los binomios, son aquéllos que multiplicados den -27 y que sumados sean -6 . Dichos términos pueden ser $(-27)(1)$, $(-3)(9)$, $(27)(-1)$ y $(3)(-9)$, siendo la última proposición la que cumple la condición de que sumados den -6 , es decir, $[3 + (-9) = -6]$.

Su factorización es:

$$\therefore r^2 - 6r - 27 = (r + 3)(r - 9)$$

e) $x^4 + x^2 - 12$

Se determina la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

$$\sqrt{x^4} = x^2$$

Primer término de los binomios factores; los segundos términos de los binomios, son aquéllos que multiplicados den -12 y que sumados sean 1. Dichos términos pueden ser $(-12)(1)$, $(-6)(2)$, $(-4)(3)$, $(12)(-1)$, $(6)(-2)$ y $(4)(-3)$, siendo la última proposición la que cumple la condición de que sumados den 1, es decir, $[4 + (-3) = 1]$.

Su factorización es:

$$\therefore x^4 + x^2 - 12 = (x^2 + 4)(x^2 - 3)$$

f) $(x + y)^2 - 4(x + y) - 21$ Se determina la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

$$\sqrt{(x + y)^2} = (x + y)$$

Primer término de los binomios factores; los segundos términos de los binomios, son aquéllos que multiplicados den -21 y que sumados sean -4 . Dichos términos pueden ser $(21)(-1)$, $(7)(-3)$, $(-21)(1)$ y $(-7)(3)$, siendo la última proposición la que cumple la condición de que sumados den -4 , es decir, $[(-7) + 3 = -4]$.

Su factorización es:

$$(x + y)^2 - 4(x + y) - 21 = [(x + y) - 7][(x + y) + 3]$$

$$\therefore (x + y)^2 - 4(x + y) - 21 = (x + y - 7)(x + y + 3)$$

Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Del producto de dos binomios con términos semejantes, resulta un trinomio que no es un cuadrado perfecto, el cual se identifica porque su primer término es el producto de los primeros términos de los binomios factores, el segundo término es igual a la suma algebraica de los productos de los términos extremos e interiores de los binomios factores, el tercer término resulta del producto de los segundos términos de los binomios factores; es decir, tiene la forma general $ax^2 + bx + c$.

Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, se aplica la siguiente regla:

El trinomio se factoriza en dos factores binomios cuyos primeros términos son aquéllos que multiplicados den como producto el primer término del trinomio dado; los segundos términos de los binomios son aquéllos que multiplicados den lugar al tercer término del trinomio, pero que el producto de los términos extremos e interiores de los binomios factores, al sumarse algebraicamente den como resultado el término central del trinomio.

EJEMPLOS

Ejemplos

Factoriza los siguientes trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

a) $3x^2 + 14x + 8$

Se determinan los primeros términos de los factores binomios, es decir, aquéllos que multiplicados den $3x^2$, el primer término del trinomio, dichos términos son $(3x)(x)$; los segundos términos de los binomios son aquéllos que multiplicados den 8 , el tercer término del trinomio. Dichos términos pueden ser $(1)(8)$ y $(2)(4)$, siendo la última proposición la que cumple la condición de que la suma algebraica del producto de los términos extremos e interiores de los binomios factores resulte $14x$, el término central del trinomio dado.

Su factorización es:

$$\therefore 3x^2 + 14x + 8 = (3x + 2)(x + 4)$$

b) $5x^2 - 11x - 36$

Se determinan los primeros términos de los factores binomios, es decir, aquéllos que multiplicados den $5x^2$, el primer término del trinomio, dichos términos son $(5x)(x)$; los segundos términos de los binomios son aquéllos que multiplicados den -36 , el tercer término del trinomio. Dichos términos pueden ser $(-36)(1)$, $(-18)(2)$, $(-12)(3)$, $(-9)(4)$, $(-6)(6)$, $(36)(-1)$, $(18)(-2)$, $(12)(-3)$, $(6)(-6)$ y $(9)(-4)$, siendo la última proposición la que cumple la condición de que la suma algebraica del producto de los términos extremos e interiores de los binomios factores resulte $-11x$ el término central del trinomio dado.

Su factorización es:

$$\therefore 5x^2 - 11x - 36 = (5x + 9)(x - 4)$$

c) $20x^2 - 13x + 2$

Se determinan los primeros términos de los factores binomios, es decir, aquéllos que multiplicados den $20x^2$, el primer término del trinomio, dichos términos pueden ser $(20x)(x)$, $(10x)(2x)$ y $(5x)(4x)$; los segundos términos de los binomios son aquéllos que multiplicados den 2, el tercer término del trinomio. Dichos términos pueden ser $(2)(1)$ y $(-2)(-1)$; las últimas proposiciones en ambos casos, cumplen con la condición de que la suma algebraica del producto de los términos extremos e interiores de los binomios factores resulte $-13x$, el término central del trinomio dado.

Su factorización es:

$$\therefore 20x^2 - 13x + 2 = (5x - 2)(4x - 1)$$

d) $15a^2 + 17ab - 4b^2$

Se determinan los primeros términos de los factores binomios, siendo aquéllos que multiplicados den $15a^2$, el primer término del trinomio, dichos trinomios pueden ser $(15a)(a)$ y $(5a)(3a)$; los segundos términos de los binomios son aquéllos que multiplicados den $-4b^2$, el tercer término del trinomio. Dichos términos pueden ser $(-4b)(b)$, $(-2b)(2b)$ y $(-b)(4b)$; las últimas proposiciones en ambos casos, cumplen con la condición de que la suma algebraica del producto de los términos extremos e interiores de los binomios factores resulte $17ab$, el término central del trinomio dado.

Su factorización es:

$$\therefore 15a^2 + 17ab - 4b^2 = (5a - b)(3a + 4b)$$

Sacar un factor común por agrupamiento

Cuando un polinomio dado no tiene aparentemente ningún factor común, se forman conjuntos de términos que sí contienen un factor común, donde dicho factor común es un factor del polinomio dado y el otro factor resulta del agrupamiento de términos. Al formar el conjunto de términos, no importa el orden en que se agrupen, ya que de acuerdo con la ley asociativa, siempre se llega al mismo resultado.

EJEMPLOS

Ejemplos

Factoriza las siguientes expresiones en dos factores.

- a) $5x + 5y + mx + my$ Al agrupar los dos primeros términos y los dos últimos, resulta un factor común en ambos grupos, es decir:

$$5x + 5y + mx + my = (5x + 5y) + (mx + my)$$

Se saca el factor común: $5(x + y) + m(x + y)$

Factorizando nuevamente, resulta: $(x + y)(5 + m)$

$$\therefore 5x + 5y + mx + my = 5(x + y) + m(x + y) = (x + y)(5 + m)$$

También se puede resolver de la siguiente forma:

$$5x + 5y + mx + my = 5x + mx + 5y + my = x(5 + m) + y(5 + m) = (5 + m)(x + y)$$

- b) $6x^2 - 12xy + 8x - 16y$ Se agrupan los términos que tengan un factor común, es decir:

$$6x^2 - 12xy + 8x - 16y = (6x^2 - 12xy) + (8x - 16y)$$

Se saca el factor común: $3x(2x - 4y) + 4(2x - 4y)$

Factorizando nuevamente, resulta: $(2x - 4y)(3x + 4)$

$$\therefore 6x^2 - 12xy + 8x - 16y = 3x(2x - 4y) + 4(2x - 4y) = (2x - 4y)(3x + 4)$$

También se puede resolver de la siguiente forma:

$$6x^2 - 12xy + 8x - 16y = (6x^2 + 8x) - (12xy + 16y) = 2x(3x + 4) - 4y(3x + 4) = (3x + 4)(2x - 4y)$$

- c) $m^2 - n^2 - 5m + 5n$ Se agrupan los términos que tengan un factor común, es decir:

$$m^2 - n^2 - 5m + 5n = (m^2 - n^2) + (-5m + 5n)$$

Se saca el factor común: $(m + n)(m - n) - 5(m - n)$

Factorizando nuevamente: $(m - n)[(m + n) - 5]$

$$\therefore m^2 - n^2 - 5m + 5n = (m + n)(m - n) - 5(m - n) = (m - n)(m + n - 5)$$

- d) $m^2x - 2m^2y + 2mxy - mx^2 - 2x^2y + x^3$ Se agrupan los términos que tengan un factor común, es decir:

$$m^2x - 2m^2y + 2mxy - mx^2 - 2x^2y + x^3 = (m^2x - 2m^2y) - (mx^2 - 2mxy) + (x^3 - 2x^2y)$$

Se saca el factor común: $m^2(x - 2y) - mx(x - 2y) + x^2(x - 2y)$

Factorizando nuevamente, resulta: $(x - 2y)(m^2 - mx + x^2)$

$$\therefore m^2x - 2m^2y + 2mxy - mx^2 - 2x^2y + x^3 = (x - 2y)(m^2 - mx + x^2)$$

Polinomios reducibles a suma o diferencia de dos cuadrados

Al agrupar adecuadamente los términos de un polinomio, se pueden reducir a una suma o diferencia de cuadrados. Para ello se cuenta con los siguientes métodos.

Método de completar el binomio al cuadrado. El polinomio a factorizar debe ser un trinomio con las siguientes características, uno de sus términos debe ser un cuadrado perfecto y otro debe ser el doble producto de la raíz cuadrada del cuadrado perfecto, por la raíz cuadrada de un tercer término, al cual se le suma y se le resta una misma cantidad, con el fin de hacerlo cuadrado perfecto.

Resulta así un trinomio de cuadrado perfecto el cual se factoriza en dos factores, donde uno de ellos es un binomio al cuadrado y el otro es un término cualquiera de cuadrado perfecto.

EJEMPLOS

Ejemplos

Factoriza las siguientes expresiones a suma o diferencia de cuadrados.

a) $x^2 + 4x + 3$

El trinomio a factorizar cumple con la condición de tener un término de cuadrado perfecto, es decir, x^2 cuya raíz cuadrada es $\sqrt{x^2} = x$.

El segundo término es $4x$, por lo que el tercer término debe ser una cantidad tal que forme un **trinomio de cuadrado perfecto**; es decir, se necesita

$$x^2 + 4x + 4$$

y se tiene,

$$x^2 + 4x + 3$$

por lo que al tercer término se le suma $+1$ y se resta -1 , para no alterar la expresión original, es decir:

$$x^2 + 4x + 3 + 1 - 1$$

Por lo tanto,

$$x^2 + 4x + 4 - 1$$

donde

$$x^2 + 4x + 4$$

es un trinomio de cuadrado perfecto, el cual se factoriza como:

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$$

La factorización del trinomio dado es:

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 3 + 1 - 1 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x + 2)^2 - 1$$

El resultado es una diferencia de cuadrados.

b) $3x - x^2 - 2$

Ordenando los términos, se tiene: $-(x^2 - 3x + 2)$

Para transformar este polinomio a **trinomio de cuadrado perfecto**; es decir, se necesita

$$\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)$$

Se tiene,

$$-(x^2 - 3x + 2)$$

por lo que al tercer término se le suma $+\frac{1}{4}$ y se le resta $-\frac{1}{4}$ para no alterar la expresión original, es decir:

$$-(x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4})$$

Por lo tanto,

$$-(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}) = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$$

es un trinomio de cuadrado perfecto, el cual se factoriza como:

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

La factorización del trinomio dado es:

$$-(x^2 - 3x + 2) = -(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}) = -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

El resultado es una diferencia de cuadrados.

c) $4t^2 - 4t + 2$

Para transformar este polinomio a **trinomio de cuadrado perfecto**, es decir, se necesita

$$4t^2 - 4t + 1$$

Se tiene,

$$4t^2 - 4t + 2$$

el tercer término se descompone en $(1 + 1)$, no hay necesidad de sumar y restar una cantidad; por lo tanto,

$$4t^2 - 4t + 1 + 1 = 4t^2 - 4t + 1$$

es un trinomio de cuadrado perfecto, el cual se factoriza como

$$4t^2 - 4t + 1 = (2t - 1)(2t - 1) = (2t - 1)^2$$

La factorización del trinomio dado es:

$$4t^2 - 4t + 2 = 4t^2 - 4t + 1 + 1 = (2t - 1)^2 + 1$$

El resultado es una suma de cuadrados.

Reordenación de términos por efecto de cambios de signo. Al ordenar los términos del polinomio dado debe existir un **trinomio de cuadrado perfecto**, para ello nos apoyamos en los cambios de signos.

EJEMPLO

Ejemplo

- 1 Factoriza las siguientes expresiones a diferencia de cuadrados.

a) $4 - m^2 + 2mn - n^2$

Al cambiar el signo de los tres últimos términos, se forma un **trinomio de cuadrado perfecto**, es decir:

$$4 - m^2 + 2mn - n^2 = 4 - (m^2 - 2mn + n^2)$$

Al factorizar se tiene:

$$4 - [(m - n)(m - n)] = 4 - (m - n)^2$$

$$\therefore 4 - m^2 + 2mn - n^2 = 4 - (m^2 - 2mn + n^2) = 4 - [(m - n)(m - n)] = 4 - (m - n)^2$$

El resultado es una diferencia de cuadrados.

Polinomios que se factorizan como el cubo de un binomio

Un polinomio ordenado en forma descendente con respecto a una literal se considera como el cubo de un binomio, si cumple con los siguientes características:

- El polinomio debe ser de cuatro términos.
- El primero y último términos deben ser cubos perfectos, es decir, deben tener raíz cúbica exacta.
- El segundo término debe ser más (+) o menos (-) el triple producto de la raíz cúbica del primer término al cuadrado por la raíz cúbica del último término.
- El tercer término debe ser más (+) el triple producto de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último término al cuadrado.

Si todos los términos del polinomio son positivos, su factorización es el cubo de la suma de las raíces cúbicas del primero y último términos.

Si los términos del polinomio son alternadamente positivos y negativos, su factorización es el cubo de la diferencia de las raíces cúbicas del primero y último términos.

EJEMPLOS

Ejemplos

Factoriza.

a) $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$

Se determina la raíz cúbica del primero y último términos.

$$\sqrt[3]{27x^3} = 3x$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Como todos los términos del polinomio dado son positivos, su factorización es:

$$27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 = (3x + 2)^3$$

b) $64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$

Se determina la raíz cúbica del primero y último términos.

$$\sqrt[3]{64x^3} = 4x$$

$$\sqrt[3]{1} = 1$$

Como los términos alternadamente son positivos y negativos, su factorización es:

$$64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 = (4x - 1)^3$$

EJERCICIO 5

I. Realiza lo que se indica en cada caso.

1. En pareja, factoricen las siguientes expresiones en dos factores.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

a) $xy + x^2$

b) $m^2 + mn$

c) $a^2 - 3a^3$

d) $2x^2y - 6xy^2$

e) $3a^3x^2 + 9ax^2$

f) $12y^2z - 48xy^2$

g) $m - m^2 + m^3$

h) $5x^3 + 30x^2 - 15x$

i) $3x^2y + 3xy^2 + 6xy$

j) $24a^2 - 72a + 144$

k) $m^5 + m^3 - m$

l) $a^8 - a^6 + a^4 - a^2$

m) $16a^2b - 8a^3b^2 - 21a^3b^3 - 40a^2b^3$

n) $7a^3 - 21a^4 + 14a^2$

ñ) $25x + 75x^3 - 125x^5$

o) $8mn + 2m^2n + 12mn^2$

p) $2ab - 6bc + 4b$

q) $5xy^2 - 15x^3y^2 - 45x^2y^2$

r) $3mx + 21m^2x - 9m^2x^2 + 12mx^2$

s) $2a^2bc^3 - 4ab^2c + 16abc^2$

2. Factoriza las siguientes expresiones en dos factores.

a) $7(a + 2) + x(a + 2)$

b) $-4a(x - 1) - (x - 1)$

c) $2x(ab + 3) + 3y(ab + 3)$

d) $(x + 2y) - 4a(x + 2y)$

e) $5m(a + 3) - n(a + 3)$

f) $6(b + c) + 8a(b + c)$

g) $-x - y + m(x + y)$

h) $m(x^2 + 2x - 3) + 2n(x^2 + 2x - 3)$

i) $(a + 1)(x - 2) + 7a(x - 2)$

j) $4x(ay - 3) - (x - 1)(ay - 3)$

k) $2a^2(2x - 3y) - (a^2 + 1)(2x - 3y)$

l) $(x + a)(a - 2y) + (x + b)(a - 2y)$

m) $(a - b)(x + y) - (2a - 3b)(x + y)$

n) $(a + 3)(x + 1) - (4a - 1)(x + 1)$

ñ) $(m - 2n)(a + 5) + (m - 2n)(3a + 1)$

o) $(x - 7)(1 + 3a) - (x + 2)(1 + 3a)$

3. Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados y discute tus resultados con el resto del grupo.

a) $m^2 - 9n^2$

b) $16x^2 - 36y^2$

c) $25 - a^2x^2$

d) $2x - 8xy^2$

e) $49 - x^2$

f) $5m^2 - 45n^2$

g) $a^2b^2 - c^2d^2$

h) $x^2 - (y + z)^2$

i) $4y^2 - (a - 1)^2$

j) $(y - 3)^2 - 16x^2$

k) $9a^2 - (m + n)^2$

l) $(x + y)^2 - (a - b)^2$

$$m) (5x - 2)^2 - (3y - 1)^2$$

$$n) (x + 3)^2 - (x - 5)^2$$

$$\tilde{n}) (5a + 1)^2 - (a + 3)^2$$

$$o) a^2(x - y) - b^2(x - y)$$

$$p) 36(a + b) - 4x^2(a + b)$$

$$q) 25a^2(x - 1) - 9b^2(x - 1)$$

$$r) (x - y)^2 - (x + y)^2$$

$$s) (m - 3)^2 - (m + 5)^2$$

$$t) \frac{4}{9}x^2 - \frac{25}{16}y^2$$

$$u) \frac{36}{64}a^2 - \frac{9}{49}b^2$$

4. Factoriza las siguientes sumas o diferencias de cubos.

$$a) x^3 + 64$$

$$b) 8 - a^3$$

$$c) a^3x^3 - 125$$

$$d) b^3 - 1$$

$$e) 27 + m^3$$

$$f) c^3 + 343x^3$$

$$g) 2x^3 - 16y^3$$

$$h) 54a^3x^3 + 2c^3$$

$$i) 8(x + a)^3 - a^3$$

$$j) 64 - (a + b)^3$$

$$k) 125 - (x - 2)^3$$

$$l) 1 - (m - n)^3$$

$$m) (a - b)^3 + (x - y)^3$$

$$n) (a + 1)^3 + (2a - 3)^3$$

$$\tilde{n}) (y - z)^3 - (x + 1)^3$$

$$o) (x - 2)^3 - (x - 5)^3$$

$$p) (2 - a)^3 + (3 + a)^3$$

$$q) 27(x + y)^3 - 64$$

5. Factoriza los siguientes trinomios de cuadrado perfecto.

$$a) x^2 - 4x + 4$$

$$b) x^2 + 6x + 9$$

$$c) x^2 - 12x + 36$$

$$d) m^2 - 2mn + n^2$$

$$e) 9x^2 + 30x + 25$$

$$f) 4x^2 - 12x + 9$$

$$g) x - 2x^2 + 1$$

$$h) 49a^2 - 54a + 25$$

$$i) c^2 - 14c + 49$$

$$j) y^2 - 2yz + z^2$$

$$k) x^2 + 8xy + 16y^2$$

$$l) a^4 + 8a^2 + 16$$

$$m) 9a^4 - 24a^2 + 16$$

$$n) 81 - 18x^2 + x^4$$

6. Factoriza los siguientes trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

$$a) m^2 + 7m + 6$$

$$b) x^2 - 9x + 18$$

$$c) x^2 + 2x - 35$$

$$d) a^2 + 5a - 24$$

$$e) a^2 + 4ab - 21b^2$$

$$f) x^2 + 11x + 18$$

g) $y^2 - 6y - 27$

i) $x^2 - x - 2$

h) $t^2 + 13t + 40$

j) $a^2 - 19a - 88$

7. Factoriza los siguientes trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

a) $6x^2 - ax - 15x^2$

f) $3a^2 - 10a - 8$

b) $4x^2 - 5x - 6$

g) $21x^2 - 10xy + 24y^2$

c) $12x^2 - 11x + 2$

h) $4x^2 + 13x + 3$

d) $4a^2 - 25a + 21$

i) $5a^2 - 8a + 3$

e) $2a^2 - a - 1$

j) $2x^2 + 7x + 3$

8. Factoriza las siguientes expresiones, sacando un factor común por agrupación.

a) $5m - 5n + 2x - 2y$

f) $mx - my - mz + nx - ny - nz$

b) $ax^3 - 3x^2 - ax + 6$

g) $9a^2 - 6a + 1 - 3ax + x$

c) $m + m^2 - mn^2 - n^2$

h) $12 - 6a - 12a^2 + 6a^3$

d) $3x - 2y - 2xa^2 + 3ya^2$

i) $9ay + 3ax + 4x^2 + 12xy$

e) $2a^2x - 5a^2y + 30by - 6bx$

j) $a^2 + 2ab + b^2 + 4a + 4b$

9. Factoriza los siguientes polinomios que dan lugar a una suma o diferencia de cuadrados.

a) $x^2 + 2xy + y^2 - 9$

g) $a^2 + 6a + 4$

b) $x^2 - 6ax + 9a^2 - 36z^2$

h) $b^2 + 16b - 1$

c) $4a^2 + 25 + 20a - 16x^2$

i) $x^2 + 6x + 36$

d) $4a^2 + 4ab + b^2 - x^2y^2$

j) $9x^4 - 33x^2 + 16$

e) $x^2 + 8x - 2$

k) $49a^2 - 78ab + 9b^2$

f) $x^2 + 2x + 8$

l) $25x^2 + 14x + 9$

10. Factoriza los siguientes polinomios que dan como resultado la suma o diferencia de dos términos al cubo.

a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

f) $27 - 27m + 9m^2 - m^3$

b) $8m^3 + 36m^2 + 54m + 27$

g) $8a^3 + 12a + 6x + 1$

c) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

h) $8y^3 + 24y^2x + 24yx^2 + 8x^3$

d) $125 + 150a + 60a^2 + 8a^3$

i) $64x^3 + 144x^2y + 108xy^2 + 27y^3$

e) $216x^3 + 108x^2 + 18x + 1$

j) $x^3 - 15x^2y + 75xy^2 - 125y^3$

➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Fracciones algebraicas

Fracción algebraica

Una fracción con literales, por ejemplo $\frac{a}{b}$, es una fracción algebraica, es decir, es el cociente de dos expresiones algebraicas.

Los términos de una fracción algebraica se denominan **numerador** –al que ocupa la parte superior– y **denominador** –al que ocupa la parte inferior–.

$$\text{Fracción algebraica} \left\{ \begin{array}{l} \frac{ax + by}{2x + 2y} \leftarrow \text{Numerador} \\ \frac{ax + by}{2x + 2y} \leftarrow \text{Denominador} \end{array} \right.$$

Los principios que forman las fracciones algebraicas son:

- a) Si una fracción algebraica se multiplica y se divide por una misma cantidad, la fracción no se altera.

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{x}\right) = \frac{ax}{bx}$$

- b) Si el numerador de una fracción algebraica se multiplica o se divide por una cantidad, la fracción queda multiplicada y dividida, respectivamente, por dicha cantidad.

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{ax}{b}; \quad \left(\frac{a}{b}\right) \div \frac{(x)}{1} = \frac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{1}} = \frac{a}{bx}$$

- c) Si el denominador de una fracción algebraica se multiplica o se divide por una cantidad, la fracción queda dividida y multiplicada, respectivamente, por dicha cantidad.

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{bx}; \quad \left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{x}} = \frac{ax}{b}$$

Es necesario recordar que una expresión algebraica entera $(x + y)$ puede escribirse en forma de fracción, usando la unidad como denominador:

$$\left(\frac{x + y}{1}\right)$$

Signos de las fracciones

En una fracción hay tres signos asociados: el del numerador, el del denominador y el de la fracción, es decir:

- a) El signo de la fracción puede ser $+$ o $-$, y se escribe antes de la línea que divide la fracción. En caso de no que no aparezca signo alguno, se entiende que la fracción es positiva.

$$+\frac{x}{y} \quad -\frac{x}{y}$$

- b) En la fracción $\frac{x}{y}$ el signo es positivo, pues el numerador y el denominador son positivos.

- c) En la fracción $\frac{-x}{-y}$ el signo es positivo, dado que el numerador y el denominador son negativos.

- d) En la fracción; $\frac{-x}{y}$ el signo es negativo, porque el numerador es negativo y el denominador es positivo.
- e) En la fracción; $\frac{x}{-y}$ el signo es negativo, ya que el numerador es positivo y el denominador es negativo.

Cambios que se hacen en los signos de una fracción sin que se altere

Las leyes de los signos en la multiplicación y en la división nos permiten establecer las siguientes reglas.

Regla 1. Se puede cambiar el signo de una fracción y el de su numerador o denominador sin alterar la fracción.

Ejemplos

- a) $\frac{x}{y} = -\frac{-x}{y} = -(-z) = z$
- b) $\frac{x}{y} = -\frac{x}{-y} = -(-z) = z$
- c) $\frac{ax-ay}{2x-2y} = -\frac{+ay-ax}{2x-2y} = \frac{ay-ax}{2y-2x}$

Regla 2. En los factores del numerador y del denominador de una fracción, los signos de los términos de dos factores cualquiera pueden cambiarse sin alterar la fracción; o bien, los signos de los términos de un factor pueden cambiar si se cambia el signo de la fracción.

Ejemplos

- a) $\frac{5-x}{(x-1)(x-3)} = \frac{5-x}{(1-x)(3-x)} = -\frac{x-5}{(1-x)(3-x)}$
- b) $\frac{m-7}{(8-m)(m-4)} = -\frac{m-7}{(m-8)(m-4)} = \frac{7-m}{(m-8)(m-4)}$

Simplificación de fracciones algebraicas

Reducir una fracción a sus términos mínimos es alterar su forma sin alterar su valor.

Simplificar una fracción algebraica es transformarla en una fracción equivalente en la que el numerador y el denominador ya no tienen ningún factor común, excepto la unidad.

