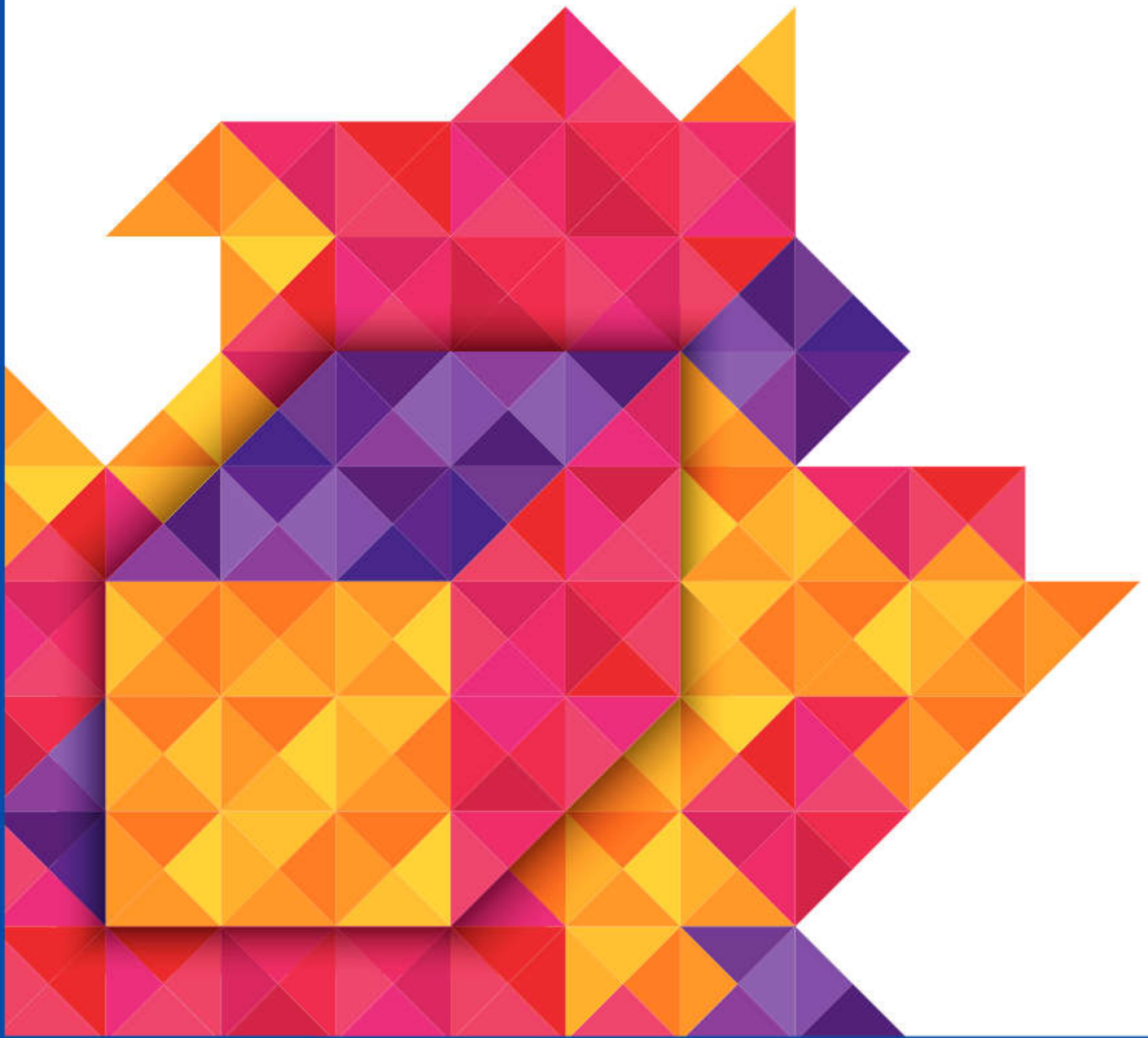


Benjamín Garza Olvera

Geometría analítica



ALWAYS LEARNING

PEARSON

Geometría analítica

Primera edición

BENJAMÍN GARZA OLVERA

Revisión técnica

Matemático. Máximo Pérez Rivas
por la Universidad Nacional Autónoma de México

Matemático. Sergio A. Pérez Ruiz
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Lic. Dulce Anabel Sánchez Torres
Presidenta de Academia
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 114
Chihuahua, Chihuahua.

Ing. Juan Ramón López Valdez
Subdirector Académico
Centro de Bachillerato Tecnológico No. 157
Colima, Colima.

PEARSON

Datos de catalogación

Autor: Garza, Benjamín.

Geometría analítica
Primera edición

Pearson Educación de México, S. A. de C. V., 2014
ISBN: 978-607-32-2777-3

Área: Bachillerato/Matemáticas

Formato: 21 x 27 cm

Páginas: 376

Geometría analítica

1a. edición

Libro del estudiante

El proyecto didáctico *Geometría analítica*, es una obra colectiva creada por encargo de la editorial Pearson Educación de México, S.A. de C.V. por un equipo de profesionales en distintas áreas, que trabajaron siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento pedagógico de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

■ **Dirección general:** Phillip De la Vega ■ **Dirección K-12:** Santiago Gutiérrez ■ **Gerencia editorial K-12:** Jorge Luis Iñiguez ■ **Coordinación de bachillerato y custom:** Lilia Moreno ■ **Edición sponsor:** Berenice Torruco ■ **Coordinación de arte y diseño:** Mónica Galván ■ **Supervisión de arte y diseño:** José Hernández ■ **Edición de desarrollo:** Kenyi Casillas ■ **Asistencia editorial:** Mirna González ■ **Corrección de estilo:** José Huerta ■ **Lectura de pruebas:** Carlos del Razo ■ **Diseño de portada:** Pulso Comunicación ■ **Diagramación:** Ediciones OVA.

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-2777-3

ISBN E-BOOK: 978-607-32-2778-0

ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-2779-7

D.R. © 2014 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Atacomulco 500, 5° piso

Col. Industrial Atoto, C.P. 53519

Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg.
Núm. 1031

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 17 16 15 14

PEARSON

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

www.pearsonenespañol.com

Unidad 1 Introducción a la geometría analítica 1

Evaluación diagnóstica 2

Introducción a la geometría analítica 3

Antecedentes históricos 4

Concepto de geometría analítica 4

Ejercicio 1 4

Sistema de coordenadas cartesianas 4

Sistema de coordenadas rectangulares 4

Ejercicio 2 5

Localización de puntos en el plano cartesiano 6

Representación gráfica de los puntos 6

Ejercicio 3 8

Distancia entre dos puntos 9

Ejercicio 4 18

División de un segmento en una razón dada 20

Teorema 21

Corolario 22

Cálculo de la razón cuando un segmento se divide en n partes iguales 22

Criterios de aplicación 23

División de un segmento lineal 29

Criterios de aplicación 30

Ejercicio 5 32

Área de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices 34

Área de una región triangular 34

Perímetro 36

Semiperímetro 36

Ejercicio 6 38

Gráfica de una ecuación y lugares geométricos 40

Lugar geométrico o gráfica de una ecuación 40

Análisis de una ecuación 40

Intersección con los ejes coordenados 40

Simetría 41

Simetría respecto al eje x 41

Simetría respecto al eje y 42

Simetría respecto al origen 43

Rangos de variación de las variables o extensión de la curva 43

Simetría respecto al eje x 44

Simetría respecto al eje y 44

Simetría respecto al origen 44

Asíntotas 45

Simetría respecto al eje x 48

Simetría respecto al eje y 48

Simetría respecto al origen 48

Simetría respecto al eje x 50

Simetría respecto al eje y 50

Simetría respecto al origen 50

Simetría respecto al eje x 52

Simetría respecto al eje y 52

Simetría respecto al origen 52

Ecuaciones factorizables 54

Intersecciones de curvas 54

Las curvas de los matemáticos 57

Curvas algebraicas 57

Curvas trascendentes 58

Representación de una ecuación diferencial 58

Las curvas monstruosas 58

Las curvas de los matemáticos 59

Ejercicio 7 60

Autoevaluación 64

Unidad 2 La línea recta 65

Evaluación diagnóstica 66

La línea recta 67

Pendiente y ángulo de inclinación 68

Ángulo de inclinación 68

Pendiente de una recta 68

Criterios de aplicación sobre la pendiente 68

Teorema 68

Demostración del teorema 69

Valor del ángulo de inclinación 69

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad 72
Ejercicio **8** 75

Determinación de la ecuación de la recta 77

Línea recta 77

Ecuación punto-pendiente para construir la ecuación de una recta 77

Teorema 77

Demostración 77

Ecuación pendiente-ordenada en el origen de una recta 79

Teorema 79

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados 80

Teorema 80

Demostración 81

Ecuación simétrica o canónica de la recta 82

Teorema 83

Ecuación de la recta en su forma general 84

Caso 1 84

Caso 2 85

Teorema 85

Distintas formas de la ecuación de la recta 87

Ejercicio **9** 93

Ecuación de la recta en la forma normal 96

Forma normal de la ecuación de la recta 96

Teorema 98

Reducción de la forma general de la ecuación de una recta a la forma normal 101

Teorema 102

Ejercicio **10** 108

Ecuación de la recta en la forma polar 110

Sistema de coordenadas polares 110

Conversión de coordenadas polares a rectangulares y viceversa 112

Teorema 112

Distancia entre dos puntos en coordenadas polares 115

Área de un triángulo en coordenadas polares 119

Ecuación de la recta en coordenadas polares 120

Teorema 121

Ejercicio **11** 125

Ángulo entre dos rectas 127

Caso 1 128

Caso 2 128

Teorema 129

Deducción de las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas 129

Posiciones relativas de dos rectas 133

Ejercicio **12** 138

Familias de rectas 139

Familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas 143

Ejercicio **13** 145

Aplicaciones de la forma normal de la ecuación de la recta 146

Distancia de un punto a una recta 146

Determinación de las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas dadas que se cortan 153

Ejercicio **14** 158

Rectas y puntos notables de un triángulo 160

Ecuación como lugar geométrico de la bisectriz de un ángulo 160

Incentro 161

Ecuación de la mediatriz de un segmento como lugar geométrico 162

Circuncentro 163

Ecuación y longitud de las alturas de un triángulo 163

Ortocentro 164

Ecuación y longitud de las medianas de un triángulo 165

Gravicentro, baricentro o centro de gravedad 165

Ejercicio **15** 174

Autoevaluación 178

Unidad 3 Las cónicas 179

Evaluación diagnóstica 180

Las cónicas 181

Introducción a las cónicas 182

Sección cónica 182

Formación de las cuatro cónicas básicas 182

Cónicas degeneradas 183

Ejercicio **16** 184**Determinación de la ecuación de la circunferencia y su gráfica 184**

Definición de circunferencia 184

Ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r 184

Ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen o de forma ordinaria 187

Forma general de la ecuación de la circunferencia 191

Ejercicio **17** 198

Discusión acerca de si una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + D_x + E_y + F = 0$ representa o no una circunferencia; en caso afirmativo, determinación de su centro y su radio 200

Ejercicio **18** 205**Determinación de la ecuación de la circunferencia a partir de tres condiciones dadas 206**

Circunferencias que satisfacen tres condiciones 206

Ejercicio **19** 212**Determinación de los diferentes casos de relación entre la circunferencia y la recta 213**

Definición de tangente a una curva 213

Ecuación de la tangente a una curva dada, en un punto particular de la misma 214

Longitudes de tangente, normal, subtangente y subnormal 215

Tangente a una circunferencia 216

Ejercicio **20** 221**Posición relativa de dos circunferencias 223**

Familias de circunferencias 223

Eje radical 227

Demostración de que el eje radical de dos circunferencias cualesquiera es perpendicular a su recta de los centros 228

Longitud de la tangente trazada desde un punto exterior a una circunferencia dada 228

Ejercicio **21** 232

Circunferencia 234

Determinación de la ecuación de la parábola y su gráfica 235

Definición 235

Elementos de una parábola 235

Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje focal sobre alguno de los ejes coordenados 235

Ecuación de la parábola con vértice fuera del origen y eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados 243

Forma general de la ecuación de la parábola 246

Ejercicio **22** 251

Discusión acerca de si una ecuación de la forma $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ o $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa o no una parábola; en caso afirmativo, determinación de sus elementos 253

Determinación de la ecuación de la parábola a partir de tres condiciones dadas 256

Relación de la ecuación de la parábola con la ecuación general de segundo grado con dos variables 259

Ejercicio **23** 263**Ecuaciones de la tangente y la normal a una parábola 264**

Diámetro de la parábola 268

Ejercicio **24** 270**Determinación de la ecuación de la elipse y su gráfica 274**

Definición 274

Elementos de una elipse 274

Ecuación de la elipse de centro en el origen y ejes de coordenadas de los ejes de la elipse 274

Ecuación de la elipse con centro fuera del origen y eje focal paralelo a uno de los ejes coordenados 281

Forma general de la ecuación de la elipse 285

Ejercicio **25** 289

Discusión acerca de si una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa o no una elipse; en caso afirmativo, determinación de sus elementos correspondientes 291

Ejercicio **26** 298

Ecuación de la tangente y normal a una elipse 299

Diámetro de la elipse 303

Ejercicio **27** 304

Elipse 306

Determinación de la ecuación de la hipérbola y su gráfica 308

Definición 308

Elementos de una hipérbola 308

Primera ecuación ordinaria de la hipérbola 309

Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola 313

Forma general de la ecuación de la hipérbola 318

Ejercicio **28** 321

Determinación de la ecuación de las asíntotas de la hipérbola 322

Definición de asíntota 322

Asíntotas de la hipérbola 322

Demostración 323

Hipérbola equilátera o rectangular 326

Hipérbolas conjugadas 327

Ejercicio **29** 332

Discusión acerca de si una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa o no una hipérbola; en caso afirmativo, determinación de sus elementos correspondientes 333

Ejercicio **30** 335

Ecuaciones de la tangente y la normal a una hipérbola 336

Diámetro de la hipérbola 340

Ejercicio **31** 342

Hipérbola 343

Forma polar de las cónicas 345

Ecuación de una circunferencia en coordenadas polares 345

Ecuación general de las cónicas en coordenadas polares 346

Ejercicio **32** 350

Autoevaluación 352

Respuestas de algunos reactivos de los distintos ejercicios propuestos 353

Presentación

Este libro se escribió pensando en estudiantes que cursan el tercer semestre de bachillerato tecnológico. El objetivo principal, fue escribir un libro que ustedes los estudiantes pudieran leer, entender y disfrutar. A lo largo del libro se utiliza un lenguaje claro y preciso que propicia la generación de conocimientos que, por lo general, resultan difíciles de entender y aprender. Se utilizan oraciones cortas, explicaciones claras y muchos ejemplos resueltos a detalle. Por tal motivo, en *geometría analítica* se plantearon los principales conceptos y definiciones mediante el uso de gráficas con ejemplos desarrollados paso a paso, uso de fórmulas y símbolos comunes que permitan comprender correctamente dichos conceptos y definiciones, así como, los contextos de problemas, planteamientos, soluciones y trazado gráfico de resultados. Así, la didáctica que se desarrolla en el texto se fundamenta en una exposición de conceptos introductorios y ejemplos demostrativos, así como, una diversificación en el planteamiento del problema. Las técnicas empleadas en la solución tienen por objeto desarrollar el razonamiento reflexivo y la destreza en el estudiante. Los problemas y ejercicios que se desarrollan a lo largo de las tres unidades que presenta el libro, utilizan distintos tipos de reactivos, lo cual permite tener una evaluación continua del proceso enseñanza-aprendizaje. Se hace énfasis en el incremento gradual de la complejidad de cada ejercicio hasta lograr el cambio de la memorización por un razonamiento más analítico en el planteamiento y desarrollo del proceso de solución de un problema determinado.

Es importante recalcar que la consecución de los temas tratados en el libro dependerá del trabajo estrecho entre docente y alumnos, de manera tal que el libro sea sólo un apoyo para reforzar lo que se trabaja en el salón de clases.

Agradezco el apoyo de mis compañeros de la Academia Local, Estatal y Nacional, así como a todas las Autoridades Educativas que confiaron en mi esfuerzo y dedicación para lograr contenidos de calidad; también al editor por su esmerada atención a la realización de esta obra.

Por último, a mis ex alumnos y, en especial, a mi familia a quienes distingo con este mensaje filosófico: *“La creatividad de los seres humanos es tan vasta como un océano, pues se alimenta de todos los ríos de la sabiduría, en donde el camino andado se fortalece por la experiencia diaria de la vida; triunfar no es fácil cuando las virtudes propias no logran borrar los defectos del qué dirán”*.

EL AUTOR

Q.I. y Lic. Benjamín Garza Olvera

Metodología para el trabajo con este material

El material está dividido en tres unidades, en las cuales se desarrollan los contenidos actuales del programa general de bachillerato tecnológico. Cada unidad cuenta con una evaluación diagnóstica, el desarrollo de los diversos temas y una autoevaluación.

Evaluación diagnóstica

Es una serie de ejercicios que sirven como repaso operativo, pero en general se busca desarrollar habilidades de lógica, aritmética y álgebra.

Cuadros de competencias genéricas y disciplinares

Se localiza en cada una de las actividades que favorecen el logro de competencias; en este apartado el alumno, con la mediación del maestro, deberá determinar cuáles son las competencias genéricas y las competencias disciplinares que está desarrollando y escribir en el cuadro las que sean pertinentes.

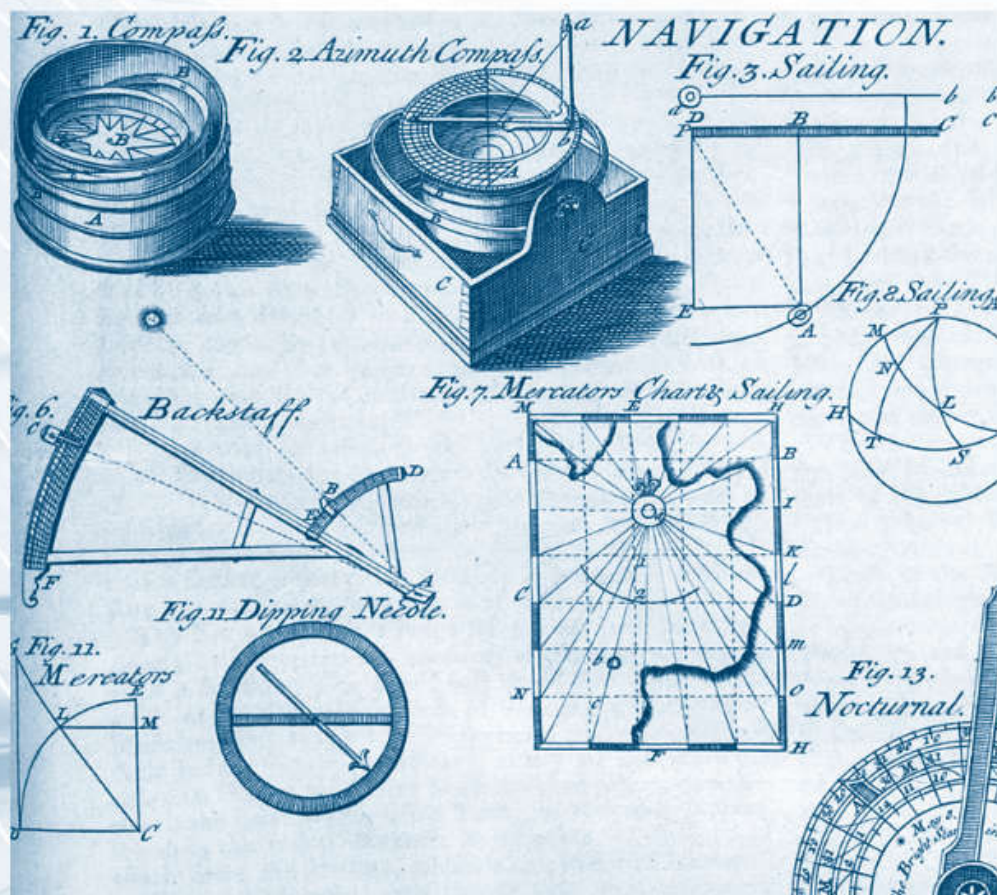
Autoevaluación

Es una colección de ejercicios que ayudan a reforzar el trabajo desarrollado a lo largo de la unidad.

Competencias genéricas

Categorías	Competencias
Se autodetermina y cuida de sí	1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue. 2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros. 3. Elige y practica estilos de vida saludables.
Se expresa y se comunica	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
Piensa crítica y reflexivamente	5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
Aprende de forma autónoma	7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
Trabaja en forma colaborativa	8. Participa y colabora de manera efectiva en diversos equipos.
Participa con responsabilidad en la sociedad	9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo. 10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales. 11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica con acciones responsables.

UNIDAD 1



Introducción a la geometría analítica

Evaluación diagnóstica

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. Con ayuda de un globo terráqueo contesta qué son los paralelos y los meridianos.
2. Localiza los siguientes puntos en el plano cartesiano $A(-5,3)$, $B(7,11)$ y $C(4,-5)$.
3. Si la distancia entre dos puntos es 7 y uno de los puntos es $M(-13)$, determina el otro punto.
4. Encuentra la distancia entre los puntos $P(3,6)$ y $Q(8,5)$.
5. Determina el punto medio del segmento cuyos extremos son $(3.5,4.1)$ y $(6.4,10)$.

Introducción a la geometría analítica

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Identifique los objetos básicos de la geometría.
- Plantee conjeturas a través del razonamiento inductivo.
- Combine técnicas del álgebra y la geometría para estudiar situaciones.
- Identifique los elementos del plano cartesiano.
- Identifique y calcule los elementos básicos de un polígono, tales como los ángulos interiores, ángulos exteriores, perímetro y área.
- Comprenda que el lenguaje geométrico le permite modelar diversas situaciones.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos
conceptuales

- Antecedentes históricos.
- Sistema de coordenadas cartesianas.
- Localización de puntos en el plano.
- Distancia entre dos puntos.
- División de un segmento en una razón dada.
- Área de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices.
- Gráfica de una ecuación y lugares geométricos.

Contenidos
procedimentales

- Realizará inferencias y deducciones al usar el razonamiento inductivo, en combinación con sus conocimientos previos de álgebra.
- Identificará diversas estructuras geométricas y las empleará para hacer conjeturas.
- Interpretará resultados a partir de modelos matemáticos en un contexto de geometría.
- Utilizará terminología y notación matemática propia de la geometría.
- Elaborará y usará estrategias de resolución de problemas como: hacer diagramas, hacer conjeturas, dividir un problema en subproblemas más sencillos, llevar un problema a uno ya conocido.

Contenidos
actitudinales

- Colaborará con sus compañeros al resolver problemas.
- Respeto al trabajar en clase.
- Responsabilidad en el proceso enseñanza-aprendizaje.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros.
- Contribuye con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Antecedentes históricos

La historia de las matemáticas considera a René Descartes el fundador del primer sistema matemático moderno y, por lo tanto, el padre de la geometría analítica.

Descartes propuso hacer una matemática sistematizada y severa, partiendo únicamente de bases y conceptos estrictos en la verdad, con lenguaje sencillo, claro y preciso. Asimismo, sustituye las palabras enteras, abreviaturas y notaciones por un simbolismo puro, que se ha conservado casi íntegro hasta nuestros días.

En 1637, Descartes publicó *Geometría*, en la cual considera al segmento como una unidad o como un número, con la que establece una sólida relación entre la geometría y el álgebra, dando lugar a la geometría analítica; de igual forma explica cómo la suma, resta, multiplicación y división de segmentos da lugar a otro segmento. Descartes relaciona a los números con las mismas operaciones, enfrentando problemas puramente algebraicos, ya que todos los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático pueden resolverse con regla y compás al considerarlos como problemas del plano. Descartes quiere resolver gráficamente ecuaciones de grado mayor por curvas algebraicas engendradas paso a paso por mecanismos lineales del movimiento, usando elementos de referencia en posiciones especiales, de igual forma, resuelve el problema de las normales a las curvas algebraicas evitando operaciones infinitesimales. Entre sus ejemplos figuran la conoide y el llamado óvalo de Descartes.

Descartes y Fermat son los creadores de la geometría sobre ejes de coordenadas, donde el álgebra y la geometría se reúnen en el trazo de gráficas de ecuaciones y desigualdades. El cálculo y la geometría analítica marcan el comienzo de las matemáticas modernas en el siglo XVII.

Concepto de geometría analítica

Estudia las figuras geométricas a partir de un sistema coordenado, el cual, establece que a cada punto en un plano le corresponde un par ordenado de números y a cada par ordenado de números le corresponde un punto en un plano. La geometría analítica aprovecha esta correspondencia para aplicar los métodos del álgebra y el análisis al estudio de la geometría.

EJERCICIO 1

I. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo se llama el fundador de la geometría analítica?
2. ¿Cuál fue el primer descubrimiento matemático de Descartes?
3. ¿Qué relación hay entre el álgebra y la geometría, realizada por Descartes?
4. ¿Cuál es el concepto de geometría analítica?
5. ¿Cuáles son los contenidos principales de la obra de Descartes, *Geometría*, publicada en 1637?



Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Sistema de coordenadas cartesianas

Sistema de coordenadas rectangulares

Este sistema también se denomina **cartesiano** en honor a René Descartes. Consta de dos rectas dirigidas, perpendiculares entre sí, llamadas **ejes de coordenadas**. La recta horizontal se llama eje x o *de las abscisas*, la

recta vertical se llama eje y o *de las ordenadas*. El punto en el que se intersecan las rectas (O) se llama **origen del sistema** (ver figura 1.1).

Estos ejes de coordenadas dividen al plano cartesiano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*, las cuales se ordenan en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj. Por ejemplo, todo punto P del plano cartesiano puede ser localizado por medio del sistema rectangular; es decir, se localiza Q , el pie de la perpendicular PQ al eje x , y R , el pie de la perpendicular PR al eje y , la longitud del segmento dirigido OQ se llama *abscisa de P* y se representa por x ; la longitud del segmento OR se llama *ordenada de P* y se representa por y . Los números reales x y y se llaman **coordenadas rectangulares** de P y se representan como $P(x,y)$. La localización de un punto por medio de sus coordenadas se llama **trazado del punto**.

Las *abscisas* medidas sobre el eje x a la derecha del origen son positivas y a la izquierda del origen son negativas; las *ordenadas* medidas sobre el eje y hacia arriba del origen son positivas y hacia abajo del origen son negativas.

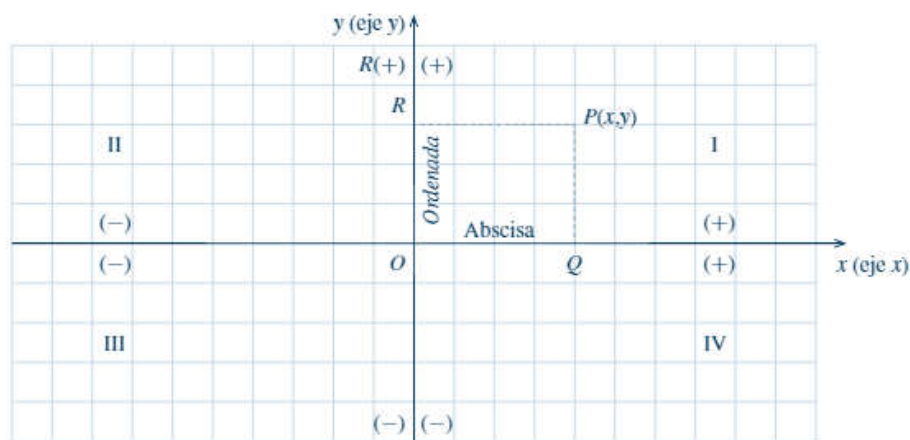


Figura 1.1 Sistema coordenado rectangular.

EJERCICIO 2

I. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la razón por la que el sistema de coordenadas rectangulares se denomina también cartesiano?
2. ¿Cómo está conformado el sistema de coordenadas rectangulares?
3. ¿Cómo se ordenan los cuadrantes del sistema de coordenadas rectangulares?
4. ¿Cuándo son positivas las abscisas y las ordenadas?
5. ¿Cuándo son negativas las abscisas y las ordenadas?
6. ¿Cuál es la representación de las coordenadas de un punto de manera general?
7. ¿Cuál es el proceso para trazar un punto?
8. Construye una representación gráfica del sistema de coordenadas rectangulares.

➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Localización de puntos en el plano cartesiano

Cuando nos encontramos en una gran ciudad, podemos localizar cualquier esquina al mencionar dos datos, el nombre de la calle y el nombre de la avenida que la cruza.

En un salón de clases se puede localizar cualquier asiento con tan sólo mencionar dos datos, el número de la fila y el número de la hilera.

Los anteriores son ejemplos de la localización de puntos en el plano coordenado.

Representación gráfica de los puntos

En el sistema de coordenadas rectangulares hay una relación que establece que a cada par de números reales (x,y) le corresponde un punto definido del plano, y a cada punto del plano le corresponde un par único de coordenadas (x,y) .

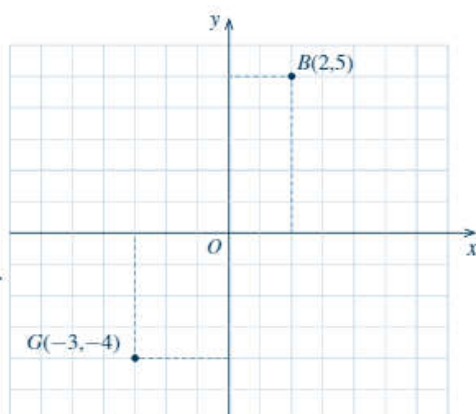
Para localizar un punto sobre el plano se considera los signos de las coordenadas para que se ubique en el cuadrante correspondiente.

EJEMPLOS

Ejemplos

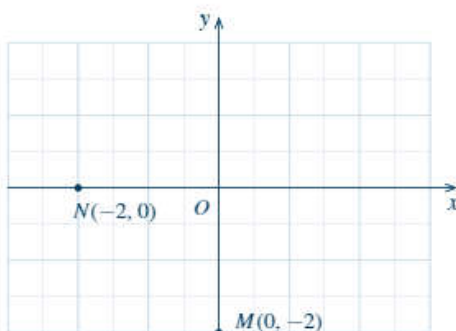
- 1 ●● Localiza en el plano cartesiano los puntos $B(2,5)$ y $G(-3,-4)$.

Solución



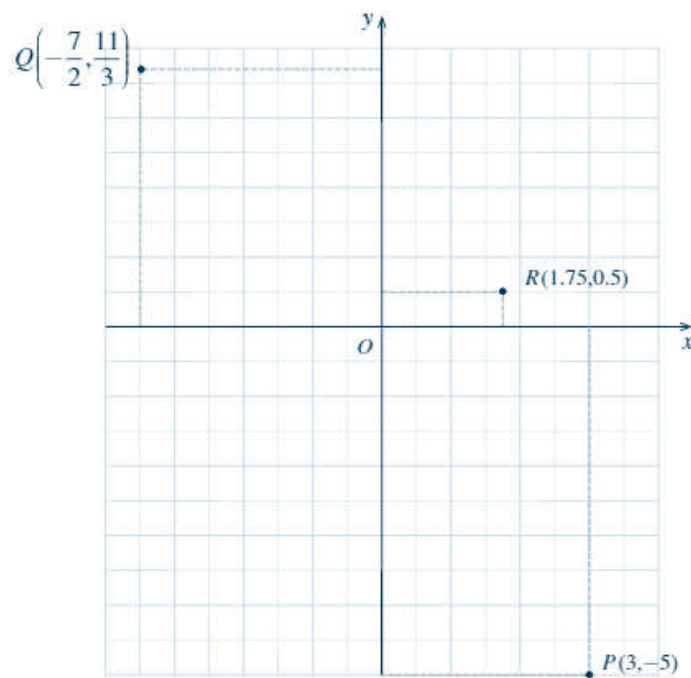
- 2 ●● Localiza en el plano cartesiano los puntos $M(0,-2)$ y $N(-2,0)$.

Solución



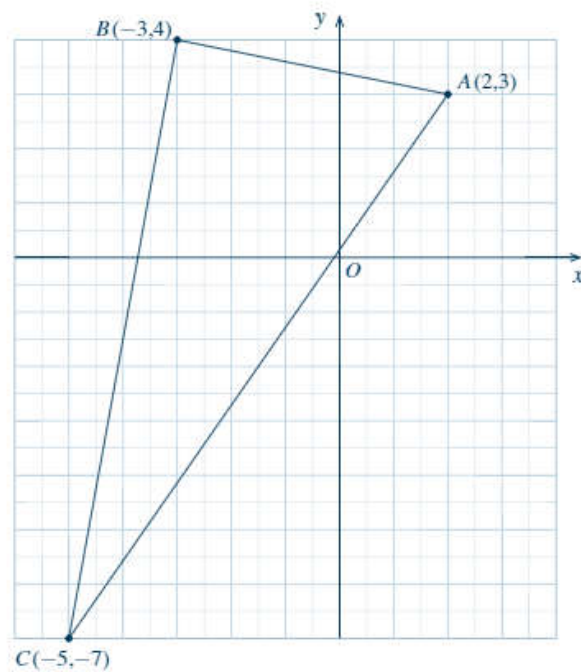
- 3 ●● Localiza en el plano cartesiano los puntos $P(3, -5)$, $Q\left(-\frac{7}{2}, \frac{11}{3}\right)$ y $R(1.75, 0.5)$.

Solución



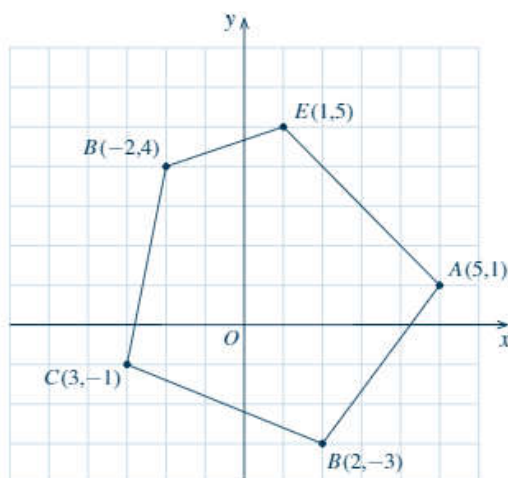
- 4 ●● Representa gráficamente el triángulo formado por los puntos; $A(2,3)$, $B(-3,4)$ y $C(-5,-7)$.

Solución



- 5 ••• Elabora la gráfica del polígono cuyos vértices se encuentran en las coordenadas: $A(5,1)$, $B(2,-3)$, $C(-3,-1)$, $D(-2,4)$ y $E(1,5)$.

Solución



EJERCICIO 3

1. Realiza lo que se indica en cada caso.

1. ¿Cómo se localizan los puntos en el plano cartesiano, en forma práctica y con lenguaje común?
2. ¿Cómo se relacionan las coordenadas y los puntos en el plano?
3. ¿En qué cuadrante se localizan los siguientes puntos?

a) $M(0,3)$

h) $S(-4.9,-2.7)$

b) $N(-5,0)$

i) $T(3.1,-6.5)$

c) $\tilde{N}(3,3)$

j) $U\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

d) $O(-2,-4)$

k) $V\left(-\frac{8}{5}, \frac{17}{7}\right)$

e) $P(-7,5)$

l) $W\left(\frac{13}{6}, -\frac{7}{3}\right)$

f) $Q(1,-6)$

g) $R(2.5,3.8)$

4. Representa gráficamente los siguientes puntos:

a) $A(3,4)$, $B(-2,1)$, $C(-5,-2)$

b) $C(1,3)$, $M(0,-4)$, $R(-6,6)$

c) $S(1,6)$, $T(2,-5)$, $L(-7,2)$

d) $M(-1,0)$, $N(5,-7)$, $\tilde{N}(3,2)$

e) $B(2,2)$, $G(7,4)$, $O(-8,10)$

f) $L(-9,-3)$, $F(-5,1)$, $I(4,0)$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

5. Representa gráficamente los siguientes triángulos formados por las coordenadas de sus vértices:

- a) $A(4,5)$, $B(-3,2)$ y $C(2,-5)$
- b) $A(-2,7)$, $B(-6,-1)$ y $C(-4,-3)$
- c) $A(0,6)$, $B(-3,0)$ y $C(4,0)$
- d) $A(6,-1)$, $B(1,-4)$ y $C(5,-7)$
- e) $A(-3,2)$, $B(2,-8)$ y $C(5,-2)$
- f) $A(0,8)$, $B(-4,-2)$ y $C(4,-2)$

6. Elabora la gráfica del polígono cuyos vértices se encuentran en las coordenadas:

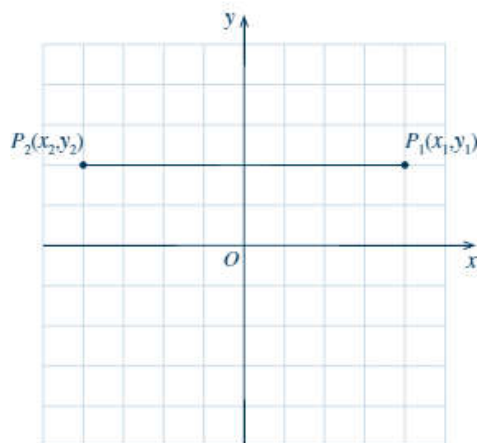
- a) $A(-4,2)$, $B(-2,-3)$, $C(1,-6)$ y $D(0,4)$
- b) $A(-2,-5)$, $B(5,-2)$, $C(7,2)$, $D(1,5)$ y $E(-4,2)$
- c) $A(4,2)$, $B(2,6)$, $C(-4,-5)$, $D(-7,2)$ y $E(-1,8)$

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos se puede presentar en las siguientes tres formas:

1. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos localizados de manera general en un plano y que pertenecen a una misma recta horizontal (paralela al eje x), la distancia dirigida entre los puntos es:

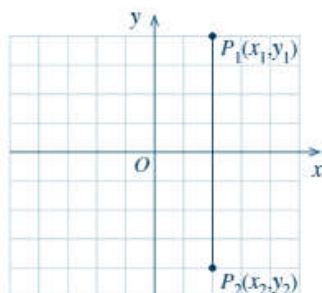


$$\begin{array}{ll} P_1P_2 = x_2 - x_1 & \text{Fórmulas de la distancia} \\ P_2P_1 = x_1 - x_2 & \text{dirigida de } P_1 \text{ a } P_2 \text{ o de} \\ & P_2 \text{ a } P_1. \end{array}$$

La fórmula de la distancia no dirigida es:

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

2. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos pertenecientes a una misma recta vertical (paralela al eje y), la distancia dirigida entre los dos puntos es:

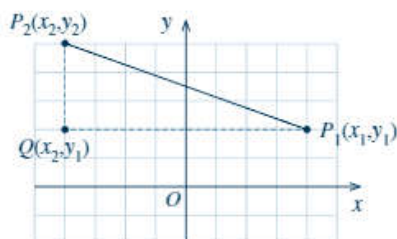


$$\begin{aligned} P_1P_2 &= y_2 - y_1 & \text{Fórmulas de la distancia} \\ & & \text{dirigida de } P_1 \text{ a } P_2 \text{ o de} \\ P_2P_1 &= y_1 - y_2 & P_2 \text{ a } P_1. \end{aligned}$$

La fórmula de la distancia no dirigida es:

$$|P_1P_2| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

3. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos distintos que no se encuentran sobre una misma recta horizontal o vertical, se traza una recta que pasa por P_1 , paralela a uno de los ejes coordenados y otra recta que pasa por el punto P_2 paralela al otro eje, estas rectas se intersectarán en un punto $Q(x_2, y_1)$ formando así un triángulo P_2QP_1 , en el que se pueden identificar los siguientes elementos:



$$\begin{aligned} \text{hipotenusa} &= |P_1P_2| = d \\ \text{cateto} &= P_1Q = (x_2 - x_1) \\ \text{cateto} &= QP_2 = (y_2 - y_1) \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\begin{aligned} (P_1P_2)^2 &= (P_1Q)^2 + (QP_2)^2 \\ P_1P_2 &= \sqrt{(P_1Q)^2 + (QP_2)^2} \\ P_1P_2 &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

La distancia no dirigida entre dos puntos se representa por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLOS

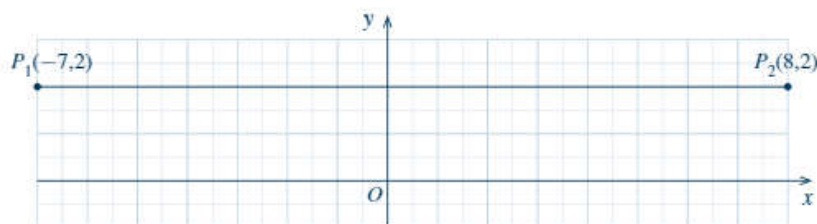
1. ●●● Calcula la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son:

a) $P_1(-7, 2)$ y $P_2(8, 2)$

b) $P_1(-2, 4)$ y $P_2(-2, -6)$

Solución

- a) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano se tiene:



Se observa que los dos puntos pertenecen a una misma recta horizontal, por tanto, la distancia dirigida entre los dos puntos es:

$$d = P_1P_2 = x_2 - x_1$$

$$d = P_1P_2 = 8 - (-7)$$

$$d = P_1P_2 = 8 + 7$$

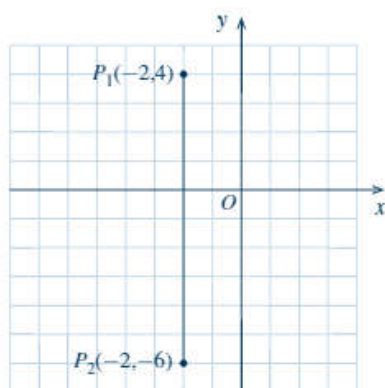
$$d = P_1P_2 = 15$$

$$d = P_2P_1 = x_1 - x_2$$

$$d = P_2P_1 = -7 - 8$$

$$d = P_2P_1 = -15$$

b) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano se tiene:



Se observa que los dos puntos pertenecen a una misma recta vertical, por tanto, la distancia dirigida entre los dos puntos es:

$$d = P_1P_2 = y_2 - y_1$$

$$d = P_1P_2 = -6 - 4$$

$$d = P_1P_2 = -10$$

$$d = P_2P_1 = y_1 - y_2$$

$$d = P_2P_1 = 4 - (-6)$$

$$d = P_2P_1 = 4 + 6$$

$$d = P_2P_1 = 10$$

2 ●●● Calcula la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son:

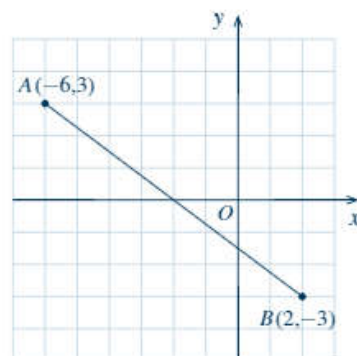
a) $A(-6, 3)$ y $B(2, -3)$

b) $A(6, 1)$ y $B(-4, -2)$

c) $P_1(5, -2)$ y $P_2(-1, 7)$

d) $P_1(-3, -1)$ y $P_2(7, -5)$

a) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano se tiene:



Se observa que los puntos no pertenecen a una misma recta horizontal o vertical, por tanto, su distancia se determina por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sustituyendo los valores de las coordenadas en la ecuación, resulta:

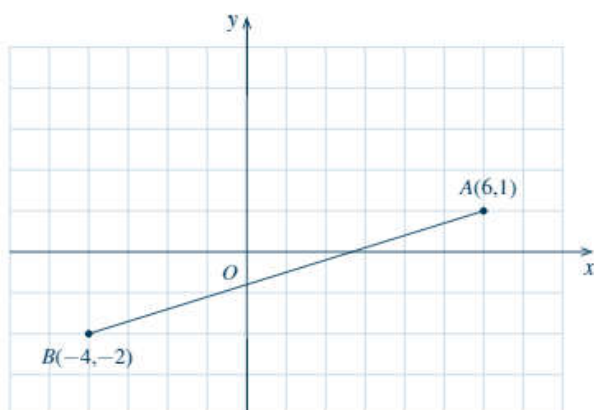
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(2 + 6)^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2}$$

$$d = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100}$$

$$d = 10$$

b) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano se tiene:



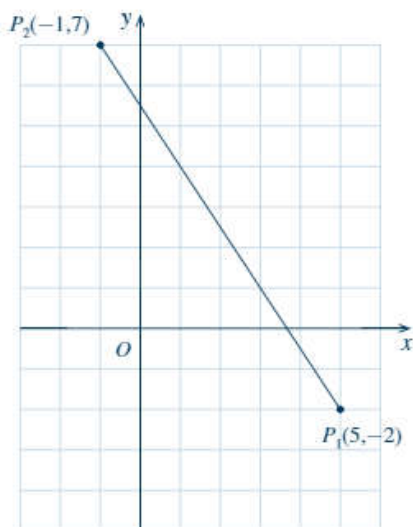
Se observa que los puntos no pertenecen a una misma recta horizontal o vertical, por tanto, su distancia se determina por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sustituyendo los valores de las coordenadas en la ecuación, resulta:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ d &= \sqrt{(-4 - 6)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{(-10)^2 + (-3)^2} \\ d &= \sqrt{100 + 9} = \sqrt{109} \\ d &\approx 10.44 \end{aligned}$$

c) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano se tiene:



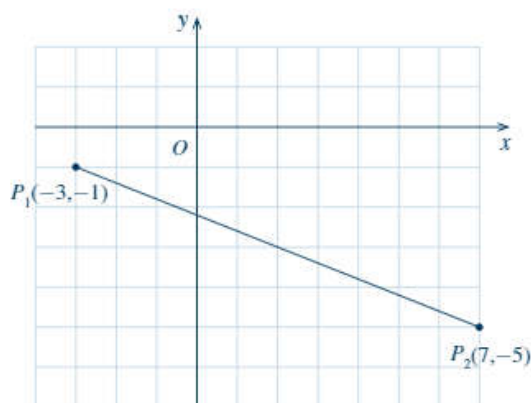
Se observa que los puntos no pertenecen a una misma recta horizontal o vertical, por tanto, su distancia se determina por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sustituyendo los valores de las coordenadas en la ecuación, resulta:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ d &= \sqrt{(-1 - 5)^2 + (7 + 2)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (9)^2} \\ d &= \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} \\ d &\approx 10.8166 \end{aligned}$$

d) Al ubicar los puntos en el plano cartesiano se tiene:



Se observa que los puntos, no pertenecen a una misma recta horizontal o vertical, por tanto, su distancia se determina por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sustituyendo los valores de las coordenadas en la ecuación, resulta:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

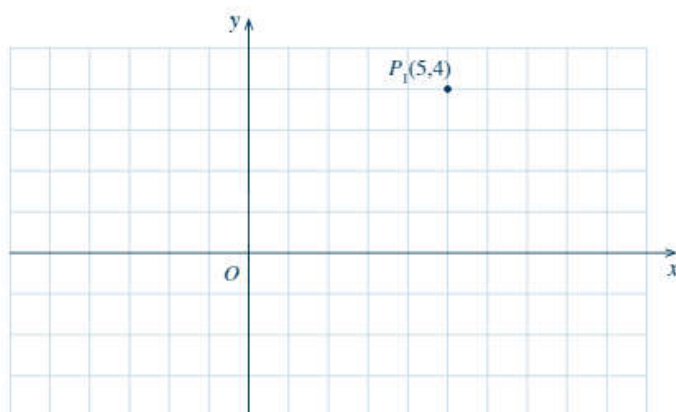
$$d = \sqrt{(7 + 3)^2 + (-5 + 1)^2} = \sqrt{(10)^2 + (-4)^2}$$

$$d = \sqrt{100 + 16} = \sqrt{116}$$

$$d = 10.77$$

- 3 •• Demuestra que la distancia dirigida del punto $P_1(5,4)$ al punto $P_2(x,4)$ es $x - 5$ cualquiera que sea el valor de x , calcula la distancia entre los dos puntos.

Solución



Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, se observa que éstos pertenecen a una misma recta horizontal, por tanto, la distancia dirigida del P_1 al P_2 es:

$$d = P_1P_2 = x_2 - x_1$$

$$d = P_1P_2 = x - 5$$

- Si el valor de x es mayor a cinco, la distancia de P_1 a P_2 es siempre **positiva**; es decir, P_2 se ubica a la derecha de P_1 .
- Si el valor de x es menor a cinco, la distancia dirigida de P_1 a P_2 es siempre **negativa**; es decir, P_2 se ubica a la izquierda de P_1 .

Mediante la fórmula de distancia entre dos puntos que no pertenecen a una misma recta horizontal o vertical, se puede comparar que:

$$\begin{aligned}d &= P_1 P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\d &= P_1 P_2 = \sqrt{(x - 5)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (0)^2} \\d &= P_1 P_2 = \sqrt{(x - 5)^2} \\d &= P_1 P_2 = x - 5\end{aligned}$$

La distancia dirigida de P_2 a P_1 es:

$$\left. \begin{aligned}d &= P_2 P_1 = x_1 - x_2 \\d &= P_2 P_1 = 5 - x\end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{si } x > 5 \text{ la distancia es negativa,} \\ &\text{si } x < 5 \text{ la distancia es positiva.}\end{aligned}$$

- 4 ••• Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a $d = \sqrt{13}$ es el punto $A(-1, -5)$, si la abscisa del otro extremo es 2, calcula su ordenada.

Solución

Sustituyendo los datos en la fórmula de distancia entre dos puntos, resulta:

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ \sqrt{13} &= \sqrt{(2 + 1)^2 + (y + 5)^2}\end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}(\sqrt{13})^2 &= (\sqrt{(3)^2 + (y + 5)^2})^2 \\ 13 &= 9 + y^2 + 10y + 25 \\ y^2 + 10y + 34 - 13 &= 0 \\ y^2 + 10y + 21 &= 0\end{aligned} \left\} \begin{aligned} &\text{Ecuación de segundo grado} \\ &\text{con una incógnita o cuadrática.}\end{aligned}$$

La ecuación anterior puede resolverse por los siguientes métodos:

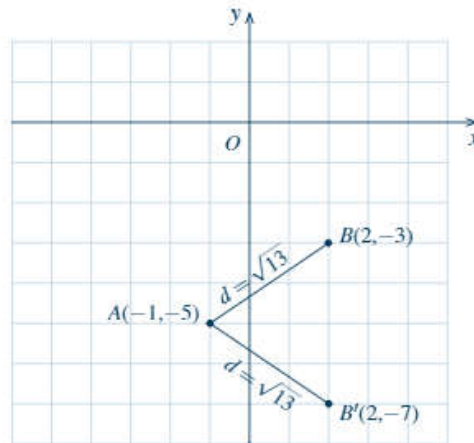
Fórmula general

$$\begin{aligned}y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ y &= \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(1)(21)}}{2(1)} \\ y &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} \\ y &= \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-10 \pm 4}{2} \\ y_1 &= \frac{-6}{2} = -3 \\ y_2 &= \frac{-14}{2} = -7\end{aligned}$$

Factorización

$$\begin{aligned}y^2 + 10y + 21 &= 0 \\ (y + 3)(y + 7) &= 0 \\ y + 3 &= 0 & y + 7 &= 0 \\ y_1 &= -3 & y_2 &= -7\end{aligned}$$

Al ubicar los puntos y los resultados en el plano cartesiano se tiene:

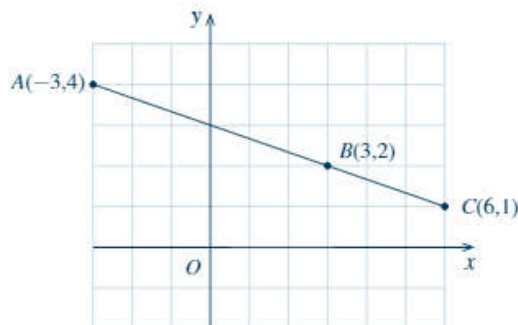


Las ordenadas de los extremos -3 o -7 , ya que ambos valores satisfacen la condición del problema.

5 •• Demuestra que los puntos $A(-3,4)$, $B(3,2)$ y $C(6,1)$ son colineales.

Solución

Al graficar los puntos en el plano cartesiano se tiene:



Al calcular la distancia entre los puntos se tiene:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ d_{\overline{AB}} &= \sqrt{(3+3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(6)^2 + (-2)^2} \\ d_{\overline{AB}} &= \sqrt{36+4} \\ d_{\overline{AB}} &= \sqrt{40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{\overline{BC}} &= \sqrt{(6-3)^2 + (1-2)^2} \\ d_{\overline{BC}} &= \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} \\ d_{\overline{BC}} &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{\overline{AC}} &= \sqrt{(6+3)^2 + (1-4)^2} \\ d_{\overline{AC}} &= \sqrt{(9)^2 + (-3)^2} = \sqrt{81+9} \\ d_{\overline{AC}} &= \sqrt{90} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{\overline{AC}} &= d_{\overline{AB}} + d_{\overline{BC}} \\ \sqrt{90} &= \sqrt{40} + \sqrt{10} \\ \sqrt{9(10)} &= \sqrt{4(10)} + \sqrt{10} \\ 3\sqrt{10} &= 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

Los puntos son colineales.

- 6 ••• Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(-3,1)$ y $B(1,1)$, calcula las coordenadas del tercer vértice.

Solución

Por definición un triángulo equilátero es el que tiene sus tres lados iguales, es decir:

$$d\overline{AB} = d\overline{AC} = d\overline{BC}$$

Al determinar la distancia del lado AB , se tiene:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ d\overline{AB} &= \sqrt{(1 + 3)^2 + (1 - 1)^2} \\ d\overline{AB} &= \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16} \\ d\overline{AB} &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\overline{AC} &= \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 1)^2} \\ (4 &= \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 1)^2})^2 \\ 16 &= (x + 3)^2 + (y - 1)^2 \\ 16 &= x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \\ 16 &= x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\overline{BC} &= \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \\ (4 &= \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2})^2 \\ 16 &= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \\ 16 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \\ 16 &= x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2 \end{aligned}$$

Como $d\overline{AC} = d\overline{BC}$; se igualan las ecuaciones, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10 &= x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2 \\ 6x + 2x &= 2 - 10 \\ 8x &= -8 \\ x &= \frac{-8}{8} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Al sustituir el valor de x en cualquiera de las ecuaciones, resulta:

$$\begin{aligned} 16 &= x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10 \\ 16 &= (-1)^2 + 6(-1) + y^2 - 2y + 10 \\ 16 &= 1 - 6 + y^2 - 2y + 10 \\ y^2 &= 2y - 5 + 16 = 0 \end{aligned}$$

$$y^2 - 2y - 11 = 0 \quad \left. \vphantom{y^2 - 2y - 11 = 0} \right\} \text{ Ecuación cuadrática o de segundo grado.}$$

Dado que es una ecuación cuadrática, se resuelve por fórmula general, así:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 44}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{2 \pm 6.928}{2}$$

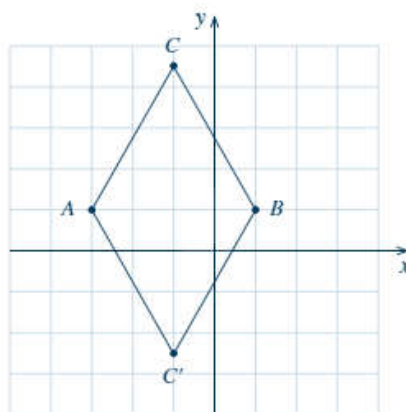
$$y_1 = \frac{2 + 6.928}{2} = \frac{8.928}{2} = 4.464$$

$$y_2 = \frac{2 - 6.928}{2} = \frac{-4.928}{2} = -2.464$$

Las coordenadas del tercer vértice son:

$C(-1, 4.464)$ y $C'(-1, -2.464)$

La representación gráfica es:



- 7 ••• Calcula las coordenadas del punto que pertenece al eje x y que **equidista** de los puntos $A(-2, -7)$ y $B(1, 5)$.

Solución

Equidistar en geometría significa que dos puntos se encuentran a igual distancia de un tercero.

Como el punto que se busca pertenece al eje x , tenemos $P(x, 0)$. La distancia entre los puntos dados con su punto equidistante es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AP} = \sqrt{(x + 2)^2 + (0 + 7)^2}$$

$$d_{AP} = \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 49}$$

$$d_{AP} = \sqrt{x^2 + 4x + 53}$$

$$d_{BP} = \sqrt{(x - 1)^2 + (0 - 5)^2}$$

$$d_{BP} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 25}$$

$$d_{BP} = \sqrt{x^2 - 2x + 26}$$

Como $d\overline{AP} = d\overline{BP}$ se igualan las ecuaciones, entonces:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 53} = \sqrt{x^2 - 2x + 26}$$

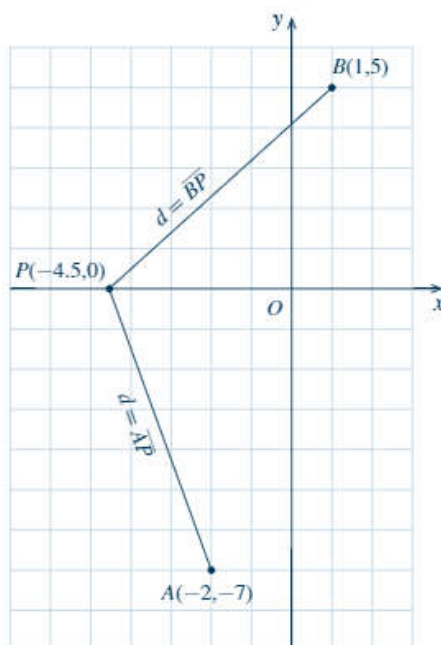
Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 + 4x + 53} = \sqrt{x^2 - 2x + 26})^2 & \quad 6x = -27 \\ x^2 + 4x + 53 = x^2 - 2x + 26 & \quad x = \frac{-27}{6} = -\frac{9}{2} \\ 4x + 2x = 26 - 53 & \quad x = -4.5 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto que pertenecen al eje x y que equidista de los puntos

$A(-2, -7)$ y $B(1, 5)$, es $P(-4.5, 0)$.

La representación gráfica es:



EJERCICIO 4

I. Calcula la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son:

1. $A(-2, 5)$ y $B(4, -3)$

4. $S(2, 7)$ y $T(-3, -8)$

2. $A(6, -2)$ y $B(-7, -2)$

5. $L(0, 4)$ y $B(9, -2)$

3. $C\left(2, \frac{5}{3}\right)$ y $M\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$

6. $U\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ y $V\left(\frac{17}{5}, -\frac{3}{4}\right)$

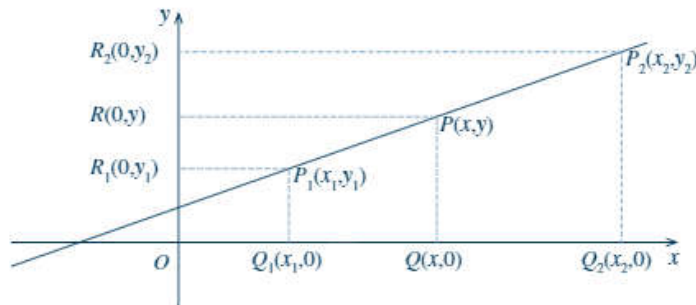
- II. Calcula la abscisa del punto B , si se conocen la abscisa del punto A y la distancia entre dos puntos (todos los problemas presentan doble solución).
1. $A(8); d\overline{AB} = d\overline{BA} = 3$
 2. $A(-5); d\overline{AB} = d\overline{BA} = 4$
 3. $A(-1); d\overline{AB} = d\overline{BA} = 5$
 4. $A(-10); d\overline{AB} = d\overline{BA} = 8$
- III. Resuelve los siguientes problemas.
1. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a 17 es el punto $A(1, -11)$; si la ordenada del otro extremo es 4, calcula su abscisa.
 2. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a 4 es el punto $P(2, -2)$; si la abscisa del otro extremo es 2, calcula su ordenada.
 3. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a 10 es el punto $B(-3, 6)$; si la abscisa del otro extremo es 3, calcula su ordenada.
 4. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a 4 es el punto $A(4, 1)$; si la ordenada del otro extremo es -2 , calcula su abscisa.
 5. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a $\sqrt{18}$ es el punto $A(-6, 2)$; si la ordenada del otro extremo es -1 , calcula su abscisa.
- IV. Demuestra, mediante la fórmula de la distancia, que los siguientes puntos son colineales.
1. $A(-3, 4)$, $B(5, 7)$ y $C(11, 9)$
 2. $A(10, 1)$, $B(6, -1)$ y $C(2, -3)$
 3. $A(-1, -2)$, $B(3, -10)$ y $C(-4, 4)$
 4. $A(-4, 2)$, $B(4, 6)$ y $C(8, 8)$
- V. Demuestra que los siguientes puntos son los vértices de un triángulo isósceles.
1. $A(-2, 2)$, $B(3, 1)$ y $C(-1, -6)$
 2. $A(-2, -4)$, $B(-5, -1)$ y $C(-6, -5)$
 3. $A(-6, -6)$, $B(-2, 2)$ y $C(2, -2)$
 4. $A(-6, 4)$, $B(-5, -3)$ y $C(-1, -1)$
- VI. Demuestra que los siguientes puntos son los vértices de un triángulo rectángulo.
1. $A(3, 2)$, $B(-2, -3)$ y $C(0, -4)$
 2. $P(-2, -8)$, $Q(-6, -1)$ y $R(0, -4)$
 3. $K(3, 5)$, $L(7, 2)$ y $M(4, -2)$
 4. $X(2, 5)$, $Y(8, -1)$ y $Z(-2, 1)$
- VII. Resuelve los siguientes problemas.
1. Demuestra que la distancia dirigida del punto $A(2, 3)$ al punto $B(x, 3)$ es $x - 2$ cualquiera que sea el valor de x .
 2. Demuestra que la distancia dirigida del punto $P_1(8, 4)$ al punto $P_2(8, y)$ es $y - 4$ cualquiera que sea el valor de y .
 3. Calcula las coordenadas del punto que se encuentra sobre el eje x , que es equidistante de los puntos $A(14, -2)$ y $B(-4, 6)$.
 4. La ordenada de cierto punto P es el doble de su abscisa. Dicho punto equidista de $M(-3, 1)$ y $N(8, -2)$; encuentra sus coordenadas.
 5. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a $2\sqrt{3}$ es el punto $A(1, 0)$; si la ordenada del otro extremo es -3 , calcula su abscisa.
 6. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(-5, 2)$ y $B(-5, -7)$, calcula las coordenadas del tercer vértice.

7. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(7,2)$ y $B(2,2)$, calcula las coordenadas del tercer vértice.
8. Demuestra que los puntos siguientes son los vértices de un paralelogramo.
 - a) $A(4,2)$, $B(2,6)$, $C(6,8)$ y $D(8,4)$
 - b) $A(1,5)$, $B(-2,-1)$, $C(-1,-5)$ y $D(2,1)$
9. Calcula las coordenadas del punto que equidista de los siguientes puntos fijos.
 - a) $A(8,2)$, $B(-3,-3)$, $C(-6,-2)$
 - b) $A(3,8)$, $B(-2,-7)$, $C(-4,-3)$
 - c) $A(2,3)$, $B(4,-1)$, $C(5,2)$
 - d) $A(4,2)$, $B(-3,-2)$, $C(2,5)$
10. Sean $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(4,2)$ y $D(1,2)$ los vértices de un paralelogramo; calcula la longitud de sus dos diagonales.

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

División de un segmento en una razón dada

Para determinar las coordenadas de un punto P que divide a un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, en la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$, se aplica el siguiente procedimiento.



- Por los puntos P_1 , P y P_2 se trazan perpendiculares a los ejes coordenados; como las rectas paralelas P_1Q_1 , PQ y P_2Q_2 intersecan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y Q_1Q_2 . Por lo tanto, la razón es $r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Q_1Q}{QQ_2}$.
- Las coordenadas de los puntos trazados sobre el eje x son: $Q_1(x_1, 0)$, $Q(x, 0)$ y $Q_2(x_2, 0)$ y sobre el eje y son: $R_1(0, y_1)$, $R(0, y)$ y $R_2(0, y_2)$.
- La distancia dirigida de los segmentos $Q_1Q = x - x_1$ y $QQ_2 = x_2 - x$ se sustituye en la ecuación de la razón, así:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Q_1Q}{QQ_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = r$$

Despejando para x , resulta:

$$\begin{aligned}x - x_1 &= r(x_2 - x) \\x - x_1 &= rx_2 - rx \\x + rx &= x_1 + rx_2 \\x(1 + r) &= x_1 + rx_2 \\x &= \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad \text{donde } r \neq -1\end{aligned}$$

- Las rectas paralelas P_1R_1 , PR y P_2R_2 intersecan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y R_1R_2 . Por lo tanto, la razón es $r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{R_1R}{RR_2}$.
- La distancia dirigida de los segmentos $R_1R = y - y_1$ y $RR_2 = y_2 - y$, se sustituye en la ecuación de la razón, así:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{R_1R}{RR_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r$$

Despejando para y , resulta:

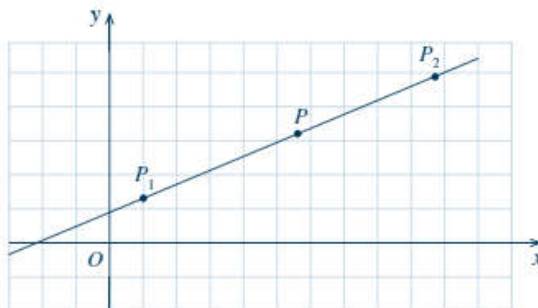
$$\begin{aligned}y - y_1 &= r(y_2 - y) \\y - y_1 &= ry_2 - ry \\y + ry &= y_1 + ry_2 \\y(1 + r) &= y_1 + ry_2 \\y &= \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \quad \text{donde } r \neq -1\end{aligned}$$

Teorema

Las coordenadas de un punto P que divide a un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \quad \text{donde } r \neq -1$$

Si $P(x, y)$ es el punto medio del segmento P_1P_2 , la razón es igual a la unidad ($r = 1$), es decir:



Si $r = \frac{P_1 P}{P P_2}$ y como $P_1 P = P P_2$, resulta:

$$r = \frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{P_1 P}{P_1 P} = \frac{P P_2}{P P_2} = 1$$

Al sustituir el valor de la razón ($r = 1$) en las siguientes ecuaciones, se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} & y &= \frac{y_1 + r y_2}{1 + r} \\ x &= \frac{x_1 + (1)x_2}{1 + 1} & y &= \frac{y_1 + (1)y_2}{1 + 1} \\ x &= \frac{x_1 + x_2}{2} & y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}$$

Corolario

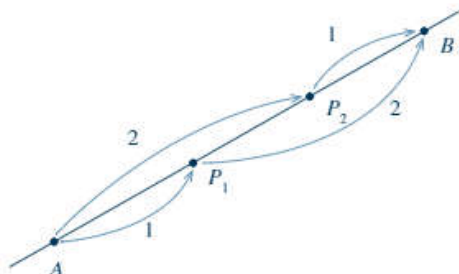
Las coordenadas de un punto P , que es el punto medio de un segmento, cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la razón $r = 1$ son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Cálculo de la razón cuando un segmento se divide en n partes iguales

Si un segmento se divide en n partes iguales, la razón para determinar las coordenadas de cada punto que divide a dicho segmento, se calcula de la siguiente manera:

a) Si el segmento AB se triseca (dividir en tres partes iguales), la razón para cada punto es:



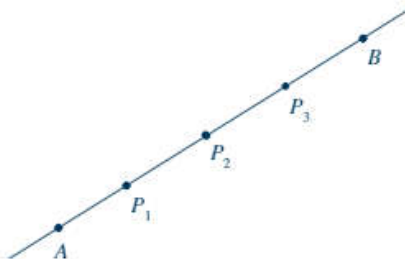
Para el punto P_1 , se tiene:

$$r = \frac{A P_1}{P_1 B} = \frac{1}{2} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{un segmento} \\ \longrightarrow \text{dos segmentos} \end{array}$$

Para el punto P_2 :

$$r = \frac{A P_2}{P_2 B} = \frac{2}{1} = 2$$

b) Si el segmento AB se divide en cuatro partes iguales, la razón para cada punto es:

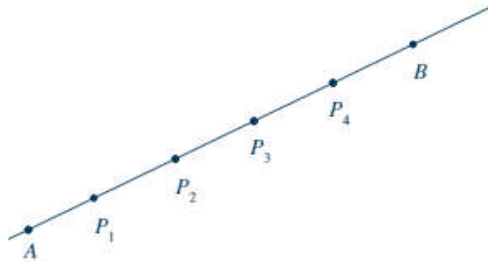


$$\text{Para el punto } P_1: r = \frac{A P_1}{P_1 B} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Para el punto } P_2: r = \frac{A P_2}{P_2 B} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{Para el punto } P_3: r = \frac{A P_3}{P_3 B} = \frac{3}{1} = 3$$

- c) Si el segmento AB se divide en cinco partes iguales, la razón para cada punto es:



Para el punto P_1 : $r = \frac{AP_1}{P_1B} = \frac{1}{4}$

Para el punto P_2 : $r = \frac{AP_2}{P_2B} = \frac{2}{3}$

Para el punto P_3 : $r = \frac{AP_3}{P_3B} = \frac{3}{2}$

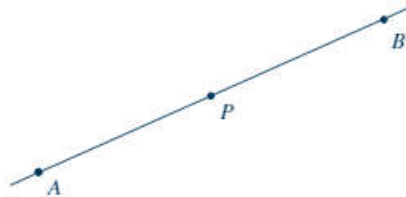
Para el punto P_4 : $r = \frac{AP_4}{P_4B} = \frac{4}{1} = 4$

Criterios de aplicación

Los siguientes criterios ayudarán a comprender la posición del punto que se busca en el segmento dado.

1. Cuando la razón es positiva, el punto que se busca estará situado entre los puntos dados del segmento.

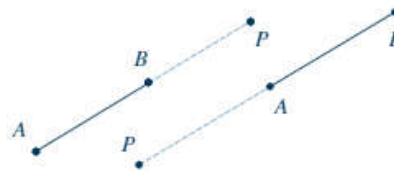
Ejemplo



Segmento $\overline{AB}$, P punto que se busca. La razón es positiva.

2. Cuando la razón es negativa, el punto buscado estará situado fuera de los puntos dados del segmento.

Ejemplo



Segmento $\overline{AB}$, P punto que se busca. La razón es negativa.

EJEMPLOS

- 1 ••• Determina las coordenadas del punto P que divide al segmento acotado por $A(8,2)$, $B(-5,7)$ en la razón $r = \frac{3}{4}$.

Solución

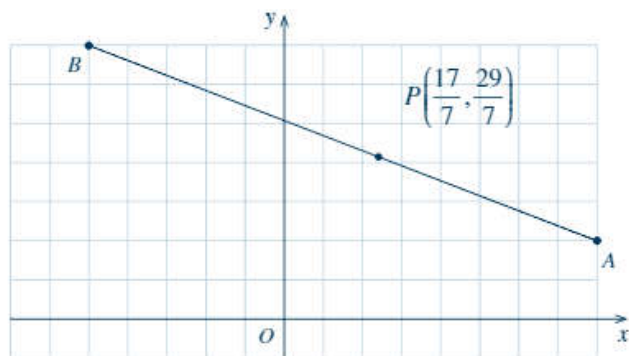
Se sustituyen los datos del problema en las siguientes fórmulas, así:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

$$x = \frac{8 + \left(\frac{3}{4}\right)(-5)}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{17}{7} \qquad y = \frac{2 + \left(\frac{3}{4}\right)(7)}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{29}{7}$$

Las coordenadas del punto buscado son $P\left(\frac{17}{7}, \frac{29}{7}\right)$.

La representación gráfica es:

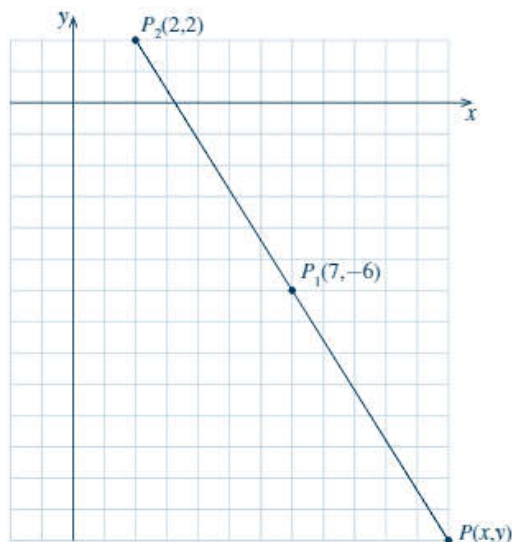


- 2 ••• El extremo del diámetro de una circunferencia de centro $P_1(7,-6)$ es $P_2(2,2)$; determina las coordenadas $P(x,y)$ del otro extremo.

Solución

Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, se observa que P_1P y PP_2 son de sentido opuesto la relación r debe ser negativa, así:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = -\frac{1}{2}$$



Se sustituyen los datos del problemas en las siguientes fórmulas, así:

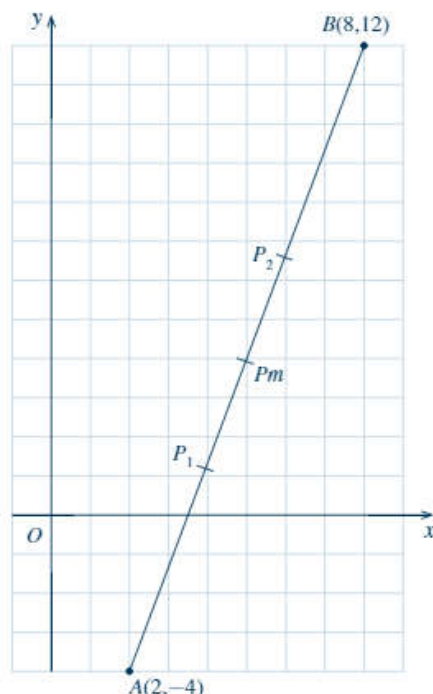
$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1 + rx_2}{1+r} & y &= \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \\x &= \frac{7 + \left(-\frac{1}{2}\right)(2)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)} & y &= \frac{-6 + \left(-\frac{1}{2}\right)(2)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)} \\x &= 12 & x &= -14\end{aligned}$$

Las coordenadas del punto buscado son $P(12, -14)$.

- 3 •• Encuentra las coordenadas de los puntos que trisecan (**dividir un segmento en tres partes iguales**) al segmento formado por $A(2, -4)$ y $B(8, 12)$ y determina el punto medio del segmento.

Solución

Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, se observa que:



Para determinar $P_1(x_1, y_1)$, la razón es:

$$r = \frac{AP_1}{P_1B} = \frac{1}{2}$$

Al sustituir los datos del problema en las siguientes fórmulas, resulta:

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1 + rx_2}{1+r} & y &= \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \\x &= \frac{2 + \left(\frac{1}{2}\right)(8)}{1 + \frac{1}{2}} & y &= \frac{-4 + \left(\frac{1}{2}\right)(12)}{1 + \frac{1}{2}} \\x &= 4 & y &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Para determinar $P_2(x_2, y_2)$, la razón es:

$$r = \frac{AP_2}{P_2B} = 2$$

Al sustituir los datos del problema en las siguientes fórmulas, resulta:

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1 + rx_2}{1+r} & y &= \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \\x &= \frac{2 + (2)(8)}{1 + 2} & y &= \frac{-4 + (2)(12)}{1 + 2} \\x &= 6 & y &= \frac{20}{3}\end{aligned}$$

Para determinar el punto medio, Pm , se sustituyen los datos dados en las siguientes fórmulas, así:

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1 + x_2}{2} & y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\x &= \frac{2+8}{2} = 5 & y &= \frac{-4+12}{2} = 4\end{aligned}$$

Las coordenadas del punto que triseca al segmento dado son $P_1\left(4, \frac{4}{3}\right)$ y $P_2\left(6, \frac{20}{3}\right)$; las coordenadas del punto medio del segmento dado son $Pm(5,4)$.

- 4 ••• Los extremos de un segmento son los puntos $P_1(7,4)$ y $P_2(-1,-4)$; encuentra el punto $P(x,y)$ que divide a dicho segmento en dos partes tales que $\overline{P_2P} : \overline{PP_1} = -3$.

Solución

Sea $r = \frac{\overline{P_2P}}{\overline{PP_1}} = -3$, de tal forma que, las coordenadas de P , son:

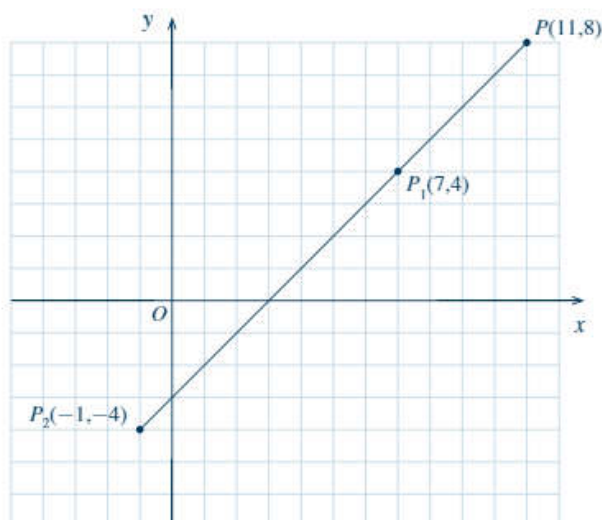
Abscisa	Ordenada
$-3 = \frac{x - x_2}{x_1 - x} = r$	$-3 = \frac{y - y_2}{y_1 - y} = r$
$x - x_2 = r(x_1 - x)$	$y - y_2 = r(y_1 - y)$
$x - x_2 = rx_1 - rx$	$y - y_2 = ry_1 - ry$
$x + rx = rx_1 + x_2$	$y + ry = ry_1 + y_2$
$x(1+r) = rx_1 + x_2$	$y(1+r) = ry_1 + y_2$
$x = \frac{rx_1 + x_2}{1+r}$	$y = \frac{ry_1 + y_2}{1+r}$

Sustituyendo los datos del problema en las ecuaciones anteriores, resulta:

$$\begin{aligned}x &= \frac{(-3)(7) + (-1)}{1 + (-3)} & x &= \frac{(-3)(4) + (-4)}{1 + (-3)} \\x &= \frac{-21 - 1}{-2} = 11 & x &= \frac{-12 - 4}{-2} = 8\end{aligned}$$

Las coordenadas del punto buscado son $P(11,8)$.

Al ubicar los puntos en el plano cartesiano, se observa que:

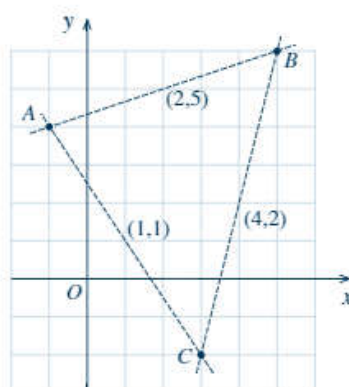


Como la razón es negativa, el punto que se busca debe quedar fuera del segmento P_1P_2 .

- 5 •• Los puntos medios de los lados de un triángulo son (1,1), (4,2) y (2,5); encuentra las coordenadas de los tres vértices.

Solución

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



A , B y C como los vértices del triángulo, para determinar sus coordenadas se emplean las fórmulas para las coordenadas del punto medio, así:

Para el Pm de $\overline{AB}$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$2 = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$4 = x_A + x_B \quad (1)$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$5 = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$10 = y_A + y_B \quad (2)$$

Para el Pm de $\overline{AC}$

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1 + x_2}{2} & y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\1 &= \frac{x_A + x_C}{2} & 1 &= \frac{y_A + y_C}{2} \\2 &= x_A + x_C \quad (3) & 2 &= y_A + y_C \quad (4)\end{aligned}$$

Para el Pm de $\overline{BC}$

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1 + x_2}{2} & y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\4 &= \frac{x_B + x_C}{2} & 2 &= \frac{y_B + y_C}{2} \\8 &= x_B + x_C \quad (5) & 4 &= y_B + y_C \quad (6)\end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (3), resulta:

$$4 = x_A + x_B \quad (1)$$

$2 = x_A + x_C \quad (3)$ al multiplicar por (-1) , se tiene:

$$\begin{aligned}4 &= \cancel{x_A} + x_B \quad (1) \\-2 &= -\cancel{x_A} - x_C \quad (3) \\2 &= x_B - x_C\end{aligned}$$

Al despejar x_C de la ecuación anterior y sustituir en (5), resulta:

$$\begin{aligned}8 &= x_B + x_C \quad (5) \\8 &= x_B + (x_B - 2) \\2x_B &= 8 + 2 \\x_B &= 5\end{aligned}$$

Al sustituir el valor de x_B en la ecuación (1), se tiene:

$$\begin{aligned}4 &= x_A + x_B \quad (1) \\4 &= x_A + 5 \\x_A &= -1\end{aligned}$$

Al sustituir el valor de x_A en la ecuación (3), resulta:

$$\begin{aligned}2 &= x_A + x_C \quad (3) \\2 &= -1 + x_C \\x_C &= 3\end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación (4) por -1 y resolver simultáneamente con la ecuación (2), resulta:

$$\begin{array}{rcl} 10 & = & y_A + y_B \quad (2) \\ -2 & = & -y_A - y_C \quad (4) \\ \hline 8 & = & y_B - y_C \end{array}$$

Al despejar y_C de la ecuación anterior y sustituir en (6),

$$\begin{array}{rcl} 4 & = & y_B + y_C \quad (6) \\ 4 & = & y_B + (y_B - 8) \\ 2y_B & = & 8 + 4 \\ y_B & = & 6 \end{array}$$

Al sustituir el valor de y_B en la ecuación (2), se tiene:

$$\begin{array}{rcl} 10 & = & y_A + y_B \quad (2) \\ 10 & = & y_A + 6 \\ y_A & = & 4 \end{array}$$

Al sustituir el valor de y_A en la ecuación (4), resulta:

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & y_A + y_C \quad (4) \\ 2 & = & 4 + y_C \\ y_C & = & -2 \end{array}$$

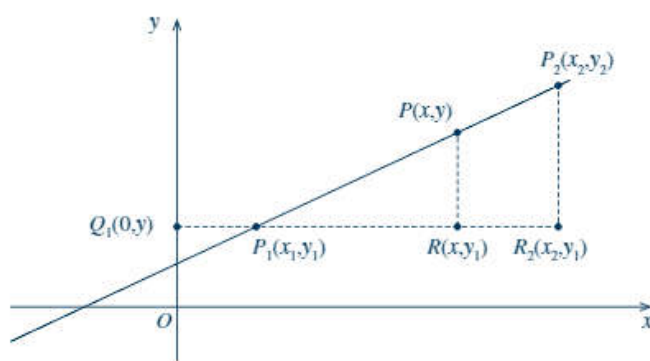
Por lo tanto, las coordenadas de los vértices del triángulo son:

$$A(-1,4), B(5,6) \text{ y } C(3,-2).$$

División de un segmento lineal

Determinar las coordenadas de un punto $P(x,y)$ que se encuentra sobre un segmento P_1P_2 , de manera que el segmento P_1P sea una fracción dada del segmento total P_1P_2 . En la gráfica siguiente, se observa que $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ son los extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$, así $P(x,y)$ es un punto de dicho segmento que se ubica en la

relación $K = \frac{P_1P}{P_1P_2}$, donde k es un número real cualquiera.



$$\begin{aligned}\text{Si } k &= \frac{P_1P}{P_1P_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ x - x_1 &= k(x_2 - x_1) \\ x &= x_1 + k(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Si } k &= \frac{P_1P}{P_1P_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ y - y_1 &= k(y_2 - y_1) \\ y &= y_1 + k(y_2 - y_1)\end{aligned}$$

Fórmulas para determinar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que se encuentra a

$$k = \frac{P_1P}{P_1P_2} \text{ de un segmento } P_1P_2.$$

Criterios de aplicación

1. Si $0 < k \leq 1$, P se encuentra sobre el segmento $\overline{P_1P_2}$.
2. Si $k = 0$, P coincide en el extremo P_1 .
3. Si $k = 1$, P coincide en el extremo P_2 .
4. Si $k > 1$, P se encuentra sobre $\overline{P_1P_2}$, pero no sobre el segmento $\overline{P_1P_2}$.
5. Si $k < 0$, P se encuentra sobre $\overline{P_2P_1}$, pero no sobre el segmento $\overline{P_1P_2}$. En este caso los segmentos dirigidos $\overrightarrow{P_2P}$ y $\overrightarrow{P_2P_1}$ tienen signos diferentes.

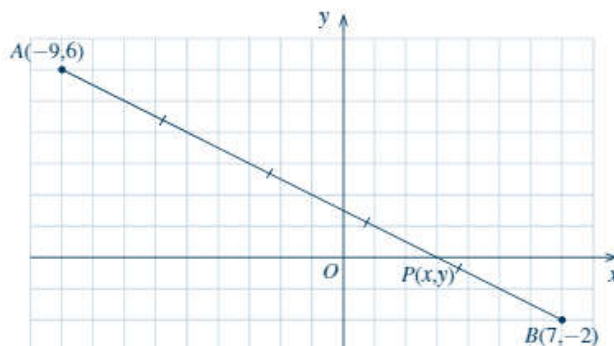
EJEMPLOS



1. Determina las coordenadas del punto $P(x, y)$ que se encuentra a los $\frac{4}{5}$ a partir del segmento $A(-9, 6)$ hacia $B(7, -2)$.

Solución

Al ubicar las coordenadas en el plano cartesiano resulta:



Al sustituir los datos del problema en las siguientes formas, se tiene:

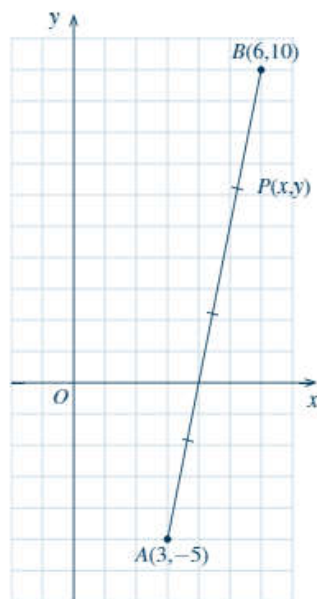
$$\begin{aligned}x &= x_1 + k(x_2 - x_1) & y &= y_1 + k(y_2 - y_1) \\x &= -9 + \frac{4}{5}(7 + 9) & y &= 6 + \frac{4}{5}(-2 - 6) \\x &= -9 + \frac{64}{5} & y &= 6 - \frac{32}{5} \\x &= \frac{19}{5} & y &= -\frac{2}{5}\end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto buscado son $P\left(\frac{19}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

- 2 •• Determina las coordenadas del punto P que se encuentra a los $\frac{3}{4}$ a partir del punto $A(3, -5)$ hacia $B(6, 10)$ y comprueba el resultado mediante la fórmula de la razón.