Factorizando en el numerador y denominador se simplifica por división o eliminación de términos comunes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1

- Simplifica a sus términos mínimos, las siguientes fracciones cuyos términos son monomios.

a) $\frac{m^2n^3}{m^3n^4} = \frac{1}{mn}$

b) $\frac{9x^3y^2}{3xy^3} = \frac{3x^2}{y}$

c) $\frac{r^2}{rq} = \frac{r}{q}$

2 ••• Simplifica a sus términos mínimos, las siguientes fracciones, cuyos términos son polinomios.

a) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

Al factorizar numerador y denominador, se tiene:

$$\frac{(x+3)(\cancel{x-2})}{(x+2)(\cancel{x-2})}$$

Si se eliminan los términos comunes del numerador con los del denominador, resulta:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x+3)(\cancel{x-2})}{(x+2)(\cancel{x-2})} = \frac{x+3}{x+2}$$

b) $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 4x - 32}$

Al factorizar numerador y denominador, se tiene:

$$\frac{(x+2)(\cancel{x-4})}{(x+8)(\cancel{x-4})}$$

Después de eliminar los términos comunes del numerador con los del denominador, resulta:

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 4x - 32} = \frac{(x+2)(\cancel{x-4})}{(x+8)(\cancel{x-4})} = \frac{x+2}{x+8}$$

c) $\frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

Al factorizar numerador y denominador, se tiene:

$$\frac{(\cancel{x-3})(x^2 + 3x + 9)}{(x+3)(\cancel{x-3})}$$

Al eliminar los términos comunes del numerador con los del denominador, resulta:

$$\frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{(\cancel{x-3})(x^2 + 3x + 9)}{(x+3)(\cancel{x-3})} = \frac{x^2 + 3x + 9}{(x+3)}$$

d) $\frac{ax^3 + 125a}{a^2x^2 - 5a^2x + 25a^2}$

Factorizando numerador y denominador, se tiene:

$$\frac{a(x^3 + 125)}{a^2(x^2 - 5x + 25)} = \frac{\cancel{a}(x+5)(\cancel{x^2 - 5x + 25})}{a^2(\cancel{x^2 - 5x + 25})}$$

Si eliminamos los términos comunes del numerador con los del denominador, resulta:

$$\frac{ax^3 + 125a}{a^2x^2 - 5a^2x + 25a^2} = \frac{a(x^3 + 125)}{a^2(x^2 - 5x + 25)} = \frac{\cancel{a}(x+5)(\cancel{x^2 - 5x + 25})}{a^2(\cancel{x^2 - 5x + 25})} = \frac{x+5}{a}$$

$$e) \frac{4a^2 - 9b^2 + 2a + 3b}{4a^2 - 9b^2}$$

Al factorizar numerador y denominador, se tiene:

$$\frac{(4a^2 - 9b^2) + (2a + 3b)}{4a^2 - 9b^2} = \frac{(2a + 3b)(2a - 3b) + (2a + 3b)}{(2a + 3b)(2a - 3b)} = \frac{\cancel{(2a + 3b)}(2a - 3b + 1)}{\cancel{(2a + 3b)}(2a - 3b)}$$

Al eliminar los términos comunes del numerador con los del denominador, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{4a^2 - 9b^2 + 2a + 3b}{4a^2 - 9b^2} &= \frac{(4a^2 - 9b^2)(2a + 3b)}{(2a + 3b)(2a - 3b)} = \frac{(2a + 3b)(2a - 3b) + (2a + 3b)}{(2a + 3b)(2a - 3b)} \\ &= \frac{\cancel{(2a + 3b)}(2a - 3b + 1)}{\cancel{(2a + 3b)}(2a - 3b)} = \frac{2a - 3b + 1}{2a - 3b} \end{aligned}$$

Un error muy común en los alumnos es querer eliminar $(2a - 3b)$ del numerador con $(2a - 3b)$ del denominador; lo anterior es incorrecto, ya que $(2a - 3b)$ se está sumando a otro término, es decir no aparece como factor.

$$f) \frac{9x^2 - 12x + 4 - 16y^2}{2y - 3xy + 4y^2}$$

Al factorizar numerador y denominador, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{(9x^2 - 12x + 4) - 16y^2}{y(2 - 3x + 4y)} &= \frac{(3x - 2)^2 - 16y^2}{y(2 - 3x + 4y)} = \frac{[(3x - 2) + 4y][(3x - 2) - 4y]}{y(2 - 3x + 4y)} \\ &= \frac{(3x - 2 + 4y)(3x - 2 - 4y)}{y(2 - 3x + 4y)} = \frac{\cancel{(2 - 3x + 4y)}(3x - 2 + 4y)}{y\cancel{(2 - 3x + 4y)}} \end{aligned}$$

Si eliminamos términos comunes del numerador con los del denominador, resulta:

$$\frac{(3x - 2 + 4y)}{y} = \frac{2 - 3x - 4y}{y}$$

En este ejemplo se observa el cambio de signo en los términos del polinomio.

Operaciones con fracciones (adición y sustracción de fracciones algebraicas)

El procedimiento para sumar y restar fracciones algebraicas es igual al que se emplea en la aritmética.

En álgebra, la suma y la resta de fracciones suele combinarse en una sola operación, denominada **suma algebraica de fracciones**.

Para sumar algebraicamente dos o más fracciones se aplican los siguientes pasos, que nos permiten obtener el resultado.

1. Si las fracciones tienen diferentes denominadores, es necesario factorizar cada denominador y determinar el mínimo común denominador (MCD).
2. El cociente obtenido de dividir el MCD entre cada denominador de las fracciones, se multiplica por el numerador de cada fracción.
3. Se suman los numeradores resultantes, teniendo cuidado con los signos; de esta manera, se obtiene el numerador de la suma algebraica de fracciones, cuyo denominador es el MCD.
4. No se debe olvidar simplificar a sus términos mínimos los resultados.

EJEMPLOS

Ejemplos

Realiza las siguientes sumas.

a) $\frac{4}{xy} + \frac{y}{x^2}$

Se determina el MCD, el cual es:

$$x^2y$$

El cociente obtenido de dividir el MCD entre cada denominador de las fracciones, se multiplica por el numerador de cada fracción, es decir:

$$\frac{(x)(4) + (y)(y)}{x^2y} = \frac{4x + y^2}{x^2y}$$

$$\frac{4}{xy} + \frac{y}{x^2} = \frac{(x)(4) + (y)(y)}{x^2y} = \frac{4x + y^2}{x^2y}$$

b) $\frac{a}{(x+b)} + \frac{b}{(x-2a)} - \frac{c}{(x+c)}$

Se determina el MCD, el cual es:

$$(x+b)(x-2a)(x+c)$$

El cociente obtenido de dividir el MCD entre cada denominador de las fracciones, se multiplica por el numerador de cada fracción, es decir:

$$\frac{a(x-2a)(x+c) + b(x+b)(x+c) - c(x+b)(x-2a)}{(x+b)(x-2a)(x+c)}$$

$$= \frac{a(x^2 + cx - 2ax - 2ac) + b(x^2 + cx + bx + bc) - c(x^2 - 2ax + bx - 2ab)}{(x+b)(x-2a)(x+c)}$$

$$= \frac{ax^2 + acx - 2a^2x - 2a^2c + bx^2 + bcx + b^2x + b^2c - cx^2 + acx - bcx - 2abc}{(x+b)(x-2a)(x+c)}$$

$$= \frac{ax^2 + 3acx - 2a^2x - 2a^2c + bx^2 + b^2x + b^2c - cx^2 - 2abc}{(x+b)(x-2a)(x+c)}$$

$$c) \frac{2m-3}{m} - \frac{2m-1}{m-1} + m+1$$

La expresión $m+1$ se escribe en forma fraccionaria, colocando como denominador a la unidad.

$$\frac{2m-3}{m} - \frac{2m-1}{m-1} + \frac{m+1}{1}$$

Se determina el MCD, el cual es:

$$m(m-1)$$

El cociente obtenido de dividir el MCD entre cada denominador de las fracciones, se multiplica por el numerador de cada fracción, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{(2m-3)(m-1) - m(2m-1) + m(m-1)(m+1)}{m(m-1)} &= \frac{\cancel{2m^2} - 5m + 3 - \cancel{2m^2} + m + m^2 - 1}{m(m-1)} \\ &= \frac{-4m + 3 + m^3 - m}{m(m-1)} = \frac{m^3 - 5m + 3}{m(m-1)} \end{aligned}$$

$$d) \frac{x-2}{2x^2+3x-14} + \frac{x-1}{x^2-3x+2} - \frac{2x+7}{2x^2+5x-7}$$

Se factorizan los denominadores.

$$\frac{\cancel{x-2}}{(2x+7)(\cancel{x-2})} + \frac{\cancel{x-1}}{(x-2)(\cancel{x-1})} - \frac{\cancel{2x+7}}{(\cancel{2x+7})(x-1)}$$

Eliminando términos comunes, resulta:

$$\frac{1}{(2x+7)} + \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-1)}$$

Se determina el MCD, el cual es:

$$(2x+7)(x-2)(x-1)$$

El cociente obtenido de dividir el MCD entre cada denominador de las fracciones se multiplica por el numerador de cada fracción, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)(x-1) + (2x+7)(x-1) - (2x+7)(x-2)}{(2x+7)(x-2)(x-1)} &= \frac{x^2 - \cancel{3x} + 2 + \cancel{2x^2} + \cancel{5x} - 7 - \cancel{2x^2} - \cancel{3x} + 14}{(2x+7)(x-2)(x-1)} \\ &= \frac{x^2 - x + 9}{(2x+7)(x-2)(x-1)} \end{aligned}$$

Multiplicación de fracciones algebraicas

Para multiplicar dos o más fracciones, es necesario factorizar primero los términos de las fracciones dadas; después, se simplifican las fracciones por eliminación de términos comunes del numerador con los del denominador; por último, al igual que en aritmética, se multiplican los numeradores y se dividen por el producto de los denominadores, para dar lugar a la fracción resultante.

EJEMPLOS

Realiza las siguientes multiplicaciones.

$$a) \frac{2-a}{2+a} \times \frac{4-a^2}{8-a^3}$$

Se factorizan los términos de las fracciones dadas.

$$\frac{(2-a)(2+a)(2-a)}{(2+a)(2-a)(4+2a+a^2)}$$

Eliminando los términos comunes, resulta:

$$\frac{2-a}{4+2a+a^2}$$

$$b) \frac{m^2+8m+7}{m^2-6m+9} \times \frac{m^2-m-6}{m^2-m-2}$$

Se factorizan los términos de las fracciones dadas.

$$\frac{(m+7)(m+1)(m-3)(m+2)}{(m-3)(m-3)(m-2)(m+1)}$$

Eliminando términos comunes, resulta:

$$\frac{(m+7)(m+2)}{(m-3)(m-2)} = \frac{m^2+9m+14}{m^2-5m+6}$$

$$c) \frac{x^2+4ax-12a^2}{x^2+7ax+6a^2} \times \frac{\cancel{x^2-ax-12a^2}}{x^2-9ax+14a^2} \times \frac{x^2-6a-7a^2}{\cancel{x^2-ax-12a^2}}$$

Se observa que un término del numerador se elimina directamente con otro término del denominador, por ser comunes.

Se factorizan los términos de las fracciones dadas.

$$\frac{(\cancel{x+6a})(\cancel{x-2a})(\cancel{x-7a})(x+a)}{(\cancel{x+6a})(x+a)(\cancel{x-7a})(\cancel{x-2a})}$$

Eliminando términos comunes, resulta:

$$1$$

El resultado final es la unidad, ya que todos los términos del numerador y del denominador se eliminaron.

División de fracciones algebraicas

Para dividir dos fracciones, es necesario factorizar primero los términos de las fracciones; sin olvidar que al igual que en aritmética se invierte el divisor y luego se eliminan los términos comunes del numerador con los del denominador; la fracción resultante se obtiene al multiplicar los numeradores y dividirlos por el producto de los denominadores.

EJEMPLOS

Ejemplos

Resuelve las siguientes divisiones:

$$a) \frac{1-m}{1-n^3} \div \frac{m^2-1}{1-n^2}$$

Se factorizan los términos de las fracciones dadas.

$$\frac{(1-m)}{(1-n)(1+n+n^2)} \div \frac{(m+1)(m-1)}{(1+n)(1-n)}$$

Invertiendo el divisor y eliminando términos comunes, resulta:

$$\frac{(1-m)(1+n)\cancel{(1-n)}}{\cancel{(1-n)}(1+n+n^2)(m+1)(m-1)} = \frac{\cancel{(m-1)}(1+n)}{(1+n+n^2)(m+1)\cancel{(m-1)}} \\ = \frac{(1+n)}{(1+n+n^2)(m+1)}$$

$$b) \frac{5a^2+19a-4}{6a^2+7a-3} \div \frac{a^2+8a+16}{3a^2+11a-4}$$

Se factorizan los términos de las fracciones dadas.

$$\frac{(5a-1)(a+4)}{(3a-1)(2a+3)} \div \frac{(a+4)(a+4)}{(3a-1)(a+4)}$$

Invertiendo el divisor y eliminando términos comunes, resulta:

$$\frac{(5a-1)\cancel{(a+4)}\cancel{(3a-1)}}{\cancel{(3a-1)}(2a+3)\cancel{(a+4)}\cancel{(a+4)}} = \frac{5a-1}{2a+3}$$

Combinación de multiplicaciones y divisiones de fracciones algebraicas

La multiplicación y la división de fracciones algebraicas se combinan entre sí; su proceso de solución se fundamenta en la factorización de los términos de las fracciones dadas, se invierte el divisor y se eliminan los términos comunes del numerador con los del denominador. Su producto respectivo da el resultado final.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ●●● Resuelve la siguiente operación: $\frac{2a^2-5a-3}{4a^2-1} \cdot \frac{4a^2-8a+3}{a^2+a-12} \div \frac{2a^2+3a-9}{a^2+7a+12}$

Se factorizan los términos de las fracciones dadas.

$$\frac{(2a+1)(a-3)}{(2a+1)(2a-1)} \cdot \frac{(2a-1)(2a-3)}{(a+4)(a-3)} \div \frac{(2a-3)(a+3)}{(a+4)(a+3)}$$

Invirtiendo el divisor y eliminando términos comunes, resulta:

$$\frac{(2a+1)(a-3)(2a-1)(2a-3)(a+4)(a+3)}{(2a+1)(2a-1)(a+4)(a-3)(2a-3)(a+3)} = 1$$

2 •• Resuelve la siguiente operación: $\frac{3x^2+2x}{8x^2-10x-3} \cdot \frac{6x^2+13x+6}{4x^2-9} \div \frac{9x^2+12x+4}{8x^2+14x+3}$.

Se factorizan los términos de las fracciones dadas, es decir:

$$\frac{x(3x+2)}{(4x+1)(2x-3)} \cdot \frac{(3x+2)(2x+3)}{(2x+3)(2x-3)} \div \frac{(3x+2)(3x+2)}{(4x+1)(2x+3)}$$

Invirtiendo el divisor y eliminando términos comunes, resulta:

$$\frac{x(3x+2)(3x+2)(2x+3)(4x+1)(2x+3)}{(4x+1)(2x-3)(2x+3)(2x-3)(3x+2)(3x+2)} \div \frac{x(2x+3)}{(2x-3)(2x-3)} = \frac{2x+3x}{4x^2-12x+9}$$

Simplificación de fracciones complejas

Una fracción compleja es aquella en la que el numerador o en el denominador contiene una fracción, por ejemplo:

$$\frac{x + \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1} + 1}$$

Al simplificar una fracción compleja es necesario reducir el numerador y el denominador a fracciones más simples posteriormente, por eliminación de términos comunes se obtiene el cociente resultante.

EJEMPLOS

Ejemplos

Resuelve las siguiente simplificaciones.

a) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1}$

Se reduce el numerador y el denominador a fracciones simples.

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{1-x}{x}}$$

Realizando la división se obtiene el cociente resultante.

$$\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(1-x)} = \frac{x+1}{1-x}$$

$$b) \frac{2 + \frac{a+7}{a^2-2a-8}}{3 - \frac{a-6}{a^2-6a+8}}$$

Se reduce el numerador y el denominador a fracciones simples.

$$\frac{2 + \frac{a+7}{a^2-2a-8}}{3 - \frac{a-6}{a^2-6a+8}} = \frac{\frac{2(a^2-2a-8) + (a+7)}{a^2-2a-8}}{\frac{3(a^2-6a+8) - (a-6)}{a^2-6a+8}}$$

Realizando la división se obtiene el cociente resultante.

$$\begin{aligned} \frac{(2a^2-4a-16+a+7)(a^2-6a+8)}{(3a^2-18a+24-a+6)(a^2-2a-8)} &= \frac{(2a^2-3a-9)(a^2-6a+8)}{(3a^2-19a+30)(a^2-2a-8)} \\ &= \frac{(2a+3)(\cancel{a-3})(\cancel{a-4})(a-2)}{(3a-10)(\cancel{a-3})(\cancel{a-4})(a+2)} = \frac{(2a+3)(a-2)}{(3a-10)(a+2)} = \frac{2a^2-a-6}{3a^2-4a-20} \end{aligned}$$

$$c) \frac{x + \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} + 1}$$

Se reduce el numerador y el denominador a fracciones simples.

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} + 1} &= \frac{\frac{x(x+1)+1}{(x+1)}}{\frac{1}{(x)(x)+1} + 1} = \frac{\frac{x^2+x+1}{(x+1)}}{\frac{1}{x^2+1} + 1} = \frac{\frac{x^2+x+1}{(x+1)}}{\frac{x^2+1}{x^2+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{x^2+x+1}{(x+1)}}{\frac{x}{x^2+1} + 1} = \frac{\frac{x^2+x+1}{(x+1)}}{\frac{x+(x^2+1)}{x^2+1}} = \frac{\frac{x^2+x+1}{(x+1)}}{\frac{x+x^2+1}{x^2+1}} \end{aligned}$$

Realizando la división se obtiene el cociente resultante.

$$\frac{(x^2+1)(x^2+\cancel{x}+1)}{(x+1)(\cancel{x}+x^2+1)} = \frac{x^2+1}{x+1}$$

EJERCICIO 6

I. Resuelve lo que se indica en cada caso.

1. Reduce a sus términos mínimos las siguientes expresiones, debate el procedimiento de solución con el resto del grupo.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

a) $\frac{2m}{m^2 + 2m}$

b) $\frac{(a-2)^2}{a^2 - 4}$

c) $\frac{3x + ax}{3a + a^2}$

d) $\frac{3x + 2a}{9x^2 - 4a^2}$

e) $\frac{4x^2 + 12xy}{x^2 + 3xy}$

f) $\frac{x^3 + y^3}{(x+y)^3}$

g) $\frac{3x^2 - 11x + 6}{3x^2 + x - 2}$

h) $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + x^2y + xy^2}$

i) $\frac{4x^2 + 7x - 2}{1 - 16x^2}$

j) $\frac{m^2 - mn + n^2}{m^3 + n^3}$

k) $\frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 + 5x + 3}$

l) $\frac{a^2 - y^2 + a + y}{a^2 - y^2}$

m) $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^3 - y^3}$

n) $\frac{6 + 2x + 3x^2 + x^3}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$

ñ) $\frac{4x^2 - y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2 + x - 2y}$

o) $\frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 7x + 10}$

p) $\frac{2a^2 - 3abx + 4ax^2}{4a^2 - 12ab + 9b^2 - 16x^2}$

q) $\frac{x^3 - 9x}{x^3 + 4x^2 - 21x}$

r) $\frac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x^3 + 3x^2 - 4}$

s) $\frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{m - mx + n - nx}$

2. Resuelve en equipo las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas, compara tus resultados con el resto del grupo.

a) $\frac{m+4}{m-4} + \frac{m+5}{m-5}$

b) $\frac{x+a}{x+3a} + \frac{3a^2 - x^2}{x^2 - 9a^2}$

c) $\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{1-x^2}$

d) $\frac{x+1}{10} + \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{5x-10}$

e) $\frac{1-8x}{25x^2-9} + \frac{3}{x} + \frac{2}{5x-3}$

f) $\frac{x+3}{x+2} + \frac{x+3}{x-1} + \frac{x-2}{x-1}$

g) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{x+1}{(x-1)^2}$

h) $\frac{1}{x} - \frac{x}{xy-y^2}$

i) $\frac{2x-3}{6x+9} - \frac{x-1}{4x^2+12x+9}$

j) $\frac{x}{x^2+xy} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x}$

$$k) 1 - z + \frac{4}{1+z}$$

$$l) \frac{x+5}{x^2+1} + 2x - 7$$

$$m) \frac{2x}{x-3} - \frac{4}{x+6} - 1$$

$$n) \frac{x+9}{x+1} + \frac{x+16}{x-1} - \frac{x-25}{x-4}$$

$$r) \frac{x-2}{2x^2+3x-14} + \frac{x-1}{x^2-3x+2} - \frac{2x+7}{2x^2+5x-7}$$

$$s) \frac{m+2}{4m^2-4m-3} - \frac{5m}{2m^2-m-3} - \frac{1}{2m^2+3m+1}$$

$$t) \frac{a+1}{2a-3} - \frac{3a^2}{2a^2+3a-9} + \frac{2a^2-7a}{4a^2-9} - \frac{a-1}{2a+3}$$

$$u) \frac{x^2-y^2}{x^4+x^2y^2+y^4} - \frac{x-y}{x^3+y^3} + \frac{x}{x^3+y^3+2x^2y+2xy^2}$$

$$ñ) \frac{x+1}{2x-3} + \frac{x-1}{2x+3} - \frac{2x^2-7x}{4x^2-9}$$

$$o) \frac{1}{a-y} - \frac{1}{a+y} + \frac{3a}{y^2-a^2}$$

$$p) \frac{x-1}{x^2+3x+2} - \frac{x-13}{2x^2+3x-2}$$

$$q) \frac{2}{a^2+7a+12} + \frac{a+4}{a^2+2a-3} - \frac{5a+10}{a^2+3a-4}$$

3. Resuelve con ayuda de tu profesor las siguientes multiplicaciones y divisiones de fracciones algebraicas y en plenaria compara tus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

$$a) \frac{a^2x}{8} \times \frac{10m^3}{5m^2} \times \frac{9a}{a^3}$$

$$b) \frac{2a^2+a}{12} \times \frac{4}{4a+2}$$

$$c) \frac{m^3+y^3}{x^3+n^3} \times \frac{x+n}{m+y}$$

$$d) \frac{a^2+a}{x^2-1} \times \frac{x+1}{a+1}$$

$$e) \frac{9-x^2}{27-x^3} \times \frac{3-x}{3+x}$$

$$f) \frac{1-x^3}{1-a} \times \frac{a^2-1}{1-x^2}$$

$$g) \frac{24-2a-a^2}{30-7a-a^2} \times \frac{a^2+7a-30}{a^2-a-12}$$

$$h) \frac{x^3+8}{2x-1} \times \frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$$

$$i) \frac{3mx-6m^2}{x^2+4mx+4} \times \frac{mx+m}{m^2} \times \frac{x^2+3mx+2m^2}{6m-6x}$$

$$j) \frac{7a+21b}{a^2-9b^2} \times \frac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-2ab-3b^2}$$

$$k) \frac{6x^2+7x-3}{5x^2+19x-4} \div \frac{3x^2+11x-4}{x^2+8x+16}$$

$$l) \frac{x+y}{xy-y^2} \div \frac{x^2-y^2}{y^2}$$

$$m) \frac{5a+15}{5a-25} \div \frac{a^2+9a+18}{a-5}$$

$$n) \frac{x^3-1}{a^3-27} \div \frac{x^2+x+1}{a^2+3a+9}$$

$$ñ) \frac{x^2-6x+9}{x^2+8x+7} \div \frac{x^2-x-6}{x^2-x-2}$$

$$o) \frac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1} \div \frac{a^2-2a+1}{a^3-2a^2+a-2}$$

$$p) \frac{x^2+xy+y^2}{4x^2-y^2} \div \frac{x^2+xy+y^2}{2xy-y^2}$$

$$\begin{aligned}
 q) & \frac{4a^2-1}{2a^2-5a-3} \times \frac{2a^2+3a-9}{a^2+7a+12} \div \frac{4a^2-8a+3}{a^2+a-12} \\
 r) & \frac{5x^2+8x-4}{12x^2+11x-15} \times \frac{3x^2+20x+25}{10x^2+x-2} \div \frac{3x^2-x-10}{8x^2-2x-3} \\
 s) & \frac{6x^2+35x+36}{x^2-6x+9} \times \frac{x+1}{x^2+37x+36} \div \frac{6x^2-19x+3}{x^3-9x^2+27x-27} \\
 t) & \frac{x^3+27y^3}{16x^2+8xy+y^2} \times \frac{8x^2-2xy-y^2}{4x^2-y^2} \div \frac{2x^2y+7xy^2+3y^3}{x^3+6x^2y+9xy^2}
 \end{aligned}$$

4. Simplifiquen en equipo, las siguientes fracciones complejas y en plenaria discutan sus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

$$a) \frac{1 + \frac{a+1}{a-1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}$$

$$b) \frac{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x}{y}}$$

$$c) \frac{\frac{a^2}{b} - \frac{a^2-b^2}{a+b}}{\frac{a-b}{b} + \frac{b}{a}}$$

$$d) \frac{\frac{3+x}{3-x} - \frac{3-x}{3+x}}{\frac{3+x}{3} - \frac{3+2x}{3+x}}$$

$$e) \frac{1 - \frac{x}{7} + \frac{x^2}{12}}{x - \frac{x}{16}}$$

$$f) \frac{x-2 - \frac{4}{x+1}}{x-3 - \frac{5}{x+1}}$$

$$g) \frac{\frac{x-5}{x+4} - \frac{x+5}{x-4}}{\frac{x+3}{x-4} - \frac{x+6}{x+5}}$$

$$h) \frac{\frac{7}{9x^2-4} - 5}{\frac{5}{3x+2} - 7}$$

$$i) \frac{8 - \frac{a-6}{a^2-6a+8}}{7 + \frac{a+7}{a^2-2a-8}}$$

$$j) \frac{x + \frac{1}{x+1}}{x^2 - \frac{1}{x}}$$

$$k) \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{a-b + \frac{b^2}{a+b}}$$

$$l) \frac{x-1 - \frac{2}{x+1}}{x+1 + \frac{2}{x-1}}$$

$$m) \frac{\frac{a}{a+\frac{a}{a+\frac{a}{x}}}}$$

$$n) \frac{x}{2 - \frac{2}{x + \frac{2}{x+2}}}$$

$$ñ) \frac{a-1}{a+2 - \frac{a^2+2}{a - \frac{a-2}{a+1}}}$$

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Exponentes y radicales

Exponente. Indica el número de veces que un término deberá aparecer como factor de sí mismo.

Ejemplo

$$a^5 = (a)(a)(a)(a)(a)$$

La expresión a^5 se llama potencia y se lee **la quinta**. La representación general es:

$$n\text{-ésima potencia de } a: \quad \begin{array}{c} a^n \xleftarrow{\hspace{1cm}} \text{Exponente (entero positivo)} \\ \uparrow \\ \text{Base} \end{array}$$

Leyes de los exponentes

Existen cinco leyes fundamentales de los exponentes enteros y positivos. Dichas leyes son:

Ley I. Cuando dos potencias de la misma base, se multiplican, su resultado es un término de la misma base y con un exponente igual a la suma de los exponentes de las potencias multiplicadas, es decir:

$$(a^m)(a^n) = a^{m+n}$$

Ley II. Cuando dos potencias de la misma base, se dividen, su cociente es un término de la misma base y con un exponente igual a su diferencia de los exponentes de las potencias divididas, es decir:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{Si } m > n) \qquad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (\text{Si } n > m) \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{n-a} = a^0 = 1 \quad (\text{Si } m = n)$$

Ley III. Cuando una potencia cuya base se eleva a un exponente, su resultado es un término de la misma base y con un exponente igual al producto del exponente de la potencia por el exponente al que se eleve la potencia, es decir:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Ley IV. Cuando uno o más factores se elevan todos a la vez a un exponente, su resultado es un producto donde cada factor se eleva al exponente de dicho producto, es decir:

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Ley V. Cuando un cociente se eleva a un exponente su resultado es la potencia del dividendo (numerador) y la potencia del divisor (denominador); la división se realiza al final, es decir:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(u^2)(u^3) = u^{2+3} = u^5$

b) $\frac{m^4}{m^2} = m^{4-2} = m^2$

c) $\frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^{5-3}} = \frac{1}{x^2}$

d) $\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 = 1$

$$e) (c^2)^3 = c^{(2 \cdot 3)} = c^6$$

$$f) (2a)^2 = 2^2 \times a^2 = 4a^2$$

$$g) (a^2x)^3 = a^{(2 \cdot 3)} \times x^3 = a^6x^3$$

$$h) \left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}$$

$$i) \left(\frac{2a}{b^2}\right)^3 = \frac{2^3 \times a^3}{b^{(2 \cdot 3)}} = \frac{8a^3}{b^6}$$

$$j) \frac{x^{3a+1}y^{a+2}}{x^{2a}y^{a+1}} = x^{3a+1-2a}y^{a+2-a-1} = x^{a+1}y$$

$$k) \left(\frac{2a}{4b}\right)^2 \left(\frac{3b}{2a^3}\right)^3 = \left(\frac{a^2}{4b^2}\right) \left(\frac{27b^3}{8a^9}\right) = \frac{27b}{32a^7}$$

Cero y números enteros negativos como exponentes

Basándonos en las cinco leyes de los exponentes enteros positivos, ahora se incluyen el cero y los exponentes enteros negativos, los cuales deben satisfacer dichas leyes.