Solución

Al representar gráficamente se tiene:



Al sustituir los datos dados en las siguientes fórmulas, resulta:

$$\begin{aligned}x &= x_1 + k(x_2 - x_1) \\x &= 3 + \frac{3}{4}(6 - 3) \\x &= 3 + \frac{3}{4}(3) \\x &= 5.25 \\y &= y_1 + k(y_2 - y_1) \\y &= -5 + \frac{3}{4}(10 + 5) \\y &= -5 + \frac{3}{4}(15) \\y &= 6.25\end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto buscado son $P(5.25, 6.25)$.

Para comprobar los resultados por la fórmula de la razón, se sabe que:

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{3}{1} = 3$$

Al sustituir los puntos del problema en las siguientes fórmulas, resulta:

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1 + rx_2}{1+r} & y &= \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \\x &= \frac{3 + (3)(6)}{1+3} & y &= \frac{-5 + (3)(10)}{1+3} \\x &= 5.25 & y &= 6.25\end{aligned}$$

Por lo tanto, se comprueba que las coordenadas son $P(5.25, 6.25)$.

EJERCICIO 5

I. Con ayuda de tu profesor, resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute el proceso de solución.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

- Encuentra las coordenadas de un punto $P(x,y)$ que divida al segmento acotado por $P_1(-2,5)$ y $P_2(10,-2)$ en la relación $r = \frac{2}{3}$.
- Si el punto $P(8,-4)$ divide al segmento acotado por los puntos $P_1(14,-12)$ y $P_2(x_2,y_2)$ en la relación $r = 2$, encuentra las coordenadas de P_2 .
- Encuentra las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento $A(3,-5)$ y $B(6,10)$ y determina su punto medio.
- Los extremos del diámetro de una circunferencia son $A(3,-2)$ y $B(5,6)$, encuentra las coordenadas del centro.
- Encuentra las coordenadas del punto $P(x,y)$ que divide al segmento acotado por los puntos $A(2,-1)$ y $B(7,3)$ en la razón $r = -3$.
- El extremo del diámetro de una circunferencia de centro $C(6,-2)$ es $A(2,4)$, encuentra las coordenadas $B(x,y)$ del otro extremo.
- Determina la ecuación algebraica que expresa el hecho de que el punto $P(x,y)$ equidista de los dos puntos $A(2,2)$ y $B(9,9)$, encuentra las coordenadas de dicho punto.
- Los extremos de un segmento son los puntos $A(-3,-1)$ y $B(5,7)$, encuentra el punto $P(x,y)$ que divide a este segmento en dos partes, tal que, $\overline{BP} : \overline{PA} = -2$.
- En los siguientes ejercicios se dan los puntos medios de los lados de un triángulo, encuentra las coordenadas de sus tres vértices.

a) $(2,-3), (5,2)$ y $(-2,1)$	c) $(6,-1), (3,3)$ y $(1,-3)$
b) $(5,-4), (-1,-2)$ y $(3,2)$	d) $(8,0), (-4,7)$ y $(2,-1)$
- Determina las coordenadas del punto $P(x,y)$ que se encuentra a los $\frac{5}{7}$ a partir del segmento $A(2,4)$ hacia $B(8,-4)$.
- Encuentra las coordenadas de los puntos que dividen al segmento acotado por $A(9,-3)$ y $B(-2,7)$ en cuatro partes iguales.
- Encuentra las coordenadas del punto $P(x,y)$, tal que, $k = \frac{AP}{AB}$, para los siguientes casos:

a) $A(4,-2), B(12,8)$ y $k = \frac{3}{4}$	c) $A(-2,1), B(6,4)$ y $k = -\frac{3}{2}$
b) $A(1,1), B(-2,-3)$ y $k = 2$	d) $A(-2,5), B(10,1)$ y $k = \frac{5}{6}$

$$e) A(3, -6), B(-5, 2) \text{ y } k = \frac{7}{5}$$

$$f) A(1, 6), B(5, -2) \text{ y } k = -\frac{2}{3}$$

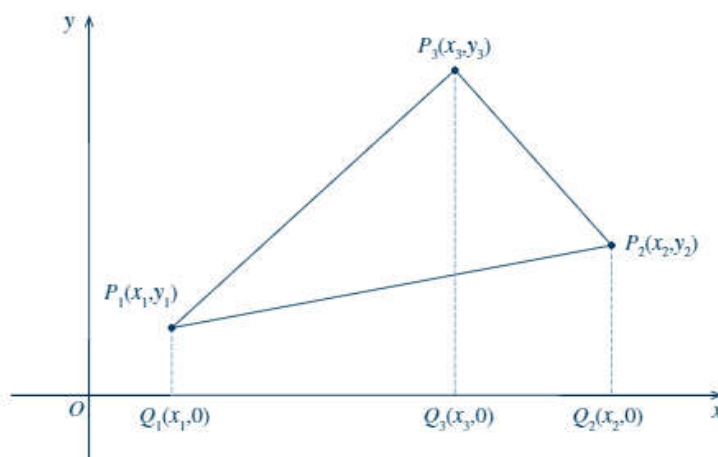
13. Comprueba los resultados del problema anterior, aplicando la fórmula de la razón.
14. Encuentra las coordenadas del punto medio para cada uno de los siguientes segmentos, cuyos extremos son:
 - a) $A(5\sqrt{2}, -2\sqrt{3})$ y $B(-2\sqrt{2}, -\sqrt{3})$
 - c) $A(2, 5)$ y $B(8, -1)$
 - b) $A(-4, 6)$ y $B(3, -2)$
 - d) $A(-2, 1)$ y $B(3, -5)$
15. Encuentra las coordenadas del punto P que se encuentra a $\frac{1}{3}$ a partir del punto $A(-6, 4)$ hacia $B(2, -8)$; comprueba el resultado por la fórmula de la razón.
16. Los vértices de un triángulo rectángulo son $A(2, -2)$, $B(-8, 4)$ y $C(5, 3)$, demuestra que el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.
17. Los vértices de un triángulo son $A(2, -1)$, $B(-4, 7)$ y $C(8, 0)$, encuentra para cada una de las medianas, el punto de trisección más cercano al punto medio del lado correspondiente. Demuestra que este punto es el mismo para cada una de las medianas y, por lo tanto, que las medianas concurren en un punto que se denomina centro de gravedad o baricentro del triángulo.
18. Los extremos de un segmento son los puntos $P_1(-10, -4)$ y $P_2(2, 6)$, encuentra la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en que el punto $P(-3, \frac{11}{6})$ divide al segmento.
19. Tres de los vértices de un paralelogramo son $A(1, 1)$, $B(9, 2)$ y $C(11, 6)$, encuentra las coordenadas del cuarto vértice D , si sabe que es opuesto a B .
20. Encuentra las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide a cada uno de los siguientes segmentos, en la razón dada.
 - a) $A(5, -1)$ y $B(11, 3)$ en $r = \frac{3}{4}$
 - d) $A(1, -2)$ y $B(4, 1)$ en $r = \frac{2}{3}$
 - b) $A(2, 3)$ y $B(9, -4)$ en $r = -\frac{2}{7}$
 - e) $A(-2, -3)$ y $B(0, 0)$ en $r = \frac{3}{2}$
 - c) $A(-3, 4)$ y $B(8, 2)$ en $r = -\frac{5}{3}$
 - f) $A(1, -2)$ y $B(4, -1)$ en $r = \frac{3}{4}$
21. El extremo de un segmento es el punto $A(2, -7)$ y su punto medio es $(-2, -3)$, encuentra las coordenadas del otro extremo.
22. Determina la ecuación algebraica que exprese que el punto $P(x, y)$ equidista de los dos puntos $A(-1, 2)$ y $B(4, -1)$.
23. Determina las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento AB en la razón $k = 3$, en los extremos del segmento $A(-2, -5)$ hacia $B(6, 9)$.
24. Una recta está determinada por los puntos $A(2, 3)$, $B(6, 5)$ y P es un punto que divide al segmento en la razón K . Si la abscisa de $P(\frac{15}{2})$, ¿cuál es el valor de k ?
25. Encuentra las coordenadas del punto P que son iguales, y equidistan de los puntos $A(-6, 4)$ y $B(2, -8)$.

➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Área de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices

Área de una región triangular

Sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ los vértices de un triángulo, su área se puede obtener sumando las áreas de los trapecios $Q_1Q_3P_3P_1$ y $Q_3Q_2P_2P_3$ y restando el área del trapecio $Q_1Q_2P_2P_1$. Dichas áreas de los trapecios se forman trazando perpendiculares de los vértices del triángulo al eje x . Es decir,



El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases (lados paralelos); por lo tanto, el área del triángulo $P_1P_2P_3$ es:

$$A = \text{área del trapecio } Q_1Q_3P_3P_1 + \text{área del trapecio } Q_3Q_2P_2P_3 - \text{área del trapecio } Q_1Q_2P_2P_1.$$

$$A = (x_3 - x_1) \left(\frac{1}{2} \right) (y_1 + y_3) + (x_2 - x_3) \left(\frac{1}{2} \right) (y_3 + y_2) - (x_2 - x_1) \left(\frac{1}{2} \right) (y_1 + y_2)$$

$$A = \frac{1}{2} (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1)$$

El área resultante puede expresarse en una forma más sencilla para recordar, es decir:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Diagrama de la fórmula de Sarrus para la determinación de la fórmula de área:

x_1	y_1	1	$(-)$
x_2	y_2	1	$(-)$
x_3	y_3	1	$(+)$
x_1	y_1	1	$(+)$
x_2	y_2	1	$(+)$

Esta fórmula también se emplea para determinar el área de cualquier polígono.

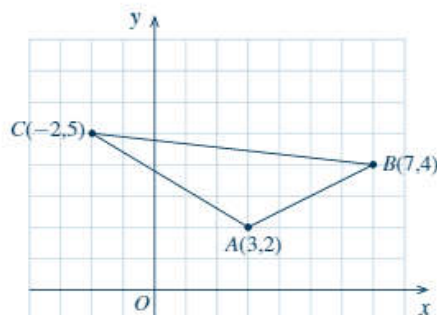
Considera que el primer renglón se repite al final con el fin de facilitar la operación.

Si los vértices se ordenan en la fórmula en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el área resultante es de signo positivo; en caso contrario será negativa.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Encuentra el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3,2)$, $B(7,4)$ y $C(-2,5)$.

Solución

Al sustituir los datos en la fórmula anterior, resulta:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} [(3)(4) + (7)(5) + (-2)(2) - (3)(5) - (-2)(4) - (7)(2)]$$

$$A = \frac{1}{2} (12 + 35 - 4 - 15 + 8 - 14) = \frac{22}{2}$$

$$A = 11 \text{ unidades cuadradas}$$

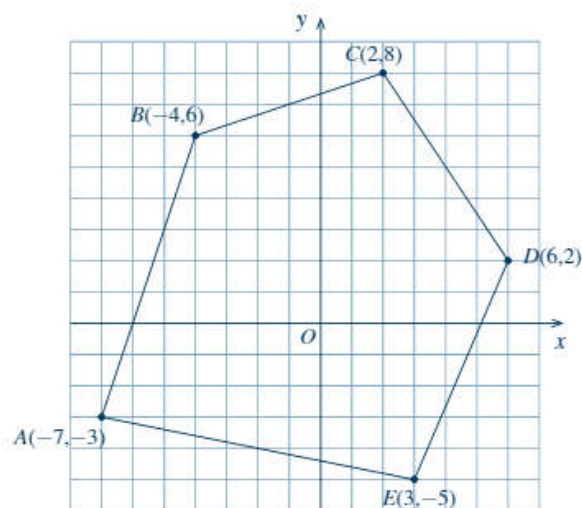
- 2 •• Encuentra el área del polígono cuyos vértices son los puntos $A(-7,-3)$, $B(-4,6)$, $C(2,8)$, $D(6,2)$ y $E(3,-5)$.

Solución

Al ubicar los puntos en el plano cartesiano se tiene:

A partir de la gráfica, los vértices se ordenan en el determinante en el sentido contrario de las manecillas del reloj, es decir:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_E & y_E \\ x_D & y_D \\ x_C & y_C \\ x_B & y_B \\ x_A & y_A \end{vmatrix}$$



Al sustituir los datos en la fórmula anterior, resulta:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 3 & -5 \\ 6 & 2 \\ 2 & 8 \\ -4 & 6 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} [(-7)(-5) + (3)(2) + (6)(8) + (2)(6) + (-4)(-3) - (-7)(6) - (-4)(8) - (2)(2) - (6)(-5) - (3)(-3)]$$

$$A = \frac{1}{2} (35 + 6 + 48 + 12 + 12 + 42 + 32 - 4 + 30 + 9) = \frac{222}{2} = 111 \text{ unidades cuadradas}$$

Por lo tanto, el área del polígono son 111 unidades cuadradas.

Perímetro

Es la suma de las longitudes de los lados de una figura plana, matemáticamente se representa por la letra P (mayúscula).

Semiperímetro

Es la mitad del perímetro que se representa por la letra p (minúscula) y matemáticamente se hace notar por

$$p = \frac{P}{2}$$

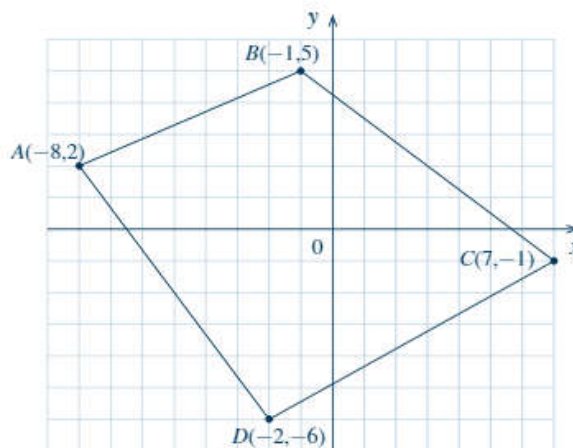
EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Encuentra el área, perímetro y semiperímetro del polígono cuyos vértices son: $A(-8,2)$, $B(-1,5)$, $C(7,-1)$ y $D(-2,-6)$.

Solución

Al ubicar los vértices en el plano cartesiano se tiene:



A partir de la gráfica, los vértices se ordenan en el determinante en sentido contrario al de las manecillas del reloj, es decir:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_D & y_D \\ x_C & y_C \\ x_B & y_B \\ x_A & y_A \end{vmatrix} \quad A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -2 & -6 \\ 7 & -1 \\ -1 & 5 \\ -8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} [(-8)(-6) + (-2)(-1) + (7)(5) + (-1)(2) - (-8)(5) - (-1)(-1) - (7)(-6) - (-2)(2)]$$

$$A = \frac{1}{2} (48 + 2 + 35 - 2 + 40 - 1 + 42 + 4) = \frac{168}{2} = 84 \text{ unidades cuadradas}$$

Para determinar el perímetro, se calculan las longitudes de los lados del polígono dado, es decir:

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(-1+8)^2 + (5-2)^2}$$

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{49+9} \approx 7.616$$

$$d_{\overline{CD}} = \sqrt{(-2-7)^2 + (-6+1)^2}$$

$$d_{\overline{CD}} = \sqrt{81+25} \approx 10.296$$

$$d_{\overline{BC}} = \sqrt{(7+1)^2 + (-1-5)^2}$$

$$d_{\overline{BC}} = \sqrt{64+36} = 10$$

$$d_{\overline{AD}} = \sqrt{(-2+8)^2 + (-6-2)^2}$$

$$d_{\overline{DA}} = \sqrt{36+64} = 10$$

El perímetro del polígono es:

$$P = d_{\overline{AB}} + d_{\overline{BC}} + d_{\overline{CD}} + d_{\overline{DA}}$$

$$P = 7.616 + 10 + 10.296 + 10$$

$$P \approx 37.912 \text{ unidades de longitud}$$

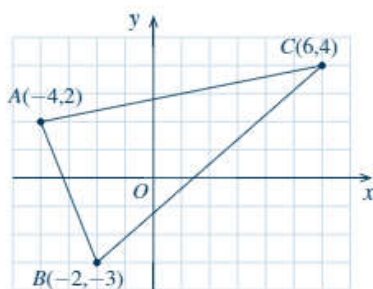
El semiperímetro del polígono es:

$$p = \frac{P}{2} = \frac{37.912}{2} \approx 18.956 \text{ unidades de longitud}$$

- 2 •• Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $A(-4,2)$, $B(-2,-3)$ y $C(6,4)$, encuentra el área, perímetro y semiperímetro.

Solución

Al ubicar los vértices en el plano cartesiano se tiene:



Al sustituir los datos de cada punto en la fórmula del área, resulta:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & x_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -3 \\ 6 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}[(-4)(-3) + (-2)(4) + (6)(2) - (-4)(4) - (6)(-3) - (-2)(2)]$$

$$A = \frac{1}{2}(12 - 8 + 12 + 16 + 18 + 4) = \frac{54}{2} = 27 \text{ unidades cuadradas}$$

Las longitudes de los lados son:

$$d \overline{AB} = \sqrt{(-2+4)^2 + (-3-2)^2}$$

$$d \overline{AB} = \sqrt{4+25} \approx 5.385$$

$$d \overline{BC} = \sqrt{(6+2)^2 + (4+3)^2}$$

$$d \overline{BC} = \sqrt{64+49} \approx 10.63$$

$$d \overline{AC} = \sqrt{(6+4)^2 + (4-2)^2}$$

$$d \overline{AC} = \sqrt{100+4} \approx 10.198$$

Perímetro:

$$P = d \overline{AB} + d \overline{BC} + d \overline{AC}$$

$$P = 5.385 + 10.63 + 10.198$$

$$P \approx 26.213 \text{ unidades de longitud}$$

Semiperímetro:

$$p = \frac{P}{2} = \frac{26.213}{2}$$

$$p \approx 13.1065 \text{ unidades de longitud}$$

EJERCICIO 6

I. En equipo encuentren el área, perímetro y semiperímetro para los siguientes triángulos cuyos vértices son:

1. $A(3, -4)$, $B(5, 2)$ y $C(-7, -3)$
2. $A(-4, 2)$, $B(6, 4)$ y $C(8, -5)$
3. $A(-4, -1)$, $B(-2, -6)$ y $C(5, -2)$
4. $A(4, 9)$, $B(-2, 1)$ y $C(-5, 3)$
5. $A(7, -3)$, $B(-2, 2)$ y $C(6, 4)$
6. $A(1, 4)$, $B(3, -9)$ y $C(-5, 2)$

II. Encuentra el área, perímetro y semiperímetro para los siguientes polígonos cuyos vértices son:

1. $A(-5, -2)$, $B(2, -4)$, $C(5, 1)$, $D(2, 7)$ y $E(-2, 5)$
2. $A(-3, 3)$, $B(4, 2)$, $C(7, 7)$ y $D(-1, 6)$
3. $A(-3, -2)$, $B(-7, 1)$, $C(-2, 8)$, $D(1, 5)$ y $E(6, 3)$
4. $A(-4, 1)$, $B(2, 6)$, $C(6, -1)$ y $D(-1, -5)$
5. $A(-5, 1)$, $B(-4, 6)$, $C(3, 5)$, $D(7, 2)$ y $E(2, -4)$

III. Resuelve los siguientes problemas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. ¿Para qué valores de ordenada y tendrá el siguiente triángulo de vértices $A(-3,4)$, $B(6,1)$ y $C(4,y)$ una área de 25 unidades cuadradas?
2. Demuestra que las rectas que unen los puntos medios de los lados del triángulo cuyos vértices son $A(-1,5)$, $B(-4,-6)$ y $C(-8,-2)$; dividen a dicho triángulo en cuatro triángulos de áreas iguales.
3. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, -3\right)$, encuentra las coordenadas de sus vértices, el área, perímetro y semiperímetro.
4. Encuentra el área, perímetro y semiperímetro del paralelogramo que se forma al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cuyos vértices son: $A(4,1)$, $B(3,4)$, $C(0,3)$ y $D(-3,-1)$.
5. Encuentra el área del triángulo cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(1,2)$, y $C(3,-4)$, y comprueba el resultado por la fórmula de Herón para el área del triángulo en función de sus lados.
6. Los vértices de un triángulo son $A(3,8)$, $B(2,-1)$ y $C(6,-1)$; si $D(x,y)$ es el punto medio del lado BC , calcula el área del triángulo ADC .
7. Encuentra el área del triángulo cuyos vértices son $A(2,-2)$, $B(-8,4)$ y $C(5,3)$, y comprueba el resultado por la fórmula $A = \frac{(b)(h)}{2}$.
8. Encuentra el área del triángulo cuyos vértices son $A(1,-3)$, $B(3,3)$ y $C(6,-1)$, y comprueba el resultado por la fórmula de Herón.
9. Los vértices de un rectángulo son $A(4,8)$, $B(8,6)$, $C(6,2)$ y $D(2,4)$:
 - a) Determina el área del triángulo ABC .
 - b) Demuestra analíticamente que el punto medio de la hipotenusa del triángulo ABC es equidistante de cada uno de los tres vértices.
 - c) Demuestra que el área del rectángulo es el doble que la del triángulo ABC .
10. Dado el triángulo $A(2,3)$, $B(5,7)$ y $C(-3,4)$, calcula la longitud de la base BC , la longitud de la altura que pasa por A y el área del triángulo.
11. Determina el área del paralelogramo, tres de cuyos vértices son los puntos $A(-2,3)$, $B(4,-5)$ y $C(-3,1)$.
12. Dados los vértices consecutivos de una lámina homogénea pentagonal $A(2,3)$, $B(0,6)$, $C(-1,5)$, $D(0,1)$ y $E(1,1)$, determina el área.
13. El área de un paralelogramo son 12 unidades cuadradas, dos de sus vértices son $A(-1,3)$ y $B(-2,4)$. Si el punto de intersección de sus diagonales está situado en el eje x , encuentra los vértices faltantes.
14. El área de un triángulo son tres unidades cuadradas, dos de sus vértices son $A(3,1)$ y $B(1,-3)$. Si el tercer vértice está situado en el eje y , encuentra las coordenadas del vértice C .

➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Gráfica de una ecuación y lugares geométricos

En el estudio de la geometría analítica, se presentan dos problemas básicos que son inversos entre sí.

1. Dada una ecuación, determina el lugar geométrico que representa, es decir, traza la gráfica correspondiente.
2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, establece su ecuación matemática.

Lugar geométrico o gráfica de una ecuación

Si tenemos una ecuación de dos variables en la forma $f(x,y) = 0$, normalmente una infinidad de pares (x,y) satisfacen dicha ecuación, los cuales se representan como puntos del plano cuya coordenada es (x,y) .

El conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación, se llama gráfica de la ecuación, o bien, su lugar geométrico.

Otra definición importante establece: si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación, dicho punto pertenece a la gráfica de la ecuación, o si un punto está sobre la gráfica de una ecuación, sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Para trazar la gráfica de una ecuación dada, debemos conocer algunas de sus propiedades, como son: intersecciones con los ejes, simetrías, rango de valores de las variables o extensión de la curva, asíntotas, etcétera.

Análisis de una ecuación

Consiste en conocer ciertas propiedades de la ecuación antes de trazar su gráfica.

Intersección con los ejes coordenados

La intersección de una curva con el eje x es la abscisa del punto de intersección de la curva con el eje x , así, la coordenada de ese punto es $(x,0)$.

La intersección de una curva con el eje y es la ordenada del punto de intersección de la curva con el eje y ; la coordenada de ese punto es $(0,y)$.

Para determinar la intersección de la gráfica con el eje x , debe sustituirse $y = 0$ en la ecuación y resolver para la variable x , los valores resultantes dan los puntos de las abscisas, donde la curva corta al eje x . De manera similar, cuando se hace $x = 0$ en la ecuación, los valores resultantes de y dan los puntos de las ordenadas, donde la curva corta al eje y .

EJEMPLO

Ejemplo 1

- Sea la ecuación $x^2 + 2y = 4$, determina las intersecciones con los ejes coordenados.

Solución

Al hacer $y = 0$, se tiene: $x^2 = 4$ } Al despejar x resulta:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$|x| = 2$$

$$x = \pm 2$$

Por lo tanto, las intersecciones con el eje x son $(2,0)$ y $(-2,0)$.

Cuando $x = 0$, se tiene: $2y = 4$ } Al despejar y resulta:

$$y = \frac{4}{2}$$

$$y = 2$$

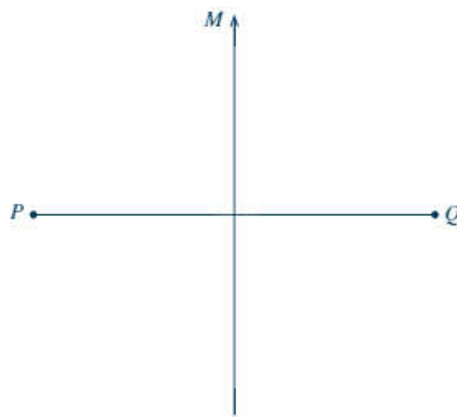
Por lo tanto, la intersección con el eje y es $(0,2)$.

Simetría

Se refiere a la posibilidad de que alguno de los ejes coordenados sea eje de simetría o que el origen sea el centro de simetría de la curva.

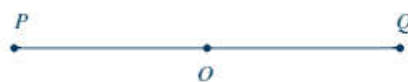
Dos puntos son simétricos respecto a una recta si dicha recta es perpendicular al segmento que los une en su punto medio.

La recta respecto a la cual los dos puntos son simétricos se denomina **eje de simetría**.



Los dos puntos P y Q son simétricos respecto al **eje de simetría** M , siempre que la recta M sea perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ en su punto medio.

Dos puntos son simétricos respecto a un punto O , si O , es el punto medio del segmento que los une.



Los dos puntos P y Q son simétricos respecto al centro de la simetría O siempre que O sea el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

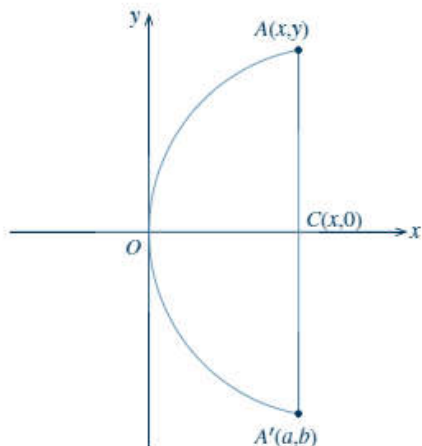
- Se dice que una curva es simétrica respecto a un eje de simetría cuando para cada punto de la curva hay un punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos respecto al eje.
- Se dice que una curva es simétrica respecto a un centro de simetría O cuando para cada punto de la curva hay un punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos respecto a O .

Simetría respecto al eje x

Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable y es reemplazada por $-y$, se establece que la curva es simétrica respecto al eje x . Para todo valor de x en esta ecuación le corresponden dos valores numéricamente iguales de y en valor absoluto pero de signos contrarios.

Ejemplo

Sea $A(x,y)$ un punto cualquiera de una **parábola**, si la curva es simétrica al eje x , existe otro punto $A'(a,b)$ sobre la curva, donde el segmento $\overline{AA'}$ queda dividido perpendicularmente por el eje x y si el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ es $C(x,0)$, entonces al aplicar las fórmulas del punto medio, se tiene:



$$\begin{aligned}x &= \frac{x+a}{2} & 0 &= \frac{y+b}{2} \\2x &= x+a & 2(0) &= y+b \\a &= 2x-x & y+b &= 0 \\a &= x & b &= -y\end{aligned}$$

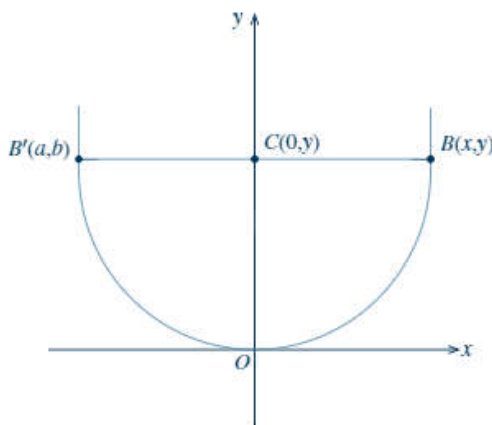
$A'(x,-y)$

Simetría respecto al eje y

Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable x es reemplazada por $-x$, se establece que las curva es simétrica respecto al eje y . Para todo valor de x en esta ecuación le corresponden dos valores numéricamente iguales de x en valor absoluto pero de signos contrarios.

Ejemplo

Sea $B(x,y)$ un punto cualquiera de una **parábola**; si la curva es simétrica al eje y , existe otro punto $B'(a,b)$ sobre la curva, donde el segmento $\overline{BB'}$ queda dividido perpendicularmente por el eje y y si el punto medio del segmento $\overline{BB'}$ es $C(0,y)$, entonces al aplicar las fórmulas del punto medio, se tiene:



$$\begin{aligned}0 &= \frac{x+a}{2} & 0 &= \frac{y+b}{2} \\2(0) &= x+a & 2y &= y+b \\x+a &= 0 & b &= 2y-y \\a &= -x & b &= y\end{aligned}$$

$B'(-x,y)$

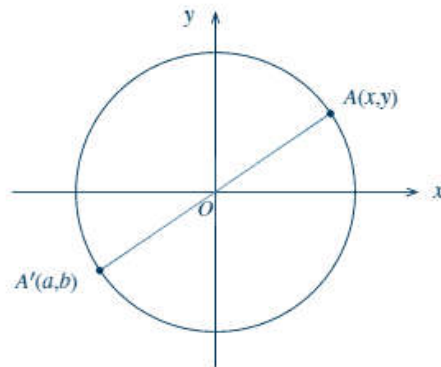
La simetría respecto al eje x y respecto al eje y , establece: una curva es simétrica respecto a un centro de eje de simetría cuando cada punto de la curva tiene un punto correspondiente, tal que, estos dos puntos son simétricos respecto al eje.

Simetría respecto al origen

Si la ecuación de una curva no se altera al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$, se establece que la curva es simétrica respecto al origen y recíprocamente.

Ejemplo

Sea $A(x,y)$ un punto cualquiera de una **circunferencia** si la curva es simétrica al origen O , existe otro punto $A'(a,b)$ sobre la curva, tal que, O sea el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, entonces al aplicar las fórmulas del punto medio, se tiene:



$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x+a}{2} & 0 &= \frac{y+b}{2} \\ 2(0) &= x+a & 2(0) &= y+b \\ x+a &= 0 & y+b &= 0 \\ a &= -x & y &= -b \\ & & A'(-x,-y) & \end{aligned}$$

La simetría respecto al origen establece: una curva es simétrica respecto a un centro de simetría O , cuando cada punto de la curva tiene un punto correspondiente, tal que, estos dos puntos son simétricos respecto a O .

Rangos de variación de las variables o extensión de la curva

El tercer punto a considerar en el análisis de una ecuación, es el estudio de la **extensión de la curva**. Con este término se identifican los intervalos, en donde, se encuentran los valores de x y y de la gráfica completa, el cual es útil por dos razones:

1. Indica la ubicación general de la curva en el sistema coordenado.
2. Describe si la curva es cerrada o de extensión indefinida (abierta).

EJEMPLO

Ejemplo 1

- Dada la ecuación $x^2 - y^3 = 0$, a partir de las intersecciones, simetría y la extensión de la curva, traza la gráfica correspondiente.

Solución

- a) Intersección con los ejes coordenados

Sea $x^2 = y^3$; cuando $y = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 &= (0)^3 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Sea $y^3 = x^2$; cuando $x = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} y^3 &= (0)^2 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

El único punto de intersección es el origen $O(0,0)$.

b) Simetría

Simetría respecto al eje x . Al sustituir en la ecuación y por $-y$, resulta:

$$x^2 = y^3$$

$$x^2 = (-y)^3$$

$$x^2 = (-y^3) \quad \text{Sí hay cambio.}$$

No hay simetría respecto al eje x .

Simetría respecto al eje y . Al sustituir en la ecuación x por $-x$, resulta:

$$x^2 = y^3$$

$$(-x)^2 = y^3$$

$$x^2 = y^3 \quad \text{No hay cambio.}$$

Sí hay simetría respecto al eje y .

Simetría respecto al origen. Al sustituir en la ecuación y por $-y$ y x por $-x$, resulta:

$$x^2 = y^3$$

$$(-x)^2 = (-y)^3$$

$$x^2 = -y^3 \quad \text{Sí hay cambio.}$$

La curva no es simétrica respecto al origen.

c) Extensión de la curva

Despejando x en función de y , se tiene:

$$x^2 = y^3$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{y^3}$$

$$|x| = \sqrt{y^3}$$

$$x = \pm\sqrt{y^3}$$

Si y es negativa y^3 también lo es, así, los valores resultantes para x son números complejos no reales; por lo tanto, todos los valores negativos de y quedan excluidos. Lo anterior significa que ninguna parte de la curva está hacia abajo del eje x .

Despejando y en función de x , resulta:

$$y^3 = x^2$$

$$\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

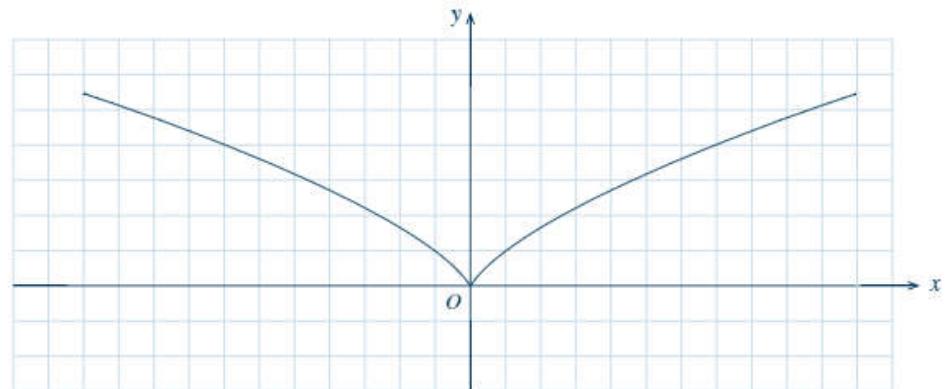
Sin importar el signo de x , los valores de y son positivos. Lo anterior significa que la curva se extiende indefinidamente hacia arriba del eje x y a ambos lados de éste, es decir, la curva no es cerrada ni acotada (no forma una circunferencia).

d) Trazado de la curva

Sea $x = \pm\sqrt{y^3}$

Al dar valores a y se tiene:

y	x
0	0
1	± 1
2	± 2.82
3	± 5.19
4	± 8
5	± 11.18



Asíntotas

Si para una curva dada existe una recta tal que a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta se llama asíntota de la curva.

Lo anterior da lugar a las siguientes conclusiones:

1. Cuando una curva tiene una asíntota se extiende indefinidamente.
2. La curva se aproxima a la asíntota, tanto como ésta se extienda en el plano coordenado.

Siendo la asíntota una línea recta, puede tener cualquiera de las siguientes posiciones:

- a) **Asíntota horizontal.** Cuando es paralela o coincide con el eje x .
- b) **Asíntota vertical.** Cuando es paralela o coincide con el eje y .
- c) **Asíntota oblicua.** Cuando no es paralela a ninguno de los ejes coordenados.

Una curva puede tener una o más asíntotas, o incluso no presentar ninguna, la determinación de la asíntota para una curva nos ayuda en el trazado de la misma.

Una forma de obtener las asíntotas horizontales y verticales consiste en despejar una de las variables y analizar para qué valores de la otra variable la expresión queda indefinida. Así, para obtener la ecuación de la asíntota horizontal se despeja la variable x y se encuentran los valores de y para los cuales la expresión queda indefinida. De modo similar, para la asíntota vertical, se despeja y y se analiza la variable x .

Para encontrar las asíntotas oblicuas que se presentan en la curva llamada **hipérbola** cuya ecuación es $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$; se usa la expresión $b^2x^2 - a^2y^2 = 0$, que en forma factorizada queda $(bx + ay)(bx - ay) = 0$, de donde se deduce que $bx + ay = 0$ y $bx - ay = 0$ son las ecuaciones de las asíntotas oblicuas.

EJEMPLOS



- 1 •• Determina las asíntotas horizontales y verticales de la curva cuya ecuación es $xy - x - 1 = 0$.

Solución

Despejando x en función de y , se tiene:

$$\begin{aligned} xy - x - 1 &= 0 \\ x(y - 1) &= 1 \\ x &= \frac{1}{y - 1} \end{aligned}$$

Al dar valores a y resulta:

y	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	0.9	1	-1	-2	-3	-4	-5
x	-1	-1.25	-1.66	-2	-2.5	-5	-10	∞	-0.5	0.33	-0.25	-0.2	-0.16

Dada la tabla anterior, cuando $y = 1$ el denominador $y - 1$ se hace cero, es decir, la expresión para x queda indefinida.

La asíntota horizontal es $y = 1$.

Ahora, se despeja y en función de x , es decir:

$$\begin{aligned} xy - x - 1 &= 0 \\ xy &= x + 1 \\ y &= \frac{x + 1}{x} \end{aligned}$$

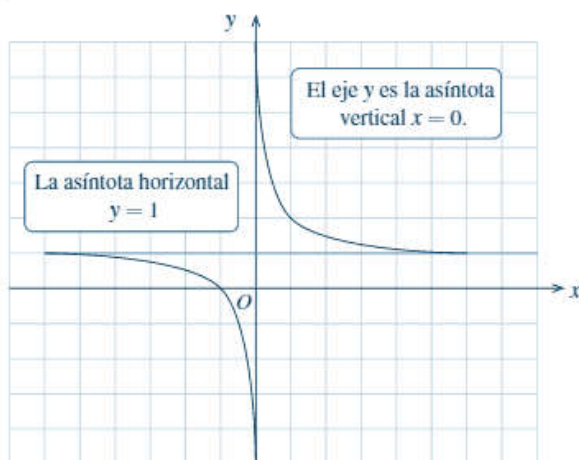
Al dar valores a x resulta:

x	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	0.9	1	2	3	4	5
y	∞	6	3.5	3	2.66	2.25	2.11	2	1.5	1.33	1.25	1.2

Dada la tabla anterior, cuando $x = 0$, el denominador x se hace cero, es decir, la expresión para y queda indefinida.

La asíntota vertical es $x = 0$.

Representación gráfica:



2 ••• Determina las asíntotas oblicuas de la curva cuya ecuación es $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$.

Solución

La ecuación $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ se escribe en la forma $4x^2 - 9y^2 = 0$ y se factoriza, quedando:

$$2x + 3y = 0$$

$$2x - 3y = 0$$

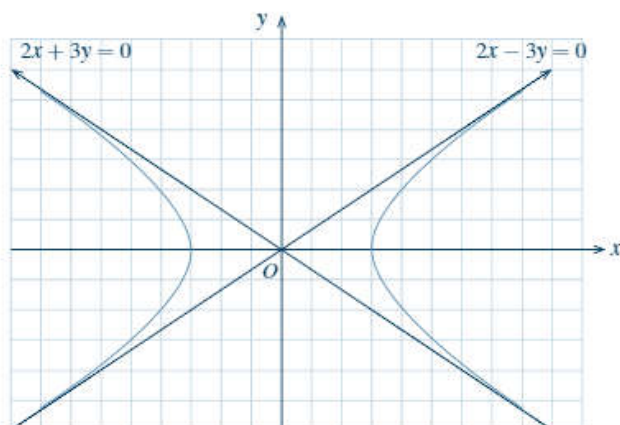
Al elaborar la gráfica correspondiente resulta:

$$y = -\frac{2x}{3}$$

$$y = \frac{2x}{3}$$

y	x
0	0
1	-0.66
3	-2
-1	0.56
-3	2

y	x
0	0
1	0.66
3	2
-1	-0.56
-3	-2



EJEMPLOS



En cada uno de los siguientes ejercicios, determina las intersecciones, simetría, extensión, asíntotas y traza la gráfica correspondiente de la ecuación dada.

1 ••• $3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$

Solución

a) Intersección con los ejes coordenados

Si $y = 0$, se tiene:

$$3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$$

$$3x^2 + 3(0)^2 = 10$$

$$3x^2 = 10$$

$$x^2 = \frac{10}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{10}{3}} = \pm 1.82$$

Las intersecciones con el eje x son $(1.82, 0)$ y $(-1.82, 0)$.

Si $x = 0$, se tiene:

$$3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$$

$$3(0)^2 + 3y^2 = 10$$

$$y^2 = \frac{10}{3}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{10}{3}} = \pm 1.82$$

Las intersecciones con el eje y son $(0, 1.82)$ y $(0, -1.82)$.

b) Simetría

Simetría respecto al eje x . Al sustituir en la ecuación y por $-y$ resulta:

$$3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$$

$$3x^2 + 3(-y)^2 - 10 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 10 = 0 \quad \text{No hay cambio.}$$

Sí hay simetría respecto al eje x .

Simetría respecto al eje y . Al sustituir en la ecuación x por $-x$, resulta:

$$3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$$

$$3(-x)^2 + 3y^2 - 10 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 10 = 0 \quad \text{No hay cambio.}$$

Sí hay simetría respecto al eje y .

Simetría respecto al origen. Al sustituir en la ecuación y por $-y$ y x por $-x$, resulta:

$$3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$$

$$3(-x)^2 + 3(-y)^2 - 10 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 10 = 0 \quad \text{No hay cambio.}$$

Sí hay simetría respecto al origen.

c) Extensión

Al despejar x en función de y , se tiene:

$$3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$$

$$3x^2 = 10 - 3y^2$$

$$x^2 = \frac{10 - 3y^2}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{10 - 3y^2}{3}}$$

La expresión para x queda indefinida cuando el radicando es negativo, es decir, si $10 - 3y^2 < 0$. Por lo tanto, la extensión se reduce a la banda vertical $-\sqrt{\frac{10}{3}} \leq y \leq \sqrt{\frac{10}{3}}$.

Al despejar y en función de x , resulta:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 10 &= 0 \\ 3y^2 &= 10 - 3x^2 \\ y^2 &= \frac{10 - 3x^2}{3} \\ y &= \pm \sqrt{\frac{10 - 3x^2}{3}} \end{aligned}$$

De manera similar al caso anterior, la expresión para y queda indefinida si $10 - 3x^2 < 0$, lo que indica que la extensión se reduce a la banda horizontal $-\sqrt{\frac{10}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{10}{3}}$.

La curva es cerrada, es decir, de extensión acotada y dadas las simetrías que presenta respecto a ambos ejes y al origen, se deduce que se trata de una circunferencia con centro en el origen.

d) Asíntotas

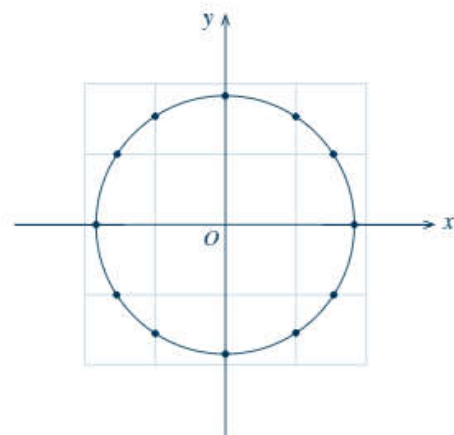
Por definición, las curvas cerradas no tienen asíntota.

e) Trazado de la curva

$$y = \pm \sqrt{\frac{10 - 3x^2}{3}} \quad \text{o} \quad x = \pm \sqrt{\frac{10 - 3y^2}{3}}$$

Al dar valores a x resulta:

x	y
0	± 1.82
1	± 1.52
2	i
-1	± 1.52
-2	i
± 1.82	0
± 1.52	1



2 ••• $y = x^3 + x^2 - 9x - 9$

Solución

a) Intersección con los ejes coordenados

Si $y = 0$, se tiene:

$$x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$$

Al factorizar, resulta:

$$\begin{aligned}(x^2 - 9)(x + 1) &= 0 \\ (x + 3)(x - 3)(x + 1) &= 0 \\ \begin{array}{ccc} x + 3 = 0 & x - 3 = 0 & x + 1 = 0 \\ x = -3 & x = 3 & x = -1 \end{array}\end{aligned}$$

Las intersecciones con el eje x son: $(-3,0)$ $(-1,0)$ y $(3,0)$.

Si $x = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}y &= x^3 + x^2 - 9x - 9 \\ y &= (0)^3 + (0)^2 - 9(0) - 9 \\ y &= -9\end{aligned}$$

La intersección con el eje y es $(0, -9)$.

b) Simetría

Simetría respecto al eje x . Al sustituir en la ecuación y por $-y$, resulta:

$$\begin{aligned}y &= x^3 + x^2 - 9x - 9 \\ -y &= x^3 + x^2 - 9x - 9 \quad \text{Sí hay cambio.}\end{aligned}$$

No hay simetría respecto al eje x .

Simetría respecto al eje y . Al sustituir en la ecuación x por $-x$, resulta:

$$\begin{aligned}y &= x^3 + x^2 - 9x - 9 \\ y &= (-x)^3 + (-x)^2 - 9(-x) - 9 \\ y &= -x^3 + x^2 + 9x - 9 \quad \text{Sí hay cambio.}\end{aligned}$$

No hay simetría respecto al eje y .

Simetría respecto al origen. Al sustituir en la ecuación y por $-y$ y x por $-x$, resulta:

$$\begin{aligned}y &= x^3 + x^2 - 9x - 9 \\ -y &= (-x)^3 + (-x)^2 - 9(-x) - 9 \\ -y &= -x^3 + x^2 + 9x - 9 \quad \text{Sí hay cambio.}\end{aligned}$$

No hay simetría respecto al origen.

c) Extensión

En la ecuación dada, y es función de x . Se observa que cualquier valor real dado a x produce un valor real de y . Por lo tanto, la curva se extiende sin límite arriba y abajo del eje x , y a izquierda y derecha del eje y .

d) Asíntotas

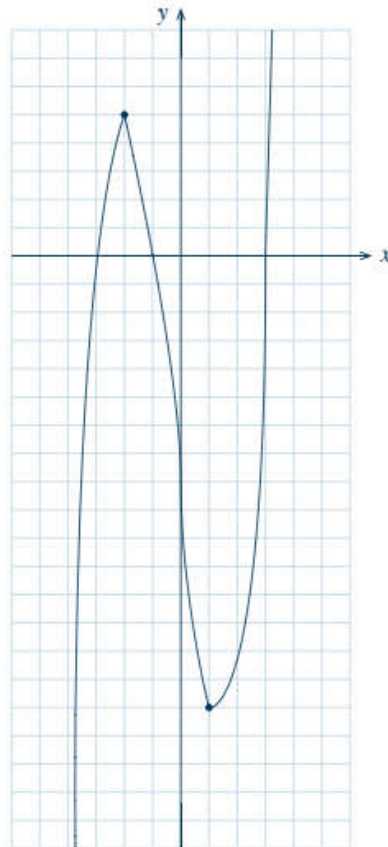
En la ecuación dada no hay posibilidad de indefinición de la variable y y tampoco de la variable x , puesto que tiene una potencia impar, por lo que la curva no tiene asíntotas.

e) Trazado de la curva

$$y = x^3 + x^2 - 9x - 9$$

Al dar valores a x resulta:

x	y
0	-9
1	-16
2	-15
3	0
4	35
-1	0
-2	5
-3	0
-4	-21



3 ••• $x^2y - 4y + x = 0$

Solución

a) Intersección con los ejes coordenados

Haciendo $y = 0$, tenemos: $x^2y - 4y + x = 0$

$$x^2(0) - 4(0) + x = 0$$

$$x = 0$$

Haciendo $x = 0$, tenemos: $x^2y - 4y + x = 0$

$$(0)^2y - 4y + 0 = 0$$

$$-4y = 0$$

$$y = 0$$

La intersección con los ejes se da únicamente en el origen.

b) Simetría

Simetría respecto al eje x . Al sustituir en la ecuación y por $-y$, resulta:

$$x^2y - 4y + x = 0$$

$$x^2(-y) - 4(-y) + x = 0$$

$$-x^2y + 4y + x = 0 \quad \text{Sí hay cambio.}$$

No hay simetría respecto al eje x .

Simetría respecto al eje y . Al sustituir en la ecuación x por $-x$, resulta:

$$x^2y - 4y + x = 0$$

$$(-x)^2y - 4y + (-x) = 0$$

$$x^2y - 4y - x = 0 \quad \text{Sí hay cambio.}$$

No hay simetría respecto al eje y .

Simetría respecto al origen. Al sustituir en la ecuación y y x por $-y$ por $-y$ y x por:

$$x^2y - 4y + x = 0$$

$$(-x)^2(-y) - 4(-y) + (-x) = 0$$

$$-x^2y + 4y - x = 0$$

Al multiplicar por -1 , se tiene:

$$x^2y - 4y + x = 0 \quad \text{No hay cambio.}$$

La curva es simétrica respecto al origen.

c) Extensión

Al ordenar los términos de la ecuación, se puede observar la equivalencia con una ecuación de segundo grado, así:

$$yx^2 + x - 4y = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Aplicando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado resulta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(y)(-4y)}}{2(y)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16y^2}}{2y}$$

Se observa que la variable x puede definirse para cualquier valor de y , excepto cuando $y = 0$, por lo que la extensión vertical de la gráfica es todo el plano, a excepción del eje x .

Si despejamos y en función de x tenemos:

$$x^2y - 4y + x = 0$$

$$x^2y - 4y = -x$$

$$y(x^2 - 4) = -x$$

$$y = \frac{-x}{x^2 - 4} = -\frac{x}{(x+2)(x-2)}$$

Se observa que la variable y no puede definirse cuando $x = \pm 2$, es decir, la curva se extiende indefinidamente hacia arriba y abajo del eje x ; también se extiende indefinidamente a la derecha de la recta vertical $x = 2$ y a la izquierda de $x = -2$, pero también se encuentra en la banda vertical $-2 < x < 2$.

d) Asíntotas

De la ecuación $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16y^2}}{2y}$ se observa que para $y = 0$, el denominador se anula, por lo que x se hace infinita.

La curva tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

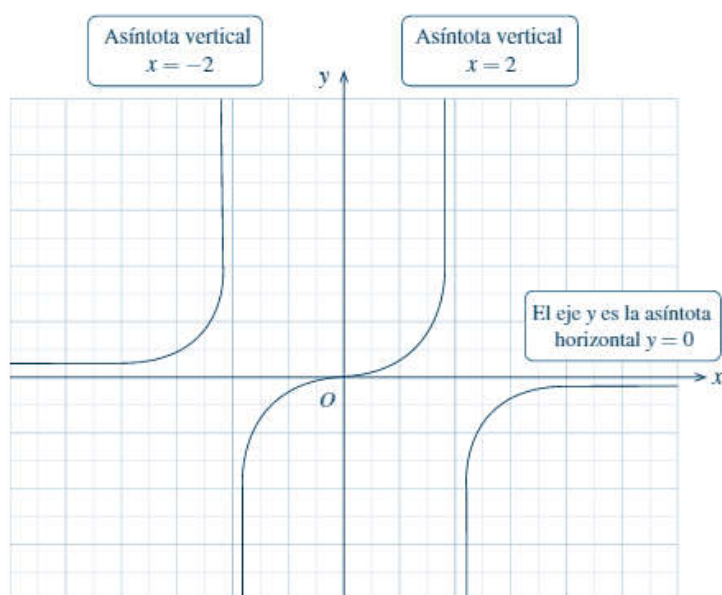
De la ecuación $y = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$ se observa que para $x = \pm 2$ el denominador se anula, por lo que y se hace infinita.

La curva tiene dos asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = -2$.

e) Trazado de la curva

De la ecuación $y = -\frac{x}{(x+2)(x-2)}$, resulta:

x	y
0	0
1	0.3
-1	-0.3
1.5	0.9
-1.5	0.9
± 2	∞
2.5	-1.1
-2.5	1.1
3	-0.6
-3	0.6
4	-0.3
-4	0.3



Ecuaciones factorizables

Si todos los términos de una ecuación, que se iguala a cero, se reúnen en uno solo en forma factorizada, es decir, como producto de dos o más factores variables, al igualar a cero cada uno de ellos, se obtienen los puntos de intersección con el eje x .

Intersecciones de curvas

Si dos curvas se cortan en uno o más puntos, denominados **puntos de intersección**, las coordenadas de cada punto común deben satisfacer ambas ecuaciones dadas de las curvas.

Para determinar los puntos de intersección entre dos curvas, se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones. Si el sistema de ecuaciones es incompatible, es decir, no tiene solución, las curvas no se cortan.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Factoriza la ecuación $x^3 - x^2y - xy + y^2 = 0$ y traza su gráfica.

Solución

Al factorizar x la ecuación, resulta:

$$\begin{aligned} x^2(x - y) - y(x - y) &= 0 \\ (x^2 - y)(x - y) &= 0 \\ x^2 - y = 0 &\quad y \quad x - y = 0 \end{aligned}$$

Al despejar x se tiene:

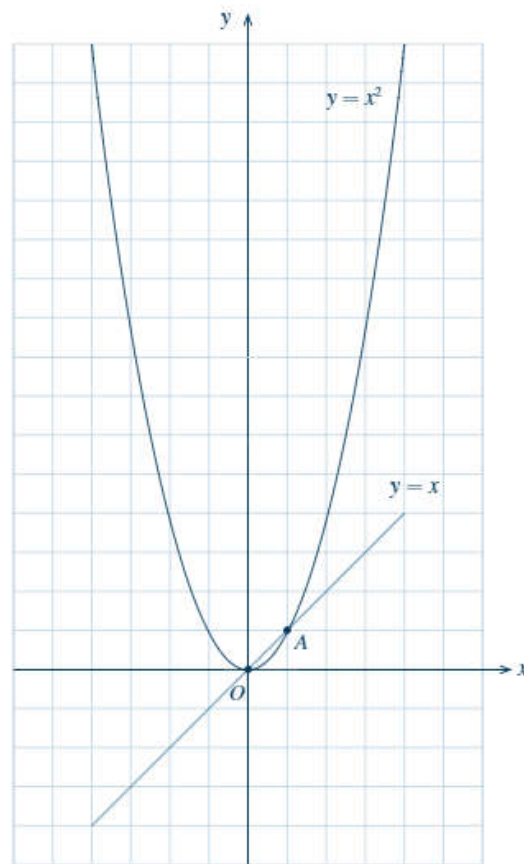
$$y = x^2 \quad y \quad y = x$$

Al despejar y y dar valores a x , se obtienen las siguientes tablas:

$y = x^2$	x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
	y	0	1	4	9	16	25

$y = x$	y	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
	x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4

Al representar gráficamente las ecuaciones anteriores, resulta:



Se observa que la curva $y = x^2$ y la recta $y = x$ se intersectan en los puntos $O(0,0)$ y $A(1,1)$.

- 2 •• Encuentra analítica y gráficamente los puntos de intersección para las curvas de las ecuaciones $x^2 + y^2 = 8$ y $y^2 = 2x$.

Solución

Sean las ecuaciones dadas:

$$x^2 + y^2 = 8 \quad (1)$$

$$y^2 = 2x \quad (2)$$

Se multiplica a (2) por -1 y se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 8 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r} y^2 = -2x \quad (2) \\ \hline x^2 = -2x + 8 \end{array}$$

Se iguala a cero la ecuación anterior:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Al resolver por factorización, resulta:

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x + 4 = 0$$

$$x_1 = -4$$

$$x - 2 = 0$$

$$x_2 = 2$$

Se sustituyen los valores de x_1 y x_2 en las ecuaciones originales, así:

Para $x_1 = -4$ en (2)

$$y^2 = 2x$$

$$y^2 = 2(-4)$$

$$y = \pm\sqrt{-8}$$

$$y = i$$

Para $x_2 = 2$ en (2)

$$y^2 = 2x$$

$$y^2 = 2(2)$$

$$y = \pm\sqrt{4}$$

$$y = \pm 2$$

Por lo tanto, las curvas se intersecan en los puntos $A(2,2)$ y $B(2,-2)$.

Al despejar a y y dar valores a x , se obtienen las siguientes tablas:

$$x^2 + y^2 = 8$$

$$y^2 = 8 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{8 - x^2}$$

x	y
0	± 2.82
± 1	± 2.64
± 2	± 2
± 2.5	± 1.32
± 3	i

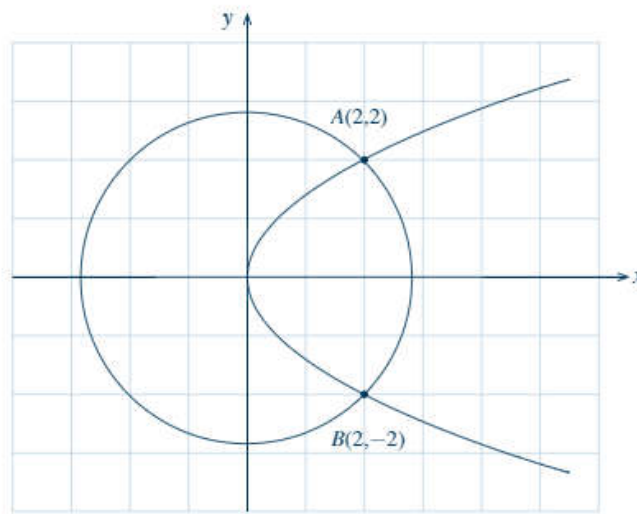
Para valores negativos de x , la variable y se hace imaginaria.

$$y^2 = 2x$$

$$y = \pm\sqrt{2x}$$

x	y
0	0
1	± 1.41
2	± 2
3	± 2.44
4	± 2.82
5	± 3.16

Al representar gráficamente las ecuaciones anteriores, resulta:



Se observa que las curvas $x^2 + y^2 = 8$ y $y^2 = 2x$ se intersectan en los puntos $A(2,2)$ y $B(2,-2)$.

Las curvas de los matemáticos

A continuación se representan varias curvas que los estudiantes deben conocer para el estudio y comprensión de las matemáticas.

Curvas algebraicas. Son aquellas que representan funciones algebraicas de dos variables x y y , es decir, son funciones constituidas por polinomios de coeficientes racionales.

Segundo orden

1. Circunferencia. Lugar geométrico de puntos equidistantes a un punto dado llamado centro.
2. Elipse. Lugar geométrico de todos los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es constante.
3. Hipérbola. Lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.
4. Parábola. Lugar geométrico de los puntos de un plano cuyas distancias a una recta dada, llamada directriz, y de un punto exterior a ella, llamado foco, son iguales.

Tercer orden

5. Trébol equilátero.
6. Cúbica de Agnesi o Versiera o Bruja.
7. Trisectriz de Mac Laurin, contribuyó a la solución gráfica del problema de la trisección del ángulo.
8. Tridente de Newton.
9. Parábola divergente.

Cuarto orden

10. Bicorne.
11. Caracol de Pascal: Curva concoide de un círculo dado.
12. Cardioide. Lugar de las proyecciones del origen sobre las tangentes a un círculo que pasa por ese origen (podaria).
13. Lemniscata de Bernoulli. Lugar geométrico de los puntos tales que el producto de cuyas distancias respecto de dos puntos fijos, llamados focos, es constante.
14. Cuártica piriforme.
15. Alforjas.
16. Trifolium.
17. Hipocicloide de tres alabeos. Lugar geométrico del punto de un círculo en el interior de un círculo tres veces mayor.
18. Óvalo de Descartes. Lugar de los puntos cuyas distancias r y r' respecto de dos puntos fijos están ligadas por una relación de la forma $ar + br' = c$.
19. Curva del Diablo.

Sexto orden

20. Curva de Talbot, antipodaria de la elipse.

Octavo orden

21. Toroide.

Trigésimo octavo orden

22. Curva de Moritz.

Curvas trascendentes. Son aquellas que representan funciones trascendentes (no algebraicas), tales como aquellas en las cuales las variables se manifiestan en líneas trigonométricas, en exponentes, en logaritmos, etcétera.

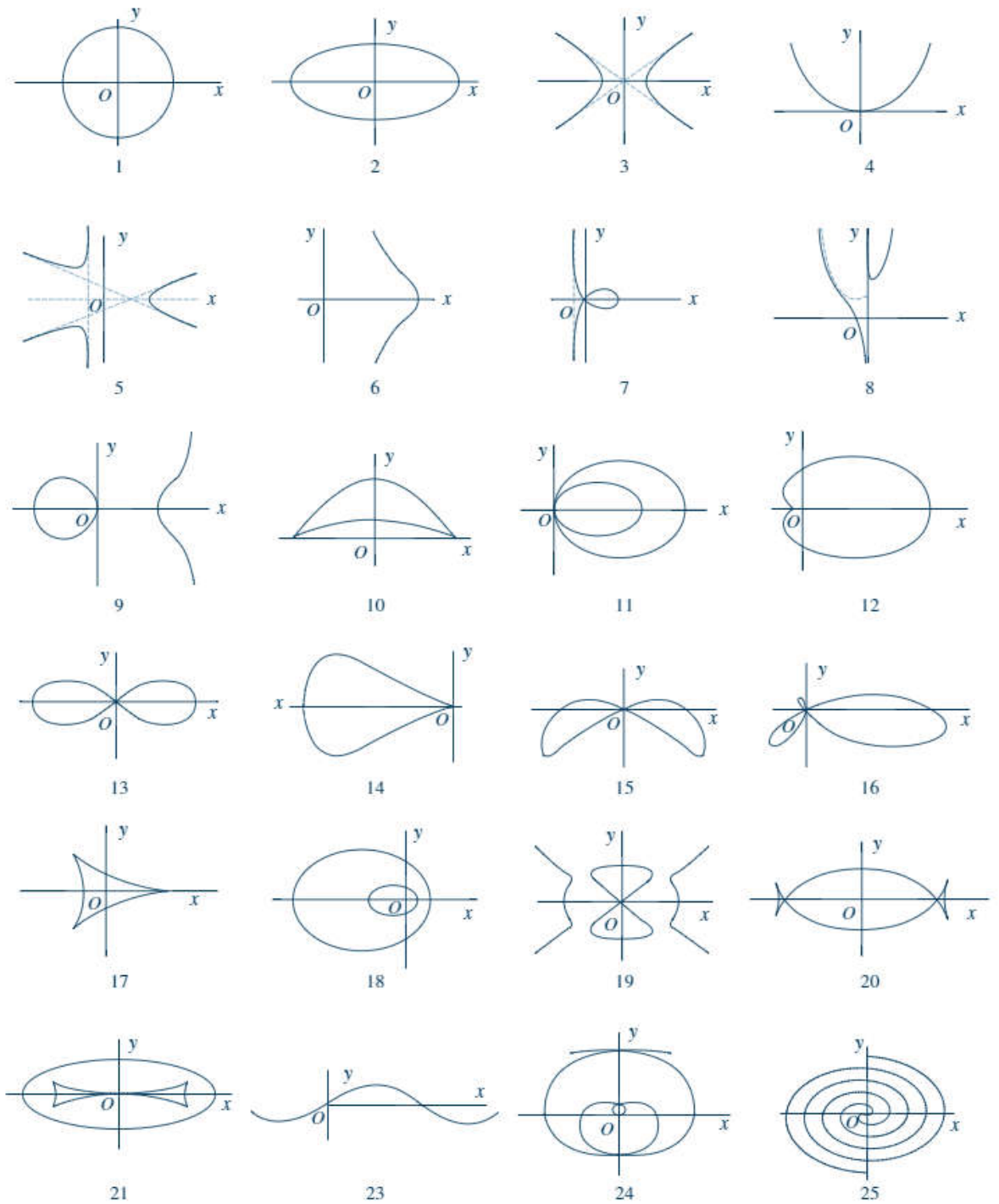
23. Sinusoide.
24. Espiral de Arquímedes.
25. Espiral de Fermat.

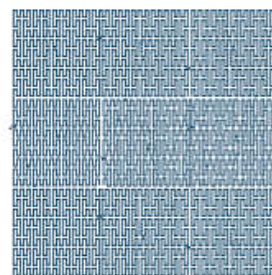
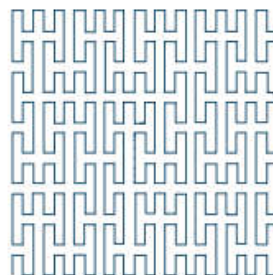
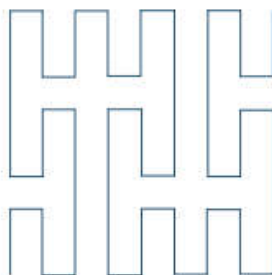
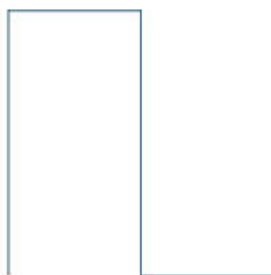
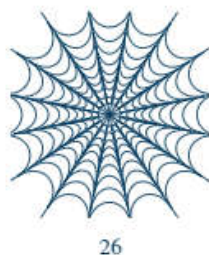
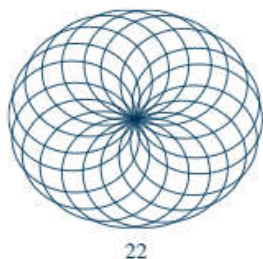
Representación de una ecuación diferencial. El interés que se tiene sobre esta familia de curvas se debe a lo maravilloso que resulta su representación gráfica.

26. Ecuación diferencial.

Las curvas monstruosas. Son aquellas que los matemáticos imaginaron y que resultan de sus muy particulares curiosidades, por ejemplo, la curva de cristal de nieve y la curva de Peano.

Las curvas de los matemáticos





EJERCICIO 7

- I. Discute las siguientes ecuaciones, analiza las intersecciones con los ejes coordenados así como, la simetría, la extensión de la curva, las asíntotas y traza la gráfica correspondiente.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $4x^2 + 5y^2 - 20 = 0$

2. $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$

3. $4x^2 - y = 0$

4. $x^2 - y^2 = 16$

5. $x = y^3 + y^2 - 9y - 9$

6. $12y^3 - x = 0$

7. $y^3 - y - x = 0$

8. $x - y^4 + 9y^2 = 0$

9. $y^2 - 6y + x^2 = 0$

10. $x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0$

11. $y^3 + y \times x = 0$

12. $xy - 3y - x = 0$

13. $x^4 - 4x^2 - y = 0$

14. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y = 1$

15. $x^2 - xy + 5y = 0$

16. $y^3 - x^2 + 3y^2 + 2x + 3y = 0$

17. $xy - 2x - 3 = 0$

18. $xy - 2y - 1 = 0$

- II. Factoriza las siguientes ecuaciones y traza la gráfica correspondiente.

1. $x^2y + x^2 - xy^2 + xy + 2x = 0$

2. $x^2 + 2xy + y^2 = 1$

3. $y^2 - 4x^2 = 0$

4. $9y^2 - 2x^2 = 0$

5. $4x^2 - 9y^2 = 0$

6. $x^3 + x^2 + 2xy^2 + 2y^2 - 4x - 4 = 0$

- III. Encuentra analítica y gráficamente los puntos de intersección para las siguientes curvas.

1. $6x - 4y + 12 = 0; 2y^2 + 8y + 2x + 14 = 0$

2. $x + y - 5 = 0; 3x + 3y + 7 = 0$

3. $x^2 + y^2 = 4; x^2 - y^2 = 1$

4. $x^2 + y^2 = 13; xy = 6$

5. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0; 3x - y - 8 = 0$



Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

• PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Escribe los números correspondientes

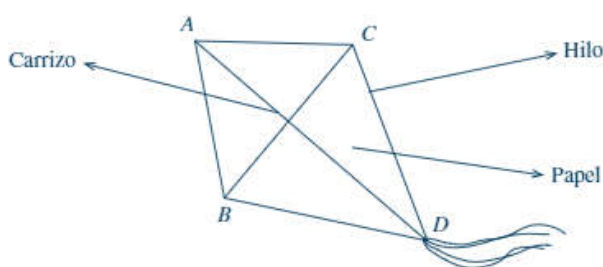
Competencias genéricas

Competencias disciplinares

- 1 ●● Un agricultor quiere dividir un campo rectangular cuyas coordenadas de sus vértices son: $A(-1,2)$, $B(7,2)$, $C(-1,-4)$ y $D(7,-4)$ en ocho parcelas triangulares iguales, pero no sabe cómo hacerlo. Su sobrino le dice, que una manera de lograrlo es unir los puntos medios de los lados opuestos y trazar las diagonales del rectángulo.

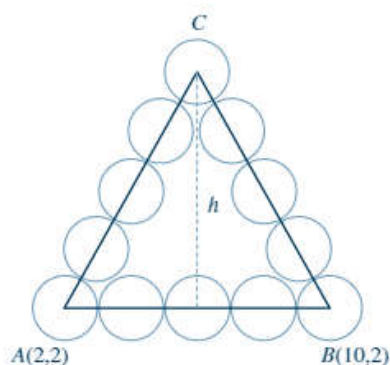
- Traza el rectángulo y comprueba que es correcto el consejo del sobrino.
- Calcula el perímetro de cada una de las parcelas, si se sabe que el centro del campo es el punto $P(3,-1)$.
- ¿Cuánto mide el área de cada una de las parcelas?
- ¿Cuánto mide el área total del campo?

- 2 ●● Un papalote diseñado sobre un plano cartesiano tiene por coordenadas $A\left(-\frac{7}{2}, 3\right)$, $B\left(-\frac{5}{2}, -5\right)$, $C\left(\frac{9}{2}, 1\right)$ y $D(9, -11)$.



Es necesario conocer:

- La cantidad de carrizo necesaria para la estructura.
 - La longitud de hilo para los contornos sin considerar los amarres.
 - La cantidad de papel para la cara plana del papalote.
- 3 ●● En un almacén se deben colocar tubos de drenaje de 2 metros de diámetro los cuales se apilan formando un triángulo equilátero, como se muestra en la siguiente figura y cuyos vértices de la base son $A(2,2)$ y $B(10,2)$.



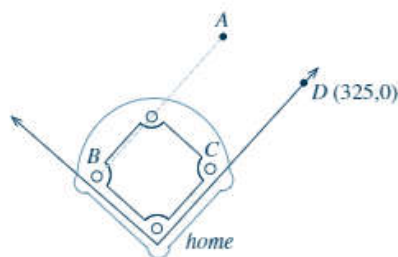
- ¿Qué altura debe tener el almacén?
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto C ?
- ¿Cuánto mide el triángulo rectángulo de la figura?
- ¿Cuántos tubos se apilan en total?

- 4 ●● Dos personas, después de hablar por teléfono, deciden encontrarse en la puerta de un restaurante $R(-2,7)$. Si el que vive en $A(5,3)$ sigue el camino ACR siendo $C(2,0)$ y el que vive en $B(-7,-2)$ lo hace por el camino BR . Suponemos que ambos salen al mismo tiempo y que caminan a la misma velocidad.

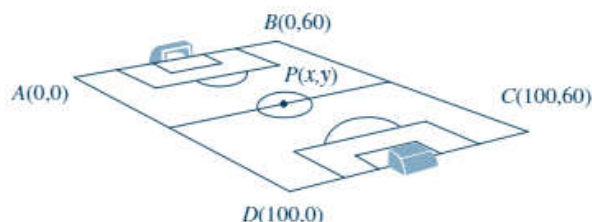
- ¿Cuál de las dos personas llegará primero?
- Si el que vive en A hubiera seguido el camino AR , ¿qué distancia recorrería?
- Encuentra el área de los triángulos ACR y BCR .

- 5 ●● Si un jardinero derecho lanza la pelota desde el punto $A(280,20)$ a la tercera base que se ubica sobre el eje x en el punto $B(0,90)$. Si se sabe que la barda del jardín derecho que se ubica sobre el eje x en el punto $D(325,0)$, también se encuentra la primera base en el punto $C(90,0)$; lo anterior es válido si el sistema de coordenadas tiene en *home* su origen.

- ¿Qué distancia recorrió la pelota de A hacia B ?
- ¿Qué distancia recorre la pelota de B hacia C ?
- ¿Qué distancia recorre la pelota de D hacia B ?
- ¿Cuánto mide el perímetro del triángulo ABC ?

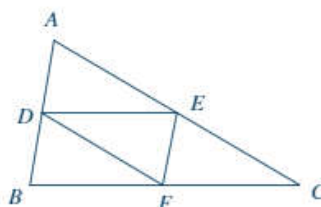


- 6 ●● Un campo de fútbol suele medir 100 yardas de largo y 60 de ancho. Supón que el sistema coordenado se asigna a los esquemas del campo como se muestra en la figura.

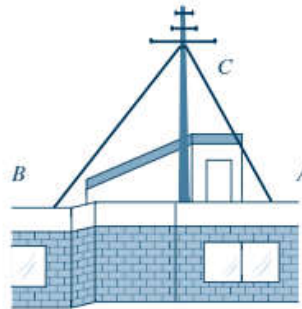


- ¿Cuáles son las coordenadas del centro del campo?
- ¿Cuánto mide el área total del campo?
- ¿Cuánto mide el área del triángulo APB ?

- 7 ●● Supón que D , E y F son puntos medios. Si la $d\overline{AB} = 4$ metros, en $d\overline{AC} = 5$ metros y la $d\overline{BC} = 6$ metros, determina $d\overline{DE} + d\overline{EF} + d\overline{DF}$.



- 8 ●● Para el tendido de cable eléctrico sobre un terreno montañoso se requieren cinco postes, los cuales deben estar separados a iguales distancias. Si uno de los extremos del cable es el punto $A(9,5)$ y el otro extremo es $B(-13,1)$, encuentra las coordenadas de los puntos donde deben colocarse los 5 postes desde B hacia A .
- 9 ●● Los propietarios de un condominio han observado que uno de los dos cables de su antena colectiva de televisión se ha roto. Haciendo uso de los puntos de amarre $A(5,1)$, $B(0,10)$ y $C(-6,-1)$, determina:
- La longitud del cable que se ha de reponer.
 - La altura que tiene el mástil de la antena desde la base al punto B .
 - El área total del triángulo ABC .



- 10 ●● Determina las asíntotas horizontales y verticales de la curva cuya ecuación es: $xy - 2y = 8$.
- 11 ●● Encuentra analítica y gráficamente los puntos de intersección para las curvas dadas por las ecuaciones: $y = x^2$ y $x - y = -2$.
- 12 ●● Encuentra analítica y gráficamente los puntos de intersección para las curvas dadas por las ecuaciones: $x + y - 7 = 0$ y $xy - 6 = 0$.

Autoevaluación

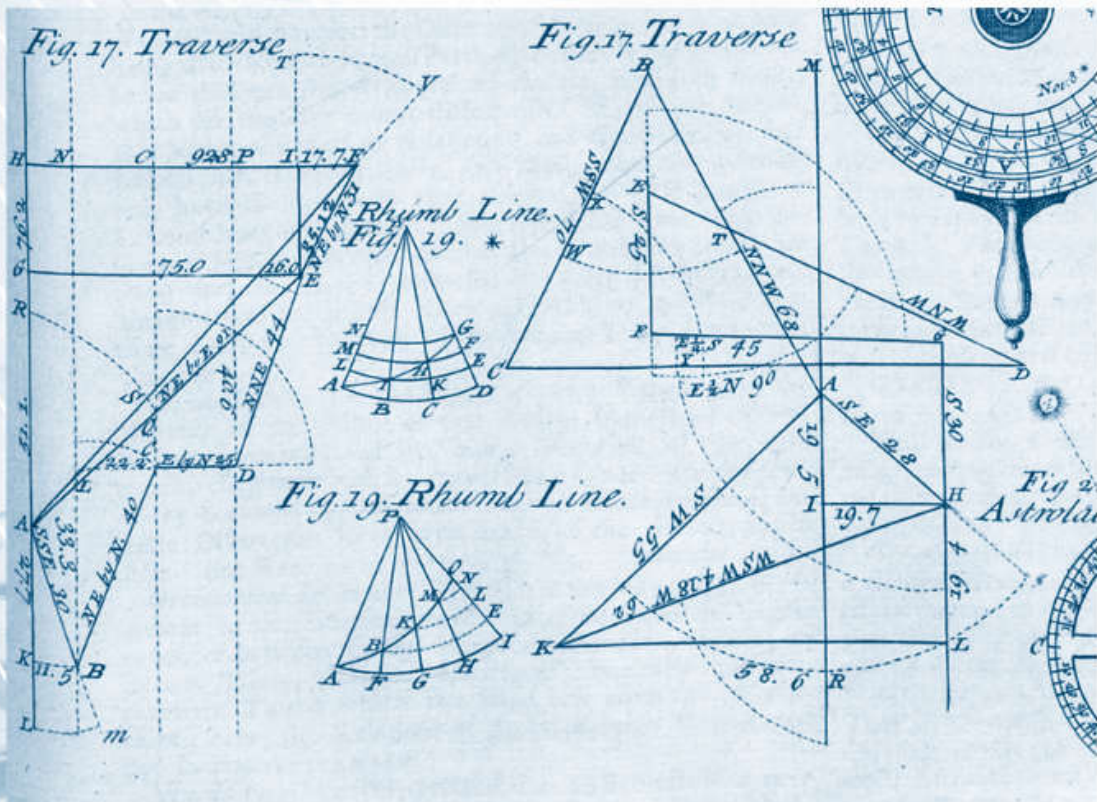
1. ¿En qué cuadrante se localizan los puntos $P(-3, -2)$, $Q(-5, 6)$, $R(2, 4)$, $S(-7, -6)$ y $T(3, -9)$?

2. Encuentra las coordenadas del punto medio del segmento determinado por los puntos $M(5, 6)$ y $N(-8, -2)$.

3. Un avión viaja en línea recta, se encuentra a 300 km del punto de partida cuya coordenada es $A(7, 2)$ y a 450 km de su destino con coordenada $C(-8, -4)$. ¿Cuáles son las coordenadas del sitio donde se encuentra el avión?

4. Determina los posibles valores de x si el punto $(x, -4)$ se encuentra a una distancia de 8 del punto $(5, 2)$.

UNIDAD 2



La línea recta

Evaluación diagnóstica

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. Explica cuándo dos rectas son paralelas y cuándo son perpendiculares.
2. Un niño con bicicleta desciende por un camino recto cuya pendiente es del 11%, si el niño ha descendido una distancia de 600 m. ¿Cuál es el cambio en la distancia original?
3. Si la pendiente de una recta es 2, calcula su ángulo de inclinación.
4. Explica qué son las coordenadas polares.
5. Señala la diferencia entre pendiente y ángulo de inclinación.

La línea recta

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Combine técnicas del álgebra y la geometría para estudiar situaciones.
- Identifique los elementos de la línea recta.
- Identifique y calcule los elementos de una línea recta, determine la pendiente y su ecuación, así como los ángulos entre dos rectas.
- Identifique y calcule los elementos básicos de un triángulo, tales como los ángulos interiores, ángulos exteriores, perímetro y área.
- Comprenda que el lenguaje geométrico le permite modelar diversas situaciones.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Concepto de pendiente y ángulo de inclinación.
- Determinación de la ecuación de la recta.
- Definición de la ecuación de la recta en la forma normal.
- Definición de la ecuación de la recta en la forma polar.
- Definición del ángulo de intersección entre dos rectas.
- Familias de rectas.
- Aplicaciones de la forma normal de la ecuación de la recta.
- Rectas y puntos notables de un triángulo.

Contenidos procedimentales

- Identificará diversas estructuras geométricas y las empleará para hacer conjeturas.
- Interpretará resultados a partir de modelos matemáticos en un contexto de geometría.
- Utilizará terminología y notación matemática propia de la geometría.
- Elaborará y usará estrategias de resolución de problemas como: hacer diagramas, hacer conjeturas, dividir un problema en subproblemas más sencillos, llevar un problema a uno ya conocido.
- Aprenderá a deducir las formas de la ecuación de una recta y sus transformaciones.
- Usará la intersección y relación de rectas a la hora de resolver problemas de aplicación.
- Usará diversas estrategias de resolución de problemas y formulará respuestas a través de la interpretación de representaciones gráficas.

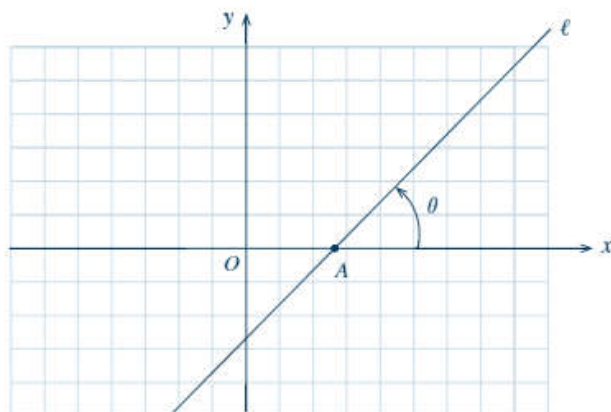
Contenidos actitudinales

- Colaborará con sus compañeros al resolver problemas.
- Respeto al trabajar en clase.
- Responsabilidad en el proceso enseñanza-aprendizaje.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros
- Contribuye con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Pendiente y ángulo de inclinación

Ángulo de inclinación

Sea ℓ una recta no paralela al eje x y que interseca a éste en el punto A .



La dirección de la recta con relación a los ejes coordenados puede indicarse si se conoce el ángulo $\theta < 180^\circ$ que se obtiene al girar la semirrecta $\overrightarrow{AX}$ en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta coincidir con la recta ℓ . Por lo tanto, este ángulo θ se denomina inclinación de la recta ℓ .

Pendiente de una recta

Se denomina pendiente o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación. La notación de pendiente es la letra m y de acuerdo a la definición se expresa como $m = \tan \theta$.

Criterios de aplicación sobre la pendiente

Como el ángulo θ de inclinación de la recta puede tomar cualquier valor entre $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$, por lo que los siguientes criterios facilitan la comprensión del comportamiento de la pendiente en el sistema de coordenadas rectangulares.

- a) m es un número positivo, si $0^\circ < \theta < 90^\circ$.
- b) m es un número negativo, si $90^\circ < \theta < 180^\circ$.
- c) $m = 0$, si $\theta = 0^\circ$.
- d) $m = \infty$, si $\theta = 90^\circ$.

La pendiente se define matemáticamente por el siguiente:

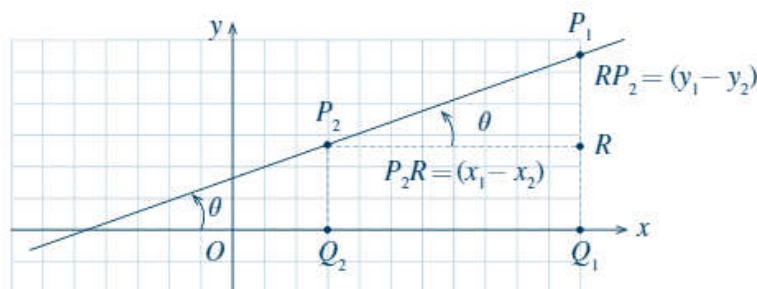
Teorema

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de dicha recta es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \text{ donde } x_1 \neq x_2.$$

Demostración del teorema

Al considerar la recta ℓ que se determina por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, donde θ es su ángulo de inclinación, se tiene:



Si por P_1 y P_2 trazamos perpendiculares al eje x (P_1Q_1 y P_2Q_2) y por P_2 se traza una paralela al eje x que corta al segmento P_1Q_1 en R . Sea θ el ángulo formado por P_1P_2R y por trigonometría, resulta:

$$m = \tan \theta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}} = \frac{RP_1}{P_2R}$$

Las coordenadas de los puntos $Q_1(x_1, 0)$, $Q_2(x_2, 0)$ y $R(x_1, y_2)$, por lo tanto: $RP_1 = (y_1 - y_2)$ y $P_2R = Q_2Q_1 = (x_1 - x_2)$; sustituyendo los valores anteriores en la ecuación de la pendiente, se demuestra el teorema, es decir:

$$m = \tan \theta = \frac{RP_1}{P_2R} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Valor del ángulo de inclinación

A partir de la ecuación $m = \tan \theta$, se despeja θ para conocer el ángulo de inclinación, es decir:

$$\theta = \arctan m$$

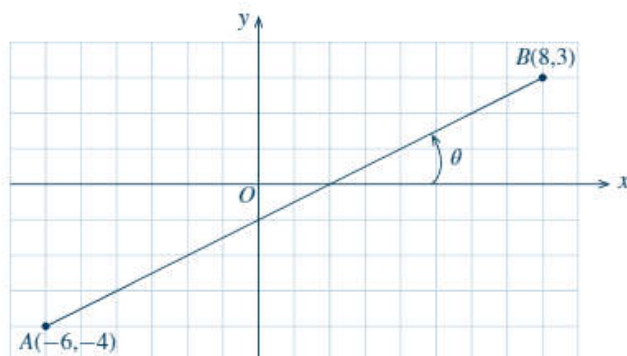
EJEMPLOS

Ejemplos

1. Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que se forma con los puntos $A(-6, -4)$ y $B(8, 3)$.

Solución

Al elaborar la gráfica de los puntos dados, se tiene:



Al sustituir los datos en la fórmula de la pendiente, resulta:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-4 - 3}{-6 - 8} = \frac{-7}{-14}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

Para determinar el ángulo de inclinación, se utiliza la siguiente ecuación:

$$\theta = \arctan m$$

$$\theta = \arctan \frac{1}{2} = \arctan (0.5)$$

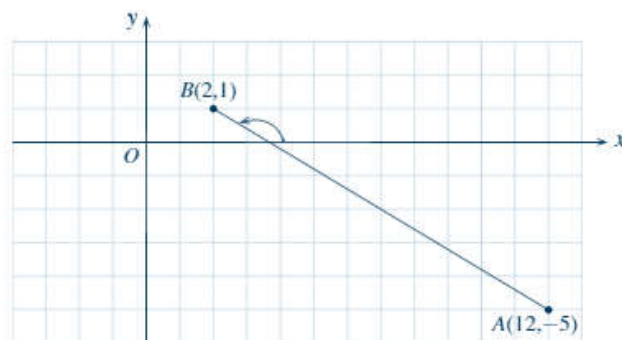
$$\theta = 26^{\circ} 33' 54''$$

Como m es positiva, el ángulo θ es mayor que 0° pero menor que 90° .