De la ley II, tenemos que si $m = n$, resulta:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

El cociente da como resultado un término de exponente cero; como cualquier término diferente de cero dividido entre sí mismo es igual a la unidad, por lo tanto, **cualquier término de exponente cero es igual a la unidad**, es decir:

$$a^0 = 1$$

De la ley I, si $m = -n$, se tiene:

$$(a^m)(a^n) = (a^{-n})(a^n) = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

Si dividimos $(a^{-n})(a^n) = 1$ por a^n , resulta:

$$\frac{(a^{-n})(a^n)}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

Todo término elevado a un exponente negativo es igual a una fracción, cuyo numerador es la unidad y su denominador es el mismo término con el exponente positivo. Así,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Para el exponente cero la base debe ser diferente de cero ($a \neq 0$), ya que:

$$x^0 = 1 \quad \text{y} \quad (-x)^0 = 1$$

Para los exponentes negativos, se tiene:

a) Una fracción cuyo exponente es un entero negativo es igual a la recíproca de la fracción con el exponente de signo contrario. Es decir,

$$\frac{a^{-2}b^3}{x^2y^{-4}} = \frac{\frac{1}{a^2}b^3}{\frac{x^2 \cdot 1}{y^4}} = \frac{b^3y^4}{a^2x^2}$$

- b) Un factor del numerador de una fracción puede cambiarse a factor del denominador, o viceversa, si el signo del exponente del factor se cambia. Es decir,

$$\frac{x^{-2}y^{-3}z}{a^{-3}b^{-1}c^2} = \frac{a^3bz^4}{c^2x^2y^3}$$

Se observa que las expresiones no pueden transferirse de la manera anterior, ya que las operaciones no son equivalentes, es decir:

$$\frac{a^{-3}+b^{-2}}{x^{-2}+y^{-1}} \quad \text{no es igual a} \quad \frac{x^2+y}{a^3+b^2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

Resuelve las siguientes simplificaciones.

$$a) \quad x^2b^0t^{-3} = \frac{x^2(1)}{t^3} = \frac{x^2}{t^3}$$

$$b) \quad \left(\frac{2a^2b}{3c}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}a^{(-4)}b^{-2}}{3^{-2}c^{-2}} = \frac{2^{-2}a^{-4}b^{-2}}{3^{-2}c^{-2}} = \frac{3^2c^2}{2^2a^4b^2} = \frac{9c^2}{4a^4b^2}$$

$$c) \quad \left(\frac{3^2x^{-1}y^{-3}}{6y^0z^{-4}}\right)^{-1} = \frac{3^{-2}xy^3}{6^{-1}y^0z^4} = \frac{6xy^3}{9z^4} = \frac{2xy^3}{3z^4}$$

$$d) \quad \frac{x^{-2}+y^{-1}}{x^{-1}} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{y+x^2}{x^2y}}{\frac{1}{x}} = \frac{x(y+x^2)}{x^2y} = \frac{y+x^2}{xy}$$

$$e) \quad \frac{a^{-3}b^{-3}}{a^{-3}+b^{-3}} = \frac{\frac{1}{a^3b^3}}{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}} = \frac{\frac{1}{a^3b^3}}{\frac{b^3+a^3}{a^3b^3}} = \frac{a^3b^3}{a^3b^3(b^3+a^3)} = \frac{1}{b^3+a^3}$$

Exponentes fraccionarios

Proviene de extraer una raíz a una potencia cuando el exponente del término radicando se divide por el índice de la raíz; si el cociente no es una cantidad entera, la división solo queda indicada, dando lugar al exponente fraccionario, es decir:

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a})^m (a^m)^{\frac{1}{n}} &= a^{\frac{m}{n}} \\ (\sqrt[n]{a})^m &= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \end{aligned} \quad (m \neq 1)$$

Si $m = n$ y basándonos en la ley III de los exponentes, tenemos que:

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a$$

Si $m = 1$, entonces, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; cuando n es par, los valores de a son positivos; si n es impar, los valores de a son positivos y negativos.

EJEMPLOS

1 ●● Realiza lo que se te pide.

a) Simplifica: $(8a^3)^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{8a^3})^5 = (2a)^5 = 32a^5$

b) Multiplica: $(3a^{\frac{7}{4}}b^{-\frac{2}{3}})(4a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{3}}) = 12a^{\frac{7}{4}+(-\frac{3}{4})}b^{-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}} = 12a^{\frac{4}{4}}b^{\frac{3}{3}} = 12ab$

c) Divide: $\frac{6x^{\frac{3}{2}}2y^{-2}z^0}{3x^{\frac{5}{3}}y^{-\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2z^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{5}{3}-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{4}-2}} = \frac{2z^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{9}{4}}}$

d) Simplifica: $\left(\frac{x^{\frac{3}{4}}b^{\frac{4}{3}}c^2}{xb^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{4}}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{-\frac{5}{8}}b^{-\frac{4}{6}}c^{-1}}{x^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{5}{8}}} = \frac{x^{\frac{1}{8}}c^{\frac{5}{8}}}{x^{\frac{5}{8}-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}-\frac{5}{8}}c^{-1-\frac{5}{8}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{8}}b^{\frac{5}{24}}c^{\frac{13}{8}}}$

e) Desarrolla: $(x^{\frac{2}{3}} + 2y^{\frac{2}{3}})^2$

Aplicar la regla para desarrollar el cuadrado de un binomio, se tiene:

$$(x^{\frac{2}{3}} + 2y^{\frac{2}{3}})^2 = (x^{\frac{2}{3}})^2 + 2(x^{\frac{2}{3}})(2y^{\frac{2}{3}}) + (2y^{\frac{2}{3}})^2 = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 4y^{\frac{4}{3}}$$

Formas radicales equivalentes

A partir de las leyes de los exponentes se derivan las siguientes leyes de los radicales:

Formas radicales

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Formas exponenciales

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = (ab)^{\frac{m}{n}}$$

$$(a^{\frac{1}{n}})(a^{\frac{1}{m}}) = a^{\frac{1}{nm}}$$

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Estas formas radicales se utilizan en la simplificación de radicales, las cuales pueden ser:

Factorización del radicando. Si el radicando dado no tiene raíz *perfecta*, de acuerdo con el índice del radical se puede factorizar, de tal manera que uno de los factores tenga raíz perfecta, el cual se saca como coeficiente (factor) del radical.

Ejemplos

1. Simplifica $\sqrt{18a^3y}$; al factorizar el radicando, se tiene:

$$\sqrt{(9a^2)(2ay)} = 3a\sqrt{2ay}$$

2. Simplifica $\sqrt[3]{40x^3y^2}$; al factorizar el radicando, se tiene:

$$\sqrt[3]{(8x^3)(5y^2)} = 2x\sqrt[3]{5y^2}$$

Racionalización de denominadores. Se multiplica el numerador y denominador por una misma expresión que transforme al denominador en una expresión que tenga raíz *perfecta* de acuerdo con el índice del radical.

Ejemplos

1. Racionaliza $\sqrt{\frac{y^3z}{8x}}$; al multiplicar numerador y denominador por una misma cantidad, la cual transforme al denominador en una expresión de raíz perfecta, por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{y^3z}{8x}} \sqrt{\frac{2x}{2x}} = \sqrt{\frac{2xy^3z}{16x^2}} = \frac{\sqrt{(y^2)(2xyz)}}{4x} = \frac{y\sqrt{2xyz}}{4x}$$

2. Racionaliza $\sqrt{\frac{2x}{(x+5)}}$; al aplicar el proceso de la racionalización, se tiene:

$$\sqrt{\frac{2x}{(x+5)}} \sqrt{\frac{(x+5)}{(x+5)}} = \sqrt{\frac{2x(x+5)}{(x+5)^2}} = \frac{\sqrt{2x^2+10x}}{x+5}$$

Reducción de radicales como otro de índice menor. Si el radicando es una potencia perfecta, y si el exponente del radicando y el índice del radical tienen algún factor común mayor que la unidad, entonces tanto el exponente del radicando como el del radical pueden simplificarse para así reducir el índice del radical.

Ejemplos

1. Simplifica $\sqrt[4]{4x^6y^8}$; al pasar de la forma radical a la forma exponencial, se tiene:

$$\sqrt[4]{2^2x^6y^8} = 2^{\frac{2}{4}}x^{\frac{6}{4}}y^{\frac{8}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}y^2 = \sqrt{2x^3y^4} = \sqrt{x^2(y^2)^2 2x} = xy^2\sqrt{2x}$$

2. Simplifica $\sqrt[6]{27x^3y^9}$; al aplicar el proceso de la reducción de radicales como otro de índice menor, se tiene:

$$\sqrt[6]{3^3x^3y^9} = 3^{\frac{3}{6}}x^{\frac{3}{6}}y^{\frac{9}{6}} = 3^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3xy^3} = \sqrt{(y^2)(3xy)} = y\sqrt{3xy}$$

Introducción de un factor exterior al radical. Este proceso es inverso al de la factorización del radicando y consiste en elevar el coeficiente (factor) a la potencia que tenga el índice del radical y luego escribirlo como factor del radicando.

Ejemplos

Introduce el coeficiente del radical como factor del radicando, en las siguientes expresiones.

1. $2a\sqrt{x}$. Se eleva el coeficiente del radical a la potencia del índice, luego se escribe como factor del radicando, lo que resulta:

$$\sqrt{(2a)^2(7x)} = \sqrt{(4a^2)(7x)} = \sqrt{28a^2x}$$

2. $ax\sqrt{1-\frac{1}{a^2x^2}}$. Al aplicar el proceso anterior, se tiene:

$$\sqrt{(ax)^2\left(1-\frac{1}{a^2x^2}\right)} = \sqrt{a^2x^2\left(1-\frac{1}{a^2x^2}\right)} = \sqrt{a^2x^2 - \frac{a^2x^2}{a^2x^2}} = \sqrt{a^2x^2 - 1}$$

Adición y sustracción de radicales

Los radicales del mismo índice y con igual radicando, se denominan *radicales semejantes*. La suma y resta algebraica de radicales semejantes se realiza sumando algebraicamente los coeficientes de dichos radicales. Si los radicales no son semejantes, se transforma a radicales semejantes por los métodos de simplificación ya descritos.

En caso de que los radicales no se puedan transformar en semejantes, la operación solo queda indicada.

EJEMPLOS

Ejemplos

Suma algebraicamente los siguientes radicales.

- 1 ••• $2\sqrt{3a} + 5\sqrt{3a} - 4\sqrt[3]{a} = 7\sqrt[3]{a} - 4\sqrt[3]{a} = 3\sqrt[3]{a}$
- 2 ••• $4x\sqrt{3ab} - \sqrt{12x^2ab} + x\sqrt{27ab} = 4x\sqrt{3ab} - \sqrt{(4x^2)(3ab)} + x\sqrt{(9)(3ab)}$
 $= 4x\sqrt[3]{ab} - 2x\sqrt{3ab} + 3x\sqrt{3ab} = 7x\sqrt[3]{ab} - 2x\sqrt{3ab} = 5x\sqrt{3ab}$
- 3 ••• $\sqrt[3]{3x^4} + 2x\sqrt[3]{81x} - \sqrt{12x^3} = \sqrt[3]{(x^3)(3x)} + 2x\sqrt[3]{(27)(3x)} - \sqrt{(4x^2)(3x)}$
 $= x\sqrt[3]{3x} + 6x\sqrt[3]{3x} - 2x\sqrt{3x} = 7x\sqrt[3]{3x} - 2x\sqrt{3x}$

Multiplicación de radicales

El producto de dos o más radicales del mismo índice es un radical del mismo índice cuyo radicando resulta de multiplicar los distintos radicandos dados, es decir:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Para multiplicar radicales de diferente índice, se transforman primero como radicales del mismo índice, luego se realiza la operación.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 ••• Multiplica $(2\sqrt{7x})(4\sqrt{2xy}) = 8\sqrt{(7x)(2xy)} = 8\sqrt{14x^2y} = 8x\sqrt{14y}$
- 2 ••• Multiplica $(3^3\sqrt{5ax^2})(7\sqrt{2ax}) = 21[5ax^2]^{\frac{1}{3}}(2ax)^{\frac{1}{2}}$

Al multiplicar numerador y denominador de los exponentes fraccionarios, por una misma cantidad que transforme los exponentes a un mismo índice, tenemos:

$$21[(5ax^2)^{\frac{1}{3}(\frac{2}{2})}(2ax)^{\frac{1}{2}(\frac{3}{3})}] = 21(5ax^2)^{\frac{2}{6}}(2ax)^{\frac{3}{6}} = 21\sqrt[6]{(5ax^2)^2}\sqrt[6]{(2ax)^3}$$

$$= 21\sqrt[6]{(25a^2x^4)(8a^3x^3)} = 21\sqrt[6]{200a^5x^7} = 21x\sqrt[6]{200a^5x}$$

- 3 ••• Multiplica $(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})(\sqrt{x} - 2\sqrt{x+h})$

Al aplicar la regla para el producto de binomios con términos semejantes, resulta:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})(\sqrt{x} - 2\sqrt{x+h}) = \sqrt{x^2} - \sqrt{x}\sqrt{x+h} - 2\sqrt{(x+h)^2}$$

$$= x - \sqrt{x(x+h)} - 2(x+h)$$

$$= x - \sqrt{x^2 + xh} - 2x - 2h$$

$$= -(x + 2h + \sqrt{x^2 + xh})$$

División de radicales

El cociente de dos radicales del mismo índice es un radical del mismo índice cuyo radicando es una fracción; es necesario racionalizar el denominador para obtener un radicando no fraccionario, es decir:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{ab}}{b}$$

Para dividir radicales de diferente índice, se transforman primero como radicales del mismo índice, luego se realiza la operación.

EJEMPLOS

- 1 ••• Divide $\frac{16\sqrt{2a^3}}{4\sqrt[3]{ax}} = \sqrt[4]{\frac{2a^3}{3ax}} = \sqrt[4]{\frac{2a^2}{3x}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3x}} = a\sqrt[4]{\frac{2}{3x}}$; al racionalizar el denominador, se tiene:

$$4a\sqrt[4]{\frac{2}{3x}}\sqrt[4]{\frac{3x}{3x}} = 4a\sqrt[4]{\frac{(2)(3x)}{(3x)^2}} = \frac{4a\sqrt[4]{6x}}{3x}$$

- 2 ••• Divide $\frac{(25a^2)^{\frac{1}{3}}}{(5a)^{\frac{1}{2}}}$; al multiplicar numerador y denominador de los exponentes fraccionarios, por una misma cantidad que transforme los exponentes a un mismo índice.

$$\frac{(25a^2)^{\frac{1}{3}}}{(5a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(25a^2)^{\frac{2}{6}}}{(5a)^{\frac{3}{6}}} = \frac{\sqrt[6]{(25a^2)^2}}{\sqrt[6]{(5a)^3}} = \sqrt[6]{\frac{625a^4}{125a^3}} = \sqrt[6]{5a}$$

- 3 ••• Divide $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+h}}{2\sqrt{x} - 3\sqrt{x+h}}$; al racionalizar el denominador, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+h}}{2\sqrt{x} - 3\sqrt{x+h}} \left(\frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt{x+h}}{2\sqrt{x} + 3\sqrt{x+h}} \right) &= \frac{2\sqrt{x^2} + 5\sqrt{x}\sqrt{x+h} + 3\sqrt{(x+h)^2}}{4\sqrt{x^2} - 9\sqrt{(x+h)^2}} \\ &= \frac{2x + 5\sqrt{x(x+h)} + 3(x+h)}{4x - 9(x+h)} = \frac{2x + 5\sqrt{x^2 + xh} + 3x + 3h}{4x - 9x - 9h} \\ &= \frac{5x + 3h + 5\sqrt{x^2 + xh}}{-5x - 9h} = \frac{5x + 3h + 5\sqrt{x^2 + xh}}{-(5x + 9h)} \\ &= -\frac{5x + 3h + 5\sqrt{x^2 + xh}}{5x + 9h} \end{aligned}$$

Números imaginarios

Son aquéllos que se indican en radicales de índice par y cuyos radicandos son cantidades negativas, es decir:

$$\left\{ \sqrt{-1}, \sqrt{-5}, \sqrt[4]{-16}, \sqrt[4]{-81}, \sqrt[5]{-64}, \sqrt[5]{-739} \right\} \quad \text{Son números imaginarios.}$$

Unidad imaginaria

El número imaginario $\sqrt{-1}$ se denomina *unidad imaginaria*, la cual se representa por la letra i .

Operaciones con la unidad imaginaria

Al aplicar la igualdad $\sqrt{-1} = i$ en las siguientes operaciones, se tiene:

$$a) \sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$$

$$b) \sqrt{-a} = \sqrt{a(-1)} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = i\sqrt{a} \quad (a > 0)$$

$$c) (\sqrt{-1})^2 = -1 = i^2$$

De este último ejemplo se observa que la raíz cuadrada de un número negativo al cuadrado, da como resultado un número negativo.

Potencias de la unidad imaginaria

Puesto que $i^2 = -1$, se puede determinar cualquier potencia entera de -1 , es decir:

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}$$

$$(i)^1 = i$$

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$(i)^2 = -1$$

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}$$

$$(i)^3 = (i)^2(i) = (-1)(i) = -i$$

$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2 = 1$$

$$(i)^4 = (i)^2(i)^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$$

$$(i)^5 = (i)^4(i) = (1)(i) = i$$

Números complejos

Son números que constan de una parte real y una parte imaginaria. Tienen la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

Casos especiales

1. Cuando $b = 0$, el número complejo es *real*.

$$a + bi = a + (0)i = a$$

2. Cuando $b \neq 0$, el número complejo es *imaginario*.

$$a + bi = a + bi$$

3. Cuando $a = 0$ y $b \neq 0$, el número complejo es *imaginario puro*.

$$a + bi = 0 + bi = bi$$

Los números $a + bi$ y $a - bi$ se llaman **números complejos conjugados**, y se aplican en la solución de ecuaciones cuadráticas.

EJERCICIO 7

I. Realiza en tu cuaderno, lo que se pide en cada caso.

1. ¿Cómo se define el término exponente?
2. Escribe el enunciado y la simbología de las leyes de los exponentes.
3. Explica la aplicación del cero y los números enteros negativos como exponentes.
4. ¿Qué son los exponentes fraccionarios?
5. ¿Cuál es la aplicación de las formas radicales equivalentes?
6. Explica el proceso de factorizar el radicando.
7. ¿Cómo se racionaliza el denominador de un radical?
8. Describe la reducción de radicales como otro de índice menor.
9. Explica cómo se introduce un factor externo a un radical.
10. ¿Qué son los radicales semejantes?
11. Desarrolla el concepto de número imaginario.
12. ¿A qué se le llama unidad imaginaria?
13. ¿Cuál es el resultado de obtener la raíz cuadrada de un número negativo al cuadrado?
14. ¿Cuál es la definición del término números complejos?
15. ¿Qué son los números complejos conjugados?

II. En equipo resuelvan los siguientes problemas y compartan sus resultados con el resto del grupo.

1. Realiza las operaciones indicadas, aplica las leyes de los exponentes.

a) $(3x^3)(2x^2)$

b) $(5ax^2)(a^2x^3)(6ax)$

c) $(-2xy)(-3xy^2)(-x^3)$

d) $(4a^2bc^3)^3$

e) $(2m^2n^3)^5$

f) $(-3t^2)^4$

g) $(6x^2y)^2(3x^2y^3)^3$

h) $(ab^2c^3)^3(a^2b^3c)^5$

i) $\left(\frac{2}{x^2}\right)^3\left(\frac{x^3}{4}\right)^2$

j) $\left(\frac{4x}{y^2}\right)^3\left(\frac{y}{2x^2}\right)^3$

k) $\frac{2a^5b^2}{6ab^3}$

l) $\frac{9q^2r^3}{3pq^2r}$

m) $\frac{16m^4n^2}{4m^2n^4}$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

$$n) \frac{5x^4y^3z^2}{15x^3y^2z^4}$$

$$\tilde{n}) \frac{7^2a^3b^2c}{63a^5b^{42}}$$

$$o) \left(\frac{2^3x^2y^5z^4}{4xy^3} \right)^2$$

$$p) \left(\frac{3^2a^4b^3c^2}{15a^5bc^3} \right)^3$$

$$q) \frac{(2m^3n^2)^3}{(8mn^3)^2}$$

$$r) \frac{(5a^3b^4)^4}{(20a^5b^2)^3}$$

$$s) \frac{(3^2p^5r^5)^5}{(6^2p^3q^7r^6)^3}$$

$$t) \left(\frac{2^2xy^2}{3^2z^3} \right) \left(\frac{9y^3}{8x^3z} \right)$$

$$u) \left(\frac{2a^4}{9bc^3} \right) \left(\frac{6b^3}{4b^2c^2} \right)$$

$$v) \left(\frac{a^2b^4c^6}{a^4c^2} \right) \left(\frac{abc}{b^3ac^2} \right)$$

$$w) \frac{x^{2+a}}{x^a}$$

$$x) \frac{m^2b^{x+1}z^{y-2}}{m^3b^{2x+1}z^{y+3}}$$

$$y) \frac{7^{2n}x^{m+3}}{7^n x^m}$$

2. En las siguientes expresiones, introduce el factor exterior al radical.

$$a) 2x\sqrt{3ab}$$

$$b) 5ab\sqrt{a^2b}$$

$$c) \frac{a}{b}\sqrt{5ab^2}$$

$$d) 4x^2\sqrt{\frac{a^2-x^2}{16x^4}}$$

$$e) 9x\sqrt{\frac{1}{81}-\frac{1}{x}}$$

$$f) \frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$$

$$g) \frac{1}{5x}\sqrt[3]{\theta x^3y}$$

3. Simplifica los siguientes radicales y discute en plenaria tus resultados.

$$a) \sqrt[6]{x^5y^2}$$

$$b) \sqrt[4]{32x^5y^3}$$

$$c) \sqrt[3]{8a^3b^5}$$

$$d) \sqrt{40mn^2}$$

$$e) \sqrt{147x^2y^3}$$

$$f) \sqrt[3]{\frac{11a^4b^6}{7c^2}}$$

$$g) \sqrt[3]{\frac{8m^2n^2}{25a}}$$

$$h) \sqrt[5]{\frac{ax^5}{\theta m}}$$

$$i) \sqrt[5]{\frac{7a^4}{8b^3c}}$$

$$j) \sqrt[5]{\frac{9xy^2}{50x^5}}$$

$$k) \sqrt[4]{18a^3}$$

$$l) \sqrt[4]{25a^2}$$

$$m) \sqrt[6]{27x^9y^3}$$

$$n) \sqrt[4]{\frac{64x^6}{9y^2}}$$

4. Transforma las siguientes expresiones en otras que tengan un solo signo radical.

a) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{8x^3y^5}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{4a^2}}$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{27x^6y^6}}$

5. Resuelve las siguientes sumas y restas de radicales.

a) $\sqrt{16xy^3} - \sqrt{64x^3y} + \sqrt{4xy}$

d) $\sqrt[3]{8m^3n^3} - \sqrt[3]{16m^4n} + \sqrt[6]{4m^2n^8}$

b) $\sqrt{8a^2x^3} - 3\sqrt[3]{a^2x} + \sqrt{8x^3}$

e) $\sqrt{(x+y)^3} - \sqrt{(x+y)^5} + \sqrt{(x+y)}$

c) $\sqrt[3]{-27m^4} + \sqrt[3]{64x^5} + \sqrt[3]{-8x}$

f) $\sqrt{54a^3b} + \sqrt[3]{8xy^4} + \sqrt{6xy}$

6. Multiplica los siguientes radicales.

a) $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{9x^{2q}}\right)(4\sqrt[3]{3xy})$

e) $(2\sqrt{5ax})(4\sqrt[4]{8ax^3})$

b) $(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$

f) $(\sqrt[3]{9ab^2})(\sqrt[6]{81b^5})$

c) $(2 + \sqrt{a^2 - x^2})(5 + \sqrt{a^2 - x^2})$

g) $(\sqrt[3]{16m^2})\left(\frac{1}{2}\sqrt[5]{32mn^4}\right)$

d) $(\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x})(\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x})$

h) $(\sqrt[5]{4a^2x})(\sqrt[5]{2ax^2})$

7. Resuelve las siguientes divisiones de radicales.

a) $\frac{\sqrt[4]{2ab}}{\sqrt[4]{a^2b}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{8xy^3}}{\sqrt[4]{4y^2}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{2mn}}{\sqrt[3]{4mn^2}}$

g) $\frac{\sqrt[9]{27x^2}}{\sqrt[3]{3x^4}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{3a^3b}}{5\sqrt[3]{ab}}$

h) $\frac{5\sqrt{ax} - 4\sqrt{b}}{4\sqrt{ax} - 5\sqrt{b}}$

d) $\frac{12a\sqrt{x^2y^3}}{4\sqrt{x^3y^2}}$

i) $\frac{\sqrt{mn} + \sqrt{ab}}{\sqrt{mn} - \sqrt{ab}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{16m^5}}{\sqrt[3]{2m^2}}$

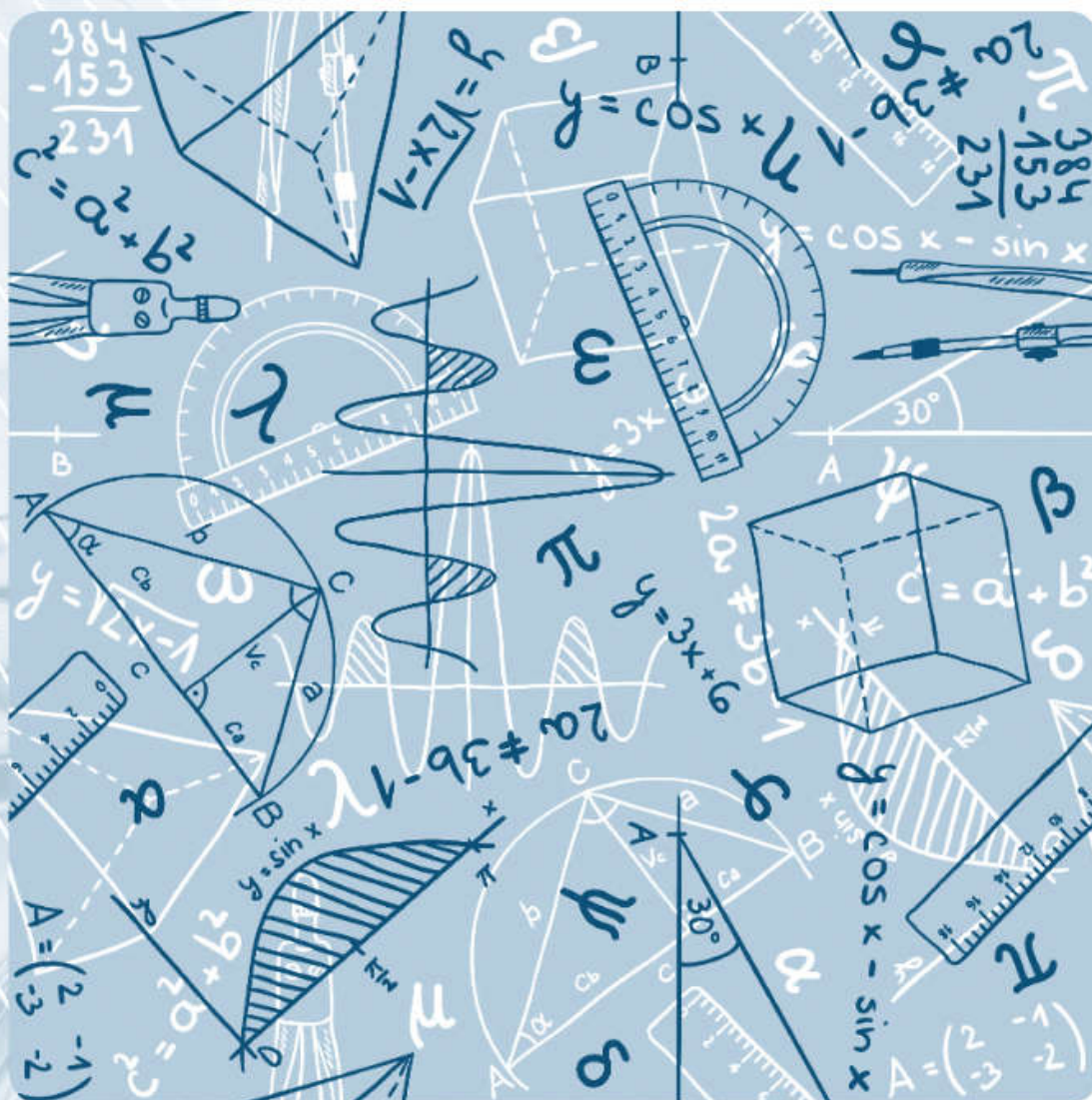
j) $\frac{4 - \sqrt{6x}}{(6 - \sqrt{6x})(4 + \sqrt{6x})}$

Autoevaluación

Contesta lo que se te pide.