- 2 ••• Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que une a los puntos $A(12, -5)$ y $B(2, 1)$.

Solución

Al elaborar la gráfica de los puntos dados, se tiene:



Al sustituir los datos en la fórmula de la pendiente, resulta:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-5 - 1}{12 - 2} = \frac{-6}{10}$$

$$m = -\frac{3}{5}$$

Para determinar el ángulo de inclinación, se utiliza la siguiente ecuación:

$$\theta = \arctan m$$

$$\theta = \arctan m \left(-\frac{3}{5} \right) = \arctan (-0.6)$$

$$\theta = -30^{\circ} 5' 49''$$

Como m es negativa, el ángulo θ es mayor que 90° pero menor que 180° , por lo que el ángulo encontrado deberá restarse a 180° .

- 3 ●● Traza la recta que pasa por el punto $A(-3, -2)$ y que tiene una pendiente igual a $\frac{4}{5}$.

Solución

De la definición de pendiente, se tiene:

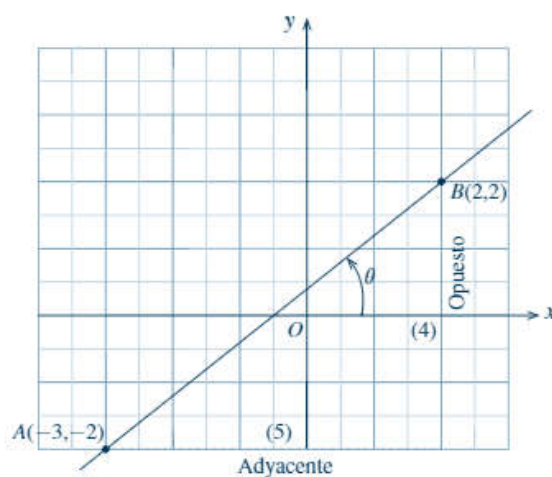
$$m = \tan \theta$$

$$\frac{4}{5} = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}} = \left(\frac{y}{x} \right)$$

Dado que la pendiente es positiva, el ángulo de inclinación de la recta es:

$$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$$

Al graficar el punto dado y la pendiente, se determinan las coordenadas del punto B que también pertenece a la recta. Así,



Por lo tanto, el punto $B(2, 2)$ es un cálculo geométrico.

- 4 ●● Una recta de pendiente igual a -2 pasa por el punto $A(5, -2)$; la abscisa de otro punto de la recta es 1. Encuentra su ordenada.

Solución

Sea $B(1, y)$ el otro punto de la recta dada, entonces, al sustituir los datos dados en la fórmula de la pendiente, resulta:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$-2 = \frac{-2 - y}{5 - 1}$$

$$-2 = \frac{-2 - y}{4}$$

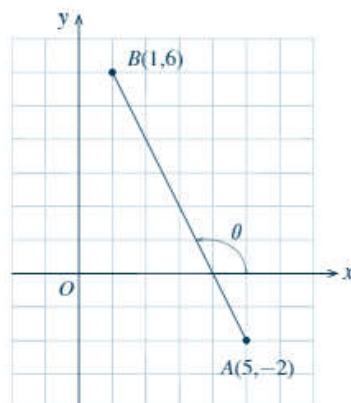
$$-8 = -2 - y$$

$$y = -2 + 8$$

$$y = 6$$

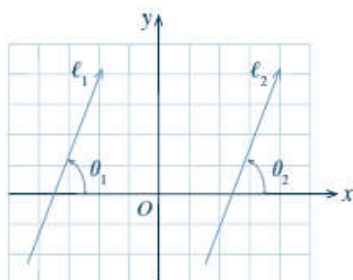
Las coordenadas del otro punto son $B(1, 6)$.

Al elaborar la gráfica de los datos y resultados, se tiene:



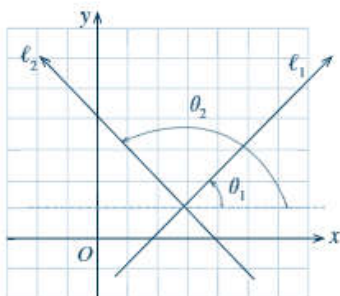
Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

1. Si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales. Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas sólo si sus inclinaciones son idénticas; si las pendientes de las rectas son m_1 y m_2 , la condición de paralelismo establece que $m_1 = m_2$.



Como ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas sus inclinaciones θ_1 y θ_2 son iguales, es decir, $\theta_1 = \theta_2$ y en consecuencia $\tan \theta_1 = \tan \theta_2$, por lo tanto, $m_1 = m_2$.

2. Dos rectas son perpendiculares entre sí si la pendiente de una de las rectas es recíproca y de signo contrario a la pendiente de la otra recta.



Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas perpendiculares, donde una excede de la otra en 90° , es decir, en cualquiera de los casos $\theta_1 = \theta_2 + 90^\circ$ o $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$, por lo tanto:

$$\tan \theta_1 = -\cot \theta_2 = -\frac{1}{m_2}$$

$$\tan \theta_1 = -\frac{1}{\tan \theta_2}, \text{ y como:}$$

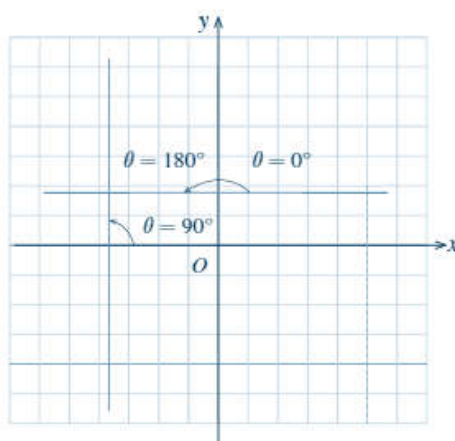
$\tan \theta_1 = m_1$ y $\tan \theta_2 = m_2$, entonces:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

De igual forma, dos rectas son perpendiculares entre sí, cuando el producto de sus pendientes es igual a -1 .

$$m_2 = -1$$

3. Toda recta perpendicular al eje x no tiene pendiente, es decir, la pendiente de una recta paralela al eje y es indefinida.



Dos rectas paralelas respectivamente a los ejes x y y , son, por supuesto, perpendiculares. Se hace notar que la pendiente de la recta paralela al eje x es cero, puesto que $\tan 0^\circ = \tan 180^\circ = 0$; en tanto, la pendiente de la otra recta paralela al eje y es indefinida.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Demuestra por medio de pendientes, que los puntos $A(3, -6)$, $B(11, -5)$, $C(9, 2)$ y $D(1, 1)$ son vértices de un paralelogramo.

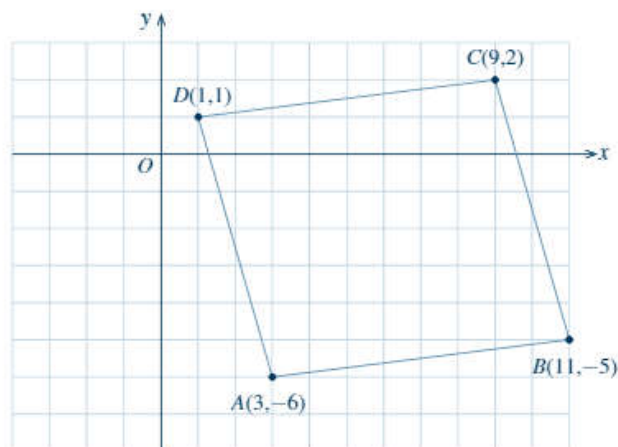
Solución

Al elaborar la gráfica los puntos dados, se tiene:

Se determina la pendiente de los lados del paralelogramo, es decir:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-6 + 5}{3 - 11} = \frac{-1}{-8}$$

$$m_{\overline{AB}} = \frac{1}{8}$$



$$m_{\overline{BC}} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-5 - 2}{11 - 9} = \frac{-7}{2}$$

$$m_{\overline{BC}} = -\frac{7}{2}$$

$$m_{\overline{AD}} = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{-6 - 1}{3 - 1} = \frac{-7}{2}$$

$$m_{\overline{AD}} = -\frac{7}{2}$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{2 - 1}{9 - 1} = \frac{1}{8}$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{1}{8}$$

$$m_{\overline{AB}} = m_{\overline{CD}}$$

$$m_{\overline{BC}} = m_{\overline{AD}}$$

Se demuestra que dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.

Un paralelogramo se define como un cuadrilátero de lados opuestos paralelos, por lo que se demuestra que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

- 2 ••• Una recta ℓ_1 pasa por los puntos $P(5,3)$ y $Q(-6,4)$; otra recta ℓ_2 pasa por el punto $A(-3,4)$ y el punto B cuya abscisa es 4. Encuentra la ordenada de B , si se sabe que ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2 .

Solución

Si ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2 , se establece que sus pendientes son recíprocas y de signo contrario, por tanto, al determinar la pendiente de ℓ_1 , se tiene:

$$m_{\overline{PQ}} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{3 + 4}{5 + 6} = \frac{7}{11}$$

La pendiente de ℓ_2 se determina por la condición de perpendicularidad, es decir:

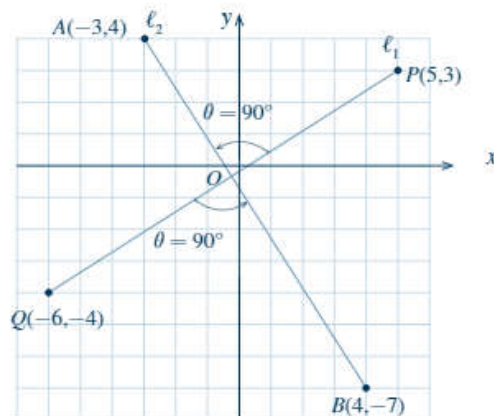
$$m_{\overline{AB}} = -\frac{1}{m_{\overline{PQ}}}$$

$$m_{\overline{AB}} = -\frac{1}{7} \quad m_{\overline{AB}} = -\frac{11}{7}$$

Al aplicar la ecuación de la pendiente, se determina la ordenada del punto B .

Su representación gráfica es:

$$\begin{aligned} m_{\overline{AB}} &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \\ -\frac{11}{7} &= \frac{4 - y}{-3 - 4} \\ -\frac{11}{7} &= \frac{4 - y}{-7} \\ \frac{(-11)(-7)}{7} &= 4 - y \\ 11 &= 4 - y \\ y &= 4 - 11 \\ y &= -7 \end{aligned}$$



Las coordenadas del punto B son $(4, -7)$.

EJERCICIO 8

I. Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación para las rectas que se forman con los siguientes puntos:

1. $A(-5, -2)$ y $B(7, 5)$
2. $A(-8, 4)$ y $B(4, -2)$
3. $A(0, 3)$ y $B(11, -1)$
4. $P_1(3, -4)$ y $P_2(1, 2)$
5. $M(7, 8)$ y $N(4, 3)$
6. $P(7, 4)$ y $Q(1, -2)$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

II. Demuestra, por medio de las pendientes, que los siguientes puntos son colineales.

1. $A(-2, 3)$, $B\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ y $C(6, -3)$
2. $A(7, -9)$, $B(2, -2)$ y $C(-3, 5)$
3. $K(-4, 7)$, $L(2, 2)$ y $M\left(5, -\frac{1}{2}\right)$
4. $Q(2, 7)$, $R(4, 3)$ y $S(6, -1)$

III. Resuelve los siguientes problemas.

1. Una recta de pendiente $\frac{8}{7}$ pasa por el punto $A(3, 2)$; la abscisa de otro punto B de la recta es -4 ; calcula su ordenada.
2. Una recta de pendiente $-\frac{2}{3}$ pasa por el punto $A(-2, 5)$; la ordenada de otro punto B de la recta es uno, calcula su abscisa.
3. Una recta de pendiente $-\frac{6}{5}$ pasa por el punto $P(3, -5)$ y por los puntos A y B . Si la ordenada de A es -2 y la abscisa de B es -2 , ¿cuál es la abscisa de A y cuál la ordenada de B ?
4. Una recta pasa por los dos puntos $A(1, 4)$ y $B(4, 5)$. Si un punto P de abscisa -5 pertenece a la recta, ¿cuál es su ordenada?
5. Construye la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la recta que pasa por los puntos $A(-7, 1)$ y $B(1, -6)$.
6. Demuestra por pendientes que los puntos $A(-2, 1)$, $B(2, 5)$ y $C(8, -1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, encuentra su área y perímetro.
7. Determina la pendiente de las siguientes rectas cuya inclinación es:
a) $\frac{3\pi}{4}$ b) 120° c) $\frac{\pi}{2}$ d) 60° e) $\frac{\pi}{4}$ f) 30°
8. Determina el ángulo de inclinación para las siguientes rectas cuya pendiente es:
a) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) ∞ c) 0 d) 2.144506 e) 1.428148
9. Los vértices de un triángulo son $P(7, -2)$, $Q(-2, -8)$ y $R(1, 6)$; encuentra la pendiente de cada lado y la pendiente de cada una de las tres medianas de dicho triángulo.
10. Calcula la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$, que pertenezca a la recta que pasa por el punto $A(3, -1)$ y que tiene una pendiente igual a 4 .
11. Dadas las siguientes rectas que pasan por los puntos A y B , así como las definidas por los puntos M y N ; determina si son paralelas o perpendiculares entre sí.
a) $A(4, 1)$, $B(-2, 5)$ y $M(3, 7)$, $N(-1, 1)$
b) $A(-7, 1)$, $B(1, -6)$ y $M(-4, -6)$, $N(3, 2)$
c) $A(2, 4)$, $B(6, -2)$ y $M(1, -1)$, $N(7, 3)$

d) $A(2,2)$, $B(9,9)$ y $M(6,5)$, $N(5,6)$

e) $A(0,-2)$, $B(5,2)$ y $M(-3,1)$, $N\left(0,\frac{17}{5}\right)$

12. Traza las siguientes rectas que pasan por el punto dado y cuya pendiente se indica:

a) $A(6,-2)$ y $m = -\frac{3}{4}$

e) $L(-2,3)$ y $m = -\frac{4}{5}$

b) $P(2,1)$ y $m = \frac{3}{4}$

f) $A(4,0)$ y $m = -3$

c) $Q(3,4)$ y $m = \frac{2}{3}$

g) $A(0,5)$ y $m = 2$

d) $R(2,-7)$ y $m = -4$

h) $M(7,3)$ y $m = -\frac{2}{5}$

13. Demuestra, por medio de pendientes, que los puntos dados son los vértices de un paralelogramo.

a) $A(4,6)$, $B(2,-2)$, $C(-11,-1)$ y $D(-3,-9)$

b) $A(2,4)$, $B(6,2)$, $C(8,6)$ y $D(4,8)$

c) $K(-1,-2)$, $L(0,1)$, $M(-3,2)$ y $N(-4,1)$

14. Demuestra que los puntos dados son los vértices de un rombo, y que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

a) $A(6,5)$, $B(9,9)$, $C(5,6)$ y $D(2,2)$

b) $A(-1,1)$, $B(3,1)$, $C(1,4.46)$ y $D(1,-2.46)$

c) $K(5,0)$, $L(0,2)$, $M(-5,0)$ y $N(0,-2)$

15. Demuestra que los puntos dados son los vértices de un cuadrado, y que sus diagonales son perpendiculares y se dividen mutuamente en partes iguales.

a) $A(2,4)$, $B(7,3)$, $C(6,-2)$ y $D(1,-1)$

b) $K(4,-2)$, $L(7,2)$, $M(3,5)$ y $N(0,1)$

c) $P(-a,a)$, $Q(a,a)$, $R(a,-a)$ y $S(-a,-a)$

16. Una recta ℓ_1 , pasa por los puntos $A(3,2)$ y $B(-4,-6)$; otra recta ℓ_2 pasa por el punto $P(7,1)$ y el punto Q cuya ordenada es 6. Encuentra la abscisa del punto Q , si se sabe que ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2 .

17. Demuestra que el punto $A(-5,3)$ está sobre la mediatriz del segmento cuyos extremos son $P(2,5)$ y $Q(-3,-4)$.

18. Encuentra la pendiente de la recta perpendicular a la recta formada por los puntos $A(1,3)$ y $B(2,4)$.

19. Encuentra la pendiente de la recta paralela a la recta formada por los puntos $A(2,1)$ y $B(-4,-3)$.

20. Representa gráficamente la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta formada por los puntos $A(6,-2)$ y $B(-4,5)$.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Determinación de la ecuación de la recta

Línea recta

Se define como la **distancia más corta entre dos puntos**. Analíticamente es una ecuación de primer grado con dos variables que gráficamente se define como el lugar geométrico de la sucesión de puntos, tales que tomados dos puntos cualesquiera diferentes $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del lugar, el valor de la pendiente, m , es siempre constante.

Ecuación punto-pendiente para construir la ecuación de una recta

La recta se determina cuando se conoce uno de sus puntos y su dirección; analíticamente, la ecuación de la recta se determina cuando se conocen las coordenadas de uno de sus puntos y su ángulo de inclinación o pendiente.

Teorema

La recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ cuya pendiente es m , satisface la fórmula:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

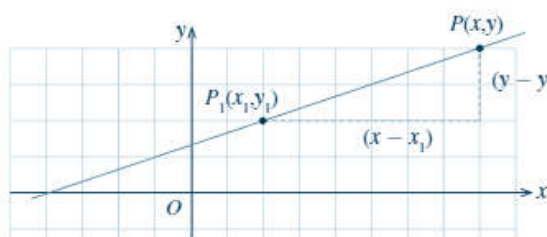
De la cual, se obtiene la ecuación de la recta:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Demostración

Sean $P(x, y)$ y $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera y el punto dado, respectivamente, de una recta.

Al elaborar la gráfica, se tiene:



La pendiente de la recta PP_1 es:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

al eliminar el denominador, resulta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -4)$ cuya pendiente es igual a $-\frac{1}{3}$.

Solución

Al sustituir los datos dados en la ecuación punto-pendiente de la recta, resulta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 4 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$3(y + 4) = -1(x - 2)$$

$$3y + 12 = -x + 2$$

$$x + 3y + 12 - 2 = 0$$

$$x + 3y + 10 = 0$$

Al representar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 ••• Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-5, 2)$ y tiene un ángulo de inclinación igual a $\frac{3\pi}{4}$.

Solución

Como $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$, a partir de la definición de pendiente, se tiene:

$$m = \tan \theta$$

$$m = \tan 135^\circ$$

$$m = -1$$

Al sustituir en la ecuación punto-pendiente de la recta, resulta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

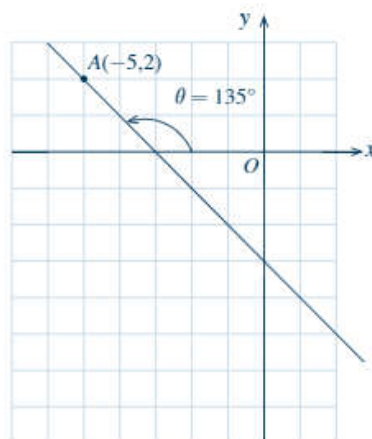
$$y - 2 = -1(x + 5)$$

$$y - 2 = -x - 5$$

$$x + y - 2 + 5 = 0$$

$$x + y + 3 = 0$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



Ecuación pendiente-ordenada en el origen de una recta

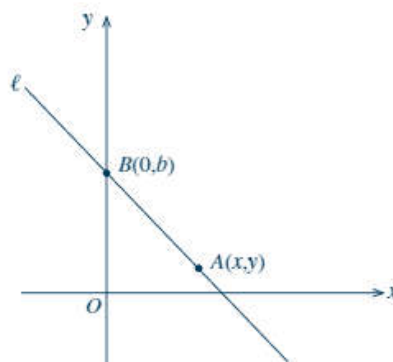
Al aplicar la ecuación punto-pendiente para una recta ℓ , cuya pendiente es m y pasa por el punto $B(0,b)$, se tiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$x - b = mx$$

$$y = mx + b$$



Esta forma de la ecuación de la recta es la ecuación punto-pendiente, también se le denomina forma **común** o **ecuación de la recta en forma simplificada**.

Teorema

La ecuación de la recta cuya pendiente es m , tiene su ordenada en el origen b , es:

$$y = mx + b$$

Una recta paralela al eje y no tiene ordenada en el origen, por lo anterior, la ecuación no se aplica, en este caso, su ecuación es:

$$x = a$$

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Encuentra la ecuación de la recta que tiene una pendiente igual a $-\frac{2}{7}$ cuya intersección con el eje y es 3.

Solución

Al sustituir los datos dados en la ecuación pendiente-ordenada en el origen de la recta, resulta:

$$y = mx + b$$

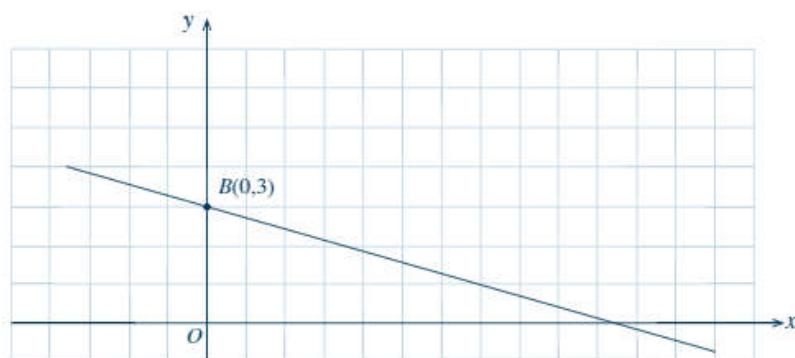
$$y = -\frac{2}{7}x + 3$$

$$y = \frac{-2x + 21}{7}$$

$$7y = -2x + 21$$

$$2x + 7y - 21 = 0$$

Al elaborar la gráfica, se tiene:



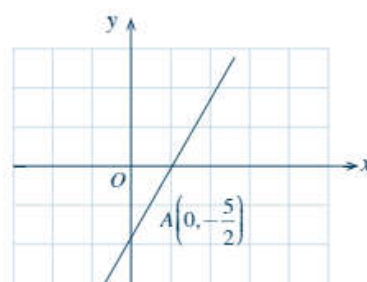
- 2 ••• Encuentra la ecuación de la recta que tiene una pendiente igual a 2 cuya intersección con el eje y es $-\frac{5}{2}$.

Solución

Al sustituir los datos dados en la ecuación pendiente-ordenada en el origen de la recta, resulta:

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ y &= 2x - \frac{5}{2} \\ y &= \frac{4x - 5}{2} \\ 2y &= 4x - 5 \\ 4x - 2y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Al elaborar la gráfica, se tiene:



Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados

Por geometría, la recta queda perfectamente determinada por dos cualesquiera de sus puntos; analíticamente, la ecuación de una recta también queda perfectamente determinada cuando se conocen las coordenadas de dos cualesquiera de sus puntos.

Teorema

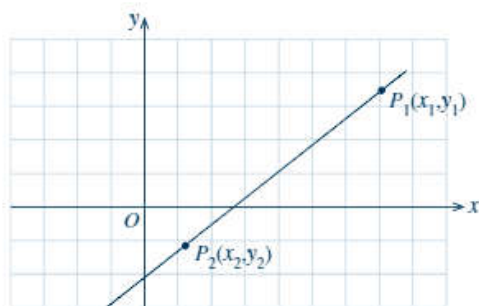
La ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

A esta forma de la ecuación de la recta, también se le denomina **cartesiana**.

Demostración

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera de una recta, cuya pendiente es:



$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (x_1 \neq x_2)$$

Al sustituir m en la ecuación punto-pendiente de la recta, resulta:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) (x - x_1)$$

Si $x_1 = x_2$, la ecuación anterior no se puede aplicar, como la recta es paralela al eje y , su ecuación es:

$$x = a$$

EJEMPLOS

Ejemplos

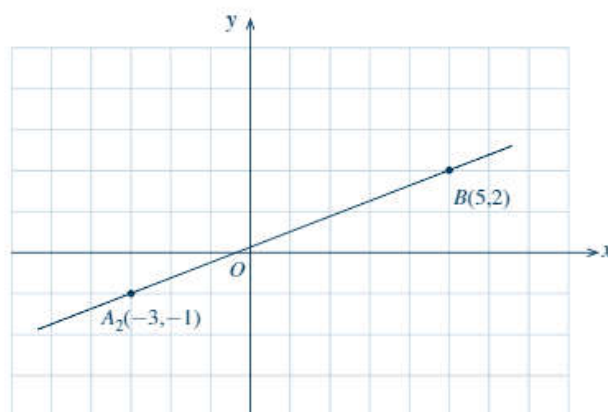
- 1 • Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-3, -1)$ y $B(5, 2)$.

Solución

Al sustituir los datos dados en la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, resulta:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) (x - x_1) \\ y + 1 &= \left(\frac{-1 - 2}{-3 - 5} \right) (x + 3) \\ y + 1 &= \left(\frac{-3}{-8} \right) (x + 3) \\ -8(y + 1) &= 3(x + 3) \\ -8y - 8 &= -3x - 9 \\ 3x - 8y - 8 + 9 &= 0 \\ 3x - 8y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Al elaborar la gráfica, se tiene:



- 2 ••• Una recta pasa por el punto $A(7,8)$ y es paralela a la recta formada por los puntos $P(-2,2)$ y $Q(3,-4)$. Encuentra su ecuación.

Solución

Sean ℓ_1 la recta que pasa por el punto A y ℓ_2 la recta que contiene los puntos P y Q , como ambas rectas son paralelas, sus pendientes son iguales ($m_{\ell_1} = m_{\ell_2}$).

Al sustituir los valores de $P(-2,2)$, $Q(3,-4)$ en la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, resulta:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

$$y - 2 = \left(\frac{2 - (-4)}{-2 - 3} \right) (x - (-2))$$

$$y - 2 = \left(\frac{6}{-5} \right) x - (x + 2)$$

$$y - 2 = \left(-\frac{6}{5} \right) x - \frac{12}{5}$$

$$y = \left(-\frac{6}{5} \right) x - \frac{12}{5} + \frac{10}{5}$$

$$y = \left(-\frac{6}{5} \right) x - \frac{2}{5}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta ℓ_2 es

$$y = \left(-\frac{6}{5} \right) x - \frac{2}{5} \text{ y su pendiente } m_1 \text{ es } -\frac{6}{5}.$$

Al usar la ecuación de punto-pendiente, resulta:

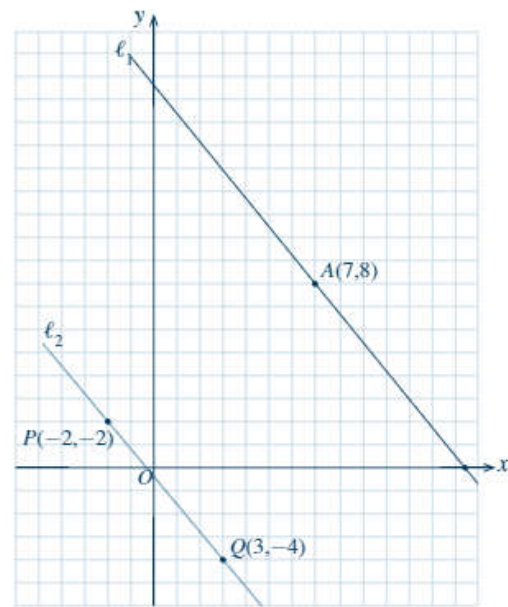
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 8 = \left(-\frac{6}{5} \right) (x - 7)$$

$$y = \left(-\frac{6}{5} \right) x + \frac{42}{5} + 8$$

$$y = \left(-\frac{6}{5} \right) x + \frac{82}{5}$$

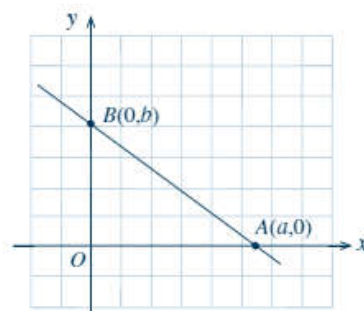
Al elaborar la gráfica, se tiene:



La ecuación de la recta ℓ_1 es $y = \left(-\frac{6}{5} \right) x + \frac{82}{5}$ y su pendiente m_2 es igual a la pendiente m_1 de la recta ℓ_2 .

Ecuación simétrica o canónica de la recta

Sea ℓ una recta que interseca a los ejes coordenados x , y en los puntos $A(a,0)$ y $B(0,b)$, respectivamente:



Al determinar la pendiente de la recta dada, se tiene:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$m = \frac{0 - b}{a - 0}$$

$$m = -\frac{b}{a}$$

Al sustituir los datos en la ecuación punto-pendiente de la recta, resulta:

$$\begin{aligned}y - y_1 &= m(x - x_1) \\y - 0 &= -\frac{b}{a}(x - a) \\ay &= -bx + ab \\bx + ay &= ab\end{aligned}$$

Al dividir la ecuación entre ab , se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\cancel{b}x}{a\cancel{b}} + \frac{\cancel{a}y}{\cancel{a}b} &= \frac{ab}{ab} \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1\end{aligned}$$

A esta forma ecuación de la recta, también se le denomina **reducida** o **abscisa-ordenada en el origen**.

Teorema

La ecuación de la recta que interseca a los ejes coordenados x , y en los puntos $(a,0)$ y $(0,b)$, respectivamente es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad a \neq 0 \text{ y } b \neq 0$$

Si $a = 0$, entonces también $b = 0$ y la ecuación de la forma simétrica no se puede aplicar; en este caso, no se conoce un **punto del sistema coordenado** ni el **valor de la pendiente** por lo que la información no es suficiente para determinar la ecuación de la recta.

EJEMPLOS

Ejemplos

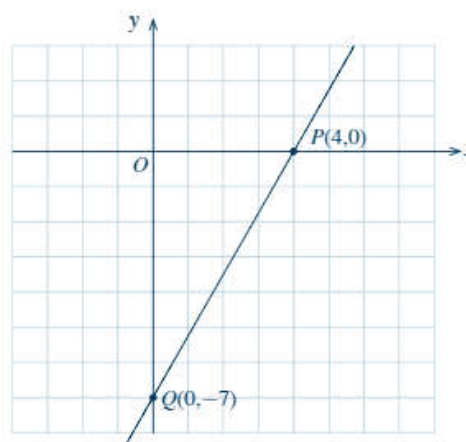
- 1 • Las intersecciones que una recta determina sobre los ejes x , y son $P(4,0)$ y $Q(0,-7)$ respectivamente, determina su ecuación.

Solución

Al sustituir los datos dados en la ecuación simétrica de la recta, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{7} &= 1 \\ \frac{7x - 4y}{28} &= 1 \\ 7x - 4y &= 28 \\ 7x - 4y - 28 &= 0\end{aligned}$$

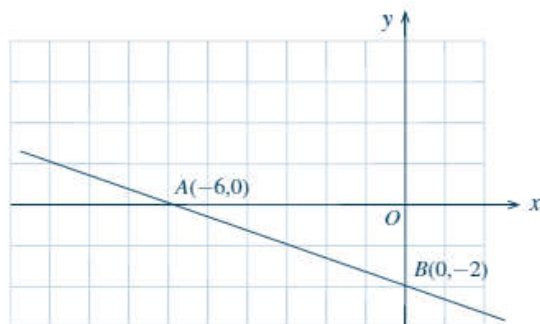
Al elaborar la gráfica, se tiene:



- 2 •• Los segmentos de una recta sobre los ejes x , y son $A(-6,0)$ y $B(0,-2)$. Determina su ecuación.

Solución

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



Al sustituir los datos dados en la ecuación simétrica de la recta, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \\ -\frac{x}{6} - \frac{y}{2} &= 1 \\ \frac{-2x - 6y}{12} &= 1 \\ -2x - 6y &= 12 \\ 2x + 6y + 12 &= 0\end{aligned}$$

Ecuación de la recta en su forma general

La ecuación lineal en dos variables x , y de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

se denomina **forma general de la ecuación de la recta**; donde los coeficientes A , B y C son números reales, con la condición de que A o B debe ser diferente de cero y C puede o no ser igual a cero.

Para saber si la ecuación $Ax + By + C = 0$ representa siempre una línea recta, es necesario analizar su comportamiento para cuando el coeficiente de y es igual o diferente de cero.

Caso 1

Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$, por tanto, la ecuación $Ax + By + C = 0$, se reduce a:

$$\begin{aligned}Ax + By + C &= 0 \\ Ax + (0)y + C &= 0 \\ Ax + C &= 0\end{aligned}$$

Esta forma corresponde a la ecuación de una recta paralela al eje y , es decir:

$$\begin{aligned}Ax + C &= 0 \\ Ax &= -C \\ x &= -\frac{C}{A} \text{ (abscisa en el origen)}\end{aligned}$$

Caso 2

Si $B \neq 0$, al dividir la ecuación $Ax + By + C = 0$ entre B , resulta:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ \frac{Ax}{B} + \frac{\cancel{B}y}{\cancel{B}} + \frac{C}{B} &= 0 \\ \frac{Ax}{B} + y + \frac{C}{B} &= 0 \\ y &= -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B} \end{aligned}$$

Esta forma corresponde a la ecuación de una recta de pendiente con ordenada en el origen, es decir, $y = mx + b$, donde:

$$m = -\frac{A}{B} \quad \text{Pendiente de la recta} \qquad b = -\frac{C}{B} \quad \text{Ordenada en el origen}$$

Por lo anterior, se concluye en que la ecuación $Ax + By + C = 0$, representa una recta.

Teorema

La ecuación lineal en las variables x, y , denotada por $Ax + By + C = 0$, representa una recta y recíprocamente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Determina la ecuación de la recta, calculando los coeficientes de la forma general, que pasa por el punto $A(-1, 4)$ y tiene una pendiente igual a $-\frac{3}{2}$.

Solución

Al sustituir los datos dados en la ecuación punto-pendiente de la recta, resulta:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 4 &= -\frac{3}{2}(x + 1) \\ 2y - 8 &= -3x - 3 \\ 3x + 2y - 5 &= 0 \\ Ax + By + C &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 4 &= -\frac{3}{2}(x + 1) \\ 2y - 8 &= -3x - 3 \\ 3x + 2y - 5 &= 0 \\ Ax + By + C &= 0 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la recta} \\ \text{en su forma general.} \end{array}$$

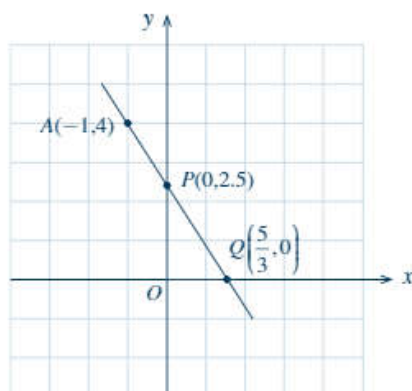
Por lo tanto, los coeficientes de la ecuación, son:

$$\begin{aligned} A &= 3 \\ B &= 2 \\ C &= -5 \end{aligned}$$

Para graficar la ecuación de la recta anterior, se determina la abscisa y ordenada en el origen, es decir:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{C}{A} = -\frac{-5}{3} & y = b &= -\frac{C}{B} = -\frac{-5}{2} \\ x &= \frac{5}{3} = 1.667 & y &= \frac{5}{2} = 2.5 \end{aligned}$$

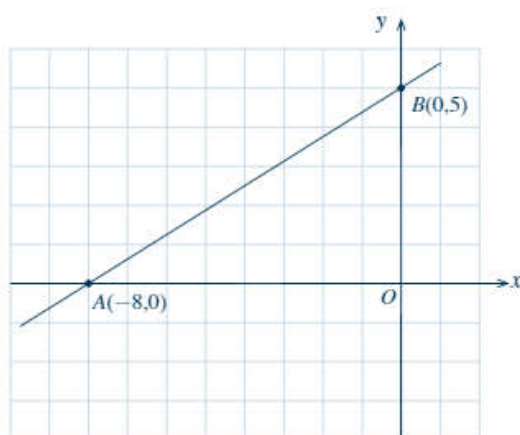
Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 ••• Determina la ecuación de una recta en su forma general, si sus intersecciones son $A(-8, 0)$ y $B(0, 5)$ y transfórmala a la forma común.

Solución

Al elaborar la gráfica, se tiene:



Al sustituir los datos dados en la ecuación canónica de la recta, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \\ -\frac{x}{8} + \frac{y}{5} &= 1 \\ \frac{-5x + 8y}{40} &= 1 \\ -5x + 8y &= 40 \\ 5x - 8y + 40 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \\ -\frac{x}{8} + \frac{y}{5} &= 1 \\ \frac{-5x + 8y}{40} &= 1 \\ -5x + 8y &= 40 \\ 5x - 8y + 40 &= 0 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la recta} \\ \text{en su forma general.} \end{array}$$

Transformando la ecuación general a la forma común, resulta:

$$\begin{aligned} 5x - 8y + 40 &= 0 \\ 8y &= 5x + 40 \\ y &= \frac{5x + 40}{8} \\ y &= \frac{5}{8}x + 5 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 5x - 8y + 40 &= 0 \\ 8y &= 5x + 40 \\ y &= \frac{5x + 40}{8} \\ y &= \frac{5}{8}x + 5 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la recta} \\ \text{en su forma común.} \end{array}$$

3 ●● ¿Cuál es la pendiente y la intersección con el eje y de la recta cuya ecuación es $3x - 7y - 21 = 0$?

Solución

La ecuación de la recta dada está escrita en la forma general, cuyos coeficientes son:

$$3x - 7y - 21 = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$A = 3$$

$$B = -7$$

$$C = -21$$

La pendiente de la recta se determina por:

$$m = \frac{A}{B}$$

$$m = -\frac{3}{-7}$$

$$m = \frac{3}{7}$$

La intersección de la recta con el eje y es:

$$y = b = \frac{C}{B}$$

$$b = \frac{-21}{-7}$$

$$b = -3$$

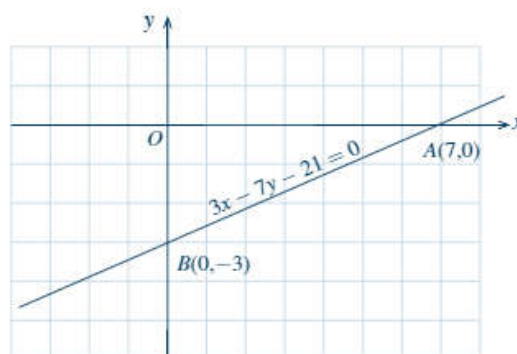
Para representar gráficamente la ecuación de la recta se determina la intersección con el eje x, es decir:

$$x = -\frac{C}{A}$$

$$x = -\frac{-21}{3}$$

$$x = 7$$

Al elaborar gráfica, se tiene:



Distintas formas de la ecuación de la recta

La ecuación de la recta se presenta hasta el momento en las siguientes formas:

1. Ecuación de la recta en su forma general:

$$Ax + By + C = 0$$

2. Ecuación pendiente-ordenada en el origen de una recta, también se le denomina de forma común:

$$y = mx + b$$

3. Ecuación simétrica o canónica de la recta, también se le denomina de forma reducida o de abscisa-ordenada en el origen:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

4. Ecuación punto-pendiente de una recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

5. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, también se le denomina de forma cartesiana:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-5, 2)$ cuya pendiente es $\frac{1}{3}$, escribe en la forma general, común y canónica.

Solución

Al sustituir los datos dados en la ecuación punto-pendiente de la recta, resulta:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= \frac{1}{3}(x + 5) \\ 3y - 6 &= x + 5 \\ x - 3y + 11 &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación de la recta,
en la forma general.

Si $x - 3y + 11 = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} -3y &= x - 11 \\ y &= \frac{-x - 11}{-3} \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Ecuación de la recta,
en la forma común.

Los coeficientes de la forma general de la ecuación de la recta son: $A = 1$, $B = -3$ y $C = 11$. Al determinar las intersecciones de la recta con los ejes x , y se tiene:

$$\begin{aligned} x = a &= -\frac{C}{A} \\ a &= -\frac{11}{1} \\ a &= -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = b &= -\frac{C}{B} \\ b &= -\frac{11}{-3} \\ b &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Al sustituir los resultados en la ecuación de la forma canónica, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \\ -\frac{x}{11} + \frac{y}{\frac{11}{3}} &= 1 \quad \text{o} \quad -\frac{x}{11} + \frac{3y}{11} = 1 \end{aligned}$$

La forma canónica, también se puede determinar de la siguiente manera:

Si $x - 3y + 11 = 0$ se divide la ecuación entre 3, entonces:

$$\frac{x}{3} - \cancel{\frac{3y}{3}} + \frac{11}{3} = 0$$

$$\frac{x}{3} - y + \frac{11}{3} = 0$$

$$\frac{x}{3} - y = -\frac{11}{3}$$

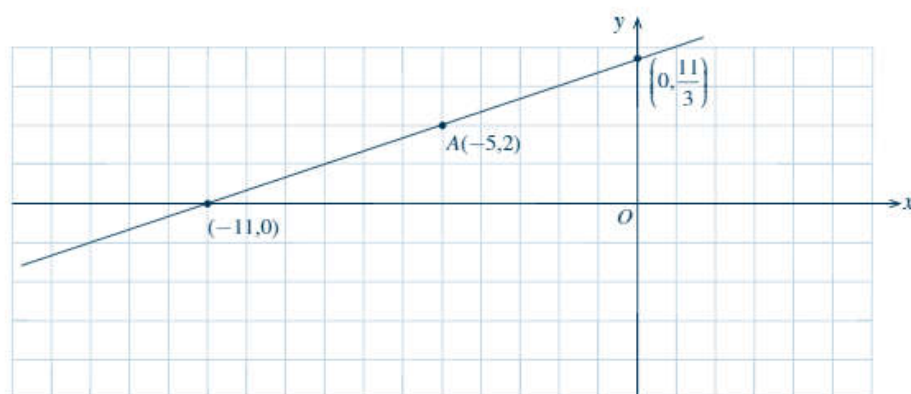
Al dividir la ecuación entre $-\frac{11}{3}$, resulta:

$$\frac{\frac{x}{3}}{-\frac{11}{3}} - \frac{y}{-\frac{11}{3}} = \frac{-\cancel{\frac{11}{3}}}{-\cancel{\frac{11}{3}}}$$

$$-\frac{x}{11} + \frac{y}{\frac{11}{3}} = 1 \quad \text{o} \quad -\frac{x}{11} + \frac{3y}{11} = 1$$

Ecuación de la recta en su forma canónica.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2** ●●● Calcula la pendiente, el ángulo de inclinación y las intersecciones con los ejes coordenados, para la recta que pasa por el punto $A(4, -5)$ y es perpendicular a la recta $4x - 7y + 36 = 0$; determina la ecuación en su forma general, común y simétrica.

Solución

Sea ℓ_1 la recta que pasa por el punto A y ℓ_2 la recta cuya ecuación es $4x - 7y + 36 = 0$. Si las rectas son perpendiculares, sus pendientes son recíprocas y de signo contrario.

A partir de ℓ_2 , se tiene:

$$4x - 7y + 36 = 0$$

$$m_2 = -\frac{A}{B}$$

$$m_2 = -\frac{4}{-7}$$

$$m_2 = \frac{4}{7}$$

La m para la recta ℓ_1 , es:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$m_1 = -\frac{1}{\frac{4}{7}}$$

$$m_1 = -\frac{7}{4}$$

El ángulo de inclinación para la recta ℓ_1 , es:

$$\theta = \arctan m$$

$$\theta = \arctan\left(-\frac{7}{4}\right)$$

$$\theta = -60^\circ 15' 18''$$

$$\text{si } 180^\circ = 179^\circ 59' 60''$$

$$\frac{-60^\circ 15' 18''}{0} = 119^\circ 44' 42''$$

Al aplicar la ecuación de punto-pendiente de la recta, resulta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(y + 5) = -\frac{7}{4}(x - 4)$$

$$4(y + 5) = -7(x - 4)$$

$$4y + 20 = -7x + 28$$

$$7x + 4y - 8 = 0$$

La intersección de la recta ℓ_1 con los ejes coordenados, es:

$$x = a = -\frac{C}{A}$$

$$a = -\frac{-8}{7}$$

$$a = \frac{8}{7}$$

$$y = b = -\frac{C}{B}$$

$$b = -\frac{-8}{4}$$

$$b = 2$$

Al aplicar la ecuación simétrica de la recta, para los valores obtenidos, resulta:

$$\text{Si } 7x + 4y - 8 = 0$$

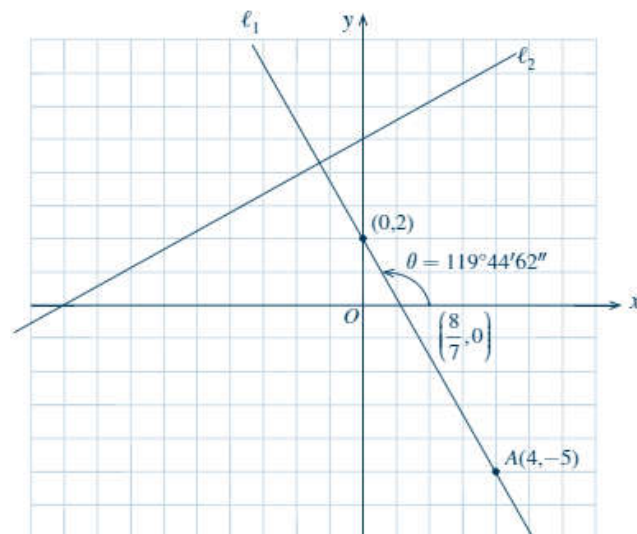
$$y = \frac{-7 + 8y}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{7}{4}x + 2 \end{aligned} \right\} \text{Ecuación de la recta } \ell_1 \text{ en forma común.}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{7x}{8} + \frac{y}{2} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{Ecuación de la recta } \ell_1 \text{ en forma simétrica.}$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 3 •• Una recta pasa por los puntos $P(-1,3)$ y $Q(5,4)$, escribe su ecuación en forma de determinante y transfórmala a la forma general, común y simétrica.

Solución

La ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, escrita en forma de determinante, es:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = (x)(y_1)(1) + (x_2)(y)(1) + (x_1)(y_2)(1) - (x)(y_2)(1) - (x_1)(y)(1) - (x_2)(y_1)(1) = 0$$

Al sustituir los datos dados en la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (x)(3)(1) + (5)(y)(1) + (-1)(4)(1) - (5)(3)(1) - (x)(4)(1) - (-1)(y)(1) = 0$$

$$3x + 5y - 4 - 15 - 4x + y = 0$$

$$-x + 6y - 19 = 0$$

$$x - 6y + 19 = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} -x + 6y - 19 = 0 \\ x - 6y + 19 = 0 \end{matrix}} \right\} \text{ Ecuación de la recta en su forma general.}$$

Con el fin de comprobar el resultado obtenido, se sustituyen los datos dados en la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, es decir:

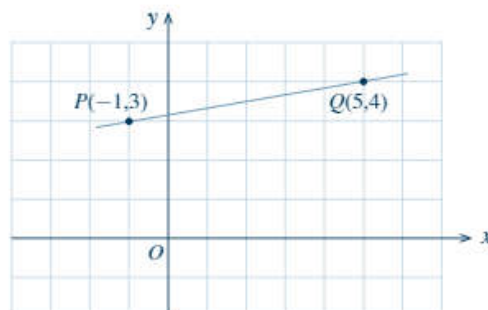
$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

$$y - 3 = \left(\frac{4 - 3}{5 - (-1)} \right) (x + 1)$$

$$y - 3 = \left(\frac{1}{6} \right) (x + 1)$$

$$-6 + 18 = -x - 1$$

$$x - 6y + 19 = 0$$



Si $x - 6y + 19 = 0$, se despeja a y , es decir:

$$-6y = -x - 19$$

$$y = \frac{-x - 19}{-6}$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{19}{6} \quad \left. \vphantom{y = \frac{1}{6}x + \frac{19}{6}} \right\} \text{ Ecuación de la recta en su forma común.}$$

Si $x - 6y + 19 = 0$, se puede escribir como: $x - 6y = -19$, así, al dividir la ecuación entre -19 , resulta:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{x}{19} - \frac{6y}{-19} &= \frac{-19}{-19} \\ -\frac{x}{19} + \frac{y}{\frac{19}{6}} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ Ecuación de la recta} \\ \text{en su forma simétrica.}$$

- 4 ••• Determina la ecuación de la recta cuya pendiente es $-\frac{7}{3}$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas $13x - y - 45 = 0$ y $11x - 5y - 9 = 0$, escribe la ecuación en la forma general y común.

Solución

Al resolver el sistema de ecuaciones dadas, se determina el punto de intersección, es decir:

$$13x - y - 45 = 0 \quad (1)$$

$$11x - 5y - 9 = 0 \quad (2)$$

Al multiplicar la ecuación (1) por -5 , se tiene:

$$-5(13x - y - 45 = 0)$$

$$-65 + 5y + 225 = 0$$

$$\underline{11x - 5y - 9 = 0}$$

$$-54x + 216 = 0$$

$$-54x = -216$$

$$x = \frac{-216}{-54}$$

$$x = 4$$

Al sustituir el valor de x en (2), resulta:

$$11x - 5y - 9 = 0$$

$$(11)(4) - 5y - 9 = 0$$

$$44 - 5y - 9 = 0$$

$$-5y + 35 = 0$$

$$-5y = -35$$

$$y = \frac{-35}{-5}$$

$$y = 7$$

El punto de intersección entre las rectas dadas es $A(4,7)$.

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta, resulta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 7 = -\frac{7}{3}(x - 4)$$

$$3y - 21 = -7x + 28$$

$$7x + 3y - 49 = 0$$

} Ecuación de la recta
en su forma general.

Si $7x + 3y - 49 = 0$, se despeja y , es decir:

$$\begin{aligned} 3y &= -7x + 49 \\ y &= \frac{-7x + 49}{3} \\ y &= -\frac{7}{3}x + \frac{49}{3} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 3y &= -7x + 49 \\ y &= \frac{-7x + 49}{3} \\ y &= -\frac{7}{3}x + \frac{49}{3} \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la recta} \\ \text{en su forma simplificada.} \end{array}$$

Intersecciones con los ejes:

Al elaborar la gráfica, se tiene:

$$13x - y - 45 = 0 \quad (1)$$

$$x = -\frac{C}{A} = -\frac{-45}{13} \approx 3.46$$

$$y = -\frac{C}{B} = -\frac{-45}{-1} = -45$$

$$11x - 5y - 9 = 0 \quad (2)$$

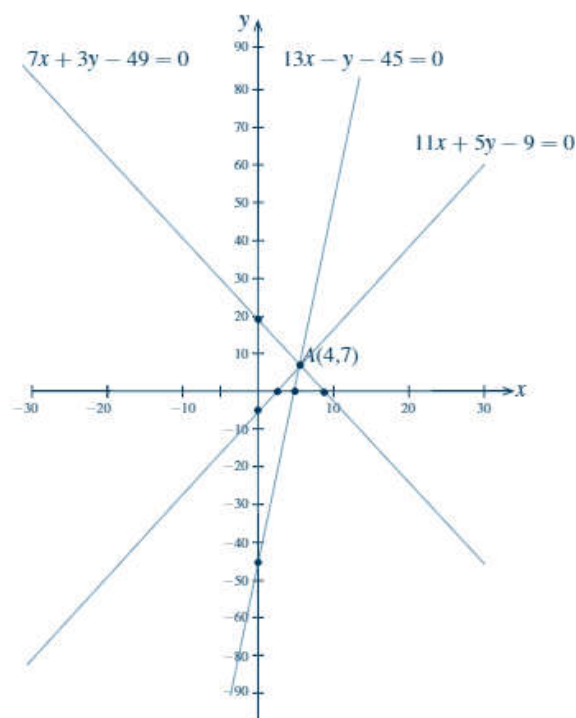
$$x = -\frac{C}{A} = -\frac{-9}{11} = \frac{9}{11} \approx 0.81$$

$$y = -\frac{C}{B} = -\frac{-9}{-5} = -\frac{9}{5} = -1.8$$

$$7x + 3y - 49 = 0 \quad (3)$$

$$x = -\frac{C}{A} = -\frac{-49}{7} = 7$$

$$y = -\frac{C}{B} = -\frac{-49}{3} = \frac{49}{3} \approx 16.33$$



EJERCICIO 9

I. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene la pendiente que se indica.

1. $A(5,9)$ y $m = 3$

4. $P(4,0)$ y $m = \frac{8}{3}$

2. $B(-6,5)$ y $m = \frac{2}{3}$

5. $Q(0,2)$ y $m = \frac{3}{4}$

3. $C(3,5)$ y $m = -\frac{1}{2}$

6. $R(3,1)$ y $m = -2$

II. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene el ángulo de inclinación que se indica.

1. $A(7,4)$ y $\theta = 60^\circ$

3. $P(2,-7)$ y $\theta = 135^\circ$

2. $B(5,-2)$ y $\theta = 71^\circ 33' 54''$

4. $Q(-1,1)$ y $\theta = 61^\circ 36' 25''$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

III. Determina la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y su intersección con el eje y que se indica.

1. $m = -\frac{3}{5}$, intersección en -3
2. $m = -5$, intersección en 2
3. $m = 4$, intersección en $\frac{6}{5}$
4. $m = \frac{1}{2}$, intersección en 3
5. $m = \frac{1}{6}$, intersección en $-\frac{8}{3}$
6. $m = -2$, intersección en 1

IV. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

1. $A(2,4)$ y $B(-7,5)$
2. $P(-3,-2)$ y $Q(5,5)$
3. $M(-1,3)$ y $N(2,6)$
4. $P(-6,5)$ y $Q(9,1)$
5. $R(0,2)$ y $S(7,3)$
6. $M(5,-4)$ y $N(2,7)$

V. Determina la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes x , y se indican respectivamente.

1. $A(-5,0)$ y $B(0,-2)$
2. $M(3,0)$ y $N(0,1)$
3. $K(-4,0)$ y $L(0,2)$
4. $P\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ y $Q\left(0, \frac{1}{4}\right)$
5. $A(7,0)$ y $B(0,-5)$
6. $C(-1,0)$ y $D(0,7)$

VI. Resuelve los siguientes problemas.

1. Los vértices de un cuadrilátero son $A(-2,1)$, $B(4,7)$, $C(5,2)$ y $D(3,-2)$, encuentra las ecuaciones de las rectas que corresponden a sus lados.
2. Una recta pasa por los puntos $P(7,4)$ y $Q(3,-6)$, encuentra su ecuación en la forma canónica.
3. Determina la ecuación en la forma general y simétrica, de una recta cuya pendiente $-\frac{7}{2}$ y que pasa por el punto $A(-2,6)$.
4. Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento $M(-1,7)$ y $N(5,-2)$, en la forma general y común.
5. Una recta interseca a los ejes x , y en 3 y 5 respectivamente, encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta anterior que pasa por el punto $A\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$.
6. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(5,-3)$ y que corta al eje y en 7 .
7. Demuestra que los puntos $P(2,-6)$, $Q(-3,-1)$ y $R(-5,1)$ son colineales, es decir, encuentra la ecuación de la recta que pasa por dos de ellos y verifica que el tercero pertenezca a la recta.
8. Encuentra la ecuación de la mediatriz dada la recta $x - y + 5 = 0$.
9. Encuentra las ecuaciones de las rectas definidas por los lados del triángulo cuyos vértices son $A(2,4)$, $B(6,7)$ y $C(7,1)$.
10. Encuentra el área del triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es $3x - 2y - 6 = 0$.
11. El punto A de abscisa -4 está sobre la recta cuya pendiente es $-\frac{4}{5}$ y que pasa por el punto $B(1,-3)$, calcula la ordenada de A .
12. Los vértices de un triángulo son $A(2,3)$, $B(5,7)$ y $C(-3,4)$, encuentra la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela al lado opuesto BC .

13. Los vértices de un triángulo son $A(-3,4)$, $B(9,0)$ y $C(1,-8)$, determina las ecuaciones de las rectas que pasan por el vértice A y trisecan al lado opuesto BC .
14. Los vértices de un triángulo son $A(3,2)$, $B(-1,-2)$ y $C(5,-4)$, encuentra los vértices del triángulo formado por las rectas que pasan por los vértices A , B y C , siendo paralelas a los lados opuestos.
15. Determina el valor de los coeficientes A y B de la ecuación $Ax + By - 38 = 0$ de una recta, si debe pasar por los puntos $A(4,2)$ y $B(-5,7)$.
16. Una recta pasa por los puntos $A(-3,4)$ y $B(1,-2)$, escribe su ecuación en forma de determinante y transfórmala a la forma general, común y simétrica.
17. Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $5x - 3y - 15 = 0$ y pasa por el punto $A(-3,2)$.
18. Encuentra la pendiente e intersecciones con los ejes coordenados para la recta $4x + 3y + 13 = 0$.
19. Determina la pendiente, ángulo de inclinación y las intersecciones con los ejes coordenados, para la recta que pasa por el punto $A(3,-4)$ y es paralela a la recta $3x - 4y + 11 = 0$; escríbela en las formas general, común y simétrica.
20. Encuentra los valores de k para que la recta $4x + 5y + k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo cuya área sea $\frac{5}{2}$ de unidades cuadradas.
21. Demuestra que la recta que pasa por los puntos $A(-7,2)$ y $B(-4,-1)$, biseca al segmento de extremos $M(-8,-3)$ y $N(4,-3)$.
22. Demuestra que las rectas $2x - y - 1 = 0$, $x - 8y + 37 = 0$, $2x - y - 16 = 0$ y $x - 8y + 7 = 0$, forman un paralelogramo y determina las ecuaciones de sus diagonales.
23. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $5x + 6y - 4 = 0$ y $x - 3y + 2 = 0$ y que es paralela a la recta $4x + y + 7 = 0$.
24. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,2)$ y por el punto de intersección de las rectas $x + 5y - 4 = 0$ y $2x - 3y = 0$.
25. Los vértices de un triángulo son $A(2,6)$, $B(8,-4)$ y $C(-3,-5)$. Encuentra las ecuaciones de las rectas que pasan por el vértice A , si una es paralela y la otra es perpendicular al lado BC .
26. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $M(8,-3)$ y es perpendicular a la recta $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 2$.
27. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el origen del sistema coordenado y es paralela a la recta $\frac{x}{5} - \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1$.
28. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(4,-6)$ y es perpendicular a la recta $y = -3x + 2$.
29. La pendiente de una recta escrita en su forma general $Ax + By + C = 0$ es 7. Encuentra el valor de los coeficientes A , B y C si la recta pasa por el punto $K(1,-6)$.
30. Aplicando la forma de determinante para la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados; escríbela en su forma general, común y simétrica.

a) $A(-8,5)$ y $B(0,2)$

c) $K(-2,4)$ y $L(6,-3)$

b) $P(6,0)$ y $Q(-3,3)$

d) $R\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$ y $S\left(0, \frac{2}{3}\right)$

31. Determina los valores de k para que la recta $2x + 3y + k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 27 unidades cuadradas.
32. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -3)$ y es perpendicular a la recta que une los puntos $P(4,4)$ y $Q(-2,8)$.
33. Encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $M(9,4)$ y $N(-3, -2)$.
34. Encuentra el valor de k para que la recta $3x + 4ky - 24 = 0$ pase por el punto $A(-8,3)$.
35. Encuentra el valor de k de tal manera que:
 - a) $5kx + 3y + k - 4 = 0$ pase por el punto $P(-3,6)$.
 - b) $6x - ky - 11 = 0$ tenga como pendiente a $\frac{8}{3}$.
 - c) $kx - 3y = 6k - 12$ tenga abscisa al origen a 4.

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Ecuación de la recta en la forma normal

Forma normal de la ecuación de la recta

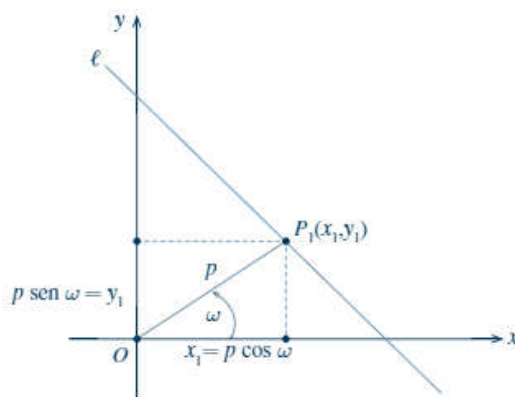
Sea $\overline{OP_1}$ un segmento de longitud p , donde uno de sus extremos es siempre el origen del sistema coordenado.

La posición precisa de dicho segmento de recta en el plano coordenado está determinada por el ángulo ω , cuyo valor positivo se obtiene al girar el radio vector $\overline{OP_1}$ alrededor del origen en sentido contrario al de las manecillas del reloj, con base en lo anterior la longitud p es siempre positiva, sin importar cuál es su posición ya que el valor del ángulo ω puede ser:

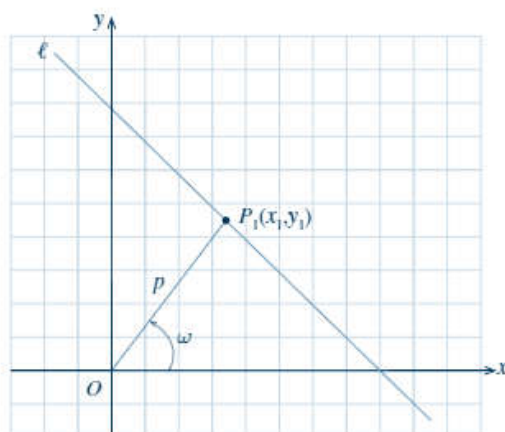
$$0^\circ \leq \omega < 360^\circ$$

Para cualquier valor de p y ω , la recta ℓ trazada por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y perpendicular al segmento $\overline{OP_1}$, se determina perfectamente al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta; también por trigonometría, para cualquier posición de la recta ℓ es: $x_1 = p \cos \omega$, $y_1 = p \sin \omega$; por lo que las coordenadas del punto P_1 son: $(p \cos \omega, p \sin \omega)$.

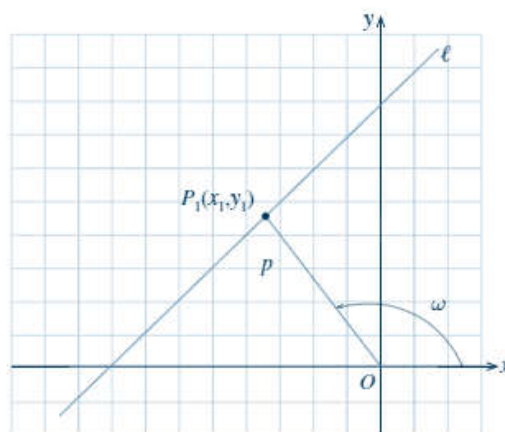
Gráficamente, se tiene:



En las siguientes figuras para las posiciones en el primero y segundo cuadrantes, respectivamente, se observa que el ángulo de inclinación del segmento $\overline{OP_1}$ se representa por ω , por tanto, su pendiente es $m \tan \omega$.



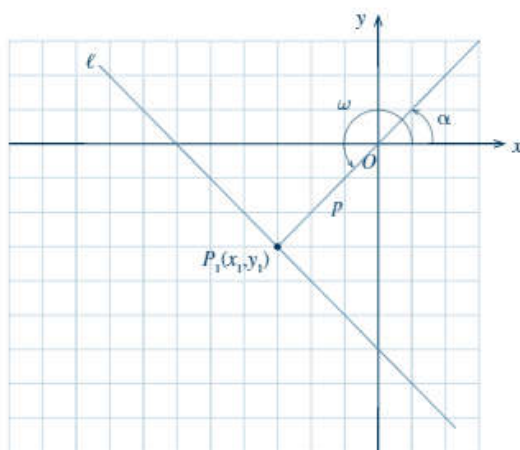
Posición en el primer cuadrante.



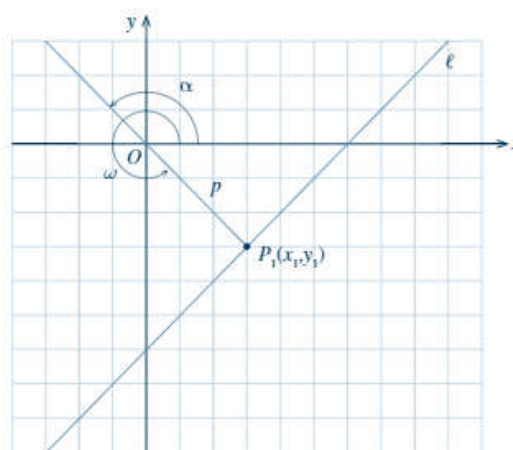
Posición en el segundo cuadrante.

En las siguientes figuras, para las posiciones en el tercero y cuarto cuadrantes, respectivamente, se observa que el ángulo de inclinación del segmento $\overline{OP_1}$ se representa por α , por tanto, su pendiente es $m \tan \alpha$.

Como $\tan \omega = \tan (180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$, se establece que para todas las posiciones del segmento $\overline{OP_1}$, la pendiente es $m = \tan \omega$.



Posición en el tercer cuadrante.



Posición en el cuarto cuadrante.

Como la recta ℓ es perpendicular al segmento $\overline{OP_1}$, su pendiente es **recíproca y de signo contrario**, es decir:

$$m_\ell = -\frac{1}{m_{\overline{OP_1}}}$$

$$m_\ell = -\frac{1}{\tan \omega}$$

$$m_\ell = -\cot \omega = -\frac{\cos \omega}{\sin \omega}$$

Como la recta ℓ pasa por el punto $P_1 (p \cos \omega, p \sin \omega)$ se aplica la ecuación punto-pendiente de la recta, tenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - p \sin \omega = -\left(\frac{\cos \omega}{\sin \omega}\right)(x - p \cos \omega)$$

$$\sin \omega (y - p \sin \omega) = -\cos \omega (x - p \cos \omega)$$

$$y \sin \omega - p \sin^2 \omega = -x \cos \omega + p \cos^2 \omega$$

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p \sin^2 \omega - p \cos^2 \omega = 0$$

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p(\sin^2 \omega + \cos^2 \omega) = 0$$

Aplicando la identidad trigonométrica, $\sin^2 \omega + \cos^2 \omega = 1$, resulta:

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p(1) = 0$$

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$$

Teorema

La ecuación de la recta en la forma normal es $x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$, donde p es un número positivo, numéricamente igual a la longitud de la recta **normal** trazada desde el origen que se representa por ω y que se mide a partir de la parte positiva del eje x hacia la recta **normal**; dicho ángulo puede tener valores entre 0° y 360° , es decir, $0^\circ \leq \omega < 360^\circ$.

Si la recta ℓ pasa por el origen, el valor de p es cero en la forma normal de la ecuación. Al suponer que la recta normal está dirigida siempre hacia arriba del origen, el valor del ángulo ω está dado entre 0° y 180° .

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 ••• Determina la ecuación de la recta en su forma normal, si $\omega = \frac{\pi}{6}$ y $p = 4$.

Solución

Al sustituir los datos dados en la ecuación de la recta en su forma normal, resulta:

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$$

$$x \cos \frac{\pi}{6} + y \sin \frac{\pi}{6} - 4 = 0$$

$$x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ - 4 = 0$$

Gráficamente, tenemos:

$$x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) - 4 = 0$$

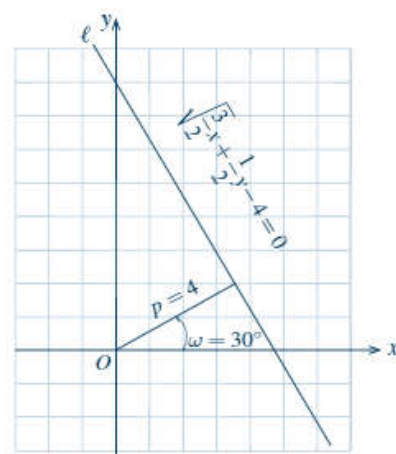
$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 4 = 0$$

Ecuación de la recta en su forma normal.

$$\frac{\sqrt{3}x + y - 8}{2} = 0$$

$$\sqrt{3}x + y - 8 = 0$$

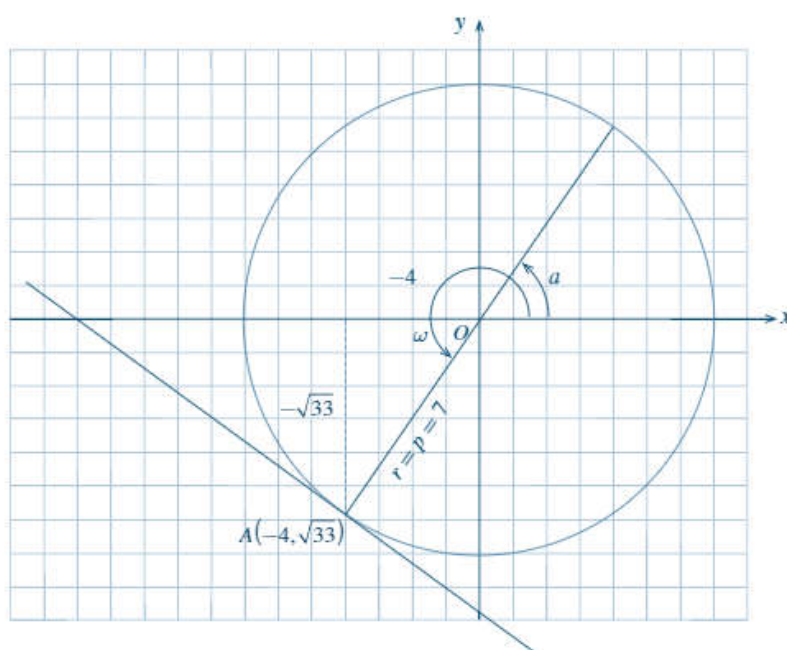
Ecuación de la recta en su forma general.



- 2 •• Dado un círculo cuyo centro está en el origen y radio igual a 7; determina la ecuación de la recta tangente en su forma normal, si el punto de tangencia es $A(-4, -\sqrt{33})$.

Solución

Al elaborar la gráfica con los datos dados, se tiene:



Por trigonometría, se tiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \omega &= \frac{OP}{HIP} = \frac{-\sqrt{33}}{7} = -\frac{\sqrt{33}}{7} \\ \cos \omega &= \frac{ADY}{HIP} = \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7}\end{aligned}$$

Al aplicar los resultados en la ecuación de la recta en su forma normal, se tiene:

$$\begin{aligned}x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p &= 0 \\ x\left(-\frac{4}{7}\right) + y\left(-\frac{\sqrt{33}}{7}\right) - 7 &= 0 \\ -\frac{4}{7}x - \frac{\sqrt{33}}{7}y - 7 &= 0\end{aligned}$$

Transformando la ecuación de la recta en su forma normal a la forma general, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{-4x - \sqrt{33}y - 49}{7} &= 0 \\ 4x + \sqrt{33}y + 49 &= 0\end{aligned}$$

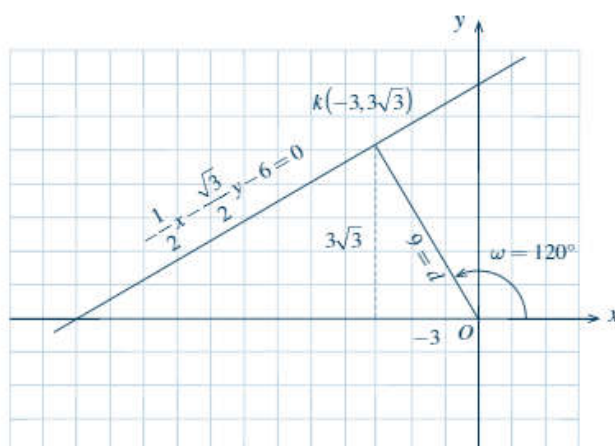
Para graficar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia, se determina la intersección con los ejes coordenados, es decir:

$$x = -\frac{C}{A} = -\frac{49}{4} = -12.25 \quad y = -\frac{C}{B} = -\frac{49}{\sqrt{33}} \approx -8.52$$

- 3 •• La ecuación de una recta en la forma normal es $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - 6 = 0$; determina el valor de ω para que el punto de la recta más cercano al origen sea $k(-3, 3\sqrt{3})$.

Solución

Al elaborar la gráfica de los datos dados, se tiene:



De la ecuación $x \cos \omega + y \sin \omega - 6 = 0$, se sabe que $p = 6$. Entonces por trigonometría, se tiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \omega &= \frac{OP}{HIP} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \omega &= \frac{ADY}{HIP} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \\ \tan \omega &= \frac{\operatorname{sen} \omega}{\cos \omega} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \\ \omega &= \arctan(-\sqrt{3}) \\ \omega &= -\arctan(\sqrt{3}) \\ \omega &= -60^\circ\end{aligned}$$

Dado que el punto se encuentra en el segundo cuadrante, se tiene:

$$\omega = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

La ecuación de la recta en su forma normal es:

$$\begin{aligned}x \cos \omega + y \sin \omega - p &= 0 \\ x \cos 120^\circ + y \sin 120^\circ - 6 &= 0 \\ x\left(-\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 6 &= 0\end{aligned}$$

La ecuación de la recta en su forma general es:

$$\begin{aligned}-x + \sqrt{3}y - 12 &= 0 \\ -x + \sqrt{3}y - 12 &= 0 \\ x - \sqrt{3}y + 12 &= 0\end{aligned}$$

Para graficar la ecuación de la recta, se determina la intersección con los ejes coordenados, es decir:

$$x = -\frac{C}{A} = -\frac{12}{1} = -12 \quad y = -\frac{C}{B} = -\frac{12}{-\sqrt{3}} \approx 6.928$$

Reducción de la forma general de la ecuación de una recta a la forma normal

Si las ecuaciones $Ax + By + C = 0$ y $x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$, representan la misma recta en su forma general y normal, respectivamente. Los coeficientes de ambas ecuaciones deben ser iguales o proporcionales, es decir:

$$\cos \omega = kA \quad \sin \omega = kB \quad -p = kC$$

Donde k es la constante de proporcionalidad. Si elevamos al cuadrado las expresiones, $\cos \omega = kA$ y $\sin \omega = kB$, se tendrá que $\cos^2 \omega = k^2 A^2$ y $\sin^2 \omega = k^2 B^2$, así, al sumar ambas expresiones, resulta:

$$\begin{aligned}\cos^2 \omega &= k^2 A^2 \\ + \sin^2 \omega &= k^2 B^2 \\ \hline \cos^2 \omega + \sin^2 \omega &= k^2 A^2 + k^2 B^2 \\ \cos^2 \omega + \sin^2 \omega &= k^2 (A^2 + B^2)\end{aligned}$$

Al aplicar la identidad trigonométrica, $\cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$, en la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{aligned}\cos^2 \omega + \sin^2 \omega &= k^2 (A^2 + B^2) \\ 1 &= k^2 (A^2 + B^2) \\ k^2 &= \frac{1}{(A^2 + B^2)} \\ k &= \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ donde } A^2 + B^2 \neq 0\end{aligned}$$

Al sustituir el valor de k en las siguientes expresiones, se tiene:

$$\begin{array}{lll}\cos \omega = kA & \sin \omega = kB & -p = kC \\ \cos \omega = \left(\frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \right) A & \sin \omega = \left(\frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \right) B & -p = \left(\frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \right) C \\ \cos \omega = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} & \sin \omega = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} & -p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}\end{array}$$

La recta definida por la ecuación $Ax + By + C = 0$ en la forma general, tiene por ecuación en la forma normal:

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Se hace notar que el radical $r = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$ no puede usar al mismo tiempo ambos signos, ya que el valor del ángulo no sería único. Se debe recordar que p es una constante positiva, por tanto, $-p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$ es negativa, lo que significa que el radical $\sqrt{A^2 + B^2}$ debe tomarse con signo contrario al signo del coeficiente C .

Si la recta pasa por el origen del sistema coordenado, en la ecuación de la recta de forma general el valor de C es cero; es la ecuación de la recta en forma normal el valor de p también es cero y el ángulo ω tiene valores comprendidos entre 0° y 180° .

Para dicho intervalo de ω la función $\sin$ es positiva, por lo que establecemos que K y B deben ser del mismo signo, siempre y cuando el coeficiente B sea diferente de cero; por lo tanto, **el radical debe tener el mismo signo del coeficiente B .**

En caso de que el coeficiente B sea igual a cero, la función $\sin \omega = 0$, es decir, el ángulo $\omega = 0^\circ$; por lo que se establece que la función $\cos \omega = 1$ y por lo tanto, K y el coeficiente A deben de tener signos iguales, es decir:

Si el coeficiente A es diferente de cero el radical debe tener el mismo signo que A .

Teorema

La ecuación de la recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, puede reducirse a la forma normal $x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$, al dividir cada término de $Ax + By + C = 0$ entre el radical $r = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$, donde el signo que precede al radical se selecciona de acuerdo con las siguientes condiciones:

1. Si $C \neq 0$, el radical es de signo contrario a C .
2. Si $C = 0$ y $B \neq 0$, el radical y B tienen el mismo signo.
3. Si $C = B = 0$ y $A \neq 0$, el radical y A tienen el mismo signo.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• La ecuación de una recta es $3x - 4y - 24 = 0$, reduce su ecuación a la forma normal y determina los valores de p y ω .

Solución

La ecuación de la recta $3x - 4y - 24 = 0$ está escrita en su forma general, por tanto, sus coeficientes son $A = 3$, $B = -4$ y $C = -24$.

Al conocer los valores de los coeficientes, se determina el valor y signo del radical, es decir:

$$\begin{aligned} r &= \pm\sqrt{A^2 + B^2} \\ r &= \pm\sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \pm\sqrt{9 + 16} = \pm\sqrt{25} \\ r &= \pm 5 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } C \text{ es negativo, el signo} \\ \text{del radical debe ser contrario a } C. \end{array}$$

$$r = 5$$

La recta definida por la forma general $Ax + By + C = 0$, tiene por ecuación en la forma normal:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Al sustituir los datos encontrados, resulta:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{24}{5} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la recta} \\ \text{en su forma normal.} \end{array}$$

El valor de p es:

$$\begin{aligned} -p &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \\ -p &= \frac{-24}{5} \\ p &= \frac{24}{5} \end{aligned}$$

El valor del ángulo ω es:

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} & \sin \omega &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \cos \omega &= \frac{3}{5} = 0.6 & \sin \omega &= -\frac{4}{5} = -0.8 \end{aligned}$$

Se hace notar que la función seno es de signo negativo y la función coseno es positiva, por lo que se deduce que el ángulo ω se ubica en el cuarto cuadrante del sistema coordenado.

$$\omega = \arccos(0.6)$$

$$\omega = 53^\circ 07' 48''$$

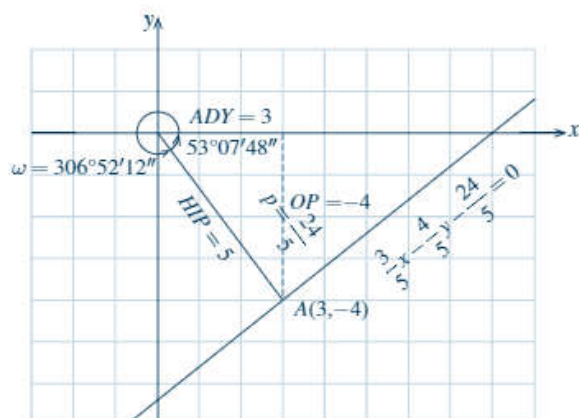
$$\omega = \arcsin(-0.8)$$

$$\omega = -53^\circ 07' 48''$$

Restando a 360° se determina el valor preciso de ω .

$$\begin{array}{r} 360^\circ = 359^\circ 59' 60'' \\ \quad = -53^\circ 07' 48'' \\ \hline \omega = 306^\circ 52' 12'' \end{array}$$

Gráficamente, se tiene:



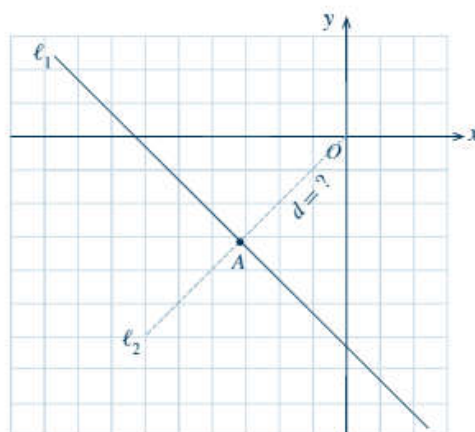
- 2 ••• Calcula la distancia del origen a la recta $4x + 3y + 13 = 0$.

Solución

De la ecuación dada, se determina su pendiente y las intersecciones con los ejes x , y , es decir:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{3} \quad x = -\frac{C}{A} = -\frac{13}{4} \quad y = -\frac{C}{B} = -\frac{13}{3}$$

Gráficamente, se tiene:



La distancia del origen a la recta dada se mide sobre una recta perpendicular, cuya pendiente es recíproca y de signo contrario.

Si $m\ell_1 = -\frac{4}{3}$, la recíproca y de signo contrario es:

$$m\ell_2 = -\frac{1}{m\ell_1} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta, resulta:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 0 &= \frac{3}{4}(x - 0) \\ 4y &= 3x \\ 3x - 4y &= 0 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 0 &= \frac{3}{4}(x - 0) \\ 4y &= 3x \\ 3x - 4y &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{ Ecuación de la recta } (\ell_2) \text{ perpendicular a } (\ell_1)$$

Al resolver el sistema entre ℓ_1 y ℓ_2 , se determina su intersección, es decir:

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 13 &= 0 & (\ell_1) \\ 3x - 4y &= 0 & (\ell_2) \end{aligned}$$

Se multiplica ℓ_1 por 4 y ℓ_2 por 3, así:

$$\begin{array}{rcl} 4(4x + 3y + 13 = 0) & \longrightarrow & 16x + 12y + 52 = 0 \\ 3(3x - 4y = 0) & & 9x - 12y = 0 \\ \hline & & 25x + 52 = 0 \\ & & 25x = -52 \\ & & x = \frac{-52}{25} = -\frac{52}{25} \end{array}$$

Al sustituir el valor de x en ℓ_2 se determina el valor de y , es decir:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 0 \\ 3\left(-\frac{52}{25}\right) - 4y &= 0 \\ -\frac{156}{25} - 4y &= 0 \\ -4y &= \frac{156}{25} \\ y &= \frac{\frac{156}{25}}{-4} \\ y &= -\frac{156}{100} = -\frac{39}{25} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{El punto de intersección entre } \ell_1 \text{ y } \ell_2 \text{ es:} \\ A\left(-\frac{52}{25}, -\frac{39}{25}\right) \end{array}$$

Se determina ahora la distancia entre el origen y el punto de intersección, es decir:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} & d &= \sqrt{4.3264 + 2.4336} \\ d &= \sqrt{\left(0 + \frac{52}{25}\right)^2 + \left(0 + \frac{39}{25}\right)^2} & d &= \sqrt{6.76} \\ d &= \sqrt{\frac{2704}{625} + \frac{1521}{625}} & d &= 2.6 \end{aligned}$$

La distancia del origen a la recta $4x + 3y + 13 = 0$, es 2.6 unidades.

Otro método más fácil para calcular la distancia del origen a la recta $4x + 3y + 13 = 0$; consiste en determinar el valor de p , ya que es el radio vector de dicha recta.

Sean los coeficientes de la ecuación dada: $A = 4$, $B = 3$ y $C = 13$. Se determina el valor y signo del radical, es decir:

$$\begin{aligned} r &= \pm\sqrt{A^2 + B^2} \\ r &= \pm\sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \pm\sqrt{16 + 9} \\ r &= \pm\sqrt{25} \\ r &= \pm 5 \end{aligned}$$

Como C es positivo, el signo del radical debe ser contrario a C . Así,

$$r = -5$$

El valor de p es:

$$\begin{aligned} -p &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \\ -p &= \frac{13}{-5} = -2.6 \\ p &= 2.6 \end{aligned}$$

Se confirma que la distancia del origen a la recta $4x + 3y + 13 = 0$ es 2.6 unidades.

- 3 ••• Determina la ecuación de la recta cuya distancia del origen es 5 y que pasa por el punto $A(-7, -1)$.

Solución

Una de las rectas que pasa por el punto $A(-7, -1)$ es:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y + 1 &= m(x + 7) \\ y + 1 &= mx + 7m \\ mx - y + 7m - 1 &= 0 \\ mx - y + (7m - 1) &= 0 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y + 1 &= m(x + 7) \\ y + 1 &= mx + 7m \\ mx - y + 7m - 1 &= 0 \\ mx - y + (7m - 1) &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{ Ecuación de la recta en su forma general.}$$

Los coeficientes de la recta, escrita en su forma general son: $A = m$, $B = -1$ y $C = 7m - 1$. Así, el radical es:

$$\begin{aligned} r &= \pm \sqrt{A^2 + B^2} \\ r &= \pm \sqrt{(m)^2 + (-1)^2} = \pm \sqrt{m^2 + 1} \\ r &= \pm \sqrt{m^2 + 1} \end{aligned}$$

El signo del radical queda indefinido porque el signo de C se desconoce, ya que depende del valor de la pendiente.