- Traduce las siguientes expresiones dadas en lenguaje común al lenguaje algebraico.
 - La quinta parte de un número.
 - La octava de un número más el triple del mismo número.
 - El doble de un número.
 - La cuarta parte de un número más un número dividido en su quinta parte.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde al siguiente enunciado? “La resta del doble del cuadrado de una cantidad y el cuadrado de otra cantidad” es:
 - $2(x - y)^2$
 - $2x^2 - y^2$
 - $2(x^2 - y^2)$
 - $(2x)^2 - y^2$
- Factoriza los siguientes polinomios.
 - $x^3 - 5x^2 + 5x - 1$
 - $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$
 - $a^3 + 3a^2 + 6a + 27$
 - $x^2 + 2xy + y^2 - 9$
- Resuelve las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas.
 - $\frac{z+2}{z-2} + \frac{z+10}{z-10}$
 - $\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1-x^2}$
 - $\frac{2y+5}{2y^2+1} + 2y - 7$
- Manuel vende verdura en el mercado. Un día llevó a vender jitomates y limones. Toda la verdura estaba separada por cajones, los cuales contenían solamente jitomates o solamente limones. Las cantidades de verdura en los cajones eran 8, 12, 15, 17, 19 y 22. Después de que vendió todo un cajón de jitomates se dio cuenta de que el número de jitomates era el doble que el de limones. ¿Cuántos jitomates y cuántos limones le quedaron después de esa venta?
- Un fabricante tiene 30 litros de chocolate que cuesta \$40 el litro. ¿Cuántos litros de chocolate que cuesta \$80 el litro debe agregarles para obtener una mezcla que pueda venderse a \$60 el litro?

UNIDAD 2



Ecuaciones

Evaluación diagnóstica

Resuelve lo que se indica en cada caso.

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por cualquiera de los métodos algebraicos.

a) $x - 5y = 6$ y $2x + 3y = -2$

b) $3x + y = 4$ y $2x + y = 2$

c) $x - 3y = -85$ y $4x - 5y = -25$

d) $5x - 3y = -6$ y $6x + 4y = -30$

2. Un carpintero va a destinar el 75% de su trabajo a la venta de muebles de cedro pero antes tiene que vender los muebles de nogal que tiene en su taller, si tiene 30 muebles de nogal menos de los que planea construir de cedro, ¿Cuántos muebles quiere construir?
3. En una tienda de abarrotes se tienen 30 piezas de pan que cuesta \$7 la pieza. Juan desea comprar 10 piezas de pan. ¿Cuántas piezas de pan que cuestan \$11 la pieza debe agregarles para obtener una compra que pueda pagar si tiene \$210?
4. Hace 3 días, el costo total de un auto era el doble de otro y dentro de 7 días sólo será la mitad. ¿Cuál es el costo total de ese auto?
5. Marco y Luis llenan juntos una piscina en dos horas, Luis lo hace por sí solo en tres horas menos que Marco. ¿Cuántas horas tarda cada uno por separado?

Propósito del tema

Que el estudiante:

- Use el lenguaje algebraico para describir y obtener información de ecuaciones lineales.
- Aprenda a resolver ecuaciones de primer grado e interpretar sus raíces como solución a ciertos problemas.
- Modele situaciones con sistemas de ecuaciones 2×2 y 3×3 .
- Resuelva ecuaciones lineales por medio de diversos métodos de solución.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda el tema

Contenidos conceptuales

- Concepto de ecuación.
- Concepto de ecuación equivalente.
- Concepto de ecuación de primer grado.
- Sistemas de ecuaciones lineales.
- Métodos de sustitución y reducción para resolver sistemas lineales de 2×2 .
- Concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Sistemas de ecuaciones lineales consistentes e inconsistentes.

Contenidos procedimentales

- Notará la diferencia entre ecuación e identidad.
- Identificará modelos lineales.
- Resolverá ecuaciones de primer grado.
- Resolverá problemas utilizando el lenguaje algebraico.

Contenidos actitudinales

- Expresará ideas utilizando la terminología relativa a ecuaciones de primer grado.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Expresará ideas utilizando modelos lineales.
- Colaborará en equipo y respetará a sus compañeros al resolver problemas.

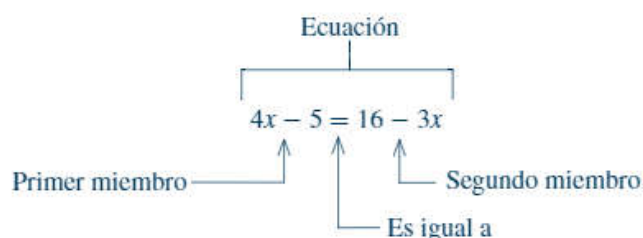
Ecuaciones

Definición de ecuación

La ecuación es una igualdad en la que intervienen letras cuyos valores son desconocidos y se denominan **incógnitas**, las cuales se indican generalmente por las últimas letras del alfabeto. Cuando alguno(s) valor(es) de las incógnitas hacen verdadera la igualdad de la ecuación se establece que dichos valores *satisfacen* la ecuación, por lo que una ecuación es una igualdad condicionada.

La notación para una ecuación consiste en escribir el símbolo “=” entre las dos cantidades que se consideren iguales, por lo que una ecuación consta de dos partes llamadas *miembros*, uno a la izquierda del símbolo y el otro a la derecha, cuyos nombres son primer y segundo miembro de la ecuación, respectivamente.

Ejemplo

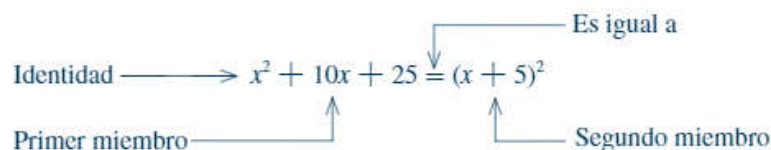


Definición de identidad

La identidad es una igualdad que se verifica para cualquier valor que adquieran las incógnitas contenidas en dicha identidad, por lo que no es una igualdad condicionada.

La identidad emplea el mismo símbolo de la ecuación para separar sus miembros, que siguen la nomenclatura de los componentes de una ecuación.

Ejemplo



Grado de una ecuación

El grado de una ecuación queda determinado por el mayor exponente al que está elevada la incógnita en la ecuación considerada.

Ejemplos

a) $4x - 5 = 16 - 3x$

Es una ecuación de primer grado, ya que su incógnita x tiene como exponente la unidad.

Las ecuaciones de primer grado, también se llaman *ecuaciones lineales* o *simples*.

- b) $7x^2 - 4x + 3 = 0$ Es una ecuación de segundo grado, ya que su incógnita x tiene como mayor exponente el 2.
- c) $2x^3 + x^2 - 18x + 15 = 0$ Es una ecuación de tercer grado, ya que su incógnita x tiene como mayor exponente el 3.

Resolver una ecuación es encontrar el valor o valores que adquieren las incógnitas para satisfacer una ecuación; a este valor o valores se le llama *solución* o *raíz de la ecuación*.

El número de soluciones de una ecuación, está en función de su grado, es decir, las ecuaciones de primer grado tienen una sola raíz, las ecuaciones de segundo grado tienen dos raíces, las ecuaciones de tercer grado tienen tres raíces, etcétera.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes, si tienen exactamente las mismas soluciones. Al resolver una ecuación, se transforma la ecuación dada en otra que es equivalente a la primera y que se resuelve más fácilmente.

En el proceso de resolver una ecuación, es necesario realizar operaciones que den lugar a otras ecuaciones y así determinar si la ecuación derivada es *equivalente* a la ecuación original. Para ello se deben tener presentes las siguientes propiedades.

- a) Si se suma o resta una misma cantidad a ambos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente a la original.

Ejemplo

Dada la ecuación $x + 7 = 12$, si se suma 5 a ambos miembros, resulta:

$$\begin{aligned}x + 7 + 5 &= 12 + 5 \\x + 12 &= 17 \leftarrow \text{Ecuación equivalente}\end{aligned}$$

En la ecuación original y la equivalente, $x = 5$ satisface ambas ecuaciones. El proceso es igual para la resta.

- b) Si se multiplica o divide ambos miembros de una ecuación por una misma cantidad diferente de cero, se obtiene una ecuación equivalente a la original.

Ejemplo

Dada la ecuación $\frac{x}{2} = 7$, si se multiplica por 2 a ambos miembros, resulta:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2}\right)(2) &= (7)(2) \\x &= 14 \leftarrow \text{Ecuación equivalente}\end{aligned}$$

Dada la ecuación $2x = 7$, si se divide por 2 a ambos miembros, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{2x}{2} &= \frac{7}{2} \\x &= \frac{7}{2} \leftarrow \text{Ecuación equivalente}\end{aligned}$$

De las propiedades anteriores, se originan los siguientes principios:

1. Si en un miembro de la ecuación un término está sumando o restando, pasará al otro miembro de la ecuación, realizando la operación contraria.

Este principio general se llama **transposición de términos**, el cual se define como el cambio de términos de una ecuación de un miembro a otro, con el respectivo cambio de signo.

Ejemplo

$$5x - 6 = 3x + 4$$

El seis está restando en el primer miembro de la ecuación; pasará al segundo miembro de la ecuación sumando.

El $3x$ está sumando en el segundo miembro de la ecuación; pasará al primer miembro de la ecuación restando.

$$5x - 3x = 4 + 6$$

2. Las cantidades que aparecen como divisores en un miembro de la ecuación, pasarán al otro miembro de la ecuación multiplicando a los términos que estén contenidos en dicho miembro.

Ejemplo

$$\frac{x}{3} = 12 - x$$

El 3 está dividiendo en el primer miembro de la ecuación, pasará al otro miembro de la ecuación, multiplicando a los términos que contenga.

$$x = 3(12 - x)$$

$$x = 36 - 3x$$

3. Cualquier cantidad que esté multiplicando en un miembro de la ecuación, pasará al otro miembro de la ecuación, como divisor de los términos que estén contenidos en dicho miembro.

Ejemplo

$$2x = 13$$

El 2 está multiplicando en el primer miembro de la ecuación, pasará al otro miembro de la ecuación dividiendo a los términos que contenga.

$$x = \frac{13}{2}$$

Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver una ecuación lineal con una incógnita, es necesario determinar la raíz o valor para la incógnita que satisfaga la ecuación dada.

Una ecuación de este tipo tiene la forma simple de $ax + b = 0$, donde b es un número cualquiera y a debe ser cualquier número diferente de cero.

El método de solución para las ecuaciones de primer grado consta de los siguientes pasos:

1. Se agrupan en un miembro de la ecuación (generalmente en el primer miembro) los términos que contienen la incógnita y en el otro miembro, los términos constantes.
2. Se reducen términos semejantes según las propiedades y principios que anteriormente se explicaron.

EJEMPLOS

Ejemplos

Resuelve las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita.

1. $x - 8 = 1 - 2x$

Se agrupan en el primer miembro de la ecuación los términos que contienen la incógnita y en el otro miembro a los términos constantes, es decir:

$$x + 2x = 1 + 8$$

Se reducen los términos semejantes en ambos miembros:

$$3x = 9$$

Al despejar para la incógnita, se tiene:

$$x = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

Esta ecuación también se resuelve al aplicar las propiedades de la igualdad, es decir:

$$x - 8 = 1 - 2x$$

Al sumar 8 a ambos miembros se obtiene:

$$x - 8 + 8 = 1 - 2x + 8$$

$$x = 9 - 2x$$

Al sumar $2x$ a ambos miembros resulta:

$$x + 2x = 9 - 2x + 2x$$

$$3x = 9$$

Al dividir ambos miembros entre 3 se tiene:

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

La comprobación se realiza al sustituir el valor de x (incógnita) en la ecuación dada, es decir:

Si $x = 3$, se tiene:

$$3 - 8 = 1 - 2(3)$$

$$-5 = -5$$

2 ••• $\frac{1-2x}{3} = \frac{5}{12} + \frac{5x+4}{4}$

Para resolver, se suprimen los denominadores multiplicando cada uno de los términos de ambos miembros de la ecuación por el *mínimo común múltiplo* de los denominadores; para este ejemplo el mcm es 12, por lo que resulta:

$$\frac{12(1-2x)}{3} = \frac{12(5)}{12} + \frac{12(5x+4)}{4}$$

$$4(1-2x) = 5 + 3(5x+4)$$

$$4 - 8x = 5 + 15x + 12$$

Al agrupar términos en ambos miembros, se tiene:

$$-8x - 15x = 17 - 4$$

$$-23x = 13$$

Al despejar la incógnita, resulta:

$$x = -\frac{13}{23}$$

3 ••• $2x + 3a = 5 + 4a + x$

Por transposición de términos:

$$2x - x = 5 + 4a - 3a$$

$$x = 5 + a$$

Ecuaciones de primer grado con la incógnita en el denominador

Para resolver ecuaciones fraccionarias con la incógnita en el denominador es necesario aplicar los siguientes pasos:

1. Se suprimen los denominadores, multiplicando cada uno de los términos de ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores; para transformar la ecuación fraccionaria en lineal.
2. A la ecuación así obtenida se le aplica el método de solución para ecuaciones lineales descrito anteriormente.

EJEMPLOS



1 ••• $\frac{2}{3x} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2x} + \frac{13}{6}$

Se eliminan los denominadores, multiplicando cada uno de los términos de ambos miembros de la ecuación por el mcm de los denominadores, el cual es $6x$. Entonces,

$$\frac{6x(2)}{3x} + \frac{6x(1)}{2} = \frac{6x(3)}{2x} + \frac{6x(13)}{6}$$

$$4 + 3x = 9 + 13x$$

Por transposición de términos, se tiene:

$$\begin{aligned} 3x - 13x &= 9 - 4 \\ -10x &= 5 \end{aligned}$$

Al despejar la incógnita, resulta:

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{-10} \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2 •• $\frac{1-5x^2}{3x^2-2x-1} = \frac{1-2x}{3x+1} - 1$

Al factorizar el denominador $3x^2 - 2x - 1$ resulta $(3x + 1)(x - 1)$, el cual es el mcm de los denominadores; y al eliminar los denominadores, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{(3x+1)(x-1)(1-5x^2)}{(3x+1)(x-1)} &= \frac{(3x+1)(x-1)(1-2x)}{(3x+1)} - \frac{(3x+1)(x-1)}{1} \\ \left. \begin{aligned} 1-5x^2 &= (x-1)(1-2x) - (3x+1)(x-1) \\ 1-5x^2 &= x-2x^2-1+2x-3x^2+2x+1 \end{aligned} \right\} \text{Se agrupan términos} \\ -5x^2 + 2x^2 + 3x^2 - x - 2x - 2x &= -1 + 1 - 1 \\ -5x &= -1 \end{aligned}$$

Al despejar la incógnita, resulta:

$$x = \frac{1}{5}$$

3 •• $\frac{x+3}{x^2-5x+4} - \frac{x-4}{x^2+2x-3} + \frac{2}{x^2-x-12} = 0$

Si se factorizan los denominadores se tiene:

$$\frac{x+3}{(x-4)(x-1)} - \frac{x-4}{(x+3)(x-1)} + \frac{2}{(x-4)(x+3)} = 0$$

El mcm de los denominadores es $(x-4)(x-1)(x+3)$, que se emplea para eliminar los denominadores. Es decir:

$$\begin{aligned} \frac{(x-4)(x-1)(x+3)(x+3)}{(x-4)(x-1)} - \frac{(x-4)(x-1)(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-1)} + \frac{(x-4)(x-1)(x+3)(2)}{(x-4)(x+3)} &= 0 \\ (x+3)(x+3) - (x-4)(x-4) + 2(x-1) &= 0 \\ x^2 + 6x + 9 - x^2 + 8x - 16 + 2x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Por transposición de términos, se tiene:

$$x^2 - x^2 + 6x + 8x + 2x = 2 + 16 - 9$$

Al despejar la incógnita, resulta:

$$\begin{aligned} 16x &= 9 \\ x &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Problemas basados en palabras cuyo planteamiento genera una ecuación de primer grado con una incógnita

La aplicación del álgebra en la solución de problemas prácticos consiste en transformar del lenguaje común al lenguaje algebraico el enunciado de los problemas dados.

Los problemas dados en palabras contienen cantidades conocidas (**datos**) y cantidades desconocidas (**incógnitas**) que se relacionan entre sí para dar lugar a una ecuación lineal.

Existe una gran variedad de problemas en lenguaje común para los que no existe un procedimiento establecido de solución; es decir, cada problema tiene diferente planteamiento. Por ello, se ofrecen las siguientes recomendaciones:

1. Lee detenidamente el enunciado del problema hasta entenderlo claramente, sin olvidar los datos y las incógnitas.
2. Expresa las incógnitas en términos de una sola variable.
3. Determina la relación entre datos e incógnitas en un planteamiento que forme una o más ecuaciones.
4. Resuelve la ecuación y comprueba el resultado obtenido.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 ••• Encuentra dos números tales que uno sea el doble del otro y que sumen un total de 159.

Datos	Planteamiento	Operación
x : número buscado	$2x + x = 159$	$3x = 159$
$2x$: el doble del número buscado		$x = \frac{159}{3}$
159: suma de los dos números buscados		$x = 53$

Los dos números buscados son 53 y 106.

- 2 ••• La suma de tres números es 171; el segundo número es la mitad del primero y el tercer número es $\frac{3}{4}$ del primero. Encuentra dichos números.

Datos	Planteamiento	Operación
x : primer número	$x + \frac{x}{2} + \frac{3x}{4} = 171$	$4x + 2x + 3x = 684$
$\frac{x}{2}$: segundo número		$9x = 684$
$\frac{3x}{4}$: tercer número		$x = 76$

171: suma de los tres números

Los tres números buscados son 76, 38 y 57.

- 3 ••• La medida de uno de los ángulos de un triángulo es el doble que el del menor y $\frac{2}{3}$ del ángulo mayor del triángulo. Determina el valor de los tres lados del triángulo.

Datos	Planteamiento	Operación
x : uno de los ángulos	$x + \frac{x}{2} + \frac{3x}{2} = 180^\circ$	$2x + x + 3x = 360^\circ$

$\frac{x}{2}$: ángulo menor

$$6x = 360^\circ$$

$\frac{x}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3x}{2}$: ángulo mayor

$$x = 60^\circ$$

180°: suma de los ángulos interiores del triángulo

Los tres ángulos son 60°, 30° y 90°, respectivamente.

- 4 ●● Una bolsa contiene 11.65 pesos en monedas de 25 y 10 centavos; si el número total de monedas es 70, encuentra cuántas monedas hay de cada denominación.

Datos

Planteamiento

Operación

x : número de monedas de 25 centavos

$$0.25x + 0.1(70 - x) = 11.65$$

$$0.25x + 7 - 0.1x = 11.65$$

$(70 - x)$: número de monedas de 10 centavos

$$0.15x = 4.65$$

70: total de monedas

$$x = \frac{4.65}{0.15}$$

\$11.65: suma del número de monedas de 39 monedas de 10 centavos

$$x = 31$$

Hay 31 monedas de 25 centavos y 25 de 10 centavos.

- 5 ●● ¿Cuántas onzas de plata pura deben agregarse a 24 onzas de una aleación al 60% para convertirla en una al 76%?

Datos

Planteamiento

Operación

x : número de onzas de plata

$$x + 0.6(24) = 0.76(24 + x)$$

$$x + 14.4 = 18.24 + 0.76x$$

24: número de onzas de aleación al 60%

$$x - 0.76x = 18.24 - 14.4$$

$(24 + x)$: número de onzas de aleación al 76%

$$0.24x = 3.84$$

$$x = \frac{3.84}{0.24}$$

$$x = 16$$

Se deben agregar 16 onzas de plata.

EJERCICIO 8

- I. Contesta en tu cuaderno, las siguientes preguntas.

1. ¿Qué es una ecuación?
2. ¿Qué es una incógnita en una ecuación?
3. ¿Qué nombre reciben las partes de una ecuación?
4. ¿Cómo se define una identidad?
5. ¿Cuál es la diferencia entre ecuación e identidad?
6. ¿Cómo se determina el grado de una ecuación?
7. ¿Cuál es la relación entre el número de soluciones y el grado de una ecuación?

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

8. ¿Qué es una ecuación equivalente?
9. ¿Cuáles son las propiedades que se aplican para transformar una ecuación en otra que sea equivalente?
10. ¿Qué es la transposición de términos?

II. Resuelve lo que se indica en cada caso.

1. Con ayuda de tu profesor resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado, para la incógnita x .

a) $15x - 24 = 3x$

b) $4x - 5 = 2x - 9$

c) $x + 11 = 23 + 5x$

d) $x - 9 = 4$

e) $6x + 2 = 1 + 2x$

f) $3(x - 5) - 4(x - 6) = 9$

g) $3x - 5 = 19 - (x - 2)$

h) $ax - 2 = bx - 6$

i) $5(x + 3) + 2(x - 7) = 3x - 11$

j) $x - a + 2 = 2ax - 3x + 5a$

k) $\frac{x}{6} + 5 = \frac{2}{3} + x$

l) $\frac{x}{6} - \frac{9}{4} = -\frac{x}{12} + 4 + \frac{x}{4}$

m) $10x - \frac{8x-3}{4} = 2(x-3)$

n) $\frac{5+2x}{3} + \frac{3x-4}{6} = \frac{1}{36}$

ñ) $\frac{3x+3}{7} - \frac{2x+1}{3} = \frac{5}{21}$

o) $\frac{6-8x}{10} = \frac{8-6x}{8} - \frac{10-4x}{4}$

p) $\frac{2x+14}{4} + \frac{x-10}{3} = \frac{x+2}{6}$

q) $\frac{x}{7} + \frac{x-1}{3} = \frac{2x+1}{42} - \frac{1}{21}$

r) $10 - 4a - x = 3x + b$

s) $8 - ax + 4x - 5 = 0$

t) $3x(5 - 3a) + 5 = 2x - a$

u) $3x(x - 1) - 2(x + 3)(x + 5) = x^2 - 2x + 1$

2. Resuelve para x las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{1}{x} - \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$

b) $\frac{x^2+1}{x^2-x-2} = \frac{3}{x-2} - 4$

c) $\frac{4}{x} - \frac{2}{5} = \frac{3}{x} + \frac{11}{25}$

d) $\frac{x^2+x-9}{x^2+5x+4} = \frac{x-1}{x+1} - \frac{3}{x+4}$

e) $\frac{2}{3x} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2x} + \frac{15}{8}$

f) $\frac{5}{2x+a} + \frac{8}{5x} = \frac{9}{10x-5a}$

g) $\frac{5}{7x} - \frac{9}{2x} - 5 = \frac{7}{14}$

h) $\frac{2x+5}{2x-5} + \frac{4x-5}{x+11} - \frac{10x^2-15x+32}{2x^2+17x-55} = 0$

i) $\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+1} = \frac{8}{x^2-1}$

j) $\frac{x+3}{x^2-5x+4} - \frac{x-4}{x^2+2x-3} = -\frac{6}{x^2-x-12}$

k) $\frac{2x^2+1}{x^2+7x} = \frac{2x-1}{x} - \frac{8}{x+7}$

l) $\frac{3x+4}{6x-5} = \frac{2x+5}{4x-1}$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

En equipo resuelvan los siguientes problemas expresados en palabras, cuyo planteamiento da lugar a una ecuación de primer grado con una incógnita y discutan sus resultados con el resto del grupo.