La forma general $Ax + By + C = 0$, transformada a la forma normal es:

$$\frac{A}{r}x + \frac{B}{r}y + \frac{C}{r} = 0$$

Al sustituir los valores de los coeficientes y el radical, resulta:

$$\frac{m}{\pm \sqrt{m^2 + 1}}x + \frac{1}{\pm \sqrt{m^2 + 1}}y + \frac{7m - 1}{\pm \sqrt{m^2 + 1}} = 0$$

Si la distancia al origen es $p = 5$, y como $-p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$, resulta:

$$-5 = \frac{7m - 1}{\pm \sqrt{m^2 + 1}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, resulta:

$$\begin{aligned} \pm 5\sqrt{m^2 + 1} &= 7m - 1 \\ (5\sqrt{m^2 + 1})^2 &= (7m - 1)^2 \\ 25m^2 + 25 &= 49m^2 - 14m + 1 \\ 25m^2 + 25 - 49m^2 - 14m - 1 &= 0 \\ -24m^2 + 14m + 24 &= 0 \\ 24m^2 - 14m - 24 &= 0 \end{aligned}$$

Al aplicar la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, resulta:

$$\begin{aligned} m &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{14 \pm \sqrt{(14)^2 - 4(24)(-24)}}{2(24)} \\ m &= \frac{14 \pm \sqrt{196 + 2304}}{48} = \frac{14 \pm \sqrt{2500}}{48} = \frac{14 \pm 50}{48} \\ m_1 &= \frac{14 + 50}{48} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3} \\ m_2 &= \frac{14 - 50}{48} = \frac{-36}{48} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Para las condiciones dadas, se encontraron dos rectas que pasan por el punto $A(-7, -1)$ con diferente pendiente. Al sustituir estos valores en la forma general, resulta:

Para $m = \frac{4}{3}$, se tiene:

$$mx - y + (7m - 1) = 0$$

$$\frac{4}{3}x - y + \left[7\left(\frac{4}{3}\right) - 1\right] = 0$$

$$\frac{4}{3}x - y + \left[\frac{28 - 3}{3}\right] = 0$$

$$\frac{4}{3}x - y + \frac{25}{3} = 0$$

$$\frac{4x - 3y + 25}{3} = 0$$

$$4x - 3y + 25 = 0$$

Para $m = -\frac{3}{4}$, se tiene:

$$mx - y + (7m - 1) = 0$$

$$-\frac{3}{4}x - y + \left[7\left(-\frac{3}{4}\right) - 1\right] = 0$$

$$-\frac{3}{4}x - y + \left[\frac{-21 - 4}{4}\right] = 0$$

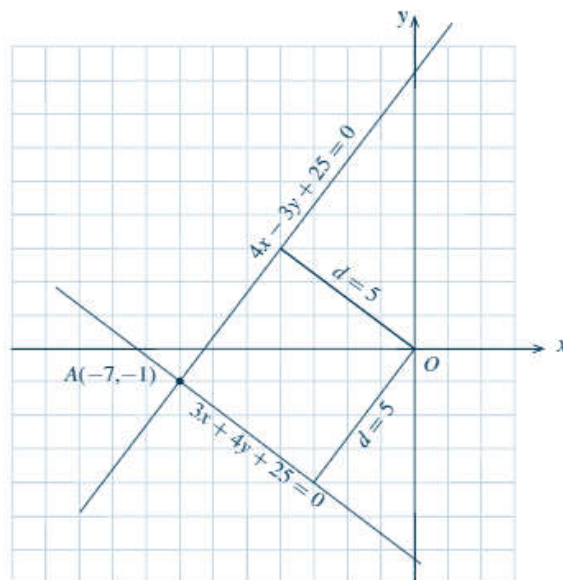
$$-\frac{3}{4}x - y - \frac{25}{4} = 0$$

$$\frac{-3x - 4y - 25}{4} = 0$$

$$-3x - 4y - 25 = 0$$

$$3x + 4y + 25 = 0$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



EJERCICIO 10

I. Determina la ecuación de la recta en la forma normal, para los siguientes valores de p y ω ; traza la gráfica correspondiente.

1. $p = 8$ y $\omega = \frac{\pi}{6}$

2. $p = 5$ y $\omega = 120^\circ$

3. $p = 6$ y $\omega = \frac{4\pi}{3}$

4. $p = 4$ y $\omega = \frac{\pi}{3}$

5. $p = 7$ y $\omega = 45^\circ$

6. $p = 2$ y $\omega = 225^\circ$

II. Resuelve los siguientes problemas.

- Determina la ecuación de la tangente en forma normal de una recta tangente a un círculo de centro en el origen y radio igual a 5; cuyo punto de tangencia es $(-3, -4)$.
- Un círculo tiene centro en el origen y radio $\sqrt{74}$, encuentra la ecuación de su recta tangente en el punto $A(5, -7)$.
- La ecuación de una recta en la forma normal es $x \cos \omega + y \sin \omega - 3 = 0$. Encuentra el valor de ω para que la recta pase por el punto $A(2, -\sqrt{5})$.
- La ecuación de una recta en la forma normal es $x \cos \omega + y \sin \omega - 2 = 0$. Encuentra el valor de ω para que la recta pase por el punto $A(-1, -\sqrt{3})$.

III. En equipo, reduce las siguientes ecuaciones a la forma normal y determina los valores de p y ω .

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. $-x - y - 4 = 0$ | 6. $4x + 5y + 10 = 0$ |
| 2. $2x + 3y - 8 = 0$ | 7. $4x + 3y - 18 = 0$ |
| 3. $3x + 2y - 7 = 0$ | 8. $3x - 4y + 11 = 0$ |
| 4. $x + 2y - 13 = 0$ | 9. $5x - 3y - 15 = 0$ |
| 5. $5x - 4y + 19 = 0$ | 10. $x - y - 9 = 0$ |

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

IV. Encuentra la distancia del origen a cada una de las siguientes rectas.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. $5x - 7y - 11 = 0$ | 3. $2x - 3y + 9 = 0$ |
| 2. $3x + 4y + 25 = 0$ | 4. $3x + 4y - 10 = 0$ |

V. Reduce las siguientes ecuaciones a la forma normal y determina los valores de p y ω .

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $y = \frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$ | 4. $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ |
| 2. $y = \frac{x}{2} - 3$ | 5. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ |
| 3. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ | 6. $\frac{x}{8} + \frac{y}{3} = 1$ |

VI. Resuelve los siguientes problemas y discute en plenaria tus resultados.

- Encuentra la ecuación de la recta cuya distancia del origen es 5 y que pasa por el punto $A(1, 7)$.
- El ángulo de inclinación de una recta es de 135° , encuentra su ecuación si su distancia del origen es 4.
- La pendiente de una recta es $\frac{4}{3}$, encuentra su ecuación si su distancia del origen es $\frac{4}{5}$.
- Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(7, 4)$ y $B(-1, -4)$.
- Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta que es paralela a la recta $x + y - 5 = 0$ y que pasa por el punto $A(-3, -5)$.

6. Determina la ecuación de la recta que es paralela a $6x + 4y - 18 = 0$ y cuya distancia al origen es 8.
7. Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $2x - 3y + 7 = 0$ y determina sobre el eje x un segmento orientado de longitud -9 .
8. Encuentra la distancia al origen de las rectas paralelas $3x - 4y + 12 = 0$ y $3x - 4y - 16 = 0$ e indica cuál es la distancia entre las dos rectas.
9. Encuentra la distancia al origen de las rectas paralelas $4x + 5y - 33 = 0$ y $4x + 5y + 35 = 0$ y calcula la distancia entre las dos rectas.
10. La ecuación de una recta es $x + y - 6 = 0$ y las coordenadas de un punto M son $(3,3)$. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por M y que es paralela a la recta dada, y determina la distancia del punto M a la recta dada.
11. Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta que es paralela a la recta $12x - 5y - 52 = 0$ y que pasa por el punto $A(-2,4)$.
12. Encuentra las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $A(4,2)$ y distan dos unidades del origen.
13. Los vértices de un triángulo son $A(-4,2)$, $B(-1,5)$ y $C(2,-1)$, determina las ecuaciones de sus lados en la forma normal.
14. La pendiente de una recta es -5 , determina su ecuación si su distancia al origen es $\frac{\sqrt{26}}{2}$.
15. Encuentra la distancia al origen de las siguientes rectas:
 $a) \quad 3x + 2y - 7 = 0$ $b) \quad 8x + 15y - 24 = 0$ $c) \quad 6x - 8y + 5 = 0$
16. Encuentra la ecuación de la recta que es paralela a $12x - 5y - 15 = 0$, cuya distancia al origen es $\frac{15}{13}$.
17. Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a $2x - y + 4 = 0$ y, cuya distancia al origen es 6.
18. Encuentra las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $A(3,-5)$ y distan 3 unidades del origen.
19. Determina el valor de k para que la distancia del origen a la recta $x + ky - 16 = 0$ sea 2.
20. Las intersecciones de una recta con los ejes x , y son 5 y 12 respectivamente. Determina la ecuación de dicha recta en su forma normal, así como, su distancia al origen.

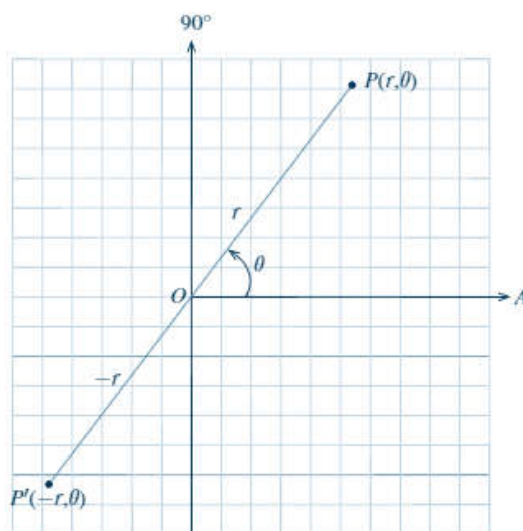
➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Ecuación de la recta en la forma polar

Sistema de coordenadas polares

Para ubicar un punto cualquiera en el plano, el sistema de coordenadas rectangulares lo fija con referencia a los ejes x , y que son rectas perpendiculares entre sí.

En el sistema de coordenadas polares, dicho punto precisa su posición con referencia a una recta fija y a un punto fijo de la misma recta. La recta fija se denomina **eje polar** y el punto fijo **polo**.



En la gráfica anterior, la recta horizontal OA es el **eje polar** y el punto O el **polo**. Si P es un punto cualquiera en el plano coordenado, al trazar el segmento OP , la distancia se representa por r y el ángulo AOP por θ .

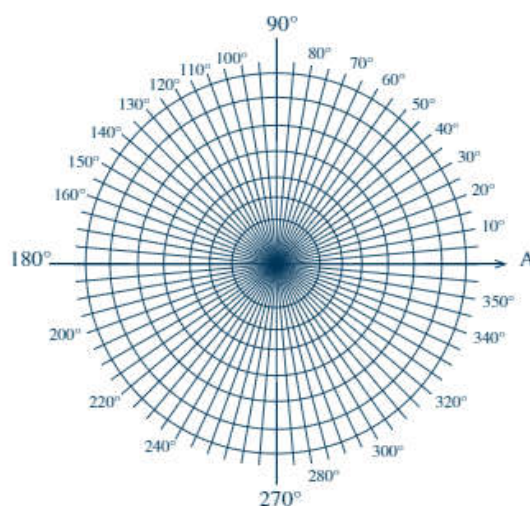
La ubicación del punto P respecto al eje polar y al polo, queda determinada cuando se conocen r y θ , que se denominan coordenadas polares del punto P ; específicamente r se llama **radio vector** y θ **ángulo polar**, **ángulo vectorial** o **argumento** de P .

El radio vector r es positivo cuando se mide desde el polo al punto P , y negativo cuando se mide del punto P al polo; el ángulo polar θ es positivo cuando se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Las coordenadas de P se denotan por (r, θ) y la línea recta que pasa por el polo que es perpendicular al eje polar se denomina el **eje a 90°** .

Para trazar un punto en el sistema de coordenadas polares, se recomienda el uso del **papel coordenado polar**, el cual se caracteriza por una serie de circunferencias concéntricas, es decir, tienen su centro común en el polo y sus radios son múltiplos del que se considera como unidad patrón de medida; también está formado por rectas concurrentes que pasan por el polo, los ángulos entre las rectas son iguales.

Ejemplo

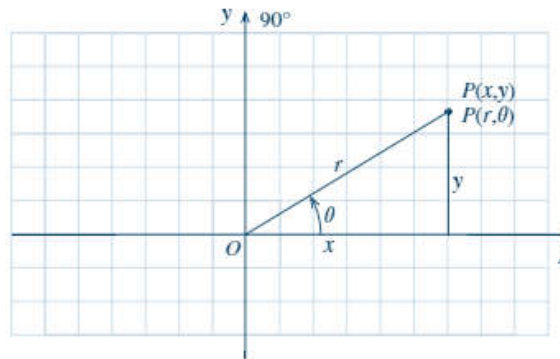


Conversión de coordenadas polares a rectangulares y viceversa

Para un lugar geométrico determinado es necesario conocer el proceso de conversión de las coordenadas polares a rectangulares y viceversa.

Las relaciones sencillas para la conversión se facilitan cuando el polo y el eje polar se hacen coincidir con el origen y la parte positiva del eje x del sistema polar al sistema rectangular.

Gráficamente, se tiene:



Si P es un punto cualquiera que tiene por coordenadas rectangulares (x, y) y por coordenadas polares (r, θ) , y basándonos en la gráfica anterior, se hacen las siguientes deducciones:

$$a) \quad x = r \cos \theta$$

$$e) \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$b) \quad y = r \sin \theta$$

$$f) \quad \sin \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$c) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$g) \quad \cos \theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d) \quad r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

Para realizar la conversión de coordenadas polares a rectangulares y viceversa, debe tenerse presente el siguiente:

Teorema

Si el polo y el eje polar de un sistema de coordenadas polares coinciden, respectivamente, con el origen y la parte positiva del eje x del sistema de coordenadas rectangulares, la conversión de uno a otro de estos sistemas debe efectuarse por medio de las siguientes relaciones de transformación:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad \sin \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Encuentra las coordenadas rectangulares del punto P cuyas coordenadas polares son $(6, 150^\circ)$.

Solución

Las coordenadas polares del punto P son $r = 6$ y $\theta = 150^\circ$.

Al aplicar las fórmulas de transformación, resulta:

$$x = r \cos \theta$$

$$x = 6 \cos 150^\circ$$

$$x = 6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$x = -3\sqrt{3}$$

$$y = r \sin \theta$$

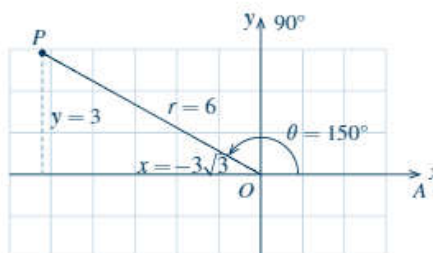
$$y = 6 \sin 150^\circ$$

$$y = 6 \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$y = 3$$

Las coordenadas del punto P en el sistema de coordenadas rectangulares son $(-3\sqrt{3}, 3)$.

Gráficamente, se tiene:



- 2 •• Determina las coordenadas polares del punto A cuyas coordenadas rectangulares son $(-4, -7)$.

Solución

Las coordenadas rectangulares del punto A son $x = -4$ y $y = -7$.

Al aplicar las fórmulas de transformación, resulta:

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \pm \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2}$$

$$r = \pm \sqrt{16 + 49}$$

$$r = \pm \sqrt{65}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{-7}{-4} \right)$$

$$\theta = \arctan (1.75)$$

$$\theta = 60^\circ 15' 18''$$

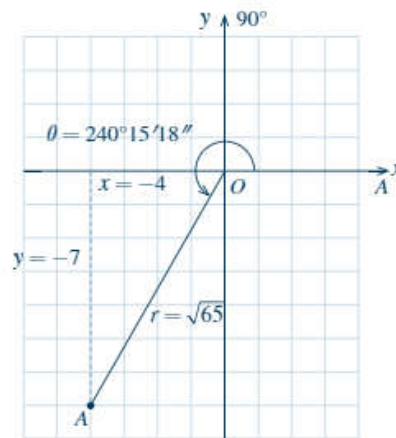
$$\theta = 180^\circ + 60^\circ 15' 18''$$

$$\theta = 240^\circ 15' 18''$$

El punto dado se ubica en el tercer cuadrante, por lo que:

Las coordenadas del punto A en el sistema de coordenadas polares son $(\sqrt{65}, 240^\circ 15' 18'')$.

Gráficamente, se tiene:



- 3 ••• Determina la ecuación polar de la curva cuya ecuación rectangular es $4x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$.

Solución

La ecuación dada puede escribirse como $4(x^2 + y^2) - 2x - 16y + 13 = 0$.

Al aplicar y reemplazar las siguientes fórmulas de transformación: $x^2 + y^2 = r^2$, $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$; en la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{aligned} 4(x^2 + y^2) - 2x - 16y + 13 &= 0 \\ 4(r^2) - 2(r \cos \theta) - 16(r \sin \theta) + 13 &= 0 \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la curva en su forma polar es:

$$4(r^2) - 2(r \cos \theta) - 16(r \sin \theta) + 13 = 0$$

- 4 ••• Encuentra la ecuación rectangular del lugar geométrico cuya ecuación es $r = \frac{1}{1 - 2 \sin \theta}$.

Solución

Reescribiendo la ecuación dada, se tiene:

$$\begin{aligned} r(1 - 2 \sin \theta) &= 1 \\ r - 2r \sin \theta &= 1 \\ r &= 1 + 2r \sin \theta \end{aligned}$$

Al aplicar y reemplazar las siguientes fórmulas de transformación: $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ y $y = r \sin \theta$; en la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{aligned} r &= 1 + 2r \sin \theta \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= 1 + 2y \\ (\sqrt{x^2 + y^2})^2 &= (1 + 2y)^2 \end{aligned}$$

Al elevar al cuadrado, se tiene:

$$x^2 + y^2 = 1 + 4y + 4y^2$$

$$x^2 + y^2 - 4y^2 - 4y - 1 = 0$$

Así, la ecuación de la curva en su forma rectangular es:

$$x^2 - 3y^2 - 4y - 1 = 0$$

Distancia entre dos puntos en coordenadas polares

Sean $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ dos puntos cualesquiera. Para determinar la distancia entre los puntos dados $d = |P_1P_2|$, se utiliza el par principal de coordenadas de P_1 y P_2 . Gráficamente, se tiene:

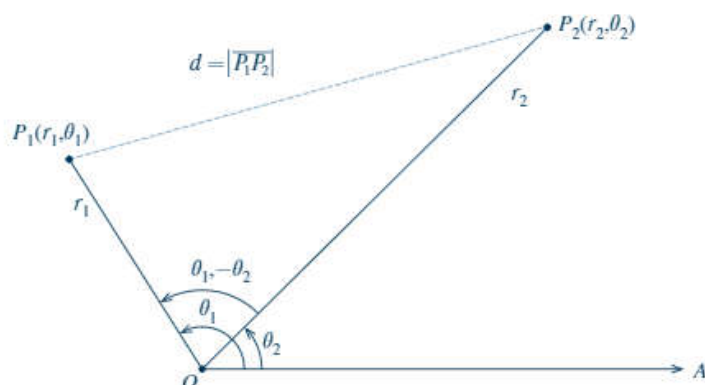


Figura 2.1

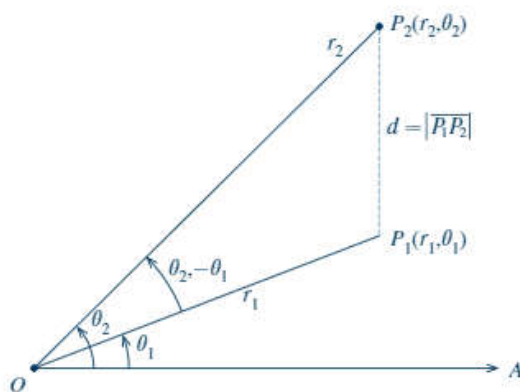


Figura 2.2

Al tomar como base la figura 2.1, se observa que con los radios vectores (r_1 y r_2) y el polo, se forma el triángulo OP_1P_2 ; el ángulo P_1OP_2 es igual $(\theta_1 - \theta_2)$ que se obtiene de la relación $\angle r_2r_1 = \theta_1 - \theta_2$.

Se aplicó la ley de los cosenos, ya que se conocen dos lados (r_1 y r_2) y el ángulo comprendido ($\theta_1 - \theta_2$) entre dichos lados, es decir:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Al tomar como base la figura 2.2, se observa que con los radios vectores (r_1 y r_2) y el polo, se forma el triángulo OP_2P_1 ; el ángulo P_2OP_1 es igual a $(\theta_2 - \theta_1)$ que se obtiene de la relación $\angle r_1r_2 = \theta_2 - \theta_1$.

Se aplica la ley de los cosenos, ya que se conocen dos lados (r_1 y r_2) y el ángulo comprendido ($\theta_2 - \theta_1$) entre dichos lados, es decir:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

Ambas fórmulas se denominan **fórmula de la distancia entre dos puntos en coordenadas polares** y deberá aplicarse aquella que corresponde a un giro contrario a las manecillas del reloj para recorrer el ángulo entre los dos radios polares, es decir, si un ángulo se recorre de r_1 a r_2 se aplica la fórmula que contiene $\cos(\theta_2 - \theta_1)$; si el recorrido es de r_1 a r_2 se aplica la fórmula que contiene $\cos(\theta_2 - \theta_1)$.

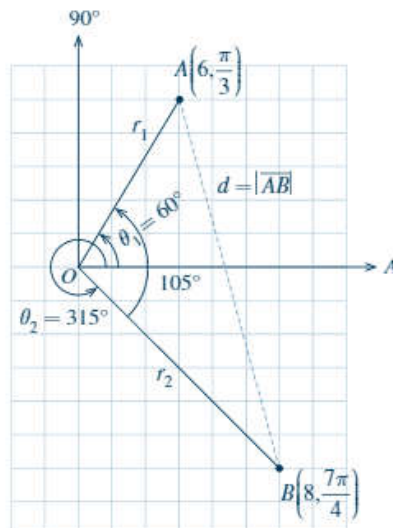
EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Encuentra la distancia entre los puntos cuyas coordenadas polares son $A\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ y $B\left(8, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Solución

Al elaborar la gráfica, los datos dados, se tiene:



Se hace notar que $\theta_1 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ y $\theta_2 = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$.

Para usar la diferencia $\theta_2 - \theta_1 = 315^\circ - 60^\circ = 255^\circ$ el recorrido del ángulo será en el sentido de las manecillas del reloj.

Al sustituir los datos dados en la fórmula de la distancia que corresponde, se tiene:

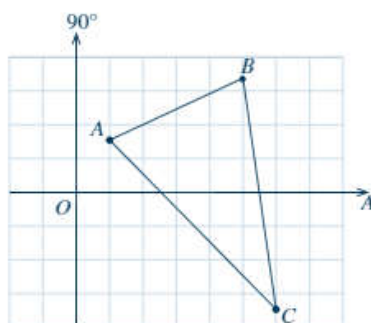
$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)} \\
 d &= \sqrt{(6)^2 + (8)^2 - 2(6)(8) \cos(315^\circ - 60^\circ)} \\
 d &= \sqrt{36 + 64 - 96 \cos 255^\circ} \\
 d &\approx \sqrt{100 + 24.8466} \approx \sqrt{124.8466} \\
 d &\approx 11.1734
 \end{aligned}$$

La distancia entre A y B es $d \approx 11.1734$ unidades.

- 2 •• Demuestra que los puntos $A(\sqrt{2}, 45^\circ)$, $B(\sqrt{34}, 30^\circ 57' 49'')$ y $C(\sqrt{52}, 326^\circ 18' 36'')$ son los vértices de un triángulo isósceles.

Solución

Al elaborar la gráfica los datos dados, se tiene:



Un triángulo isósceles se caracteriza porque dos de sus lados tienen la misma longitud. Por lo tanto, se determinan las longitudes de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Se usará la fórmula:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Para la longitud de $\overline{AC}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 d|\overline{AC}| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{52})^2 - 2(\sqrt{2})(\sqrt{52}) \cos(45^\circ - 326^\circ 18' 36'')} \\
 d|\overline{AC}| &= \sqrt{2 + 52 - 20.396 \cos(-281^\circ 18' 36'')} \\
 d|\overline{AC}| &\approx \sqrt{54 - 20.396(0.1961)} \\
 d|\overline{AC}| &\approx \sqrt{54 - 4} = \sqrt{50} \approx 7.071
 \end{aligned}$$

Para la longitud de $\overline{BC}$ se tiene:

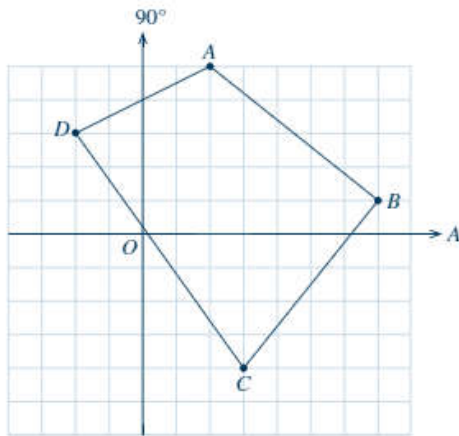
$$\begin{aligned}
 d|\overline{BC}| &= \sqrt{(\sqrt{34})^2 + (\sqrt{52})^2 - 2(\sqrt{34})(\sqrt{52}) \cos(30^\circ 57' 49'' - 326^\circ 18' 36'')} \\
 d|\overline{BC}| &= \sqrt{34 + 52 - 84.0951 \cos(-295^\circ 20' 47'')} \\
 d|\overline{BC}| &\approx \sqrt{86 - 84.0951(0.4280)} \\
 d|\overline{BC}| &\approx \sqrt{86 - 36} = \sqrt{50} \approx 7.071
 \end{aligned}$$

Como las distancias de los segmentos $d|\overline{AC}| = d|\overline{BC}|$ son iguales, se concluye que el triángulo ABC es isósceles.

- 3 ••• Calcular el perímetro del polígono cuyos vértices son $A(\sqrt{29}, 68^\circ 11' 54'')$, $B(\sqrt{50}, 8^\circ 07' 48'')$, $C(5, 306^\circ 52' 12'')$ y $D(\sqrt{13}, 123^\circ 41' 25'')$.

Solución

Al elaborar la gráfica de los puntos dados, se tiene:



Para determinar las longitudes de los lados del polígono, se usará la siguiente fórmula:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Para la longitud de $\overline{AB}$ se tiene:

$$d|\overline{AB}| = \sqrt{(\sqrt{29})^2 + (\sqrt{50})^2 - 2(\sqrt{29})(\sqrt{50}) \cos 68(30^\circ 11' 54'' - 8^\circ 07' 48'')}$$

$$d|\overline{AB}| = \sqrt{29 + 50 - 76.1577 \cos (60^\circ 04' 06'')}$$

$$d|\overline{AB}| \approx \sqrt{79 - 76.1577(0.4989)}$$

$$d|\overline{AB}| \approx \sqrt{79 - 38} = \sqrt{41} \approx 6.4031$$

Para la longitud de $\overline{BC}$ se tiene:

$$d|\overline{BC}| = \sqrt{(\sqrt{50})^2 + (5)^2 - 2(\sqrt{50})(5) \cos (8^\circ 07' 48'' - 306^\circ 52' 12'')}$$

$$d|\overline{BC}| = \sqrt{50 + 25 - 70.7106 \cos (-298^\circ 44' 24'')}$$

$$d|\overline{BC}| \approx \sqrt{75 - 70.7106 (0.4808)}$$

$$d|\overline{BC}| \approx \sqrt{75 - 34} = \sqrt{41} \approx 6.4031$$

Para la longitud de $\overline{CD}$ se tiene:

$$d|\overline{CD}| = \sqrt{(5)^2 + (\sqrt{13})^2 - 2(5)(\sqrt{13}) \cos (306^\circ 52' 12'' - 123^\circ 41' 25'')}$$

$$d|\overline{CD}| = \sqrt{25 + 13 - 36.0555 \cos (183^\circ 10' 47'')}$$

$$d|\overline{CD}| \approx \sqrt{38 - 36.0555 (-0.9984)}$$

$$d|\overline{CD}| \approx \sqrt{38 + 35.9999} = \sqrt{73.9999} \approx 8.6023$$

Para la longitud de $\overline{AD}$ se tiene:

$$d|\overline{AD}| = \sqrt{(\sqrt{29})^2 + (\sqrt{13})^2 - 2(\sqrt{29})(\sqrt{13}) \cos (68^\circ 11' 54'' - 123^\circ 41' 25'')}$$

$$d|\overline{AD}| = \sqrt{29 + 13 - 38.8329 \cos (-55^\circ 29' 31'')}$$

$$d|\overline{AD}| \approx \sqrt{42 - 38.8329 (0.5665)}$$

$$d|\overline{AD}| \approx \sqrt{42 - 21.9996} = \sqrt{20.0004} \approx 4.4721$$

El perímetro se obtiene al sumar las longitudes de los lados del polígono dado, es decir:

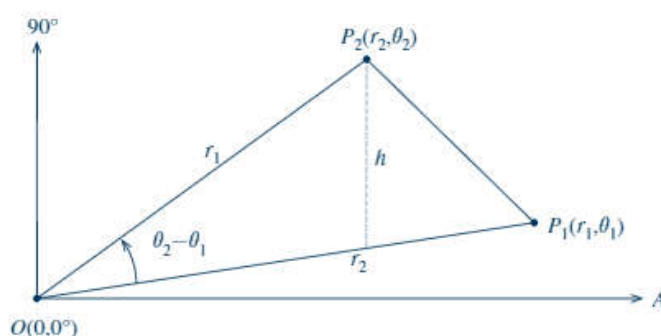
$$\begin{aligned} P &= d|\overline{AB}| + d|\overline{BC}| + d|\overline{CD}| + d|\overline{AD}| \\ P &= 6.4031 + 6.4031 + 8.6023 + 4.4721 \\ P &= 25.8806 \end{aligned}$$

Área de un triángulo en coordenadas polares

El área del triángulo OP_1P_2 , donde $O(0,0^\circ)$, $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$, puede calcularse al aplicar la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sen(\theta_1 - \theta_2)$$

Para demostrar la fórmula anterior, se elabora la grafica de los puntos dados, es decir:



El área de un triángulo se define como el producto de su base por su altura, todo sobre dos, es decir:

$$A = \frac{bh}{2}$$

La base del triángulo está dada por el segmento $\overline{OP_1} = r_1$ y su altura por $h = r_2 \sen(\theta_2 - \theta_1)$. Por lo tanto, al sustituir directamente, resulta:

$$\begin{aligned} A &= \frac{bh}{2} \\ A &= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sen(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

Dicha fórmula se deriva del teorema que establece que: *el área de un triángulo es igual al semiproducto de dos de los lados por el seno del ángulo comprendido*. Matemáticamente se expresa como:

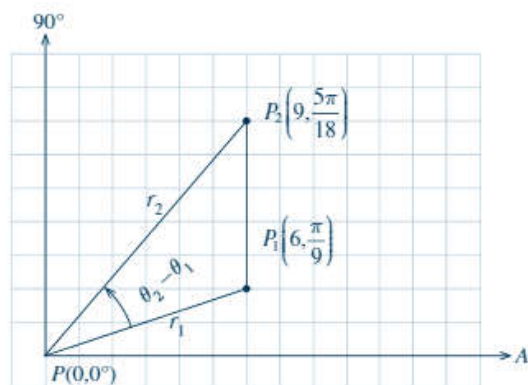
$$A = \frac{1}{2} ab \sen C$$

EJEMPLO

- 1 ••• Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P(0,0^\circ)$, $P_1\left(6, \frac{\pi}{9}\right)$ y $P_2\left(9, \frac{5\pi}{18}\right)$.

Solución

Al elaborar la gráfica de los puntos dados, se tiene:



Al sustituir en la fórmula del área, se tiene:

$$A = \frac{1}{2} r_1 r_2 \operatorname{sen} (\theta_2 - \theta_1)$$

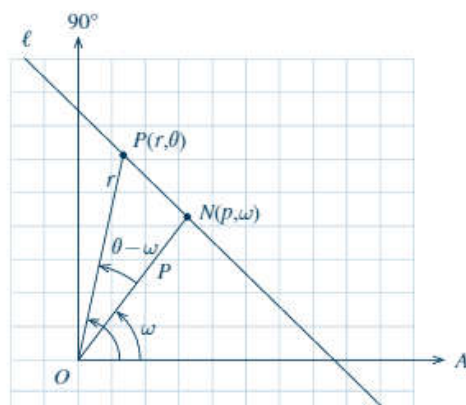
$$A = \frac{1}{2} (6)(9) \operatorname{sen} (50^\circ - 20^\circ) = 27 \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$A = 13.5 \text{ unidades de superficie}$$

Ecuación de la recta en coordenadas polares

La recta que pasa por el polo tiene por ecuación polar la forma $\theta = k$, siendo k una constante que denota el ángulo polar de uno de los puntos de la recta. Como k puede tomar un número infinito de valores, para una recta específica, se hace necesario delimitar k para valores positivos menores de 180° .

Si la recta no pasa por el polo, entonces, se traza una recta perpendicular **normal** desde el polo a la recta ℓ , cuyo par principal de coordenadas polares de la recta normal será $N(p, \omega)$, donde el radio vector p es siempre positivo y la variación de los valores para el ángulo ω es $0^\circ \leq \omega < 360^\circ$.



Sea $P(r, \theta)$ un punto cualquiera de la recta ℓ , al tomar como base el triángulo rectángulo OPN , se tiene:

$$r \cos (\theta - \omega) = p \quad \left. \vphantom{r \cos (\theta - \omega) = p} \right\} \text{ Ecuación polar de la recta } \ell.$$

Como p es el radio vector y ω el ángulo de variación de la normal, la ecuación polar $r \cos (\theta - \omega) = p$ es la ecuación equivalente de la recta cuya ecuación normal es $x \cos \omega + y \sin \omega p = 0$ en coordenadas rectangulares.

En los casos en que la recta ℓ sea perpendicular al eje polar o paralela a dicho eje, se obtienen formas especiales de la ecuación $r \cos (\theta - \omega) = p$. Lo anterior da lugar a lo siguiente.

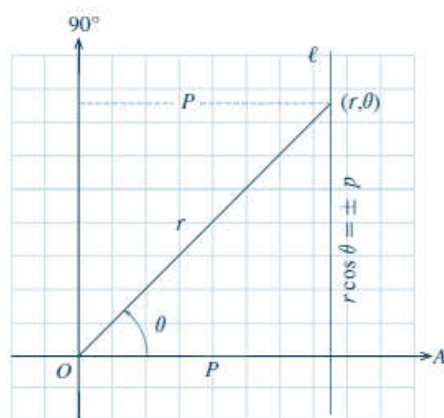
Teorema

Sea $P(p, \omega)$ el par principal de coordenadas polares del pie de una perpendicular (normal) trazada desde el polo a cualquier recta en el plano de coordenadas polares, donde la recta presenta como ecuación en forma polar a:

$$r \cos (\theta - \omega) = p$$

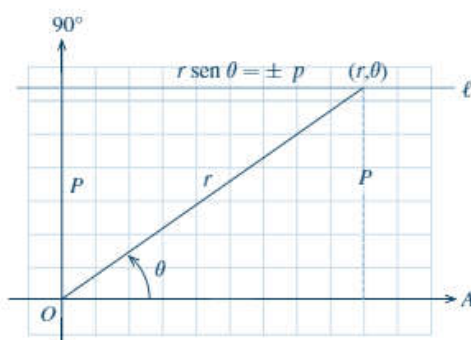
cuando la recta pasa por el polo, la ecuación polar de la recta es $\theta = k$, donde k es una constante que se limita para valores positivos menores a 180° .

Cuando la recta es perpendicular al eje polar y se encuentra p unidades del polo, la ecuación polar de la recta es $r \cos \theta = \pm p$ siempre que p sea mayor a cero y que la recta tenga como signo positivo o negativo según se ubique a la derecha o a la izquierda del polo, respectivamente.



Gráfica de una recta perpendicular al eje polar.

Cuando la recta es paralela al eje polar y se encuentra a p unidades de dicho eje, la ecuación polar de la recta es $r \sin \theta = \pm p$, siempre que p es mayor a cero y que la recta tenga como signo positivo o negativo según se ubique arriba o abajo del eje polar, respectivamente.



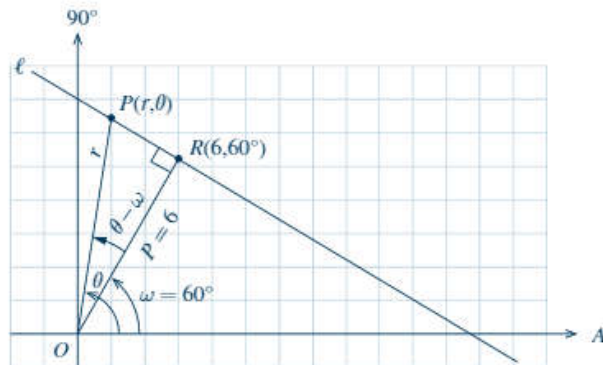
Gráfica de una recta paralela al eje polar.

EJEMPLOS

- 1 •• Encuentra la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $R(6, 60^\circ)$ y que es perpendicular al radio vector de R .

Solución

Al graficar los datos dados, se tiene:



Gráficamente se considera un punto cualquiera $P(r, \theta)$ sobre la recta, ℓ ; basándonos en el triángulo rectángulo ORP , resulta:

$$\begin{aligned}\cos(\theta - \omega) &= \frac{ADY}{HIP} = \frac{p}{r} \\ \cos(\theta - 60^\circ) &= \frac{6}{r}\end{aligned}$$

Así, la ecuación de la recta ℓ en su forma polar, es:

$$r \cos(\theta - 60^\circ) = 6$$

- 2 •• Transforma la ecuación rectangular de la recta $4x - 5y + 20 = 0$ a la forma polar.

Solución

La ecuación de la recta $4x - 5y + 20 = 0$ está escrita en su forma general, por tanto, sus coeficientes son: $A = 4$, $B = -5$ y $C = 20$.

Al conocer los valores de los coeficientes, se determina el valor y signo del radical $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$, es decir:

$$r = \pm\sqrt{(4)^2 + (-5)^2} = \pm\sqrt{15 + 25} = \pm\sqrt{41}$$

Como C es positivo, el signo del radical debe ser contrario a C .

$$r = -\sqrt{41}$$

Para determinar el valor de p , que indica la distancia del polo a la recta, se tiene:

$$\begin{aligned}-p &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \\ -p &= \frac{20}{-\sqrt{41}} \\ p &= \frac{20}{\sqrt{41}}\end{aligned}$$

El valor del ángulo ω es:

$$\cos \omega = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{sen } \omega = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\cos \omega = \frac{4}{-\sqrt{41}} \approx -0.6246 \quad \text{sen } \omega = \frac{-5}{-\sqrt{41}} \approx 0.7808$$

Se hace notar que la función seno es de signo positivo y la función coseno es negativa, por lo que se deduce que el ángulo ω se ubica en el segundo cuadrante del sistema coordenado. Es decir,

$$\begin{array}{lll} \omega \approx \arccos(-0.6246) & \omega \approx \arcsen(0.7808) & \text{al restarse a } 180^\circ, \text{ se tiene:} \\ \omega \approx 128^\circ 39' 35'' & \omega \approx 51^\circ 20' 25'' & \begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' \\ - 51^\circ 20' 25'' \\ \hline \omega \approx 128^\circ 39' 35'' \end{array} \end{array}$$

Otra forma de obtener el ángulo ω es mediante el cálculo de la pendiente. Dado que se tiene como recta a $4x - 5y + 20 = 0$, entonces:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{-5} = \frac{4}{5}$$

La distancia del polo a la recta dada, forma una línea recta perpendicular, por la que sus pendientes deben ser recíprocas y de signo contrario, es decir:

Si $m_1 = \frac{4}{5}$ su recíproca y de signo contrario es:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$$

Al aplicar la ecuación $\omega = \arctan m_2$, se tiene:

$$\omega = \arctan\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\omega = \arctan(-1.25)$$

O bien,

$$\begin{array}{ll} \omega \approx -51^\circ 20' 25'' & \text{para el cuarto cuadrante.} \\ \omega \approx 180^\circ - 51^\circ 20' 25'' & \\ \omega \approx 128^\circ 39' 35'' & \text{para el segundo cuadrante.} \end{array}$$

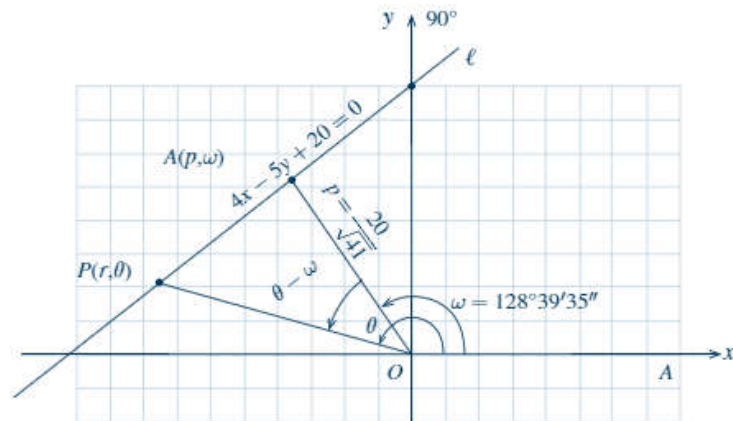
La ecuación de la recta en su forma polar normal es:

$$r \cos(\theta - \omega) = p$$

Al sustituir los datos encontrados, resulta:

$$r \cos(\theta - 128^\circ 39' 35'') = \frac{20}{\sqrt{41}}$$

Gráficamente se tiene:



La ecuación de la recta $4x - 5y + 20 = 0$ en su forma polar es:

$$r \cos(\theta - 128^\circ 39' 35'') = \frac{20}{\sqrt{41}}$$

- 3 ••• Encuentra la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $A(8, 120^\circ)$ y es perpendicular al eje polar.

Solución

La ecuación de la recta perpendicular al eje polar, se expresa como:

$$r \cos \theta = \pm p$$

Al sustituir los datos dados, se tiene:

$$8 \cos 120^\circ = p$$

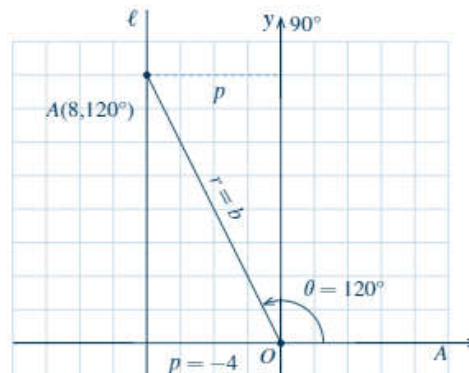
$$8 \left(-\frac{1}{2} \right) = p$$

$$-4 = p$$

La ecuación de la recta perpendicular al eje polar es:

$$r \cos \theta = -4$$

Gráficamente, se tiene:



- 4 •• Encuentra la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $K(5\sqrt{2}, 135^\circ)$ y es paralela al eje polar.

Solución

La ecuación de la recta paralela al eje polar, se expresa como:

$$r \operatorname{sen} \theta = \pm p$$

Al sustituir los datos dados, se tiene:

$$5\sqrt{2} \operatorname{sen} 135^\circ = p$$

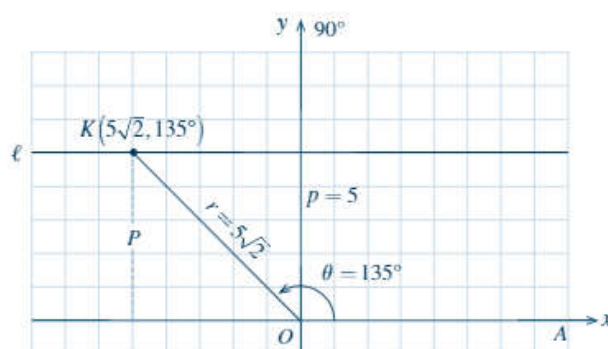
$$5\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = p$$

$$5 = p$$

La ecuación de la recta paralela al eje polar es:

$$r \operatorname{sen} \theta = 5$$

Gráficamente, se tiene:



EJERCICIO 11

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

- I. Transforma las siguientes coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

1. $A(8, 45^\circ)$

3. $Q(3\sqrt{2}, 150^\circ)$

5. $G(4\sqrt{2}, 225^\circ)$

2. $B(1, 90^\circ)$

4. $R(-4, 330^\circ)$

6. $H(7, 300^\circ)$

- II. Transforma las siguientes coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

1. $N(-5, -12)$

3. $B(-6, 9)$

5. $C(7, -4)$

2. $L(4, -7)$

4. $G(-7, -5)$

6. $Q(9, -7)$

- III. Encuentra la ecuación polar de las siguientes curvas, cuya ecuación rectangular se indica.

1. $5x - 4y + 20 = 0$

4. $xy = 8$

2. $6x^2 + 6y^2 + 4x - 12y + 18 = 0$

5. $x^2 - 4y - 4 = 0$

3. $x^2 - y^2 = 16$

6. $3x - 4y + 25 = 0$

7. $x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$

9. $y^2 = 4px$

8. $5x - 7y - 11 = 0$

10. $(x^2 + y^2)^2 = 2p^2 xy$

IV. Encuentra la ecuación rectangular de los siguientes lugares geométricos, cuya ecuación polar se indica.

1. $5 \cos \theta = r$

3. $\theta = 315^\circ$

5. $r = 3 \sin \theta$

2. $1 - 2 \cos \theta = r$

4. $r \cos \theta = 9$

6. $r = \frac{3}{3 - \cos \theta}$

V. Encuentra la distancia entre los siguientes pares de puntos dados.

1. $A\left(7, \frac{\pi}{4}\right)$ y $B\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$

3. $C(5, 30^\circ)$ y $D(5, -90^\circ)$

2. $K(-9, -120^\circ)$ y $L(6, 150^\circ)$

4. $G(5, 75^\circ)$ y $H(-2, 270^\circ)$

VI. Encuentra el área, perímetro y semiperímetro para los siguientes polígonos.

1. $A(0, 0^\circ)$, $B(4, 60^\circ)$ y $C(3, 135^\circ)$

2. $P(4, 120^\circ)$, $Q(6, 60^\circ)$ y $R(2, 30^\circ)$

3. $K(O, 20^\circ)$, $L(1, 60^\circ)$, $M(2, 45^\circ)$ y $N(3, 0^\circ)$

4. $A(0, 0^\circ)$, $B\left(8, \frac{\pi}{9}\right)$, $C\left(12, \frac{5\pi}{18}\right)$ y $D(4, 120^\circ)$

VII. Determina la ecuación polar de la recta que pasa por el punto dado y es perpendicular al radio vector de dicho punto.

1. $K(2, 60^\circ)$

3. $J(8, 15^\circ)$

5. $G(6, 45^\circ)$

2. $M(4, 120^\circ)$

4. $A(4, 150^\circ)$

6. $L(1, 55^\circ)$

VIII. Transforma las siguientes ecuaciones rectangulares de rectas a la forma polar.

1. $x - y - 3 = 0$

4. $5x + 12y + 26 = 0$

2. $7x + 12y - 56 = 0$

5. $2x - y + 3 = 0$

3. $4x + 3y - 10 = 0$

6. $2x - y = 0$

IX. Determina la ecuación polar de la recta que pasa por el punto dado y es perpendicular al eje polar.

1. $A(6, 150^\circ)$

3. $K(5, 25^\circ)$

5. $P(2, 45^\circ)$

2. $B(5\sqrt{2}, 135^\circ)$

4. $L(7, 240^\circ)$

6. $Q(7\sqrt{3}, 165^\circ)$

X. Determina la ecuación polar de la recta que pasa por el punto dado y es paralela al eje polar.

1. $G(6, 135^\circ)$

3. $A(3, 50^\circ)$

5. $Q(1, 65^\circ)$

2. $H(8, 210^\circ)$

4. $K(7, 140^\circ)$

6. $M(8\sqrt{2}, 150^\circ)$

XI. Determina la ecuación polar de la recta que pasa por los siguientes pares de puntos dados.

1. $P(5, 20^\circ)$ y $Q(8, 135^\circ)$

2. $M(6, 30^\circ)$ y $N(3, 120^\circ)$

XII. Resuelve los siguientes problemas.

- Los lados de un cuadrado miden 4 unidades, dicho cuadrado tiene su centro en el polo y dos de sus lados son paralelos al eje polar; determina el par principal de coordenadas polares de cada uno de sus cuatro vértices.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

2. Un hexágono regular tiene su centro en el polo y dos lados paralelos al eje polar; si la longitud de un lado es de 3 unidades, determina el par principal de coordenadas polares de cada uno de sus seis vértices.
3. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son $A(0,0^\circ)$ y $B(4,0^\circ)$, encuentra el par principal de coordenadas polares del tercer vértice.
4. Determina la ecuación polar de la recta paralela al eje polar que está situada a 5 unidades por debajo del eje.
5. Demuestra por coordenadas polares que los siguientes puntos $A(-1,1)$, $B(3,1)$ y $C(1,4.46)$ son los vértices de un triángulo equilátero y determina su área.
6. Demuestra por coordenadas polares que los siguientes puntos $A(-5,0)$, $B(0,2)$ y $C(0,-2)$ son los vértices de un triángulo isósceles y determina su área.
7. Demuestra por medio de distancias que los puntos dados $A(3,30^\circ)$, $B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 60^\circ\right)$ y $C(3,90^\circ)$ son colineales.
8. Encuentra el área, perímetro y semiperímetro para un triángulo cuyos vértices son el polo y los puntos $Q(2,60^\circ)$ y $R(1,135^\circ)$.
9. Demuestra que las ecuaciones polares de las rectas que son perpendiculares y paralelas al eje polar se expresan en la forma $r = \pm p \sec \theta$ y $r = \pm p \csc \theta$, respectivamente, donde p es la distancia del polo a la recta.
10. Determina la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $A(5,60^\circ)$ y forma un ángulo de 120° con el eje polar.
11. Encuentra la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $Q(4,120^\circ)$ y por el polo.
12. Determina la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $M\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ y es perpendicular a la recta que une el polo con dicho punto.
13. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $K(7,20^\circ)$ y forma un ángulo de 140° con el eje polar.
14. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $R(4,120^\circ)$ y es perpendicular a la que une al polo con dicho punto.
15. Dos de los vértices de un paralelogramo son los puntos $A(3,-80^\circ)$ y $B\left(5, \frac{3\pi}{14}\right)$; si el punto de intersección de sus diagonales es el polo, encuentra las coordenadas de los otros dos vértices del paralelogramo.

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

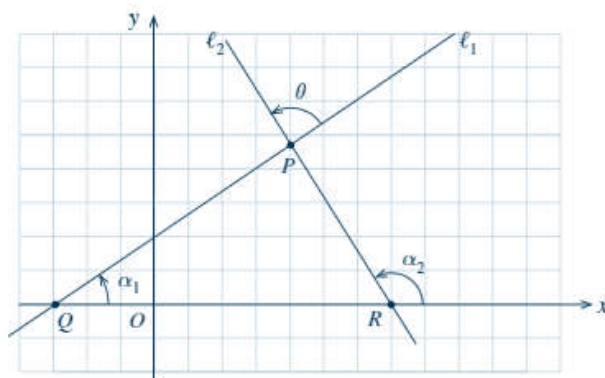
Ángulo entre dos rectas

Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas que se cortan en el punto P y que cortan al eje x en los puntos Q y R ; las cuales forman con el eje x ángulos α_1 y α_2 , de tal forma que sus pendientes son $m_1 = \tan \alpha_1$ y $m_2 = \tan \alpha_2$, donde α_1 y α_2 son diferentes de $\frac{\pi}{2}$.

Al cortarse, las rectas forman dos ángulos suplementarios, uno de ellos es el ángulo θ , cuya relación con las rectas se muestra en los siguientes casos.

Caso 1

Gráficamente, se tiene:



Los principios básicos de la geometría establecen que un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos, es decir:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$$

De tal forma, que el ángulo entre las rectas es:

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Al aplicar la fórmula trigonométrica: $\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1}$, se tiene:

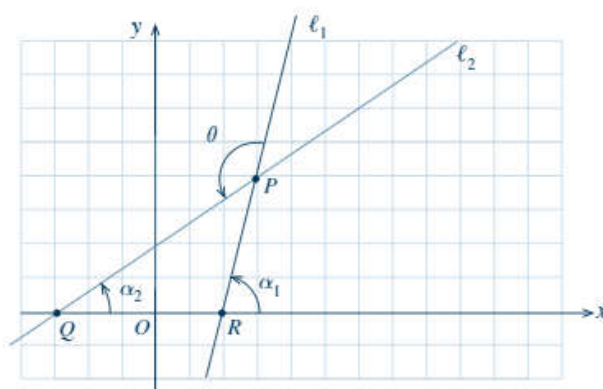
$$\tan \theta = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1}$$

Al sustituir $m_1 = \tan \alpha_1$ y $m_2 = \tan \alpha_2$ resulta:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}, \text{ para } m_2 m_1 \neq -1.$$

Caso 2

Gráficamente, se tiene:



Por geometría elemental, se tiene que:

$$\begin{aligned}\theta &= \alpha_2 + (180^\circ - \alpha_1) \\ -180^\circ + \theta &= \alpha_2 - \alpha_1 \\ 180^\circ - \theta &= \alpha_1 - \alpha_2\end{aligned}$$

Al aplicar la misma fórmula trigonométrica del caso anterior para las tangentes, resulta:

$$\tan (180^\circ - \theta) = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}$$

Por la fórmula trigonométrica: $\tan (180^\circ - \theta) = -\tan \theta$, se tiene:

$$-\tan \theta = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} \quad \tan \theta = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}$$

Al sustituir $m_1 = \tan \alpha_1$ y $m_2 = \tan \alpha_2$, resulta:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \text{ para } m_1 m_2 \neq -1.$$

Teorema

Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas que tienen pendientes m_1 y m_2 , respectivamente; si θ es el ángulo dirigido de ℓ_1 a ℓ_2 , se establece que:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \text{ para } m_1 m_2 \neq -1.$$

Para saber cuál de los dos ángulos se va determinar (Caso I o Caso II) se debe considerar que el ángulo se mide girando en el sentido contrario a las manecillas del reloj, por lo que la recta ℓ_1 será la que corresponde al **lado inicial** del ángulo y la recta ℓ_2 la que corresponde al **lado final**.

Deducción de las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas

Cuando dos rectas son paralelas, el ángulo que se forma entre ellas es de 0° o de 180° . Al aplicar la fórmula para determinar el ángulo de dos rectas, resulta:

Para $\theta = 0^\circ$

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \\ \tan 0^\circ &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \\ 0 &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \\ m_2 - m_1 &= 0\end{aligned}$$

$$m_2 = m_1$$

Para $\theta = 180^\circ$

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \\ \tan 180^\circ &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \\ 0 &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \\ m_2 - m_1 &= 0\end{aligned}$$

$$m_2 = m_1$$

Por el carácter simétrico o recíproco de la igualdad, se tiene que $m_1 = m_2$. Por consecuencia, se establece: **si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales.**

Cuando dos rectas son perpendiculares, el ángulo que se forma entre ellas es de 90° , entonces, al aplicar la fórmula para determinar el ángulo de dos rectas, resulta:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\tan 90^\circ = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Como $\tan 90^\circ = \infty$, la ecuación anterior no apoya el principio que se desea demostrar, por lo que es necesario emplear la siguiente identidad:

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Al sustituir en la expresión anterior, resulta:

$$\cot \theta = \frac{1}{\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}}$$

$$\cot 90^\circ = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}$$

$$0 = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}$$

$$1 + m_1 m_2 = 0$$

$$m_1 m_2 = -1$$

Por consecuencia, se establece: **dos rectas son perpendiculares entre sí, cuando el producto de sus pendientes es igual a -1 .**

También de la ecuación $m_1 m_2 = -1$, se tiene:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Lo que da lugar al siguiente criterio equivalente: *dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son recíprocas y de signos contrarios.*

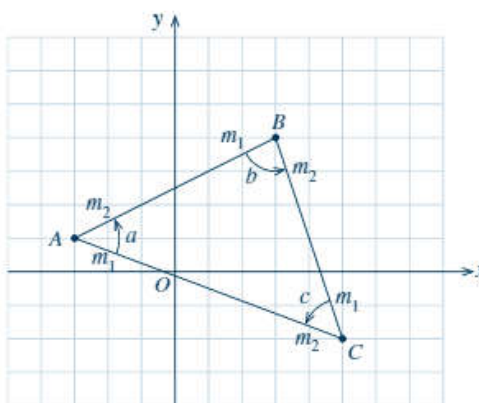
EJEMPLOS

Ejemplos

- Determina los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-2,1)$, $B(3,4)$ y $C(5,-2)$ y comprueba los resultados.

Solución

Al elaborar la gráfica de los puntos dados, se tiene:



Se determinan las pendientes de los lados del triángulo, es decir:

$$\begin{aligned} m_{\overline{AB}} &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} \\ m_{\overline{BC}} &= \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{4 + 2}{3 - 5} = \frac{6}{-2} = -3 \\ m_{\overline{AC}} &= \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{1 + 2}{-2 - 5} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

Al aplicar la fórmula $\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, resulta:

Para el $\sphericalangle a$

$$\tan a = \frac{m_{\overline{AB}} - m_{\overline{AC}}}{1 + m_{\overline{AC}} m_{\overline{AB}}}$$

$$\tan a = \frac{\frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{7}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{7}\right)\left(\frac{3}{5}\right)}$$

$$\tan a = \frac{\frac{21 + 15}{35}}{\frac{35 - 9}{35}}$$

$$\tan a = \frac{36}{26} = 1.3846$$

$$\sphericalangle a = \arctan(1.3846)$$

$$\sphericalangle a = 54^{\circ}09'44''$$

Para el $\sphericalangle b$

$$\tan b = \frac{m_{\overline{BC}} - m_{\overline{AB}}}{1 + m_{\overline{AB}} m_{\overline{BC}}}$$

$$\tan b = \frac{-3 - \frac{3}{5}}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)(-3)}$$

$$\tan b = \frac{\frac{-18}{5}}{\frac{5 - 9}{5}}$$

$$\tan b = \frac{-18}{-4} = 4.5$$

$$\sphericalangle b = \arctan(4.5)$$

$$\sphericalangle b = 77^{\circ}28'16''$$

Para el $\sphericalangle c$

$$\tan c = \frac{m_{\overline{AC}} - m_{\overline{BC}}}{1 + m_{\overline{BC}} m_{\overline{AC}}}$$

$$\tan c = \frac{-\frac{3}{7} - (-3)}{1 + (-3)\left(-\frac{3}{7}\right)}$$

$$\tan c = \frac{\frac{-3 + 21}{7}}{\frac{7 + 9}{7}}$$

$$\tan c = \frac{18}{16} = 1.125$$

$$\sphericalangle c = \arctan(1.125)$$

$$\sphericalangle c = 48^{\circ}21'59''$$

Como los ángulos interiores de todo triángulo suman 180° , se tiene una aproximación por redondeo:

$$\begin{aligned}\angle a + \angle b + \angle c &= 180^\circ \\ 54^\circ 09' 44'' + 77^\circ 28' 16'' + 48^\circ 21' 59'' &= 180^\circ \\ 179^\circ 59' 59'' &\approx 180^\circ\end{aligned}$$

- 2 ••• Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45° , la recta inicial pasa por los puntos $A(-2,1)$ y $B(9,7)$ y la recta final pasa por el punto $P(3,9)$ y por el punto Q , cuya abscisa es -2 ; determina la ordenada de Q .

Solución

De acuerdo con los datos dados, es necesario determinar las pendientes de las rectas inicial y final, dado que se conoce el ángulo entre las dos rectas, se tiene:

$$\begin{aligned}m_i &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 7}{-2 - 9} = \frac{-6}{-11} = \frac{6}{11} \\ m_f &= \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{9 - y}{3 - (-2)} = \frac{9 - y}{5}\end{aligned}$$

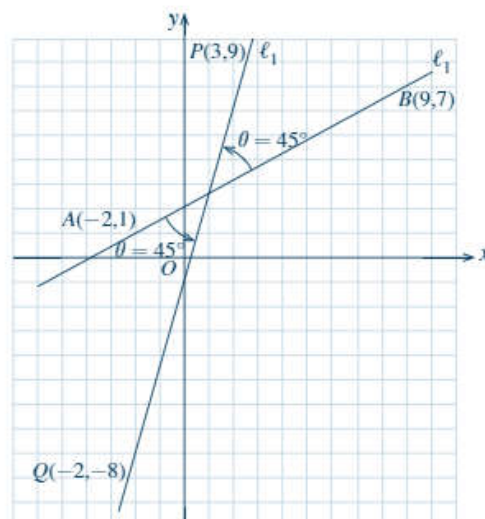
Al sustituir en la fórmula del ángulo de dos rectas, resulta:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{m_f - m_i}{1 + m_i m_f} \\ \tan 45^\circ &= \frac{\frac{9 - y}{5} - \frac{6}{11}}{1 + \left(\frac{6}{11}\right)\left(\frac{9 - y}{5}\right)} \\ \tan 45^\circ &= \frac{11(9 - y) - (5)(6)}{1 + \frac{54 - 6y}{55}} \\ \tan 45^\circ &= \frac{99 - 11y - 30}{\frac{55 + 54 - 6y}{55}} \\ \tan 45^\circ &= \frac{69 - 11y}{109 - 6y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1(109 - 6y) &= 69 - 11y \\ 109 - 6y + 11y &= 69 \\ 5y &= 69 - 109 \\ y &= \frac{-40}{5} \\ y &= -8\end{aligned}$$

La ordenada del punto Q es -8 .

Gráficamente, se tiene:



Posiciones relativas de dos rectas

A continuación discutiremos las condiciones analíticas de las posiciones relativas de dos rectas, cuyas ecuaciones se expresan en las formas generales $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$, bajo las cuales estas dos rectas son:

1. **Paralelas.** De la recta $Ax + By + C = 0$, su pendiente es $m = -\frac{A}{B}$, para $B \neq 0$; para la recta $A'x + B'y + C' = 0$, su pendiente es $m' = -\frac{A'}{B'}$, para $B' \neq 0$.

Con base en el principio que establece que si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales, se tiene que: $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$, o bien, $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$. Esta expresión puede escribirse como:

$$AB' = A'B$$

Al dividir la igualdad entre $A'B'$, resulta:

$$\frac{AB'}{A'B'} = \frac{A'B}{A'B'} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \end{array} \right\} \text{ Esto indica que los coeficientes de } x \text{ y } y \text{ deben ser proporcionales.}$$

La expresión anterior sólo se aplica cuando $A' \neq 0$ y $B' \neq 0$. Si $A' = 0$, la recta es paralela al eje x , de esta forma, ambas rectas serán horizontales; cuando $B' = 0$, la recta es paralela al eje y , entonces, ambas rectas serán verticales.

Entonces, la relación equivalente $AB' = A'B$ es verdadera para cualquier caso.

2. **Perpendiculares.** Con base en el principio que establece que si dos rectas son perpendiculares entre sí, el producto de sus pendientes es igual a -1 , se tiene que:

$$m = -\frac{A}{B} \qquad m' = -\frac{A'}{B'}$$

De tal forma que:

$$\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1$$

Lo anterior da lugar a la relación $AA' + BB' = 0$, sea verdadera para cualquier caso, siempre que las rectas sean perpendiculares.

3. **Coinciden.** Cuando dos rectas tienen todos los puntos comunes y la misma pendiente, se dice que son coincidentes.

Dadas las rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$, su intersección con el eje x , será el punto de abscisa, es decir:

$$x = -\frac{C}{A} \quad x = -\frac{C'}{A'}$$

Por lo anterior, se establece que $-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'}$, lo que da lugar a la siguiente relación:

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$$

Como las pendientes son iguales, se tiene que $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$, o la relación: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$. Al relacionar ambos criterios, queda: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, es decir, dos rectas son coincidentes, si sus coeficientes correspondientes son proporcionales.

Lo anterior es verdadero sólo si todos los coeficientes son diferentes de cero. Las relaciones equivalentes $A = kA'$, $B = kB'$ y $C = kC'$, para alguna constante k , caracterizan a dos rectas coincidentes cualquier caso.

4. **Se cortan en uno y solamente un punto.** Dos rectas no paralelas, por geometría, se cortan en uno y solamente en un punto; analíticamente, se deduce que sus pendientes no son iguales, por lo que sus coeficientes no son proporcionales, es decir:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}, \text{ o bien, } AB' - A'B \neq 0.$$

EJEMPLOS

1. La ecuación de una recta es $3x - 2y - 6 = 0$; determina la ecuación que representa a todas las rectas paralelas a la recta dada. A partir de esta última ecuación encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta dada y que pasa por el punto $A(-3,5)$.

Solución

La ecuación de la recta que representa a todas las rectas paralelas a la ecuación $3x - 2y - 6 = 0$, es:

$$Ax + By + C = 0$$

La condición de paralelismo establece que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \text{ es decir, } \frac{A}{3} = \frac{B}{-2}$$

$$B = -\frac{2A}{3}$$

Al sustituir en la ecuación $Ax + By + C = 0$, se tiene:

$$Ax + \left(-\frac{2A}{3}\right)y + C = 0$$

$$3Ax - 2Ay + 3C = 0$$

Al dividir entre A , resulta:

$$\frac{3\cancel{A}x}{\cancel{A}} - \frac{2\cancel{A}y}{\cancel{A}} + \frac{3C}{A} = 0$$

Al hacer $k = \frac{3C}{A}$, se tiene:

$$3x - 2y + \frac{3C}{A} = 0$$

$$3x - 2y + k = 0$$

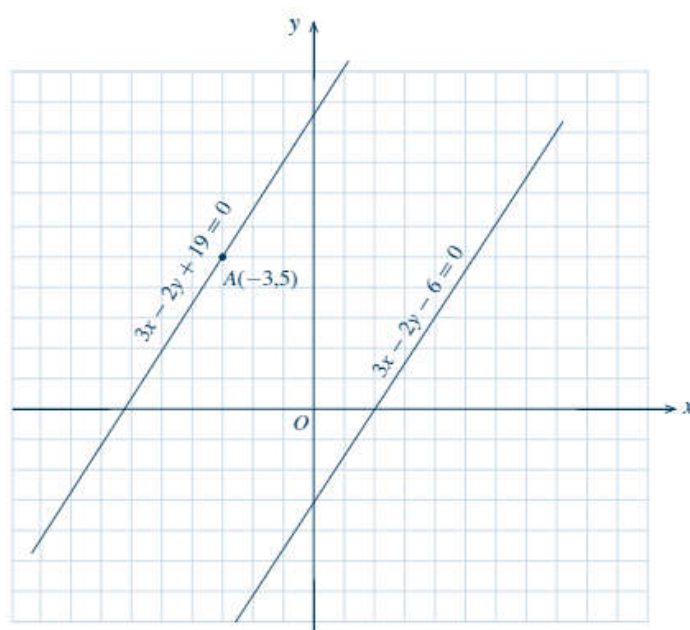
Ecuación que representa a todas las rectas paralelas a $3x - 2y - 6 = 0$

Específicamente, la recta paralela a la recta dada debe pasar por el punto $A(-3,5)$, es decir:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + k &= 0 \\ 3(-3) - 2(5) + k &= 0 \\ -9 - 10 + k &= 0 \\ k &= 19 \end{aligned}$$

La ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3,5)$ y que es paralela a la recta dada es $3x - 2y + 19 = 0$.

Gráficamente, se tiene:



- 2 •• Demuestra que las rectas $3x - 15y - 21 = 0$ y $x - 5y - 7 = 0$, son coincidentes.

Solución

La condición que establece la coincidencia, indica que dos rectas tienen todos los puntos comunes y la misma pendiente, es decir:

$$m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-15} = \frac{1}{5} \quad m_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5}$$

Como las pendientes son iguales, se debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

Al sustituir los coeficientes de las ecuaciones en la relación, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{3}{1} &= \frac{-15}{-5} \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

La intersección de las rectas dadas con el eje x son:

$$x_1 = -\frac{C}{A} = -\frac{-21}{3} = 7 \quad x_2 = -\frac{-7}{1} = 7$$

Como ambas rectas tienen el mismo punto en común, se debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$$

Al sustituir los coeficientes de las ecuaciones en la relación, se tiene

$$\frac{3}{1} = \frac{-21}{-7}$$

$$3 = 3$$

El principio de rectas coincidentes establece que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

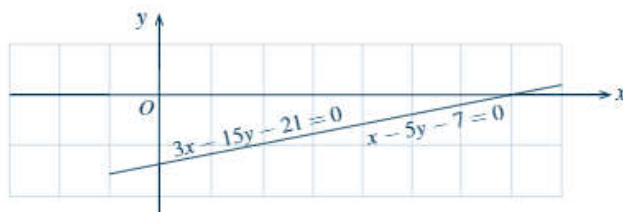
Al sustituir los coeficientes de las ecuaciones en la relación, se tiene:

$$\frac{3}{1} = \frac{-15}{-5} = \frac{-21}{-7}$$

$$3 = 3 = 3$$

Por lo tanto, se demuestra que las dos rectas dadas son coincidentes.

Gráficamente, se tiene:



- 3 ••• Demuestra que las rectas $3x + 4y - 12 = 0$ y $5x + 12y - 60 = 0$, se cortan en uno y solamente en un punto; determina las coordenadas del punto de intersección.

Solución

La condición que establece la intersección en uno y solamente un punto, indica que las dos rectas no tienen pendientes iguales y sus coeficientes no son proporcionales, es decir:

$$m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{4} \quad m_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{5}{12} \quad \therefore \quad \begin{matrix} m_1 \neq m_2 \\ -\frac{3}{4} \neq -\frac{5}{12} \end{matrix}$$

Como las pendientes no son iguales, se debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \quad \text{o} \quad AB' - A'B \neq 0$$

Al sustituir los coeficientes de las ecuaciones en la relación, se tiene:

$$\frac{3}{5} \neq \frac{4}{12} \quad \text{o} \quad (3)(12) - (5)(4) \neq 0$$

$$0.666... \neq 0.333... \quad 16 \neq 0$$

Por lo anterior, se demuestra que las dos rectas dadas se cortan en uno y solamente en un punto.

Al resolver el sistema de ecuaciones dadas, se tiene:

$$3x + 4y - 12 = 0 \quad (1)$$

$$5x + 12y - 60 = 0 \quad (2)$$

Al multiplicar la ecuación (1) por -3 , resulta:

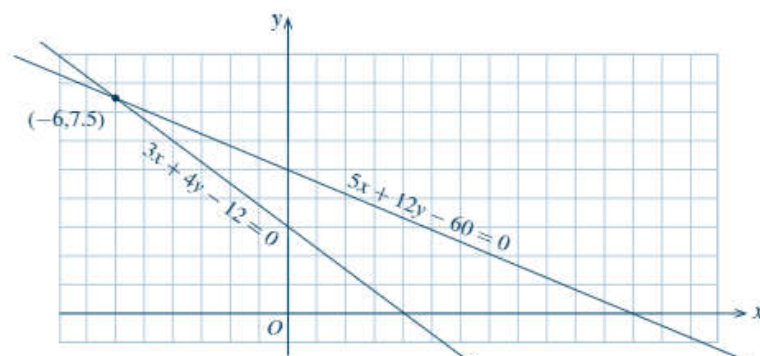
$$\begin{array}{rcl} -3(3x + 4y - 12) = 0 & \longrightarrow & \begin{array}{r} -9x - 12y + 36 = 0 \\ 5x + 12y - 60 = 0 \\ \hline -4x - 24 = 0 \\ -4x = 24 \\ x = \frac{24}{-4} \\ x = -6 \end{array} \end{array}$$

Al sustituir el valor de x en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} 5(-6) + 12y - 60 &= 0 \\ -30 + 12y - 60 &= 0 \\ 12y - 90 &= 0 \\ 12y &= 90 \\ y &= \frac{90}{12} \\ y &= 7.5 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas son $(-6, 7.5)$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



EJERCICIO 12

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Determina los ángulos interiores de los siguientes triángulos cuyos vértices son los puntos que a continuación se indican y comprueba los resultados.

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $A(-2,0)$, $B(5,-5)$ y $C(3,7)$ | 4. $P(1,-8)$, $Q(9,0)$ y $R(-3,4)$ |
| 2. $A(2,1)$, $B(6,0)$ y $C(7,4)$ | 5. $K(-5,-4)$, $L(9,-2)$ y $M(1,6)$ |
| 3. $K(2,5)$, $L(-3,-2)$ y $M(4,2)$ | 6. $A(-2,3)$, $B(4,4)$ y $C(-3,-1)$ |

II. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute el procedimiento de solución.

- Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135° ; si la recta inicial pasa por los puntos $A(-4,5)$ y $B(3,9)$, y la recta final pasa por los puntos $K(-2,4)$ y $L(x,1)$, determina la abscisa de L .
- La recta ℓ_1 forma un ángulo de 30° con la recta ℓ_2 ; si la pendiente de ℓ_2 es $2\sqrt{3}$, calcula la pendiente de ℓ_1 .
- Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45° ; si la recta final pasa por los puntos $A(5,3)$ y $B(2,-1)$, determina la pendiente de la recta inicial.
- Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(4,5)$ y forma un ángulo de 135° con la recta $4x - 2y + 2 = 0$.
- Determina el ángulo que se forma entre las rectas $2x - 6y + 12 = 0$ y $2x - y + 1 = 0$.
- El ángulo formado entre dos rectas es de 45° ; si una de las rectas tiene por pendiente $-\frac{2}{3}$, determina la pendiente de la otra recta.
- Determina los ángulos interiores del paralelogramo cuyos vértices son $A(4,8)$, $B(8,6)$, $C(6,2)$ y $D(2,4)$; comprueba los resultados.
- Encuentra el ángulo obtuso del paralelogramo cuyos vértices son $K(7,3)$, $L(10,7)$, $M(1,5)$ y $N(-2,1)$.
- Demuestra que los tres puntos $A(6,-5)$, $B(3,2)$ y $C(10,5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo y determina sus ángulos agudos.
- Encuentra el área del triángulo cuyos vértices son $A(2,-4)$, $B(4,4)$ y $C(7,-2)$; emplea la fórmula $A = \frac{1}{2}ab \sin C$.
- El ángulo entre dos rectas es de 60° ; si la pendiente de la recta final es -5 , determina la pendiente de la recta inicial.
- Encuentra el ángulo que se forma entre las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$.
- Aplica la fórmula $A = \frac{1}{2}ab \sin C$ y determina el área del triángulo cuyos vértices son $A(-8,-2)$, $B(-4,-6)$ y $C(-1,5)$.
- Encuentra los ángulos interiores del cuadrilátero de vértices $A(0,0)$, $B(2,4)$, $C(6,7)$ y $D(8,-1)$; comprueba los resultados.
- La ecuación de una recta es $x + 6y + 16 = 0$, escribe la ecuación que representa a todas las rectas paralelas a la recta dada y determina específicamente la ecuación de la recta paralela a la dada que pasa por $A(2,-3)$.
- Demuestra que las rectas $3x + 2y = 0$ y $2x - 3y + 6 = 0$ satisfacen la condición de perpendicularidad.

17. Determina si las siguientes rectas $3x + 4y + 8 = 0$ y $5x + 12y - 15 = 0$ se intersecan; en caso afirmativo, encuentra las coordenadas del punto de intersección.
18. Dadas las ecuaciones $4x + 3y - 12 = 0$ y $8x + 6y - 24 = 0$, demuestra que son rectas coincidentes.
19. La recta ℓ_1 pasa por el origen y por el punto $A(4,3)$; la recta ℓ_2 pasa por A y es perpendicular a la recta $6x - 5y - 16 = 0$; determina los ángulos formados por ℓ_1 y ℓ_2 .
20. Traza una recta que pase por P y que sea perpendicular a $\overline{QR}$ del triángulo cuyos vértices son $P(2,6)$, $Q(8,2)$ y $R(-2,-8)$; encuentra el ángulo formado por dicha recta y el lado $\overline{PQ}$ del triángulo.

III. Dados los siguientes pares de ecuaciones, elabora la gráfica y demuestra las condiciones analíticas para el paralelismo, perpendicularidad, coincidencia e intersección en uno y solamente un punto (determina las coordenadas del punto de intersección).

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $5x - 7y - 6 = 0$
$5x - 7y + 18 = 0$ | 4. $3x - 7y + 3 = 0$
$4x + 2y - 13 = 0$ | 7. $2x - y - 1 = 0$
$4x - 2y - 2 = 0$ |
| 2. $x - y + 1 = 0$
$x - y - 5 = 0$ | 5. $3x - 4y + 12 = 0$
$9x - 12y + 36 = 0$ | 8. $3x + 2y - 5 = 0$
$3x + 2y + 15 = 0$ |
| 3. $3x - y + 3 = 0$
$2x - y + 4 = 0$ | 6. $7x + 5y - 27 = 0$
$x - 7y + 9 = 0$ | 9. $5x + 4y - 20 = 0$
$4x - 9y + 11 = 0$ |

IV. Determina los ángulos suplementarios que se forman entre las dos rectas dadas.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $x + y - 5 = 0$
$x - 5y + 5 = 0$ | 3. $3x - 5y + 8 = 0$
$x + y - 3 = 0$ | 5. $2x + y - 2 = 0$
$10x - 12y - 29 = 0$ |
| 2. $3x - 9y + 33 = 0$
$5x + 3y - 15 = 0$ | 4. $5x - 9y - 38 = 0$
$6x + 5y - 82 = 0$ | 6. $4x - 5y + 17 = 0$
$x - 3y + 11 = 0$ |

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Familias de rectas

La ecuación de una recta se determina por completo si se conocen dos condiciones independientes, es decir, dos de sus puntos o uno de sus puntos y su pendiente. Una recta que cumple solamente una condición no es una recta única, por lo que existen una infinidad de rectas que satisfacen dicha condición y tienen una propiedad en común. Por tanto, la totalidad de las rectas que cumplen con una única condición geométrica, se denominan **familias de líneas rectas o haz de rectas**.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Determina la familia de rectas cuya pendiente sea 7, si la ordenada al origen es igual a 0.2 y -3 .

Solución

Al aplicar la ecuación pendiente-ordenada en el origen de la recta, se tiene:

$$y = mx + b$$

$$y = 7x + k$$

Dado que k es una constante arbitraria, a la que se le asigna cualquier valor real, que representa el segmento que la recta determina sobre el eje y .

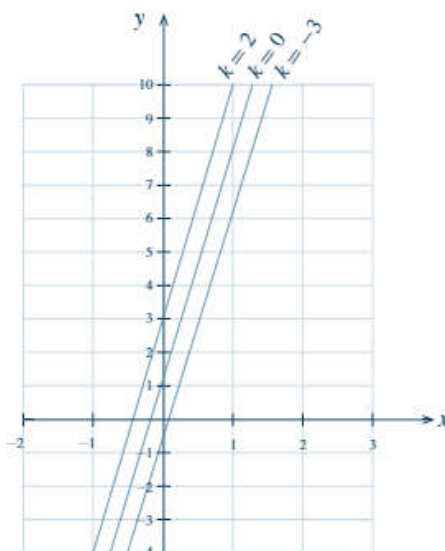
Al sustituir los valores de la ordenada, se obtiene la ecuación de cualquiera de las rectas que forman la familia, es decir:

Para $k = 0$
 $y = 7x + 0$
 $7x - y = 0$

Para $k = 2$
 $y = 7x + 2$
 $7x - y + 2 = 0$

Para $k = -3$
 $y = 7x - 3$
 $7x - y - 3 = 0$

Gráficamente, se tiene:



Al considerar que todas las rectas pasan por el punto $A(-4,3)$; se aplica la ecuación punto-pendiente de la recta, es decir:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = k(x + 4)$$

En este caso, k representa la pendiente dada.

De tal forma que si k es igual a 0,2 y -1 , resulta:

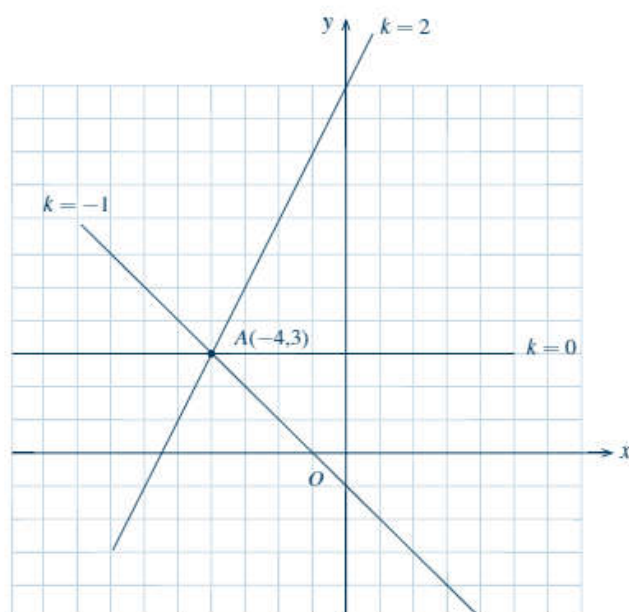
Para $k = 0$
 $y - 3 = 0(x + 4)$
 $y - 3 = 0$

Para $k = 2$
 $y - 3 = 2(x + 4)$
 $y - 3 = 2x + 8$
 $2x - y + 11 = 0$

Para $k = -1$
 $y - 3 = -1(x + 4)$
 $y - 3 = -x - 4$
 $x + y + 1 = 0$

La familia de rectas obtenidas se denomina **haz de rectas de vértice** $A(-4,3)$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



Por todo lo anterior, se observa que una recta de una familia de rectas, se determina al asignar un valor específico a la constante k , que se denomina **parámetro de la familia**.

La definición de **familia o haz de rectas** es útil para encontrar la ecuación de una recta en particular. El proceso consta de dos pasos:

1. Se aplica la forma de la ecuación que satisfaga la condición dada, describiendo la familia o haz de rectas.
2. Dada otra condición, se determina el valor del parámetro de la familia o haz de rectas.

- 2** ●● Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el $A(-3,5)$ tal que la suma algebraica de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es igual a 4.

Solución

Se aplica la forma simétrica de la ecuación de la recta, ya que satisface la condición dada, es decir:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Como $a + b = 4$, se puede tomar $a = k$ y $b = 4 - k$, se tiene:

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{4-k} = 1, \text{ donde } k \neq 4.$$

Como la recta pasa por el punto $A(-3,5)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{-3}{k} + \frac{5}{4-k} &= 1 \\ \frac{-3(4-k) + 5k}{k(4-k)} &= 1 \\ -12 + 3k + 5k &= k(4-k) \\ -12 + 8k &= 4k - k^2 \\ k^2 + 8k - 4k - 12 &= 0 \\ k^2 + 4k - 12 &= 0\end{aligned}$$

Al resolver la ecuación de segundo anterior se obtiene el valor del parámetro k :

$$\begin{aligned}k &= \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-12)}}{2} \\ k &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} \\ k &= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} \\ k_1 &= \frac{-4 + 8}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ k_2 &= \frac{-4 - 8}{2} = \frac{-12}{2} = -6\end{aligned}$$

Al sustituir los valores del parámetro k en la ecuación original, se tiene:

Para $k = 2$

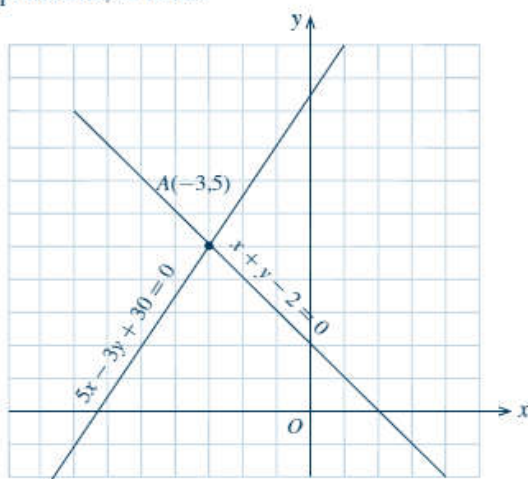
$$\begin{aligned}\frac{x}{k} + \frac{y}{4-k} &= 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4-2} &= 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} &= 1 \\ \frac{x+y}{2} &= 1 \\ x+y &= 2 \\ x+y-2 &= 0\end{aligned}$$

Para $k = -6$

$$\begin{aligned}\frac{x}{k} + \frac{y}{4-k} &= 1 \\ \frac{x}{-6} + \frac{y}{4+6} &= 1 \\ -\frac{x}{6} + \frac{y}{10} &= 1 \\ \frac{-10x + 6y}{60} &= 1 \\ -10x + 6y &= 60 \\ -10x + 6y - 60 &= 0 \\ 5x - 3y + 30 &= 0\end{aligned}$$

De esta forma se determinaron dos rectas que tienen como propiedad pasar por el punto $A(-3,5)$ que satisfacen la condición dada de que la suma algebraica de los segmentos sobre los ejes coordenados sea igual a 4.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



Familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas

Sean $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ dos rectas que se cortan en el punto $P_1(x_1, y_1)$. La expresión:

$$k_1(Ax + By + C) + k_2(A'x + B'y + C') = 0$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias ambas distintas de cero, corresponde a la ecuación de una tercera recta que pasa también por el punto $P_1(x_1, y_1)$ ya que al sustituir x por x_1 , y por y_1 , se tiene:

$$k_1(Ax_1 + By_1 + C) + k_2(A'x_1 + B'y_1 + C') = 0$$

lo cual es cierto porque $Ax_1 + By_1 + C = 0$ y $A'x_1 + B'y_1 + C' = 0$.

Como $k_1 \neq 0$, la ecuación de esta tercera recta se puede dividir entre esta constante para obtener la siguiente expresión:

$$Ax + By + C + \frac{k_2}{k_1}(A'x + B'y + C') = 0$$

Si definimos $\frac{k_2}{k_1} = k$, la ecuación puede escribirse en la forma equivalente:

$$Ax + By + C + k(A'x + B'y + C') = 0.$$

donde k es una constante arbitraria. Dependiendo del valor que tome la constante k , la recta podrá variar su pendiente pero sigue pasando por el punto $P_1(x_1, y_1)$. De esta forma se tiene la ecuación general de una familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas, dadas, aun sin conocer dicho punto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x + y - 16 = 0$ y $4x - 7y - 13 = 0$ y por el punto $P(-2, 4)$.