- a) Encuentra dos números tales que uno sea el doble del otro y que sumen 117.
- b) Encuentra dos números tales que uno sea el triple que el otro y que sumen 76.
- c) Encuentra el número que aumentado en $\frac{5}{3}$ de sí mismo sume 152.
- d) La suma de tres enteros consecutivos es 234; encuentra dichos enteros.
- e) La suma de dos números es 225, y uno de los números excede al otro en 45; encuentra los números.
- f) La suma de tres números es 92, el segundo es triple del primero y el primero es cinco veces menor que el tercero; encuentra los números.
- g) Cada uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles es 12° mayor que el tercer ángulo; determina los ángulos, recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .
- h) El ángulo menor de un triángulo es igual a $\frac{3}{4}$ del mayor y además es 25° más pequeño que el otro ángulo. Encuentra los ángulos.
- i) El ancho de un rectángulo es igual al lado de un cuadrado y el largo es seis unidades mayor que el ancho; determina las dimensiones del rectángulo si su área es 78 unidades cuadradas mayor que el área del cuadrado.
- j) Dos triángulos tienen bases iguales, la altura de un triángulo es siete unidades mayor que su base y la altura del otro es siete unidades menor que su base; calcula las alturas, si las áreas difieren en 63 unidades cuadradas.
- k) ¿Cuántos litros de jugo de piña, que valen 7 centavos por litro, deben mezclarse con 100 litros de jugo de coco, que valen 42 centavos por litro, para formar una mezcla que valga 55 centavos por litro?
- l) El tiempo empleado para caminar cierta distancia a 6 km/h es 45 minutos más que el requerido a 8 km/h; encuentra la distancia.
- m) Correr en automóvil cierta distancia a 110 km/h requiere de 20 minutos menos que lo que se emplea a 95 km/h; determina la distancia.
- n) Un hijo es 22 años menor que su padre; dentro de dos años su edad será igual a $\frac{1}{3}$ de la edad de su padre. Encuentra la edad actual del padre y del hijo.
- ñ) La edad de Héctor y la de Pedro suman 76 años; si Héctor es seis años mayor que Pedro, ¿qué edad tienen Héctor y Pedro?
- o) Joel tiene la mitad de dinero de lo que tiene Víctor, pero si Víctor le da a Joel 24 dólares, ambos tendrán la misma cantidad. ¿Cuánto dinero tienen Joel y Víctor?
- p) Con 64 pesos se adquirieron un cuaderno y una pluma, el cuaderno costó 19 pesos más que la pluma. ¿Cuánto se pagó por el cuaderno y por la pluma?
- q) El perímetro de un triángulo es 66 m; el lado b es el triple del lado a y el lado c es igual al lado a más 16 m. ¿Cuánto mide cada lado?
- r) Una persona llevaba una cesta con huevos al mercado y pensaba venderlos a 1 peso cada uno; en el camino se le rompen 30, y calcula que vendiéndolos a 1.2 pesos cada uno obtiene la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos huevos contenía la cesta?
- s) En un estacionamiento hay coches y motos; en total hay 36 vehículos y 100 ruedas. ¿Cuántos coches y motos hay?

→ Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones

Se llama sistema de ecuaciones a un conjunto de dos o más ecuaciones que tienen idénticas soluciones, es decir, que las soluciones satisfacen a cada una de las ecuaciones dadas; también se llaman sistema de ecuaciones simultáneas.

La solución de un sistema de ecuaciones requiere de tantas ecuaciones independientes como incógnitas se tengan por determinar; así, un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas constará de dos ecuaciones independientes; de modo similar, el sistema de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas constará de tres ecuaciones independientes, etcétera.

Si un sistema de ecuaciones tiene solución se dice que el sistema es posible o **compatible**.

Si la solución es única el sistema es **compatible y determinado**.

Si tiene infinitas soluciones el sistema es **compatible e indeterminado**.

Cuando el sistema no tiene solución, se dice que las ecuaciones y el sistema son **incompatibles**.

Métodos de solución para sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas significa determinar los valores de las incógnitas que generalmente son x y y que satisfacen a cada ecuación del sistema.

El proceso consiste en eliminar una de las dos incógnitas, para generar una ecuación lineal con una incógnita; una vez determinado el valor de una de las incógnitas, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema, con lo que se obtiene el valor de la otra incógnita.

Los principales métodos de solución para este sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas son:

Adición o sustracción (reducción). El método de suma o resta consiste en modificar las ecuaciones del sistema dado, de tal manera que se igualen en valor absoluto los coeficientes de una de las incógnitas y tenga signos contrarios, por lo que al sumarse algebraicamente las ecuaciones se elimina una de las incógnitas, dando lugar a una ecuación lineal con una incógnita que es fácil de resolver.

Los siguientes pasos nos facilitan la aplicación del método.

- Se multiplican los miembros de una o de las dos ecuaciones por una cantidad constante apropiada para obtener ecuaciones equivalentes que tengan igual coeficiente para cada una de las incógnitas.
- Por suma o resta se elimina una de las incógnitas.
- Se resuelve la ecuación lineal resultante.
- Se sustituye el valor determinado en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra incógnita.

Si las ecuaciones del sistema tienen alguna de las incógnitas con coeficiente idéntico el primer paso se omite.

EJEMPLO

- 1 ●●● Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$4x + 6y = -3 \quad (1)$$

$$5x + 7y = -2 \quad (2)$$

Se multiplican los miembros de la ecuación (1) por 5 y los de la ecuación (2) por -4 ; así, los coeficientes de x se igualan y son de signo contrario, es decir:

$$\begin{array}{rcl} 5(4x + 6y = -3) & \longrightarrow & 20x + 30y = -15 \\ -4(5x + 7y = -2) & \longrightarrow & -20x - 28y = 8 \end{array}$$

Al sumar algebraicamente ambas ecuaciones, resulta:

$$\begin{array}{r} 20x + 30y = -15 \\ -20x - 28y = 8 \\ \hline 2y = -7 \end{array}$$

Al despejar a y , se tiene:

$$y = -\frac{7}{2}$$

Al sustituir el valor de y en cualquiera de las ecuaciones originales se obtiene:

$$\begin{aligned} 4x + 6\left(-\frac{7}{2}\right) &= -3 \\ 4x - 21 &= -3 \end{aligned}$$

Se despeja a x y se encuentra su valor:

$$\begin{aligned} 4x &= -3 + 21 \\ x &= \frac{18}{4} \approx \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Se efectúa la comprobación, es decir:

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{9}{2}\right) + 6\left(-\frac{7}{2}\right) &= -3 \\ 18 - 21 &= -3 \\ -3 &= -3 \\ 5\left(\frac{9}{2}\right) + 7\left(-\frac{7}{2}\right) &= -2 \\ \frac{45}{2} - \frac{49}{2} &= -2 \\ -\frac{4}{2} &= -2 \quad -2 = -2 \end{aligned}$$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = \frac{9}{2}$ y $y = -\frac{7}{2}$.

Igualación. Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de igualación se aplican los siguientes pasos:

- Se despeja la misma incógnita en cada una de las ecuaciones del sistema dado.
- Se igualan entre sí las expresiones obtenidas, se elimina una de las incógnitas y se obtiene una ecuación con una incógnita.
- Se resuelve la ecuación de primer grado resultante.
- Se sustituye el valor determinado en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra incógnita.

EJEMPLO

1

●● Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 6x + 2y &= -10 \\ 9x + 4y &= -24 \end{aligned}$$

Al despejar y en ambas ecuaciones, resulta:

$$\begin{array}{rcl} 6x + 2y = -10 & & 9x + 4y = -24 \\ 2y = -10 - 6x & & 4y = -24 - 9x \\ y = \frac{-10 - 6x}{2} & & y = \frac{-24 - 9x}{4} \end{array}$$

Se igualan entre sí ambas expresiones, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{-10 - 6x}{2} &= \frac{-24 - 9x}{4} \\ 4(-10 - 6x) &= 2(-24 - 9x) \\ -40 - 24x &= -48 - 18x \\ 18x - 24x &= -48 + 40 \\ -6x &= -8 \end{aligned}$$

Se despeja a x y se encuentra su valor:

$$x = \frac{-8}{-6} \approx \frac{4}{3}$$

Al sustituir el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales, se obtiene:

$$\begin{aligned} 9\left(\frac{4}{3}\right) + 4y &= -24 \\ 12 + 4y &= -24 \\ 4y &= -24 - 12 \\ y &= \frac{-36}{4} \\ y &= -9 \end{aligned}$$

Se efectúa la comprobación, es decir:

$$\begin{array}{rcl} 6\left(\frac{4}{3}\right) + 2(-9) &= & -10 \\ 8 - 18 &= & -10 \\ -10 &= & -10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 9\left(\frac{4}{3}\right) + 4(-9) &= & -24 \\ 12 - 36 &= & -24 \\ -24 &= & -24 \end{array}$$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = \frac{4}{3}$ y $y = -9$.

Sustitución. Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de sustitución, se aplican los siguientes pasos:

- Despejar en cualquiera de las ecuaciones del sistema una de las incógnitas en términos de la otra.
- Se sustituye la expresión para la incógnita despejada en la otra ecuación que no se ha utilizado; se obtiene una ecuación con una incógnita.
- Se resuelve la ecuación de primer grado resultante.
- Se sustituye el valor determinado en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra incógnita; también se sustituye en la expresión de la primera incógnita despejada, y se obtiene el valor de la otra incógnita; ambos procesos conducen al mismo resultado.

EJEMPLO

Ejemplo 1

- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$7x - 4y = 5 \quad (1)$$

$$9x + 8y = 13 \quad (2)$$

De la ecuación (1) se despeja y en términos de x :

$$7x - 4y = 5$$

$$-4y = 5 - 7x$$

$$y = \frac{5-7x}{-4}$$

Se sustituye este valor en la ecuación (2) para obtener una ecuación con una incógnita, es decir:

$$9x + 8\left(\frac{5-7x}{-4}\right) = 13$$

$$9x - 10 + 14x = 13$$

$$9x + 14x = 13 + 10$$

$$23x = 23$$

Al resolver la ecuación, resulta:

$$x = \frac{23}{23} = 1$$

Al sustituir el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales, se obtiene:

$$7(1) - 4y = 5$$

$$-4y = 5 - 7$$

$$y = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Se efectúa la comprobación, es decir:

$$7(1) - 4\left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

$$7 - 2 = 5$$

$$5 = 5$$

$$9(1) + 8\left(\frac{1}{2}\right) = 13$$

$$9 + 4 = 13$$

$$13 = 13$$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = 1$ y $y = \frac{1}{2}$.

Método gráfico. Al resolver la ecuación $2x + y = 4$ para y , se obtiene una ecuación equivalente, es decir:

$$y = 4 - 2x \quad \text{y está en función de } x$$

La gráfica de una función lineal es una recta. Por lo tanto, las coordenadas de cualquier punto de la recta, son una solución para la ecuación, es decir, en la ecuación dada, se tiene:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	4	2	0	-2	6	8	10

Valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación

La gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en dos rectas, cuyas coordenadas de intersección deben satisfacer ambas ecuaciones; por tanto, al resolver un sistema de ecuaciones por el método gráfico, solo es necesario medir las coordenadas del punto de intersección.

Se recomienda el uso de papel milimétrico para su gráfica y solución.

EJEMPLO

Ejemplo

1 ••• Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x - 2y = 10$$

$$2x + 3y = -8$$

Se construye una tabla de valores para las incógnitas de cada ecuación, es decir:

$$x - 2y = 10$$

$$x = 10 + 2y$$

y	x
-3	4
-2	6
-1	8
0	10
1	12
2	14
3	16

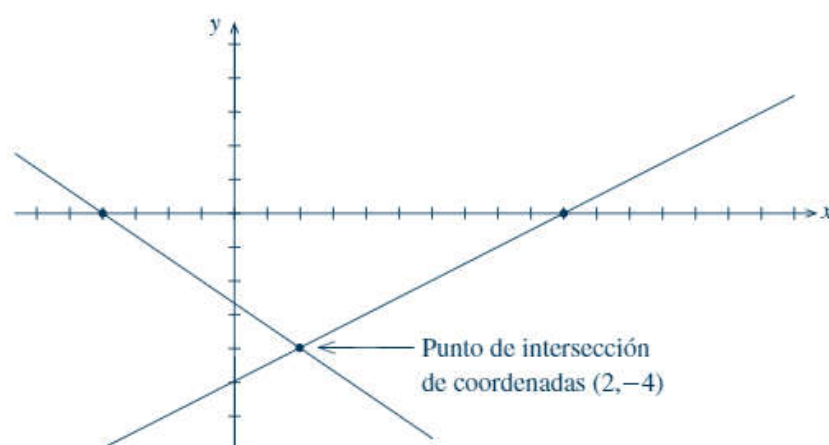
$$2x + 3y = -8$$

$$2x = -8 - 3y$$

$$x = \frac{-8 - 3y}{2}$$

y	x
-3	$\frac{1}{2}$
-2	-1
-1	$-\frac{5}{2}$
0	-4
1	$-\frac{11}{2}$
2	-7
3	$-\frac{17}{2}$

Al elaborar la gráfica correspondiente en un sistema de coordenadas, se tiene:



La solución del sistema es $x = 2$ y $y = -4$.

El método gráfico, debido a la inexactitud de los trazos y la aproximación estimada de sus coordenadas, da lugar a resultados aproximados.

Solución por determinantes. Los determinantes se emplean para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas.

Determinante de segundo orden

Son cuatro números colocados en forma de un cuadrado con rectas verticales a cada lado. La posición de los cuatro números da lugar a dos filas y dos columnas.

Las **filas** o **renglones** están establecidos por los números que se encuentran en una misma línea horizontal; las **columnas** están compuestas por los números que se encuentran en una misma línea vertical.

El orden de un determinante depende del número de elementos de cada fila o columna.

$$\begin{array}{cc} \text{Primera columna} & \text{Segunda columna} \\ \downarrow & \downarrow \\ \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| & \begin{array}{l} \leftarrow \text{Primera fila} \\ \leftarrow \text{Segunda fila} \end{array} \end{array}$$

Determinante de segundo orden

En el determinante de segundo orden, la línea que une a con d se llama **diagonal principal**; la línea que une c con b se llama **diagonal secundaria**. Los números a, b, c, d , se denominan **elementos** del determinante, cuyo valor es el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplos

a) $\left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = ad - cd$

(-) Diagonal secundaria

(+) Diagonal principal

b) $\left| \begin{array}{cc} p & -q \\ r & s \end{array} \right| = ps - r(-q) = ps + rq$

c) $\left| \begin{array}{cc} 8 & 9 \\ 3 & -5 \end{array} \right| = (8)(-5) - (3)(9) = -40 - 27 = -67$

d) $\left| \begin{array}{cc} 11 & -7 \\ 4 & -6 \end{array} \right| = (11)(-6) - (4)(-7) = -66 + 28 = -38$

El sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ puede resolverse para x y y por medio de determinantes, cuyas fórmulas son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

La aplicación de estas fórmulas se condiciona cuando $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, también para $a_1b_2 = a_2b_1$; es decir, no son correctas cuando las ecuaciones dadas son incompatibles o equivalentes.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 ••• Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - 7y = 17 \\ 4x - 5y = 25 \end{cases}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 17 & -7 \\ 25 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{(17)(-5) - (25)(-7)}{(2)(-5) - (4)(-7)} = \frac{-85 + 175}{-10 + 28} = \frac{90}{18} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 17 \\ 4 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{(2)(25) - (4)(17)}{(2)(-5) - (4)(-7)} = \frac{50 - 68}{-10 + 28} = \frac{-18}{18} = -1$$

Se realiza la comprobación, es decir:

$$2(5) - 7(-1) = 17 \quad (5) - 5(-1) = 25$$

$$10 + 7 = 17 \quad 20 + 5 = 25$$

$$17 = 17 \quad 25 = 25$$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = 5$ y $y = -1$.

- 2 ••• Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 4x + 3y = 22 \end{cases}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 22 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(2)(3) - (22)(-3)}{(2)(3) - (4)(-3)} = \frac{6 + 66}{6 + 12} = \frac{72}{18} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(2)(22) - (4)(2)}{(2)(3) - (4)(-3)} = \frac{44 - 8}{6 + 12} = \frac{36}{18} = 2$$

Se efectúa la comprobación:

$$2(4) - 3(2) = 2 \quad 4(4) + 3(2) = 22$$

$$8 - 6 = 2 \quad 16 + 6 = 22$$

$$2 = 2 \quad 22 = 22$$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = 4$ y $y = 2$.

Métodos de solución para sistemas de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, se emplean los diferentes métodos algebraicos descritos para un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (adición o sustracción, igualación y sustitución).

El método de reducción (adición o sustracción) es el que más se emplea, ya que permite una mayor rapidez de solución. El objetivo de resolver un sistema de este tipo es llegar a reducirlo a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, para ello, se toman las ecuaciones de dos en dos para eliminar la misma incógnita en cada caso.

Pasos a seguir para su solución:

- De las tres ecuaciones dadas, se combinan dos de ellas y se elimina una de las incógnitas y se obtiene una ecuación con dos incógnitas.
- Del par anterior de ecuaciones, se escoge una de ellas y se combina con la ecuación que no se ha empleado, eliminando de ellas la misma incógnita y se obtiene otra ecuación con dos incógnitas.
- Se resuelve el sistema de ecuaciones resultantes de los pasos anteriores por cualquiera de los métodos algebraicos y se determinan los valores para dos de las incógnitas.
- Se sustituyen los valores determinados en cualquiera de las tres ecuaciones originales dadas para encontrar el valor de la tercer a incógnita.
- Se comprueban los resultados obtenidos.

EJEMPLO

Ejemplo 1

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 9 & (1) \\ 3x + y + 2z &= 11 & (2) \\ x - y + z &= 2 & (3) \end{aligned}$$

Al combinar las ecuaciones (1) y (2), se elimina y , es decir:

$$\begin{array}{r} 2x - \cancel{y} + 3z = 9 \\ 3x + \cancel{y} + 2z = 11 \\ \hline 5x + 5z = 20 \end{array} \quad (4)$$

Al combinar las ecuaciones (2) y (3), se elimina y , es decir:

$$\begin{array}{r} 3x + \cancel{y} + 2z = 11 \\ x - \cancel{y} + z = 2 \\ \hline 4x + 3z = 13 \end{array} \quad (5)$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones (4) y (5), se multiplica por 3 a la (4) y por -5 a (5); y se elimina z , es decir:

$$\begin{array}{r} 3(5x + 5z = 20) \\ -5(4x + 3z = 13) \\ \hline 15x + 15\cancel{z} = 60 \\ -20x - 15\cancel{z} = -65 \\ \hline -5x = -5 \\ x = 1 \end{array}$$

Se sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones (4) o (5), y resulta:

$$\begin{aligned} 5(1) + 5z &= 20 \\ 5z &= 20 - 5 \\ z &= \frac{15}{5} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Al sustituir los valores de x y de z en cualquiera de las tres ecuaciones originales dadas, es decir:

$$\begin{aligned} 2(1) - y + 3(3) &= 9 \\ 2 - y + 9 &= 9 \\ -y &= 9 - 11 \\ -y &= -2 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Se realiza la comprobación, es decir:

$$\begin{array}{lll} 2(1) - 2 + 3(3) = 9 & 3(1) + 2 + 2(3) = 11 & 1 - 2 + 3 = 2 \\ 2 - 2 + 9 = 9 & 3 + 2 + 6 = 11 & 2 = 2 \\ 9 = 9 & 11 = 11 & \end{array}$$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = 1, y = 2$ y $z = 3$.

Solución por determinantes

Las incógnitas se colocan en un cuadrado con rectas verticales a cada lado; de acuerdo con la posición de los números dan lugar a tres filas y tres columnas, por lo que se le denomina *determinante de tercer orden*.

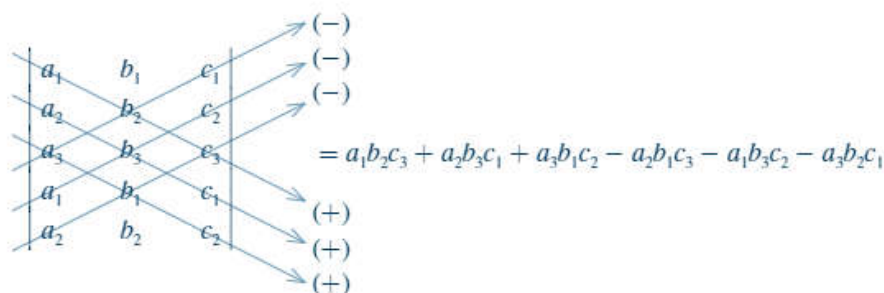
$$\begin{array}{ccccc} & \text{Segunda} & & & \\ & \text{columna} & & & \\ \text{Primera} & & & & \text{Tercera} \\ \text{columna} & & & & \text{columna} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| & \leftarrow & \text{Primera fila} \\ & \leftarrow & \text{Segunda fila} \\ & \leftarrow & \text{Tercera fila} \end{array}$$

El procedimiento que se aplica para desarrollar cualquier determinante de tercer orden, tiene los siguientes pasos:

a) Debajo de la tercera fila se repiten la primera y segunda filas, es decir:

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} \right|$$

- b) Los productos de los tres números de cada una de las tres diagonales trazadas de izquierda a derecha y hacia abajo, dan como resultado tres términos que se escriben con su propio signo.
- c) Los productos de los tres números de cada una de las tres diagonales trazadas de izquierda a derecha y hacia arriba, dan como resultado tres términos que se escriben con el signo menos.



Ejemplos

1. Resuelve.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (1)(-1)(2) + (4)(5)(0) + (3)(-3)(2) - (4)(-3)(2) - (1)(5)(2) - (3)(-1)(0) \\ = -2 + 0 - 18 + 24 - 10 + 0 = -6$$

2. Resuelve.

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (9)(2)(1) + (3)(4)(2) + (6)(6)(3) - (3)(6)(1) - (9)(4)(3) - (6)(2)(2) \\ = 18 + 24 + 108 - 18 - 108 - 24 = 0$$

Un sistema de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas dado por

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Puede resolverse al usar determinantes de acuerdo con el procedimiento establecido por la **regla de Cramer**, los valores de x , y , y z se obtienen a partir de las siguientes relaciones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_2b_1c_3 - d_1b_3c_2 - d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 d_2 c_3 + a_2 d_3 c_1 + a_3 d_1 c_2 - a_2 d_1 c_3 - a_1 d_3 c_2 - a_3 d_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 b_2 d_3 + a_2 b_3 d_1 + a_3 b_1 d_2 - a_2 b_1 d_3 - a_1 b_3 d_2 - a_3 b_2 d_1}{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1}$$

Estas fórmulas deben aplicarse en la solución de cualquier sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas si el determinante denominador del sistema es diferente de cero.

EJEMPLOS

Ejemplos

●●● Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 4y - z = 1 \\ x - y + 3z = 3 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Se aplica la fórmula correspondiente para determinar x .

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(-1)(2) + (3)(-2)(-1) + (0)(-4)(3) - (3)(-4)(2) - (1)(-2)(3) - (0)(-1)(-1)}{(3)(-1)(2) + (1)(-2)(-1) + (3)(-4)(3) - (1)(-4)(2) - (3)(-2)(3) - (3)(-1)(-1)}$$

$$= \frac{-2 + 6 - 0 + 24 + 6 - 0}{-6 + 2 - 36 + 8 + 18 - 3} = \frac{34}{-17} = -2$$

Se aplica la fórmula correspondiente para determinar y .

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(3)(2) + (1)(0)(-1) + (3)(1)(3) - (1)(1)(2) - (3)(0)(3) - (3)(3)(-1)}{(3)(-1)(2) + (1)(-2)(-1) + (3)(-4)(3) - (1)(-4)(2) - (3)(-2)(3) - (3)(-1)(-1)}$$

$$= \frac{18 - 0 + 9 - 2 - 0 + 9}{-6 + 2 - 36 + 8 + 18 - 3} = \frac{34}{-17} = -2$$

Se aplica la fórmula correspondiente para determinar z .

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(-1)(0) + (1)(-2)(1) + (3)(-4)(3) - (1)(-4)(0) - (3)(-2)(3) - (3)(-1)(1)}{(3)(-1)(2) + (1)(-2)(-1) + (3)(-4)(3) - (1)(-4)(2) - (3)(-2)(3) - (3)(-1)(-1)} \\ = \frac{-0 - 2 - 36 + 0 + 18 + 3}{-6 + 2 - 36 + 8 + 18 - 3} = \frac{-17}{-17} = 1$$

Se efectúa la comprobación, es decir:

$$\begin{array}{lll} 3(-2) - 4(-2) - 1 = 1 & -2 - (-2) + 3(1) = 3 & 3(-2) - 2(-2) + 2(1) = 0 \\ -6 + 8 - 1 = 1 & -2 + 2 + 3 = 3 & -6 + 4 + 2 = 0 \\ 1 = 1 & 3 = 3 & 0 = 0 \end{array}$$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = -2$, $y = -2$ y $z = 1$.

2 ●● Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = -1 \\ y - z = 6 \end{cases}$

Se aplica la fórmula correspondiente para determinar x .

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(0)(-1) + (-1)(1)(0) + (6)(-1)(1) - (-1)(-1)(-1) - (1)(1)(1) - (6)(0)(0)}{(1)(0)(-1) + (1)(1)(0) + (0)(-1)(1) - (1)(-1)(-1) - (1)(1)(1) - (0)(0)(0)} \\ = \frac{-0 - 0 - 6 + 1 - 1 - 0}{-0 - 0 - 0 + 1 - 1 - 0} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Se aplica la fórmula correspondiente para determinar y .

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(-1)(-1) + (1)(6)(0) + (0)(1)(1) - (1)(1)(-1) - (1)(6)(1) - (0)(-1)(0)}{(1)(0)(-1) + (1)(1)(0) + (0)(-1)(1) - (1)(-1)(-1) - (1)(1)(1) - (0)(0)(0)} \\ = \frac{1 + 0 + 0 - 1 - 6 + 0}{-0 - 0 - 0 + 1 - 1 - 0} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Se aplica la fórmula correspondiente para determinar z .

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(0)(6) + (1)(1)(1) + (0)(-1)(-1) - (1)(-1)(6) - (1)(1)(-1) - (0)(0)(1)}{(1)(0)(-1) + (1)(1)(0) + (0)(-1)(1) - (1)(-1)(-1) - (1)(1)(1) - (0)(0)(0)} \\ = \frac{0 + 1 + 0 + 6 + 1 - 0}{0 + 0 - 0 - 1 - 1 - 0} = \frac{8}{-2} = -4$$

Se realiza la comprobación, es decir:

$$3 - 2 = 1$$

$$1 = 1$$

$$3 - 4 = -1$$

$$-1 = -1$$

$$2 - (-4) = 6$$

$$2 + 4 = 6$$

$$6 = 6$$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = 3$, $y = 2$ y $z = -4$.

Ecuaciones fraccionarias simultáneas de primer grado con dos y tres incógnitas

Para resolver sistemas de ecuaciones fraccionarias con dos y tres incógnitas, es necesario primeramente eliminar denominadores para transformarlas en ecuaciones lineales, a las cuales se les aplica cualquiera de los métodos algebraicos ya conocidos.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 ●● Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\frac{x - y + 3}{2x + y - 3} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\frac{3x - 2y + 4}{2x - 2y + 3} = \frac{5}{2} \quad (2)$$

Se transforman las ecuaciones fraccionarias en lineales, eliminando denominadores, es decir:

$$2(x - y + 3) = 3(2x + y - 3) \quad (1)$$

$$2x - 2y + 6 = 6x + 3y - 9$$

$$-4x - 5y = -15$$

$$4x + 5y = 15$$

$$2(3x - 2y + 4) = 5(2x - 2y + 3) \quad (2)$$

$$6x - 4y + 8 = 10x - 10y + 15$$

$$-4x + 6y = 7$$

Al aplicar cualquiera de los métodos algebraicos en (1) y (2), se tiene:

$$\cancel{4x} + 5y = 15$$

$$\cancel{4x} + 6y = 7$$

$$11y = 22$$

$$y = \frac{22}{11}$$

$$y = 2$$

Al sustituir el valor de y en cualquiera de las ecuaciones lineales, resulta:

$$4x + 5(2) = 15$$

$$4x + 10 = 15$$

$$4x = 15 - 10$$

$$x = \frac{5}{4}$$

Se realiza la comprobación, es decir:

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{5}{4}\right) + 5(2) &= 15 \\ 5 + 10 &= 15 \\ 15 &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4\left(\frac{5}{4}\right) + 6(2) &= 7 \\ -5 + 12 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = \frac{5}{4}$ y $y = 2$.

2 ●●● Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\frac{3}{5x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{10} \quad (1) \qquad \frac{5}{3x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

La solución para este sistema es un caso especial ya que no se eliminan los denominadores. La ecuación (1) se multiplica por $\frac{5}{3}$ y la ecuación (2) se multiplica por $-\frac{3}{5}$, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}\left(\frac{3}{5x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{10}\right) & \qquad \frac{\cancel{15}}{\cancel{15}x} + \frac{5}{6y} = \frac{5}{30} \\ -\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}\right) & \qquad \frac{-\cancel{15}}{\cancel{15}x} - \frac{3}{5y} = -\frac{6}{15} \\ & \qquad \frac{5}{6y} - \frac{3}{5y} = \frac{5}{30} - \frac{6}{15} \end{aligned}$$

Al aplicar alguno de los métodos algebraicos se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{25-18}{30y} &= \frac{5-12}{30} \\ \frac{7}{30y} &= \frac{-7}{30} \\ 210 &= -210y \end{aligned}$$

Al resolver para y se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= \frac{210}{-210} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de y en cualquiera de las ecuaciones originales, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5x} + \frac{1}{2(-1)} &= \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5x} + \frac{1}{-2} &= \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5x} &= \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5x} &= \frac{1+5}{10} \\ \frac{3}{5x} &= \frac{6}{10} \\ 30 &= 30x \end{aligned}$$

Al resolver para x se tiene:

$$x = \frac{30}{30}$$

$$x = 1$$

Se realiza la comprobación, es decir:

$$\begin{array}{rcl} \frac{3}{5(1)} + \frac{1}{2(-1)} & = & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} - \frac{1}{2} & = & \frac{1}{10} \\ \frac{6-5}{10} & = & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & = & \frac{1}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \frac{5}{3(1)} + \frac{1}{-1} & = & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} - \frac{1}{1} & = & \frac{2}{3} \\ \frac{5-3}{3} & = & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & = & \frac{2}{3} \end{array}$$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = 1$ y $y = -1$.

3 ●● Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 3 & (1) \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} - \frac{z}{2} = -5 & (2) \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 0 & (3) \end{cases}$$

Se transforman las ecuaciones fraccionarias en lineales, eliminando denominadores, es decir:

$$\begin{array}{rcl} \frac{3x+3y-2z}{6} = 3 & (1) & \frac{2x+y-3z}{6} = -5 & (2) & \frac{x-2y+z}{6} = 0 & (3) \\ 3x+3y-2z = 18 & & 2x+y-3z = -30 & & x-2y+z = 0 \end{array}$$

Al combinar las ecuaciones (1) y (2) para eliminar x se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} 2(3x+3y-2z = 18) & & \cancel{6x} + 6y - 4z = 36 \\ -3(2x+y-3z = -30) & & \cancel{-6x} - 3y + 9z = 90 \\ \hline & & 3y + 5z = 126 \end{array} \quad (4)$$

Se combinan las ecuaciones (2) y (3) para eliminar x , es decir:

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - 3z = -30 & & \cancel{2x} + y - 3z = -30 \\ -2(x - 2y + z = 0) & & \cancel{-2x} + 4y + 2z = 0 \\ \hline & & 5y + 5z = -30 \end{array} \quad (5)$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones (4) y (5) para eliminar a z :

$$3y + 5z = 126$$

$$5y - 5z = -30$$

$$8y = 96$$

$$y = \frac{96}{8}$$

$$y = 12$$

Se sustituye el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones (4) y (5), es decir:

$$5(12) - 5z = -30$$

$$60 - 5z = -30$$

$$-5z = -30 - 60$$

$$-5z = -90$$

$$z = \frac{-90}{-5}$$

$$z = 18$$

Al sustituir los valores determinados en cualquiera de las tres ecuaciones lineales originales resulta:

$$x - 2y + z = 0$$

$$x - 2(12) + 18 = 0$$

$$x - 24 + 18 = 0$$

$$x = 6$$

Se efectúa la comprobación, es decir:

$$3(6) + 3(12) - 2(18) = 18$$

$$18 + 36 - 36 = 18$$

$$18 = 18$$

$$2(6) + 12 - 3(18) = -30$$

$$12 + 12 - 54 = -30$$

$$-30 = -30$$

$$-6 - 2(12) + 18 = 0$$

$$6 - 24 + 18 = 0$$

$$0 = 0$$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = 6$, $y = 12$ y $z = 18$.

4 •• Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2}{z} = 8 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 7 \end{array} \right. \quad (2).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{x} - \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

La solución para este sistema es un caso especial en el cual no se eliminan los denominadores.

La ecuación (2) se multiplica por -2 y se combina con la ecuación (1) para eliminar y , es decir:

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2}{z} = 8$$

$$-2\left(\frac{6}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 7\right)$$

Al aplicar cualquiera de los métodos algebraicos, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2}{z} &= 8 \\ \frac{-12}{x} - \frac{4}{y} - \frac{2}{z} &= -14 \\ \hline \frac{3}{x} - \frac{12}{x} &= -6 \\ \frac{3-12}{x} &= -6 \\ -9 &= -6x\end{aligned}$$

Al resolver para x , resulta:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-9}{-6} \\ x &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Se combinan las ecuaciones (2) y (3) para eliminar y , es decir:

$$\begin{aligned}\frac{6}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} &= 7 \\ \frac{9}{x} - \frac{2}{y} - \frac{3}{z} &= 0 \\ \hline \frac{15}{x} - \frac{2}{z} &= 7\end{aligned}$$

Como $x = \frac{3}{2}$, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{15}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{z} &= 7 \\ \frac{30}{3} - \frac{2}{z} &= 7 \\ -\frac{2}{z} &= 7 - 10 \\ -\frac{2}{z} &= -3\end{aligned}$$

Al resolver para z , resulta:

$$\begin{aligned}-2 &= -3z \\ z &= \frac{-2}{-3} \\ z &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Al sustituir los valores determinados en cualquiera de las tres ecuaciones originales dadas se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} + \frac{4}{y} + \frac{2}{3} &= 8 \\ \frac{6}{3} + \frac{4}{y} + \frac{6}{2} &= 8 \\ 2 + \frac{4}{y} + 3 &= 8 \\ \frac{4}{y} &= 8 - 5 \\ \frac{4}{y} &= 3\end{aligned}$$

Al resolver para y , resulta:

$$y = \frac{4}{3}$$

Se realiza la comprobación, es decir:

$\frac{3}{2} + \frac{4}{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3} = 8$	$\frac{6}{2} + \frac{2}{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2} = 7$	$\frac{9}{2} - \frac{2}{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2} = 0$
$\frac{6}{3} + \frac{12}{4} + \frac{6}{2} = 8$	$\frac{12}{3} + \frac{6}{4} + \frac{3}{2} = 7$	$\frac{18}{3} - \frac{6}{4} - \frac{9}{2} = 0$
$2 + 3 + 3 = 8$	$4 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 7$	$6 - \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = 0$
$8 = 8$	$4 + \frac{6}{2} = 7$	$6 - \frac{12}{2} = 0$
	$4 + 3 = 7$	$6 - 6 = 0$
	$7 = 7$	$0 = 0$

Los valores que satisfacen al sistema son $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{4}{3}$ y $z = \frac{2}{3}$.

Solución de problemas dados en palabras que conducen a un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas

Igual que los problemas expresados en palabras que conducen a ecuaciones de primer grado con una incógnita, el procedimiento a seguir para resolver ahora estos problemas consiste en aplicar el siguiente procedimiento.

- La elección de las incógnitas (x , y , z).
- Con base en las condiciones del problema, se establece un planteamiento de ecuaciones que constituyen el sistema.
- Se resuelve el sistema de ecuaciones.
- Se comprueban los valores determinados para las incógnitas.

Es necesario recordar que se deben plantear tantas ecuaciones como incógnitas se tengan.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• La suma de dos números es 9 y su diferencia es 5; determina dichos números.

Datos

x : uno de los números buscados
 y : otro de los números buscados
 $x + y = 9$: suma de dos números es 9
 $x - y = 5$: diferencia de dos números es 5

Operaciones

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 9 \\ x - y & = & 5 \\ \hline 2x & = & 14 \\ x & = & \frac{14}{2} \\ x & = & 7 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + y & = & 9 \\ 7 + y & = & 9 \\ y & = & 9 - 7 \\ y & = & 2 \end{array}$$

Planteamiento

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 9 \\ x - y & = & 5 \end{array}$$

Comprobación

$$\begin{array}{rcl} 7 + 2 & = & 9 \\ 9 & = & 9 \\ 7 - 2 & = & 5 \\ 5 & = & 5 \end{array}$$

Los números buscados son $x = 7$ y $y = 2$.

- 2 •• Hace cinco años, la edad de una persona era el triple de otra y dentro de cinco años sólo será el doble. ¿Cuál es la edad de cada persona?

Datos

x : edad de una persona
 y : edad de otra persona
 $\left. \begin{array}{l} x - 5 \\ y - 5 \end{array} \right\}$ Hace cinco años
 $\left. \begin{array}{l} x + 5 \\ y + 5 \end{array} \right\}$ Dentro de cinco años

Operaciones

$$\begin{array}{rcl} x - 3y & = & -10 \\ x + 2y & = & -5 \\ \hline -y & = & -15 \\ y & = & 15 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x - 3(15) & = & -10 \\ x - 45 & = & -10 \\ x & = & 35 \end{array}$$

Planteamiento

$$\begin{array}{rcl} x - 5 & = & 3(y - 5) \\ x + 5 & = & 2(y + 5) \\ x - 5 & = & 3y - 15 \\ x - 3y & = & -10 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + 5 & = & 2y + 10 \\ x - 2y & = & 5 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = -10 \\ x + 2y = 5 \end{array} \right\} \text{ Sistema de ecuaciones}$$

Comprobación

$$\begin{array}{rcl} 35 + 3(15) & = & -10 \\ 35 - 45 & = & -10 \\ -10 & = & -10 \\ 35 - 2(15) & = & 5 \\ 35 - 30 & = & 5 \\ 5 & = & 5 \end{array}$$

Las edades de las personas son 35 y 15 años.

- 3 •• Diez libras de nuez y 12 libras de almendra costaron 454 dólares; ocho libras de nuez y 10 libras de almendras costaron 376 dólares; determina el costo de una libra de nuez y una libra de almendra.

Datos

x : costo de una libra de nuez
 y : costo de una libra de almendra
 $10x + 12y = 454$ (1)
 $8x + 10y = 376$ (2)

Planteamiento

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x + 12y = 454 \\ 8x + 10y = 376 \end{array} \right\} \text{ Sistema de ecuaciones}$$

Operaciones

$$\begin{aligned} 10(10x + 12y) &= 454 \\ -12(8x + 10y) &= 376 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 100x + 120y &= 4540 \\ -96x - 120y &= -4512 \\ \hline 4x &= 28 \\ x &= \frac{28}{4} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10(7) + 12y &= 454 \\ 12y &= 454 - 70 \\ y &= \frac{384}{12} \\ y &= 32 \end{aligned}$$

Comprobación

$$\begin{aligned} 10(7) + 12(32) &= 454 \\ 70 + 384 &= 454 \\ 454 &= 454 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8(7) + 10(32) &= 376 \\ 56 + 320 &= 376 \\ 376 &= 376 \end{aligned}$$

Los costos son 7 y 32 dólares, respectivamente.

- 4 •• Un ranchero tiene 110 animales. Entre ellos hay vacas, caballos y terneras, $\frac{1}{8}$ parte del número de vacas más $\frac{1}{9}$ parte del número de caballos más $\frac{1}{5}$ parte del número de terneras es igual a 15, y la suma de terneras y vacas es igual a 65, ¿cuántos animales de cada clase tiene?

Datos

x: número de vacas

y: número de caballos

z: número de terneros

$$x + y + z = 110$$

Total de animales

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{9} + \frac{z}{5} = 15$$

Fracciones de animales

$$x + z = 65$$

Suma de vacas y terneras

Planteamiento

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad x + y + z &= 110 \\ (2) \quad \frac{x}{8} + \frac{y}{9} + \frac{z}{5} &= 15 \\ (3) \quad x + z &= 65 \end{aligned} \right\} \text{ Sistema de ecuaciones}$$

Operaciones

Al combinar las ecuaciones (1) y (3), se eliminan x y z al mismo tiempo, es decir:

$$\begin{aligned} \cancel{x} + y + \cancel{z} &= 110 \\ -\cancel{x} + y - \cancel{z} &= -65 \\ \hline y - z &= 45 \end{aligned}$$

Al combinar las ecuaciones (1) y (2), se elimina z, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} - \frac{y}{5} - \frac{\cancel{z}}{5} &= -\frac{110}{5} \\ \frac{x}{8} + \frac{y}{9} + \frac{\cancel{z}}{5} &= 15 \\ \hline \frac{x}{8} - \frac{x}{5} + \frac{y}{9} - \frac{y}{5} &= -7 \end{aligned}$$

Como $y = 45$, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{x}{8} - \frac{x}{5} &= -7 + \frac{45}{5} - \frac{45}{9} \\ \frac{5x - 8x}{40} &= -7 + 9 - 5 \\ -3x &= 40(-3) \\ x &= \frac{-120}{-3} \\ x &= 40\end{aligned}$$

Al sustituir el valor de x en la ecuación (3) resulta:

$$\begin{aligned}x + z &= 65 \\ 40 + z &= 65 \\ z &= 65 - 40 \\ z &= 25\end{aligned}$$

Comprobación

$$\begin{aligned}40 + 45 + 25 &= 110 \\ 110 &= 110\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{40}{8} + \frac{45}{9} + \frac{25}{5} &= 15 \\ 5 + 5 + 5 &= 15 \\ 15 &= 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}40 + 25 &= 65 \\ 65 &= 65\end{aligned}$$

Los 110 animales se reparten en 40 vacas, 45 caballos y 25 terneras.

- 5 ••• La suma de tres números es 33, la suma de los dos primeros es uno menos que el tercero y la suma del primero y el tercero es 11 más que el segundo; encuentra dichos números.

Datos

x : primer número

y : segundo número

z : tercer número

$$x + y + z = 33 \quad (1)$$

$$x + y = z - 1 \quad (2)$$

$$x + z = y + 11 \quad (3)$$

Planteamiento

$$\left. \begin{aligned}x + y + z &= 33 \\ x + y - z &= -1 \\ x - y + z &= 11\end{aligned} \right\} \text{ Sistema de ecuaciones}$$

Operaciones

Al combinar las ecuaciones (2) y (3) resulta:

$$\begin{aligned}x + \cancel{y} - \cancel{z} &= -1 \\ x - \cancel{y} + \cancel{z} &= 11 \\ \hline 2x &= 10 \\ x &= \frac{10}{2} \\ x &= 5\end{aligned}$$

Al combinar las ecuaciones (1) y (2), se tiene:

$$\begin{array}{r} x + y + z = 33 \\ x + y - z = -1 \\ \hline 2x + 2y = 32 \end{array}$$

Como $x = 5$, resulta:

$$2y = 32 - 2x$$

$$2y = 32 - 10$$

$$y = \frac{22}{2}$$

$$y = 11$$

Al sustituir los valores de x y y en cualquiera de las ecuaciones del sistema, resulta:

$$x + y + z = 33$$

$$5 + 11 + z = 33$$

$$z = 33 - 16$$

$$z = 17$$

Comprobación

$$5 + 11 + 17 = 33$$

$$33 = 33 \quad 16 - 17 = -1$$

$$-1 = -1$$

$$5 + 11 - 17 = -1$$

$$22 - 11 = 11$$

$$11 = 11$$

$$5 - 11 + 17 = 11$$

Los números buscados son 5, 11 y 17.

EJERCICIO 9

I. Resuelve lo que se indica en cada caso.

- En equipo resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por cualquiera de los métodos algebraicos (reducción, igualación y sustitución), por determinantes y por el método gráfico y comparen sus resultados con el resto del grupo.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

a) $x + y = 12$
 $x - y = 4$

g) $9x + 4y = -15$
 $6x + 2y = -10$

m) $12x - 12y = 13$
 $6x + 4y = 3$

b) $x - 6y = 8$
 $3x - 12y = 5$

h) $x + 5y = 6$
 $2x + 3y = -2$

n) $5x - 3y = -6$
 $6x + 4y = -30$

c) $4x - 2y = 9$
 $3x + y = 7$

i) $4x + 3y = 1$
 $2x + 5y = 11$

ñ) $3x + y = 4$
 $2x + y = 2$

d) $7x + 3y = 12$
 $14x + 6y = 8$

j) $4x - 3y = 7$
 $5x - 5y = 8$

o) $x - y = 6$
 $x + y = 14$

e) $5x - 4y = 3$
 $6x - 3y = 2$

k) $x - 6y = 5$
 $6x - y = -10$

p) $7x + 9y = 42$
 $12x + 10y = -4$

f) $x - 4y = 3$
 $2x - 8y = 6$

l) $5x + 7y = -2$
 $6x + 4y = 12$

q) $x - 3y = -85$
 $4x - 5y = -25$

$$\begin{aligned} r) \quad 10x + 18y &= -11 \\ 16x - 9y &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s) \quad 32x - 25y &= 13 \\ 16x + 15y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t) \quad 3x + y &= 6 \\ 2x - 5y &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u) \quad 8x + 5y &= -28 \\ 9x + 6y &= -33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v) \quad 18x + 5y &= -11 \\ 12x + 11y &= 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w) \quad 9x + 11y &= -14 \\ 6x - 5y &= -34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x) \quad 4x - 3y &= 41 \\ 6x + 11y &= 47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y) \quad 8x + 7y &= 29 \\ 11x + 5y &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z) \quad 15x - 4y &= 6 \\ 9x - 5y &= -2 \end{aligned}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas por cualquiera de los métodos algebraicos y por determinantes. Discute en plenaria tus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

$$\begin{aligned} a) \quad x - y + 2z &= 8 \\ 3x + y - 3z &= 2 \\ 2y + 9z &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad 2x - 3y + 4z &= 6 \\ 3x + 2y - 3z &= 9 \\ x + 2y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad x - 4y + 5z &= -4 \\ x + 3y + z &= 6 \\ 2x - 3y + 2z &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad 5x + 4y + 3z &= 1 \\ 2x - y - z &= 7 \\ 3x + y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad x + y &= 2 \\ x + z &= 3 \\ y - z &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) \quad 4x + y + 2z &= 10 \\ 3x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 3y + 2z &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g) \quad 4x - 9y &= 4 \\ x - 6z &= 4 \\ 3y - 4z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h) \quad 3x + 3y - 7z &= 5 \\ 2x + 2y - 2z &= 3 \\ 4x - 3y - 6z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i) \quad 2x - 3y - 2z &= 3 \\ 3x - 2y + 3z &= -3 \\ 4x - 4y + z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j) \quad 5x - 2y + z &= 24 \\ 2x + 5y - 2z &= -14 \\ x - 4y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k) \quad 6x + 3y + 2z &= 12 \\ 9x - y + 4z &= 37 \\ 10x + 5y + 3z &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l) \quad 7x + 3y - 4z &= -35 \\ x + y - 6z &= -27 \\ 3x - 2y + 5z &= 38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m) \quad 9x + 4y - 10z &= 6 \\ 6x - 8y + 5z &= -1 \\ 12x + 12y - 15z &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n) \quad 3x - 2y &= 0 \\ 3y - 4z &= 25 \\ z - 5x &= -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ñ) \quad 5x - 3z &= 2 \\ y - 2z &= 5 \\ x + 2y - 4z &= 8 \end{aligned}$$

3. Con ayuda de tu profesor resuelve por cualquier método las siguientes ecuaciones fraccionarias simultáneas de primer grado con dos y tres incógnitas.

$$a) \quad \frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5$$

$$\frac{x}{14} - 3y = -26$$

$$b) \quad \frac{3x}{5} - \frac{y}{4} = 2$$

$$2x - \frac{5y}{2} = 0$$

$$c) \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = -\frac{59}{40}$$

$$\frac{x}{8} - \frac{y}{5} = -\frac{11}{10}$$

$$d) \quad \frac{x-4}{2} + \frac{y+2}{5} = 3$$

$$\frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0$$

$$e) \quad \frac{x+1}{10} = \frac{y-4}{5}$$

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-2}{10}$$

$$f) \quad \frac{x}{5} - \frac{y}{6} = -\frac{1}{30}$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{20} = \frac{13}{12}$$

$$g) \frac{x+y}{6} - \frac{y-x}{3} = \frac{7}{24}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x-y}{6} = \frac{5}{12}$$

$$h) \frac{9x-y}{3+x-y} = -\frac{63}{37}$$

$$\frac{3x+4y}{x-6y} = -\frac{30}{23}$$

$$i) \frac{x-y-1}{x+y+1} = -\frac{3}{7}$$

$$\frac{x+y-1}{x-y+1} = -15$$

$$j) \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 7$$

$$\frac{7}{x} - \frac{6}{y} = 4$$

$$k) \frac{9}{x} + \frac{10}{y} = -11$$

$$\frac{7}{x} - \frac{15}{y} = -4$$

$$l) \frac{1}{2x} - \frac{3}{y} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{5}{2y} = -\frac{4}{3}$$

$$m) \frac{2x-3}{2x-1} = \frac{y+7}{y+5}$$

$$\frac{5x-4}{x+5} = \frac{5y-14}{y+3}$$

$$n) \frac{x+8}{y+7} = \frac{x-6}{y-5}$$

$$\frac{2y-3}{2x-5} = \frac{y+8}{x+8}$$

$$\tilde{n}) \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 4$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} - \frac{4}{z} = 0$$

$$\frac{3}{x} - \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 1$$

$$o) \frac{1}{x} - \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = 3$$

$$p) \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 2$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{z} = -1$$

$$\frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 0$$

$$q) x - \frac{y+z}{3} = 4$$

$$y - \frac{x+z}{8} = 10$$

$$z - \frac{y-x}{2} = 5$$

$$r) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 6$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7$$

$$s) \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 2$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{4}{3}$$

$$t) \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2}{z} = -6$$

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = 3$$

$$\frac{6}{x} - \frac{5}{y} - \frac{6}{z} = 31$$

$$u) \frac{x+y}{7} = \frac{y+4}{5}$$

$$\frac{x-z}{5} = \frac{y-4}{2}$$

$$\frac{y-z}{3} = \frac{x+2}{10}$$

$$v) \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 21$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{6} - \frac{z}{3} = 0$$

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{3} - \frac{9}{z} = 3$$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

4. Resuelve los siguientes problemas dados en palabras que conducen a un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas y realiza un mapa mental con los pasos generales de solución.
 - a) La suma de dos números es 98 y su diferencia es 30. Encuentra dichos números.
 - b) La diferencia de dos números es 13 y el doble del más pequeño es una unidad mayor que el más grande.
 - c) La suma de dos números es 190 y $\frac{1}{9}$ parte de su diferencia es 2. Encuentra los números.
 - d) El largo de un rectángulo excede a su ancho en 4 in; el perímetro es 50 in; encuentra las dimensiones del rectángulo.
 - e) La suma de dos números es 60, el mayor dividido entre el más pequeño tiene un cociente de 3 y un residuo de 8; encuentra los números.
 - f) Un avión viaja 360 km a favor del viento, en una hora y media; y regresa en dos horas, en contra del viento; encuentra la velocidad del avión en el aire tranquilo y la velocidad del viento.
 - g) Cinco trajes y tres sombreros cuestan 4 180 dólares, ocho trajes y nueve sombreros cuestan 6 940 dólares; busca el precio de un traje y de un sombrero.
 - h) Un ranchero compró cuatro vacas y siete caballos por 5 140 dólares y más tarde a los mismos precios, compró ocho vacas y nueve caballos por 8 180 dólares; encuentra el costo de una vaca y de un caballo.
 - i) El doble de la edad de Ramón excede en 50 años a la edad de Arturo, y $\frac{1}{4}$ parte de la edad de Arturo es 35 años menos que la edad de Ramón; busca ambas edades.
 - j) En un cine, 10 entradas de adulto y nueve de niño cuestan 512 pesos; 17 entradas de niño y 15 de adulto cuestan 831 pesos; encuentra el costo para la entrada de un niño y de un adulto.
 - k) Dos clases de aceite combustible, una a 85 pesos por litro y otro a 92 pesos por litro, van a mezclarse para formar 100 litros que cuesten 90 pesos por litro, ¿cuánto litros de cada clase deben emplearse?
 - l) Adolfo y Luis laboran juntos y hacen un trabajo en nueve días; Adolfo y Tomás pueden hacer el mismo trabajo en ocho días; Luis y Tomás pueden hacer el mismo trabajo en 12 días. Busca cuánto tardará cada persona en hacer el trabajo.
 - m) Cinco kilos de tomate, tres de chile y cuatro de cebolla cuestan 118 pesos; cuatro kilos de tomate, cinco de chile y tres de cebolla cuestan 145 pesos; dos kilos de tomate, uno de chile y dos de cebolla cuestan 46 pesos; busca el costo de un kilo de tomate, chile y cebolla.
 - n) La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180° . La suma del mayor y el mediano es 135° , la suma del mediano y el menor es 110° , encuentra la medida de cada ángulo.
 - ñ) Se compró un carro, un caballo y sus arreos por 400 dólares; el carro y los arreos costaron 40 dólares más que el caballo; el caballo y los arreos costaron 80 dólares más que el carro, ¿cuánto costó el carro, el caballo y los arreos?

→ Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Ecuaciones cuadráticas

Propósito del tema

Que el estudiante:

- Utilice el lenguaje algebraico para describir y obtener información de funciones y modelos de segundo grado.
- Establezca modelos algebraicos básicos para plantear sistemas de ecuaciones y resolverlos.
- Aprenda a integrar conocimientos para resolver problemas.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda el tema

Contenidos conceptuales

- Concepto de ecuaciones cuadráticas.
- Concepto de desigualdades e incuaciones.
- Propiedades de los logaritmos.

Contenidos procedimentales

- Identificará modelos lineales y cuadráticos.
- Planteará sistemas de ecuaciones por medio de distintas técnicas.
- Resolverá problemas utilizando el lenguaje algebraico.
- Utilizará las leyes de los logaritmos en la resolución de problemas.

Contenidos actitudinales

- Expresará ideas utilizando la terminología relativa a ecuaciones cuadráticas.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Expresará ideas utilizando modelos de ecuaciones cuadráticas.
- Colaborará en equipo y respetará a sus compañeros al resolver problemas.

Ecuaciones cuadráticas

Ecuación cuadrática con una incógnita

Es una ecuación en la cual el mayor exponente de la incógnita es 2; se representa como $ax^2 + bx + c = 0$ y se denomina *forma general*, donde a , b y c son constantes, además a debe ser diferente de 0.

Ecuación cuadrática completa

Es aquella que tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a , b y c son constantes diferentes de 0.

Ejemplos

$$a) \quad 3x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$b) \quad 4x^2 + 7x - 20 = 0$$

Ecuaciones cuadráticas incompletas

Un caso particular de la fórmula $ax^2 + bx + c = 0$, es $b = 0$, por lo que $ax^2 + c = 0$; pero también puede ser que $c = 0$, por lo que resulta $ax^2 + bx = 0$. En ambos casos se obtiene una ecuación de segundo grado incompleta.