Solución

La familia de rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas dadas, se representa por la siguiente ecuación:

$$Ax + By + C + k(A'x + B'y + C') = 0$$

$$3x + y - 16 + k(4x - 7y - 13) = 0$$

Como la recta que se busca debe pasar por el punto $P(-2, 4)$, al sustituir, resulta:

$$3(-2) + 4 - 16 + k[4(-2) - 7(4) - 13] = 0$$

$$-6 + 4 - 16 + k(-8 - 28 - 13) = 0$$

$$-18 - 49k = 0$$

$$-49k = 18$$

$$k = \frac{18}{-49}$$

$$k = -\frac{18}{49}$$

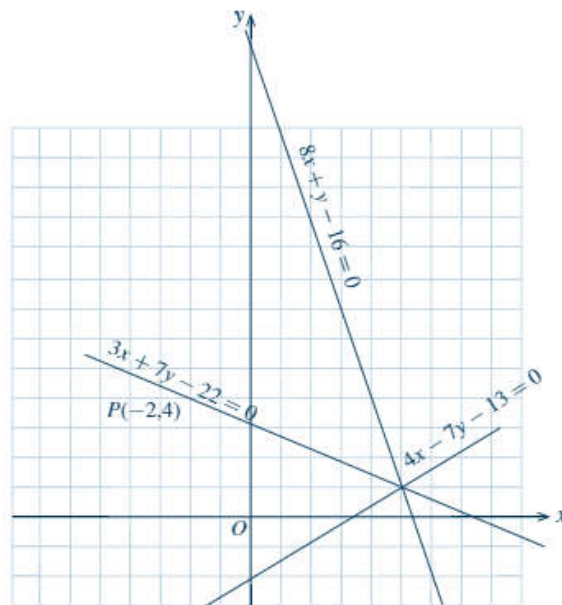
De tal forma que la ecuación:

$$3x + y - 16 - \frac{18}{49}(4x - 7y - 13) = 0$$

Al realizar las operaciones, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{3x + y - 16}{1} - \frac{72x - 126y - 234}{49} &= 0 \\ \frac{147x + 49y - 784 - 72x + 126y + 234}{49} &= 0 \\ 75x + 175y - 550 &= 0 \\ 3x + 7y - 22 &= 0 \end{aligned}$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



2 ••• Describe la propiedad que tienen en común todas las rectas de cada una de las siguientes familias:

a) $4x + 5y - k = 0$

c) $y - 1 = k(x + 3)$

b) $y = kx + 5$

d) $\frac{x}{7} + \frac{y}{k} = 1$, para $k \neq 0$

Solución

a) Con base en la ecuación dada, las rectas de la familia deben tener como propiedad común, el valor de su pendiente, es decir:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{5}$$

b) Con base en la ecuación dada, las rectas de la familia deben tener como propiedad común el segmento que determinan sobre el eje y sea 5 (ordenada en el origen 5).

c) Con base en la ecuación dada, las rectas de la familia deben tener como propiedad común pasar por el punto $A(-3, 1)$.

d) Con base en la ecuación dada, las rectas de la familia deben tener como propiedad común el segmento que determinan sobre el eje x sea 7 (abscisa en el origen 7).

EJERCICIO 13

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Escribe la ecuación que representa la familia de rectas que son paralelas a las siguientes rectas dadas; traza para cada caso tres elementos de la familia e indica el valor del parámetro.

1. $15x - 11y - 58 = 0$

4. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$

2. $7x + 8y + 41 = 0$

5. $y = -3x - 2$

3. $4x - 5y - 10 = 0$

6. $y = -5x + 27$

II. Escribe la ecuación que representa la familia de rectas que son perpendiculares a las siguientes rectas dadas; traza para cada caso tres elementos de la familia e indica el valor del parámetro.

1. $x + y - 5 = 0$

4. $x + 2y - 13 = 0$

2. $3x - 4y + 18 = 0$

5. $5x - y - 6 = 0$

3. $x - 6y + 19 = 0$

6. $2x + 3y - 8 = 0$

III. Describe la propiedad común que tienen todas las rectas de cada una de las siguientes familias.

1. $3x + 2y - k = 0$

6. $y + 5 = k(x + 2)$

2. $4x + y - k = 0$

7. $\frac{x}{2} + \frac{y}{k} = 1$

3. $y = kx + 2$

8. $\frac{x}{k} + \frac{y}{3} = 1$

4. $y = kx - 8$

5. $y - 1 = k(x - 4)$

IV. Resuelve los siguientes problemas y discute tus resultados con el resto del grupo.

- Encuentra el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $kx - y + 3 = 0$ que le corresponda pase por el punto $A(2,7)$. Determina la ecuación de la recta.
- Encuentra el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $4x - ky - 15 = 0$ que le corresponda sea perpendicular a la recta $x + 3y - 13 = 0$. Determina la ecuación de la recta.
- La ecuación de una familia de rectas es $4x + 3y - k = 0$; el producto de los segmentos de una recta de la familia sobre los ejes coordenados es 48. Determina la ecuación de la recta.
- Aplica el método del parámetro y determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $M(4,-1)$ y es paralela a la recta $3x - 4y + 12 = 0$.
- Una recta pasa por el punto $P(2,3)$ y por la intersección de las rectas $2x + 3y - 5 = 0$ y $6x - y - 25 = 0$. Determina su ecuación sin calcular el punto de intersección.
- Una recta pasa por el origen y por la intersección de las rectas $x + 3y - 9 = 0$ y $3x + y + 5 = 0$. Determina su ecuación sin calcular el punto de intersección.
- Una recta pasa por la intersección de las rectas $2x - 9y - 5 = 0$ y $3x + 2y + 8 = 0$. Determina su ecuación si ésta es perpendicular a la recta $x + 3y + 23 = 0$.
- Una recta pasa por la intersección de las rectas $5x - y - 4 = 0$ y $x - y - 4 = 0$ y es paralela a la recta $x + 5y - 6 = 0$. Determina su ecuación.
- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $3x - 4y = 0$ y $2x - 5y + 7 = 0$ y por el punto $A(7,-1)$.

10. Una recta pasa por el punto de intersección de las dos rectas $x - 3y + 7 = 0$ y $4x + y - 11 = 0$, y también por la intersección de las rectas $3x - 5y + 11 = 0$ y $2x + 3y + 1 = 0$; determina la ecuación de la recta, sin calcular los puntos de intersección.
11. Demuestra que las tres rectas dadas por sus ecuaciones $7x + 3y + 1 = 0$, $2x - y - 9 = 0$ y $3x + 4y + 14 = 0$ son concurrentes; no calcules el punto de intersección.
12. Encuentra los valores de k_1 y k_2 para las ecuaciones $k_1x - 7y + 18 = 0$ y $8x - k_2y + 9k_1 = 0$ sean coincidentes.
13. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,4)$ y cuyas coordenadas en el origen suman -3 .
14. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - 5y + 9 = 0$ y $4x + 7y - 28 = 0$ que satisface las siguientes condiciones:
 - a) Pasa por el punto $A(2,4)$.
 - b) Pasa por el punto $P(-5,-3)$.
 - c) Es paralela a la recta $2x + 3y - 9 = 0$.
 - d) Es perpendicular a la recta $4x + 5y - 17 = 0$.
 - e) Iguales coordenadas en el origen.
15. Encuentra la ecuación de la familia de rectas que satisfacen las siguientes condiciones:
 - a) Pendiente igual a -3 .
 - b) Pasa por el punto $Q(6,4)$.
 - c) Pasa por el origen.
 - d) Tenga abscisa en el origen -4 .
 - e) La suma de coordenadas en el origen sea 12.
 - f) La ordenada en el origen sea el triple que la abscisa en el origen.
 - g) Una de las coordenadas en el origen sea el doble de la otra.
 - h) Sea paralela a la recta $3x + 4y - 10 = 0$.
 - i) Pase por la intersección de las rectas $2x - 5y + 3 = 0$ y $x - 3y - 7 = 0$.
 - j) Sea perpendicular a la recta $8x - 15y + 34 = 0$.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares



Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Aplicaciones de la forma normal de la ecuación de la recta

Distancia de un punto a una recta

Dados una recta ℓ y un punto $P_1(x_1, y_1)$, no necesariamente dentro de la recta. La distancia dirigida d de la recta al punto puede presentarse en alguno de los siguientes casos.

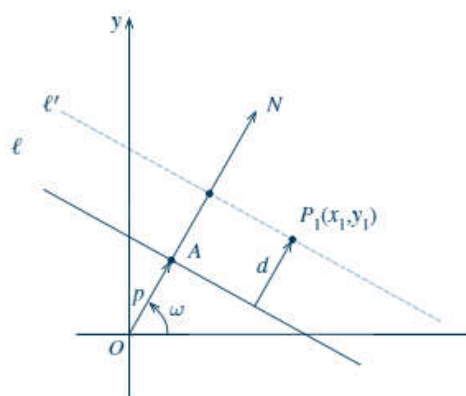


Figura 2.3

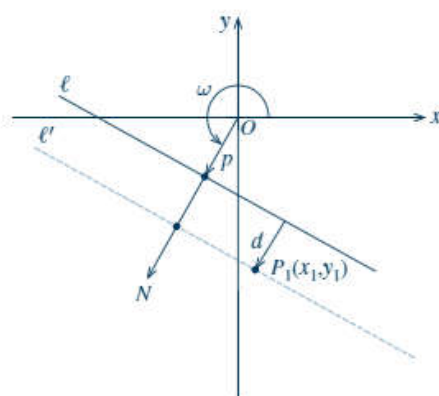


Figura 2.4

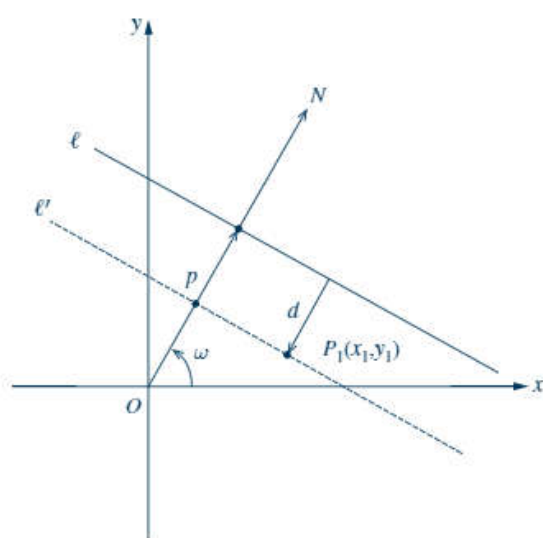


Figura 2.5

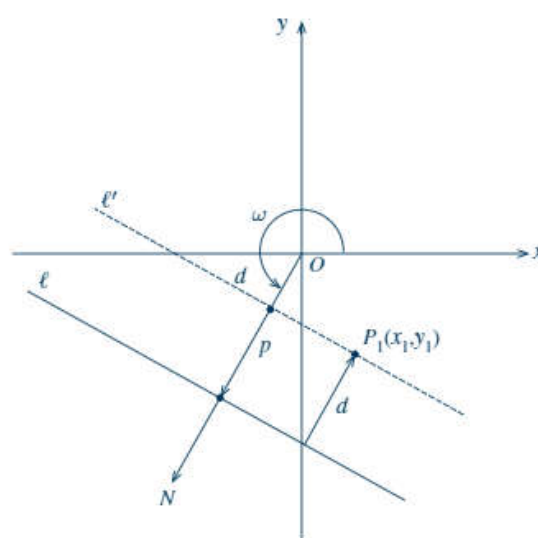


Figura 2.6

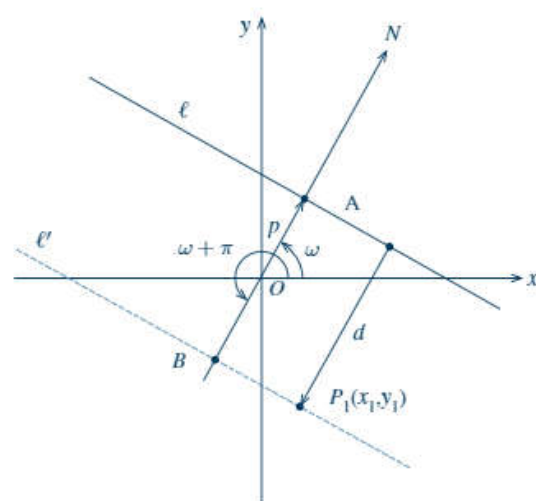


Figura 2.7

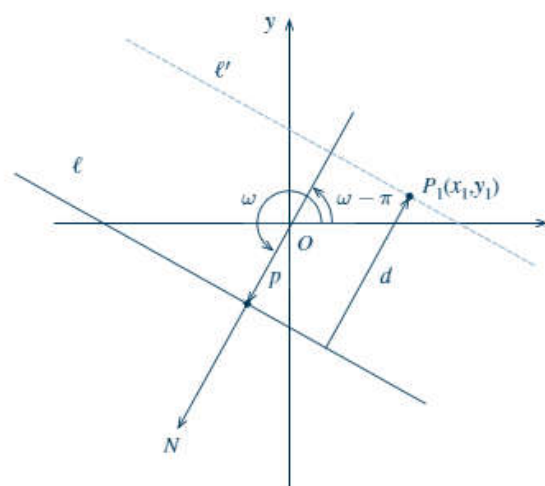


Figura 2.8

Sea ℓ' la recta paralela a ℓ que pasa por el punto P_1 . Las distancias dirigidas del origen a ℓ y a ℓ' son, p y $p + d$, respectivamente. A continuación se escriben las ecuaciones normales a cada recta.

Para la recta ℓ de las figuras 2.3 a 2.8 es: $x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$

Para la recta ℓ' de las figuras 2.3 y 2.4 es: $x \cos \omega + y \sin \omega - (p + d) = 0$

Para la recta ℓ' de las figuras 2.5 y 2.6 es: $x \cos \omega + y \sin \omega - (p - d) = 0$

Para la recta ℓ' de la figura 2.7 es: $x \cos(\omega + \pi) + y \sin(\omega + \pi) - (d - p) = 0$

Para la recta ℓ' de la figura 2.8 es: $x \cos(\omega - \pi) + y \sin(\omega - \pi) - (d - p) = 0$

En todos los casos, $\overline{ON}$ es la normal a la recta ℓ , es decir, la semirecta que parte del origen hacia ℓ en dirección perpendicular a ésta y forma un ángulo ω con el eje positivo de x .

En los casos correspondientes a las figuras 2.7 y 2.8, los ángulos asociados con las normales de las rectas ℓ y ℓ' difieren entre sí 180° que equivalen a π radianes; sin embargo, se sabe que $\cos(\omega \pm \pi) = -\cos \omega$ y que $\sin(\omega \pm \pi) = -\sin \omega$, por lo que las ecuaciones normales de ℓ' se pueden escribir de la siguiente forma.

Para la recta ℓ' de las figuras 2.3 y 2.4 es: $x \cos \omega + y \sin \omega - p - d = 0$

Para la recta ℓ' de las figuras 2.5 y 2.6 es: $x \cos \omega + y \sin \omega - p + d = 0$

Para la recta ℓ' de las figuras 2.7 y 2.8 es: $-x \cos \omega - y \sin \omega + p - d = 0$

Al despejar d , para cada situación, y al considerar que ℓ' pasa por el punto $P_1 = (x_1, y_1)$, resulta:

Para las figuras 2.3 y 2.4 es: $d = x_1 \cos \omega + y_1 \sin \omega - p$ (I)

Para las figuras 2.5 y 2.6 es: $-d = x_1 \cos \omega + y_1 \sin \omega - p$ (II)

Para las figuras 2.7 y 2.8 es: $-d = x_1 \cos \omega + y_1 \sin \omega - p$ (III)

Al reducir la ecuación de una recta, escrita en su forma general $Ax + By + C = 0$ a la forma normal, se tiene:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

De tal forma que:

$$\sin \omega = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \cos \omega = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad p = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Al sustituir los valores anteriores en las expresiones (I), (II) y (III), resulta:

$$\pm d = \frac{Ax_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

O bien,

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Para encontrar la distancia dirigida, el signo de d se escoge aplicando las siguientes reglas:

1. Si $C \neq 0$, el signo del radical es contrario al signo de C .
2. Si $C = 0$ y $B \neq 0$, el signo del radical es el signo de B .
3. Si $B = C = 0$, pero $A \neq 0$, el signo del radical es el signo de A .

Por otro lado, según sea la posición relativa de las rectas entre sí y con el origen, como se ilustran en las figuras 4 a 9, se reconocen los siguientes principios:

- a) Si la recta dada no pasa por el origen, la distancia será positiva cuando el punto dado y el origen se encuentran en lados opuestos de la recta, y será negativa si el punto y el origen se encuentran del mismo lado de la recta.
- b) Si la recta dada pasa por el origen, la distancia será positiva si el punto dado se encuentra arriba de la recta, y será negativa si el punto se encuentra abajo de la recta.

Si se desea conocer la distancia absoluta, es decir como cantidad positiva, deberá usarse la fórmula

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

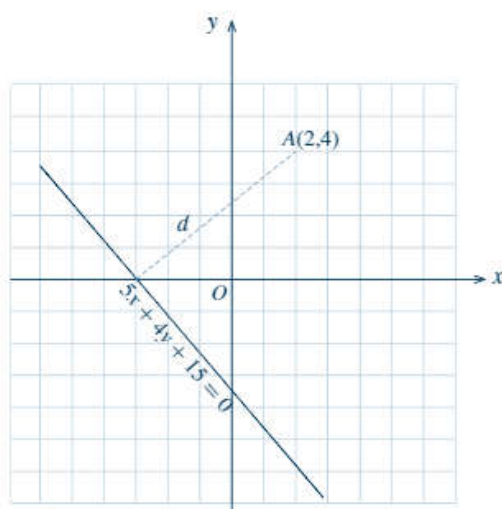
EJEMPLOS



1. Determina la distancia de la recta $5x + 4y + 15 = 0$ al punto $A(2,4)$.

Solución

Al elaborar la gráfica de los datos dados, se tiene:



La distancia se considera absoluta, es decir, es no dirigida.

Al sustituir los datos dados en la ecuación para distancia absoluta, resulta:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|5x + 4y + 15|}{\sqrt{(5)^2 + (4)^2}}$$

Al sustituir las coordenadas del punto $A(2,4)$, se tiene:

$$d = \frac{|5(2) + 4(4) + 15|}{\sqrt{25 + 16}}$$

$$d = \frac{|10 + 16 + 15|}{\sqrt{41}}$$

$$d = -\frac{|41|}{\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{41}\sqrt{41}}{\sqrt{41}}$$

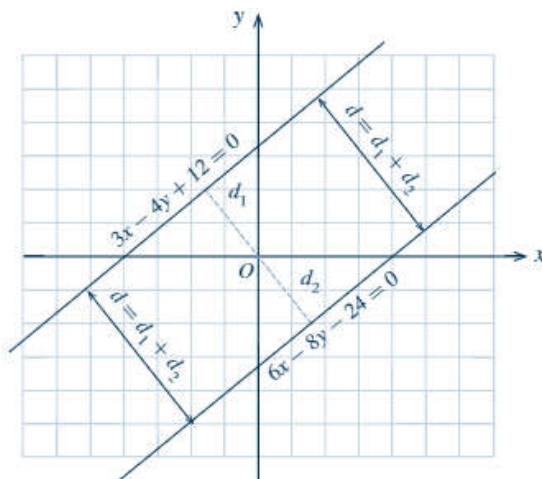
$$d = \sqrt{41}$$

Por lo tanto, la distancia de la recta $5x + 4y + 15 = 0$ al punto $A(2,4)$ es $d = \sqrt{41}$.

- 2 ••• Determina la distancia comprendida entre las rectas paralelas $6x - 8y - 24 = 0$ y $3x - 4y + 12 = 0$.

Solución

Al elaborar la gráfica los datos dados, se tiene:



Al determinar la distancia de cada recta al origen, se obtiene d_1 y d_2 , por lo que su suma, permitirá conocer la distancia comprendida entre las rectas dadas.

Al determinar la distancia de la recta $3x - 4y + 12 = 0$ al origen, se tiene:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|3x - 4y + 12|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

$$d = \frac{|3(0) - 4(0) + 12|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$d_1 = \frac{|12|}{5} = \frac{12}{5}$$

Al determinar la distancia de la recta $6x - 8y - 24 = 0$ al origen, se tiene:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|6x - 8y + 24|}{\sqrt{(6)^2 + (-8)^2}}$$

$$d = \frac{|6(0) - 8(0) - 24|}{\sqrt{36 + 64}}$$

$$d_2 = \frac{|-24|}{10} = \frac{|-12|}{5} = \frac{12}{5}$$

Al sustituir los valores de d_1 y d_2 en la expresión $d = d_1 + d_2$, resulta:

$$d = \frac{12}{5} + \frac{12}{5}$$

$$d = \frac{|24|}{5} = \frac{24}{5}$$

Si se considera la distancia dirigida, el tratamiento es distinto, se debe recordar que la distancia al origen será positiva cuando el origen está por encima de la recta y negativa cuando el origen está por debajo, de tal forma que:

$d = \frac{ Ax + By + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $d = \frac{ 3x - 4y + 12 }{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$ $d = \frac{ 3(0) - 4(0) + 12 }{\sqrt{9 + 16}}$ $d_1 = \frac{12}{5} \text{ Positiva porque la recta está arriba del origen}$	$d = \frac{ Ax + By + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $d = \frac{ 6x - 8y + 24 }{\sqrt{(6)^2 + (-8)^2}}$ $d = \frac{ 6(0) - 8(0) - 24 }{\sqrt{36 + 64}}$ $d_2 = -\frac{24}{10} = -\frac{12}{5} \text{ Negativa porque la recta está debajo del origen}$
---	--

Al sustituir en la expresión $d = d_1 + d_2$, se tiene:

$$+ \left(-d = -\frac{12}{5} - \frac{12}{5} \right) = -\frac{12}{5} - \frac{12}{5}$$

$$d = -\frac{24}{5} \text{ Negativa porque } \ell_2 \text{ está por abajo de } \ell_1$$

Otro método de solución

De la recta $6x - 8y - 24 = 0$, tenemos que los segmentos que determina sobre los ejes x y y , es decir, sus intersecciones, son: $M(4,0)$ y $N(0,-3)$.

Al sustituir la distancia de la recta $3x - 4y + 12 = 0$ a cualquiera de los puntos encontrados, resulta:

Para $M(4,0)$

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{3x - 4y + 12}{-\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

$$d = \frac{3(4) - 4(0) + 12}{-\sqrt{9 + 16}}$$

$$d = \frac{12 + 12}{-\sqrt{25}}$$

$$d = -\frac{24}{5}$$

Para $N(0,3)$

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{3x - 4y + 12}{-\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

$$d = \frac{3(0) - 4(-3) + 12}{-\sqrt{9 + 16}}$$

$$d = \frac{12 + 12}{-\sqrt{25}}$$

$$d = -\frac{24}{5}$$

Negativa porque M y N están del mismo lado de la recta.

También se puede resolver, al determinar los segmentos que la recta $3x - 4y + 12 = 0$ forma con los ejes x , y , es decir, sus intersecciones con dichos ejes; después se calcula la distancia de la recta $6x - 8y - 24 = 0$ a cualquiera de los puntos de intersección encontrados.

- 3 •• Encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta $12x + 5y - 19 = 0$ y distante 6 unidades de ella.

Solución

Si $P(x,y)$ es un punto de la recta paralela, la fórmula de distancia se usará con signo positivo y como la distancia a la recta puede ser positiva o negativa, se tiene:

Para $d = 6$

$$\begin{aligned} d &= \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ 6 &= \frac{12x + 5y - 19}{\sqrt{(12)^2 + (5)^2}} \\ 6 &= \frac{12x + 5y - 19}{\sqrt{144 + 25}} \\ 6 &= \frac{12x + 5y - 19}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6(13) &= 12x + 5y - 19 \\ 78 &= 12x + 5y - 19 \\ 12x + 5y - 19 - 78 &= 0 \\ 12x + 5y - 97 &= 0 \end{aligned}$$

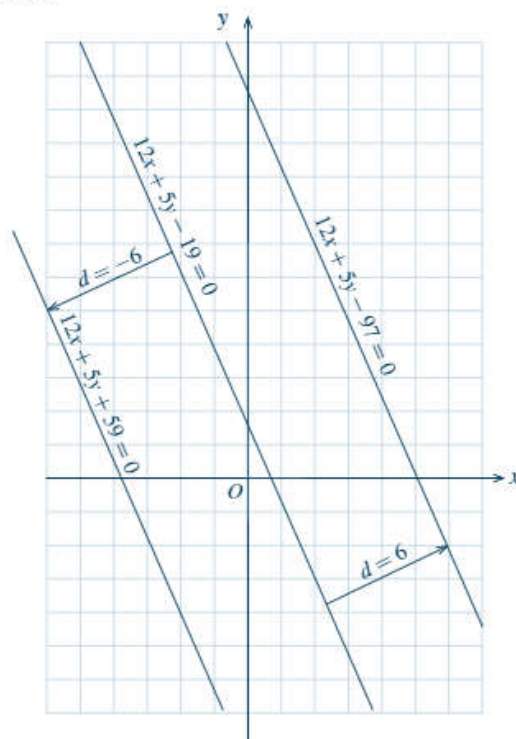
Para $d = -6$

$$\begin{aligned} d &= \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ -6 &= \frac{12x + 5y - 19}{\sqrt{(12)^2 + (5)^2}} \\ -6 &= \frac{12x + 5y - 19}{\sqrt{144 + 25}} \\ -6 &= \frac{12x + 5y - 19}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6(13) &= 12x + 5y - 19 \\ -78 &= 12x + 5y - 19 \\ 12x + 5y - 19 + 78 &= 0 \\ 12x + 5y + 59 &= 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de la recta paralela a la recta $12x + 5y - 19 = 0$ y que distan 6 unidades de ella, son: $12x + 5y - 97 = 0$ y $12x + 5y + 59 = 0$.

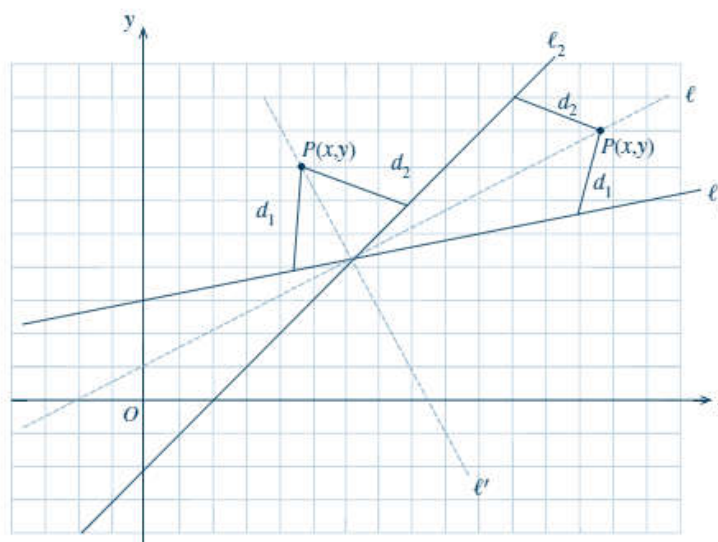
Al elaborar la gráfica, se tiene:



Determinación de las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas dadas que se cortan

Sean ℓ_1 y ℓ_2 las bisectrices de los ángulos suplementarios que se forman por las ecuaciones de dos rectas dadas, cuyas ecuaciones son:

$$\ell_1: (A_1x + B_1y + C_1 = 0) \quad \text{y} \quad \ell_2: (A_2x + B_2y + C_2 = 0)$$



Geométricamente, la bisectriz de un ángulo se define como la semirrecta que partiendo del vértice, divide al ángulo en dos partes iguales, es decir, es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo θ , para $\theta^\circ < \theta < 180^\circ$; dos rectas que se cortan en un vértice generan cuatro ángulos, cabe destacar que las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice pertenecen a la misma recta, por ello. Se identificarán las ecuaciones de dos rectas como ℓ y ℓ' . Para cualquier punto $P(x,y)$ de la bisectriz; las distancias d_1 y d_2 de los lados ℓ_1 y ℓ_2 a P son iguales, es decir, $|d_1| = |d_2|$.

En general, este problema admite dos soluciones, cuyas condiciones son $d_1 = d_2$ y $d_1 = -d_2$. Para distinguirlas, se hará el siguiente análisis:

Para el punto $P(x,y)$ perteneciente a ℓ , se observa que P y el origen se ubican en lados opuestos de la recta ℓ_1 , por lo que d_1 es una **distancia dirigida positiva**; de la misma manera P y el origen se ubican en lados opuestos de la recta ℓ_2 , por lo que d_2 es una **distancia dirigida positiva**. Por lo anterior, se establece que para la recta ℓ , $d_1 = d_2$.

Para el punto $P(x,y)$ perteneciente a ℓ' se observa que P y el origen se ubican en lados opuestos de la recta ℓ_1 , por lo que d_1 es una **distancia dirigida positiva**; de la misma manera P y el origen se ubican del mismo lado de la recta ℓ_2 , por lo que d_2 es una **distancia dirigida negativa**. Por lo anterior, se establece que para la recta ℓ' , $d_1 = -d_2$.

Para las ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, en la condición $d_1 = d_2$, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \end{aligned} \right\} \text{ Ecuación de la bisectriz } \ell.$$

Para las ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, en la condición $d_1 = -d_2$, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \end{aligned} \right\} \text{ Ecuación de la bisectriz } \ell'.$$

En ambos casos, el signo que precede al radical se selecciona de acuerdo con las siguientes condiciones:

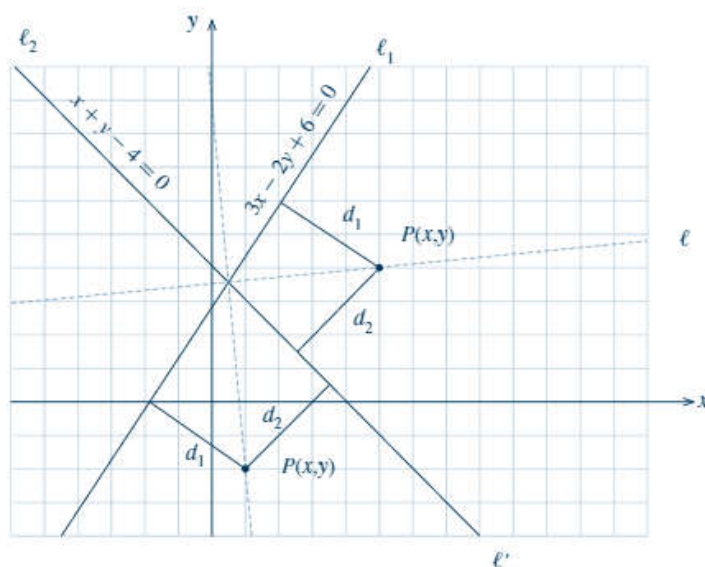
1. Si $C \neq 0$, el radical es de signo contrario a C .
2. Si $C = 0$ y $B \neq 0$, el radical y B tienen el mismo signo.
3. Si $C = B = 0$ y $A \neq 0$, el radical y A tienen el mismo signo.

EJEMPLOS

1. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $\ell_1: 3x - 2y + 6 = 0$ y $\ell_2: x + y - 4 = 0$, y demuestra que son perpendiculares entre sí.

Solución

Al elaborar la gráfica de las ecuaciones dadas, se tiene:



Llamaremos ℓ a la bisectriz que cumple con la condición $d_1 = d_2$ y ℓ' a la bisectriz que cumple con la condición $d_1 = -d_2$.

Para la ecuación de la bisectriz ℓ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \\ \frac{3x - 2y + 6}{-\sqrt{(3)^2 + (-2)^2}} &= \frac{x + y - 4}{(1)^2 + (1)^2} \\ \frac{3x - 2y + 6}{-\sqrt{9 + 4}} &= \frac{x + y - 4}{\sqrt{1 + 1}} \\ \frac{3x - 2y + 6}{-\sqrt{13}} &= \frac{x + y - 4}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}(3x - 2y + 6) &= -\sqrt{13}(x + y - 4) \\ 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 6\sqrt{2} &= -\sqrt{13}x - \sqrt{13}y + 4\sqrt{13} \\ 3\sqrt{2}x + \sqrt{13}x - 2\sqrt{2}y + \sqrt{13}y + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{13} &= 0 \\ (3\sqrt{2} + \sqrt{13})x - (2\sqrt{2} - \sqrt{13})y + 2(3\sqrt{2} - 2\sqrt{13}) &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{3x - 2y + 6}{-\sqrt{13}} = \frac{x + y - 4}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}(3x - 2y + 6) = -\sqrt{13}(x + y - 4) \\ 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 6\sqrt{2} = -\sqrt{13}x - \sqrt{13}y + 4\sqrt{13} \\ 3\sqrt{2}x + \sqrt{13}x - 2\sqrt{2}y + \sqrt{13}y + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{13} = 0 \end{aligned}} \right\} \text{ Ecuación de la bisectriz } \ell.$$

Para la ecuación de la bisectriz ℓ' , se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \\
 \frac{3x - 2y + 6}{-\sqrt{(3)^2 + (-2)^2}} &= -\frac{x + y - 4}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} \\
 \frac{3x - 2y + 6}{-\sqrt{13}} &= -\frac{x + y - 4}{\sqrt{2}} \\
 \sqrt{2}(3x - 2y + 6) &= -\sqrt{13}(-x - y + 4) \\
 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 6\sqrt{2} &= \sqrt{13}x + \sqrt{13}y - 4\sqrt{13} \\
 3\sqrt{2}x - \sqrt{13}x - 2\sqrt{2}y - \sqrt{13}y + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{13} &= 0 \\
 (3\sqrt{2} - \sqrt{13})x - (2\sqrt{2} + \sqrt{13})y + 2(3\sqrt{2} + 2\sqrt{13}) &= 0 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 3\sqrt{2}x - \sqrt{13}x - 2\sqrt{2}y - \sqrt{13}y + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{13} = 0 \\ 3\sqrt{2}x - \sqrt{13}x - 2\sqrt{2}y - \sqrt{13}y + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{13} = 0 \end{aligned}} \right\} \text{ Ecuación de la bisectriz } \ell'.
 \end{aligned}$$

Para demostrar que las bisectrices son perpendiculares entre sí, se aplicará la condición que establece: dos rectas son perpendiculares entre sí cuando el producto de sus pendientes es igual a -1 .

Sea m la pendiente de la bisectriz ℓ , es decir:

$$m = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{13})}{-(2\sqrt{2} - \sqrt{13})} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{13}}{2\sqrt{2} - \sqrt{13}}$$

Sea m' la pendiente de la bisectriz ℓ' , es decir:

$$m' = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{(3\sqrt{2} - \sqrt{13})}{-(2\sqrt{2} + \sqrt{13})} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{13}}{2\sqrt{2} + \sqrt{13}}$$

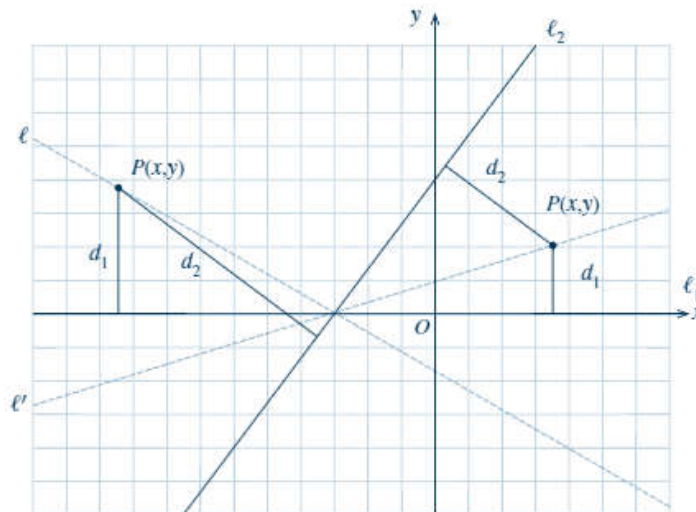
De tal forma que:

$$\begin{aligned}
 \left(mm' = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{13}}{2\sqrt{2} - \sqrt{13}} \right) \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{13}}{2\sqrt{2} + \sqrt{13}} \right) &= -1 \\
 \frac{9(2) - 13}{4(2) - 13} &= -1 \\
 \frac{18 - 13}{8 - 13} &= -1 \\
 \frac{5}{-5} &= -1 \\
 -1 &= -1
 \end{aligned}$$

- 2 ••• Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual al doble de su distancia al eje x .

Solución

Al elaborar la gráfica de los datos dados, se tiene:



Gráficamente, se observa que se deben encontrar las ecuaciones de las rectas que cumplen $\ell: 2d_1 = d_2$ y $\ell': -2d_1 = d_2$. Donde d_1 es la distancia de un punto $P(x,y)$ de la recta que se busca a la recta ℓ_1 cuya ecuación es $y = 0$ (eje x), mientras que d_2 es la distancia de P a la recta $4x - 3y + 12 = 0$.

Como la recta $y = 0$ pasa por el origen del sistema coordenado, el punto $P(x,y)$ se encuentra por arriba de dicha recta, por tanto, d_1 es una **distancia dirigida positiva**; el punto $P(x,y)$ y el origen están del mismo lado de la recta $4x - 3y + 12 = 0$, por tanto d_2 es una **distancia dirigida negativa**.

Para la ecuación de la bisectriz ℓ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{2(A_1x + B_1y + C_1)}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \\ \frac{2(0x + y + 0)}{\sqrt{0^2 + 1^2}} &= \frac{4x - 3y + 12}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \\ \frac{2y}{1} &= -\frac{4x - 3y + 12}{-\sqrt{25}} \\ 2y &= \frac{4x - 3y + 12}{-5} \\ -5(2y) &= 4x - 3y + 12 \\ -10y &= 4x - 3y + 12 \\ 4x - 3y + 10y + 12 &= 0 \\ 4x + 7y + 12 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{2(A_1x + B_1y + C_1)}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \end{aligned}} \right\} \text{ Ecuación de la bisectriz } \ell.$$

Para la ecuación de la bisectriz ℓ' , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{-2(A_1x + B_1y + C_1)}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \\ \frac{-2(0x + y + 0)}{\sqrt{0^2 + 1^2}} &= \frac{4x - 3y + 12}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \\ -\frac{2y}{1} &= \frac{4x - 3y + 12}{-\sqrt{25}} \\ -\frac{2y}{1} &= \frac{4x - 3y + 12}{-5} \\ -5(-2y) &= 4x - 3y + 12 \\ 10y &= 4x - 3y + 12 \\ 4x - 3y - 10y + 12 &= 0 \\ 4x - 13y + 12 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{-2(A_1x + B_1y + C_1)}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \\ \frac{-2(0x + y + 0)}{\sqrt{0^2 + 1^2}} &= \frac{4x - 3y + 12}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \\ -\frac{2y}{1} &= \frac{4x - 3y + 12}{-\sqrt{25}} \\ -\frac{2y}{1} &= \frac{4x - 3y + 12}{-5} \\ -5(-2y) &= 4x - 3y + 12 \\ 10y &= 4x - 3y + 12 \\ 4x - 3y - 10y + 12 &= 0 \\ 4x - 13y + 12 &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{ Ecuación de la bisectriz } \ell'.$$

Comprobación

De la ecuación de la bisectriz ℓ' , se determinan las intersecciones con los ejes coordenados, resultando $(3,0)$ y $\left(0, \frac{12}{13}\right)$.

La distancia de la recta $y = 0$ al punto $\left(0, \frac{12}{13}\right)$, es:

$$d_1 = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{y}{\sqrt{1^2}} = \frac{\frac{12}{13}}{1} = \frac{12}{13} \approx 0.923076923$$

La distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ al punto $\left(0, \frac{12}{13}\right)$, es:

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{4x - 3y + 12}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{4(0) - 3\left(\frac{12}{13}\right) + 12}{-\sqrt{16 + 9}} = \frac{\left(\frac{36}{13}\right) + 12}{-\sqrt{25}} = \frac{\left(\frac{-36 + 156}{13}\right)}{-5} \\ d_2 &= \frac{120}{-65} = -\frac{24}{13} \approx -1.846153846 \end{aligned}$$

Como la bisectriz ℓ' contiene un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual al doble de su distancia del eje x , $-2d_1 = d_2$ se comprueba como verdadera, es decir:

$$\begin{aligned} -2\left(\frac{12}{13}\right) &= -\left(\frac{24}{13}\right) \\ -\frac{24}{13} &= -\frac{24}{13} \end{aligned}$$

De la ecuación de la bisectriz ℓ se determinan las intersecciones con los ejes coordenados, resultando $(3,0)$ y $\left(0, -\frac{12}{7}\right)$.

La distancia de la recta $y = 0$ (eje x) al punto $\left(0, -\frac{12}{7}\right)$, es:

$$d_1 = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{y}{\sqrt{1^2}} = \frac{-\frac{12}{7}}{1} = -\frac{12}{7} \approx -1.714285714$$

La distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ al punto $\left(0, -\frac{12}{7}\right)$:

$$d_2 = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{4x - 3y + 12}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{4(0) - 3\left(-\frac{12}{7}\right) + 12}{-\sqrt{16 + 9}} = \frac{\left(\frac{36}{7}\right) + 12}{-\sqrt{25}} = \frac{\left(\frac{36 + 84}{7}\right)}{-5}$$

$$d_2 = -\frac{120}{35} = -\frac{24}{7} \approx -3.428571429$$

Como la bisectriz ℓ contiene un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual al doble de su distancia del eje x , $2d_1 = d_2$ se comprueba como verdadera, es decir:

$$2\left(-\frac{12}{7}\right) = -\frac{24}{7}$$

$$-\frac{24}{7} = -\frac{24}{7}$$

EJERCICIO 14

I. Determina la distancia absoluta de las siguientes rectas dadas al punto indicado.

1. $4x - 5y - 13 = 0$ al punto $A(7, -1)$.
2. $5x + 4y - 47 = 0$ al punto $B(9, 8)$.
3. $2x + 5y + 10 = 0$ al punto $C(1, 3)$.
4. $3x - 4y + 2 = 0$ al punto $P(5, -2)$.

II. Determina la distancia dirigida de las siguientes rectas dadas al punto indicado.

1. $3x + 5y + 4 = 0$ al punto $A(3, 5)$.
2. $5x - 3y - 16 = 0$ al punto $B(-2, -3)$.
3. $x - y - 3 = 0$ al punto $C(4, -2)$.
4. $x - 2y + 7 = 0$ al punto $P(5, -2)$.
5. $2x + y - 8 = 0$ al punto $Q(6, 4)$.
6. $x + 2y - 1 = 0$ al punto $R(2, 3)$.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

7. $x - 6y = 0$ al punto $M(2,5)$.
8. $3x + 4y - 10 = 0$ al punto $N(-1, -3)$.

III. Determina la distancia comprendida en las siguientes rectas paralelas.

1. $x - y - 9 = 0$ y $x - y + 3 = 0$
2. $5x + y + 9 = 0$ y $5x + y - 27 = 0$
3. $6x + 5y - 82 = 0$ y $6x + 5y + 2 = 0$
4. $4x - 7y + 36 = 0$ y $4x - 7y - 6 = 0$
5. $3x - 5y + 8 = 0$ y $3x - 5y - 12 = 0$
6. $x - 5y + 7 = 0$ y $2x - 10y - 12 = 0$

IV. Resuelve los siguientes problemas y discute en plenaria tus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Los vértices de un triángulo son $A(2,3)$, $B(5,7)$ y $C(-3,4)$. Determina la longitud de la altura del vértice A sobre el lado BC y el área del triángulo dado.
 2. Determina la ecuación de la recta paralela a la recta $2x - 3y + 9 = 0$ y distante 3 unidades de ella.
 3. La distancia dirigida de la recta $4x + 10y - 25 = 0$ al punto A es -5 ; si la abscisa de A es 8. Determina su ordenada.
 4. La distancia de la recta $2x + 5y - 10 = 0$ al punto M es -3 ; si la abscisa de M es 2. Determina su ordenada.
 5. La distancia de la recta $4x - 3y + 1 = 0$ al punto Q es 4; si la ordenada de Q es 3. Determina su abscisa.
 6. Encuentra la ecuación de la recta cuyos puntos equidistan todos de las dos rectas paralelas $5x + 12y - 12 = 0$ y $5x + 12y + 6 = 0$.
 7. En la ecuación $kx - 7y - 11 = 0$, encuentra el valor del coeficiente k de manera que la distancia dirigida de la recta que representa al punto $A(6, -2)$ sea igual a 3.
 8. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3,1)$ tal que la distancia de esta recta al punto $P(-1,1)$ sea igual a $2\sqrt{2}$.
 9. Determina el valor de k para que la distancia de la recta $15x + 8y + k = 0$ al punto $A(2,3)$ sea igual a 3.
 10. Encuentra la distancia comprendida entre las rectas paralelas $6x - 8y + 5 = 0$ y $3x - 4y - 7 = 0$.
- V. Determina las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por los siguientes pares de rectas dadas y demuestra que dichas bisectrices son perpendiculares entre sí.
1. $6x - 8y + 15 = 0$ y $8x + 15y - 24 = 0$.
 2. $5x + 12y - 15 = 0$ y $3x + 4y + 8 = 0$.
 3. $2x - y + 1 = 0$ y $x + y - 1 = 0$.
- VI. Dados los vértices de los siguientes triángulos, determina las ecuaciones de las bisectrices del ángulo interior ACB , para cada caso.
1. $A(-4,1)$, $B(-3,3)$ y $C(3,-3)$
 2. $A(-3,3)$, $B(5,5)$ y $C(2,4)$
 3. $A(-2,1)$, $B(4,7)$ y $C(6,-3)$
 4. $A(2,4)$, $B(6,2)$ y $C(6,7)$
 5. $A(1,-1)$, $B(6,-2)$ y $C(7,3)$

VII. Resuelve los siguientes problemas.

1. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $3x + 2y - 14 = 0$ es siempre igual al doble de su distancia al eje x .
2. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $4x + 2y - 13 = 0$ es siempre igual a la mitad de su distancia al eje y .
3. Un punto se mueve de tal manera que su distancia a la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual a su distancia al punto $A(-3, -2)$; determina la ecuación de dicho lugar geométrico.
4. Determina el área del trapecio formado por las rectas $x - 2y = 0$, $3x - y - 5 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$ y $x + 3y - 20 = 0$.
5. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $x + 5 = 0$ es siempre igual a su distancia del punto $A(5, 0)$ y traza dicho lugar geométrico.
6. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $y + 3 = 0$ es siempre igual a su distancia del punto $A(5, 3)$ y traza dicho lugar geométrico.

➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

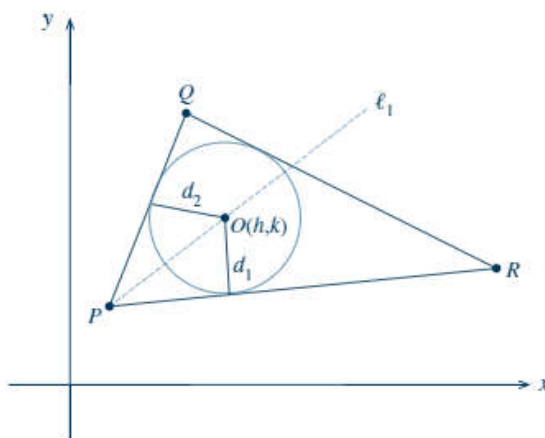
Rectas y puntos notables de un triángulo

Geoméricamente, el punto de concurrencia de las bisectrices de un triángulo es el **incentro**; el de las mediatrices es el **circuncentro**; el de las alturas es el **ortocentro** y el de las medianas es el **gravicentro** o **baricentro**.

Ecuación como lugar geométrico de la bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo es la semirrecta interior al ángulo que lo divide en dos partes o ángulos iguales, es decir, es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo.

Sean las rectas $PQ: Ax + By + C = 0$, $QR: A'x + B'y + C' = 0$ y $PR: A''x + B''y + C'' = 0$, las ecuaciones de los lados del triángulo PQR (de la siguiente figura).



Sea $O(h,k)$ un punto de la bisectriz ℓ_1 del ángulo P ; al considerar distancias dirigidas de los lados $\overline{PR}$ y $\overline{PQ}$ del triángulo al punto O , se tiene que para la bisectriz ℓ_1 : $d_1 = -d_2$, es decir:

$$\frac{A''x + B''y + C''}{\pm\sqrt{(A'')^2 + (B'')^2}} = -\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

De la misma manera sea $O(h,k)$ un punto de la bisectriz ℓ_2 del ángulo Q (figura 2.9); al considerar distancias dirigidas de los lados $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ del triángulo al punto O , se tiene que para la bisectriz ℓ_2 : $d_1 = -d_2$, es decir:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{(A')^2 + (B')^2}}$$

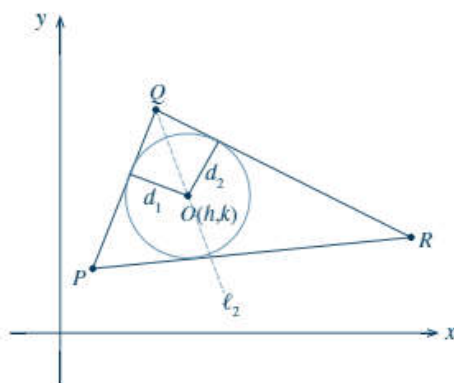


Figura 2.9

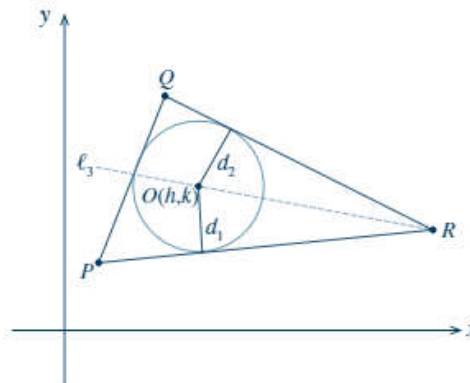


Figura 2.10

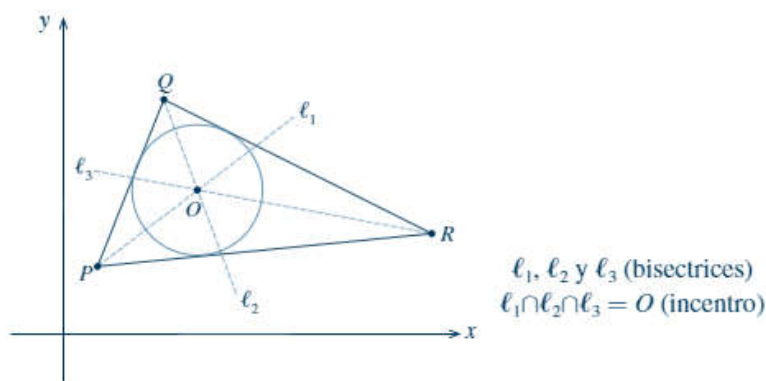
Sea $O(h,k)$ un punto de la bisectriz ℓ_3 del ángulo R (figura 2.10); al considerar distancias dirigidas de los lados $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ del triángulo al punto O , se tiene que para la bisectriz ℓ_3 : $d_1 = -d_2$, es decir:

$$\frac{A''x + B''y + C''}{\pm\sqrt{(A'')^2 + (B'')^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{(A')^2 + (B')^2}}$$

Incentro

Es el punto de concurrencia de las **bisectrices** de los ángulos interiores del triángulo. El incentro es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, cuyos lados son tangentes a la circunferencia como se muestra a continuación.

El incentro siempre es interior al triángulo.



Ecuación de la mediatriz de un segmento como lugar geométrico

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio, es decir, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

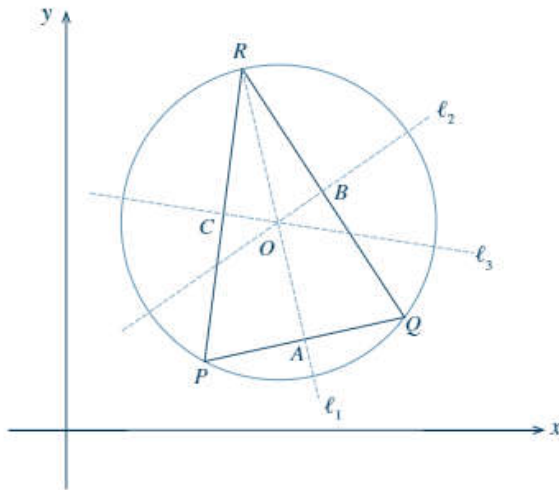


Figura 2.11

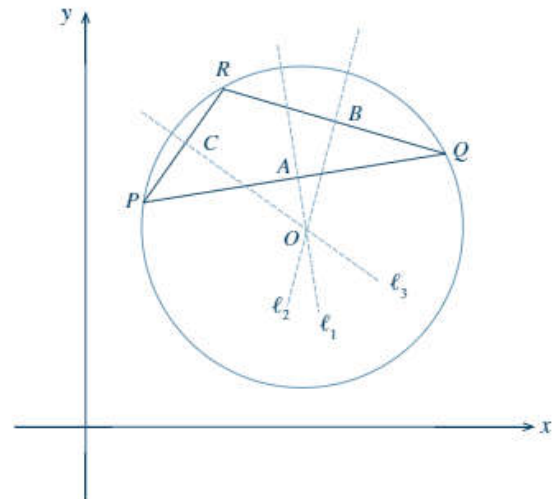


Figura 2.12

Con base en las figuras 2.11 y 2.12, los puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$ son los vértices de un triángulo, donde ℓ_1 es la mediatriz que pasa por el punto medio $A(x_A, y_A)$ del lado PQ del triángulo dado.

Como la mediatriz ℓ_1 y el lado PQ son perpendiculares entre sí, se tiene que sus pendientes son recíprocas y de signo contrario, por lo que:

$$m_{\ell_1} = -\frac{1}{m_{PQ}}$$

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta, se tiene que la ecuación de la mediatriz ℓ_1 es:

$$y - y_A = -\frac{1}{m_{PQ}}(x - x_A)$$

De la misma manera, sean ℓ_2 y ℓ_3 las mediatrices que pasan por los puntos medios $B(x_B, y_B)$ y $C(x_C, y_C)$ de los lados QR y PR , respectivamente, del triángulo dado.

Como las mediatrices ℓ_2 y ℓ_3 y los lados QR y PR son, respectivamente, perpendiculares entre sí, se tiene que sus pendientes son recíprocas y de signo contrario, por lo que:

$$m_{\ell_2} = -\frac{1}{m_{QR}} \quad \text{y} \quad m_{\ell_3} = -\frac{1}{m_{PR}}$$

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta, se tiene que la ecuación de las mediatrices ℓ_2 y ℓ_3 , son:

$$y - y_B = -\frac{1}{m_{QR}}(x - x_B) \quad \text{y} \quad y - y_C = -\frac{1}{m_{PR}}(x - x_C)$$

Circuncentro

Es el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo. El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, de tal manera que los tres vértices del triángulo tocan a la circunferencia.

De la figura 2.11, se observa que: ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 son las mediatrices de los lados del triángulo PQR ; las intersecciones de dichas mediatrices dan lugar al punto $O(h,k)$ que se denomina **circuncentro** ($\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 = O$); por último, para esta gráfica se establece que en un triángulo acutángulo, el circuncentro es interior al triángulo.

De la figura 2.12, se observa que: ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 son las mediatrices de los lados del triángulo PQR ; las intersecciones de dichas mediatrices dan lugar al punto $O(h,k)$ que se denomina **circuncentro** ($\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 = O$); por último, para esta gráfica se establece que en un triángulo obtusángulo, el circuncentro es exterior al triángulo.

Ecuación y longitud de las alturas de un triángulo

La altura del triángulo es el segmento de recta que se traza desde un vértice perpendicularmente a su lado opuesto.

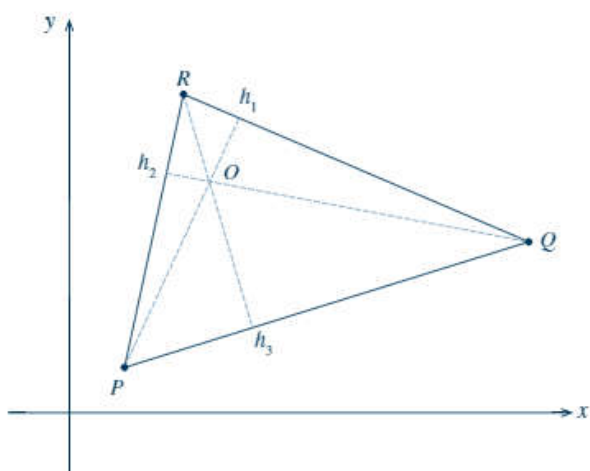


Figura 2.13

Los vértices de un triángulo son $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$, donde h_1 es la altura trazada perpendicularmente desde el vértice P al lado opuesto $\overline{QR}$ del triángulo dado (figura 2.13).

Como la altura h_1 y el lado $\overline{QR}$ son perpendiculares entre sí, se tiene que sus pendientes son recíprocas y de signo contrario, por lo que:

$$m_{h_1} = -\frac{1}{m_{\overline{QR}}}$$

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta, se tiene que la ecuación de la altura h_1 es:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_{\overline{QR}}}(x - x_1)$$

De la misma manera, sean h_2 y h_3 las alturas trazadas perpendicularmente desde los vértices Q y R a los lados opuestos $\overline{PR}$ y $\overline{PQ}$, respectivamente, en el triángulo dado.

Como las alturas h_2 y h_3 , son perpendiculares entre sí, así como los lados $\overline{PR}$ y $\overline{PQ}$, se tiene que sus pendientes son recíprocas y de signo contrario, por lo que:

$$m_{h_2} = -\frac{1}{m_{\overline{PR}}} \quad \text{y} \quad m_{h_3} = -\frac{1}{m_{\overline{PQ}}}$$

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta, se tiene que las ecuaciones de las alturas h_2 y h_3 , son:

$$y - y_2 = -\frac{1}{m_{\overline{PR}}}(x - x_2) \quad \text{y} \quad y - y_3 = -\frac{1}{m_{\overline{PQ}}}(x - x_3)$$

La longitud de la altura se determina al aplicar la ecuación de la **distancia de una recta a un punto**, es decir: sean las rectas $\overline{PQ}: Ax + By + C = 0$, $\overline{QR}: A'x + B'y + C' = 0$ y $\overline{PR}: A''x + B''y + C'' = 0$, las ecuaciones de los dados del triángulo dado (figura 2.13).

La longitud de la altura h_1 es la distancia de la recta $\overline{QR}: A'x + B'y + C' = 0$ al vértice $P(x_1, y_1)$, se expresa por:

$$dh_1 = \frac{A'x_1 + B'y_1 + C'}{\pm\sqrt{(A')^2 + (B')^2}}$$

De la misma manera, la longitud de las alturas h_2 y h_3 , es la distancia respectiva de la recta $\overline{PR}: A''x + B''y + C'' = 0$ al vértice $Q(x_2, y_2)$ y de la recta $\overline{PQ}: Ax + By + C = 0$ al vértice $R(x_3, y_3)$, por lo que se expresan por:

$$dh_2 = \frac{A''x_2 + B''y_2 + C''}{\pm\sqrt{(A'')^2 + (B'')^2}} \quad \text{y} \quad dh_3 = \frac{Ax_3 + By_3 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ortocentro

Es el punto de concurrencia de las tres alturas del triángulo, en la figura 2.13, se tiene que $h_1 \cap h_2 \cap h_3 = O$, donde O representa al ortocentro; se hace notar que en un triángulo acutángulo el ortocentro es siempre interior al triángulo.

En la figura 2.14 se observa que en el triángulo rectángulo el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.

En la figura 2.15 se hace notar que el ortocentro en el triángulo obtusángulo es exterior al triángulo y es el punto de intersección de las prolongaciones de las alturas.

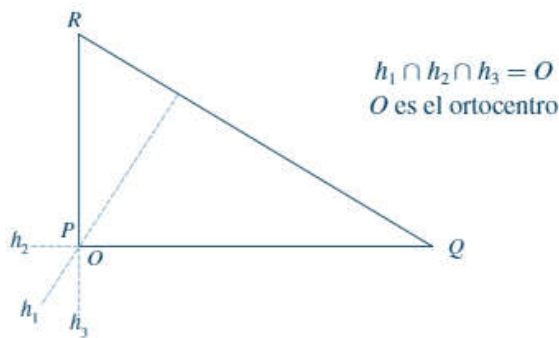


Figura 2.14

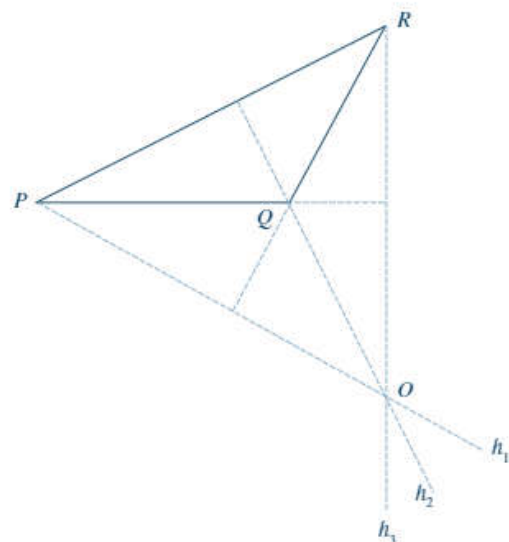


Figura 2.15

Ecuación y longitud de las medianas de un triángulo

La mediana del triángulo es el segmento trazado de un vértice al punto medio del lado opuesto.

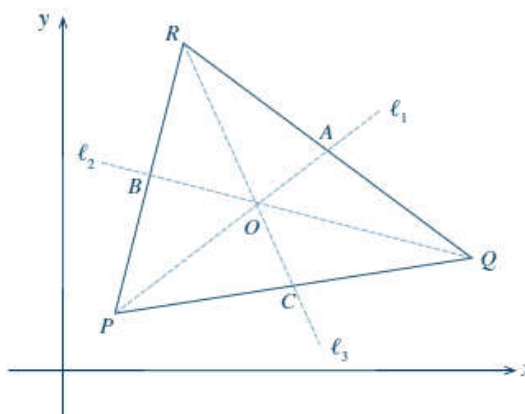


Figura 2.16

Los vértices de un triángulo son $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$, en donde ℓ_1 es la mediana trazada desde el vértice P al punto medio $A(x_A, y_A)$ del lado opuesto $\overline{QR}$ del triángulo dado (figura 2.16).

Al aplicar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, la ecuación de la mediana ℓ_1 es:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_A}{x_1 - x_A} \right) (x - x_1)$$

De la misma manera, para las medianas ℓ_2 y ℓ_3 trazadas desde el vértice Q y R al punto medio $B(x_B, y_B)$ y $C(x_C, y_C)$ de los lados opuestos $\overline{PR}$ y $\overline{PQ}$, respectivamente, en el triángulo dado.

Al aplicar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, las ecuaciones de las medianas ℓ_2 y ℓ_3 son:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_B}{x_2 - x_B} \right) (x - x_2) \quad \text{y} \quad y - y_3 = \left(\frac{y_3 - y_C}{x_3 - x_C} \right) (x - x_3)$$

Para determinar la longitud de las medianas, se aplica la ecuación de la distancia entre dos puntos, es decir:

$$\text{Para } \ell_1, \text{ la longitud es: } d_{\overline{PA}} = \sqrt{(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2}$$

$$\text{Para } \ell_2, \text{ la longitud es: } d_{\overline{QB}} = \sqrt{(x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2}$$

$$\text{Para } \ell_3, \text{ la longitud es: } d_{\overline{RC}} = \sqrt{(x_3 - x_C)^2 + (y_3 - y_C)^2}$$

Gravicentro, baricentro o centro de gravedad

Es el punto de intersección de las medianas de un triángulo; en la gráfica de la figura 2.16 $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 = O$, donde O es el gravicentro. El gravicentro siempre es interior al triángulo dado.

EJEMPLO

1 Los vértices de un triángulo son $A(-2,1)$, $B(-4,7)$ y $C(6,-3)$, determina:

- Las ecuaciones y longitudes de las medianas; las coordenadas del punto de concurrencia de las medianas (gravicentro).
- Las ecuaciones de las mediatrices de los lados y las coordenadas de su punto de concurrencia (circuncentro).
- Las ecuaciones y longitudes de las alturas; las coordenadas del punto de concurrencia de las alturas (ortocentro).
- Las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores y las coordenadas de su punto de concurrencia (incentro).

Solución

a) Se determinan los puntos medios de los lados del triángulo dado, es decir:

Punto medio $\overline{AB}$	Punto medio $\overline{BC}$	Punto medio $\overline{AC}$
$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$
$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$	$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$	$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$
$x = \frac{-2 + 4}{2}$	$x = \frac{4 + 6}{2}$	$x = \frac{-2 + 6}{2}$
$y = \frac{1 + 7}{2}$	$y = \frac{7 - 3}{2}$	$y = \frac{1 - 3}{2}$
$x = \frac{2}{2} = 1$	$x = \frac{10}{2} = 5$	$x = \frac{4}{2} = 2$
$y = \frac{8}{2} = 4$	$y = \frac{4}{2} = 2$	$y = \frac{-2}{2} = -1$
$Pm \overline{AB} (1,4)$	$Pm \overline{BC} (5,2)$	$Pm \overline{AC} (2,-1)$

Al aplicar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, se tiene:

Vértice A y $Pm \overline{BC}$	Vértice A y $Pm \overline{AC}$	Vértice A y $Pm \overline{AB}$
$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$	$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$	$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$
$y - 1 = \left(\frac{1 - 2}{-2 - 5} \right) (x + 2)$	$y - 7 = \left(\frac{7 + 1}{4 - 2} \right) (x - 4)$	$y + 3 = \left(\frac{-3 - 4}{6 - 1} \right) (x + 6)$
$-7(y - 1) = -1(x + 2)$	$2(y - 7) = 8(x - 4)$	$5(y + 3) = -7(x + 6)$
$-7y + 7 = -x - 2$	$2y - 14 = 8x - 32$	$5y + 15 = -7x + 42$
$x - 7y + 7 + 2 = 0$	$8x - 2y - 32 + 14 = 0$	$7x + 5y + 15 - 42 = 0$
$x - 7y + 9 = 0$	$8x - 2y - 18 = 0$	$7x + 5y - 27 = 0$
mediana ℓ_1	$4x - y - 9 = 0$	mediana ℓ_3
	mediana ℓ_2	

Al resolver simultáneamente las ecuaciones de las medianas ℓ_1 y ℓ_2 , resulta:
 Se multiplica por -4 , a la mediana ℓ_1 y se resuelve el sistema:

$$\begin{array}{rcl} -4x + 28y - 36 = 0 & \ell_1 & \\ 4x - y - 9 = 0 & \ell_2 & \\ \hline 27y - 45 = 0 & & \\ 27y = 45 & & \\ y = \frac{45}{27} \approx 1.667 & & \end{array}$$

Al sustituir el valor de y en la ecuación de la mediana ℓ_3 , resulta:

$$\begin{array}{rcl} 7x + 5y - 27 = 0 & & \\ 7x + 5\left(\frac{45}{27}\right) - 27 = 0 & & \\ 7x + \frac{225}{27} - 27 = 0 & & \\ x = \frac{504}{189} \approx 2.667 & & \end{array}$$

Las coordenadas del punto de intersección de las medianas
 (gravicentro) son $G(2.667, 1.667)$.

Las longitudes de las medianas son:

Para ℓ_1 de A al $Pm \overline{BC}$:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ d &= \sqrt{(-2 - 5)^2 + (1 - 2)^2} \\ d &= \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} \\ d &= \sqrt{49 + 1} \\ d &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

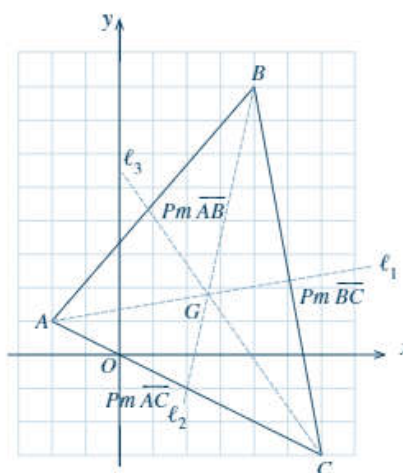
Para ℓ_2 de B al $Pm \overline{AC}$:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ d &= \sqrt{(4 - 2)^2 + (7 + 1)^2} \\ d &= \sqrt{(2)^2 + (8)^2} \\ d &= \sqrt{4 + 64} \\ d &= \sqrt{68} \end{aligned}$$

Para ℓ_3 de C al $Pm \overline{AB}$:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ d &= \sqrt{(6 - 1)^2 + (-3 - 4)^2} \\ d &= \sqrt{(5)^2 + (-7)^2} \\ d &= \sqrt{25 + 49} \\ d &= \sqrt{74} \end{aligned}$$

Al elaborar la gráfica, se tiene:



$\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 = G$
 G es el gravicentro

b) Al determinar las pendientes de los lados del triángulo dado, se tiene:

m del lado $\overline{AB}$

$$\begin{aligned} m_{\overline{AB}} &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \\ m_{\overline{AB}} &= \frac{1 - 7}{-2 - 4} \\ m_{\overline{AB}} &= \frac{-6}{-6} = 1 \end{aligned}$$

m del lado $\overline{BC}$

$$\begin{aligned} m_{\overline{BC}} &= \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \\ m_{\overline{BC}} &= \frac{7 + 3}{4 - 6} \\ m_{\overline{BC}} &= \frac{10}{-2} = -5 \end{aligned}$$

m del lado $\overline{AC}$

$$\begin{aligned} m_{\overline{AC}} &= \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} \\ m_{\overline{AC}} &= \frac{1 + 3}{-2 - 6} \\ m_{\overline{AC}} &= \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para determinar las ecuaciones de las mediatrices, se requieren las pendientes de las perpendiculares de los lados del triángulo dado, es decir:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{m_{\overline{AB}}} \\ m_1 &= -\frac{1}{1} \\ m_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{1}{m_{\overline{BC}}} \\ m_1 &= -\frac{1}{-5} \\ m_2 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_3 &= \frac{1}{m_{\overline{AC}}} \\ m_3 &= -\frac{1}{-\frac{1}{2}} \\ m_3 &= 2 \end{aligned}$$

Sean los puntos medios de los lados del triángulo dado, $Pm \overline{AB}$ (1,4), $Pm \overline{BC}$ (5,2) y $Pm \overline{AC}$ (2,-1) (que se determinaron en el inciso a) y con las pendientes perpendiculares, las ecuaciones de las mediatrices son:

$Pm \overline{AB}$ y m_1

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 4 &= -1(x - 1) \\ y - 4 &= -x + 1 \\ x + y - 4 - 1 &= 0 \\ x + y - 5 &= 0 \\ \text{mediatriz } \ell_1 \end{aligned}$$

$Pm \overline{BC}$ y m_2

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= \frac{1}{5}(x - 5) \\ 5(y - 2) &= 1(x - 5) \\ 5y - 10 &= x - 5 \\ x - 5y - 5 + 10 &= 0 \\ x - 5y + 5 &= 0 \\ \text{mediatriz } \ell_2 \end{aligned}$$

$Pm \overline{AC}$ y m_3

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y + 1 &= 2(x - 2) \\ y + 1 &= 2x - 4 \\ 2x - y - 4 - 1 &= 0 \\ 2x - y - 5 &= 0 \\ \text{mediatriz } \ell_3 \end{aligned}$$

Al resolver simultáneamente ℓ_1 y ℓ_3 , resulta:

$$\begin{aligned} x + y - 5 &= 0 & \ell_1 \\ 2x - y - 5 &= 0 & \ell_3 \\ \hline 3x - 10 &= 0 \\ 3x &= 10 \\ x &= \frac{10}{3} \approx 3.333 \end{aligned}$$

Al sustituir el valor de x en ℓ_2 , resulta:

$$x - 5y + 5 = 0$$

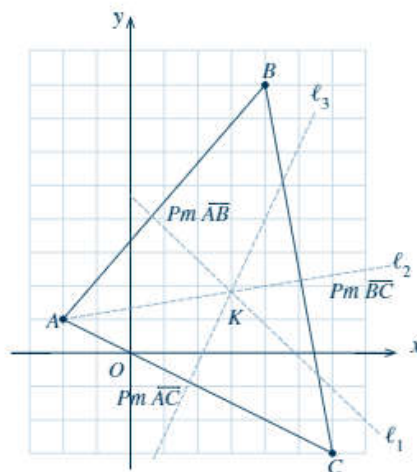
$$\frac{10}{3} - 5y + 5 = 0$$

$$-5y + \frac{25}{3} = 0$$

$$y = \frac{-25}{-15} \approx 1.667$$

Las coordenadas del punto de intersección de las mediatrices (circuncentro) son $K(3.333, 1.667)$.

Al elaborar la gráfica, se tiene:



- c) Sean las pendientes perpendiculares de los lados del triángulo dado, $m_1 = -1$, $m_2 = \frac{1}{5}$ y $m_3 = 2$ (que se determinaron en el inciso b), así, las ecuaciones de las alturas son:

Vértice A y m_2

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{5}(x + 2)$$

$$5(y - 1) = 1(x + 2)$$

$$5y - 5 = x + 2$$

$$x - 5y + 2 + 5 = 0$$

$$x - 5y + 7 = 0$$

altura h_1

Vértice B y m_3

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 7 = 2(x - 4)$$

$$y - 7 = 2x - 8$$

$$2x - y - 8 + 7 = 0$$

$$2x - y - 1 = 0$$

altura h_2

Vértice C y m_1

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 3 = -1(x - 6)$$

$$y + 3 = -x + 6$$

$$x + y + 3 - 6 = 0$$

$$x + y - 3 = 0$$

altura h_3

Al resolver simultáneamente h_2 y h_3 , resulta:

$$\begin{aligned} 2x - y - 1 &= 0 & h_2 \\ x - y - 3 &= 0 & h_3 \\ \hline 3x - 4 &= 0 \\ 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \approx 1.333 \end{aligned}$$

Al sustituir el valor de x en h_1 , se tiene:

$$\begin{aligned} x - 5y + 7 &= 0 \\ \frac{4}{3} - 5y + 7 &= 0 \\ -5y + \frac{25}{3} &= 0 \\ y &= \frac{-25}{-15} = 1.667 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto de concurrencia de las alturas (ortocentro) son $H(1.333, 1.667)$.

Para determinar las longitudes de las alturas, se requiere conocer las ecuaciones de los lados del triángulo dado. De tal forma que:

Ecuación del lado $\overline{AB}$	Ecuación del lado $\overline{BC}$	Ecuación del lado $\overline{AC}$
$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) (x - x_1)$	$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) (x - x_1)$	$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) (x - x_1)$
$y - y = \left(\frac{1 - 7}{-2 - 4} \right) (x + 2)$	$y - 7 = \left(\frac{7 + 3}{4 - 6} \right) (x - 4)$	$y - y = \left(\frac{1 + 3}{-2 - 6} \right) (x + 2)$
$-6(y - 1) = -6(x + 2)$	$-2(y - 7) = 10(x - 4)$	$-8(y - 1) = 4(x + 2)$
$-6y + 6 = -6x - 12$	$-2y + 14 = 10x - 40$	$-8y + 8 = 4x + 8$
$6x - 6y + 6 + 12 = 0$	$10x + 2y - 40 - 14 = 0$	$4x + 8y + 8 - 8 = 0$
$6x - 6y + 18 = 0$	$10x + 2y - 54 = 0$	$4x + 8y = 0$
$x - y + 3 = 0$	$5x + y - 27 = 0$	$x + 2y = 0$

La distancia dirigida de la recta del lado $\overline{AB}$ al vértice C es:

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{x - y + 3}{-\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6 - (-3) + 3}{-\sqrt{1 + 1}} = \frac{6 + 3 + 3}{-\sqrt{2}} = -6\sqrt{2}$$

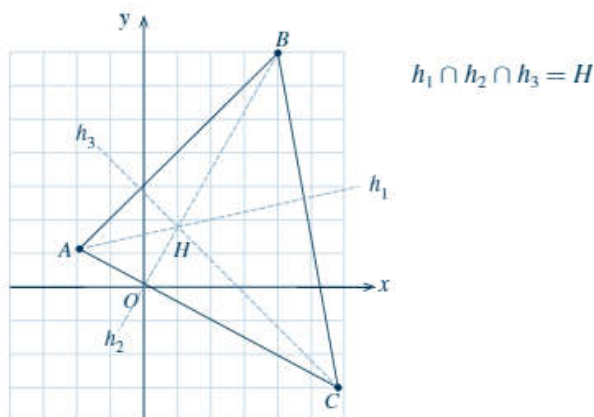
La distancia dirigida de la recta del lado $\overline{BC}$ al vértice A es:

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{5x + y - 27}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{5(-2) + 1 - 27}{\sqrt{25 + 1}} = \frac{-10 + 1 - 27}{\sqrt{26}} = \frac{-18\sqrt{26}}{13}$$

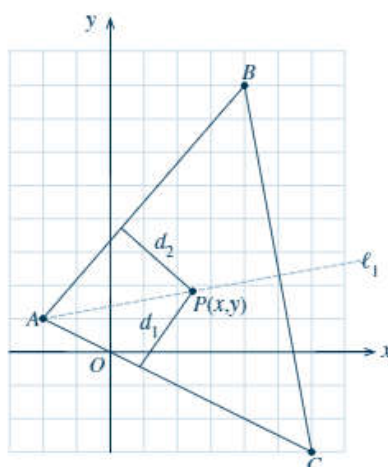
La distancia dirigida de la recta del lado $\overline{AC}$ al vértice B es:

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{x + 2y}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4 + 2(7)}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4 + 14}{\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$$

Gráficamente, se tiene:



- d) Sean las ecuaciones de los lados del triángulo dado. $\overline{AB}$: $x - y + 3 = 0$, $\overline{BC}$: $5x + y - 27 = 0$ y $\overline{AC}$: $x + 2y = 0$; al elaborar la gráfica, se tiene:



Si $P(x, y)$ es un punto de la bisectriz ℓ_1 del ángulo A , se observa que el punto P está por arriba de la recta $\overline{AC}$ que pasa por el origen, por lo que d_1 es positiva; para la recta $\overline{AB}$ se observa que P y el origen están del mismo lado de dicha recta, por lo que d_2 es negativa. Por lo anterior se establece que para la bisectriz ℓ_1 , se tiene $d_1 = -d_2$.

$$\begin{aligned}\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} &= \frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}} \\ \frac{x + 2y}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} &= -\frac{x - y + 3}{-\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} \\ \frac{x + 2y}{\sqrt{1+4}} &= \frac{x - y + 3}{\sqrt{1+1}} \\ \sqrt{2}(x + 2y) &= \sqrt{5}(x - y + 3)\end{aligned}$$

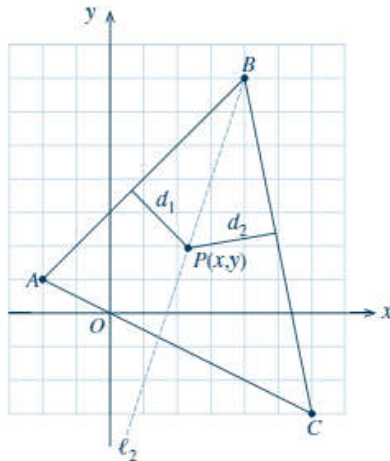


Figura 2.17

$$\begin{aligned}\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y &= \sqrt{5}x - \sqrt{5}y + 3\sqrt{5} \\ \sqrt{2}x - \sqrt{5}x + 2\sqrt{2}y + \sqrt{5}y - 3\sqrt{5} &= 0 \\ (\sqrt{2} - \sqrt{5})x + (2\sqrt{2} + \sqrt{5})y - 3\sqrt{5} &= 0 \\ -0.82x + 5.06y - 6.7 &= 0 \\ 0.82x - 5.06y + 6.7 &= 0\end{aligned}$$

Los coeficientes de esta ecuación son aproximados.

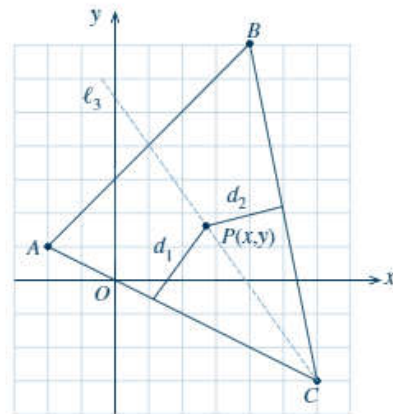


Figura 2.18

Si $P(x,y)$ es un punto de la bisectriz ℓ_2 del ángulo B , se observa que el punto P y el origen están del mismo lado de la recta $\overline{AB}$, por lo que d_1 es negativa; de la misma manera para la recta $\overline{BC}$, por lo que d_2 es negativa (figura 2.17).

Por lo anterior se establece que para la bisectriz ℓ_2 , se tiene $-d_1 = -d_2$ o $d_1 = d_2$.

$$\begin{aligned}\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} &= \frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}} \\ \frac{x - y + 3}{-\sqrt{1^2 + (-1)^2}} &= \frac{5x + y - 27}{\sqrt{5^2 + 1^2}} \\ \frac{x - y + 3}{-\sqrt{1+1}} &= \frac{5x + y - 27}{\sqrt{25+1}} \\ \sqrt{26}(x - y + 3) &= -\sqrt{2}(5x + y - 27) \\ \sqrt{26}x - \sqrt{26}y + 3\sqrt{26} &= -5\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 27\sqrt{2} \\ \sqrt{26}x + 5\sqrt{2}x - \sqrt{26}y + \sqrt{2}y + 3\sqrt{26} - 27\sqrt{2} &= 0 \\ (\sqrt{26} + 5\sqrt{2})x - (\sqrt{26} - \sqrt{2})y + 3(\sqrt{26} - 9\sqrt{2}) &= 0 \\ 12.17x - 3.68y - 22.88 &= 0\end{aligned}$$

Los coeficientes de esta ecuación son aproximados.

Si $P(x,y)$ es un punto de la bisectriz ℓ_3 del ángulo C , se observa que el punto P está por arriba de la recta $\overline{AC}$, por lo que d_1 es positiva; para la recta $\overline{BC}$ se observa que P y el origen están del mismo lado de dicha recta, por lo que d_2 es negativa (figura 2.18).

Por lo anterior se establece que para la bisectriz ℓ_3 , se tiene $-d_1 = -d_2$.

$$\begin{aligned} \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} &= -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}} & \sqrt{26}x + 2\sqrt{26}y &= -\sqrt{5}x - \sqrt{5}y + 27\sqrt{5} \\ \frac{x + 2y}{\sqrt{1^2 + 2^2}} &= -\frac{5x + y - 27}{\sqrt{5^2 + 1^2}} & \sqrt{26}x + 5\sqrt{5}x + 2\sqrt{26}y + \sqrt{5}y - 27\sqrt{5} &= 0 \\ \frac{x + 2y}{\sqrt{1 + 4}} &= -\frac{5x + y - 27}{\sqrt{25 + 1}} & (\sqrt{26} + 5\sqrt{5})x + (2\sqrt{26} + \sqrt{5})y - 27\sqrt{5} &= 0 \\ \sqrt{26}(x + 2y) &= -\sqrt{5}(5x + y - 27) & 16.27x + 12.43y - 60.37 &= 0 \end{aligned}$$

Los coeficientes de esta ecuación son aproximados.

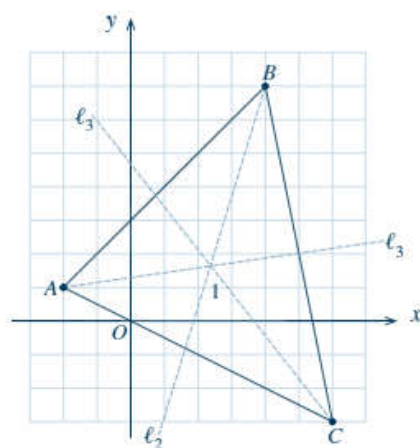
Se multiplica por -12.17 a ℓ_1 y se multiplica por 0.82 a ℓ_2 y se resuelve simultáneamente:

$$\begin{aligned} -9.97x + 61.58y + 81.53 &= 0 \\ 9.97x - 3.01y - 18.76 &= 0 \\ \hline 58.57y - 100.29 &= 0 \\ y &= \frac{100.29}{58.57} \approx 1.72 \end{aligned}$$

Al sustituir el valor de y en ℓ_3 , resulta:

$$\begin{aligned} 16.27x + 12.43y - 60.37 &= 0 \\ 16.27x + 12.43(1.72) - 6.37 &= 0 \\ 16.27x + 21.37 - 60.37 &= 0 \\ 16.27x - 39 &= 0 \\ 16.27x &= 39 \\ x &= \frac{39}{16.27} \approx 2.40 \end{aligned}$$

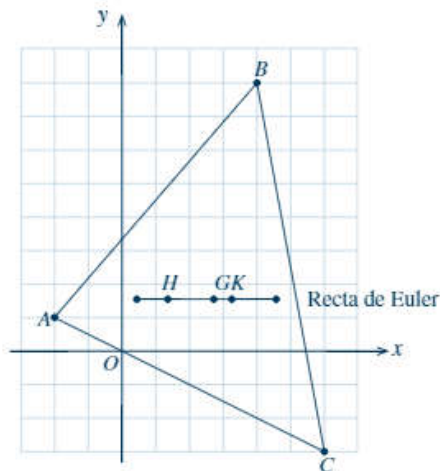
Al elaborar la gráfica, se tiene:



Las coordenadas del punto de concurrencia de las bisectrices (incentro) son $I(2.4, 1.72)$.

$$\begin{aligned} \ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 &= I \\ I &\text{ es el incentro.} \end{aligned}$$

Ahora se demostrará que analíticamente el gravicentro (baricentro), circuncentro y ortocentro de un ángulo dado son colineales y que la recta que los une se denomina **recta de Euler**.



Gráficamente se observa que dichos puntos están alineados sobre una misma recta, es decir, son colineales.

Demostración

$$m_{\overline{HG}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1.667 - 1.667}{1.333 - 2.667} = \frac{0}{-1.334} = 0$$

$$m_{\overline{GK}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1.667 - 1.667}{2.667 - 3.333} = \frac{0}{-0.666} = 0$$

$$m_{\overline{HK}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1.667 - 1.667}{1.333 - 3.333} = \frac{0}{-2} = 0$$

Como $m_{\overline{HG}} = m_{\overline{GK}} = m_{\overline{HK}}$; por lo tanto, los puntos son colineales.

Se demuestra que el gravicentro (baricentro), circuncentro y el ortocentro de cualquier triángulo son colineales y que la recta que los une se llama **recta de Euler**.