Ejemplos

$$a) \quad 4x^2 - 16 = 0$$

$$c) \quad 7x^2 - x = 0$$

$$b) \quad 9x^2 + 25 = 0$$

$$d) \quad 10x^2 + 5x = 0$$

Raíces de una ecuación cuadrática

Son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación; las ecuaciones de segundo grado tienen dos raíces, donde ambos valores verifican la ecuación.

Ejemplos

$$a) \quad 4x^2 - 16 = 0$$

$$4x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{16}{4} = 4$$

Al obtener la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación, resulta:

$$x = \pm 2$$

El doble signo significa que los dos valores $x = 2$ y $x = -2$ satisfacen la ecuación dada.

$$b) \quad 9x^2 + 25 = 0$$

$$9x^2 = -25$$

$$x^2 = -\frac{25}{9}$$

Al obtener la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación y recordando el concepto de número imaginario, resulta:

$$x = \pm \sqrt{\frac{25}{9}(-1)} = \pm \frac{5}{3}i$$

Solución por factorización

Si el primer miembro de la ecuación cuadrática en forma general puede descomponerse en dos factores lineales, las raíces se determinan directamente a partir de dichos factores.

La razón de este método indica que el producto de dos factores es igual a 0 si uno de los factores es 0; por conclusión, los dos factores lineales se igualan a 0 para obtener las raíces que satisfacen a la ecuación cuadrática dada.

Ejemplos

Forma general completa

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a) $8x^2 + 6x + 1 = 0$

$$(4x + 1)(2x + 1) = 0 \quad \text{Por factorización}$$

Igualación a 0 de los factores lineales:

$$4x + 1 = 0 \quad 2x + 1 = 0$$

Raíces que satisfacen la ecuación dada:

$$\begin{aligned} 4x &= -1 & 2x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{4} & x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $2x^2 + x - 10 = 0$

$$(2x - 5)(x + 2) = 0 \quad \text{Por factorización}$$

Igualación a 0 de los factores lineales:

$$2x - 5 = 0 \quad x + 2 = 0$$

Raíces que satisfacen la ecuación dada:

$$\begin{aligned} 2x &= 5 & x + 2 &= 0 \\ x &= \frac{5}{2} & x &= -2 \end{aligned}$$

Forma general incompleta

$$ax^2 + bx = 0$$

a) $3x^2 + 5x = 0$

$$x(3x + 5) = 0 \quad \text{Por factorización}$$

Igualación a 0 de los factores lineales:

$$x = 0 \quad 3x + 5 = 0$$

Raíces que satisfacen la ecuación dada:

$$\begin{aligned} x &= 0 & 3x &= -5 \\ & & x &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

b) $5x^2 + 15 = 0$

$$x(5x - 15) = 0 \quad \text{Por factorización}$$

Igualación a 0 de los factores lineales:

$$x = 0 \quad 5x - 15 = 0$$

Raíces que satisfacen la ecuación dada:

$$\begin{aligned} x &= 0 & 5x &= 15 \\ & & x &= \frac{15}{5} \\ & & x &= 3 \end{aligned}$$

Solución completando el cuadrado

El proceso para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx = -c$ o $x^2 + bx = 0$ comprende los siguientes pasos.

- a) Colocar los términos de x^2 y x en la primera parte de la ecuación y los términos constantes en la segunda parte de la ecuación, es decir:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 & \text{o} & & x^2 + bx &= 0 & (c = 0) \\ x^2 + bx &= -c \end{aligned}$$

- b) Dividir la ecuación por el coeficiente de x^2 .

- c) Completar la ecuación ($x^2 + bx$) para que sea un *trinomio cuadrado perfecto*. El término faltante es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x , es decir: $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ o $\frac{b^2}{4}$ que se suma a ambos miembros de la ecuación, y se obtiene el *trinomio de cuadrado perfecto*.

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - c \quad \text{o} \quad x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4}$$

- d) Extraer la raíz cuadrada a ambos miembros, indicando el doble signo al segundo miembro de la ecuación. Se resuelven para x las dos ecuaciones lineales resultantes.

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - c$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm \frac{b}{2}$$

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \frac{b}{2}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{b}{2} - \frac{b}{2}$$

$$x_2 = -b$$

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Resuelve la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$ por el método de completar el cuadrado. Al colocar las constantes en la segunda parte de la ecuación se tiene:

$$x^2 + 2x = 3$$

Si se agrega a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x , es decir $\frac{2}{2} = 1$, al cuadrado $(1)^2 = 1$, resulta:

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$$

Por factorización se tiene:

$$(x + 1)^2 = 4$$

Al obtener la raíz cuadrada en ambos miembros.

$$\sqrt{(x + 1)^2} = \pm \sqrt{4}$$

$$x + 1 = \pm 2$$

$$x_1 = -1 + 2$$

$$x_2 = -1 - 2$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -3$$

Raíces que satisfacen la ecuación.

- 2 •• Resuelve la ecuación $2x^2 - 5x = -2$ por el método de completar el cuadrado. Al dividir entre el coeficiente de x^2 , se tiene:

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{5x}{2} = -\frac{2}{2}$$

$$x^2 - \frac{5x}{2} = -1$$

Se agrega a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x , es decir, $\frac{5}{2} = \frac{5}{4}$; al cuadrado $\left(\frac{5}{4}\right)^2$, resulta:

$$x^2 - \frac{5x}{2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1$$

Al factorizar se obtiene:

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1$$

Al obtener la raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1}$$

$$x - \frac{5}{4} = \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1}$$

$$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25-16}{16}}$$

$$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Las raíces que satisfacen la ecuación son $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{1}{2}$.

Deducción de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Al dar valores numéricos a a , b y c , presentes en la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$ conduce a obtener las raíces de la ecuación en función de los coeficientes literales. Dichas raíces se determinan a partir del método de completar el cuadrado y se usan como fórmula para resolver cualquier ecuación cuadrática.

Deducción de la fórmula

a) Se traspone c de la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$, es decir:

$$ax^2 + bx = -c$$

b) Al dividir entre el coeficiente de x^2 , resulta:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \quad \longrightarrow \quad x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

- c) Al agregar a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x , es decir, $\frac{b}{2} = \frac{b}{2a}$; al cuadrado $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, se tiene:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

- d) Factorizando, se tiene:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Al obtener la raíz cuadrada en ambos miembros, resulta:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Así:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

- e) Al despejar x , resulta:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De esta forma se define la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

Solución por fórmula general

De la ecuación cuadrática dada, se identifican los coeficientes para las literales a , b y c ; dichos valores se sustituyen en la fórmula general, determinándose las raíces de la ecuación.

EJEMPLOS

- 1 ••• Resuelve $x^2 + 9x + 20 = 0$. Si $a = 1$, $b = 9$ y $c = 20$.

Al sustituir en la fórmula, resulta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4(1)(20)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{-9 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{-9 + 1}{2} = \frac{-8}{2}$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = \frac{-9 - 1}{2} = \frac{-10}{2}$$

$$x_2 = -5$$

Las raíces que satisfacen la ecuación son $x_1 = -4$ y $x_2 = -5$.

2 ●● Resuelve $x^2 - x - 3 = 0$. Si $a = 1$, $b = -1$ y $c = -3$.

Al sustituir en la fórmula, resulta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

Las raíces que satisfacen la ecuación son $x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ y $x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$.

Ecuaciones en forma cuadrática

Existen ecuaciones que no son cuadráticas, pero que se pueden reducir a ecuaciones cuadráticas, al sustituir por una nueva incógnita; dichas ecuaciones se llaman *bicuadráticas*.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ●● Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$z^4 + 4z^2 + 3 = 0$$

$$(z^2)^2 + 4z^2 + 3 = 0$$

Si $x = z^2$, se tiene entonces una ecuación cuadrática:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

Si $a = 1$, $b = 4$ y $c = 3$, es posible aplicar la fórmula general:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{2}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2}{2}$$

$$x_2 = -3$$

Como $x = z^2$, resulta que $z^2 = -1$ y $z^2 = -3$. Se efectúa la comprobación, es decir:

$$(-1)^2 + 4(-1) + 3 = 0$$

$$1 - 4 + 3 = 0$$

$$0 = 0$$

$$(-3)^2 + 4(-3) + 3 = 0$$

$$9 - 12 + 3 = 0$$

$$0 = 0$$

Los valores que satisfacen a la ecuación son $z^2 = -1$ y $z^2 = -3$.

Naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática

De la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, las raíces x_1 y x_2 , son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El radicando $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante**, y se puede determinar sin resolver totalmente la ecuación.

Si a , b y c son números reales, el discriminante proporcionará información sobre la naturaleza de las raíces, es decir:

- a) Cuando $b^2 - 4ac = 0$, las raíces son reales e iguales.
- b) Cuando $b^2 - 4ac > 0$, las raíces son reales y desiguales.
- c) Cuando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son imaginarias y desiguales.

Si a , b y c son números racionales, el discriminante proporcionará información sobre la naturaleza de las raíces, es decir:

- a) Cuando $b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto, las raíces son racionales.
- b) Cuando $b^2 - 4ac$ no es un cuadrado perfecto, las raíces son irracionales.

Ejemplos

Determina la naturaleza de las raíces para las siguientes ecuaciones cuadráticas.

Coeficientes literales	Discriminante	Naturaleza de las raíces
1. $4x^2 - 12x + 9 = 0$ $a = 4, b = -12$ y $c = 9$	$(-12)^2 - 4(4)(9)$ $144 - 144 = 0$	Reales e iguales; racionales.
2. $x^2 - 7x + 7 = 0$ $a = 1, b = -7$ y $c = 7$	$(-7)^2 - 4(1)(7)$ $49 - 28 > 0$	Reales y desiguales; irracionales.
3. $2x^2 + 8x + 3 = 0$ $a = 2, b = 8$ y $c = 3$	$(8)^2 - 4(2)(3)$ $64 - 24 > 0$	Reales y desiguales; irracionales.
4. $5x^2 + 9x - 2 = 0$ $a = 5, b = 9$ y $c = -2$	$(9) - 4(5)(-2)$ $81 + 40 > 0$ 121 Cuadrado perfecto	Reales y desiguales; racionales.
5. $2x^2 + 5x + 5 = 0$ $a = 2, b = 5$ y $c = 5$	$(5) - 4(2)(5)$ $25 - 40 < 0$	Imaginarias y desiguales; irracionales.

Problemas dados en palabras que se resuelven por ecuaciones de segundo grado

Son problemas dados en palabras, que se plantean por medio de una ecuación de segundo grado que, al resolverse, arrojan dos valores para la incógnita; se aceptarán como raíces de la ecuación aquellas que satisfacen las condiciones del problema; las que no cumplan con este requisito deberán rechazarse.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Mateo es dos años mayor que Mercedes y la suma de los cuadrados de ambas edades es 514 años. Calcula sus edades.

Datos

x : edad de Mateo
 $(x - 2)$: edad de Mercedes
 $x^2 + (x - 2)^2 = 514$

Operaciones

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(2)(-510)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4080}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm 64}{4}$$

$$x_1 = 17$$

$$x_2 = -15$$

De las raíces que se obtienen sólo se acepta $x = 17$; se rechaza $x = -15$, ya que la edad no puede ser menos 15 años.

Comprobación

$$2(17)^2 - 4(17) - 510 = 0$$

$$2(289) - 68 - 510 = 0$$

$$578 - 578 = 0$$

$$0 = 0$$

La edad de Mateo es 17 años y la de Mercedes 15.

- 2 •• El área de un rectángulo es 88 m². ¿Cuáles son sus dimensiones si su largo es 3 m mayor que su lado ancho?

Datos

x : dimensión de su lado ancho
 $(x + 3)$: dimensión de su lado largo
Área = $(x)(x + 3) = 88$

Planteamiento

$$x(x + 3) = 88$$

$$x^2 + 3x - 88 = 0$$

Operaciones

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(-88)}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 352}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 19}{2}$$

$$x_1 = 8 \quad \text{Se acepta } x_1 = 8$$

$$x_2 = -11 \quad \text{Se rechaza } x_2 = -11 \text{ porque no hay longitudes negativas}$$

Comprobación

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 88 &= 0 \\ (8)^2 + 3(8) - 88 &= 0 \\ 64 + 24 - 88 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Las dimensiones del rectángulo son ancho = 8 m y largo = 11 m.

- 3 ••• Un automóvil viaja 15 km/h más rápido que un autobús y cubre una distancia de 220 km en una hora y media menos que la requerida por el autobús para recorrer la misma distancia. Determina la velocidad de cada vehículo.

Datos

x : velocidad del autobús

$(x + 15)$: velocidad del automóvil

$\frac{220 \text{ km}}{x}$: tiempo requerido por el autobús

$\frac{220 \text{ km}}{x + 15}$: tiempo requerido por el automóvil

$$\frac{220}{x} - \frac{220}{x + 15} = 1.5$$

Operaciones

$$x = \frac{-45 \pm \sqrt{2\,025 - 4(3)(-6\,600)}}{6}$$

$$x = \frac{-45 \pm 285}{6}$$

$$x_1 = 40 \text{ km/h} \quad \text{Se acepta } x = 40 \text{ km/h}$$

$$x_2 = -55 \text{ km/h} \quad \text{Se rechaza } x = -55 \text{ km/h porque una velocidad negativa indica que el autobús marcha hacia atrás}$$

Resultado

$x = 8$ m es la dimensión del lado ancho

$(x + 3) = (8 + 3) = 11$ m es la dimensión del lado largo

Planteamiento

$$\frac{220}{x} - \frac{220}{x + 15} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{220(x + 15) - 220x}{x(x + 15)} = \frac{3}{2}$$

$$2[220x + 3\,300 - 220x] = 3(x^2 + 15x)$$

$$6\,600 = 3x^2 + 45x$$

$$3x^2 + 45x - 6\,600 = 0$$

Resultado

La velocidad del autobús es de 40 km/h.

La velocidad del automóvil es de $(40 + 15) = 55$ km/h.

Comprobación

$$3(40)^2 + 45(40) - 6600 = 0$$

$$3(1600) + 1800 - 6600 = 0$$

$$4800 + 1800 - 6600 = 0$$

$$0 = 0$$

Las velocidades del autobús y el automóvil son 40 y 55 km/h, respectivamente.

EJERCICIO 10

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Resuelve en cada caso lo que se indica.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

a) $x^2 - 16 = 1$

f) $6x^2 + 24 = 0$

k) $x^2 = 5x$

b) $8x^2 - 32 = 0$

g) $-x^2 - a^2b^2 = 0$

l) $4x^2 - 36x = 0$

c) $x^2 - 5 = 0$

h) $x^2 + 11 = 0$

m) $3x^2 - 12x = 0$

d) $9x^2 - 64 = 0$

i) $7x^2 - 11x = 0$

n) $5x^2 + 3x = 0$

e) $4x^2 + 1 = 0$

j) $9x^2 + 4x = 0$

ñ) $7x^2 - 28x = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización y compara tus resultados con el resto del grupo.

a) $x^2 + x - 6 = 0$

f) $8x^2 + 6x + 1 = 0$

k) $x^2 - 7x - 18 = 0$

b) $6x^2 + 11x + 3 = 0$

g) $2x^2 - x - 10 = 0$

l) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

c) $7x^2 - 9x + 2 = 0$

h) $x^2 - 4x + 3 = 0$

m) $x^2 + 5x - 24 = 0$

d) $4x^2 - 15x + 9 = 0$

i) $x^2 + 4x + 4 = 0$

n) $x^2 + 15x + 56 = 0$

e) $6x^2 - 5x - 6 = 0$

j) $x^2 + 13x + 36 = 0$

ñ) $8x^2 - 2x - 3 = 0$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método de completar el cuadrado.

a) $x^2 + x - 20 = 0$

f) $6x^2 - 5x = 6$

k) $x^2 - 2x - 15 = 0$

b) $2x^2 - x - 3 = 0$

g) $2x^2 + 4x = -1$

l) $5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = 8$

c) $x^2 - 2x - 1 = 0$

h) $6x^2 - 5x = -1$

m) $x^2 - (7x + 6) = x + 59$

d) $x^2 - 6x = 3$

i) $x^2 - 8x = 1$

n) $x^2 - 19x = -83$

e) $x^2 - 5x + 6 = 0$

j) $4x^2 - 11 = 4x$

ñ) $x^2 + 7x + 12 = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por la fórmula general.

a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

f) $2x^2 + 5x + 1 = 0$

k) $3x^2 + 11x + 7 = 0$

b) $3x^2 + 2x - 5 = 0$

g) $x^2 - x + 1 = 0$

l) $x^2 - 6x + 10 = 0$

c) $x^2 - 6x + 8 = 0$

h) $20x^2 + 9x + 1 = 0$

m) $27x^2 + 12x - 7 = 0$

d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

i) $x^2 - 10x + 25 = 0$

n) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

e) $7x^2 + x - 5 = 0$

j) $x^2 - 2x + 2 = 0$

ñ) $5x^2 - 7x - 90 = 0$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones en forma cuadrática.

a) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

d) $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$

g) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

b) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

h) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

f) $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$

i) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

6. Determina la naturaleza de las raíces para las siguientes ecuaciones.

a) $7x^2 - 4x + 3 = 0$

d) $4x^2 + 7x + 3 = 0$

g) $5x^2 - 21x + 18 = 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

e) $x^2 + 4x + 5 = 0$

h) $x^2 - 10x + 25 = 0$

c) $x^2 - x + 4 = 0$

f) $9x^2 - 6x = -1$

i) $3x^2 + 6x + 4 = 0$

7. Resuelve los siguientes problemas que conducen a ecuaciones cuadráticas y discute en plenaria los resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

- El producto de dos números impares consecutivos es 143. Encuentra los números.
- La diagonal de un rectángulo es 8 pulgadas mayor que la longitud y esta a su vez 1 pulgada mayor que la anchura; determina las dimensiones del rectángulo.
- Las dimensiones de una hoja de papel son 9 por 12 cm; el área de los cuatro márgenes, los cuales son del mismo ancho, es 38 cm², encuentra la anchura de los márgenes.
- Un canal de sección rectangular se hace doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica; el ancho de la lámina es 18 pulgadas y la sección del canal es 40.5 in². Encuentra la anchura y la profundidad del canal.
- Un carro que recorre 20 millas por hora más rápido que un camión, se desplaza 720 millas en 6 horas menos que las requeridas por el camión para recorrer la misma distancia; determina la velocidad del carro y la del camión.
- Un atleta camina una distancia de 120 km a cierta velocidad y regresa a una velocidad de 15 km mayor. Determina las velocidades de ida y vuelta si el tiempo total fue de 4 horas 40 minutos.
- Un barco navega hacia el norte a 30 nudos por hora; un segundo barco navega hacia el este a 40 nudos por hora; el primer barco alcanza el punto de intersección de sus caminos 2 horas antes que el segundo barco pase por el mismo punto. ¿En qué tiempo estarán los barcos separados entre sí, 5 nudos?
- Un rancharo compró cierto número de gallinas en 4 800 pesos; si el precio por cada gallina hubiera sido 10 pesos menos, hubiera recibido 16 gallinas más por la misma cantidad. ¿Cuántas gallinas compró?

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Desigualdades e inecuaciones

Concepto de desigualdad

Es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra. Los símbolos que emplea la desigualdad son:

- $x > y$ Significa que x es **mayor** que y .
- $x \geq y$ Significa que x es **mayor o igual** que y .
- $x < y$ Significa que x es **menor** que y .
- $x \leq y$ Significa que x es **menor o igual** que y .

La interpretación del símbolo de la desigualdad es que se abre hacia el miembro mayor y apunta hacia el miembro menor.

Una desigualdad consta de un *primer miembro* que se encuentra a la izquierda del símbolo de la desigualdad y un *segundo miembro* que se ubica a la derecha de dicho símbolo.

Los términos de una desigualdad son las cantidades que están contenidas en los miembros de la desigualdad y que pueden estar separados entre sí por los signos $+$ o $-$.

Ejemplo



Dos desigualdades, cuando tienen sus símbolos orientados hacia una misma dirección, son del *mismo sentido*; si los símbolos se orientan en direcciones opuestas, indica que son de *sentidos opuestos*.

Ejemplos

- a) $5 + x > 3$ y $x^2 - 1 > 4x$ Son del mismo sentido.
 b) $x - 5 < x^2$ y $2x^3 - 1 > 0$ Son de sentidos opuestos.

Propiedades de las desigualdades

Son aquellas que se aplican para transformar los miembros de una desigualdad; dichas propiedades establecen que:

1. Una desigualdad no se altera si se suma o se resta a ambos miembros una misma cantidad.

Ejemplos

- a) Si $7 > 2$, al sumar 4 unidades a ambos miembros, se tiene:

$$7 + 4 > 2 + 4, \text{ es decir, } 11 > 6$$

- b) Si $7 > 2$, al restar 1 unidad a ambos miembros, se tiene:

$$7 - 1 > 2 - 1, \text{ es decir, } 6 > 1$$

2. Una desigualdad no se altera si a ambos miembros se les multiplica o se les divide por una misma cantidad positiva.

Ejemplos

- a) Si $7 > 2$, al multiplicar ambos miembros por 3 unidades, resulta:

$$7(3) > 2(3), \text{ es decir, } 21 > 6$$

- b) Si $12 > 4$, al dividir ambos miembros entre 4 unidades, resulta:

$$\frac{12}{4} > \frac{4}{4}, \text{ es decir, } 3 > 1$$

3. El sentido de una desigualdad se invierte si ambos miembros se multiplican o se dividen por una misma cantidad negativa.

Ejemplos

- a) Si $7 > 2$, al multiplicar ambos miembros por -2 unidades, se tiene:

$$7(-2) < 2(-2), \text{ es decir: } -14 < -4$$

- b) Si $9 > 3$, al dividir ambos miembros entre -3 unidades, se tiene:

$$\frac{9}{-3} < \frac{3}{-3}, \text{ es decir, } -3 < -1$$

Concepto de inecuación

Es una desigualdad condicional que contiene una o más incógnitas y que solo se satisface para determinados valores de las incógnitas implicadas.

Solución de inecuaciones de primer grado con una incógnita

La solución de inecuaciones se fundamenta en las propiedades de la desigualdad, que permite determinar los valores de las incógnitas que satisfacen la inecuación.

Se hace necesario recordar que las inecuaciones, igual que las ecuaciones, emplean la transposición de términos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Encuentra el límite de x en las siguientes inecuaciones:

$$3x - 14 < 7x - 2$$

$$3x - 7x < 14 - 2$$

Transposición de términos

$$-4x < 12$$

$$x > \frac{12}{4}$$

$$x > -3$$

El siguiente término -3 es el límite inferior de x , es decir, la desigualdad dada se satisface para los valores de x mayor que -3 . Es decir:

$$\text{Si } x = -2$$

$$3(-2) - 14 < 7(-2) - 2$$

$$-6 - 14 < -14 - 2$$

$$-20 < -16$$

$$\text{Si } x = -1$$

$$3(-1) - 14 < 7(-1) - 2$$

$$-3 - 14 < 7 - 2$$

$$-17 < -9$$

$$\text{Si } x = 0$$

$$3(0) - 14 < 7(0) - 2$$

$$-14 < -2$$

$$\text{Si } x = 1$$

$$3(1) - 14 < 7(1) - 2$$

$$3 - 14 < 7 - 2$$

$$-11 < 5$$

$$\text{Si } x = 2$$

$$3(2) - 14 < 7(2) - 2$$

$$6 - 14 < 14 - 2$$

$$-8 < 12$$

$$\text{Si } x = 3$$

$$3(3) - 14 < 7(3) - 2$$

$$9 - 14 < 21 - 2$$

$$-5 < 19$$

Para valores menores que -3 , la desigualdad no se satisface:

$$\text{Si } x = 4$$

$$3(-4) - 14 < 7(-4) - 2$$

$$-12 - 14 < -28 - 2$$

$$-26 < -30 \text{ lo cual no es cierto ya que } -26 > -30$$

El valor dado de x , no satisface la desigualdad.

2 •••Entonces $\frac{x+3}{3} - \frac{4}{x+2} > \frac{x}{3}$, quitando denominadores, se tiene:

$$(x+3)(x+2) - 4(3) > x(x+2)$$

$$x^2 + 5x + 6 - 12 > x^2 + 2x$$

Por transposición de términos:

$$x^2 + 5x - x^2 - 2x > 6$$

$$3x > 6$$

$$x > \frac{6}{3}$$

$$x > 2$$

El término 2 es el límite inferior de x , es decir, la desigualdad dada, sólo se satisface para los valores de x mayores que 2.

$$\text{Si } x = 1$$

$$\frac{1+3}{3} - \frac{4}{1+2} > \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{4}{3} > \frac{1}{3}$$

$$0 > \frac{1}{3}$$

El valor dado de x no satisface la desigualdad.

$$\text{Si } x = 3$$

$$\frac{3+3}{3} - \frac{4}{3+2} > \frac{3}{3}$$

$$2 - \frac{4}{5} > 1$$

$$1\frac{1}{5} > 1$$

Para valores mayores que 2,
la desigualdad se satisface.

$$\text{Si } x = 4$$

$$\frac{4+3}{3} - \frac{4}{4+2} > \frac{4}{3}$$

$$\frac{7}{3} - \frac{4}{6} > \frac{4}{3}$$

$$\frac{14-4}{6} > \frac{4}{3}$$

$$\frac{10}{6} > \frac{4}{3}$$

$$\frac{5}{3} > \frac{4}{3}$$

EJERCICIO 11

1. En equipo encuentren el límite de x en las siguientes inecuaciones y discutan en plenaria el procedimiento de solución.

a) $8x - 1 > 6x + 4$

b) $5x - 7 < 3x + 2$

c) $x + 6 < 4 - 3x$

d) $4 > 3x + 5$

e) $5x - 1 > 3x + 7$

f) $2x - 3 < 5$

g) $6x + 3 < x - 9$

h) $x - 6 > 21 - 8x$

i) $x - 5 < 2x - 6$

j) $\frac{5}{3x+1} - \frac{20}{9x^2-1} < \frac{2}{3x-1}$

k) $(x-1)^2 - 7 > (x-2)^2$

l) $\frac{2x+1}{3x-1} > \frac{2x+5}{3x+2}$

m) $2x + 9 > 3x$

n) $x - 3 > 5$

ñ) $5x - 4 > 7x - 16$

➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Propiedades de los logaritmos

Definición de logaritmo

El logaritmo de un número es el *exponente* al que se eleva otro número llamado *base* para dar lugar al número propuesto; la palabra logaritmo se simboliza como **log**.

En la ecuación $b^x = N$, el logaritmo de N en la base b es x ; la relación se escribe simbólicamente como $x = \log_b N$, es decir:

Forma exponencial

$$b^x = N$$

Forma logarítmica

$$x = \log_b N$$

Ejemplos

$4^0 = 1$ El logaritmo de 1 en la base 4 es 0.

$4^1 = 4$ El logaritmo de 4 en la base 4 es 1.

$4^2 = 16$ El logaritmo de 16 en la base 4 es 2.

$4^3 = 64$ El logaritmo de 64 en la base 4 es 3.

Con base en la definición, se aclara que b es diferente de uno, ya que la unidad a cualquier potencia siempre es igual a la unidad; siendo x el exponente un número real.

Sistemas de logaritmos

Cualquier número positivo se puede tomar como base para un sistema de logaritmos; por lo tanto, la cantidad de sistemas será ilimitado.

Los sistemas que generalmente se emplean son:

- a) Los **logaritmos vulgares** o de **Briggs**, cuya base es 10. El símbolo empleado para este logaritmo es **log**.
- b) Los **logaritmos naturales** o **neperianos**, creados por **Jhon Neper**, cuya base es el número

$$e = 2.71828182845...$$

El símbolo empleado para este logaritmo es **ln**.

Propiedades generales de los logaritmos

- □ La base de un sistema de logaritmos nunca es negativa.
- □ Los números negativos carecen de logaritmo.
- □ En todo sistema el logaritmo de la base es la unidad.
- □ En todo sistema el logaritmo de la unidad es cero.
- □ Los números mayores que la unidad, dan lugar a logaritmos positivos.
- □ Los números menores que la unidad, dan lugar a logaritmos negativos.

Leyes de los logaritmos

A partir de las leyes de los exponentes se deducen las leyes de los logaritmos. Para facilitar su exposición, se trabajará con logaritmo de base 10. Todos los demás logaritmos siguen exactamente las mismas reglas.

Logaritmo de un producto. El logaritmo de un producto es igual a la de los logaritmos de los factores.

$$\log AB = \log A + \log B \qquad \log ABC = \log A + \log B + \log C$$

Logaritmo de un cociente. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo (numerador) menos el logaritmo del divisor (denominador).

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

Logaritmo de una potencia. El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

$$\log A^n = n \log A$$

Logaritmo de una raíz. El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log A = \frac{\log A}{n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

Aplica las leyes de los logaritmos en la simplificación de las siguientes expresiones.

- 1 ••• $\log(15)(82)$, como es un producto, resulta:

$$\log(15)(82) = \log(15) + \log(82)$$

- 2 ••• $\log \frac{(28)(36)}{16}$, como es un cociente, resulta:

$$\log \frac{(28)(36)}{16} = \log(28)(36) - \log(16) = \log(28) + \log(36) - \log(16)$$

- 3 ••• $\log(8)^2(4)^5$, como es un producto de potencias, resulta:

$$\log(8)^2(4)^5 = 2 \log(8) + 5 \log(4)$$

- 4 ••• $\log \sqrt[3]{421}$, como es una raíz, resulta:

$$\log \sqrt[3]{421} = \frac{1}{3} \log 421 = \frac{\log 421}{3}$$

EJERCICIO 12

1. Resuelve en cada caso lo que se indica.

1. Con ayuda de tu profesor escribe la forma logarítmica para las siguientes expresiones.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

a) $2^4 = 16$

d) $8^2 = 64$

g) $7^0 = 1$

b) $36^{\frac{1}{2}} = 6$

e) $3^1 = 3$

h) $4^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

f) $5^3 = 125$

i) $8^{-3} = -512$

2. Escribe la forma exponencial para las siguientes expresiones.

a) $\log_2 4 = 2$

d) $\log_7 49 = 2$

g) $\log_5 25 = 2$

b) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

e) $\log_6 32 = \frac{5}{3}$

h) $\log_3 27 = 3$

c) $\log_{10} 10 = 1$

f) $\log_3 1 = 0$

i) $\log_6 36 = -2$

3. En equipo apliquen las leyes de los logaritmos en la simplificación de las siguientes expresiones y comparen sus resultados con el resto del grupo.

a) $\log(52)(37)$

g) $\log \sqrt[3]{67}$

l) $\log \frac{(3)^2}{8}$

b) $\log(6)(24)(105)$

h) $\log \frac{\sqrt{24}}{\sqrt[3]{128}}$

m) $\log \sqrt{\frac{15}{7}}$

c) $\log(4)^2(3)^4$

i) $\log \sqrt{13} \sqrt[3]{19}$

n) $\log \sqrt{\frac{(8)(14)(3)}{789}}$

d) $\log \frac{(54)(17)}{9}$

j) $\log \sqrt[4]{48}$

ñ) $\log \frac{15 \sqrt[3]{36}}{4 \sqrt[3]{56}}$

e) $\log \frac{(23)(11)}{(6)(12)}$

k) $\log(12)^{\frac{1}{3}}$

f) $\log \frac{(12)^2(8)^3}{(15)^4}$



Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

Resuelve lo que se indica en cada caso.

1. Resuelve siguientes ecuaciones cuadráticas por la fórmula general.

a) $2y^2 - 4y + 14 = 0$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

c) $7x^2 + x - 5 = 0$

d) $4y^2 - 12y + 7 = 0$

2. Un avión que recorre 8 kilómetros por hora más rápido que un autobús, se desliza 70 millas en 5 horas menos que las requeridas por el autobús para recorrer la misma distancia; encuentra la velocidad del avión y la del autobús.

3. María camina una distancia de 3 km a cierta velocidad y regresa a una velocidad de 0.8 km mayor; encuentra las velocidades de ida y vuelta si el tiempo total fue de 2 horas 10 minutos.

4. Un leopardo recorre una distancia hacia el norte a 30 kilómetros por hora para atrapar a su presa; dicha presa recorre una distancia hacia el este a 40 kilómetros por hora; el leopardo alcanza el punto de intersección de sus caminos 3 horas antes que su presa pase por el mismo punto, ¿en qué tiempo estarán atacante y presa entre sí, 5 kilómetros?

5. José compró cierto número de videojuegos en 200 pesos; si el precio por cada videojuego hubiera sido 80 pesos menos, hubiera recibido 11 videojuegos más por la misma cantidad, ¿cuántos videojuegos compró?

Respuestas de algunos reactivos de los distintos ejercicios propuestos

EJERCICIO 1

- I. 1. Es una rama de las matemáticas que generaliza los métodos y procedimientos para efectuar cálculos y resolver problemas.
3. Calcular el área y perímetro de un cuadrado dado sus dimensiones en metros, (aritmética), o el cálculo de la ecuación del área y perímetro de cualquier cuadrado (álgebra).
5. En el lenguaje común se emplean palabras mientras que en el lenguaje algebraico se emplean letras y símbolos.

- II. 1. a) $\frac{x}{3}$
 b) $a^2 - b^2$
 c) $\frac{y}{2} + 2y$
 d) $(a + b)^2$
 e) $3z$

EJERCICIO 2

- I. 1. Signos de relación, operación y agrupación.
3. $=, <, > y \cdot$
5. Es una representación que se aplica a un conjunto de literales y números que conforman una o más operaciones algebraicas.
7. Término del signo, Coeficiente, Parte literal y Grado.
9. Entero, Fraccionario, Racional, Irracional, Heterogéneo, Homogéneo, Semejantes, No semejantes y Nulo.

- II. 1. $3y^4, -xy^5, \sqrt{2mn}, \frac{2xm}{-y^3}, 3x$
3. a) Término entero
 b) Término racional
 c) Término irracional
 d) Término heterogéneo, diferente grado absoluto
 e) Términos homogéneos, mismo grado absoluto
5. Grado absoluto Grado relativo
 a) Segundo Segundo y primero respecto a x
 b) Tercero Tercero (a) y segundo (x)
 c) Tercero Primero y segundo (x)
 Segundo y tercero (y)
 primero (z)

- d) Segundo Segundo (x, y, z)
- e) Sexto primero (a y b)
 segundo, tercero, quinto (x)
 segundo, quinto, sexto (y)

7. a) 11
 b) 11
 c) $\frac{5}{4}$
 e) -2
 f) -282
 g) 4

- III. (8)(11)(14)(9)(1)(4)(10)(3)(13)(12)(5)(7)

EJERCICIO 3

- I. 1. $7ac$
3. $5xy$
5. $5a - 6b + 4c$
7. $5x + 9y + 5z$
9. $14x + y - 3z$
11. $-\frac{9}{10}x^2 + \frac{27}{14}xy + \frac{2}{3}y^2$
13. $-\frac{3}{8}x^2y + \frac{53}{65}y^2 + \frac{3}{7}x$
15. $\frac{1}{18}m^2n^2 + \frac{3}{2}m + \frac{3}{17}n$

- II. 1. $2x - 7y + 7$
3. $-3x + 5y + 3z$
5. $-4a^2b + ab^2 - 8ab$
7. $4x - 10y - 3z - 12$
9. $2m^2 + 13mn + 7n^2$
11. $2x - \frac{9}{8}y + z$
13. $-\frac{1}{8}m - \frac{13}{9}n - \frac{1}{5}$

- III. 1. $-5x + 7y + 6z$
3. $-xy - 6z - 8$
5. $3x + y + 8$
7. $3a + 2b + 16c$

- IV. 1. $-2x^3y^2$
 3. $3a^3b^5$
 5. $14a^3b^4$
 7. $-6x^2y^2 + 3xy^2$
 9. $-20a^2x + 15a^2xy + 5a^2y$
 11. $3x^2y - xy^2 - y^3 + 2x^3$
 13. $-18x^4y + 9x^3y + 3x^2y$
 $+ 36x^3y^2 - 18x^2y^2$
 $- 6xy^2 - 72x^3 + 36x^2 + 12$
 15. $-2x^3 - 5x^2 + 28x + 15$
 17. $3x^2 - 5xy - 2y^2 - 3yz + 2z^2 + 5xz$

- V. 1. $\frac{x}{4a^3}$
 3. $2m^2$
 5. $\frac{4}{x^2y^2}$
 7. $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$
 9. $(x+10) + \frac{8x-40}{x^2+4}$
 11. $\frac{6(x^3+x)}{y} - 12y$
 13. $(2m^3+5m+20) + \frac{44m-16}{m^2-3m+1}$
 15. $\left(3x^2-5x+\frac{7}{2}\right) + \frac{\frac{9}{2}x+\frac{1}{2}}{2x^2-3x-1}$

EJERCICIO 4

- I. 1. El producto de la suma y la diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.
 3. Elevar al cuadrado un polinomio, tiene como resultado, la suma de los cuadrados de cada término del polinomio más el doble producto de todos los términos tomados de dos en dos.
 5. Al desarrollar el producto de binomios con términos semejantes, se obtiene como resultado un trinomio, cuyos términos se determinan de acuerdo con los siguientes pasos:
- Se multiplican los primeros términos de los binomios dados.
 - Se multiplican los términos extremos y los términos interiores de los binomios dados; por reducción de términos semejantes, obtenemos el resultado.
 - Se multiplican los segundos términos de los binomios dados.
7. Un binomio simétrico.

- II. 1. a) $x^2 - 25$
 b) $a^4 - x^4$
 c) $9x^2 - 4y^2$
 d) $36m^4 - n^4$
 e) $49x^2y^2 - z^4$
 f) $25a^4b^2 - 4c^2$
 g) $16p^2q^2 - 9r^2$

$$h) 81m^4n^2 - 4x^2y^4$$

$$i) \frac{a^2b^2}{9} - \frac{9c^2}{16}$$

$$j) \frac{9}{25} - \frac{25}{36}x^2$$

$$k) \frac{121m^2}{9} - \frac{25n^2}{64}$$

$$l) \frac{a^2}{b^2} - \frac{c^2}{d^2}$$

$$m) \frac{u^2}{v^2} - w^2$$

$$n) 4x^2 - \frac{9y^2}{z^2}$$

$$\tilde{n}) 64a^2b^2 - c^2d^2$$

$$o) 121p^2q^2 - r^2s^2$$

3. a) $a^4b^2 + m^2n^4 + x^4y^4 - 2a^2bmn^2 + 2a^2bx^2y^2 - 2mn^2x^2y^2$
 b) $9m^2 + 12mq + 4q^2 + 6mz + 4qz + z^2$
 c) $16x^4 - 24x^3 + x^2 + 6x + 1$
 d) $25a^2 + 70ab + 49b^2 - 30ac - 42bc + 9c^2$
 e) $81 - 54xy + x^2y^2 + 108z - 36xyz + 36z^2$
 f) $4a^2 + 16b^2 + 9c^2 + d^2 - 16ab + 12ac - 4ac - 24bc$
 $+ 8bd - 6cd$
 g) $m^4 + n^4 + 2m^3n + 2mn^3 + 2m^2q + 3m^2n^2 + q^2 + 2n^2q + 2mnq$
 h) $81 + n^4 + m^2n^2 + m^4 + 18n^2 + 18mn + 18m^2 + 2mn^3$
 $+ 2m^2n^2 + 2m^3n$
 i) $16a^4 + 25d^4 + 16a^2bc - 40a^2d^2 + 24a^2 + 4b^2c^2 - 20bcd^2$
 $- 30d^2 + 12bc + 9$
 j) $x^2 + 36y^2 + z^2 + 12xy + xz + 6yz + 2x + 12y + 4z + 4$

5. a) $6x^2 - 14xyz + 8y^2z^2$
 b) $35a^4 - a^2bc - 12b^2c^2$
 c) $2x^4 + 19x^2y + 42y^2$
 d) $-3x^2 - 11xz + 4z^2$
 e) $12a^2 - 3b^2$
 f) $3x^2 + 2xy - 5y^2$
 g) $7a^4 - 5a^2x^2 - 2x^4$
 h) $2m^2n^2 + 19mn + 35$
 i) $22x^2y^2 - 39xyz - 35z^2$
 j) $16p^2 + 46pq + 15q^2$
 k) $52a^2 - 83ab - 14b^2$
 l) $5x^2 - 13x - 6$

EJERCICIO 5

- I. 1. a) $x(y+x)$
 b) $m(m+n)$
 c) $a^2(1-3a)$
 d) $2xy(x-3y)$
 e) $3ax^2(a^2+3)$
 f) $12y^2(z-4x)$

- g) $m(1 - m + m^2)$
 h) $5x(x^2 + 6x - 3)$
 i) $3xy(x + y + 2)$
 j) $24[a(a - 3) + 6]$
 k) $m(m^4 + m^2 - 1)$
 l) $a^2(a^6 - a^4 + a^2 - 1)$
 m) $8a^2b(2 - ab - 3ab^2 - 5b^3)$
 n) $7a^2(a - 21a^2 + 2)$
 ñ) $25x(1 + 3x^2 - 5x^4)$
 o) $2mn(4 + m + 6n)$
 p) $2b(a - 3c + 2)$
 q) $5xy^2(1 - 3x^2 - 9x)$
 r) $3mx(1 + 7m - 3mx + 4x)$
 s) $2abc(ac^2 - 2b + 8c)$

3. a) $(m + 3n)(m - 3n)$
 b) $(4x + 6y)(4x - 6y)$
 c) $(5 + ax)(5 - ax)$
 d) $(\sqrt{2x} + 2\sqrt{2xy})(\sqrt{2x} - 2\sqrt{2xy})$
 e) $(7 + x)(7 - x)$
 f) $(\sqrt{5m} - \sqrt{5n})(\sqrt{5m} + 3\sqrt{5n})$
 g) $(ab + cd)(ab - cd)$
 h) $(x + (y + z))(x - (y + z))$
 i) $(2y + (a - 1))(2y - (a - 1))$
 j) $((y - 3) + 4x)((y - 3) - 4x)$
 k) $(3a + (m + n))(3a - (m + n))$
 l) $((x + y) + (a - b))((x + y) - (a - b))$
 m) $((5x - 2) + (3y - 1))((5x - 2) - (3y - 1))$
 n) $((x + 3) + (x - 5))((x + 3) - (x - 5))$
 ñ) $((5a + 1) + (a + 3))((5a + 1) - (a + 3))$
 o) $(x - y)(a + b)(a - b)$
 p) $(a + b)(6 + 2x)(6 - 2x)$
 q) $(x - 1)(5a + 3b)(5a - 3b)$
 r) $((x - y) + (x + y))((x - y) - (x + y))$
 s) $((m - 3) + (m - 5))((m - 3) - (m - 5))$
 t) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{4}y\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{4}y\right)$
 u) $\left(\frac{3}{4}a + \frac{3}{7}b\right)\left(\frac{3}{4}a - \frac{3}{7}b\right)$

5. a) $(x - 2)^2$
 b) $(x + 3)^2$
 c) $(x - 6)^2$
 d) $(m - n)^2$
 e) $(3x + 5)^2$

- f) $(2x - 3)^2$
 g) $(x^2 - 1)^2$
 h) $(7a - 5)(7a - 5)$
 i) $(c - 7)^2$
 j) $(y - z)^2$
 k) $(x + 4y)^2$
 l) $(a^2 + 4)^2$
 m) $(3a^2 - 4)^2$
 n) $(x^2 - 9)^2$

7. a) $(3x - 5a)(2x + 3a)$
 b) $(4x - 3)(x - 2)$
 c) $(4x - 1)(3x - 2)$
 d) $(4a + 3)(a - 7)$
 e) $(2a - 1)(a - 1)$
 f) $(3a - 8)(a + 1)$
 g) $(7x + 6y)(3x - 4y)$
 h) $(4x + 1)(x + 3)$
 i) $(5a - 3)(a - 1)$
 j) $(2x + 3)(x + 1)$

9. a) $(x - 3 + y)(x + 3 + y)$
 b) $(x - 3a - 6z)(x - 3a + 6z)$
 c) $(2a + 5 + 4x)(2a + 5 - 4x)$
 d) $(2a + b + xy)(2a + b - xy)$
 e) $(x + 4)^2 - 18$
 f) $(x + 1)^2 + 7$
 g) $(a + 3)^2 - 5$
 h) $(b + 8)^2 - 65$
 i) $(x + 3)^2 + 27$
 j) $\left(x^2 + \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{19}{12}$
 k) $(7a - 3b)^2 - 36ab$
 l) $(5x + 3)^2 - 16x$

EJERCICIO 6

1. 1. a) $\frac{2}{m+2}$
 b) $\frac{(a-2)}{(a+2)}$
 c) $\frac{x}{a}$
 d) $\frac{1}{3x-2a}$
 e) 4

- f) $\frac{x^2 - xy + y^2}{(x+y)^2}$
 g) $\frac{x-3}{x+1}$
 h) $\frac{x-y}{x}$
 i) $-\frac{x+2}{1+4x}$
 j) $\frac{1}{m+n}$
 k) $\frac{x+3}{2x-3}$
 l) $1 + \frac{1}{a-y}$
 m) $\frac{(x+y)^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$
 n) $\frac{x-3}{x-1}$
 ñ) $\frac{(2x+y)(x-y)}{(x-2y)(x-2y)}$
 o) $\frac{x+4}{x-2}$
 p) $\frac{a}{2a-3b-4x^2}$
 q) $\frac{x(x+3)(x-3)}{x(x-3)(x+7)} = \frac{x+3}{x+7}$
 r) $\frac{(x-3)(x+2)^2}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{x-3}{x-1}$
 s) $\frac{(1-x)^3}{(1-x)(m+n)} = \frac{(1-x)^2}{m+n}$
3. a) $\frac{9mx}{4}$
 b) $\frac{a}{6}$
 c) $\frac{m^2 - my + y^2}{x^2 - xn + n^2}$
 d) $\frac{a}{x-1}$
 e) $\frac{3-x}{9+3x+x^2}$
 f) $-\frac{(1+x+x^2)(a+1)}{(1+x)}$
 g) $\frac{a+6}{a+3}$
 h) $\frac{(x^2-2x+4)(x^2-5x+2)}{(x-2)(x-1)}$
 i) $\frac{m+mx}{8m+4x}$
 j) $\frac{7}{a+b}$
- k) $\frac{x+\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{5}}$
 l) $\frac{y}{(x-y)^2}$
 m) $\frac{a+3}{a+6}$
 n) $\frac{x-1}{a-3}$
 ñ) $\frac{x-3}{x+7}$
 o) $a-2$
 p) $\frac{y}{2x+y}$
 q) 1
 r) $\frac{(x+2)(x+5)(x-3)(x+1)}{\left(x+\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)}$
 s) $\frac{\left(x+\frac{9}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)}{(x+36)\left(x-\frac{1}{6}\right)}$
 t) $\frac{(x^2-3xy+9y^2)(8x^2-2xy+y^2)(x+3y)^2x}{(4x+y)^2(x-y)(2x+y)(2x+y)y}$

EJERCICIO 7

- II. 1. a) $6x^3$
 b) $30a^4x^6$
 c) $-6x^5y^3$
 d) $64a^6b^3c^9$
 e) $32m^{10}n^{15}$
 f) $-81t^8$
 g) $972x^{10}y^{11}$
 h) $(a^{13}b^{21}c^{14})$
 i) $\frac{1}{2}$
 k) $\frac{a^4}{3b}$
 l) $\frac{3r^2}{p}$
 m) $\frac{4m^2}{n^2}$
 n) $\frac{xy}{3z^2}$
 ñ) $\frac{7b}{9a^2c}$
 p) $\frac{27b^6}{125a^3c^3}$
 r) $\frac{b^{10}}{64a^3}$

- t) $\frac{y^5}{2x^2z^4}$
 u) $\frac{b^2z}{a^2}$
 x) $\frac{1}{mb^2z^5}$
3. b) $2x\sqrt[3]{xy^3}$
 d) $2n\sqrt{10m}$
 f) $\frac{ab^2\sqrt{539ac}}{7c}$
 h) $\frac{x^2\sqrt{10amx}}{0 \ m}$
 j) $\frac{3y\sqrt{2}}{10x^2}$
 l) $\sqrt{5a}$
5. b) $\sqrt{2x}(2ax-9a+2x)$
 d) $\sqrt[3]{2mn}(1-2m+n)$
 f) $3a\sqrt{6ab}+2y\sqrt[3]{xy}+\sqrt{6xy}$
7. b) $\frac{1}{2n}\sqrt[3]{4n^2}$
 d) $\frac{3a}{x}\sqrt{xy}$
 f) $2\sqrt{2xy}$
 h) $\frac{20ax+4\sqrt{abx}+2ab}{16ax-25b}$
 j) $\frac{16-6x}{96+32\sqrt{6x}-12x-6x\sqrt{6x}}$

EJERCICIO 8

- II. 1. a) $x=2$
 b) $x=-2$
 c) $x=-3$
 d) $x=13$
 e) $x=-\frac{1}{4}$
 f) $x=0$
 g) $x=\frac{13}{2}$
 h) $x=-\frac{4}{a-b}$
 i) $x=-3$
 j) $x=\frac{1-3a}{a-2}$
 k) $x=\frac{26}{5}$
 l) sin solución

- m) $x=-\frac{9}{8}$
 n) $x=-\frac{5}{6}$
 ñ) $x=-\frac{3}{5}$
 o) $x=2$
 p) $x=\frac{1}{4}$
 q) $x=\frac{3}{8}$
 r) $x=-\frac{4a+b-10}{4}$
 s) $x=\frac{3}{a-4}$
 t) $x=\frac{8a-5}{13}$
 u) $x=\frac{31}{17}$

3. a) Los dos números son 39 y 78.
 c) El número buscado es $150\frac{1}{3}$.
 e) Los números son 90 y 135.
 g) Los dos ángulos iguales son de 64° cada uno y el tercer ángulo es de 52° .
 i) El ancho es 13, el largo es 19 y el área del rectángulo es 247 unidades cuadradas.
 k) Se requiere $86\frac{2}{3}$ litros de jugo de piña.
 ñ) Pedro tiene 35 años y Héctor 41.
 o) Joel tiene 48 dólares Víctor tiene 96 dólares.

EJERCICIO 9

1. a) $x=8$
 $y=4$
 b) $x=11$
 $y=\frac{19}{6}$
 c) $x=\frac{23}{10}$
 $y=\frac{1}{0}$
 d) Inconsistente
 e) $x=-\frac{1}{9}$
 f) $x=3$
 $y=0$
 g) $x=-\frac{5}{3}$
 $y=0$

$$h) \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} x = -\frac{13}{7} \\ y = -\frac{6}{7} \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = -\frac{7}{20} \end{cases}$$

$$\bar{n}) \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$o) \begin{cases} x = 10 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$p) \begin{cases} x = -12 \\ y = 14 \end{cases}$$

$$q) \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$t) \begin{cases} x = \frac{43}{17} \\ y = \frac{27}{17} \end{cases}$$

$$x) \begin{cases} x = \frac{296}{31} \\ y = -\frac{29}{31} \end{cases}$$

$$y) \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$z) \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

$$3. \ a) \begin{cases} x = 14, y = 9 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = -8, y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x = 1, y = 2 \end{cases}$$

EJERCICIO 10

$$1. \ a) \begin{cases} x = \pm\sqrt{17} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = \pm 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = \pm\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2}i \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x = \pm 2i \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x = \pm ab \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = \frac{11}{7} \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x = \pm\frac{2i}{3} \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 5 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 9 \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 4 \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5}, x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{n}) \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 4 \end{cases}$$

$$3. \ a) \begin{cases} x_1 = 4, x_2 = -5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 2 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x = 4 \pm \sqrt{17} \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = \frac{15}{4} \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} x_1 = 5, x_2 = -3 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} x = \frac{1}{6}(-9 \pm \sqrt{177}) \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} x_1 = 4 \pm \sqrt{69} \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} x = \frac{1}{2}(19 \pm \sqrt{29}) \end{cases}$$

$$\bar{n}) \begin{cases} x_1 = -3, x_2 = -4 \end{cases}$$

$$5. \ a) \begin{cases} x_1^2 = 2, x_2^2 = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1^2 = -1, x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1^2 = -1, x_2^2 = -3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x_1^2 = -3, x_2^2 = -4 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x_1^2 = 4, x_2^2 = -1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x_1^2 = -4, x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x_1^2 = 16, x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x_1^2 = 3, x_2^2 = -1 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x_1^2 = 3, x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$7. \ a) \text{ Los números son 11 y 13.}$$

$$c) \text{ 1 cm.}$$

- e) Las velocidades del camión y carro son 14.524 y 34.524 millas por hora, respectivamente.
h) 800 gallinas.

h) $\frac{1}{2} \log 24 - \frac{1}{5} \log 128$
i) $\log_8(-512) = -3$

EJERCICIO 11

1. a) Para valores mayor que $\left(\frac{5}{2}\right)$, la desigualdad se satisface.
c) Para valores menor que $\left(-\frac{1}{2}\right)$, la desigualdad se satisface.
e) Para valores mayor que (4), la desigualdad se satisface.
g) Para valores menor que $\left(\frac{12}{5}\right)$, la desigualdad se satisface.
i) Para valores mayor que (1), la desigualdad se satisface.
k) Para valores mayor que (5), la desigualdad se satisface.
m) Para valores menor que (9), la desigualdad se satisface.
ñ) Para menor que (6), la desigualdad se satisface.

EJERCICIO 12

1. a) $\log_7 16 = 4$
b) $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$
c) $\log_2 \left(\frac{4}{9}\right) = 2$
d) $\log_8 64 = 2$
e) $\log_3 3 = 1$
f) $\log_5 125 = 3$
g) $\log_7 1 = 0$

3. a) $\log 52 + \log 37$
b) $\log 6 + \log 24 + \log 105$
c) $2 \log 4 + 4 \log 3$
d) $\log 54 + \log 17 - \log 9$
e) $\log 23 + \log 11 - (\log 6 + \log 12)$
f) $2 \log 12 + 3 \log 8 - 4 \log 15$
g) $\frac{1}{3} \log 67$
h) $\frac{1}{2} \log 24 - \frac{1}{5} \log 128$
i) $\frac{1}{2} \log 13 + \frac{1}{3} \log 19$
j) $\frac{1}{4} \log 48$
k) $\frac{1}{3} \log 12$
l) $2 \log 3 - \log 8$
m) $\frac{1}{2} [\log 15 - \log 7]$
n) $\frac{1}{2} [\log 8 + \log 14 + \log 3 - \log 789]$
ñ) $\log 15 + \frac{1}{3} \log 36 - \left(\log 4 + \frac{1}{3} \log 56\right)$

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com 

ISBN 978-607-32-2780-3



9 786073 227803