EJERCICIO 15

I. Dados los vértices de los siguientes triángulos, encuentra:

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

- Las ecuaciones y longitudes de las medianas, las coordenadas de su punto de intersección (gravicentro o baricentro).
- Las ecuaciones de las mediatrices de los lados y las coordenadas de su punto de intersección (circuncentro).
- Las ecuaciones y longitudes de las alturas del triángulo y su punto de intersección (ortocentro).
- Las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo y su punto de intersección (incentro).

1. $P(1,1)$, $Q(4,7)$ y $R(6,3)$

4. $A(3,5)$, $B(-1,1)$ y $C(5,-3)$

2. $A(-4,2)$, $B(-1,5)$ y $C(2,-1)$

5. $C(2,-2)$, $M(-1,4)$ y $R(4,6)$

3. $K(5,5)$, $L(4,-1)$ y $M(-2,3)$

6. $B(-1,-1)$, $G(2,8)$ y $C(5,7)$

- II. Demuestra analíticamente que el gravicentro (baricentro), circuncentro y ortocentro de los triángulos dados en el ejercicio anterior son colineales (recta de Euler).
- III. Resuelve los siguientes problemas.
 1. Encuentra el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo que tiene como lados las rectas $\ell_1: 5x - 7y + 27 = 0$, $\ell_2: 9x - 2y - 15 = 0$ y $\ell_3: 4x + 5y + 11 = 0$.
 2. Los lados de un triángulo son las rectas $7x - y + 11 = 0$, $x + y - 15 = 0$ y $7x + 17y + 65 = 0$; determina las ecuaciones de las mediatrices y las coordenadas de su punto de intersección (circuncentro).
 3. Demuestra que las medianas del triángulo $A(-1,3)$, $B(5,4)$ y $C(2,-2)$ son concurrentes, es decir, pasan por un mismo punto.
 4. Los vértices de un triángulo son $P(3,-2)$, $Q(8,-1)$ y $R(1,7)$; demuestra que sus alturas son concurrentes.
 5. Los lados de un triángulo son $\ell_1: 4x - 3y - 65 = 0$, $\ell_2: 7x - 24y + 55 = 0$ y $\ell_3: 3x + 4y - 5 = 0$; demuestra que el gravicentro (baricentro), el circuncentro y el ortocentro, son colineales.
 6. Los lados de un triángulo son $\ell_1: 7x + 6y - 11 = 0$, $\ell_2: 9x - 2y + 7 = 0$ y $\ell_3: 6x - 7y - 16 = 0$; determina las ecuaciones de las bisectrices en la forma normal.
 7. Los lados de un triángulo son $\ell_1: 4x + 3y - 50 = 0$, $\ell_2: y = 0$ y $\ell_3: 3x - 4y = 0$; determina las ecuaciones de las mediatrices en la forma normal.
 8. Demuestra que las medianas del triángulo $A(5,-1)$, $B(3,4)$ y $C(-1,1)$, lo dividen en seis triángulos de igual área.

➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

• PROBLEMAS DE APLICACIÓN

- 1 ●● En una fábrica el costo total de la producción es de 200 000 dólares en un mes, si se producen 5 000 unidades y de 150 000 dólares en un mes cuando la producción es de 3 000 unidades. Si la relación entre el número de unidades producidas x y el costo total de la producción y es lineal, ¿cuál es la ecuación de dicha relación?
- 2 ●● La relación entre la temperatura T del aire en $^{\circ}\text{C}$ y la altitud h en metros sobre el nivel del mar, es aproximadamente lineal. Cuando la temperatura al nivel del mar es de 16°C , si la altitud aumenta 1 524 metros, la temperatura del aire llega a ser de -8°C .
 - a) Expresa la ecuación lineal de T en función de h .
 - b) ¿Cuál es la temperatura del aire a una altitud de 4 572 metros?
- 3 ●● Se permite a quienes pagan impuestos depreciar la propiedad en renta sobre un periodo de 15 años. Entonces si y denota el valor de la propiedad después de x años y si la misma tiene un valor inicial de 60 000 dólares, los puntos $(0,60\,000)$ y $(15,0)$ están en la gráfica lineal que se denomina depreciación en línea recta que consiste en ajustar una recta a que pase por dos puntos.
 - a) Expresar y como función lineal de x .
 - b) ¿Cuál es la depreciación anual?
- 4 ●● Un equipo agrícola, cuyo valor inicial era de 400 000 000 de pesos, se deprecia sobre su tiempo de vida útil de 10 años. Al final de los 10 años, el equipo tiene un valor de 20 000 000 pesos.
 - a) Expresa el valor y como función lineal de la edad x después de los 10 años.
 - b) ¿Cuál es la depreciación anual?

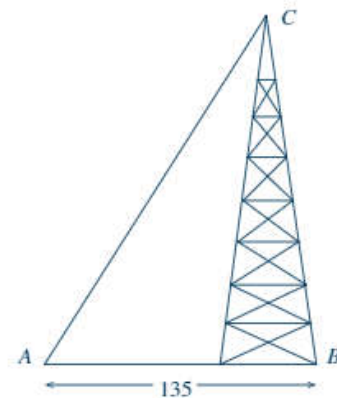
Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

- 5 ●● Un punto en el suelo se encuentra a 135 pies de la base de una torre que se sitúa en el origen del sistema coordenado. El punto de la cúspide de la torre es $C(0,120)$; determina:

- La altura de la torre.
- El ángulo de elevación del punto A hacia la cúspide de la estructura.
- El circuncentro del triángulo ABC .



- 6 ●● Dos barcos A y B zarpan al mismo tiempo del punto $C(0,0)$; el barco A navega en la dirección 24° al noreste y el barco B navega en la dirección 66° al sureste. La posición en el sistema de coordenadas después de una hora son los puntos $A(4,9)$ y $B(9,-4)$, respectivamente, para los barcos.

- Demuestra que se forma un triángulo rectángulo ABC .
- Encuentra los ángulos interiores del triángulo ABC .
- Encuentra las ecuaciones de los lados del triángulo ABC .
- Encuentra el gravicentro del triángulo ABC .

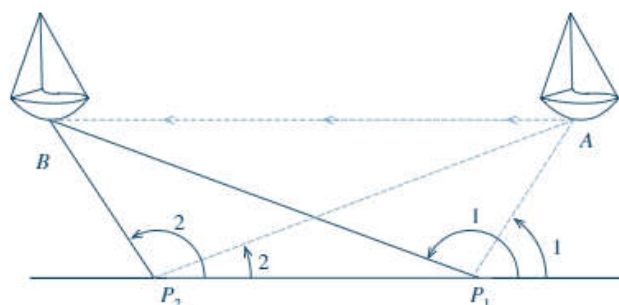
- 7 ●● Una lancha de motor operada a toda su capacidad hace un recorrido de 12 kilómetros contra corriente constante en 30 minutos. El viaje de regreso con la misma corriente y a toda marcha lo hizo en 24 minutos. Calcula la velocidad de la corriente y la velocidad equivalente de la lancha en aguas tranquilas, es decir, el punto de equilibrio entre las dos velocidades.

- 8 ●● Un avión viaja 2000 kilómetros en 2 horas volando con viento de cola. El viaje de regreso, contra el viento, le toma 2.5 horas. Determina la velocidad del avión y la del viento, suponiendo que ambas velocidades son constantes.

- 9 ●● El dueño de un equipo de béisbol quiere comprar bates y pelotas que cuestan 24 y 6 dólares cada uno, respectivamente; para su siguiente juego dispone de 300 dólares:

- Con 300 dólares, ¿cuántos bates y pelotas puede comprar?
- Representa gráficamente el resultado.

- 10 ●● Dos observadores, en los puntos $P_1(7,2)$ y $P_2(-3,-6)$, ven un velero que sigue una trayectoria paralela a la recta $4x - 5y - 18 = 0$ y la recta que une al observador P_1 con su posición final es $2x - 5y - 4 = 0$. Si la posición inicial del velero en el punto $A(7,y)$ y su posición final en el punto $B(x,-6)$:



Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

- ¿Cuál es el valor de la ordenada del punto A ?
- ¿Cuál es el valor de la abscisa del punto B ?
- Encuentra la ecuación lineal que describe la trayectoria del velero.
- Determina la ecuación de la recta que se forma con el velero en la posición A y el observador P_1 .
- Determina la ecuación de la recta que se forma con el velero en la posición B y el observador P_2 .
- Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre las rectas $\overrightarrow{AP_1}$ y $\overrightarrow{BP_2}$.
- Determina el valor de los ángulos, agudos y obtusos que se forman entre las rectas $\overrightarrow{AP_2}$ y $\overrightarrow{BP_1}$.
- ¿Cuál es la distancia de la recta $2x - 5y - 4 = 0$ al punto de intersección resultante en el inciso anterior?
- ¿Será el < 1 mayor que < 2 en ambas posiciones del velero?
- Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre las rectas $\overrightarrow{AP_1}$ y $\overrightarrow{BP_2}$.

11 ●● La longitud ℓ de una barra de metal es una función lineal de la temperatura T .

- Si ℓ_0 representa la longitud a 0°C , expresa a ℓ como una función lineal de T .
- Una barra de aluminio de 20000 cm de longitud a 0°C , aumenta a 20048 cm a 100°C ; determina el coeficiente a y expresa ℓ en función del inciso anterior.

12 ●● La resistencia R de un material es una función lineal de la temperatura T en $^\circ\text{C}$.

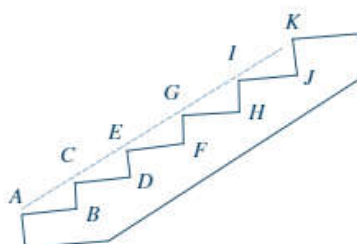
- Si R_0 representa a la resistencia a 0°C , expresa R como una función lineal de T empleando a como pendiente.
- Si para un alambre de aluminio, $R_0 = 0.344 \Omega$ y $R = 0.428 \Omega$ a 70°C , obtén el coeficiente a y expresa R en términos de T .

13 ●● La velocidad del sonido V en el aire es aproximadamente una función lineal de la temperatura T . Si $V_1 = 338 \text{ m/s}$ a la $T_1 = 10^\circ\text{C}$ y $V_2 = 374 \text{ m/s}$ a la temperatura $T_2 = 46^\circ\text{C}$, expresa V como una función lineal de T .

14 ●● La ley de Hooke enuncia que el esfuerzo es proporcional a la tensión. Cuando se aplica un esfuerzo a un cilindro circular, la ley significa que el ángulo de torsión θ es una función lineal del esfuerzo s . Si $\theta = 0^\circ$ cuando $s = 0$ y $\theta = 1.32^\circ$ cuando $s = 650 \text{ kg/cm}^2$.

- Expresa θ como una función lineal de s .
- Obtén θ cuando $s = 800 \text{ kg/cm}^2$.

15 ●● Tomando como referencia la inclinación de la recta $5x - 9y + 11 = 0$, un carpintero construyó una escalera cortando triángulos como ABC , CDE , EFG , etc., de un trozo de madera.

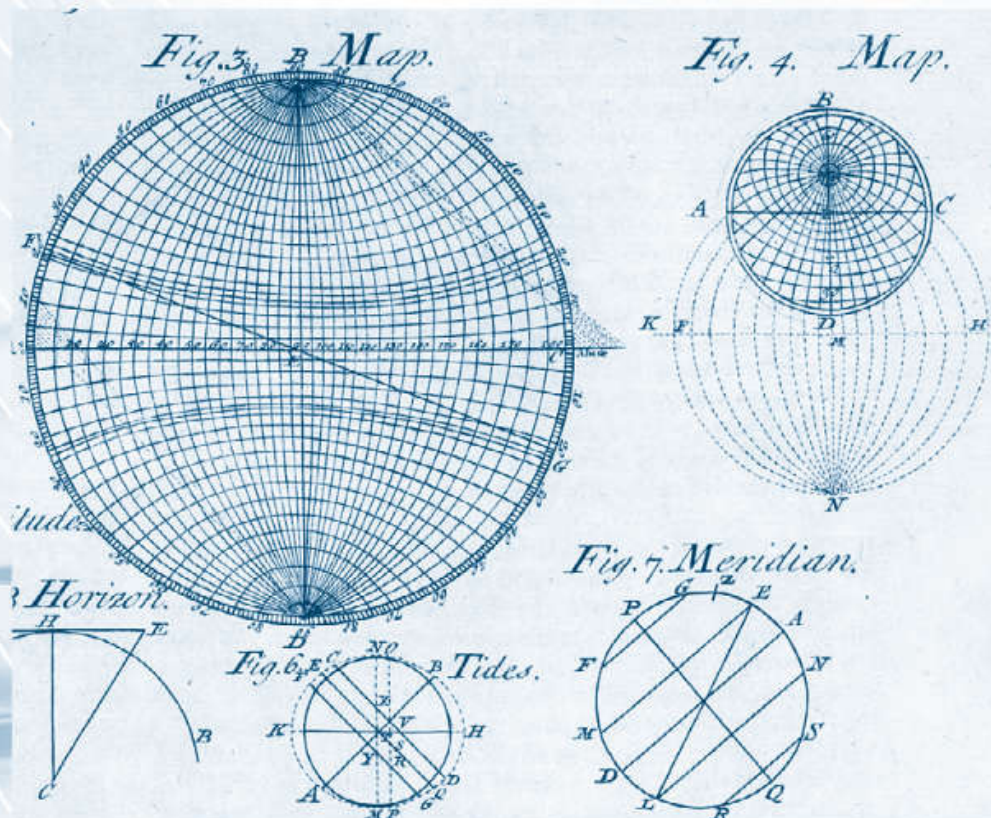


- Encuentra la ecuación de la recta que contiene a los puntos A , C , E , G , I , K , si las coordenadas de A son $(-5, 1)$.
- Encuentra la ecuación de la recta que contiene a los puntos B , D , F , H , J , si las coordenadas de F son $(0, 2)$.
- Determina la distancia de la recta $5x - 9y + 11 = 0$ a los puntos $A(-5, 1)$ y $F(0, 2)$.

Autoevaluación

1. Traza la gráfica de la recta que pasa por $C(-6,2)$ y tiene como pendiente $m = -0.5$.
2. Si la pendiente es $-\frac{3}{2}$ y la ordenada al origen 5, determina la ecuación de la recta.
3. Dibuja el lugar geométrico de las siguientes rectas:
 - a) $y = 11 + 3x$
 - b) $y = 3x$
 - c) $y = 5x + 3$
4. Un panadero determina que si realiza x número de pan al día, su costo de producción está dado por la ecuación $y = 6x + 1\,200$ en pesos.
 - a) Traza la gráfica de la ecuación.
 - b) Explica qué representan la pendiente y la intersección con y .
5. El servicio de TV por cable cuesta \$240 al mes, lo que incluye 150 canales. Si se desea tener canales extras, el costo adicional es de \$5.50 por cada canal.
 - a) Determina el modelo lineal para el pago mensual y por x canales.
 - b) Usa el modelo para calcular el pago mensual si tienes 155 canales en un determinado mes.
 - c) Traza la gráfica correspondiente y escribe cuál es la ordenada al origen.

UNIDAD 3



Las cónicas

Evaluación diagnóstica

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. Señala los elementos básicos de una circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.
2. Explica la diferencia entre circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.
3. Determina la ecuación de la circunferencia con centro en 1 y $r = \sqrt{8}$. Traza la gráfica correspondiente.
4. Determina la ecuación de la parábola cuyo lado recto es el segmento entre los puntos $M(-5, -3)$ y $N(-3, 3)$.
5. Transforma la ecuación de la hipérbola $x^2 - 3y^2 - 4y - 1 = 0$ a coordenadas polares.

Las cónicas

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Haga uso del lenguaje geométrico para describir y obtener información de diversas situaciones a partir de modelos geométricos relativos a las figuras cónicas.
- Interprete y analice los resultados que obtiene en la resolución de cada uno de los problemas de situaciones reales.
- Identifique los elementos básicos de cada figura cónica: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.
- Plantee las ecuaciones de las cónicas para la solución de problemas en ambientes reales.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Introducción a las cónicas.
- Determinación de la ecuación de la circunferencia y su gráfica.
- Discusión acerca de si una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa o no, una circunferencia; en caso afirmativo, determinación de su centro y su radio.
- Determinación de la ecuación de la parábola y su gráfica.
- Discusión acerca de si una ecuación de la forma $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ o $Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa o no una parábola; en caso afirmativo, determinación de sus elementos correspondientes.
- Determinación de la ecuación de la elipse y su gráfica.
- Discusión acerca de si una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa
- Determinación de la ecuación de la hipérbola y su gráfica.
- Determinación de la ecuación de las asíntotas de la hipérbola.
- Discusión acerca de si una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa o no una hipérbola; en caso afirmativo, determinación de sus elementos correspondientes.
- Forma polar de las cónicas.

Contenidos procedimentales

- Elaborará y usará estrategias de resolución de problemas como: hacer diagramas, hacer conjeturas, dividir un problema en subproblemas más sencillos, llevar un problema a uno ya conocido.
- Aprenderá a deducir las ecuaciones de las cónicas: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.
- Analizará e interpretará las condiciones geométricas y analíticas de las cónicas: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.
- Seguirá procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Usará diversas estrategias de resolución de problemas.

Contenidos actitudinales

- Colaborará con sus compañeros al resolver problemas.
- Respeto al trabajar en clase.
- Responsabilidad en el proceso enseñanza-aprendizaje.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros.
- Contribuye con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Introducción a las cónicas

El estudio de las cónicas tiene una tradición histórica que se inicia con el matemático griego Apolonio de Pérgamo (262-190 a. C.), quien en sus investigaciones relacionó las intersecciones de un cono con un plano, descubriendo ciertas curvas a las que identificó con el nombre de circunferencia, elipse, parábola e hipérbola (secciones cónicas).

En el siglo XVII, las secciones cónicas influyeron en la revolución de la astronomía de Johann Kepler, al evaluar los volúmenes de sólidos obtenidos mediante la rotación de segmentos de secciones cónicas alrededor de un eje en su plano.

Otros matemáticos de la época cimentaron las bases de la geometría analítica de René Descartes al unificar el álgebra con la geometría plana, particularmente en la que una ecuación de segundo grado es interpretada como una sección cónica.

Sección cónica

Es el conjunto de puntos que se forma de la intersección de un cono de revolución de dos mantos con un plano.

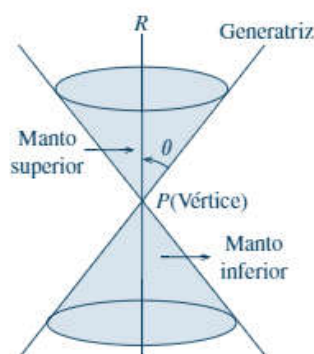


Figura 3.1

Si P es un punto de la recta R por el que se hacen pasar un número infinito de rectas que forman un ángulo θ con R y que dan lugar a una superficie que se denomina cono de revolución de dos mantos (Figura 3.1).

Gráficamente, la recta R representa el eje de simetría del cono y P su vértice; las rectas que pasan por el vértice se denominan **generatrices** del cono.

Formación de las cuatro cónicas básicas

Si el plano es perpendicular al eje de simetría del cono y no pasa por el vértice, su intersección da lugar a la **circunferencia** (Figura 3.2).

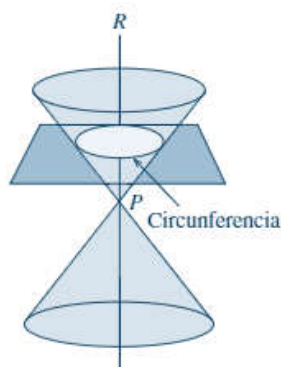


Figura 3.2

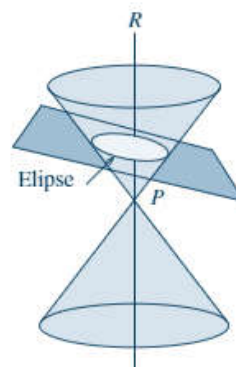


Figura 3.3

Si el plano no es perpendicular al eje de simetría del cono, pero corta a todas las rectas generatrices, su intersección da lugar a la **elipse** (Figura 3.3).

Si el plano es paralelo a una recta generatriz y corta a todas las demás, su intersección da lugar a una **parábola** (Figura 3.4).

Si el plano es paralelo al eje de simetría del cono y además corta a los dos mantos, su intersección da lugar a una **hipérbola** (Figura 3.5).

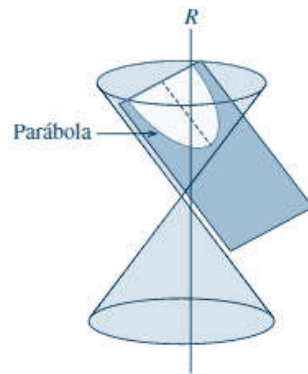


Figura 3.4

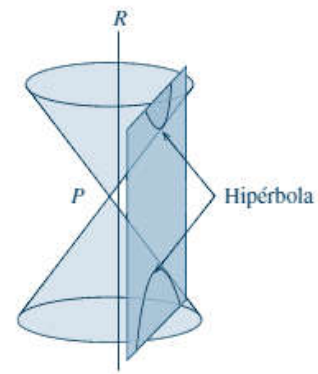


Figura 3.5

Debe observarse que en la formación de las cuatro cónicas básicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola), el plano no pasa por el vértice del cono.

Cónicas degeneradas

Es el resultado de la intersección del plano con el vértice del cono, dando lugar a un punto, dos rectas que se cortan y a una sola recta.

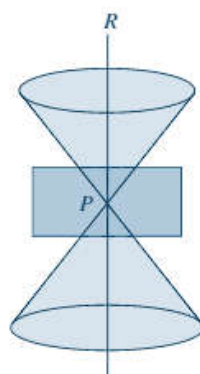


Figura 3.6

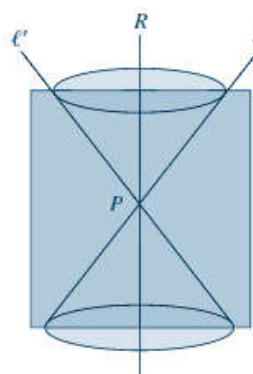


Figura 3.7

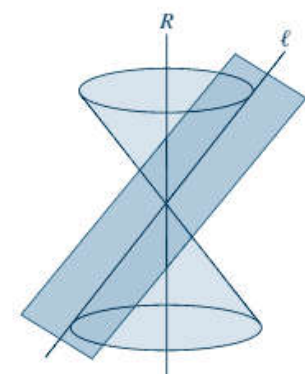


Figura 3.8

Si el plano pasa por el vértice perpendicularmente al eje, su intersección da lugar a un **punto** (Figura 3.6).

Si el plano pasa por el vértice paralelamente al eje, su intersección da lugar a dos **rectas que se cortan en dicho vértice** (Figura 3.7).

Si el plano pasa por el vértice y paralelamente a la generatriz del cono, da lugar a **una sola recta** (Figura 3.8).

EJERCICIO 16

- I. Realiza lo que se indica en cada caso y en plenaria discute tus respuestas.
 1. Define sección cónica.
 2. ¿Cómo se forma un cono de revolución de dos mantos?
 3. Escribe los elementos que forman un cono de revolución de dos mantos.
 4. Explica cómo se forma la sección cónica circunferencia.
 5. Explica cómo se forma la sección cónica elipse.
 6. Explica cómo se forma la sección cónica parábola.
 7. Explica cómo se forma la sección cónica hipérbola.
 8. Define sección cónica degenerada.
 9. Explica cómo se forma la sección cónica degenerada punto.
 10. Explica cómo se forma la sección cónica degenerada dos rectas que se cortan.
 11. Explica cómo se forma la sección cónica degenerada una sola recta.
 12. Representa gráficamente las secciones cónicas y las degeneradas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Determinación de la ecuación de la circunferencia y su gráfica

Definición de circunferencia

Geoméricamente, se entiende a la circunferencia como una curva plana y cerrada cuyos puntos equidistan de otro punto fijo interior llamado **centro**; se denomina **radio** a los segmentos que unen al centro con cualquier punto de la curva.

Analíticamente, se define por una ecuación de segundo grado con dos variables, la **circunferencia** es la curva más estudiada después de la línea recta; como se verá más adelante, no toda ecuación cuadrática da lugar a una circunferencia.

Ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r

La circunferencia está definida por un radio constante r , su ecuación es el resultado de fijar la distancia del centro a cualquier punto $P(x,y)$ perteneciente a la curva:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Demostración

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la circunferencia con centro en el origen y radio r (Figura 3.9).

Con el origen y un punto cualquiera de la curva, se forma el triángulo rectángulo OPA , donde los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AP}$ y $\overline{OP}$, son los catetos adyacente, opuesto e hipotenusa, respectivamente.

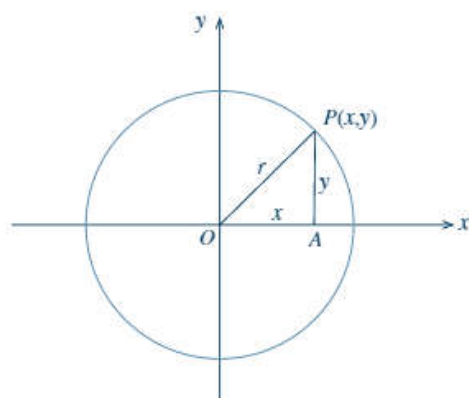


Figura 3.9

Si $\overline{OA} = x$ (abscisa de P), $\overline{AP} = y$ (ordenada de P) y $\overline{OP} = r$ (distancia constante del centro al punto P), por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\begin{aligned}(\overline{OA})^2 + (\overline{AP})^2 &= (\overline{OP})^2 \\(x)^2 + (y)^2 &= (r)^2 \\x^2 + y^2 &= r^2\end{aligned}$$

Otro método de demostración

Al aplicar la ecuación de distancia entre dos puntos, para el segmento $\overline{OP}$, se tiene:

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \overline{OP} &= \sqrt{(0 - x)^2 + (0 - y)^2}\end{aligned}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, resulta:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ r^2 &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

La expresión $x^2 + y^2 = r^2$ también se denomina **forma canónica** de la ecuación de la circunferencia.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. ●● Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el origen cartesiano y de radio 4; construye la gráfica correspondiente.

Solución

Al sustituir los datos dados en la ecuación de la circunferencia en su forma canónica, resulta:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 &= (4)^2 \\ x^2 + y^2 &= 16\end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 &= (4)^2 \\ x^2 + y^2 &= 16\end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la circunferencia con} \\ \text{centro en el origen y radio igual a 4.} \end{array}$$

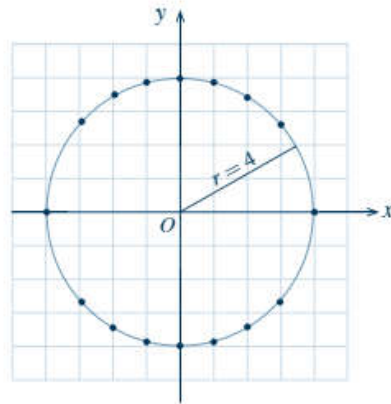
Para construir la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 16$, se despeja a y en función de x , es decir:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 16 \\ y^2 &= 16 - x^2 \\ y &= \pm\sqrt{16 - x^2}\end{aligned}$$

Al dar valores a la variable independiente x , se obtienen los valores de la variable dependiente y , que se registran en el siguiente tabulador:

x	y
0	± 4
± 1	± 3.87
± 2	± 3.46
± 3	± 2.64
± 4	0

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 ••• Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ está sobre la recta es $x - 7y + 25 = 0$; determina la longitud de la cuerda.

Solución

Geoméricamente, una cuerda es el segmento que está limitado por dos puntos de la circunferencia; por lo anterior es necesario determinar las intersecciones entre la circunferencia y la cuerda.

De la ecuación de la cuerda $x - 7y + 25 = 0$ se despeja a x y el resultado se eleva al cuadrado, es decir:

$$\begin{aligned} x - 7y + 25 &= 0 \\ (x)^2 &= (7y - 25)^2 \\ x^2 &= 49y^2 - 350y + 625 \\ x^2 - 49y^2 + 350y &= 625 \end{aligned}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones $x^2 + y^2 = 25$ (1) de la circunferencia y $x^2 - 49y^2 + 350y = 625$ (2) de la cuerda, se debe multiplicar la ecuación (1) por -1 , es decir:

$$\begin{array}{r} \cancel{x^2} - y^2 = -25 \\ \cancel{x^2} - 49y^2 + 350y = 625 \\ \hline -50y^2 + 350y = 600 \end{array}$$

Al simplificar y factorizar, se tiene:

$$\begin{aligned} 50y^2 - 350y + 600 &= 0 \\ y^2 - 7y + 12 &= 0 \\ (y - 4)(y - 3) &= 0 \\ y - 4 &= 0 & y - 3 &= 0 \\ y_1 &= 4 & y_2 &= 3 \end{aligned}$$

Al sustituir los valores de y en la ecuación (1), se tiene:

Para $y = 4$

$$\begin{aligned}x - 7y + 25 &= 0 \\x - 7(4) + 25 &= 0 \\x - 28 + 25 &= 0 \\x - 3 &= 0 \\x &= 3\end{aligned}$$

Para $y = 3$

$$\begin{aligned}x - 7y + 25 &= 0 \\x - 7(3) + 25 &= 0 \\x - 21 + 25 &= 0 \\x + 4 &= 0 \\x &= -4\end{aligned}$$

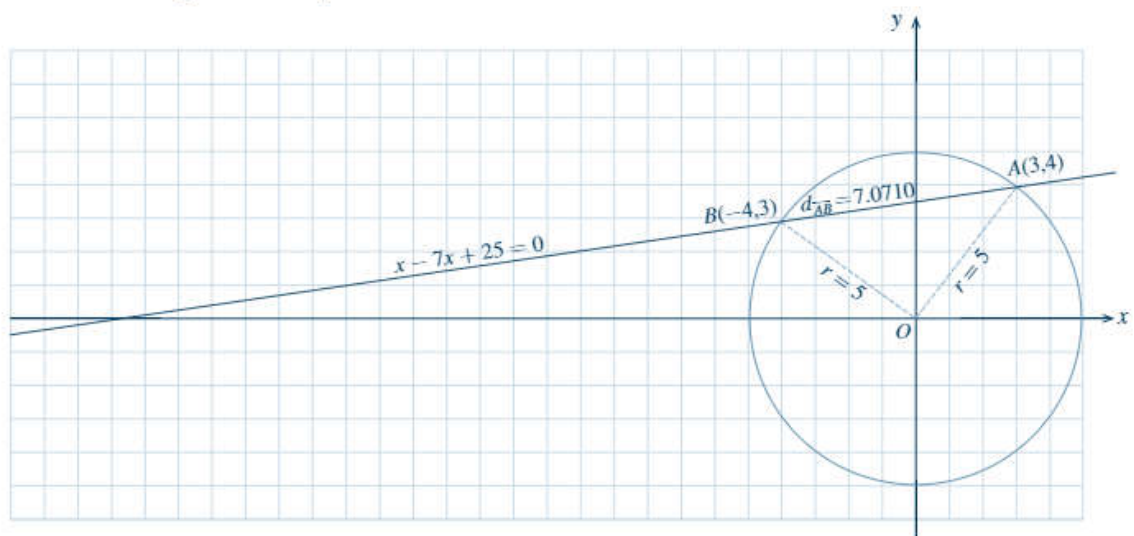
Los puntos de intersección entre la circunferencia y la cuerda son $A(3,4)$ y $B(-4,3)$.

Al determinar la distancia entre los dos puntos de intersección, se tiene:

$$\begin{aligned}d_{AB} &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\d_{AB} &= \sqrt{(3 - (-4))^2 + (4 - 3)^2} \\d_{AB} &= \sqrt{(7)^2 + (1)^2} \\d_{AB} &= \sqrt{49 + 1} \\d_{AB} &= \sqrt{50} \\d_{AB} &\approx 7.0710\end{aligned}$$

La longitud de la cuerda es $d_{AB} \approx 7.0710$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



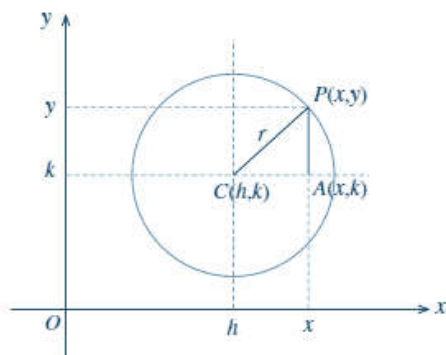
Ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen o de forma ordinaria

La circunferencia con centro en el punto $C(h,k)$ que se ubica en cualquier lugar del plano coordenado y que tiene como radio la constante r , se representa por la ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \left. \vphantom{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2} \right\} \text{ También se le llama forma reducida de la circunferencia.}$$

Demostración

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de las circunferencias con centro en (h,k) y radio r , forman el triángulo CPA como se muestra a continuación.



Dado que los segmentos $|\overline{CA}| = |x - h|$, $|\overline{AP}| = |y - k|$ y $|\overline{CP}| = r$, son los catetos adyacente, opuesto e hipotenusa del triángulo rectángulo CPA ; se aplica el teorema de Pitágoras, es decir:

$$\begin{aligned}(x - h)^2 + (y - k)^2 &= (r)^2 \\(x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2\end{aligned}$$

Otro método de demostración

A partir de la definición geométrica de circunferencia, se tiene que el punto $P(x,y)$ cumple la condición de que $|\overline{CP}| = r$, la cual analíticamente se expresa por la fórmula de distancia entre dos puntos, es decir:

$$\begin{aligned}|\overline{CP}| &= \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} \\r &= \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}\end{aligned}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, se tiene:

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

EJEMPLOS

- 1 ••• Determina la ecuación de la circunferencia con centro en $C(5, -3)$ y radio $\sqrt{19}$; construye la gráfica correspondiente.

Solución

Al sustituir los datos dados en la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, se tiene:

$$\begin{aligned}(x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\(x - 5)^2 + (y + 3)^2 &= (\sqrt{19})^2 \\(x - 5)^2 + (y + 3)^2 &= 19\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned}(x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\(x - 5)^2 + (y + 3)^2 &= (\sqrt{19})^2 \\(x - 5)^2 + (y + 3)^2 &= 19\end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la circunferencia con} \\ \text{centro en } C(5, -3) \text{ y radio } \sqrt{19}. \end{array}$$

Para elaborar la gráfica, se despeja a y de la ecuación $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 19$, es decir:

$$\begin{aligned}(x - 5)^2 + (y + 3)^2 &= 19 \\(y + 3)^2 &= 19 - (x - 5)^2\end{aligned}$$

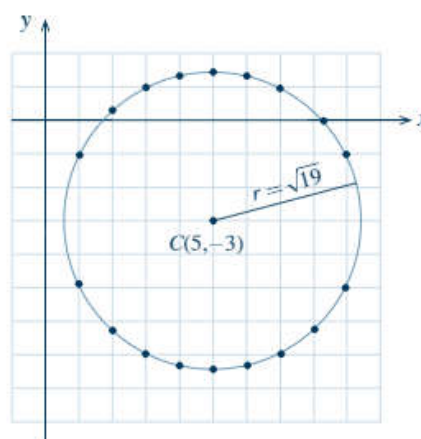
Al aplicar raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned}y + 3 &= \pm \sqrt{19 - (x - 5)^2} \\y &= -3 \pm \sqrt{19 - (x - 5)^2}\end{aligned}$$

Dando valores a la variable independiente x , se obtienen los valores de la variable dependiente y , los cuales se registran en el siguiente tabulador:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-1.26	0.16	0.87	1.24	1.35	1.24	0.87	0.16	-1.26
	-4.73	-6.16	-6.87	-7.24	-7.35	-7.24	-6.87	-6.16	-4.73

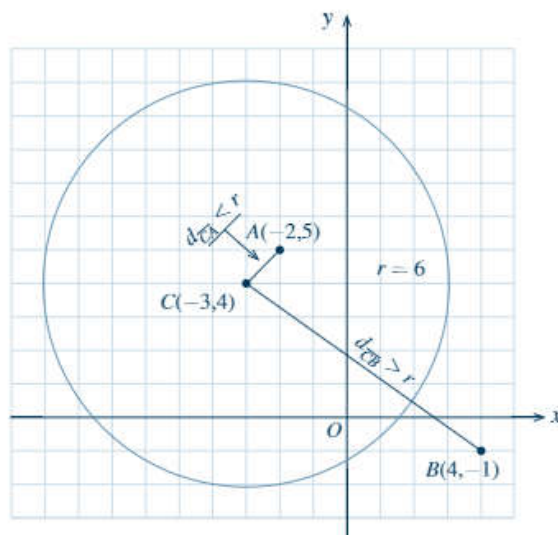
Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 •• La ecuación de una circunferencia es $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$; demuestra que el punto $A(-2, 5)$ es interior a la circunferencia y que el punto $B(4, -1)$ es exterior.

Solución

De la ecuación de la circunferencia, se sabe que su centro es el punto $C(-3, 4)$ y que su radio es $r = 6$; al elaborar la gráfica, se tiene:



Gráficamente se observa que el punto $A(-2, 5)$ es interior a la circunferencia, es decir, la $d_{CA} < r$; de la misma manera el punto $B(4, -1)$ es exterior a la circunferencia, es decir, la $d_{CB} > r$.

$$d_{\overline{CA}} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$d_{\overline{CA}} = \sqrt{(-3 + 2)^2 + (4 - 5)^2}$$

$$d_{\overline{CA}} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$

$$d_{\overline{CA}} = \sqrt{1 + 1}$$

$$d_{\overline{CA}} = \sqrt{2} \approx 1.4142$$

$$d_{\overline{CB}} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$d_{\overline{CB}} = \sqrt{(-3 - 4)^2 + (4 + 1)^2}$$

$$d_{\overline{CB}} = \sqrt{(-7)^2 + (5)^2}$$

$$d_{\overline{CB}} = \sqrt{49 + 25}$$

$$d_{\overline{CB}} = \sqrt{74} \approx 8.6023$$

Se demuestra que el punto $A(-2,5)$ es interior a la circunferencia ya que $d_{\overline{CA}} < r$; también que el punto $B(4,-1)$ es exterior a la circunferencia ya que $d_{\overline{CB}} > r$.

- 3 •• La ecuación de una circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$; determina la ecuación de la tangente a dicho círculo en el punto $A(6,7)$.

Solución

De la ecuación de la circunferencia, se sabe que su centro es el punto $C(4,3)$; al determinar la pendiente de la recta que pasa por el centro y el punto A , resulta:

$$m_{\overline{CA}} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3 - 7}{4 - 6} = \frac{-4}{-2} = 2$$

La pendiente de la recta $\overline{CA}$ tomada recíprocamente y de signo contrario, es la pendiente de la recta tangente a la circunferencia, ya que son perpendiculares entre sí.

$$m_{\text{tan}} = -\frac{1}{m_{\overline{CA}}} = -\frac{1}{2}$$

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta para los datos $A(6,7)$ y $m_{\text{tan}} = -\frac{1}{2}$, se tiene:

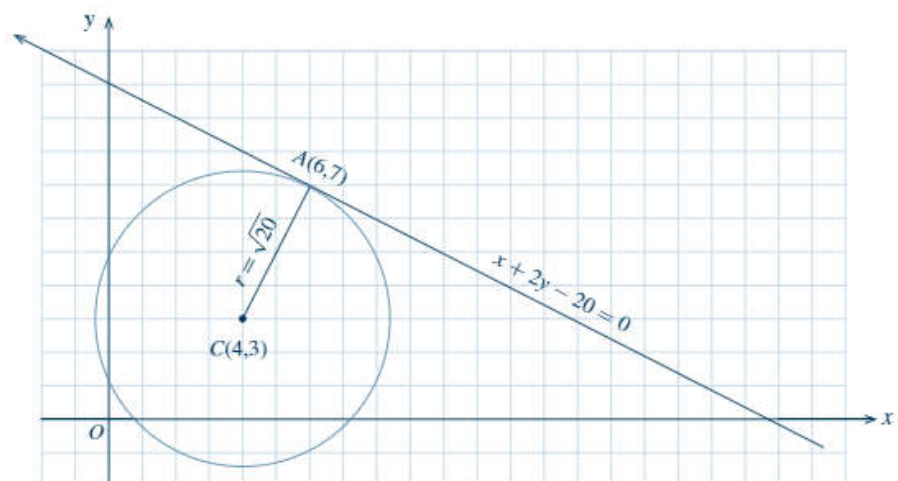
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 6)$$

$$x + 2y - 20 = 0$$

La ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$ en el punto $A(6,7)$ es $x + 2y - 20 = 0$.

Al elaborar la gráfica, se tiene:



Forma general de la ecuación de la circunferencia

La ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, desarrollando los binomios cuadráticos del primer miembro, se obtiene: $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$, ordenando los términos e igualando a cero la ecuación, resulta:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Al establecer las siguientes igualdades: $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$, se tiene:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

La expresión resultante se denomina **forma general** de la ecuación de la circunferencia.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. •• Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(-2, 1)$ y es tangente a la recta $4x - 3y - 12 = 0$; determina su ecuación en las formas ordinaria y general.

Solución

Para que la circunferencia quede perfectamente determinada es necesario conocer su radio, el cual se calcula con la fórmula de distancia de una recta a un punto, es decir:

$$d = r = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4x - 3y - 12|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{|4(-2) - 3(1) - 12|}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$d = r = \frac{|-8 - 3 - 12|}{\sqrt{25}} = \frac{|-23|}{5} = \frac{23}{5}$$

Al sustituir los datos dados y los calculados, en la ecuación de la circunferencia de forma ordinaria, resulta:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{23}{5}\right)^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{529}{25} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{529}{25} \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{529}{25} \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{Forma ordinaria de} \\ \text{la circunferencia.} \end{array}$$

Transformando la ecuación de la circunferencia de su forma ordinaria a la forma general, resulta:

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{529}{25}$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \frac{529}{25}$$

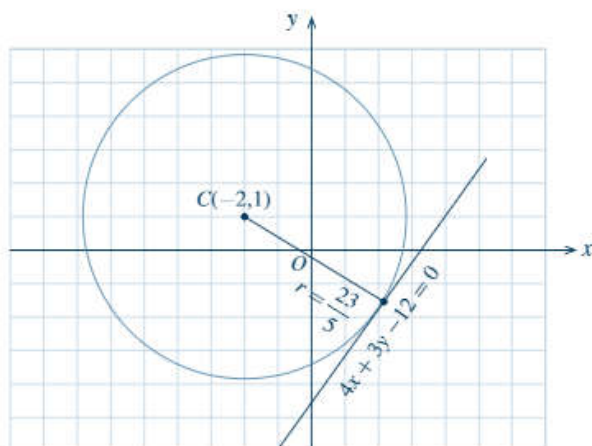
$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 - \frac{529}{25} = 0$$

$$\frac{25x^2 + 25y^2 + 25(4x) - 25(2y) + 25(5) - 529}{25} = 0$$

$$\frac{25x^2 + 25y^2 + 100x - 50y + 125 - 529}{25} = 0$$

$$25x^2 + 25y^2 + 100x - 50y - 404 = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 25x^2 + 25y^2 + 100x - 50y - 404 = 0 \\ 25x^2 + 25y^2 + 100x - 50y - 404 = 0 \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{Forma general de la circunferencia.} \end{array}$$

Al elaborar la gráfica de los datos dados y los resultados obtenidos, resulta:



- 2 ••• Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-3,3)$ y $B(1,4)$ y cuyo centro está situado en la recta $3x - 2y - 23 = 0$.

Solución

Sea el punto $C(h,k)$ el centro de la circunferencia y que equidista de los puntos dados, es decir, la distancia del segmento $\overline{CA}$ es igual a la distancia del segmento $\overline{CB}$, por lo que $d_{CA} = d_{CB}$.

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, se tiene:

$$d_{CA} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \quad d_{CB} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$\sqrt{(h+3)^2 + (k-3)^2} = \sqrt{(h-1)^2 + (k-4)^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros, resulta:

$$(h+3)^2 + (k-3)^2 = (h-1)^2 + (k-4)^2$$

Al desarrollar los binomios, se tiene:

$$h^2 + 6h + 9 + k^2 - 6k + 9 = h^2 - 2h + 1 + k^2 - 8k + 16$$

$$h^2 + 6h + k^2 - 6k - h^2 + 2h - k^2 + 8k + 18 - 17 = 0$$

$$8h + 2k + 1 = 0$$

Como el centro de la circunferencia está situado en la recta $3x - 2y - 23 = 0$, la cual se escribe en la forma $3h - 2k - 23 = 0$; al resolver simultáneamente las ecuaciones $8h + 2k + 1 = 0$ (1) y $3h - 2k - 23 = 0$ (2), se deducen las coordenadas del centro de la circunferencia, es decir:

$$\begin{array}{rcl} 8h + 2k + 1 = 0 & (1) & \\ 3h - 2k - 23 = 0 & (2) & \\ \hline 11h - 22 = 0 & & \\ 11h = 22 & & \\ h = \frac{22}{11} & & \\ h = 2 & & \end{array}$$

Al sustituir el valor de h , en cualquiera de las ecuaciones originales, resulta:

$$\begin{array}{rcl} 3h - 2k - 23 = 0 & & \\ 3(2) - 2k - 23 = 0 & & \\ 6 - 2k - 23 = 0 & & \\ -2k - 17 = 0 & & \\ -2k = 17 & & \\ k = -\frac{17}{2} & & \end{array}$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son $C\left(2, -\frac{17}{2}\right)$.

Ahora se determina el radio cuya distancia es equivalente a la de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, es decir:

$$\begin{aligned}d_{\overline{CA}} &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\r &= \sqrt{(2+3)^2 + \left(-\frac{17}{2}-3\right)^2} \\r &= \sqrt{(5)^2 + \left(-\frac{23}{2}\right)^2} \\r &= \sqrt{25 + \frac{529}{4}} \\r &= \sqrt{\frac{100+529}{4}} \\r &= \sqrt{\frac{629}{4}} = \frac{\sqrt{629}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{\overline{CB}} &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\r &= \sqrt{(2-1)^2 + \left(-\frac{17}{2}-4\right)^2} \\r &= \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{25}{2}\right)^2} \\r &= \sqrt{1 + \frac{625}{4}} \\r &= \sqrt{\frac{4+625}{4}} \\r &= \sqrt{\frac{629}{4}} = \frac{\sqrt{629}}{2}\end{aligned}$$

El radio de la circunferencia es $r = \frac{\sqrt{629}}{2}$.

La ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria es:

$$\begin{aligned}(x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\(x-2)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{629}}{2}\right)^2 \\(x-2)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 &= \frac{629}{4}\end{aligned}$$

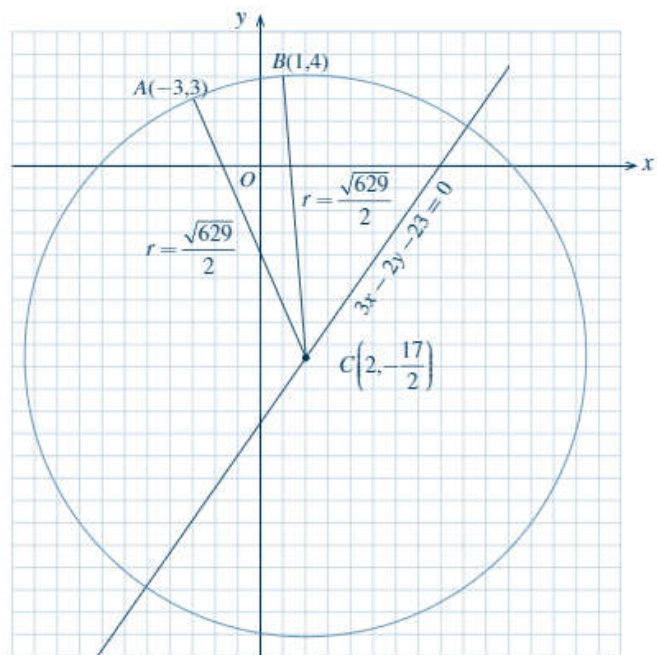
La ecuación de la circunferencia en su forma general es:

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 &= \frac{629}{4} \\x^2 - 4x + 4 + y^2 + 17y + \frac{289}{4} - \frac{629}{4} &= 0 \\x^2 + y^2 - 4x + 17y + 4 - \frac{340}{4} &= 0 \\x^2 + y^2 - 4x + 17y + 4 - 85 &= 0 \\x^2 + y^2 - 4x + 17y - 81 &= 0\end{aligned}$$

La ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria y general, que pasa por los puntos $A(-3,3)$ y $B(1,4)$, cuyo centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$, son

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{629}{4} \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 4x + 17y - 81 = 0.$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 3 ••• Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $6x + 7y - 16 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $3x - 4y - 18 = 0$ y $8x + 15y + 7 = 0$.

Solución

Al elaborar las gráficas de las ecuaciones de las rectas, se tiene:

$$6x + 7y - 16 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{C}{A} & y &= -\frac{C}{B} \\ x &= -\frac{-16}{6} & y &= -\frac{-16}{7} \\ x &\approx 2.666 & y &\approx 2.285 \end{aligned}$$

$$3x - 4y - 18 = 0 \quad (2)$$

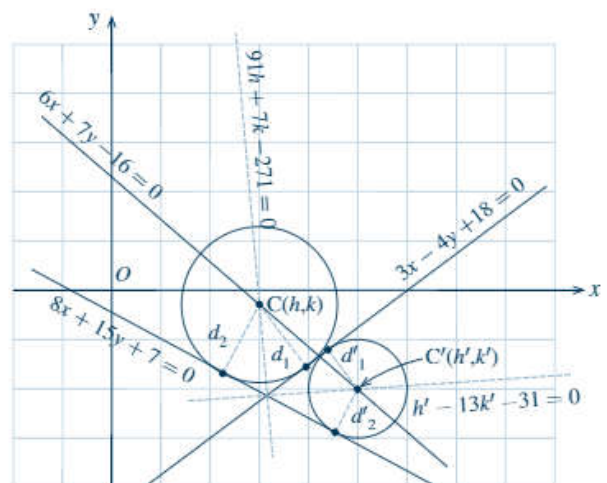
$$\begin{aligned} x &= -\frac{C}{A} & y &= -\frac{C}{B} \\ x &= -\frac{-18}{3} & y &= -\frac{-18}{-4} \\ x &= 6 & y &= -4.5 \end{aligned}$$

$$8x + 15y + 7 = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{C}{A} & y &= -\frac{C}{B} \\ x &= -\frac{7}{8} & y &= -\frac{7}{15} \\ x &\approx -0.875 & y &\approx -0.466 \end{aligned}$$

Sea $C(h, k)$ el centro de la circunferencia que se ubica sobre la recta $6x + 7y - 16 = 0$. Considerando distancias dirigidas del centro a las rectas tangentes, reconocemos dos casos:

Caso 1. Cuando el centro y el origen se encuentran en lados opuestos de la recta $3x - 4y - 18 = 0$ y el centro y el origen se encuentran del mismo lado de la recta $8x + 15y + 7 = 0$.



Caso 2. Cuando el centro y el origen se encuentran del mismo lado de la recta $3x - 4y - 18 = 0$ y el centro y el origen se encuentran del mismo lado de la recta $8x + 15y + 7 = 0$.

En el caso 1 tendremos $d_1 = -d_2$

En el caso 2 tendremos $-d'_1 = -d'_2$, o bien, $d'_1 = d'_2$.

Caso 1: $d_1 = -d_2$

$$\begin{aligned} \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} &= -\frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{(A')^2 + (B')^2}} & \frac{3h - 4k - 18}{5} &= -\frac{8h + 15k + 7}{17} \\ \frac{3h - 4k - 18}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} &= -\frac{8h + 15k + 7}{\sqrt{(8)^2 + (15)^2}} & 17(3h - 4k - 18) &= -5(8h + 15k + 7) \\ \frac{3h - 4k - 18}{\sqrt{9 + 16}} &= -\frac{8h + 15k + 7}{\sqrt{64 + 225}} & 51h - 68k - 306 &= -40h - 75k - 35 \\ \frac{3h - 4k - 18}{\sqrt{25}} &= -\frac{8h + 15k + 7}{\sqrt{289}} & 51h - 40h - 68k + 75k - 306 + 35 &= 0 \\ & & 91h + 7k - 271 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación $91h + 7k - 271 = 0$ representa a la bisectriz del ángulo formado por las dos rectas tangentes dadas. Como el centro pertenece a la recta $6x + 7y - 16 = 0$, la cual se escribe en la forma $6h + 7k - 16 = 0$. Se resuelven simultáneamente las rectas $91h + 7k - 271 = 0$ (1) y $6h + 7k - 16 = 0$ (2); se multiplica por -1 a (1), es decir:

$$\begin{aligned} -91h - 7k + 271 &= 0 \\ \underline{6h + 7k - 16} &= 0 \\ -85h + 255 &= 0 \\ -85h &= -255 \\ h &= \frac{-255}{-85} \\ h &= 3 \end{aligned}$$

Al sustituir el valor de h en la ecuación (2), resulta:

$$\begin{aligned} 6(3) + 7k - 16 &= 0 \\ 18 + 7k - 16 &= 0 \\ 7k + 2 &= 0 \\ 7k &= -2 \\ k &= -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son $C\left(3, -\frac{2}{7}\right)$.

Para determinar el radio de la circunferencia, se debe recordar la expresión existente para d_1 y sustituir los valores de h y k , es decir:

$$\begin{aligned} r = |d_1| &= \frac{|3h - 4k - 18|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{\left|3(3) - 4\left(-\frac{2}{7}\right) - 18\right|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{\left|9 + \frac{8}{7} - 18\right|}{\sqrt{25}} \\ r &= \frac{\left|\frac{63 + 8 - 126}{7}\right|}{5} = \frac{\left|-\frac{55}{7}\right|}{5} = \frac{|-11|}{7} = \frac{11}{7} \end{aligned}$$

El radio de la circunferencia es $r = \frac{11}{7}$.

Se aplica la ecuación de la circunferencia de forma ordinaria o de forma reducida, es decir:

$$\begin{aligned}(x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\(x-3)^2 + \left(y + \frac{2}{7}\right)^2 &= \left(\frac{11}{7}\right)^2 \\(x-3)^2 + \left(y + \frac{2}{7}\right)^2 &= \frac{121}{49}\end{aligned}$$

Transformando a la forma general, resulta:

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + \left(y + \frac{2}{7}\right)^2 &= \frac{121}{49} \\x^2 - 6x + 9 + y^2 + \frac{4}{7}y + \frac{4}{49} &= \frac{121}{49} \\x^2 + y^2 - 6x + \frac{4}{7}y + 9 + \frac{4}{49} - \frac{121}{49} &= 0 \\x^2 + y^2 - 6x + \frac{4}{7}y + 9 - \frac{117}{49} &= 0 \\\frac{49x^2 + 49y^2 - 294x + 28y + 441 - 117}{49} &= 0 \\49x^2 + 49y^2 - 294x + 28y + 324 &= 0\end{aligned}$$

Caso 2: $d'_1 = d'_2$

$$\begin{aligned}\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} &= \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} & \frac{3h' - 4k' - 18}{5} &= \frac{8h' + 15k' + 7}{17} \\ \frac{3h' - 4k' - 18}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} &= \frac{8h' + 15k' + 7}{-\sqrt{(8)^2 + (15)^2}} & 17(3h' - 4k' - 18) &= 5(8h' + 15k' + 7) \\ \frac{3h' - 4k' - 18}{\sqrt{9 + 16}} &= \frac{8h' - 15k' + 7}{\sqrt{64 + 255}} & 51h' - 68k' - 306 &= 40h' + 75k' + 35 \\ \frac{3h' - 4k' - 18}{\sqrt{25}} &= \frac{8h' - 15k' + 7}{\sqrt{289}} & 51h' - 40h' - 68k' - 75k' - 306 - 35 &= 0 \\ & & 11h' - 143k' - 341 &= 0 \\ & & h' - 13k' - 31 &= 0\end{aligned}$$

La ecuación $h' - 13k' - 31 = 0$, representa a la bisectriz del ángulo formado por las dos rectas tangentes dadas. Como el centro pertenece a la recta $6x + 7y - 16 = 0$, la cual se escribe en la forma $6h' + 7k' - 16 = 0$. Al resolver simultáneamente las rectas $h' - 13k' - 31 = 0$ (1) y $6h' + 7k' - 16 = 0$ (2), se multiplica por -6 a (1), es decir:

$$\begin{aligned}-6h' + 78k' + 186 &= 0 \\ 6h' + 7k' - 16 &= 0 \\ \hline 85k' + 170 &= 0 \\ 85k' &= -170 \\ k' &= \frac{-170}{85} \\ k' &= -2\end{aligned}$$

Al sustituir el valor de -2 en (2), resulta:

$$6h' + 7(-2) - 16 = 0$$

$$6h' - 14 - 16 = 0$$

$$6h' - 30 = 0$$

$$h' = \frac{30}{6}$$

$$h' = 5$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son $C'(5, -2)$.

Para determinar el radio de la circunferencia, se debe recordar la expresión existente para d'_1 y sustituir los valores de h' y k' , es decir:

$$r = |d'_1| = \frac{|3h' - 4k' - 18|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{|3(5) - 4(-2) - 18|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|15 + 8 - 18|}{\sqrt{25}}$$

$$r = \frac{|23 - 18|}{5} = \frac{|5|}{5} = |1| = 1$$

El radio de la circunferencia es $r = 1$.

Al aplicar la ecuación de la circunferencia de forma ordinaria o de forma reducida, resulta:

$$(x - h')^2 + (y - k')^2 = r^2$$

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = (1)^2$$

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

Transformando a la forma general, resulta:

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$$

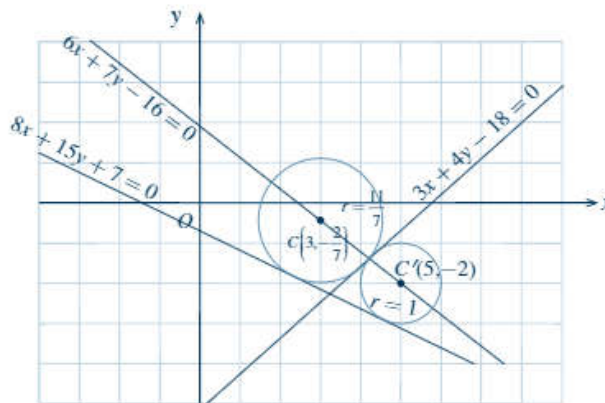
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 + 4 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 28 = 0$$

Las ecuaciones de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $6x + 7y - 16 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $3x - 4y - 18 = 0$ y $8x + 15y + 7 = 0$, son en su forma ordinaria: $(x + 3)^2 + \left(y + \frac{2}{7}\right)^2 = \frac{121}{49}$ y $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$; en su forma general: $49x^2 + 49y^2 - 294x + 28y + 324 = 0$ y $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 28 = 0$.

Al elaborar la gráfica, se tiene:



EJERCICIO 17

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

- I. Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y cuyo radio se indica a continuación; construye la gráfica correspondiente.
 - a) $r = 6$
 - b) $r = \sqrt{13}$
 - c) $r = \frac{2\sqrt{5}}{3}$
 - d) $r = \frac{17}{4}$
 - e) $r = \frac{3}{5}$
- II. Determina la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria y transforma a su forma general, para los centros y radios dados a continuación; construye la gráfica correspondiente.
 1. $C(4,2)$ y $r = 3$
 2. $C(-1,-3)$ y $r = \sqrt{7}$
 3. $C\left(-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$ y $r = \frac{13}{2}$
 4. $C(0,2)$ y $r = 4$
 5. $C(5,0)$ y $r = 10$
 6. $C(-2,3)$ y $r = \frac{7}{2}$
- III. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos que a continuación se indican; determina la ecuación de la curva en su forma ordinaria y general; traza la gráfica correspondiente.
 1. $A(-7,0)$ y $B(0,4)$
 2. $A(-1,3)$ y $B(7,4)$
 3. $A(6,-2)$ y $B(-4,3)$
 4. $A(4,-6)$ y $B(-1,3)$
 5. $A(5,-2)$ y $B(7,2)$
 6. $A(-2,-4)$ y $B(1,2)$
- IV. Determina la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria y general cuyo centro es cada uno de los siguientes puntos dados y que pasa por el punto indicado; traza la gráfica correspondiente.
 1. $C(-6,7)$ y pasa por $A(2,2)$
 2. $C(2,-4)$ y pasa por $A(-1,1)$
 3. $C(-3,4)$ y pasa por $A(2,-5)$
 4. $C(4,2)$ y pasa por $A(-3,-4)$
 5. $C\left(-\frac{23}{7}, -\frac{17}{7}\right)$ y pasa por $A\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$
 6. $C(-12,5)$ y pasa por $A(0,0)$
- V. Dada la ecuación de la circunferencia, determina la ecuación de la tangente a dicha curva en el punto indicado; traza la gráfica correspondiente.
 1. $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{130}{4}$, en el punto $A(-1,1)$
 2. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$, en el punto $A(3,4)$
 3. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$, en el punto $A(4,1)$

4. $(x + 12)^2 + (y + 5)^2 = 169$, en el punto $A(0,0)$

5. $(x - 2)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 26$, en el punto $A\left(3, \frac{5}{2}\right)$

VI. Resuelve los siguientes problemas y discute en plenaria tus resultados.

- Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(3, -6)$ y que es tangente al eje y .
- La ecuación de una circunferencia es $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$; demuestra que el punto $A(4, -2)$ es interior a la circunferencia y que el punto $B(7, -5)$ es exterior.
- Determina la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $x = 7$ cuyo centro es $C(-2, 5)$.
- Encuentra la ecuación de la circunferencia de radio 7 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 24 = 0$ y $2x + 7y + 9 = 0$.
- Determina la ecuación de la mediatriz de la cuerda $x - 7y + 25 = 0$ que pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$; demuestra que pasa por el centro de la circunferencia.
- Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje x y que pasa por los puntos $A(2, 4)$ y $B(6, 8)$.
- Determina la ecuación de la circunferencia de radio 5, cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $2x + 3y - 12 = 0$ y $4x + 3y - 6 = 0$.
- Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(-2, 1)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 6 = 0$ y $2x + 3y - 17 = 0$.
- Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-4, -3)$ y $B(5, 10)$, cuyo centro está sobre la recta $3x + y - 5 = 0$.
- Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ está sobre la recta cuya ecuación es $4x + 3y - 12 = 0$; determina la longitud de la cuerda.
- La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 36$; el punto medio de una cuerda de esta circunferencia es el punto $A\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$; determina la ecuación de la cuerda.
- La ecuación de una circunferencia es $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$; determina la ecuación de la tangente a la circunferencia que pasa por el punto $A(3, 3)$.
- Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y es tangente a la recta $2x - 2y - 8 = 0$ en el punto $B(3, -1)$.
- Determina la ecuación de la circunferencia de radio 13, que pasa por el punto $A(0, 0)$ y la ordenada de su centro sea -5 .
- Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(-4, 2)$ y que sea tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$.
- Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(3, 4)$ y que sea tangente a la recta $3x + y - 3 = 0$.
- Determina la ecuación de la circunferencia de radio 5 que sea tangente a la recta $4x + 3y - 7 = 0$ en el punto $A(-2, 5)$.
- Determina la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $3x + y - 3 = 0$ y $x - 3y + 9 = 0$ y que tenga su centro en la recta $7x + 12y - 32 = 0$.
- Determina la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $2x + y - 7 = 0$ y $x - 2y + 4 = 0$ que pasa por el punto $A(4, -1)$.
- Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3, 6)$ y $B(2, 3)$ y sea tangente a la recta $2x + y = 2$.

21. Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y que sea tangente a la recta $8x - 15y - 12 = 0$.
 22. Determina la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $4x - 3y - 2 = 0$ en el punto $A(-1, -2)$ que pasa por el punto $B(6, -1)$.
 23. Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$; determina su ecuación.
 24. Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(-1, -3)$ y que es tangente a la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(-2, 4)$.
 25. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro se ubica sobre el eje x y que pasa por los puntos $A(4, 5)$ y $B(-2, 3)$.
- VII. Determina las ecuaciones de las circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo cuyos vértices se dan a continuación:
1. $A(5, 3)$, $B(2, 0)$ y $C(7, 1)$
 2. $A(10, 2)$, $B(3, 9)$ y $C(-2, -1)$
 3. $A(4, -2)$, $B(-5, 1)$ y $C(2, 3)$
 4. $A(3, 5)$, $B(-4, -2)$ y $C(-11, 3)$
- VIII. Determina la ecuación de la circunferencia circunscrita e inscrita al triángulo cuyas ecuaciones de sus lados son:
1. $x + 2y - 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$ y $x - y + 1 = 0$
 2. $x - y - 1 = 0$, $9x + 2y + 13 = 0$ y $3x + 8y - 47 = 0$
 3. $x - y - 9 = 0$, $5x + y + 9 = 0$ y $x + 2y - 18 = 0$
 4. $x - y + 3 = 0$, $5x + y - 27 = 0$ y $x + 2y = 0$
 5. $x + y - 7 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$ y $x - y + 3 = 0$
 6. $4x - 3y - 65 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$ y $7x - 24y + 55 = 0$
- IX. Los vértices de un triángulo son $A(0, -1)$, $B\left(\frac{9}{4}, -2\right)$ y $C(0, 5)$; determina:
1. La ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y que es tangente al lado BC .
 2. La ecuación de la circunferencia circunscrita e inscrita al triángulo dado.
 3. La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo dado.
 4. Demuestra que la circunferencia anterior pasa por los pies de las alturas del triángulo dado.
- X. Determina el perímetro y el área para los círculos cuyas ecuaciones son las que se indican; traza la gráfica correspondiente.
1. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$
 2. $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 15$
 3. $x^2 + y^2 = 55$
 4. $x^2 + y^2 = 11$

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Discusión acerca de si una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa o no una circunferencia; en caso afirmativo, determinación de su centro y su radio

Al desarrollar la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, se obtiene la ecuación de la circunferencia en su forma general, que puede escribirse como:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ (ecuación cuadrática)}$$

Ahora el problema que se presenta es investigar si la representación gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ es siempre una circunferencia.

Para dar una respuesta satisfactoria a la pregunta, es necesario transformar la ecuación cuadrática de la circunferencia a la forma ordinaria, por medio del método de completar binomios al cuadrado, es decir:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al ordenar los términos, se tiene:

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F$$

Para completar el trinomio de cuadrado perfecto, le falta un término a las expresiones $(x^2 + Dx)$ y $(y^2 + Ey)$; tal término es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y y , respectivamente, es decir: $\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4}$ y $\left(\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{E^2}{4}$, los cuales se suman a ambos miembros de la ecuación:

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

Al factorizar, resulta:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Comparándola con la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, se encuentran las siguientes equivalencias: $h = -\frac{D}{2}$, $k = -\frac{E}{2}$ y $r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$; concluyendo que las coordenadas del centro son: $C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y la longitud del radio es $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.

Existen tres criterios posibles por considerar.

- Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la circunferencia es real y tiene por centro a $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ con radio igual a $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.
- Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la circunferencia es un solo punto (radio 0) de coordenadas $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.
- Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la circunferencia es imaginaria; es decir, no representa ningún lugar geométrico.

Por lo anterior, se hace notar que depende del signo de la expresión $D^2 + E^2 - 4F$ en la ecuación obtenida, el que una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente gráficamente o no una circunferencia.

EJEMPLOS

Ejemplos

- Reduce las ecuaciones siguientes a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia; si la ecuación dada representa una circunferencia, determina su centro y su radio.

- $8x^2 + 8y^2 - 79x - 32y + 95 = 0$
- $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$
- $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$

Solución

a) Si la ecuación $8x^2 + 8y^2 - 79x - 32y + 95 = 0$ se divide entre 8, resulta:

$$\frac{8x^2}{8} + \frac{8y^2}{8} - \frac{79x}{8} - \frac{32y}{8} + \frac{95}{8} = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{79}{8}x - 4y + \frac{95}{8} = 0$$

Al ordenar los términos:

$$\left(x^2 - \frac{79x}{8}\right) + (y^2 - 4y) = -\frac{95}{8}$$

Para completar los cuadrados, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos miembros de la ecuación:

$$\left[x^2 - \frac{79}{8}x + \left(-\frac{79}{16}\right)^2\right] + \left[y^2 - 4y + \left(-\frac{4}{2}\right)^2\right] = \left(-\frac{79}{16}\right)^2 + \left(-\frac{4}{2}\right)^2 - \frac{95}{8}$$

$$\left(x^2 - \frac{79}{8}x + \frac{6\,241}{256}\right) + (y^2 - 4y + 4) = \frac{6\,241}{256} + 4 - \frac{95}{8}$$

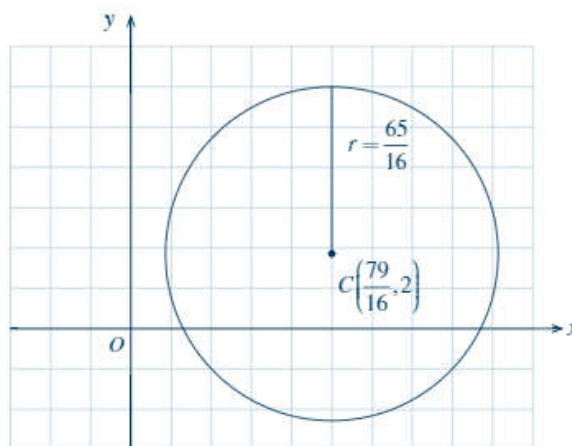
Al factorizar se tiene:

$$\left(x - \frac{79}{16}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{6\,241 + 1\,024 - 3\,040}{256}$$

$$\left(x - \frac{79}{16}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4\,225}{256} \quad \text{Ecuación ordinaria de la circunferencia.}$$

Como $r^2 = \frac{4\,225}{256} > 0$, la ecuación $8x^2 + 8y^2 - 79x - 32y + 95 = 0$ es una circunferencia real, cuyo centro es $C\left(\frac{79}{16}, 2\right)$ y su radio $r = \frac{65}{16}$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



b) Al ordenar los términos de la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$, se tiene:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = -10$$

Para completar los cuadrados, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos miembros de la ecuación:

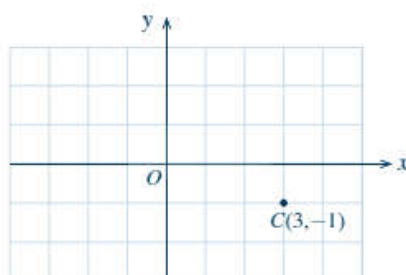
$$\left[x^2 - 6x + \left(\frac{-6}{2} \right)^2 \right] + \left[y^2 - 2y + \left(\frac{-2}{2} \right)^2 \right] = \left(\frac{-6}{2} \right)^2 + \left(\frac{-2}{2} \right)^2 - 10$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 9 + 1 - 10$$

Al factorizar se tiene:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 0 \quad \text{Ecuación en la forma ordinaria de la circunferencia.}$$

Como $r^2 = 0$, la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$ representa un solo punto de coordenadas $C(3, -1)$.



c) Si la ecuación $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$, se divide entre 3, se tiene:

$$\frac{3x^2}{3} + \frac{3y^2}{3} - \frac{4x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{6}{3} = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{4x}{3} + \frac{2y}{3} + 2 = 0$$

$$\left(x^2 - \frac{4x}{3} \right) + \left(y^2 + \frac{2y}{3} \right) = -2$$

Para completar los cuadrados, sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos miembros de la ecuación:

$$\left[x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{-4}{3} \right)^2 \right] + \left[y^2 + \frac{2}{3}y + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \left(\frac{-4}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 2$$

$$\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{16}{36} \right) + \left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{4}{36} \right) = \frac{16}{36} + \frac{4}{36} - 2$$

Al factorizar se tiene:

$$\left(x - \frac{4}{6} \right)^2 + \left(y + \frac{2}{6} \right)^2 = \frac{16 + 4 - 72}{36}$$

$$\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{3} \right)^2 = -\frac{13}{9}$$

Como $r^2 = -\frac{13}{9} < 0$, la ecuación $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$ no representa ningún lugar geométrico real.

2 ••• Determina el área y el perímetro de la circunferencia cuya ecuación es:

$$9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0$$

Solución

Si la ecuación $9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0$ se divide entre 9, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{9x^2}{9} + \frac{9y^2}{9} + \frac{72x}{9} - \frac{12y}{9} + \frac{103}{9} &= 0 \\ x^2 + y^2 + 8x - \frac{4}{3}y + \frac{103}{9} &= 0\end{aligned}$$

Al compararla con la ecuación general, se tiene:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Sea $D = 8$, por lo que, $D^2 = 64$

Sea $E = -\frac{4}{3}$, por lo que, $E^2 = \frac{16}{9}$

Sea $F = \frac{103}{9}$, por lo que, $4F = \frac{412}{9}$

Si el radio de la circunferencia se determina por la ecuación:

$$\begin{aligned}r &= \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}, \text{ resulta:} \\ r &= \frac{1}{2}\sqrt{64 + \frac{16}{9} - \frac{412}{9}} = \frac{1}{2}\sqrt{64 - \frac{396}{9}} = \frac{1}{2}\sqrt{64 - 44} \\ r &= \frac{1}{2}\sqrt{20} = \frac{1}{2}\sqrt{4(5)} = \frac{1}{2}(2)\sqrt{5} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

El área del círculo se determina por la fórmula $A = \pi r^2$, al sustituir los datos, se tiene:

$$\begin{aligned}A &= \pi r^2 \\ A &= (3.1416)(\sqrt{5})^2 = (3.1416)(5) \\ A &= 15.708 \text{ unidades de superficie.}\end{aligned}$$

El perímetro de la circunferencia se determina por la fórmula $P = 2\pi r$; al sustituir los datos, resulta:

$$\begin{aligned}P &= 2\pi r \\ P &= 2(3.1416)(\sqrt{5}) \\ P &= 14.050 \text{ unidades de longitud.}\end{aligned}$$

Otro método de solución, consiste en reducir la ecuación dada de la circunferencia en su forma general a su forma ordinaria, determinando el radio de la curva, el cual se sustituye en las respectivas fórmulas del área y longitud de la circunferencia.

Si ordenamos los términos de la ecuación dada, se tiene:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 8x - \frac{4}{3}y + \frac{103}{9} &= 0 \\ (x^2 + 8x) + \left(y^2 - \frac{4}{3}y\right) &= -\frac{103}{9}\end{aligned}$$

Al completar los cuadrados:

$$\begin{aligned} \left[x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 \right] + \left[y^2 - \frac{4}{3}y + \left(\frac{-\frac{4}{3}}{2}\right)^2 \right] &= \left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{4}{3}}{2}\right)^2 - \frac{103}{9} \\ (x^2 + 8x + 16) + \left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{16}{36} \right) &= 16 + \frac{16}{36} - \frac{103}{9} \\ (x+4)^2 + \left(y - \frac{4}{6} \right)^2 &= 16 + \frac{4}{9} - \frac{103}{9} \\ (x+4)^2 + \left(y - \frac{2}{3} \right)^2 &= 16 - 11 \\ (x+4)^2 + \left(y - \frac{2}{3} \right)^2 &= 5 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x+4)^2 + \left(y - \frac{2}{3} \right)^2 &= 5 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la circunferencia} \\ \text{en su forma ordinaria.} \end{array}$$

El centro de la circunferencia es $C\left(-4, \frac{2}{3}\right)$ y su radio es $r = \sqrt{5}$, al sustituir el valor del radio en las fórmulas para el área y el perímetro de la circunferencia, se tiene:

$$A = \pi r^2$$

$$A = (3.1416)(\sqrt{5})^2$$

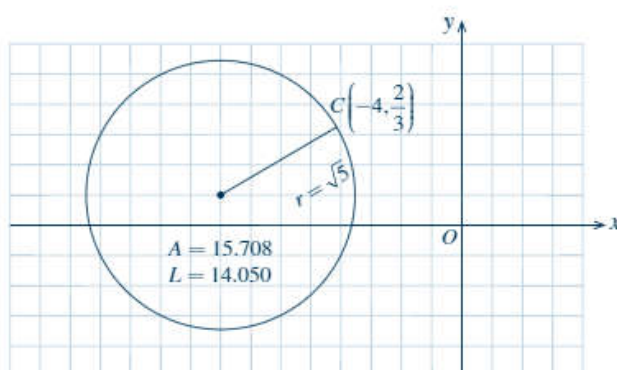
$$A = 15.708 \quad \left. \vphantom{A = 15.708} \right\} \begin{array}{l} \text{Unidades} \\ \text{de superficie} \end{array}$$

$$P = 2\pi r$$

$$P = 2(3.1416)(\sqrt{5})$$

$$P = 14.050 \quad \left. \vphantom{P = 14.050} \right\} \begin{array}{l} \text{Unidades de longitud} \end{array}$$

Al elaborar la gráfica, se tiene:



EJERCICIO 18

I. Reduce las ecuaciones siguientes a la forma ordinaria. Si la ecuación dada representa una circunferencia, encuentra su centro y su radio y traza su gráfica correspondiente.

1. $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

2. $3x^2 + 3y^2 - 8x + 8y - 31 = 0$

3. $7x^2 + 7y^2 - 34x - 48y + 103 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0$

5. $x^2 + y^2 - 2x - 20y + 105 = 0$

6. $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 29 = 0$

7. $13x^2 + 13y^2 + 125x - 64y + 403 = 0$

8. $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$

9. $36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0$

10. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 24y + 576 = 0$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

II. Determina el área y el perímetro para cada una de las circunferencias dadas en el problema anterior.

III. En los siguientes pares de circunferencias, demuestra que son concéntricas.

1. $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$ y $5x^2 + 5y^2 - 10x - 40y + 5 = 0$

2. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ y $3x^2 + 3y^2 - 24x - 18y + 27 = 0$

3. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$ y $8x^2 + 8y^2 - 24x + 40y - 30 = 0$

IV. Resuelve los siguientes problemas.

1. La ecuación de una circunferencia es $4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y + 13 = 0$; determina la ecuación de la circunferencia concéntrica de la tangente a la recta $3x - 4y + 18 = 0$.

2. Determina la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ en el punto $A(2, -3)$.

3. Demuestra que la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$, son tangentes entre sí.

4. Una circunferencia de radio $\sqrt{13}$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$ en el punto $A(6, 5)$; determina su ecuación.

5. Determina el valor de la constante k para que la recta $2x + 3y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$.

6. Determina el valor de k para que la ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ represente una circunferencia de radio 7.

7. Determina la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x - 4y + 17 = 0$ y que sea concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$.

➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Determinación de la ecuación de la circunferencia a partir de tres condiciones dadas

Circunferencias que satisfacen tres condiciones

La ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ contiene tres constantes independientes h , k y r ; de la misma manera, la ecuación en su forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, depende de tres constantes independientes D , E y F . Esto sugiere que la ecuación de la circunferencia en cualquiera de sus formas se obtiene a partir de tres condiciones independientes que relacionen las tres constantes involucradas en cada caso.

Puede demostrarse que tres condiciones gráficas independientes, relacionadas con el trazo de la circunferencia, son suficientes para que la circunferencia quede perfectamente determinada.

Las tres condiciones que podrían determinar la ecuación de una circunferencia son:

- Tres puntos.
- Dos puntos y una recta.
- Un punto y dos rectas.
- Tres rectas.

Dependiendo de las condiciones dadas, el aplicar una forma de las ecuaciones de la circunferencia puede ser más conveniente que la otra.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Determina la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos $A(-2,2)$, $B(4,1)$ y $C(1,-6)$.

Solución

Como los tres puntos dados están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde las constantes D , E y F deben ser determinadas.

Con base en lo anterior, se tienen las tres ecuaciones siguientes correspondientes a los puntos dados.

Al sustituir el punto $A(-2,2)$ en la ecuación general, resulta:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ (-2)^2 + (2)^2 + D(-2) + E(2) + F &= 0 \\ 4 + 4 - 2D + 2E + F &= 0 \\ -2D + 2E + F &= -8 \quad (1) \end{aligned}$$

Al sustituir el punto $B(4,1)$ en la ecuación general, resulta:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ (4)^2 + (1)^2 + D(4) + E(1) + F &= 0 \\ 16 + 1 + 4D + E + F &= 0 \\ 4D + E + F &= -17 \quad (2) \end{aligned}$$

Al sustituir el punto $C(1,-6)$ en la ecuación general, resulta:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ (1)^2 + (-6)^2 + D(1) + E(-6) + F &= 0 \\ 1 + 36 + D - 6E + F &= 0 \\ D - 6E + F &= -37 \quad (3) \end{aligned}$$

Si la ecuación (1) se multiplica por 2, resulta:

$$-4D + 4E + 2F = -16$$

Al resolver simultáneamente con la ecuación (2), resulta:

$$\begin{array}{r} -4D + 4E + 2F = -16 \\ 4D + E + F = -17 \\ \hline 5E + 3F = -33 \quad (4) \end{array}$$

Si la ecuación (3) se multiplica por 2, resulta:

$$2D - 12E + 2F = -74$$

Al resolver simultáneamente con la ecuación (1), resulta:

$$\begin{array}{r} -2D + 2E + F = -8 \\ 2D - 12E + 2F = -74 \\ \hline -10E + 3F = -82 \quad (5) \end{array}$$

Si la ecuación (4) se multiplica por -1 , resulta:

$$-5E - 3F = 33$$

Al resolver simultáneamente con la ecuación (5), se tiene:

$$\begin{array}{r} -5E - 3F = 33 \\ -10E + 3F = -82 \\ \hline -15E = -49 \\ E = \frac{-49}{-15} = \frac{49}{15} \end{array}$$

Se sustituye el valor de E en (4) o (5), es decir:

$$\begin{array}{l} 5\left(\frac{49}{15}\right) + 3F = -33 \\ \frac{49}{3} + 3F = -33 \\ 3F = -33 - \frac{49}{3} = \frac{-99 - 49}{3} \\ 3F = \frac{-148}{3} \\ F = \frac{-148}{9} \end{array}$$

Al sustituir los valores de E y F en cualquiera de las ecuaciones originales en este caso (3), resulta:

$$\begin{array}{l} D - 6\left(\frac{49}{15}\right) - \frac{148}{9} = -37 \\ D - \frac{294}{15} - \frac{148}{9} = -37 \\ D = -37 + \frac{294}{15} + \frac{148}{9} \\ D = \frac{-4\ 995 + 2\ 646 + 2\ 220}{135} \\ D = \frac{-129}{135} = -\frac{43}{45} \end{array}$$

Al sustituir los valores de las constantes D , E y F en la ecuación general de la circunferencia, resulta:

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ x^2 + y^2 - \frac{43}{45}x + \frac{49}{15}y - \frac{148}{9} = 0 \\ \frac{45x^2 + 45y^2 - 43x + 147y - 740}{45} = 0 \\ 45x^2 + 45y^2 - 43x + 147y - 740 = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ x^2 + y^2 - \frac{43}{45}x + \frac{49}{15}y - \frac{148}{9} = 0 \\ \frac{45x^2 + 45y^2 - 43x + 147y - 740}{45} = 0 \\ 45x^2 + 45y^2 - 43x + 147y - 740 = 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación general} \\ \text{de la circunferencia.} \end{array}$$

Transformando la ecuación general de la circunferencia a su forma ordinaria, y al dividir toda la ecuación entre 45, resulta:

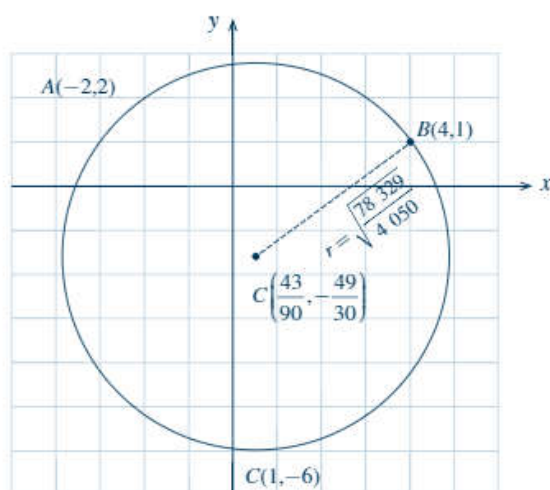
$$\begin{array}{l} \frac{45x^2 + 45y^2 - 43x + 147y - 740}{45} = 0 \\ x^2 + y^2 - \frac{43}{45}x + \frac{147}{45}y - \frac{740}{45} = 0 \\ \left(x^2 - \frac{43}{45}x\right) + \left(y^2 - \frac{147}{45}y\right) = \frac{740}{45} \end{array}$$

Para completar los cuadrados, se suman el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} \left[x^2 - \frac{43}{45}x + \left(\frac{-\frac{43}{45}}{2} \right)^2 \right] + \left[y^2 + \frac{147}{45}y + \left(\frac{\frac{147}{45}}{2} \right)^2 \right] &= \left(\frac{-\frac{43}{45}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\frac{147}{45}}{2} \right)^2 + \frac{740}{45} \\ \left(x^2 - \frac{43}{45}x + \frac{1\,849}{8\,100} \right) + \left(y^2 + \frac{147}{45}y + \frac{21\,609}{8\,100} \right) &= \frac{1\,849}{8\,100} + \frac{21\,609}{8\,100} + \frac{740}{45} \\ \left(x - \frac{43}{90} \right)^2 + \left(y + \frac{49}{30} \right)^2 &= \frac{78\,329}{4\,050} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \left[x^2 - \frac{43}{45}x + \left(\frac{-\frac{43}{45}}{2} \right)^2 \right] + \left[y^2 + \frac{147}{45}y + \left(\frac{\frac{147}{45}}{2} \right)^2 \right] \right.} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación ordinaria} \\ \text{de la circunferencia.} \end{array}$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son $C\left(\frac{43}{90}, -\frac{49}{30}\right)$, su radio es $r = \sqrt{\frac{78\,329}{4\,050}}$.

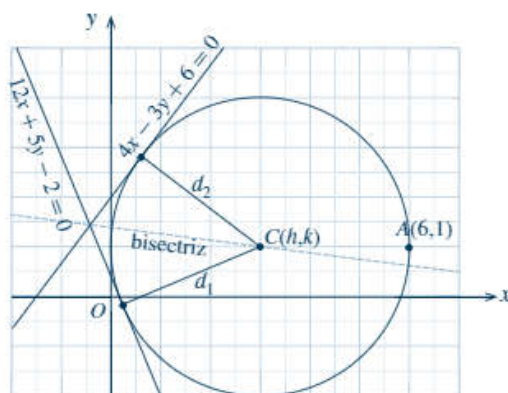
Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 ••• Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(6,1)$ y es tangente a cada una de las rectas $12x + 5y - 2 = 0$ y $4x - 3y + 6 = 0$.

Solución

Al elaborar la gráfica de los datos dados, se tiene:



Considerando el punto $C(h,k)$ como el centro de la circunferencia que es equidistante a las rectas tangentes de la curva, se deben considerar las distancias dirigidas $d_1 = d_2$, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} &= -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}} & \frac{12h + 5k - 2}{13} &= \frac{4h - 3k + 6}{5} \\ \frac{12x + 5y - 2}{\sqrt{(12)^2 + (5)^2}} &= -\frac{4x - 3y + 6}{-\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} & 5(12h + 5k - 2) &= 13(4h - 3k + 6) \\ \frac{12h + 5k - 2}{\sqrt{144 + 25}} &= \frac{4h - 3k + 6}{\sqrt{16 + 9}} & 60h + 25k - 10 &= 52h - 39k + 78 \\ \frac{12h + 5k - 2}{\sqrt{169}} &= \frac{4h - 3k + 6}{\sqrt{25}} & 60h - 52h + 25k + 39k - 10 - 78 &= 0 \\ & & 8h + 64k - 88 &= 0 \\ & & h + 8k - 11 &= 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Sea el radio la distancia del centro de la circunferencia $C(h,k)$ a cualquiera de las rectas tangentes, es decir:

$$d = r = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{12x + 5y - 2}{\sqrt{(12)^2 + (5)^2}} = \frac{12h + 5k - 2}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{12h + 5k - 2}{\sqrt{169}} = \frac{12h + 5k - 2}{13}$$

Como la circunferencia pasa por el punto $A(6,1)$, al aplicar la ecuación de la curva en su forma ordinaria, se tiene:

$$\begin{aligned}(x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\ (6 - h)^2 + (1 - k)^2 &= \left(\frac{12h + 5k - 2}{13}\right)^2 \\ 36 - 12h + h^2 + 1 - 2k + k^2 &= \frac{144h^2 + 25k^2 + 4 + 120hk - 48h - 20k}{169} \\ 169(h^2 + k^2 - 12h - 2k + 37) &= 144h^2 + 25k^2 - 48h - 20k + 120hk + 4 \\ 169h^2 + 169k^2 - 2028h - 338k + 6253 &= 144h^2 + 25k^2 - 48h - 20k + 120hk + 4 \\ 169h^2 - 144h^2 + 169k^2 - 25k^2 - 2028h + 48h - 338k + 20k - 120hk + 6253 - 4 &= 0 \\ 25h^2 + 144k^2 - 1980h - 318k - 120hk + 6249 &= 0 \quad (2)\end{aligned}$$

Si la ecuación (1) se despeja respecto a h , se tiene:

$$\begin{aligned}h + 8k - 11 &= 0 \\ h &= 11 - 8k\end{aligned}$$

Al sustituir el valor de h en la ecuación (2), resulta:

$$\begin{aligned}25h^2 + 144k^2 - 1980h - 318k - 120hk + 6249 &= 0 \\ 25(11 - 8k)^2 + 144k^2 - 1980(11 - 8k) - 318k - 120k(11 - 8k) + 6249 &= 0 \\ 25(121 - 176k + 64k^2) + 144k^2 - 21780 + 15840k - 318k - 1320k + 960k^2 + 6249 &= 0 \\ 3025 - 4400k + 1600k^2 + 144k^2 - 21780 + 15840k - 318k - 1320k + 960k^2 + 6249 &= 0 \\ 2704k^2 + 9802k - 12506 &= 0 \\ 1352k^2 + 4901k - 6253 &= 0\end{aligned}$$

Al resolver la fórmula general, resulta:

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$k = \frac{-4\,901 \pm \sqrt{(4\,901)^2 - 4(1\,352)(-6\,253)}}{2(1\,352)} = \frac{-4\,901 \pm \sqrt{24\,019\,801 + 33\,816\,224}}{2\,704}$$

$$k = \frac{-4\,901 \pm \sqrt{57\,836\,025}}{2\,704} = \frac{-4\,901 \pm 7\,605}{2\,704}$$

$$k_1 = \frac{-4\,901 + 7\,605}{2\,704} = \frac{2\,704}{2\,704} = 1 \quad k_2 = \frac{-4\,901 - 7\,605}{2\,704} = \frac{-12\,506}{2\,704} = -\frac{37}{8}$$

Se sustituyen los valores encontrados de k en la ecuación (1), es decir:

Para $k = 1$

$$\begin{aligned} h + 8k - 11 &= 0 \\ h + 8(1) - 11 &= 0 \\ h + 8 - 11 &= 0 \\ h - 3 &= 0 \\ h &= 3 \end{aligned}$$

Para $k = -\frac{37}{8}$

$$\begin{aligned} h + 8k - 11 &= 0 \\ h + 8\left(-\frac{37}{8}\right) - 11 &= 0 \\ h - 37 - 11 &= 0 \\ h - 48 &= 0 \\ h &= 48 \end{aligned}$$

Las coordenadas de los centros de las circunferencias son $C(3,1)$ y $C'\left(48, -\frac{37}{8}\right)$.

El radio de la circunferencia con centro $C(3,1)$, es:

$$r = \frac{12h + 5k - 2}{13} = \frac{12(3) + 5(1) - 2}{13} = \frac{36 + 5 - 2}{13} = \frac{39}{13} = 3$$

El radio de la circunferencia con centro $C'\left(48, -\frac{37}{8}\right)$, es:

$$r = \frac{12h + 5k - 2}{13} = \frac{12(48) + 5\left(-\frac{37}{8}\right) - 2}{13} = \frac{576 - \frac{185}{8} - 2}{13} = \frac{4\,608 - 185 - 16}{8}$$

$$r = \frac{4\,407}{104} = \frac{339}{8}$$

La ecuación de la circunferencia con centro $C(3,1)$ y radio $r = 3$, es:

$$\begin{aligned} (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 & x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 &= 9 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 &= (3)^2 & x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 - 9 &= 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 &= 9 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x - 3)^2 + (y - 1)^2 &= 9 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 &= 9 \end{aligned}} \right\} \text{ Forma ordinaria.} & x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 &= 0 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{ Forma general.} \end{aligned}$$

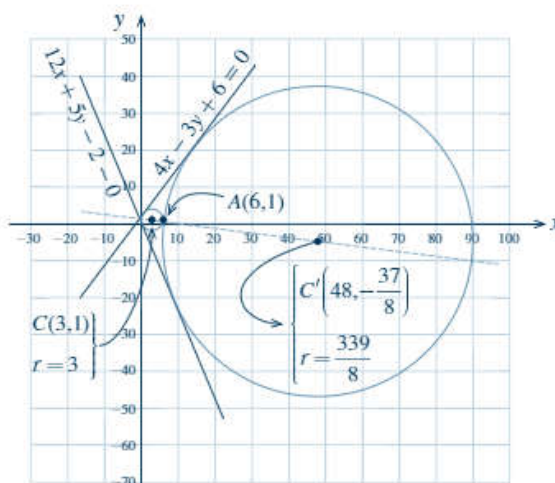
La ecuación de la circunferencia con centro $C'\left(48, -\frac{37}{8}\right)$ y radio $r = \frac{339}{8}$, es:

$$\begin{aligned} (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\ (x - 48)^2 + \left(y + \frac{37}{8}\right)^2 &= \left(\frac{339}{8}\right)^2 \\ (x - 48)^2 + \left(y + \frac{37}{8}\right)^2 &= \frac{114\,921}{64} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x - 48)^2 + \left(y + \frac{37}{8}\right)^2 &= \frac{114\,921}{64} \\ (x - 48)^2 + \left(y + \frac{37}{8}\right)^2 &= \frac{114\,921}{64} \end{aligned}} \right\} \text{ Forma ordinaria.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 96x + 23\,004 + y^2 + \frac{37}{4}y + \frac{1\,369}{64} &= \frac{114\,921}{64} \\ x^2 + y^2 - 96x + \frac{37}{4}y + 2\,304 + \frac{1\,369}{64} - \frac{114\,921}{64} &= 0 \\ 64x^2 + 64y^2 - 6\,144x + 592y + 33\,904 &= 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 384x + 37y + 2\,119 &= 0 \quad \text{Forma general.} \end{aligned}$$

Las ecuaciones de las circunferencias que pasan por el punto $A(6,1)$ y son tangentes a las rectas $12x + 5y - 2 = 0$ y $4x - 3y + 6 = 0$, son: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ y $4x^2 + 4y^2 - 384x + 37y + 2\,119 = 0$.

Al elaborar la gráfica correspondiente se tiene:



EJERCICIO 19

I. Determina la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos siguientes:

1. $A(5,4)$, $B(-2,3)$ y $C(-4,1)$
2. $A(-7,3)$, $B(2,6)$ y $C(-2,8)$
3. $P(1,3)$, $Q(2,1)$ y $R(-1,-3)$
4. $P(-3,-4)$, $Q(-7,-1)$ y $R(0,0)$
5. $K(-2,2)$, $L(4,-1)$ y $M(6,4)$
6. $K(5,6)$, $L(1,-4)$ y $M(-1,3)$
7. $P(1,-1)$, $Q(5,3)$ y $R(-3,5)$
8. $A(6,2)$, $B(8,0)$ y $C(0,-4)$
9. $R(5,3)$, $S(6,2)$ y $T(3,-1)$
10. $A(8,-2)$, $B(7,1)$ y $C(6,2)$

II. Resuelve los siguientes problemas.

1. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,3)$ y $B(-1,1)$ y cuyo centro está sobre la recta $2x - 6y - 22 = 0$.
2. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(5,3)$ y $B(-3,-1)$ y es tangente a la recta $x + 2y - 13 = 0$.
3. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(5,9)$ y es tangente a la recta $x + 2y - 3 = 0$ en el punto $B(1,1)$.
4. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro pasa sobre la recta $7x - 2y - 1 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $4x + 3y - 3 = 0$ y $5x - 12y + 5 = 0$.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

5. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(7,3)$ y $B(0,2)$ y tiene un radio de 5 unidades.
6. Determina la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $2x + y + 10 = 0$ y pasa por el origen y por el punto $A(-1, -3)$.
7. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(5,2)$ y es tangente a la recta $x + 2y - 4 = 0$ en el punto $B(6, -1)$.
8. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(6, -1)$ y es tangente a la recta $x - 3y - 2 = 0$ en el punto $B(-1, -1)$.

➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Determinación de los diferentes casos de relación entre la circunferencia y la recta

Definición de tangente a una curva

Se reconoce la tangente a una circunferencia como aquella recta que tiene un solo punto en común con la curva, pero existen curvas para las cuales este criterio no es suficiente, ya que la recta tangente a una curva, en un punto dado de la misma, puede tocarla en otros puntos.

Sea la ecuación de una curva plana cualquiera $f(x,y) = 0$. Sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos distintos de la curva, de tal manera que, P_2 se puede aproximar continuamente a P_1 el cual permanece fijo (Figura 3.10).

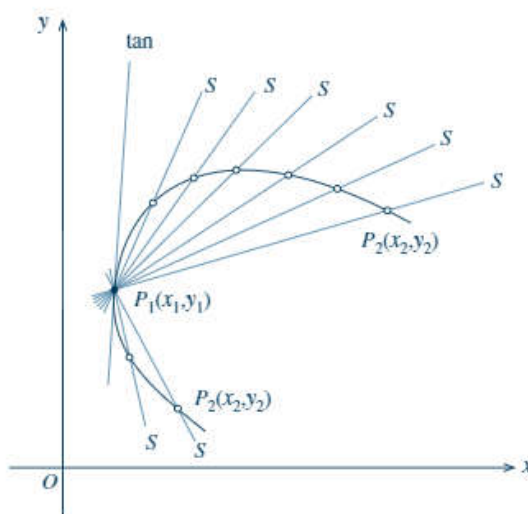


Figura 3.10

Una recta S , que pasa por los puntos P_1 y P_2 de una curva dada, es una secante a la curva que se mueve con P_2 . Cuando P_2 se aproxima a P_1 , por cualquiera de los dos lados, la secante se aproxima a la recta tangente. De esta manera puede definirse a la **recta tangente a una curva en el punto P_1** , como la recta secante límite cuando un segundo punto P_2 se aproxima a P_1 sobre la curva. Al punto P_1 se le llama **punto de tangencia**. La **pendiente de la curva $f(x,y) = 0$ en P_1** es la pendiente de la recta tangente en ese punto. Debe notarse que **si en P_1 la curva tiene un “pico”, la recta tangente en ese punto no existe**, porque las rectas límites difieren dependiendo del lado por donde se acerque P_2 a P_1 .

Ecuación de la tangente a una curva dada, en un punto particular de la misma

Se puede determinar la ecuación de la recta tangente a una curva, conociendo el punto donde hace contacto con la curva y su pendiente. Como el punto de contacto $P_1(x_1, y_1)$ es dado de antemano, debe calcularse la pendiente en ese punto, la cual es el valor límite de la pendiente de la secante $\overline{P_1P_2}$, cuando P_2 se aproxima a P_1 .

La pendiente de la secante es

$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1$$

por ello, la pendiente de la tangente es

$$m = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

siempre que el límite exista, es decir, si en P_1 la curva no tiene un pico.

En nuestro caso, trabajaremos con curvas que son representadas por expresiones analíticas de segundo grado, por lo que no será necesario calcular en forma explícita el límite anterior. Como la recta secante pasa por el punto dado $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m , su ecuación es $y = m(x - x_1) + y_1$; por otro lado, la curva se representa por la ecuación cuadrática $f(x, y) = 0$; así, los puntos donde la secante corta a la curva serán solución de la ecuación $f(x, m(x - x_1) + y_1) = 0$, que se obtiene sustituyendo $y = m(x - x_1) + y_1$ en $f(x, y) = 0$. Dicha ecuación será de segundo grado en la variable x , de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. Dependiendo del signo que tenga el discriminante de dicha ecuación, $D = b^2 - 4ac$, reconoceremos alguna de tres situaciones, a saber:

Si	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
La ecuación tiene:	dos soluciones reales distintas	dos soluciones reales iguales (o una solución real)	ninguna solución real
Significado gráfico:			

Como el discriminante D depende del valor de m , resolviendo la ecuación $D = 0$, obtendremos el valor de m para el cual la recta toca a la curva en un solo punto, es decir, obtendremos la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado. Al aplicar este procedimiento se dice que se está “anulando el discriminante”.

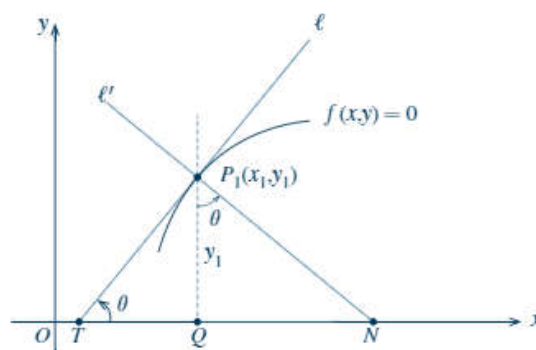


Figura 3.11

Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera de la curva $f(x, y) = 0$ y ℓ es la recta tangente a la curva en dicho punto, cuya pendiente es m , de la ecuación punto-pendiente se obtiene la ecuación de la recta tangente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

La recta ℓ , que pasa por P_1 y es perpendicular a la recta tangente es la **recta normal** a la curva en el punto P_1 y tiene por ecuación:

$$y_1 - y_2 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

Longitudes de tangente, normal, subtangente y subnormal

Como se observa en la Figura 3.11, el punto T es la intersección de la recta tangente con el eje x , el punto N es la intersección de la recta normal con el eje x y el punto Q se encuentra sobre el eje x , justo abajo del punto de tangencia, por lo que la longitud del segmento P_1Q es y_1 la ordenada de P_1 . A partir de estos puntos, se hacen las siguientes definiciones:

- La **longitud de la tangente** es la longitud del segmento $\overline{TP_1}$.
- La **longitud de la subtangente** es la longitud del segmento $\overline{TQ}$ sobre el eje x .
- La **longitud de la normal** es la longitud del segmento $\overline{NP_1}$.
- La **longitud de la subnormal** es la longitud del segmento $\overline{QN}$ sobre el eje x .

En el triángulo TP_1Q , sea la hipotenusa (TP_1) la longitud de la tangente, por el teorema de Pitágoras, resulta:

$$\text{Longitud de la tangente } (TP_1) = \sqrt{(TQ)^2 + (P_1Q)^2}$$

$$\text{Si } \tan \theta = \frac{P_1Q}{TQ} = m_1$$

$$TQ = \frac{P_1Q}{m_1}; \text{ si } P_1Q = y_1, \text{ se tiene:}$$

$$TQ = \frac{y_1}{m_1} \quad \left. \vphantom{\frac{y_1}{m_1}} \right\} \text{ Longitud de la subtangente.}$$

Al sustituir $TQ = \frac{y_1}{m_1}$ y $P_1Q = y_1$ en la ecuación de la longitud de la tangente, se tiene:

$$TP_1 = \sqrt{(TQ)^2 + (P_1Q)^2}$$

$$TP_1 = \sqrt{\left(\frac{y_1}{m_1}\right)^2 + (y_1)^2} = \sqrt{\frac{y_1^2}{m_1^2} + y_1^2} = \sqrt{\frac{y_1^2 + m_1^2 y_1^2}{m_1^2}}$$

$$TP_1 = \sqrt{\frac{y_1^2(1 + m_1^2)}{m_1^2}} = \frac{y_1}{m_1} \sqrt{1 + m_1^2} \quad \left. \vphantom{\frac{y_1}{m_1} \sqrt{1 + m_1^2}} \right\} \text{ longitud de la tangente.}$$

En el triángulo QP_1N , sea la hipotenusa (P_1N) la longitud de la normal, por el teorema de Pitágoras, resulta:

$$\text{Longitud de la normal } (P_1N) = \sqrt{(QN)^2 + (P_1Q)^2}$$

$$\text{Si } \tan \theta = \frac{QN}{P_1Q} = m_1$$

$$QN = m_1(P_1Q); \text{ si } P_1Q = y_1, \text{ se tiene:}$$

$$QN = m_1 y_1 \quad \left. \vphantom{m_1 y_1} \right\} \text{ Longitud de la subnormal.}$$

Al sustituir $QN = m_1 y_1$ y $P_1 Q = y_1$ en la ecuación de la longitud de la normal, resulta:

$$\begin{aligned} P_1 N &= \sqrt{(QN)^2 + (P_1 Q)^2} \\ P_1 N &= \sqrt{(m_1 y_1)^2 + (y_1)^2} = \sqrt{m_1^2 y_1^2 + y_1^2} = \sqrt{y_1^2 (m_1^2 + 1)} \\ P_1 N &= y_1 \sqrt{m_1^2 + 1} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} P_1 N &= \sqrt{(QN)^2 + (P_1 Q)^2} \\ P_1 N &= \sqrt{(m_1 y_1)^2 + (y_1)^2} \end{aligned}} \right\} \text{Longitud de la normal.} \end{aligned}$$

Debemos notar que las longitudes de la subtangente y la subnormal tienen signo, mientras que las longitudes de la tangente y la normal son siempre positivas. Las primeras serán positivas si m y y_1 tienen el mismo signo, y negativas cuando m y y_1 tienen signos contrarios. Lo anterior es equivalente a decir que la subtangente y la subnormal son positivas cuando $T < Q < N$ y negativas cuando $T > Q > N$. Por ejemplo, en la Figura 3.11 ambas son positivas porque $T < Q < N$ (notamos que m y y_1 son positivas).

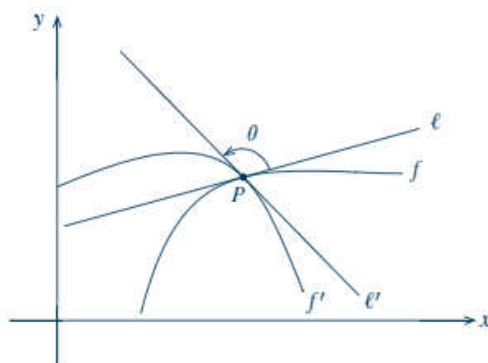


Figura 3.12

El ángulo entre dos curvas cuando se cruzan en un punto P se define como el ángulo entre sus rectas tangentes en ese punto, por lo tanto pueden formar dos ángulos que son suplementarios (Figura 3.12).

Si las rectas tangentes tienen pendientes m y m' , los ángulos suplementarios entre las curvas satisfacen la relación

$$\tan = \pm \frac{m - m'}{1 + m m'}, \text{ donde } m m' \neq -1.$$

Cuando $m' m \neq -1$, se tiene que ambos ángulos son rectos y se establece que las curvas dadas son **ortogonales** entre sí.

Tangente a una circunferencia

En ejercicios anteriores, la determinación de la ecuación de la tangente se obtuvo aplicando el principio que establece que la tangente a una circunferencia es la perpendicular al radio trazado al punto de tangencia.

Ahora, se anulará el discriminante $D = b^2 - 4ac$ que se obtiene de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + C = 0$, que surge al combinar las ecuaciones de una recta y una circunferencia.

Cuando se conoce uno de dichos datos, el otro se determinará a partir de las condiciones dadas en el problema. Por lo anterior, consideremos los siguientes casos:

1. Se conoce el punto de tangencia
2. Se conoce la pendiente de la recta tangente
3. La tangente pasa por un punto exterior dado

El método de solución para cada uno de los casos es muy semejante: En cada uno se presenta una condición que define una familia de rectas, dependiendo de un parámetro, y se determina dicho parámetro anulando el discriminante de la ecuación cuadrática que resulta al combinar la ecuación de la circunferencia con la familia de rectas:

Se conoce el punto de tangencia	Se conoce la pendiente	Pasa por un punto exterior dado
		
Sólo un miembro de la familia anula el discriminante	Dos miembros de la familia anulan el discriminante	Dos miembros de la familia anulan el discriminante

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Determina la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$ en el punto $A(4,5)$.

Solución

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta, se tiene que la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto dado $A(4,5)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = m(x - 4)$$

Donde, m representa la pendiente de la recta tangente por determinar; al despejar respecto a y , se tiene:

$$y - 5 = m(x - 4)$$

$$y - 5 = mx - 4m$$

$$y = mx - 4m + 5$$

Al sustituir el valor de y en la ecuación de la circunferencia, resulta:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$$

$$x^2 + (mx - 4m + 5)^2 + 2x - 2(mx - 4m + 5) - 39 = 0$$

$$x^2 + m^2 x^2 + 16m^2 + 25 - 8m^2 x + 10mx - 40m + 2x - 2mx + 8m - 10 - 39 = 0$$

$$x^2 + m^2 x^2 - 8m^2 x + 8mx + 2x + 16m^2 - 32m - 24 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 - (8m^2 - 8m - 2)x + (16m^2 - 32m - 24) = 0$$

Esta última ecuación tiene en la forma $ax^2 + bx + C = 0$, la condición de tangencia pide que se anule el discriminante, es decir, se impone $b^2 - 4ac = 0$:

$$[-(8m^2 - 8m - 2)]^2 - 4(1 + m^2)(16m^2 - 32m - 24) = 0$$

$$64m^4 + 64m^2 + 4 - 128m^3 - 32m^2 + 32m - 64m^2 + 128m + 96 - 64m^4 + 128m^3 + 96m^2 = 0$$

$$64m^2 + 160m + 100 = 0$$

$$(8m + 10)(8m + 10) = 0$$

$$8m + 10 = 0$$

$$8m = -10$$

$$m_1 = -\frac{5}{4}$$

$$8m + 10 = 0$$

$$8m = -10$$

$$m_2 = -\frac{5}{4}$$

Sólo un miembro de la familia de rectas que pasan por el punto $A(0,5)$ anula el discriminante, se ecuación es:

$$y - 5 = m(x - 4)$$

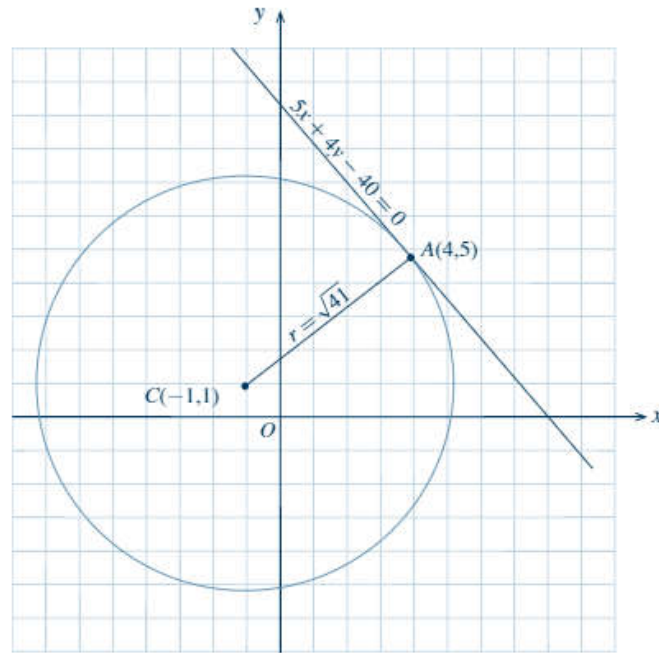
$$y - 5 = -\frac{5}{4}(x - 4)$$

$$5x + 4y - 40 = 0$$

La ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0 \text{ en el punto } A(4,5) \text{ es } 5x + 4y - 40 = 0.$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 ••• Determina la ecuación de la recta tangente trazada del punto $A(11,4)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$.

Solución

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta, se tiene que la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto dado $A(11,4)$, es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = m(x - 11)$$

m representa la pendiente de la recta tangente por determinar; despejando respecto a y se tiene:

$$y - 4 = m(x - 11)$$

$$y - 4 = mx - 11m$$

$$y = mx - 11m + 4$$

Al sustituir el valor de y en la ecuación de la circunferencia, resulta:

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$$

$$x^2 + (mx - 11m + 4)^2 - 8x - 6(mx - 11m + 4) = 0$$

$$x^2 + m^2 x^2 + 121m^2 + 16 - 22m^2 x + 8mx - 88m - 8x - 6mx + 66m - 24 = 0$$

$$x^2 + m^2 x^2 - 22m^2 x + 2mx - 8x + 121m^2 - 22m - 8 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 - (22m^2 - 2m + 8)x + (121m^2 - 22m - 8) = 0$$

Esta última ecuación tiene la forma $ax^2 + bx + C = 0$, para obtener las pendientes de las rectas tangentes se impone $b^2 - 4ac = 0$:

$$\begin{aligned} &[-(22m^2 - 2m + 8)]^2 - 4(1 + m^2)(121m^2 - 22m - 8) = 0 \\ &\cancel{484m^4} + 4m^2 + 64 - \cancel{88m^3} - 352m^2 - 32m - \cancel{484m^2} + 88m + 32 - \cancel{484m^4} + \cancel{88m^3} + 32m^2 = 0 \\ &-96m^2 + 56m + 96 = 0 \\ &-12m^2 + 7m + 12 = 0 \end{aligned}$$

Al multiplicar por -1 , se tiene:

$$12m^2 - 7m - 12 = 0$$

Al factorizar:

$$(4m + 3)(3m - 4) = 0$$

$$4m + 3 = 0$$

$$m_1 = -\frac{3}{4}$$

$$3m - 4 = 0$$

$$m_2 = \frac{4}{3}$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes son:

Para $m_1 = -\frac{3}{4}$

$$y - 4 = m(x - 11)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 11)$$

$$3x + 4y - 49 = 0$$

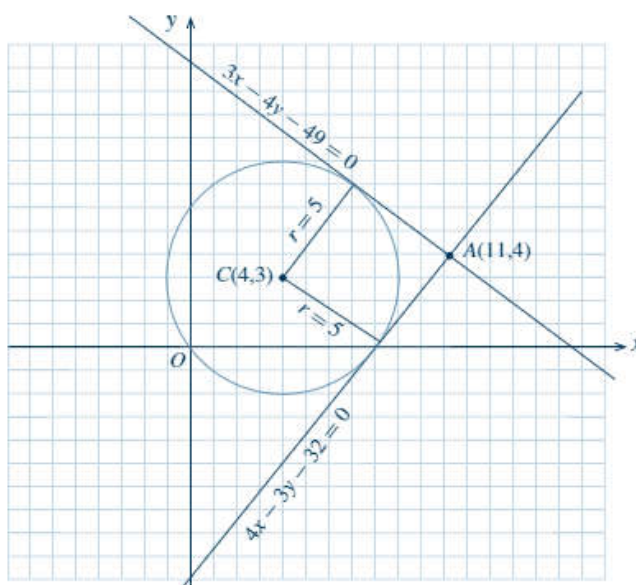
Para $m_2 = \frac{4}{3}$

$$y - 4 = m(x - 11)$$

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - 11)$$

$$4x - 3y - 32 = 0$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



Las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $A(11,4)$ a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \text{ son } 3x + 4y - 49 = 0 \text{ y } 4x - 3y - 32 = 0.$$

- 3 ••• Determina las ecuaciones de la tangente y normal a la circunferencia $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 49 = 0$ en el punto $A(4,1)$. Calcula las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal.

Solución

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta, se tiene que la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto dado $A(4,1)$, es:

$$\begin{aligned}y - y_1 &= m(x - x_1) \\y - 1 &= m(x - 4)\end{aligned}$$

Se despeja a y :

$$y = mx - 4m + 1$$

Al sustituir el valor de y en la ecuación de la circunferencia, resulta:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 14x - 10y + 49 &= 0 \\x^2 + (mx - 4m + 1)^2 - 14x - 10(mx - 4m + 1) + 49 &= 0 \\x^2 + m^2x^2 + 16m^2 + 1 - 8m^2x + 2mx - 8m - 14x - 10mx + 40m - 10 + 49 &= 0 \\x^2 + m^2x^2 - 8m^2x - 8mx - 14x + 16m^2 + 32m + 40 &= 0 \\(1 + m^2)x^2 - (8m^2 + 8m + 14)x + (16m^2 + 32m + 40) &= 0\end{aligned}$$

Esta última ecuación tiene la forma $ax^2 + bx + C = 0$, para obtener la pendiente de la recta tangente se anula el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, es decir:

$$\begin{aligned}[-(8m^2 + 8m + 14)]^2 - 4(1 + m^2)(16m^2 + 32m + 40) &= 0 \\64m^4 + 64m^2 + 196 - 128m^4 + 224m^2 + 224m - 64m^4 - 128m - 160 - 64m^4 - 128m^4 - 160m^2 &= 0 \\64m^2 + 96m + 36 &= 0 \\16m^2 + 24m + 9 &= 0 \\(4m + 3)(4m + 3) &= 0 \\4m + 3 &= 0 & 4m + 3 &= 0 \\m_1 &= -\frac{3}{4} & m_2 &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$\begin{aligned}y - 1 &= m(x - 4) \\y - 1 &= -\frac{3}{4}(x - 4) \\4y - 4 &= -3x + 12 & 3x + 4y - 16 &= 0\end{aligned}$$

La recta normal es perpendicular a la tangente en el punto dado, por lo que sus pendientes son recíprocas y de signo contrario, es decir:

$$m_N = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

La ecuación de la recta normal es:

$$\begin{aligned}y - y_1 &= m(x - x_1) \\y - 1 &= \frac{4}{3}(x - 4) \\4x - 3y - 13 &= 0\end{aligned}$$

* La recta normal pasa por el centro de la circunferencia, por lo que las coordenadas del mismo deben satisfacer la ecuación.

Las ecuaciones de la tangente y la normal a la circunferencia $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 49 = 0$ en el punto $A(4,1)$, son $3x + 4y - 16 = 0$ y $4x - 3y - 13 = 0$.

Para las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, tenemos que del punto dado $A(4,1)$, $y_1 = 1$; $m_1 = -\frac{3}{4}$. Así,

$$\text{Longitud de la tangente} = \left| \frac{y_1}{m_1} \right| \sqrt{m_1^2 + 1} = \left| \frac{1}{-\frac{3}{4}} \right| \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{5}{3}$$

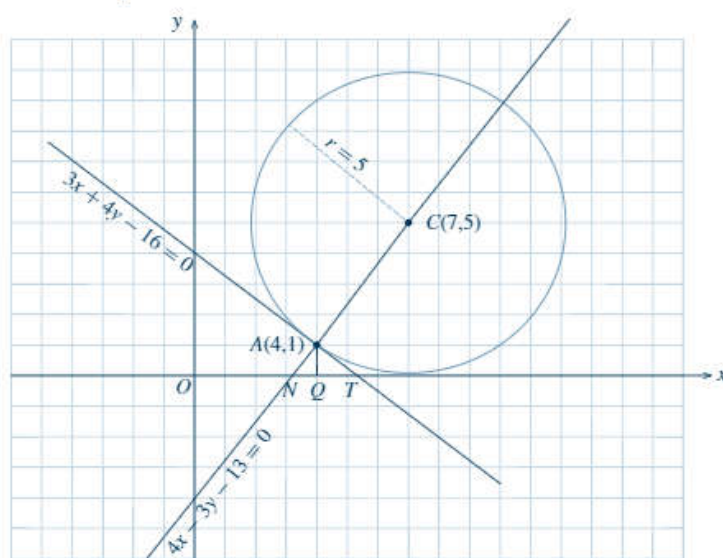
$$\text{Longitud de la normal} = |y_1| \sqrt{m_1^2 + 1} = |1| \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Longitud de la subtangente} = \frac{y_1}{m_1} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Longitud de la subnormal} = m_1 y_1 = \left(-\frac{3}{4}\right)(1) = -\frac{3}{4}$$

Ambas negativas porque
 $T > Q > N$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



EJERCICIO 20

I. Con ayuda de tu profesor, determina la ecuación de la tangente a cada una de las circunferencias dadas en el punto indicado.

1. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ en $A(1,2)$

4. $x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$ en $A(6,3)$

2. $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$ en $A(3,4)$

5. $x^2 + y^2 - 100 = 0$ en $A(6,-8)$

3. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$ en $A(-1,6)$

II. Determina la ecuación de la tangente a cada una de las circunferencias dadas cuya pendiente es la que se indica. (Todos los problemas tienen doble solución).

1. $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0$ para $m = \frac{3}{4}$

4. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$ para $m = -\frac{2}{3}$

2. $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 34 = 0$ para $m = -1$

5. $5x^2 + 5y^2 - 98x - 142y + 737 = 0$ para $m = -\frac{2}{3}$

3. $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$ para $m = 1$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

III. En equipo determinen la ecuación de la tangente trazada del punto indicado a cada una de las siguientes circunferencias y en plenaria discutan sus resultados. (Todos los problemas tienen doble solución).

1. De $A(1,1)$ a $5x^2 + 5y^2 - 12x - 24y + 31 = 0$
2. De $A(8,6)$ a $2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y - 48 = 0$
3. De $A(-2,7)$ a $3x^2 + 3y^2 + 6x - 24y + 36 = 0$
4. De $A(6,-4)$ a $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 35 = 0$
5. De $A(-5,4)$ a $x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$

IV. Determina las ecuaciones de la tangente y normal; las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal para cada una de las siguientes circunferencias en el punto de tangencia indicado.

1. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 100 = 0$ en $A(6,4)$
2. $x^2 + y^2 - 34 = 0$ en $A(3,5)$
3. $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 39 = 0$ en $A(-2,3)$
4. $x^2 + y^2 = 25$ en $A(3,4)$
5. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 15 = 0$ en $A(0,3)$

V. Resuelve los siguientes problemas.

1. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 18$, determina los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + y + k = 0$:
 - a) Cortan a la circunferencia en dos puntos distintos.
 - b) Son tangentes a la circunferencia.
 - c) No tienen ningún punto en común con la circunferencia.
2. Determina las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 21 = 0$ que son paralelas a la recta $x - y = -\frac{31}{5}$.
3. Determina las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0$ que son perpendiculares a la recta $4x - y + 31 = 0$.
4. Determina las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $9x^2 + 9y^2 + 18x + 12y - 32 = 0$ cuya pendiente es $\frac{1}{2}$; encuentra también la ecuación de la normal a la circunferencia, si pasa por el centro de la misma.
5. Determina las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $A(6,-4)$ a la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 15 = 0$.
6. Determina las ecuaciones de la tangente y la normal a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$, en el punto $A(1,-2)$; demuestra que la normal pasa por el centro de la circunferencia.
7. Determina el ángulo agudo que forman las circunferencias $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 11 = 0$ y $2x^2 + 2y^2 - 34 = 0$ en su intersección.
8. Del punto $A(-5,4)$ se trazan tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$; determina el ángulo agudo que forman dichas tangentes.
9. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$, determina los valores del parámetro m para los cuales las rectas de la familia $y = mx + 3$:
 - a) Cortan a la circunferencia en dos puntos distintos.
 - b) Son tangentes a la circunferencia.
 - c) No tienen ningún punto en común con la circunferencia.
10. Determina el ángulo agudo que se forma al cortarse la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ con la recta $2x + 3y - 6 = 0$.

11. Demuestra que las siguientes circunferencias $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y = 0$ y $2x^2 + 2y^2 + 8x + 4y = 0$ se cortan ortogonalmente.
12. Determina la ecuación de la recta con pendiente 5 que es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 9 = 0$.
13. Determina las ecuaciones de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0$ que es paralela a la recta $2x - y - 2 = 0$.
14. Determina la ecuación de la normal a la circunferencia $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 31 = 0$ en el punto $A(3,2)$; calcula la longitud de la normal y la subnormal.
15. Determina la longitud de la tangente trazada desde el punto $A(-7,8)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 - 9 = 0$; deduce la fórmula correspondiente.

➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Posición relativa de dos circunferencias

Familias de circunferencias

La circunferencia que cumple con menos de tres condiciones independientes no es única, ya que la ecuación de la circunferencia que solamente satisface dos condiciones dadas, debe contener una constante arbitraria por determinar, la cual se denomina **parámetro**.

Por lo anterior, se establece que la ecuación representa a una familia o haz de circunferencias dependientes de un parámetro.

Ejemplos

1. ¿Cuál es la ecuación que representa a la familia de circunferencias cuyo centro común es $C(3,7)$?
Aplicando la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, tenemos: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, sustituyendo las coordenadas del centro, resulta:

$$(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = K^2$$

La ecuación anterior representa la familia de circunferencias concéntricas, en donde el parámetro $K = r$ es cualquier número positivo.

2. ¿Cuál es la ecuación que representa a la familia de curvas que pasan por las intersecciones de dos circunferencias dadas?

Las ecuaciones de dos circunferencias diferentes, son:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \quad (C_1)$$

$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \quad (C_2)$$

De (C_1) y (C_2) se deduce la ecuación:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + K(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0 \quad (1)$$

donde el parámetro K es cualquier número real.

Si las circunferencias dadas se intersecan en dos puntos diferentes $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, las coordenadas de cada punto satisfacen a (C_1) y (C_2) , por lo que también satisfacen a (1) , es decir: $0 + k(0) = 0$, que es verdadera para cualquier valor de K .

Por lo anterior, establecemos que la ecuación (1) representa la familia de curvas que pasan por las dos intersecciones de las circunferencias (C_1) y (C_2) , donde no es necesario que se determinen las coordenadas de los puntos de intersección.

Desarrollando la ecuación (1), se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + K(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) &= 0 \\ x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + Kx^2 + Ky^2 + KD_2x + KE_2y + KF_2 &= 0 \\ x^2 + Kx^2 + y^2 + Ky^2 + D_1x + KD_2x + E_1y + KE_2y + F_1 + KF_2 &= 0 \\ (1 + K)x^2 + (1 + K)y^2 + (D_1 + KD_2)x + (E_1 + KE_2)y + F_1 + KF_2 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Esta ecuación permite determinar la naturaleza de las curvas de dicha familia, es decir:

- La ecuación (2) se simplifica a una de primer grado cuando $K = -1$, es decir, representa una línea recta que es la **cuerda** común entre las circunferencias (C_1) y (C_2) .
- Si las circunferencias (C_1) y (C_2) se intersecan en dos puntos distintos, la ecuación (2) representa, para cualquier valor de K diferente de -1 , todas las circunferencias que pasan por dichos puntos de intersección de (C_1) y (C_2) , con la única excepción de la circunferencia dos.
- Si las circunferencias (C_1) y (C_2) son tangentes entre sí, la ecuación (2) representa, para cualquier valor de K diferentes de -1 , todas las circunferencias que son tangentes a las circunferencias (C_1) y (C_2) en su punto de tangencia, con la única excepción de la circunferencia dos.
- Si las circunferencias (C_1) y (C_2) no tienen ningún punto en común, la ecuación (2) representa una circunferencia, siempre y cuando K sea diferente de -1 y cumpla con las $D^2 + E^2 - 4F \geq 0$.
- La ecuación (2) se simplifica a la ecuación de la circunferencia (C_1) , cuando $K = 0$.

La línea recta que pasa por los centros de dos circunferencias no concéntricas, se denomina **recta de los centros**. La ecuación (1) que representa todas las circunferencias de la familia y que tienen su centro en la recta de los centros de las circunferencias (C_1) y (C_2) , es decir, los centros de (C_1) y (C_2) son, respectivamente, $\left(-\frac{D_1}{2}, -\frac{E_1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2}\right)$ y la ecuación de la recta que contiene dichos puntos es:

$$2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2E_1 - D_1E_2 = 0$$

La ecuación anterior se satisface por las coordenadas del centro $\left(-\frac{D_1 + KD_2}{2(1 + K)}, -\frac{E_1 + KE_2}{2(1 + K)}\right)$, para cualquier circunferencia que se represente por la ecuación (1).

EJEMPLOS

- Escribe la ecuación de la familia de circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto $C(4, -2)$; construye la gráfica de tres elementos de la familia, especifica el valor del parámetro en cada caso.

Solución

Al aplicar la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, se tiene:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Al sustituir las coordenadas del centro dado, resulta:

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = K^2$$

Ésta es la ecuación de la familia de circunferencias concéntricas, donde el parámetro $K = r$ es cualquier número positivo.

Si $K = 2$, la ecuación del miembro de la familia que corresponde es:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y+2)^2 &= (2)^2 \\ (x-4)^2 + (y+2)^2 &= 4 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x-4)^2 + (y+2)^2 &= (2)^2 \\ (x-4)^2 + (y+2)^2 &= 4 \end{aligned}} \right\} \text{ Forma ordinaria de la circunferencia.}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 &= 4 \\ x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - 4 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - 4 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{ Forma general de la circunferencia.}$$

Si $K = 3$, la ecuación del miembro de la familia que corresponde es:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y+2)^2 &= (3)^2 \\ (x-4)^2 + (y+2)^2 &= 9 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x-4)^2 + (y+2)^2 &= (3)^2 \\ (x-4)^2 + (y+2)^2 &= 9 \end{aligned}} \right\} \text{ Forma ordinaria de la circunferencia.}$$

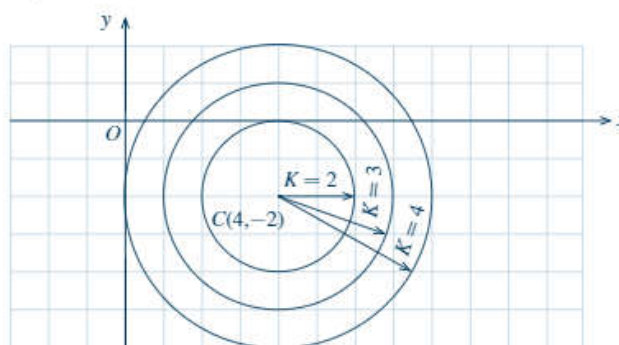
$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 &= 9 \\ x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - 9 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - 9 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{ Forma general de la circunferencia.}$$

Si $K = 4$, la ecuación del miembro de la familia que corresponde es:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y+2)^2 &= (4)^2 \\ (x-4)^2 + (y+2)^2 &= 16 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x-4)^2 + (y+2)^2 &= (4)^2 \\ (x-4)^2 + (y+2)^2 &= 16 \end{aligned}} \right\} \text{ Forma ordinaria de la circunferencia.}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 &= 16 \\ x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - 16 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - 16 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{ Forma general de la circunferencia.}$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2** •• Las ecuaciones de dos circunferencias son $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ (C_1) y $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$ (C_2); determina la ecuación de la circunferencia (C_3) que pasa por las intersecciones de (C_1) y (C_2) y tiene su centro sobre la recta $2x + y - 14 = 0$.

Solución

La ecuación que representa la familia de curvas que pasan por las dos intersecciones de las circunferencias dadas, es:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + K(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

Al sustituir las ecuaciones de las circunferencias dadas, se tiene:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + K(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8) &= 0 \quad (1) \\x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + Kx^2 + Ky^2 - 4Kx + 4Ky - 8K &= 0 \\x^2 + Kx^2 + y^2 + Ky^2 - 8x - 4Kx - 4y + 4Ky + 11 - 8K &= 0 \\(1 + K)x^2 + (1 + K)y^2 - (8 + 4K)x - (4 - 4K)y + 11 - 8K &= 0\end{aligned}$$

Donde el parámetro K se determina por la condición de que el centro de (C_3) se ubica sobre la recta dada.

El centro de dicha circunferencia se determina por las coordenadas:

$$\begin{aligned}\left(\frac{D_1 + KD_2}{2(1 + K)}, \frac{E_1 + KE_2}{2(1 + K)} \right) \\ \left(-\frac{(8 + 4K)}{2(1 + K)}, -\frac{(4 - 4K)}{2(1 + K)} \right) &= \left(\frac{\mathcal{J}(4 + 2K)}{\mathcal{J}(1 + K)}, \frac{\mathcal{J}(2 - 2K)}{\mathcal{J}(1 + K)} \right) \\ \left(\frac{4 + 2K}{1 + K}, \frac{2 - 2K}{1 + K} \right)\end{aligned}$$

Como estas coordenadas deben satisfacer la ecuación dada $2x + y - 14 = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}2\left(\frac{4 + 2K}{1 + K}\right) + \left(\frac{2 - 2K}{1 + K}\right) - 14 &= 0 \\ \frac{8 + 4K}{1 + K} + \frac{2 - 2K}{1 + K} - 14 &= 0 \\ \frac{8 + 4K + 2 - 2K - 14(1 + K)}{1 + K} &= 0 \\ 10 + 2K - 14 - 14K &= 0 \\ -12K - 4 &= 0 \\ -12K &= 4 \\ K &= \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Al sustituir el valor de K en la ecuación que representa la familia de curvas de (1), al simplificar se obtiene la ecuación de la circunferencia (C_3) .

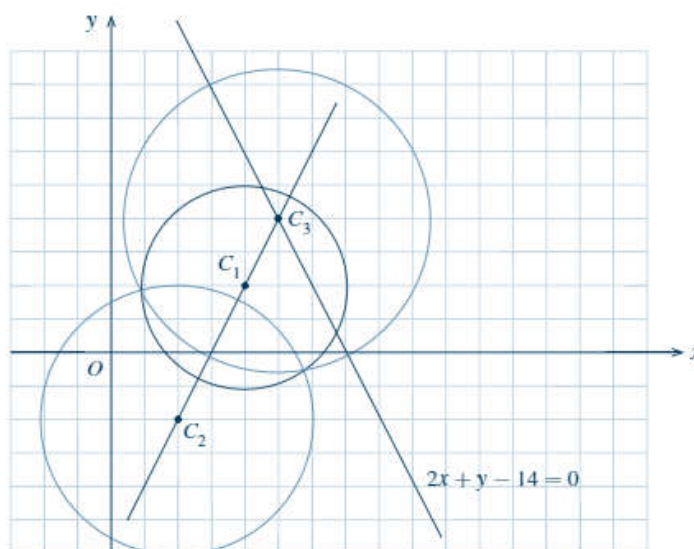
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + K(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8) &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + \left(-\frac{1}{3}\right)(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8) &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{8}{3} &= 0 \\ \frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{3} - \frac{20x}{3} - \frac{16y}{3} + \frac{41}{3} &= 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 41 &= 0 \quad \left. \vphantom{\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{3} - \frac{20x}{3} - \frac{16y}{3} + \frac{41}{3} = 0} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación general de} \\ \text{la circunferencia } (C_3). \end{array}\end{aligned}$$

Reduciendo a su forma ordinaria, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2} - \frac{20x}{2} - \frac{16y}{2} + \frac{41}{2} &= 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y &= -\frac{41}{2} \\ (x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) &= 25 + 16 - \frac{41}{2} \\ (x - 5)^2 + (y - 4)^2 &= \frac{41}{2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2} - \frac{20x}{2} - \frac{16y}{2} + \frac{41}{2} &= 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y &= -\frac{41}{2} \\ (x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) &= 25 + 16 - \frac{41}{2} \\ (x - 5)^2 + (y - 4)^2 &= \frac{41}{2} \end{aligned}} \right\} \text{Ecuación ordinaria de la circunferencia } (C_3).$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:

Se hace notar que los centros de C_1 , C_2 y C_3 son colineales.



Eje radical

La ecuación que representa la familia de circunferencias para todos los valores de K diferentes de -1 , es:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + K(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

Específicamente cuando $K = -1$, la ecuación anterior se reduce a:

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0 \quad (A)$$

Si las ecuaciones (C_1) y (C_2) que forman la ecuación representativa de la familia de circunferencia no son concéntricas, se confirmará que $D_1 \neq D_2$ o $E_1 \neq E_2$, o ambas, de tal manera que por lo menos uno de los coeficientes de x y y en la ecuación (A) será diferente de cero, por conclusión la ecuación (A) representa la línea recta denominada **eje radical** de (C_1) y (C_2) .

Si las circunferencias dadas (C_1) y (C_2) se intersecan en dos puntos distintos, el **eje radical** pasa por dichos puntos y coincide con la recta **cuerda** común entre las circunferencias.

Si las circunferencias dadas (C_1) y (C_2) son tangentes entre sí, su **eje radical** es la recta tangente común entre las circunferencias.

Si las circunferencias dadas (C_1) y (C_2) no tienen ningún punto en común y tampoco son concéntricas, su **eje radical** no tiene ningún punto en común con ninguna de dichas circunferencias.

Demostración de que el eje radical de dos circunferencias cualesquiera es perpendicular a su recta de los centros

La recta que pasa por los centros de dos circunferencias (C_1) y (C_2) no concéntricas se denomina **recta de los centros** y se escribe:

$$2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2E_1 - D_1E_2 = 0$$

La pendiente de dicha recta es:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{2(E_1 - E_2)}{-2(D_1 - D_2)} = \frac{E_1 - E_2}{D_1 - D_2}, \text{ donde } D_1 \neq D_2.$$

De la ecuación del **eje radical (A)** su pendiente, es:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2}, \text{ donde } E_1 \neq E_2.$$

Como las pendientes determinadas, son recíprocas y de signo contrario, las rectas son perpendiculares entre sí.

Cuando $D_1 = D_2$, en la ecuación (A) se establece que la recta **eje radical** es paralela al eje x del sistema coordenado y por consecuencia la recta de los centros es paralela al eje y comprobándose que ambas rectas son perpendiculares entre sí.

De la misma manera, cuando $E_1 = E_2$, el **eje radical** es paralelo al eje y y la recta de los centros será paralela al eje x ; por lo tanto, siguen siendo perpendiculares entre sí.

Longitud de la tangente trazada desde un punto exterior a una circunferencia dada

Una importante propiedad de aplicación del eje radical se enuncia en el siguiente principio: La longitud del segmento tangente a una circunferencia desde un punto exterior al punto de tangencia es:

$$t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}, \text{ o bien, } t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$$

Donde:

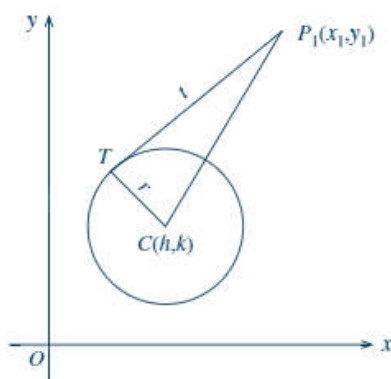
$P_1(x_1, y_1)$, es el punto exterior.

(h, k) , son las coordenadas del centro de la circunferencia.

r , es el radio de la circunferencia.

D, E, F , son los coeficientes de la circunferencia en su ecuación general.

Para demostrar el principio anterior, se toma como base la siguiente gráfica.



Si T es el punto de tangencia a la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, desde el punto exterior $P_1(x_1, y_1)$, t es la longitud del segmento $\overline{P_1T}$.

Si el segmento $\overline{CT}$ es la distancia del centro de la circunferencia al punto de tangencia y representa al radio ($\overline{CT} = r$) de la circunferencia dada y además es perpendicular a la longitud de la tangente t .

Al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo P_1TC se tiene:

$$\begin{aligned} (\text{Opuesto})^2 &= (\text{Hipotenusa})^2 - (\text{Adyacente})^2 \\ (\overline{PT})^2 &= (\overline{CP_1})^2 - (\overline{CT})^2 \end{aligned}$$

Por la ecuación de distancia entre dos puntos, se deduce que $(CP_1)^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$ al sustituir en la ecuación del teorema de Pitágoras resulta:

$$\begin{aligned} (t)^2 &= (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - (r)^2 \\ t &= \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2} \\ \text{o } t &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F} \end{aligned}$$

Se hace notar que en realidad se pueden trazar dos tangentes desde el punto P_1 a la circunferencia dada, pero ambas longitudes son iguales.

Por lo anterior establecemos la siguiente propiedad: El eje radical de dos circunferencias dadas no concéntricas es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que las longitudes de las tangentes que se trazan desde dicho punto a ambas circunferencias son iguales.

Si las ecuaciones de dos circunferencias no concéntricas son:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \quad (C_1) \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \quad (C_2)$$

sea el punto móvil $P(x, y)$ y las longitudes de las tangentes t_1 y t_2 trazadas desde P a cada una de las circunferencias respectivas.

Por la fórmula de la longitud de la tangente, se tiene:

$$\begin{aligned} t_1^2 &= x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 \\ t_2^2 &= x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 \end{aligned}$$

Como las longitudes de las tangentes son iguales ($t_1 = t_2$), es decir:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 &= x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 \\ \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + D_1x + E_1y + F_1 &\cancel{- \cancel{x^2} - \cancel{y^2}} - D_2x - E_2y - F_2 = 0 \\ D_1x - D_2x + E_1y - E_2y + F_1 - F_2 &= 0 \\ (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación resultante es el **eje radical** de (C_1) y (C_2) .

De igual manera si $P_1(x_1, y_1)$ es el punto móvil que está sobre el eje radical, se demuestra que las longitudes de las tangentes trazadas desde dicho punto a cada circunferencia dada, son iguales.

Si consideramos tres circunferencias dadas, de las cuales no hay dos que sean concéntricas; cada par tiene un eje radical y las tres tomadas de dos en dos forman tres ejes radicales; en caso de que las tres circunferencias no tengan una recta de los centros en común, sus tres ejes radicales se intersecan en un punto que se denomina **centro radical**.

EJEMPLOS

- 1 ••• Determina la ecuación del eje radical de las circunferencias $9x^2 + 9y^2 - 54x - 48y + 64 = 0$ (C_1) y $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0$ (C_2) y demuestra que es perpendicular a su recta de los centros.

Solución

Se multiplica la ecuación (C_2) por 9, es decir:

$$9(x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0) \quad 9x^2 + 9y^2 + 72x - 90y + 333 = 0$$

De las ecuaciones (C_1) y (C_2) se forma la ecuación que representa la familia de circunferencias:

$$9x^2 + 9y^2 - 54x - 48y + 64 + K(9x^2 + 9y^2 + 72x - 90y + 333) = 0$$

Para obtener la ecuación del eje radical se hace $K = -1$:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 9y^2 - 54x - 48y + 64 + (-1)(9x^2 + 9y^2 + 72x - 90y + 333) &= 0 \\ \cancel{9x^2} + \cancel{9y^2} - 54x - 48y + 64 - \cancel{9x^2} - \cancel{9y^2} - 72x + 90y - 333 &= 0 \\ -126x + 42y - 269 &= 0 \\ 126x - 42y + 269 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 9x^2 + 9y^2 - 54x - 48y + 64 + (-1)(9x^2 + 9y^2 + 72x - 90y + 333) &= 0 \\ \cancel{9x^2} + \cancel{9y^2} - 54x - 48y + 64 - \cancel{9x^2} - \cancel{9y^2} - 72x + 90y - 333 &= 0 \\ -126x + 42y - 269 &= 0 \\ 126x - 42y + 269 &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{ Ecuación del eje radical.}$$

La pendiente de la recta del eje radical es:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{126}{-42} = 3$$

Las coordenadas de los centros de las circunferencias dadas, son:

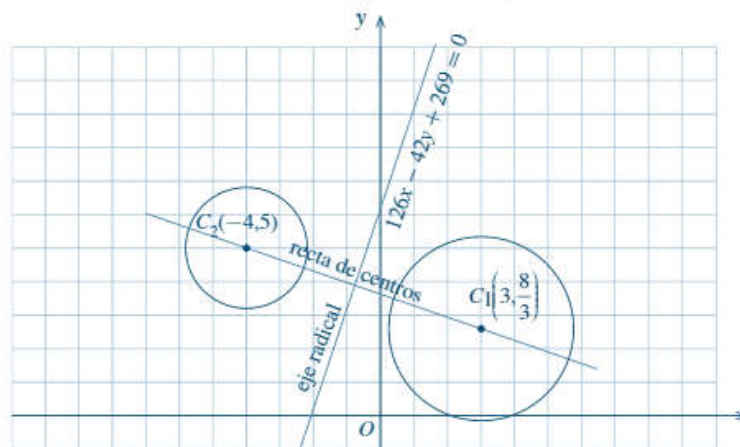
$$\text{Para } (C_1) \left(-\frac{D_1}{2}, -\frac{E_1}{2} \right) = \left(-\frac{-54}{2}, -\frac{-48}{2} \right) = \left(3, \frac{8}{3} \right)$$

$$\text{Para } (C_2) \left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2} \right) = \left(-\frac{8}{2}, -\frac{-10}{2} \right) = (-4, 5)$$

Al determinar la pendiente entre estos dos centros, se tiene:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{8}{3} - 5}{3 - (-4)} = \frac{\frac{8-15}{3}}{\frac{7}{1}} = \frac{-7}{21} = -\frac{1}{3}$$

Como la pendiente del eje radical y la pendiente de la recta de los centros son recíprocas y de signo contrario, las rectas son perpendiculares entre sí. Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 •• Determina la longitud de la tangente que se traza desde el punto $A(3,4)$ a la circunferencia $6x^2 + 6y^2 + 24x + 8y - 70 = 0$.

Solución

Al transformar la ecuación general de la circunferencia dada, a su forma ordinaria, resulta:

$$\frac{6x^2}{6} + \frac{6y^2}{6} + \frac{24x}{6} + \frac{8y}{6} - \frac{70}{6} = 0$$

Al dividir entre 6, se tiene:

$$x^2 + y^2 + 4x + \frac{4}{3}y - \frac{35}{3} = 0$$

Al ordenar los términos:

$$(x^2 + 4x) - \left(y^2 + \frac{4}{3}y\right) = \frac{35}{3}$$

Al completar cuadrados:

$$\begin{aligned} \left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - \left[y^2 + \frac{4}{3}y + \left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^2\right] &= \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^2 + \frac{35}{3} \\ (x^2 + 4x + 4) - \left(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{16}{36}\right) &= 4 + \frac{16}{36} + \frac{35}{3} \\ (x+2)^2 - \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{144 + 16 + 420}{36} \\ (x+2)^2 - \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{145}{9} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - \left[y^2 + \frac{4}{3}y + \left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^2\right] &= \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^2 + \frac{35}{3} \\ (x^2 + 4x + 4) - \left(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{16}{36}\right) &= 4 + \frac{16}{36} + \frac{35}{3} \\ (x+2)^2 - \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{144 + 16 + 420}{36} \\ (x+2)^2 - \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{145}{9} \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la circunferencia} \\ \text{en su forma ordinaria.} \end{array}$$

De la ecuación anterior, se tiene que el centro de la circunferencia es $C\left(-2, -\frac{2}{3}\right)$ cuyo radio al cuadrado es $r^2 = \frac{145}{9}$.

Al sustituir los datos dados y los que se obtuvieron a partir de la ecuación de la longitud de la tangente resulta:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2} = \sqrt{(3+2)^2 + \left(4 + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{145}{9}} \\ t &= \sqrt{25 + \frac{196}{9} - \frac{145}{9}} = \sqrt{25 + \frac{51}{9}} = \sqrt{\frac{225 + 51}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{69} \approx 5.5377 \end{aligned}$$

Una forma más sencilla para determinar la longitud del segmento tangente consiste en sustituir directamente las coordenadas del punto dado en la ecuación de la circunferencia dada, siempre y cuando los coeficientes de x^2 y y^2 sean iguales a la unidad, es decir:

La ecuación dada $6x^2 + 6y^2 + 24x + 8y - 70 = 0$, dividida entre 6 se transforma en $x^2 + y^2 + 4x + \frac{4}{3}y - \frac{35}{3} = 0$.

La longitud del segmento tangente es:

$$t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$$

Al sustituir las coordenadas del punto dado, resulta:

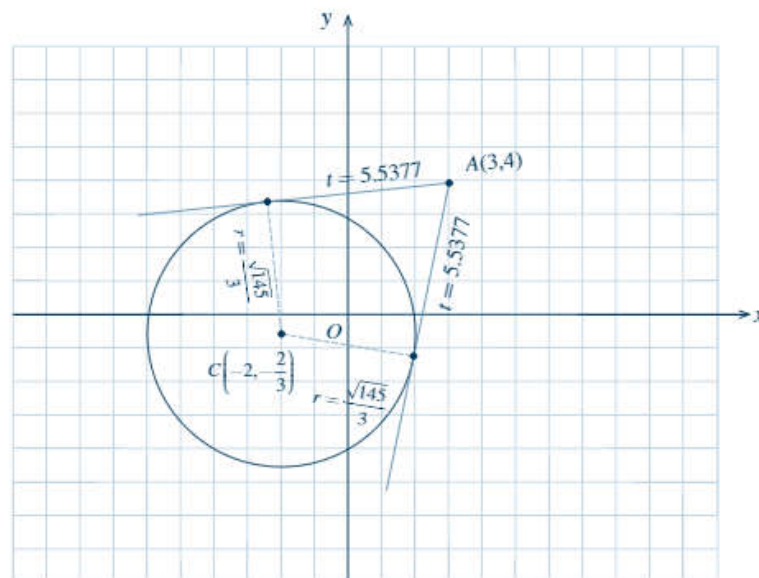
$$t = \sqrt{3^2 + 4^2 + 4(3) + \frac{4}{3}(4) - \frac{35}{3}}$$

$$t = \sqrt{9 + 16 + 12 + \frac{16}{3} - \frac{35}{3}} = \sqrt{37 - \frac{19}{3}} = \sqrt{\frac{111 - 19}{3}}$$

$$t = \sqrt{\frac{92}{3}} = \sqrt{\frac{92(3)}{3}} = \sqrt{\frac{276}{3}} = \sqrt{\frac{4(69)}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{69} \approx 5.5377$$

Comprobando de esta forma la longitud del segmento tangente.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



EJERCICIO 21

- I. Determina la ecuación de la familia de circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto indicado; grafica tres elementos de la familia y especifica el valor del parámetro en cada caso.
 1. $A(-2, -4)$
 2. $C(3, -8)$
 3. $E(0, 4)$
 4. $D(-6, 1)$
- II. Determina la ecuación de la familia de circunferencias, cada una de las cuales pasa por el origen y el punto indicado; grafica tres elementos de la familia y especifica el valor del parámetro en cada caso.
 1. $A(4, 2)$
 2. $B(-1, -3)$
 3. $C(-5, 2)$
 4. $D(7, -4)$
- III. Resuelve los siguientes problemas.
 1. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de las circunferencias $(C_1): x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$ y $(C_2): x^2 + y^2 - 18x - 4y + 67 = 0$ y por el punto $A(-8, 5)$.
 2. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de las circunferencias $(C_1): x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 = 0$ y $(C_2): x^2 + y^2 - x - 6y + 3 = 0$ y tiene su centro sobre la recta $2x - 2y - 4 = 0$.

3. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de las circunferencias $(C_1): x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0$ y $(C_2): x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ y tiene de radio en $\frac{1}{2}\sqrt{50}$.
 4. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de las circunferencias $(C_1): x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$ y $(C_2): x^2 + y^2 - 2 = 0$ y que es tangente a la recta $3x + 9y - 42 = 0$.
 5. Demuestra que las circunferencias $(C_1): x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ y $(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$ son tangentes; determina la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 en su punto común y que pasa por el punto $A(1,0)$ y demuestra también que el centro de esta circunferencia está sobre la recta de los centros de (C_1) y (C_2) .
 6. Demuestra que las circunferencias $(C_1): 4x + 4y^2 - 40x + 8y + 79 = 0$ y $(C_2): x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$ no se cortan.
 7. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por la intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$ con la recta $2x - 2y + 8 = 0$ y por el punto $A(-10, -2)$.
 8. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por la intersección de las circunferencias $(C_1): x^2 + y^2 - 16x - 10y + 4 = 0$ y $(C_2): x^2 + y^2 + 4x + 2y - 12 = 0$ y por el punto $A(0,2)$.
- IV. Determina la ecuación del eje radical de las circunferencias dadas y demuestra que es perpendicular a la recta de los centros.
1. $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$ y $(C_2): 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$.
 2. $(C_1): x^2 + y^2 - 8y + 6 = 0$ y $(C_2): x^2 + y^2 - 14x - 6y + 38 = 0$.
 3. $(C_1): x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ y $(C_2): x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$.
- V. Resuelve los siguientes problemas.
1. Determina la ecuación y la longitud de la cuerda común de las circunferencias $(C_1): x^2 + y^2 + 3x - 3y - 52 = 0$ y $(C_2): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 32 = 0$.
 2. Determina la longitud de la tangente trazada desde el punto $A(6,4)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0$.
 3. Determina las coordenadas del centro radical de las tres circunferencias $(C_1): x^2 + y^2 + 12x + 11 = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$ y $(C_3): x^2 + y^2 - 4x + 16y + 43 = 0$ y las longitudes de los segmentos tangentes trazados desde el centro radical a cada circunferencia dada.
 4. Determina las coordenadas del centro radical de las tres circunferencias $(C_1): x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 + 4y - 7 = 0$ y $(C_3): 2x^2 + 2y^2 + 5x + 3y + 9 = 0$ y las longitudes de los segmentos tangentes trazados desde el centro radical a cada circunferencia dada.
 5. Determina las coordenadas del centro radical de las tres circunferencias $(C_1): x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 - 2x - y - 6 = 0$ y $(C_3): x^2 + y^2 = 1$ y las longitudes de los segmentos tangentes trazados desde el centro radical a cada circunferencia dada.
 6. Encuentra la ecuación del eje radical de las circunferencias $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$ y $(C_2): 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$. Propón las coordenadas de algún punto sobre el eje vertical y demuestra que las longitudes de los segmentos tangentes, trazados desde ese punto a ambas circunferencias son iguales.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

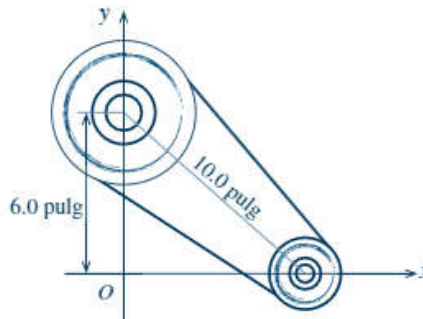
Circunferencia

- 1 ●● En el siguiente sistema coordenado se muestra un impulsor de banda y polea. Si el radio de la polea menor es 2.1 pulgadas y el radio de la polea mayor es de 4.2 pulgadas; determina la ecuación de cada polea.

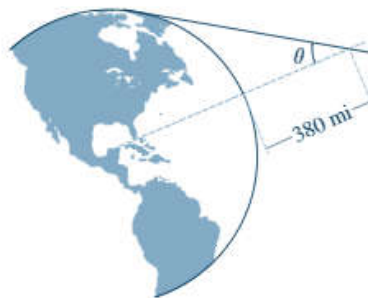
Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares



- 2 ●● Un capacitor cilíndrico consiste en dos cilindros concéntricos separados por una distancia de 3.2 mm. La sección transversal del capacitor se traza sobre un sistema cartesiano, donde el círculo exterior se ubica en el primer cuadrante y tangente a los ejes coordenados x y y . Si el radio del círculo interior es 5.2 mm, determina la ecuación de cada círculo.
- 3 ●● Una arcada tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo en la parte superior. Al elaborar la gráfica de la arcada en un sistema cartesiano, con vértices en los puntos $A(2,0)$, $B(6,0)$, $C(6,5)$ y $D(2,5)$, determina la ecuación del círculo al que pertenece el semicírculo de la parte superior de la arcada.
- 4 ●● La órbita de la Tierra alrededor del Sol y la órbita de la Luna alrededor de la Tierra son, aproximadamente, círculos de radios 1.5×10^8 km y 3.8×10^5 km, respectivamente, con el Sol en el centro de la órbita de la Tierra y la Tierra en el centro de la órbita de la Luna. Si se ubica al Sol en el origen de un sistema cartesiano, ¿cuál es la ecuación de la órbita de la Luna?
- 5 ●● Un laboratorio espacial gira alrededor de la Tierra a una altitud de 380 millas. Cuando un astronauta mira al horizonte de la Tierra, detecta un ángulo θ de 65.8° , según se muestra en la figura:



- a) Calcula el radio r de la Tierra.
- b) Si el centro de la Tierra se fija en el punto $C(2,3)$, ¿cuál es la ecuación de la Tierra, si ésta se considera circular?
- 6 ●● Un satélite, situado en el punto $S(-9,5)$ gira alrededor de un planeta de perfil circular descrito por la ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. Dicho satélite envía señales tangenciales al planeta, determina las ecuaciones de las rectas que indican la trayectoria de las señales.

Determinación de la ecuación de la parábola y su gráfica

Definición

La parábola es el lugar geométrico de los puntos que se mueven en un plano, de tal manera que equidistan de un punto y una recta fijos en el plano. El punto fijo se denomina **foco** y la recta fija **directriz** de la misma.

Elementos de una parábola

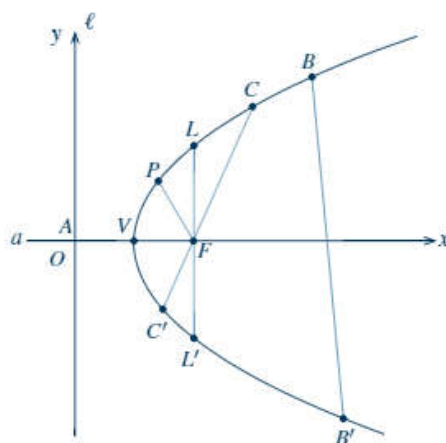


Figura 3.13

Si designamos al **foco** y la **directriz** por F y ℓ , respectivamente, la recta a que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se denomina **eje focal** o **eje de la parábola**; sea A el **punto de intersección** entre el eje de la parábola y la directriz; el punto V es el punto medio del segmento AF y por definición está sobre la parábola, dicho punto se denomina **vértice**; sea BB' el segmento de la recta que une dos puntos diferentes de la parábola, se denomina **cuerda**; particularmente si una cuerda pasa por el foco, tal como CC' , se denomina **cuerda focal**; si la cuerda focal es perpendicular al eje de la parábola, tal como LL' , se denomina **lado recto**; sea P un punto cualquiera de la parábola y la recta PF que une al foco con dicho punto, se denomina **radio focal de P** o **radio vector** (Figura 3.13).

Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje focal sobre alguno de los ejes coordenados

Si consideramos la parábola con vértice en el origen cuyo eje focal coincide con el eje x (Figura 3.14).

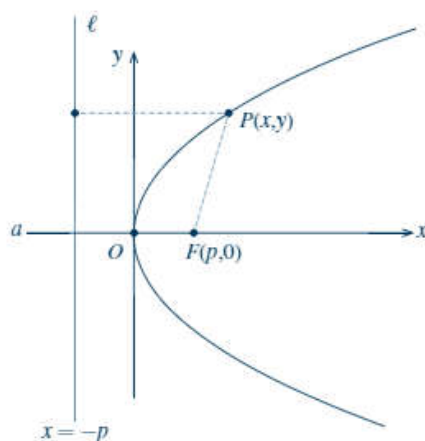


Figura 3.14

Si el foco dista p unidades del vértice, sus coordenadas son $F(p,0)$; como el vértice equidista del foco y de la directriz, la ecuación de esta última es $x = -p$.

Si $P(x,y)$, un punto cualquiera de la parábola por el que se traza el segmento $\overline{PA}$ perpendicular a la directriz: con base en la definición de parábola, dicho punto debe satisfacer la condición geométrica de $|\overline{FP}| = |\overline{PA}|$.

Al aplicar la ecuación de distancia entre dos puntos, tenemos:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

Se aplica la ecuación de distancia de una recta a un punto, es decir:

$$|\overline{PA}| = |x + p|$$

Analíticamente, la condición geométrica se representa como:

$$\begin{aligned} |\overline{FP}| &= |\overline{PA}| \\ \sqrt{(x-p)^2 + y^2} &= |x + p| \end{aligned}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2 &= (x + p)^2 \\ (x-p)^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2 \\ x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2 \\ y^2 &= x^2 + 2px + p^2 - x^2 + 2px - p^2 \\ y^2 &= 4px \end{aligned}$$

Si extraemos raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2} &= \sqrt{4px} \\ y &= \pm 2\sqrt{px} \end{aligned}$$

Para valores reales y diferentes de cero de la variable y , los valores de p y x deben ser del mismo signo; por lo anterior se consideran dos casos:

1. Si $p > 0$, no deben tomarse en cuenta los valores negativos de x , por lo que la parábola se abre a la derecha del eje y y se extiende indefinidamente hacia arriba y hacia abajo del eje x . Por lo tanto, la ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$; las coordenadas de su foco son $F(p,0)$ y la ecuación de su directriz es $x = -p$ (Figura 3.15).

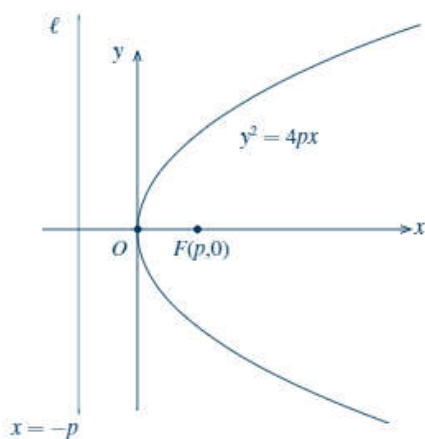


Figura 3.15

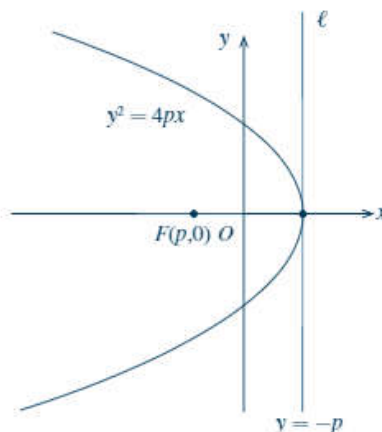


Figura 3.16

2. Si $p < 0$, no deben tomarse en cuenta los valores positivos de x , por lo que la parábola se abre a la izquierda del eje y y se extiende indefinidamente hacia arriba y hacia abajo del eje x . Por lo tanto, la ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$; las coordenadas con su foco son $F(p,0)$ y la ecuación de su directriz es $x = -p$ (Figura 3.16).

Con base en la ecuación $y^2 = 4px$, la parábola no presenta asíntotas verticales ni horizontales.

En la ecuación $y = \pm 2\sqrt{px}$ se tienen dos puntos sobre la parábola cuya abscisa es p ; uno de ellos tiene de ordenada $2p$ y el otro tiene la ordenada $-2p$, dado que la abscisa del foco es 1, se establece que la **longitud del lado recto (LR)** es igual al valor absoluto de la cantidad $4p$, es decir: $LR = |4p|$.

Consideremos la parábola con vértice en el origen y cuyo eje coincide con el eje y (Figura 3.17).

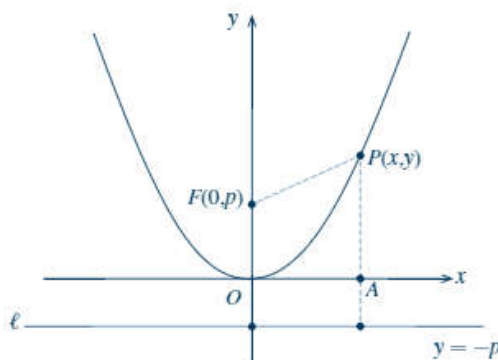


Figura 3.17

Como el foco está sobre el eje y , sus coordenadas son $F(0,P)$ y la ecuación de la directriz de acuerdo con la definición de parábola es $y = -p$.

Si $P(x,y)$ es un punto que se mueve libremente sobre la parábola, de acuerdo con la definición, sus distancias al foco y a la directriz se mantienen iguales, es decir:

$$|FP| = |PA|$$

Al aplicar las ecuaciones de distancia entre dos puntos y distancia de punto a recta, se tiene:

$$|FP| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$|PA| = \frac{|y+p|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y+p|$$

Cada punto $P(x,y)$ de la parábola satisface la ecuación:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p|$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 + (y-p)^2})^2 &= (|y+p|)^2 \\ x^2 + (y-p)^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ x^2 - 2py &= 2py \\ x^2 &= 4py \end{aligned}$$

Para despejar a x , se toma la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación anterior, es decir:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4py}$$

$$x = \pm 2\sqrt{py}$$

Para valores reales y diferentes de cero de la variable x , los valores de p y y deben ser del mismo signo; por lo anterior, se consideran dos casos.

3. Si $p > 0$, no deben tomarse en cuenta los valores negativos de y , por lo que la parábola se abre hacia arriba del eje x y se extiende indefinidamente hacia ambos lados del eje y . Por lo tanto, la ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$, las coordenadas de su foco son $F(0,p)$ y la ecuación de su directriz es $y = -p$ (Figura 3.18).
4. Si $p < 0$, no deben tomarse en cuenta los valores positivos de y , por lo que la parábola se abre hacia abajo del eje x y se extiende indefinidamente hacia ambos lados del eje y . Por lo tanto, la ecuación de la parábola es $x^2 = 4py$, las coordenadas de su foco son $F(0,p)$ y la ecuación de su directriz es $y = -p$ (Figura 3.19).

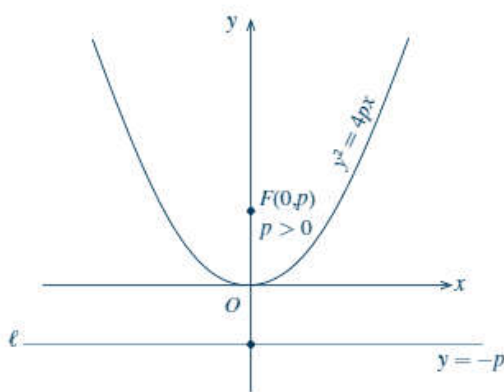


Figura 3.18

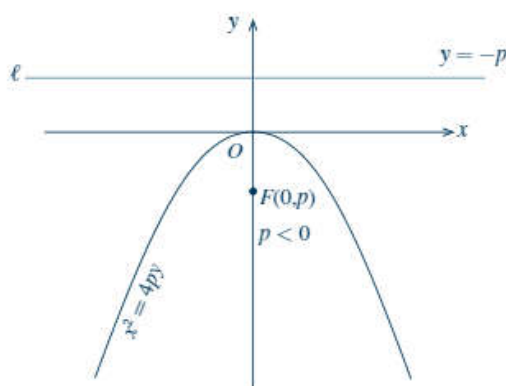


Figura 3.19

Con base en la ecuación $x^2 = 4py$, la parábola no presenta asíntotas verticales ni horizontales.

En la ecuación $x = \pm 2\sqrt{py}$, se tienen dos puntos sobre la parábola cuya ordenada es p ; uno de ellos tiene de abscisa $2p$ y el otro tiene la abscisa $-2p$; dado que la ordenada del foco es p , se establece que la **longitud del lado recto (LR)** es igual al valor absoluto de la cantidad $4p$, es decir: $LR = |4p|$.

Las expresiones $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$ son las ecuaciones en su forma más simple, por lo que se les denomina **primera ecuación ordinaria de la parábola** o de **forma canónica de la parábola**.

EJEMPLOS

1. ••• Una parábola cuyo vértice está en el origen y eje focal sobre el eje x , pasa por el punto $A(3,6)$; determina la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz, la longitud de su lado recto y traza la gráfica correspondiente.

Solución

De acuerdo con las condiciones dadas en el problema, la ecuación de la parábola es de la forma canónica $y^2 = 4px$.

Como un punto de la parábola es $A(3,6)$, sus coordenadas deben satisfacer a dicha ecuación, es decir:

$$y^2 = 4px$$

$$(6)^2 = 4p(3)$$

$$36 = 12p$$

$$p = \frac{36}{12}$$

$$p = 3$$

Como $p = 3$, la ecuación de la parábola es: $y^2 = 4px$

$$y^2 = 4(3)x$$

$$y^2 = 12x$$

Las coordenadas del foco son:

$$F(p,0)$$

$$F(3,0)$$

La ecuación de la directriz es:

$$x = -p$$

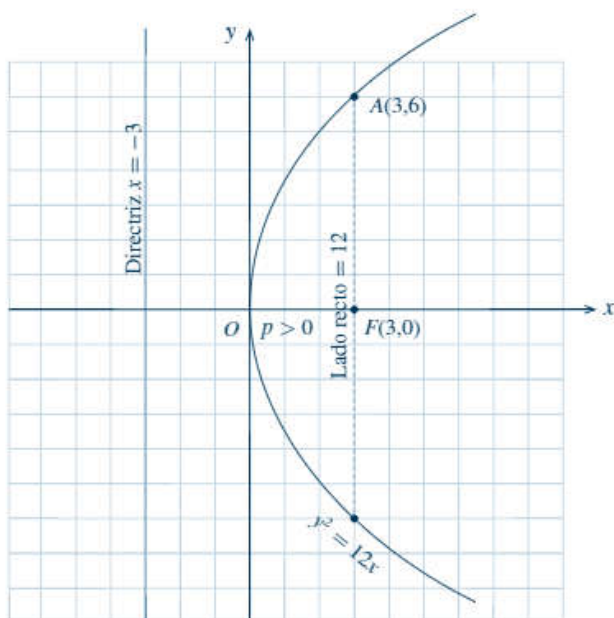
$$x = -3$$

La longitud del lado recto es:

$$LR = |4p|$$

$$LR = |4(3)| = 12$$

Apartir de $y^2 = 12x$, se elabora la gráfica correspondiente, es decir:



- 2 ••• Determina las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y traza la gráfica correspondiente para la ecuación de la parábola $x^2 = 16y$.

Solución

La ecuación de la parábola en su forma canónica es: $x^2 = 4py$; al sustituirla en la ecuación de la parábola dada, resulta:

$$4py = 16y$$

$$p = \frac{16\cancel{y}}{4\cancel{y}}$$

$$p = 4$$

Las coordenadas del foco son:

$$F(0, p)$$

$$F(0, 4)$$

La ecuación de la directriz es:

$$y = -p$$

$$y = -4$$

La longitud del lado recto es:

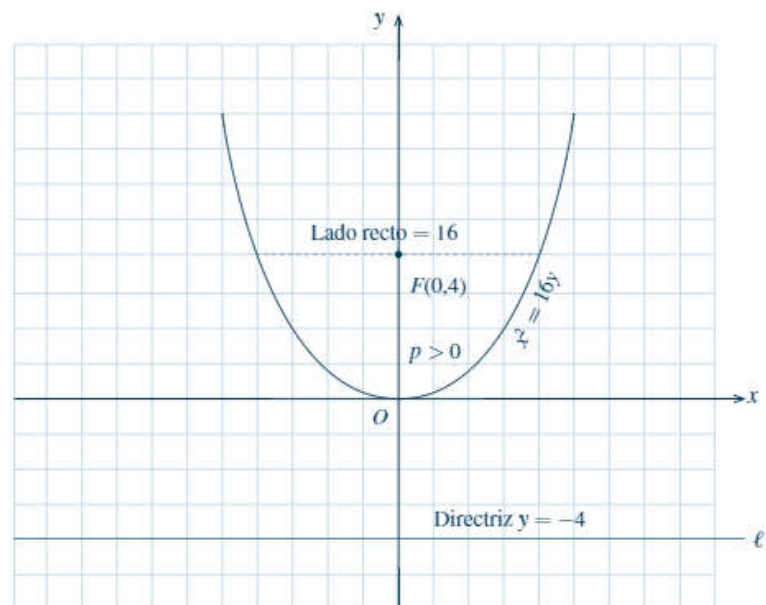
$$LR = |4p|$$

$$LR = |4(4)| = 16$$

Tabulando la ecuación $x^2 = 16y$, se elabora la gráfica correspondiente, es decir:

$$x = \pm 4\sqrt{y}$$

x	y
0	0
1	± 4
2	± 5.65
3	± 6.92
4	± 8
5	± 8.94



- 3 ••• Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en $F(0, -5)$.

Solución

Se trata de una parábola con eje vertical. Como el vértice está en el origen y el foco 5 unidades abajo, se tiene que: $p = -5$. Al sustituir en la primera ecuación de la parábola, resulta:

$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = 4(-5)y$$

$$x^2 = -20y \quad \left. \vphantom{x^2 = -20y} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación canónica} \\ \text{de la parábola.} \end{array}$$

La ecuación de la directriz es:

$$y = -p$$

$$y = 5$$

La longitud del lado recto es:

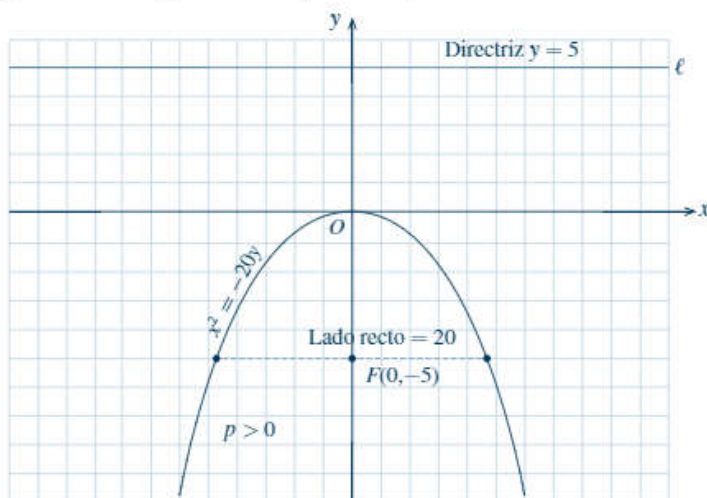
$$LR = |4p|$$

$$LR = |4(-5)| = 20$$

Tabulando la ecuación $x^2 = -20y$, se elabora la gráfica correspondiente, es decir:

$$x = \pm\sqrt{-20y}$$

x	y
0	0
-1	± 4.47
-2	± 6.32
-3	± 7.74
-4	± 8.94
-5	± 10
-6	± 10.95



- 4 ••• Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz $x - 2 = 0$.

Solución

Dado que $x + p = 0$ es la forma típica de la ecuación de la directriz, por comparación con $x - 2 = 0$ el valor de p es:

$$x - 2 = 0$$

$$p = -2$$

Al sustituir $p = -2$ en la primera ecuación ordinaria de la parábola, resulta:

$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = 4(-2)x$$

$$y^2 = -8x \quad \left. \vphantom{y^2 = -8x} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación canónica} \\ \text{de la parábola.} \end{array}$$

Las coordenadas del foco son:

$$F(p, 0)$$

$$F(-2, 0)$$

La longitud del lado recto es:

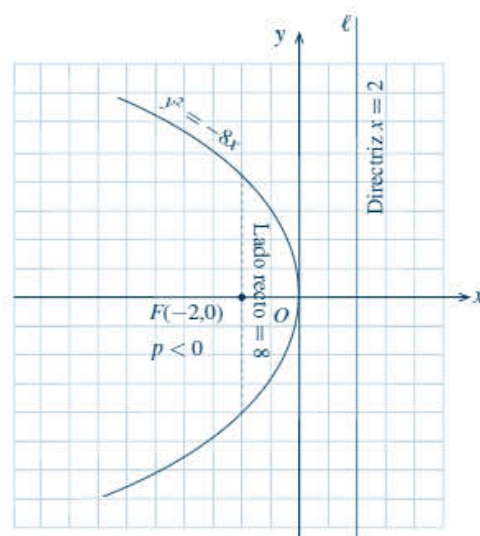
$$LR = |4p|$$

$$LR = |4(-2)| = 8$$

$$y = \pm\sqrt{-8x}$$

Tabulando la ecuación $y^2 = -8x$, se elabora la gráfica correspondiente, es decir:

x	y
0	0
$-\frac{1}{2}$	± 2
-1	± 2.82
-2	± 4
-3	± 4.89
-4	± 5.65



- 5 ••• Una cuerda de la parábola $y^2 = 4x$ es un segmento de la recta $x - 2y = -3$; determina su longitud.

Solución

Por definición, una cuerda es el segmento de recta que une dos puntos de la parábola; por lo tanto, es necesario determinar la intersección entre la ecuación de la parábola y la ecuación de la recta.

De la ecuación de la recta, se despeja a x , es decir:

$$\begin{aligned}x - 2y &= -3 \\x &= 2y - 3\end{aligned}$$

Al sustituir el valor de x en la ecuación de la parábola, se tiene:

$$\begin{aligned}y^2 &= 4x \\y^2 &= 4(2y - 3) \\y^2 &= 8y - 12 \\y^2 - 8y + 12 &= 0 \\(y - 6)(y - 2) &= 0 \\y - 6 &= 0 \quad y - 2 = 0 \\y_1 &= 6, \quad \text{o bien,} \quad y_2 = 2\end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación de la recta, resulta:

Para $y = 6$

$$\begin{aligned}x - 2y &= -3 \\x - 2(6) &= -3 \\x - 12 &= -3 \\x &= 9\end{aligned}$$

Para $y = 2$

$$\begin{aligned}x - 2y &= -3 \\x - 2(2) &= -3 \\x - 4 &= -3 \\x &= 1\end{aligned}$$

Las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con la parábola son $A(9,6)$ y $B(1,2)$.

Al aplicar la ecuación de distancia entre dos puntos, resulta:

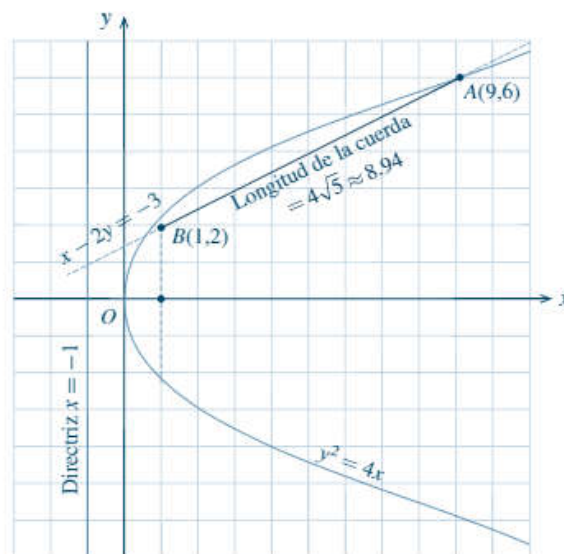
$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\d &= \sqrt{(1 - 9)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} \\d &= \sqrt{16(5)} = 4\sqrt{5} \approx 8.94\end{aligned}$$

La longitud de la cuerda de la parábola $y^2 = 4x$ que se encuentra sobre la recta $x - 2y = -3$ es $4\sqrt{5} \approx 8.94$.

Tabulando la ecuación $y^2 = 4x$, se elabora la gráfica correspondiente, es decir:

$$y = \pm 2\sqrt{x}$$

x	y
0	0
1	± 2
2	± 2.83
3	± 3.46
4	± 4



Ecuación de la parábola con vértice fuera del origen y eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados

Normalmente se requiere determinar la ecuación de una parábola con vértice fuera del origen coordenado y que tenga su eje de simetría paralelo a uno de los ejes del sistema coordenado.

Considerando la parábola de la Figura 3.20, tenemos que su vértice es el punto $V(h,k)$ y cuyo eje de simetría es paralelo al eje de las x ; si transportamos los ejes del sistema coordenado, haciendo que el nuevo origen (O') coincida con el vértice de la parábola, establecemos que la ecuación de la parábola con referencia a los nuevos ejes coordenados x' y y' , es:

$$y'^2 = 4px' \quad (1)$$

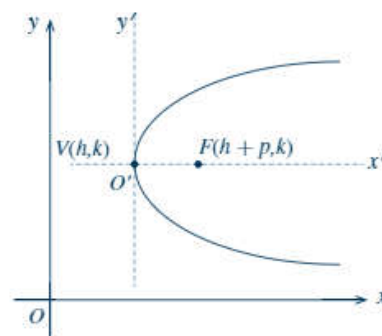


Figura 3.20

Si los ejes coordenados de un sistema se transportan a un nuevo origen $O'(h,k)$ y las coordenadas de un punto cualquiera P son (x,y) y (x',y') antes y después de la transportación de ejes, respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema coordenado son: $(x = x' + h)$ y $(y = y' + k)$. Al despejar, respectivamente, para x' y y' , se tiene:

$$\begin{aligned} x &= x' + h & y &= y' + k \\ x' &= x - h & y' &= y - k \end{aligned}$$

Al sustituir las igualdades anteriores en la ecuación de la parábola (1), resulta:

$$\left. \begin{aligned} y'^2 &= 4px' \\ (y - k)^2 &= 4p(x - h) \end{aligned} \right\} \text{ Segunda ecuación ordinaria de la parábola.}$$

Las coordenadas del foco para la parábola de vértice en el origen son $F(P,0)$ y para la parábola con vértice fuera del origen y eje de simetría paralelo al eje x , son $F(h + p, k)$.

La ecuación de la directriz paralela al eje y , es $x = h - p$.

En la ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, cuando $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; cuando $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

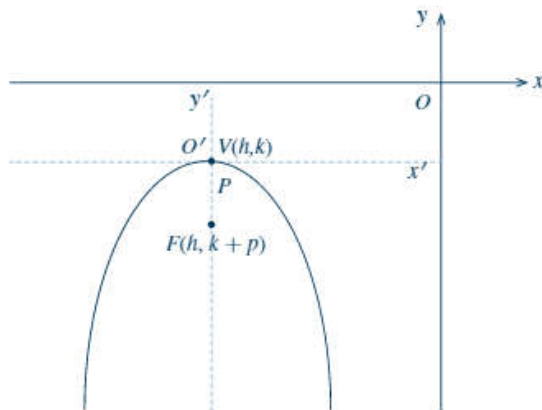


Figura 3.21

Considerando la parábola de la Figura 3.21, su vértice es el punto $V(h, k)$, cuyo eje de simetría es paralelo al eje de las y ; si se transportan los ejes del sistema coordenado, para que el nuevo origen (O') coincida con el vértice de la parábola, se establece que la ecuación de la parábola con referencia a los nuevos ejes coordenados x' y y' , es:

$$x'^2 = 4py' \quad (2)$$

Por el principio de la transportación de ejes coordenados, expresado anteriormente, se sabe que: $x' = x - h$ y $y' = y - k$.

Al sustituir las igualdades anteriores en la ecuación de la parábola (2), se tiene:

$$\left. \begin{aligned} x'^2 &= 4py' \\ (x - h)^2 &= 4p(y - k) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Segunda ecuación ordinaria} \\ \text{de la parábola.} \end{array}$$

Las coordenadas del foco para la parábola con vértice fuera del origen y eje de simetría paralelo al eje y , son:

$$F(h, k + p)$$

La ecuación de la directriz paralela al eje x es $y = k - p$.

En la ecuación $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, cuando $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba y cuando $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

En las ecuaciones de la parábola, denominadas **segunda ecuación ordinaria de la parábola**, se tiene que $|p|$ representa la porción de longitud del eje de simetría y que está comprendida entre el foco y el vértice de la parábola, es decir, $|p| = |FV|$.

EJEMPLO

1. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice es $V(6, 4)$ con foco en $F(6, 2)$; así como la ecuación de su directriz, la ecuación de su eje y la longitud de su lado recto.

Solución

Dado que el vértice y el foco están sobre el eje de la parábola, y de acuerdo con sus coordenadas, se observa que tienen la misma abscisa (6), por tanto, su eje de simetría es paralelo al eje y . Entonces, la ecuación de la parábola tiene la forma:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Como las coordenadas del vértice son $V(6,4)$, al sustituirlas en la ecuación anterior, resulta:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$(x - 6)^2 = 4p(y - 4)$$

Las coordenadas del foco para la parábola con vértice fuera del origen y eje de simetría paralelo al eje y , son $F(h, k + p)$; si el foco es $F(6,2)$, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} k + p &= 2 \\ p &= 2 - k \end{aligned} \right\} \text{ De las coordenadas del vértice tenemos que } k = 4.$$

$$p = 2 - 4 = -2 \quad \text{Como } p < 0, \text{ la parábola se abre hacia abajo.}$$

Al sustituir el valor de p en la ecuación de la parábola, resulta:

$$(x - 6)^2 = 4p(y - 4)$$

$$(x - 6)^2 = 4(-2)(y - 4)$$

$$(x - 6)^2 = -8(y - 4) \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x - 6)^2 &= 4p(y - 4) \\ (x - 6)^2 &= 4(-2)(y - 4) \end{aligned}} \right\} \text{ Segunda ecuación ordinaria de la parábola.}$$

Dado que A es el punto en que el eje de la parábola corta a la directriz y el vértice dado es el punto medio del segmento AF , las coordenadas del punto A se calculan como:

$$x_V = \frac{x_A + x_F}{2}$$

$$h = \frac{x_A + h}{2}$$

$$2h = x_A + h$$

$$x_A = 2h - h$$

$$x_A = h$$

$$\left. \begin{aligned} x_A &= 6 \end{aligned} \right\} \text{ Ecuación del eje de la parábola.}$$

$$y_r = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$k = \frac{y_A + (k + p)}{2}$$

$$2k = y_A + k + p$$

$$y_A = 2k - k - p$$

$$y_A = k - p \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y_A &= k - p \\ y_A &= 4 - (-2) \end{aligned}} \right\} \text{ Ecuación de la directriz.}$$

$$y_A = 4 - (-2)$$

$$y_A = 4 + 2$$

$$y_A = 6$$

Las coordenadas del punto A son $(6,6)$.

La ecuación de la directriz paralela al eje x , es:

$$y = k - p$$

$$y = 4 - (-2) = 4 + 2$$

$$y = 6$$

Con las coordenadas del vértice y del foco, se determina la ecuación del eje de la parábola a partir de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.

$$y - y_V = \left(\frac{y_V - y_F}{x_V - x_F} \right) (x - x_V)$$

$$y - 4 = \left(\frac{4 - 2}{6 - 6} \right) (x - 6)$$

$$y - 4 = \frac{2}{0} (x - 6)$$

$$(0)(y - 4) = 2x - 12$$

$$2x - 12 = 0$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

La ecuación del eje de la parábola es $x = 6$.

La longitud de su lado recto es:

$$LR = |4p|$$

$$LR = |4(-2)| = 8$$

Al desarrollar la ecuación de la parábola, se tiene:

$$(x-6)^2 = -8(y-4)$$

$$x^2 - 12x + 36 = -8y + 32$$

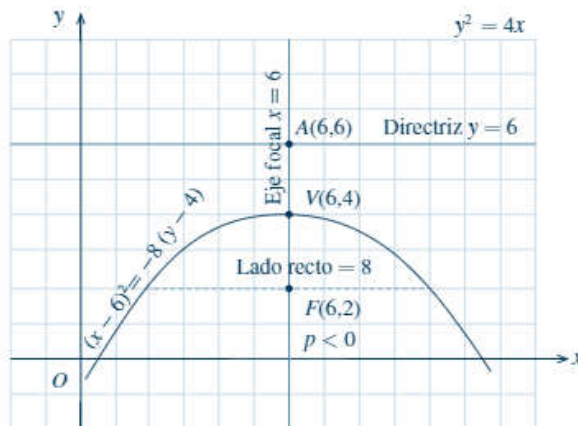
$$8y = 12x - x^2 - 36 + 32$$

$$y = \frac{12x - x^2 - 4}{8}$$

Al usar la expresión anterior se construye la siguiente tabla de valores:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	-0.5	0.875	2	2.875	3.5	3.875	4	3.875	3.5	2.875	2	0.875	-0.5

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



Nota:

Si $|p| = |\overline{FV}| = |4 - 2| = 2$; gráficamente se observa que el foco está abajo del vértice, la parábola se abre hacia abajo; por lo tanto, p es negativa.

$$p = -2$$

Forma general de la ecuación de la parábola

La ecuación de una parábola con vértice en $V(h,k)$, dependiendo de su orientación, tiene como segunda ecuación ordinaria:

Si es horizontal:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0 \quad (1)$$

Si es vertical:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4pk$$

$$x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk = 0 \quad (2)$$

Por comparación con la ecuación cuadrática general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se deben tomar:

Para (1): $A = 0, B = 0, C = 1, D = -4p, E = -2k$ y $F = k^2 + 4ph$

Para (2): $A = 1, B = 0, C = 0, D = -2h, E = -4p$ y $F = h^2 + 4pk$

De tal forma que las ecuaciones generales de la parábola son:

$$\text{Para la parábola horizontal: } Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\text{Para la parábola vertical: } Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Determina la ecuación de la parábola en su forma general, si las coordenadas de su foco son $F(4, -3)$ y la ecuación de su directriz es $y = 1$.

Solución

Primer método. Directo de la definición de parábola

Si $P(x, y)$ es un punto que se mueve sobre la parábola, por definición se sabe que $|FP| = |PA|$, es decir:

$$\sqrt{(x-h)^2 + [y-(k+p)]^2} = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La directriz puede verse en la forma $y - 1 = 0$, por lo tanto, $h = 4$, $k + p = -3$, $A = 0$, $B = 1$ y $C = -1$.

Al sustituir los valores, se tiene:

$$\sqrt{(x-4)^2 + [y-(-3)]^2} = \frac{|y-1|}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2}}$$

Al resolver resulta:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2})^2 = (|y-1|)^2 \\ &(x-4)^2 + (y+3)^2 = y^2 - 2y + 1 \\ &x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ &x^2 - 8x + 6y + 2y + 25 - 1 = 0 \\ &x^2 - 8x + 8y + 24 = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &(\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2})^2 = (|y-1|)^2 \\ &(x-4)^2 + (y+3)^2 = y^2 - 2y + 1 \\ &x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ &x^2 - 8x + 6y + 2y + 25 - 1 = 0 \\ &x^2 - 8x + 8y + 24 = 0 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación general de la parábola} \\ \text{con eje paralelo al eje } y. \end{array}$$

Segundo método. Se convierte la segunda ecuación ordinaria a la forma general

El eje de la parábola contiene los puntos del foco, vértice, este último es el punto de intersección del eje de la parábola con su directriz, por lo que las coordenadas de A son $(4, 1)$.

Como el vértice es el punto medio del segmento AF , resulta:

$$\begin{aligned} x_V &= \frac{x_A + x_F}{2} & x_V &= \frac{y_A + y_F}{2} \\ h &= \frac{4 + 4}{2} = \frac{8}{2} & k &= \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} \\ h &= 4 & k &= -1 \end{aligned}$$

Las coordenadas del vértice son $V(4, -1)$.

Dado que la directriz es paralela al eje x y que el eje de la parábola es paralelo al eje coordenado y , la ecuación de la parábola es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

Al sustituir las coordenadas del vértice en la ecuación anterior, resulta:

$$(x - 4)^2 = 4p(y + 1)$$

Las coordenadas del foco para la parábola de vértice fuera del origen con eje de simetría paralelo al eje y , son $F(h, k + p)$ y el foco es $F(4, -3)$, resulta:

$$\begin{aligned} k + p &= -3 \\ p &= -3 - k \end{aligned}$$

De las coordenadas del vértice, se tiene que $k = -1$

$$\begin{aligned} p &= -3 - (-1) = -3 + 1 \\ p &= -2 \end{aligned} \quad \text{Como } p < 0, \text{ la parábola se abre hacia abajo.}$$

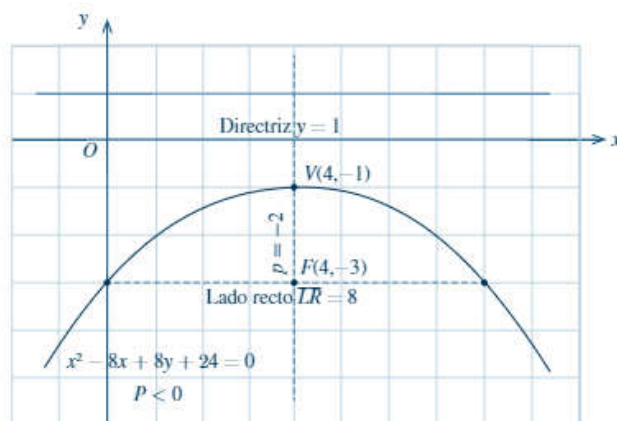
Al sustituir el valor de p en la ecuación de la parábola, resulta:

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 &= 4(-2)(y + 1) \\ (x - 4)^2 &= -8(y + 1) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x - 4)^2 &= 4(-2)(y + 1) \\ (x - 4)^2 &= -8(y + 1) \end{aligned}} \right\} \text{Ecuación de la parábola en su segunda forma ordinaria.}$$

Al desarrollar la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 &= -8y - 8 \\ x^2 - 8x + 8y + 16 + 8 &= 0 \\ x^2 - 8x + 8y + 24 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x^2 - 8x + 8y + 16 + 8 &= 0 \\ x^2 - 8x + 8y + 24 &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{Ecuación de la parábola en su forma general.}$$

Se elabora la gráfica correspondiente, es decir:



- 2 ••• Determina la ecuación de la parábola cuyo lado recto es el segmento comprendido entre los puntos $M(3, 5)$ y $N(3, -3)$.

Solución

Como M y N tienen la misma abscisa, se trata de un segmento vertical, por lo tanto, el eje de la parábola es horizontal y su ecuación es: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

Con los puntos dados, se determina la longitud del **lado recto**, es decir:

$$\begin{aligned}d &= LR = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\LR &= \sqrt{(3-3)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{(0)^2 + (8)^2} = \sqrt{64} \\LR &= 8\end{aligned}$$

Por definición se establece que el lado recto es: $LR = |4p| = |8|$, al sustituir en la ecuación de la parábola, se tiene: $(y - k)^2 = \pm 8(x - h)$.

Como los puntos dados pertenecen a la parábola, resulta:

Para M

$$(5 - k)^2 = \pm 8(3 - h) \quad (1)$$

Para N

$$(-3 - k)^2 = \pm 8(3 - h) \quad (2)$$

Considerando el signo respectivo:

$$\begin{aligned}(5 - k)^2 &= 8(3 - h) \\25 - 10k + k^2 &= 24 - 8h \\k^2 - 10k + 8h + 25 - 24 &= 0 \\k^2 - 10k + 8h + 1 &= 0 \quad (1A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5 - k)^2 &= -8(3 - h) \\25 - 10k + k^2 &= -24 + 8h \\k^2 - 10k - 8h + 25 + 24 &= 0 \\k^2 - 10k - 8h + 49 &= 0 \quad (1B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-3 - k)^2 &= 8(3 - h) \\9 + 6k + k^2 &= 24 - 8h \\k^2 + 6k + 8h + 9 - 24 &= 0 \\k^2 + 6k + 8h - 15 &= 0 \quad (2A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-3 - k)^2 &= -8(3 - h) \\9 + 6k + k^2 &= -24 + 8h \\k^2 + 6k - 8h + 9 + 24 &= 0 \\k^2 + 6k - 8h + 33 &= 0 \quad (2B)\end{aligned}$$

La ecuación (2A) se multiplica por -1 y se resta la ecuación (1A), es decir:

$$\begin{array}{r} \cancel{k^2} - 6k - 8h + 15 = 0 \\ \underline{\cancel{k^2} - 10k + 8h + 1 = 0} \quad (1A) \\ -16k + 16 = 0 \\ k = \frac{-16}{-16} = 1 \end{array}$$

Al sustituir el valor de k , en (2A), resulta:

$$\begin{aligned}k^2 + 6k + 8h - 15 &= 0 & 8h - 8 &= 0 \\(1)^2 + 6(1) + 8h - 15 &= 0 & 8h &= 8 \\1 + 6 + 8h - 15 &= 0 & h &= \frac{8}{8} = 1\end{aligned}$$

Los valores $h = 1$ y $k = 1$ son las coordenadas del vértice $V_1(1,1)$ de la parábola.

Se resuelve simultáneamente (1B) y (2B). La ecuación (2B) se multiplica por -1 , resulta:

$$\begin{array}{r} \cancel{k^2} - 6k + 8h - 33 = 0 \\ \underline{\cancel{k^2} - 10k - 8h + 49 = 0} \quad (2B) \\ -16k + 16 = 0 \\ k = \frac{-16}{-16} = 1 \end{array}$$

Al sustituir el valor de k , en (2B), resulta:

$$\begin{aligned} k^2 + 6k - 8h + 33 &= 0 & -8h + 40 &= 0 \\ (1)^2 + 6(1) - 8h + 33 &= 0 & -8h &= -40 \\ 1 + 6 - 8h + 33 &= 0 & h &= \frac{-40}{-8} = 5 \end{aligned}$$

Los valores $h = 5$ y $k = 1$, son las coordenadas del vértice $V_2(5,1)$ de la parábola.

Se sustituyen las coordenadas de los vértices $V(1,1)$ y $V_2(5,1)$ en la ecuación de la parábola: $(y - k)^2 = \pm 8(x - h)$, es decir:

Para $V_1(1,1)$		Para $V_2(5,1)$	
$(y - 1)^2 = 8(x - 1)$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$	$(y - 1)^2 = -8(x - 5)$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$
	Segunda forma ordinaria.		Segunda forma ordinaria.
$(y^2 - 2y + 1 = 8x - 8)$		$y^2 - 2y + 1 = 8x + 40$	
$y^2 - 8x - 2y + 9 = 0$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$	$y^2 + 8x - 2y + 39 = 0$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$
	Ecuación de forma general.		Ecuación de forma general.

Con la ecuación de la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, con el vértice $V(1,1)$ y cualquiera de los puntos dados, se tiene:

$$\begin{aligned} (y - k)^2 &= 4p(x - h) \\ (5 - 1)^2 &= 4p(3 - 1) & \text{Cuando } p > 0, \text{ la parábola se abre hacia la derecha.} \\ p &= \frac{16}{8} = 2 \end{aligned}$$

Con la ecuación de la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, con el vértice $V(5,1)$ y cualquiera de los puntos dados, se tiene:

$$\begin{aligned} (y - k)^2 &= 4p(x - h) \\ (5 - 1)^2 &= 4p(3 - 5) & \text{Cuando } p < 0, \text{ la parábola se abre hacia la izquierda.} \\ p &= \frac{16}{-8} = -2 \end{aligned}$$

Para la parábola cuyo vértice es $V(1,1)$, las coordenadas de su foco son:

$$\begin{aligned} F(h + p, k) \\ F[(1 + 2), 1] &= (3, 1) \end{aligned}$$

Para la parábola cuyo vértice es $V(5,1)$, las coordenadas de su foco son:

$$\begin{aligned} F(h + p, k) \\ F[(5 - 2), 1] &= (3, 1) \end{aligned}$$

La ecuación de la directriz para la parábola de vértice $V(1,1)$ es:

$$\begin{aligned} x &= h - p \\ x &= 1 - 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

La ecuación de la directriz para la parábola de vértice $V(5,1)$, es:

$$\begin{aligned}x &= h - p \\x &= 5 - (-2) = 5 + 2 \\x &= 7\end{aligned}$$

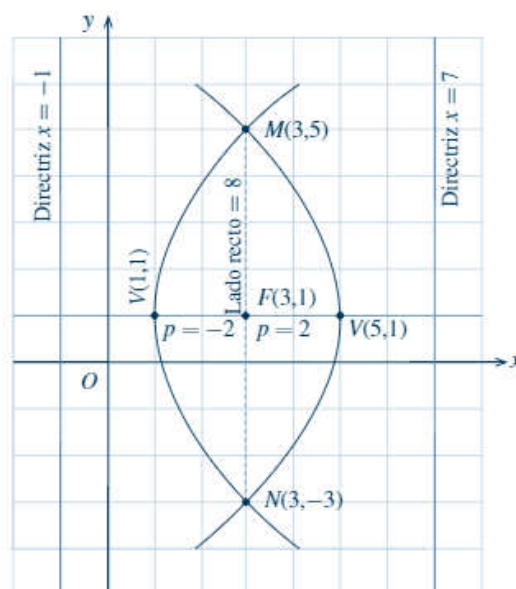
Tabulando las ecuaciones de la parábola, se elabora la gráfica correspondiente, es decir:

$$x = \frac{y^2 - 2y + 9}{8}$$

x	y
-4	4.125
-3	3
-2	2.125
-1	1.5
0	1.125
1	1
2	1.125
3	1.5
4	2.125
5	3
6	4.125

$$x = \frac{2y - y^2 + 39}{8}$$

x	y
-4	1.875
-3	3
-2	3.875
-1	4.5
0	4.875
1	5
2	4.875
3	4.5
4	3.875
5	3
6	1.875



EJERCICIO 22

- I. Determina las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para cada una de las ecuaciones de una parábola dada y traza la gráfica correspondiente.
 1. $x^2 = 20y$
 2. $y^2 = 20x$
 3. $x^2 + 12y = 0$
 4. $y^2 + 8x = 0$
 5. $y^2 = -2x$
 6. $x^2 = 18y$
- II. Determina la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto para la parábola con vértice en el origen, cuyo eje coincide con el eje x pasando por el punto indicado y traza la gráfica respectiva.
 1. $K(-2, 4)$
 2. $L(5, 7)$
 3. $M(-6, -4)$
 4. $N(9, -5)$
- III. Determina la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto para la parábola con vértice en el origen, cuyo eje coincide con el eje y, pasando por el punto indicado y traza la gráfica respectiva.
 1. $K(4, -2)$
 2. $L(7, 5)$
 3. $M(-4, -6)$
 4. $N(-5, 9)$
- IV. Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco el punto dado; encuentra los otros elementos y traza la gráfica correspondiente.
 1. $F(4, 0)$
 2. $F(0, -4)$
 3. $F(-6, 0)$
 4. $F(0, 6)$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

V. Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen, cuya directriz tiene la ecuación dada; encuentra los otros elementos y traza la gráfica correspondiente.

1. $x - 5 = 0$
2. $y = 5$
3. $x = -3$
4. $y + 3 = 0$

VI. Resuelve los siguientes problemas.

1. Una cuerda de la parábola $x^2 - 4y = 0$ es un segmento de la recta $2x + y + 3 = 0$; determina su longitud.
2. Determina la longitud de la cuerda focal de la parábola $y^2 + 8x = 0$ que es paralela a la recta $3x - 4y - 7 = 0$.
3. Determina la longitud del radio vector del punto de la parábola $x^2 - 9y = 0$ cuya abscisa es igual a 6.
4. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola:
 - a) $x^2 - 8y = 0$
 - b) $y^2 - 4x = 0$
 - c) $x^2 + 12y = 0$
 - d) $y^2 + 16x = 0$
5. Una circunferencia con centro en $C(4, -1)$ pasa por el foco de la parábola $x^2 = -16y$; demuestra que es tangente a la dirección de dicha parábola.
6. Determina la ecuación de la parábola de vértice en el origen cuya directriz es $y + \frac{3}{2} = 0$.
7. Una parábola tiene vértice en el origen su eje coincide con el eje x y pasa por el punto $M(-3, 6)$; determina la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto y traza la gráfica correspondiente.
8. Determina la ecuación de la parábola con foco $F\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ y directriz $x = \frac{3}{4}$.

VII. Aplicando la definición de parábola, determina la ecuación de cada parábola a partir de los siguientes datos dados; reduce la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

1. Foco $F(3, -5)$, directriz $y = 1$.
2. Foco $F(3, 0)$, directriz $x = -3$.
3. Foco $F(-1, 1)$, directriz $x + y - 5 = 0$.
4. Foco $F(3, 4)$, directriz $x - 1 = 0$.
5. Foco $F(0, 0)$, vértice $V(2, 0)$.
6. Foco $F(0, 6)$, directriz el eje x .

VIII. Resuelve los siguientes problemas en plenaria discute el procedimiento de solución.

1. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $V(-5, 2)$ y $F(-2, 2)$, respectivamente; determina también las ecuaciones de su directriz y su eje de simetría; escribe la ecuación de la parábola en su forma general.
2. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $V(4, -5)$, y $F(4, -1)$, respectivamente; determina también las ecuaciones de su directriz y su eje de simetría; escribe la ecuación de la parábola en su forma general.
3. La directriz de una parábola es la recta $y - 5 = 0$ y su foco es el punto $F(3, -1)$; determina la ecuación de la parábola en su forma general y sus elementos correspondientes.
4. La directriz de una parábola es la recta $x + 1 = 0$, y su vértice es el punto $V(4, 3)$; determina la ecuación de la parábola en su forma general y sus elementos correspondientes.
5. Determina la ecuación de la parábola de foco el punto $F(-2, -1)$ y cuyo lado recto es el segmento entre los puntos $M(-2, 2)$ y $N(-2, 4)$.
6. Determina la ecuación de la parábola cuyo lado recto es el segmento entre los puntos $M(-5, -3)$ y $N(-3, 3)$.

7. Determina la ecuación de la parábola con vértice en $V(2,3)$, con eje paralelo al de coordenadas y y que pasa por el punto $M(4,5)$.
8. Determina la ecuación de la parábola con vértice en $7x + 3y - 4 = 0$, con eje paralelo al eje x y que pasa por los puntos $M(3,-5)$ y $N\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Discusión acerca de si una ecuación de la forma $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ o $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa o no una parábola; en caso afirmativo, determinación de sus elementos

La ecuación de segundo grado en las variables x y y , que no contiene el término cruzado xy , se escribe en la forma: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, y para ella se reconocen las siguientes cuatro casos.

1. Si $A \neq 0$, con $C = 0$ y $E \neq 0$, la ecuación corresponde a una parábola con eje de simetría paralelo al eje y , cuya forma general es:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Una forma simple de demostrar que la ecuación anterior es una parábola, es completando el cuadrado en x , es decir:

$$\frac{Ax^2}{A} + \frac{Dx}{A} + \frac{Ey}{A} + \frac{F}{A} = 0, \quad \text{o bien,} \quad x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Al separar términos:

$$x^2 + \frac{D}{A}x = -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A}$$

Completando el cuadrado en x , se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{D}{A}x + \left(\frac{\frac{D}{A}}{2}\right)^2 &= -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A} + \left(\frac{\frac{D}{A}}{2}\right)^2 \\ x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2} &= -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2} \\ \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 &= -\frac{E}{A}\left(y + \frac{F}{E} - \frac{D^2}{4AE}\right) \end{aligned}$$

La última expresión corresponde a la segunda forma ordinaria $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, en la que

$$h = -\frac{D}{2A}, p = -\frac{E}{4A} \text{ y } k = -\frac{4AF - D^2}{4AE}, \text{ lo cual, es posible porque } A \neq 0 \text{ y } E \neq 0.$$

La gráfica de $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $A \neq 0$ y $E \neq 0$, es una parábola con eje de simetría paralelo al eje y .

2. Si $A \neq 0$, con $C = 0$ y $E = 0$, la ecuación resultante $Ax^2 + Dx + F = 0$ representa:

a) Dos rectas distintas, paralelas al eje y si $D^2 - 4AF > 0$.

La ecuación tendrá dos raíces reales y desiguales, es decir, r_1 y r_2 , si su discriminante $D^2 - 4AF$ es positivo. Así,

$$A(x - r_1)(x - r_2) = 0$$

Su solución consiste en dos rectas verticales distintas, cuyas ecuaciones son $x = r_1$ y $x = r_2$.

b) Una sola recta paralela al eje y , si $D^2 - 4AF = 0$. En este caso el discriminante es cero, la ecuación $Ax^2 + Dx + F = 0$ tiene una raíz real doble r , es decir:

$$A(x - r)^2 = 0$$

Su solución consiste en una recta vertical cuya ecuación es $x = r$.

c) Ningún lugar geométrico, si $D^2 - 4AF < 0$. Las raíces de la ecuación $Ax^2 + Dx + F = 0$ son complejas.

3. Si $A = 0$, con $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación resultante es $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ que representa una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje x .

Una forma simple de demostrar que la ecuación anterior es una parábola, es completando el cuadrado en y , es decir:

$$y^2 + \frac{D}{C}x + \frac{E}{C}y + \frac{F}{C} = 0$$

Al separar términos:

$$y^2 + \frac{E}{C}y = -\frac{D}{C}x - \frac{F}{C}$$

Completando el cuadrado en y , se tiene:

$$\begin{aligned} y^2 + \frac{E}{C}y + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 &= -\frac{D}{C}x - \frac{F}{C} + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 \\ y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2} &= -\frac{D}{C}x - \frac{F}{C} + \frac{E^2}{4C^2} \\ \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 &= -\frac{D}{C}\left(x + \frac{F}{D} - \frac{E^2}{4ACD}\right) \end{aligned}$$

La última expresión corresponde a la segunda forma ordinaria $(y - k)^2 = 4p(x - k)$, en la que $K = -\frac{E}{2C}$, $p = -\frac{D}{4C}$ y $h = -\frac{4CF - E^2}{4CD}$, lo cual, es posible porque $C \neq 0$ y $D \neq 0$.

La gráfica de $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $C \neq 0$ y $D \neq 0$, es una parábola con eje de simetría paralelo al eje x .

4. Si $A = 0$, con $C \neq 0$ y $D = 0$, la ecuación resultante representa:

- a) Dos rectas distintas paralelas al eje x , si $E^2 - 4CF > 0$. La ecuación $Cy^2 + Ey + F = 0$ tendrá dos reales y distintas, es decir:

$$C(y - r_1)(y - r_2) = 0$$

Su solución consiste en dos rectas horizontales distintas, cuyas ecuaciones son $y = r_1$ y $y = r_2$.

- b) Una recta paralela al eje x , si $E^2 - 4AF = 0$. La ecuación resultante tiene una raíz real doble, es decir: $C(y - r)^2 = 0$.

Su solución consiste en una recta vertical cuya ecuación es $y = r$.

- c) Ningún lugar geométrico, si $E^2 - 4CF < 0$. Las raíces de la ecuación $Cy^2 + Ey + F = 0$ son complejas.

EJEMPLO

Ejemplo 1

- Demuestra que la ecuación $3y^2 + 36x - 30y + 111 = 0$ representa una parábola y determina las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje de simetría, la longitud de su lado recto y traza la gráfica correspondiente.

Solución

La ecuación dada es de la forma $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, que representa una parábola con eje de simetría paralelo al eje x .

Al reducir la ecuación $3y^2 + 36x - 30y + 111 = 0$ a la segunda forma ordinaria de la parábola, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{3y^2}{3} + \frac{36x}{3} - \frac{30y}{3} + \frac{111}{3} &= 0 \\ y^2 + 12x - 10y + 37 &= 0 \\ y^2 - 10y &= -12x - 37 \end{aligned}$$

Completando el cuadrado en y , se tiene:

$$\begin{aligned} y^2 - 10y + \left(-\frac{10}{2}\right)^2 &= -12x - 37 + \left(-\frac{10}{2}\right)^2 \\ y^2 - 10y + 25 &= -12x - 37 + 25 \\ (y - 5)^2 &= -12x - 12 \\ (y - 5)^2 &= -12x + 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y^2 - 10y + 25 &= -12x - 37 + 25 \\ (y - 5)^2 &= -12x - 12 \\ (y - 5)^2 &= -12x + 1 \end{aligned}} \right\} \text{ Segunda ecuación ordinaria de la parábola.}$$

De la ecuación anterior, se determinan las coordenadas del vértice de la parábola, es decir: $V(-1, 5)$.

De la misma ecuación se tiene que: $4p = -12$

$$p = \frac{-12}{4} = -3 \quad \text{Como } p < 0, \text{ la parábola se abre hacia la izquierda.}$$

Las coordenadas del foco son: $F(h + p, k)$

$$F[(-1 - 3), 5] = (-4, 5)$$

La ecuación de la directriz es: $x = h - p$

$$x = -1 - (-3) = -1 + 3$$

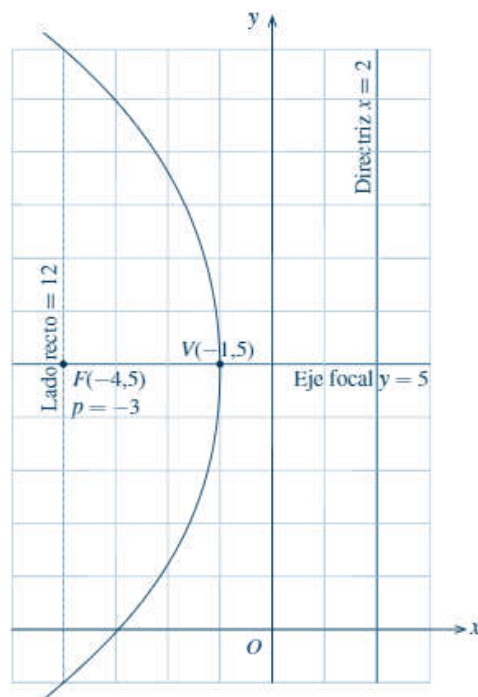
$$x = 2$$

Como el vértice $V(-1, 5)$ y el foco $F(-4, 5)$ están sobre el eje de la parábola y es paralelo al eje x , su ecuación es $y = k$ o $y = 5$.

La longitud de su lado recto es: $LR = |4p|$

$$LR = |4(-3)| = 12$$

Al usar los parámetros anteriores se elabora la gráfica correspondiente:



Determinación de la ecuación de la parábola a partir de tres condiciones dadas

Las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de la parábola $(x - h)^2 = 4p (y - k)$ y $(y - k)^2 = 4p (x - h)$, contienen tres constantes arbitrarias independientes, que son: h , k y p ; de la misma manera, las ecuaciones de la parábola en su forma general, $x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$ y $y^2 + \frac{D}{C}x + \frac{E}{C}y + \frac{F}{C} = 0$, contienen también tres

constantes arbitrarias independientes, que son: $\frac{D}{A}$, $\frac{E}{A}$ y $\frac{F}{A}$ para la primera ecuación; para la segunda ecuación $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{C}$ y $\frac{F}{C}$.

Por lo anterior, la ecuación de la parábola en cualquiera de sus formas (segunda ordinaria y general) se obtiene al determinar los valores de las tres constantes respectivas.

Dadas tres condiciones independientes que den lugar a tres ecuaciones independientes, las cuales están en función de las tres constantes arbitrarias y que al resolver el sistema anterior, es decir:

Una parábola queda determinada de manera única si satisface tres condiciones independientes conocidas.

EJEMPLO

Ejemplo 1

- Determina la ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje y y que pasa por los tres puntos $L(-2,9)$, $M(0,1)$ y $N(3,4)$.

Solución

Con base en las condiciones del problema, se emplea la ecuación de la parábola en su forma general

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ que se reduce a } x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0.$$

Se establecen las siguientes igualdades: $D' = \frac{D}{A}$, $E' = \frac{E}{A}$ y $F' = \frac{F}{A}$; la ecuación se expresa en la forma $x^2 + D'x + E'y + F' = 0$, donde las tres constantes por determinar son D' , E' y F' .

Como los tres puntos dados pertenecen a la parábola, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación $x^2 + D'x + E'y + F' = 0$.

Con base en lo anterior, se tienen las tres ecuaciones siguientes correspondientes a los puntos dados.

$$\begin{aligned} \text{Para } L(-2,9), \text{ se tiene:} \quad & x^2 + D'x + E'y + F' = 0 \\ & (-2)^2 + D'(-2) + E'(9) + F' = 0 \\ & -2D' + 9E' + F' = -4 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } M(0,1), \text{ se tiene:} \quad & x^2 + D'x + E'y + F' = 0 \\ & (0)^2 + D'(0) + E'(1) + F' = 0 \\ & E' + F' = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } N(3,4), \text{ se tiene:} \quad & x^2 + D'x + E'y + F' = 0 \\ & (3)^2 + D'(3) + E'(4) + F' = 0 \\ & 9 + 3D' + 4E' + F' = 0 \\ & 3D' + 4E' + F' = -9 \quad (3) \end{aligned}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (1) y (3). La ecuación (1) se multiplica por 3 y la ecuación (3) se multiplica por 2 resulta:

$$\begin{aligned} & -6D' + 27E' + 3F' = -12 \\ & \underline{6D' + 8E' + 2F' = -18} \\ & 35E' + 5F' = -30 \quad (4) \end{aligned}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (2) y (4). La ecuación (2) se multiplica por -35 , resulta:

$$\begin{array}{r} -35E' - 35F' = 0 \\ 35E' + 5F' = -30 \\ \hline -30F' = -30 \\ F' = \frac{-30}{-30} = 1 \end{array}$$

Al sustituir el valor de F' en (2), resulta:

$$\begin{array}{l} E' + F' = 0 \\ E' + 1 = 0 \end{array} \quad E' = -1$$

Al sustituir los valores de E' y F' en (3), resulta:

$$\begin{array}{l} 3D' + 4E' + F' = -9 \\ 3D' + 4(-1) + 1 = -9 \\ 3D' - 4 + 1 = -9 \\ 3D' - 3 = -9 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3D' = -9 + 3 \\ D' = \frac{-6}{3} \\ D' = -2 \end{array}$$

Al sustituir los valores de las constantes D' , E' y F' , en la ecuación de la parábola en su forma general, resulta:

$$\begin{array}{l} x^2 + D'x + E'y + F' = 0 \\ x^2 + (-2)x + (-1)y + 1 = 0 \\ x^2 - 2x - y + 1 = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x^2 + D'x + E'y + F' = 0 \\ x^2 + (-2)x + (-1)y + 1 = 0 \\ x^2 - 2x - y + 1 = 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la parábola} \\ \text{en su forma general.} \end{array}$$

Transformando la ecuación general de la parábola a su segunda forma ordinaria, se tiene:

$$\begin{array}{l} x^2 - 2x - y + 1 = 0 \\ x^2 - 2x = y - 1 \\ x^2 - 2x + \left(-\frac{2}{2}\right)^2 = y - 1 + \left(-\frac{2}{2}\right)^2 \\ x^2 - 2x + 1 = y - 1 + 1 \\ (x - 1)^2 = y \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x^2 - 2x - y + 1 = 0 \\ x^2 - 2x = y - 1 \\ x^2 - 2x + \left(-\frac{2}{2}\right)^2 = y - 1 + \left(-\frac{2}{2}\right)^2 \\ x^2 - 2x + 1 = y - 1 + 1 \\ (x - 1)^2 = y \end{array}} \right\} \text{Segunda forma ordinaria de la parábola.}$$

De la ecuación anterior, las coordenadas del vértice son:

$$V(1,0)$$

De la misma ecuación, resulta:

$$4p = 1$$

$$p = \frac{1}{4} \quad \text{Como } p > 0, \text{ la parábola se abre hacia arriba.}$$

Las coordenadas del foco son:

$$\begin{array}{l} F(h, k + p). \\ F\left[1, \left(0 + \frac{1}{4}\right)\right] = \left(1, \frac{1}{4}\right) \end{array}$$

La ecuación de la directriz es:

$$y = k - p$$

$$y = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

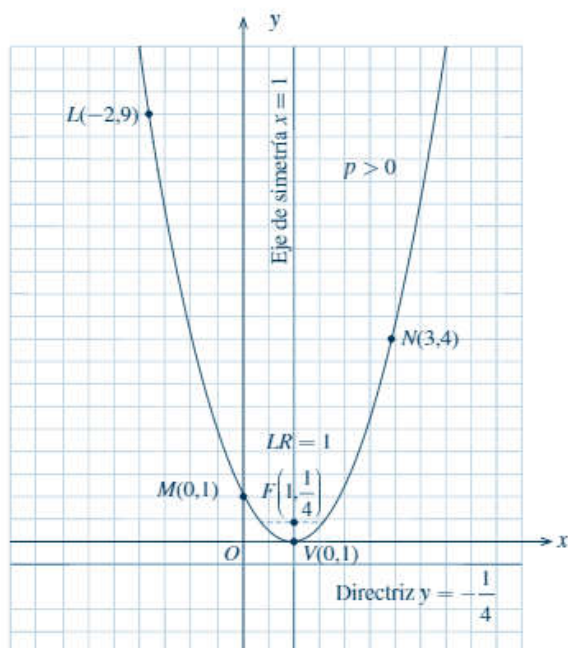
Como el vértice $V(1,0)$ y el foco $F\left(1, \frac{1}{4}\right)$ están sobre el eje de simetría de la parábola, siendo éste paralelo al eje y , su ecuación es $x = h$ o $x = 1$.

La longitud del lado recto es:

$$LR = |4p|$$

$$LR = \left|4\left(\frac{1}{4}\right)\right| = 1$$

A partir de la ecuación $y = (x - 1)^2$, se elabora la gráfica correspondiente, es decir:



Relación de la ecuación de la parábola con la ecuación general de segundo grado con dos variables

La función cuadrática o ecuación general de segundo grado con dos variables, escrita en la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son constantes y $a \neq 0$.

La ecuación de la parábola en su forma general $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, se representa gráficamente por la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$; que es una parábola de eje paralelo con el eje y .

La ecuación $y = ax^2 + bx + c$, transformada a la segunda ecuación ordinaria de la parábola es:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{y}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{y}{a}$$

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{bx}{a} &= \frac{y}{a} - \frac{c}{a} \\x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{1}{a}\left(y - c + \frac{b^2}{4a}\right)\end{aligned}$$

De esta ecuación, las coordenadas del vértice de la parábola son:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Si $a > 0$, la parábola $y = ax^2 + bx + c$ se abre hacia arriba, siendo su vértice un punto mínimo; la función cuadrática $ax^2 + bx + c$, tiene un valor mínimo igual a $\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$, cuando $x = -\frac{b}{2a}$ (Figura 3.22).

Si $a < 0$, la parábola $y = ax^2 + bx + c$ se abre hacia abajo, siendo su vértice un punto máximo; la función cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene un valor máximo igual a $\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$, cuando $x = -\frac{b}{2a}$ (Figura 3.23).

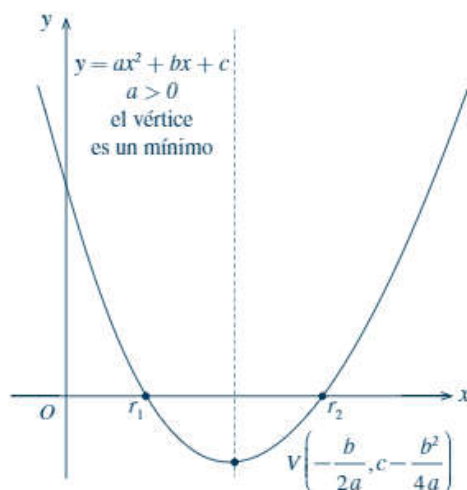


Figura 3.22

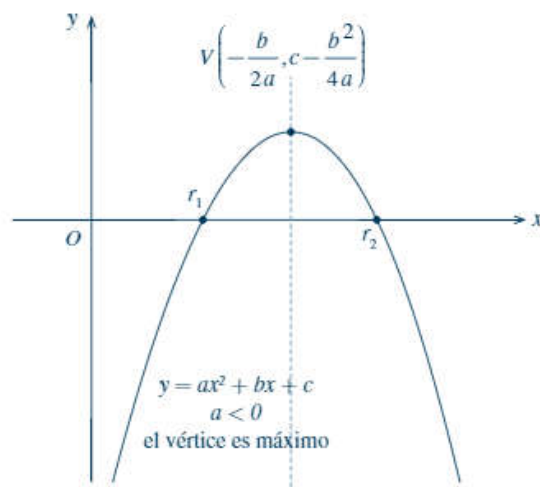


Figura 3.23

De la misma manera, la función cuadrática con dos variables, escrita en la forma $x = ay^2 + by + c$, donde a , b y c son constantes y $a \neq 0$.

La ecuación de la parábola en su forma general $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se representa gráficamente por la función cuadrática $x = ay^2 + by + c$, que es una parábola de eje paralelo con el eje x .

La ecuación $x = ay^2 + by + c$, transformada a la segunda ecuación ordinaria de la parábola es:

$$\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(x - c + \frac{b^2}{4a}\right)$$

De esta ecuación, las coordenadas del vértice de la parábola, son:

$$V\left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$

Si $a > 0$, la parábola $x = ay^2 + by + c$ se abre hacia la derecha, siendo su vértice el menor punto; la función cuadrática $ay^2 + by + c$, tiene un valor mínimo igual a $c - \frac{b^2}{4a}$, cuando $y = -\frac{b}{2a}$ (Figura 3.24).

Si $a < 0$, la parábola $x = ay^2 + by + c$ se abre hacia la izquierda, siendo su vértice el mayor punto; la función cuadrática $ay^2 + by + c$, tiene un valor máximo igual a $c - \frac{b^2}{4a}$, cuando $y = -\frac{b}{2a}$ (Figura 3.25).

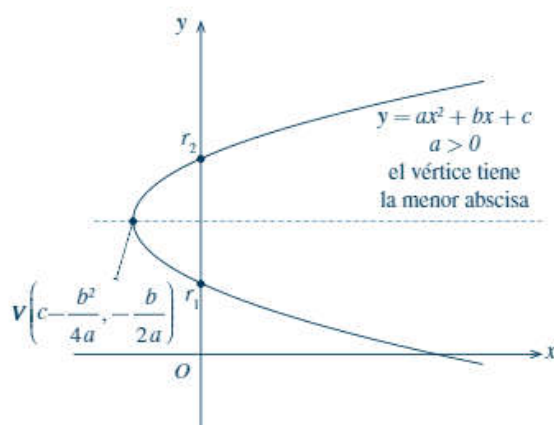


Figura 3.24

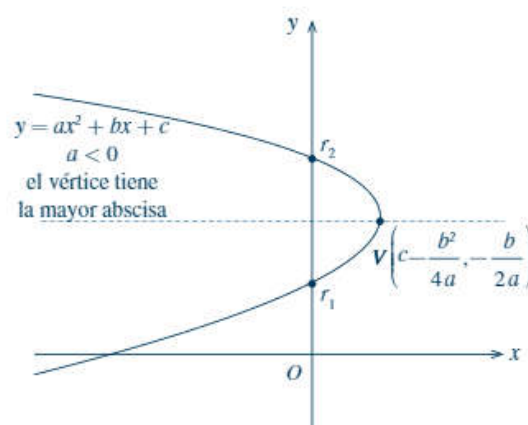


Figura 3.25

La discusión de la función cuadrática permite conocer sus puntos extremos y también los valores de la variable x o y para los cuales la función es positiva, negativa o cero.

Si la gráfica de la función cuadrática es como se muestra en la Figura 3.22, donde la parábola interseca al eje x en los dos puntos diferentes P_1 y P_2 , cuyas ordenadas son cero y sus abscisas respectivas r_1 y r_2 , son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

La función anterior es negativa para los valores de x comprendidos entre r_1 y r_2 ; es positiva para los valores de x menores que r_1 y mayores que r_2 .

De la misma manera, para la gráfica de la función cuadrática es como se muestra en la Figura 3.25, donde la parábola interseca al eje y en los dos puntos diferentes P_1 y P_2 ; cuyas abscisas son cero y sus ordenadas respectivas r_1 y r_2 , son las raíces de la ecuación $ay^2 + by + c = 0$.

La función anterior es negativa para los valores de y comprendidos entre r_1 y r_2 ; es positiva para los valores de y menores que r_1 y mayores que r_2 .

EJEMPLO

Ejemplo 1

- Determina el máximo o mínimo de la función cuadrática $4x^2 + 16x + 19$ y los valores de x para los cuales esta función es positiva, negativa y cero; traza la gráfica correspondiente.

Solución

La función cuadrática dada está representada gráficamente por la parábola $y = 4x^2 + 16x + 19$.

Al reducir a la segunda ecuación ordinaria, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{4x^2}{4} + \frac{16x}{4} + \frac{19}{4} &= \frac{y}{4} \\ x^2 + 4x + \frac{19}{4} &= \frac{y}{4} \\ x^2 + 4x &= \frac{y}{4} - \frac{19}{4}\end{aligned}$$

Completando el cuadrado en x , se tiene:

$$\begin{aligned}x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 &= \frac{y}{4} - \frac{19}{4} + \left(\frac{4}{2}\right)^2 \\ x^2 + 4x + 4 &= \frac{y}{4} - \frac{19}{4} + 4 \\ (x+2)^2 &= \frac{1}{4}(y-3)\end{aligned}$$

De esta ecuación, las coordenadas del vértice de la parábola son $V(-2,3)$; se sabe que $a = 4$. Cuando $a > 0$, la parábola $y = 4x^2 + 16x + 19$ se abre hacia arriba, siendo su vértice un punto mínimo.

La función cuadrática $4x^2 + 16x + 19$, tiene un valor mínimo igual a 3, cuando $x = -2$.

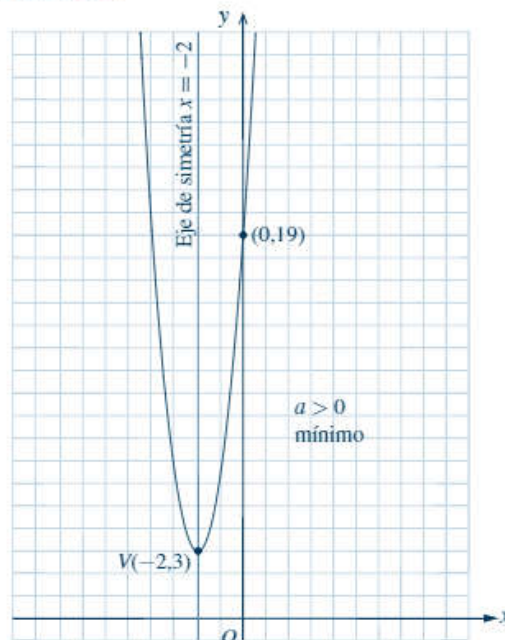
Para determinar los valores de x para los cuales la función es positiva, sólo es necesario encontrar los valores de x para los cuales la desigualdad $4x^2 + 16x + 19 > 0$ es verdadera. Es decir:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	3	7	19	39	67	103

La desigualdad es verdadera para todos los valores de x comprendidos en el intervalo $-3 < x < 3$.

Para determinar los valores de x para los cuales la función es negativa, sólo es necesario hallar los valores de x para los cuales la desigualdad $4x^2 + 16x + 19 < 0$ es verdadera.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



EJERCICIO 23

- I. Demuestra que cada una de las siguientes ecuaciones dadas representa una parábola y determina las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje de simetría, la longitud de su lado recto; traza la gráfica correspondiente.

1. $4x^2 + 12x + 48y - 159 = 0$

2. $9y^2 + 72x + 24y + 16 = 0$

3. $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$

4. $y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$

5. $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$

6. $3x^2 - 4x - 6y + 8 = 0$

7. $3y^2 - 24x - 60y + 388 = 0$

8. $x^2 + 4y = 7$

9. $y^2 - 6y - 8x = 23$

10. $x^2 + 2x + 6y = -4$

11. $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

12. $y^2 - 8x - 4y + 28 = 0$

13. $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$

14. $y^2 + 20x = 40$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

- II. Determina la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje coordenado x y que pasa por los tres puntos dados.

1. $L(3,1)$, $M(8,4)$ y $N(0,0)$

2. $L(3,3)$, $M(6,5)$ y $N(6,-3)$

3. $L(-1,3)$, $M(1,2)$ y $N(-2,1)$

4. $L\left(-\frac{2}{3}, -2\right)$, $M\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ y $N(2,2)$

5. $L\left(\frac{15}{2}, -4\right)$, $M\left(\frac{5}{3}, 1\right)$ y $N\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

6. $L(2,3)$, $M(6,-1)$ y $N(3,5)$

- III. Determina la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje coordenado y y que pasa por los tres puntos dados.

1. $L(-4,21)$, $M(-2,11)$ y $N(4,5)$

2. $L(0,5)$, $M(4,5)$ y $N(6,11)$

3. $L(0,0)$, $M(1,0)$ y $N(3,6)$

4. $L(1,-1)$, $M(2,1)$ y $N(3,11)$

5. $L(-3,-6)$, $M(0,6)$ y $N(1,2)$

6. $L(0,-3)$, $M(2,3)$ y $N(4,5)$

- IV. Determina el máximo o mínimo de la función cuadrática dada y los valores de x para los cuales esta función es positiva, negativa y cero; traza la gráfica correspondiente.

1. $4x^2 + 11x - 3$

2. $4x^2 + 53 - 7x$

3. $2x^2 - 8x + 8$

4. $12x - x^2 - 37$

5. $8x - x^2 - 16$

6. $24x - 3x^2 - 47$

7. $x^2 - 5x + 4$

8. $x^2 - 6x + 9$

9. $12 + 2x - 2x^2$

10. $x^2 - 2x - 1$

11. $4x - 2x^2 - 5$

12. $x^2 + 14x + 19$

13. $x^2 + 40x - 100$

14. $2x^2 - 10x + 8$

15. $x^2 + 2x - 11$

- V. Resuelve los siguientes problemas.

1. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice es $V(4,-1)$ con eje de simetría en la recta $y = -1$ y pasa por el punto $M(3,-3)$.

2. Determina la longitud de radio vector del punto de la parábola $y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$, cuya ordenada es 3.

3. Determina la ecuación de la parábola de eje paralelo y , que pasa por los tres puntos dados; emplea la segunda ecuación ordinaria de la parábola y comprueba el resultado por la ecuación de la parábola en su forma general.

a) $L(3,5)$, $M(1,3)$ y $N(-2,15)$.

c) $L(-2,6)$, $M(1,-5)$ y $N(2,-2)$.

b) $L(2,3)$, $M(0,2)$ y $N(4,12)$.

4. Determina la ecuación de la parábola de eje paralelo al eje x que pasa por los tres puntos dados; emplea la segunda ecuación ordinaria de la parábola y comprueba el resultado para la ecuación de la parábola en su forma general.
 - a) $L(0,4)$, $M(4,0)$ y $N(12,-2)$
 - b) $L(-4,0)$, $M(-1,3)$ y $N(0,2)$
 - c) $L(-6,-2)$, $M(-2,0)$ y $N(6,2)$
5. Demuestra que las siguientes ecuaciones representan una parábola, determina sus elementos y traza la gráfica correspondiente.
 - a) $y^2 - 4y - 6x - 10 = 0$
 - b) $x^2 - 8x - 4y = -8$
 - c) $2x^2 - 10x - 3y + 8 = 0$
 - d) $y^2 - 3x - 8y + 22 = 0$
 - e) $x^2 + 2x - 4y - 11 = 0$
 - f) $4y^2 - 12x - 12y + 33 = 0$
6. Determina la expresión para la familia de funciones cuadráticas de x que tengan las siguientes características:
 - a) $y_{\min} = 5$ para $x = 3$
 - b) $y_{\max} = 4$ para $x = -2$



Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Ecuaciones de la tangente y la normal a una parábola

Dado que la ecuación de una parábola es de segundo grado, la recta tangente a dicha curva se determina por la condición de tangencia empleada en la circunferencia. Se consideran los siguientes casos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Determina la ecuación de la tangente a una parábola en un punto dado de tangencia. Es decir:

- a) Encuentra la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de dicha curva.

Solución

La ecuación de la familia de rectas tangentes que pasan por el punto dado es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

m representa la pendiente de la recta tangente que se busca. Al despejar y , se tiene:

$$y = y_1 + mx - mx_1$$

Al sustituir esta igualdad en la ecuación de la parábola, resulta:

$$\begin{aligned} y^2 &= 4px \\ (y_1 + mx - mx_1)^2 &= 4px \\ y_1^2 + m^2x^2 + m^2x_1^2 + 2mxy_1 - 2mx_1y_1 - 2m^2x_1 &= 4px \\ m^2x^2 + 2mxy_1 - 2m^2xx_1 - 4px + y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 &= 0 \\ m^2x^2 + (2my_1 - 2m^2x_1 - 4p)x + (y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación está escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, la condición de tangencia, es $b^2 - 4ac = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} (2my_1 - 2m^2x_1 - 4p)^2 - 4m^2(y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) &= 0 \\ \cancel{4m^2y_1^2} + \cancel{4m^4x_1^2} + 16p^2 - \cancel{8m^3x_1y_1} - 16mpy_1 + 16m^2px_1 - \cancel{4m^2y_1^2} - \cancel{4m^4x_1^2} + \cancel{8m^3x_1y_1} &= 0 \\ \frac{16m^2px_1}{16p} - \frac{16mpy_1}{16p} + \frac{16p^2}{16p} &= 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Dividiendo entre } 16p, \\ \text{la ecuación se reduce a:} \end{array} \right\} \\ x_1m^2 - y_1m + p &= 0 \end{aligned}$$

Al aplicar la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, se tiene:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4x_1p}}{2x_1}$$

Como el punto dado $P_1(x_1, y_1)$ pertenece a la parábola $y^2 = 4px$, sus coordenadas satisfacen dicha ecuación, es decir:

$$y_1^2 = 4px_1$$

$$y_1^2 - 4x_1p = 0$$

Al sustituir esta igualdad en la ecuación de la fórmula general, resulta:

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4x_1p}}{2x_1} = \frac{y_1 \pm \sqrt{0}}{2x_1}$$

$$m = \frac{y_1}{2x_1}$$

Al sustituir la pendiente $\left(m = \frac{y_1}{2x_1}\right)$ en la ecuación de la tangente que se busca, se tiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_1}{2x_1}(x - x_1)$$

$$2x_1y - 2x_1y_1 = xy_1 - x_1y_1$$

$$2x_1y = xy_1 - x_1y_1 + 2x_1y_1$$

$$2x_1y = xy_1 + x_1y_1$$

$$2x_1y = y_1(x + x_1)$$

Si la ecuación $y_1^2 = 4px_1$ se factoriza, resulta:

$$y_1^2 = 2p2x_1$$

$$2x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$$

Al sustituir esta igualdad en la última ecuación de la tangente, se tiene:

$$2x_1y = y_1(x + x_1)$$

$$\left(\frac{y_1^2}{2p}\right)y = y_1(x + x_1)$$

$$\frac{y_1^2y}{2p} = y_1(x + x_1)$$

$$y_1^2y = 2py_1(x + x_1)$$

$$\cancel{y_1^2}y = 2p(x + x_1)$$

$$y_1y = 2p(x + x_1)$$

La ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva es $y_1y = 2p(x + x_1)$.

- b) Encuentra la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 = 4py$ en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de dicha curva.

Solución

Por un proceso semejante al anterior, se tiene que:

La ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 = 4py$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva es $x_1x = 2p(y + y_1)$.

- 2 ••• Determina la ecuación de la tangente a una parábola dada, conocida su pendiente.

- a) Encuentra la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ que tiene por pendiente m .

Solución

La ecuación de la familia de rectas tangentes que tienen la pendiente m en común, es:

$$y = mx + k$$

El parámetro k representa el segmento que la recta determina sobre el eje y , cuyo valor se debe obtener.

Al sustituir la igualdad $y = mx + k$ en la ecuación de la parábola, resulta:

$$\begin{aligned} y^2 &= 4px \\ (mx + k)^2 &= 4px \\ m^2x^2 + 2mkx + k^2 &= 4px \\ m^2x^2 + 2mkx - 4px + k^2 &= 0 \\ m^2x^2 + (2mk - 4p)x + k^2 &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación está escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, la condición de tangencia es $b^2 - 4ac = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} (2mk - 4p)^2 - 4m^2k^2 &= 0 \\ \cancel{4m^2k^2} - 16mkp + 16p^2 - \cancel{4m^2k^2} &= 0 \\ -16mkp &= -16p^2 \\ k &= \frac{-16p^2}{-16mp} = \frac{p}{m} \end{aligned}$$

Al sustituir esta igualdad en la ecuación de la familia de rectas tangentes que tienen la pendiente m en común, resulta:

$$\begin{aligned} y &= mx + k \\ y &= mx + \frac{p}{m} \end{aligned} \quad \text{Donde } m \neq 0$$

La ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$, conocida su pendiente m , es:

$$y = mx + \frac{p}{m}, \text{ cuando } m \neq 0.$$

- b) Encuentra la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 = 4py$ que tiene por pendiente m .

Solución

Por un proceso semejante al anterior, se tiene que:

La ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 = 4py$, conocida su pendiente m , es:
 $y = mx - m^2p$, cuando $m \neq 0$.

3 ••• Determina la ecuación de la tangente a una parábola dada que pasa por un punto exterior dado.

 Encuentra las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $M(-4,2)$ a la parábola $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$.

Solución

 La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto dado $M(-4,2)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = m(x + 4)$$

 Donde el parámetro m es la pendiente de la tangente que se busca. Al despejar respecto a y y sustituir en la ecuación de la parábola dada, se tiene:

$$y = 2 + mx + 4m$$

$$y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$$

$$(2 + mx + 4m)^2 - 4x - 6(2 + mx + 4m) + 17 = 0$$

$$4 + m^2x^2 + 16m^2 + 4mx + 16m + 8m^2x - 4x - 12 - 6mx - 24m + 17 = 0$$

$$m^2x^2 + 8m^2x - 2mx - 4x + 16m^2 - 8m + 9 = 0$$

$$m^2x^2 + (8m^2 - 2m - 4)x + (16m^2 - 8m + 9) = 0$$

 Esta última ecuación está escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, la condición de tangencia es $b^2 - 4ac = 0$, es decir:

$$(8m^2 - 2m - 4)^2 - 4m^2(16m^2 - 8m + 9) = 0$$

$$\cancel{64m^4} + 4m^2 + 16 - \cancel{32m^3} - 64m^2 + 16m - \cancel{64m^4} + \cancel{32m^3} - 36m^2 = 0$$

$$-96m^2 + 16m + 16 = 0$$

$$6m^2 - m - 1 = 0$$

$$(3m + 1)(2m - 1) = 0$$

$$3m + 1 = 0$$

$$3m = -1$$

$$m_1 = -\frac{1}{3}$$

$$2m - 1 = 0$$

$$2m = 1$$

$$m_2 = \frac{1}{2}$$

Al sustituir los valores encontrados, en la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto dado, resulta:

Para $m = -\frac{1}{3}$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 4)$$

$$3y - 6 = -x - 4$$

$$x + 3y - 2 = 0$$

Para $m = \frac{1}{2}$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 4)$$

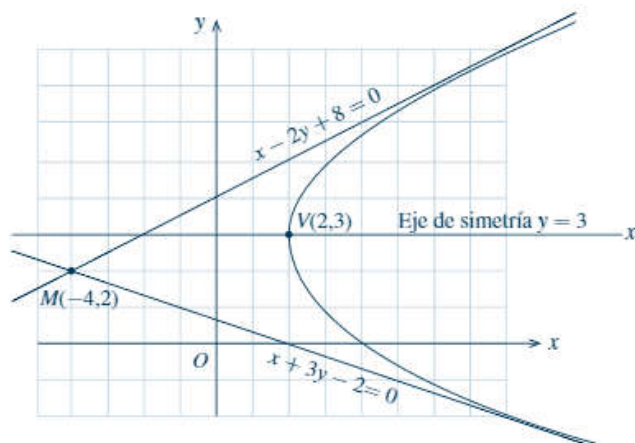
$$2y - 4 = x + 4$$

$$x - 2y + 8 = 0$$

 Las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $M(-4,2)$ a la parábola

$$y^2 - 4x - 6y + 17 = 0, \text{ son } x + 3y - 2 = 0 \quad y \quad x - 2y + 8 = 0.$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



Diámetro de la parábola

El lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas a una cónica cualquiera, se denomina **diámetro** de la cónica especificada.

Sea m la pendiente de las cuerdas paralelas, la ecuación del diámetro determinado por los puntos medios de ellas es:

$$\text{Parábola: } y^2 = 4px$$

$$\text{Diámetro: } y = \frac{2p}{m}$$

$$\text{Parábola: } x^2 = 4py$$

$$\text{Diámetro: } x = \frac{2p}{m}$$

Para la ecuación general de la parábola $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, la ecuación del diámetro es, respectivamente, de la siguiente forma:

$$\frac{D}{2} + m\left(Cy + \frac{E}{2}\right) = 0 \qquad \left(Ax + \frac{D}{2}\right) + m\left(\frac{E}{2}\right) = 0$$

EJEMPLOS

1. Determina la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 16x$ que pasa por los puntos medios de las cuerdas paralelas a la recta $2x - 3y - 5 = 0$.

Solución

La pendiente de la recta dada y la pendiente de las cuerdas, son iguales, ya que dichas rectas son paralelas:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3} \qquad m_c = \frac{2}{3}$$

La ecuación canónica o primera forma ordinaria de la parábola, es para este caso, $y^2 = 4px$. Al sustituir en la ecuación de la parábola dada, se tiene:

$$\begin{aligned} 4px &= 16x \\ p &= \frac{16x}{4x} = 4 \end{aligned}$$

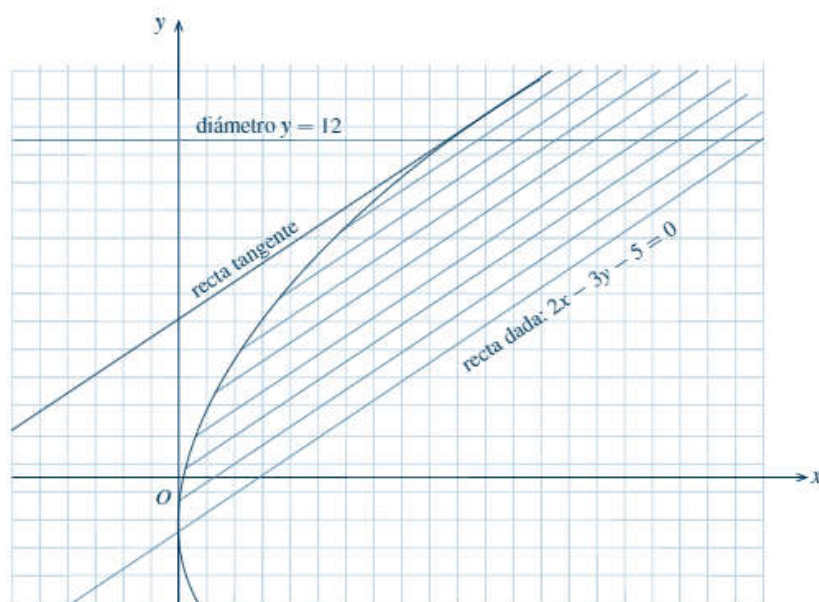
Al aplicar la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 4px$, para los valores calculados de m y p , resulta:

$$y = \frac{2p}{m} = \frac{2(4)}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{\frac{2}{3}} = \frac{24}{2} = 12$$

La ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 16x$ definido por las cuerdas paralelas a la recta $2x - 3y - 5 = 0$.

Gráficamente, se tiene:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	±4	±5.65	±6.92	±8	±8.94	±9.79	±10.58	±11.31	±12	±12.64	±13.26	±13.85



- 2 ••• Determina la ecuación del diámetro de la parábola $x^2 - 6x - 16y + 73 = 0$, definido por las cuerdas de pendiente $-\frac{1}{4}$.

Solución

Como la ecuación de la parábola dada es de la forma general $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, la ecuación del diámetro de la parábola por aplicar es de la forma:

$$\left(Ax + \frac{D}{2}\right) + m\left(\frac{E}{2}\right) = 0$$

Al sustituir los datos correspondientes, se tiene:

$$x + \left(-\frac{6}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{16}{2}\right) = 0$$

$$(x-3) + \left(-\frac{1}{4}\right)(-8) = 0$$

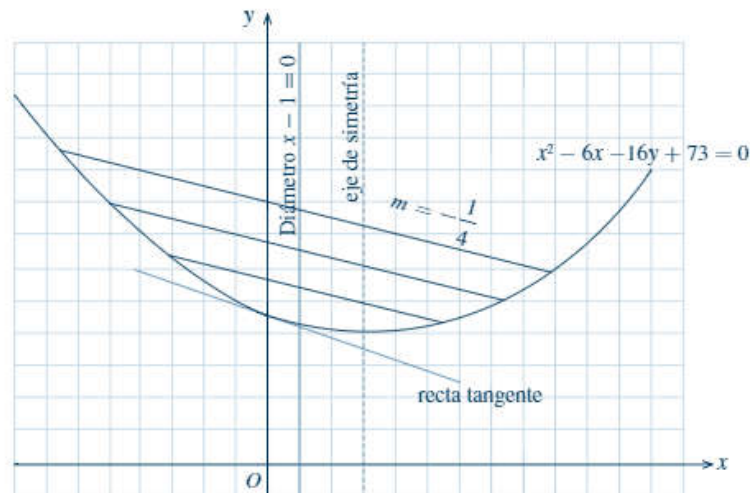
$$(x-3) + \frac{8}{4} = 0$$

$$x-3+2=0$$

$$x-1=0$$

La ecuación del diámetro de la parábola $x^2 - 6x - 16y + 73 = 0$ es $x - 1 = 0$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



EJERCICIO 24

- I. Determina las ecuaciones de la tangente y la normal; las longitudes de la tangente, normal subtangente y subnormal, para la parábola y el punto de contacto dados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

- $x^2 = 8y$; $M(4,2)$
- $y^2 - 4x = 0$; $M(1,2)$
- $x^2 = -12y$; $M(6,-3)$
- $y^2 = -20x$; $M(-5,-10)$
- $y^2 + 8x - 2y = 0$; $M(0,0)$
- $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$; $M(-6,3)$
- $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$; $M\left(0, \frac{2}{3}\right)$
- $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$; $M(7,6)$
- $y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$; $M(1,3)$
- $x^2 + 12y + 3x - 40 = 0$; $M(-4,3)$

- II Resuelve los siguientes problemas.

- Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 2y + 2x + 3 = 0$ que es perpendicular a la recta $x + 2y + 7 = 0$.
- Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta $3x + 9y - 16 = 0$.
- Determina las ecuaciones de la recta tangente a la parábola $y^2 = -8x$, cuya pendiente es -3 .
- Determina las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $x^2 = 5y$ en el punto de abscisa 3.
- La parábola $y^2 = 4px$ pasa por el punto $M(-8,4)$; determina la ecuación de su tangente paralela a la recta $3x + 2y - 6 = 0$.
- Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 = -2y$ que sea paralela a la recta $x - 2y - 4 = 0$.

7. De la ecuación de la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, determina los valores de k para los cuales la familia de rectas $x + 2y + k = 0$:
 - a) Cortan a la parábola en dos puntos diferentes.
 - b) Son tangentes a la parábola dada.
 - c) No intersecan a la parábola.
8. Determina el ángulo agudo de intersección de la parábola $y^2 = 2x$, y la recta $x - y = 4$, en cada uno de sus puntos de intersección.
9. Determina el ángulo agudo de intersección de la parábola $x^2 - 4y - 4 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 25 = 0$, en cualquiera de sus intersecciones.
10. Demuestra que las parábolas $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ y $x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$ son ortogonales entre sí en cada punto de intersección.
11. Determina la ecuación del diámetro de la parábola $x^2 = 16x$ para un sistema de cuerdas paralelas de pendiente 2.
12. Determina la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 8x$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendiente $\frac{2}{3}$.
13. Determina la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$ correspondiente a las cuerdas de pendiente -2 .
14. Determina la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 + 8x - 2y - 15 = 0$ correspondiente a las cuerdas de pendiente 2.
15. Determina la ecuación del diámetro de la parábola $x^2 - 2x - y + 1 = 0$ correspondiente a las cuerdas de pendiente 1.
16. Determina la ecuación del diámetro de la parábola $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$ correspondiente a las cuerdas de pendiente $\frac{1}{4}$.
- III. Determina las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto indicado a la parábola dada; encuentra el ángulo agudo formado por dichas rectas.

1. $M(-3,3)$ a $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$	4. $M(2,-4)$ a $x^2 = 2y$
2. $M(1,4)$ a $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$	5. $M(-1,-3)$ a $x^2 + 8x - 2y + 10 = 0$
3. $M(-1,-1)$ a $y^2 - x + 4y + 6 = 0$	6. $M(-4,-1)$ a $x^2 + 6x - 12y + 57 = 0$

➡ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

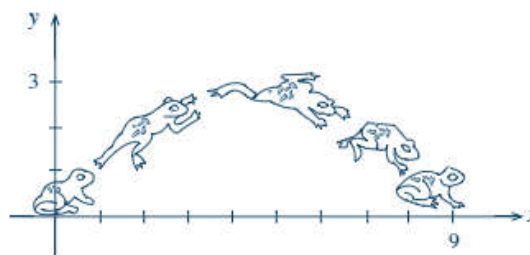
• PROBLEMAS DE APLICACIÓN

- 1 ●● Un reflector está diseñado de manera que la sección transversal que pasa por su eje es una parábola con foco en la fuente de luz. Si el reflector mide 3 metros en la abertura y 1 metro de profundidad, determina a qué distancia del vértice se encuentra la fuente de luz.
- 2 ●● Los animales, describen trayectorias parabólicas al bricar. La siguiente figura muestra el salto de una rana superpuesta a un sistema coordenado rectangular. La longitud del salto es de 9 metros y la altura máxima es de 3 metros. Determina la ecuación que describa la trayectoria de un salto de la rana.

Escribe los números correspondientes

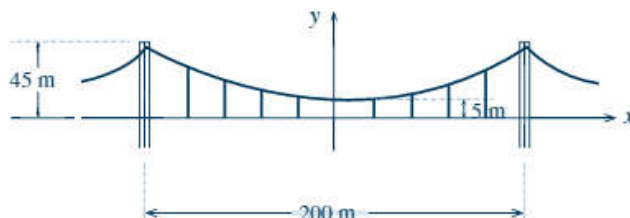
Competencias genéricas

Competencias disciplinares



- 3 ●● El peso de un tramo de puente colgante está distribuido uniformemente entre dos torres gemelas colocadas a una distancia de 200 m una de la otra y cuya altura es de 45 m sobre el viaducto horizontal. El cable que pende entre los extremos de dos torres tiene la forma de una parábola y un punto central más bajo está a una altura de 5 m sobre el camino. Supón que se introducen ejes coordenados como se muestra en el dibujo.

- Determina la ecuación de la parábola.
- Para soportar el puente se emplean nueve cables verticales igualmente espaciados fijos al parabólico, determina la longitud total de dichos soportes.

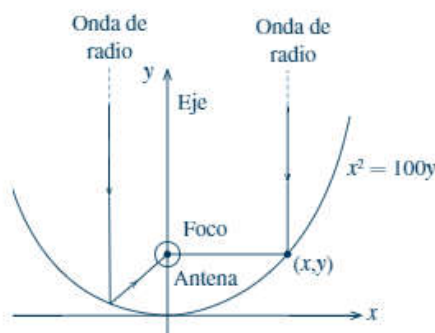


- 4 ●● Un cohete sigue una trayectoria dada por la función cuadrática $y = 2.4x - 0.02x^2$, donde x es la distancia horizontal en metros y y es la distancia vertical en metros. Traza la gráfica de la trayectoria mostrando la altura máxima que alcanza el cohete y los puntos donde $y = 0$.
- 5 ●● El alternador de un automóvil genera potencia a 28 volts y tiene una resistencia interna de 0.40Ω (ohms). La potencia de salida está dada por la ecuación cuadrática $P = 28I - 0.40I^2$, donde I es la intensidad de corriente.

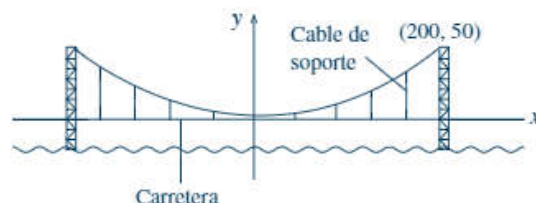
- ¿A qué intensidad de corriente genera la potencia máxima el alternador y cuál es ésta?
- Determina los puntos donde $P = 0$ y traza la gráfica de P contra I entre esos puntos.

- 6 ●● El reflector de un radio telescopio tiene forma parabólica, de manera que todas las ondas de radio provenientes del espacio que entren paralelas a su eje sean reflejadas a la antena en su foco. Si la sección eficaz del reflector está dada por la ecuación $x^2 = 100y$, donde x y y están en metros;

- Determina la altura de la antena en el foco.
- Determina las coordenadas del punto (x,y) mostrado en el dibujo, en el que las ondas de radio se reflejan en ángulos rectos hacia el eje de la parábola (sugerencia, determina la distancia a la directriz).

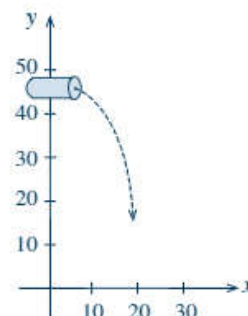


- 7 ●● Un puente colgante está sostenido por 16 cables de soporte que penden de dos cables con forma de parábola y están colgados a dos torres de 50 m de altura separadas por una distancia de 400 m. Si los cables tocan el punto medio de la carretera entre los puntos, encuentra:



- Una ecuación para la parábola que forma cada cable.
- La longitud total de los 16 cables de soporte.

- 8 ●● El extremo de una manguera está situado sobre un muro vertical de 48 metros de altura sobre el piso y éste arroja agua a una velocidad de 10 m/s en dirección vertical. El chorro de agua sigue una trayectoria parabólica, cuyo vértice se encuentra en el extremo de la manguera.



- ¿A qué distancia del muro sobre el piso cae el chorro?
- ¿Cuál es la ecuación de la parábola?

Sugerencia: usa las ecuaciones de movimiento de un cuerpo en caída libre que describen la trayectoria de un punto de coordenadas (x,y) que cae libremente.

- 9 ●● Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba a una velocidad de 30 m/s, su trayectoria está dada aproximadamente por la ecuación cuadrática $5 = 30t - 16t^2$, donde S es la altura en metros, sobre el piso en el instante t . ¿En qué instante golpeará la pelota el piso?

Sugerencia: escribe esta ecuación en la forma ordinaria donde las coordenadas de un punto sobre la curva parabólica son (t,s) .

- 10 ●● Determina la altura de un punto de un arco parabólico de 24 m de altura y 36 m de base, situado a una distancia de 12 m del centro del arco.
- 11 ●● La trayectoria descrita por un proyectil lanzado horizontalmente, desde un punto situado a y metros sobre el suelo, con una velocidad v m/s, es una parábola de ecuación $x^2 = -\frac{2v^2(h-y)}{5}$, donde x es la distancia horizontal desde el lugar de lanzamiento y $g = 9.81$ m/s² aproximadamente. El origen se toma como el punto de salida del proyectil del arma. Bajo estas condiciones se lanza horizontalmente una piedra desde un punto situado a 6 metros de altura sobre el suelo; si la velocidad inicial es de 100 m/s determina la distancia horizontal al punto de caída.
- 12 ●● Un avión que vuela hacia el norte a una altura de 2 000 m y a una velocidad de 250 km/h deja caer una bomba; determina la distancia horizontal del punto de caída a la vertical del punto de lanzamiento.
- 13 ●● Un arco parabólico tiene una altura de 37.5 m y una luz de 70 m, determina la altura de los puntos del arco situados 12 m a ambos lados de su centro.
- 14 ●● Se tira una piedra horizontalmente desde la cima de una torre de 200 m de altura con una velocidad de 20 m/s determina la distancia del punto de caída al pie del torre suponiendo que el suelo es horizontal.
- 15 ●● El cable de una suspensión para un puente colgante adquiere la forma de un arco parabólico. Los pilares que los soportan tienen una altura de 80 m y están separados una distancia de 600 m, quedando el punto más bajo del cable a una altura de 15 m sobre la calzada del puente. Tomando como eje x la horizontal que define el puente y como eje y el de simetría de la parábola; determina la ecuación de la parábola y calcula la altura de un punto situado a 100 m del centro del puente.

Determinación de la ecuación de la elipse y su gráfica

Definición

La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de dicho plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos fijos.

Los dos puntos fijos se denominan **focos** de la elipse.

Elementos de una elipse

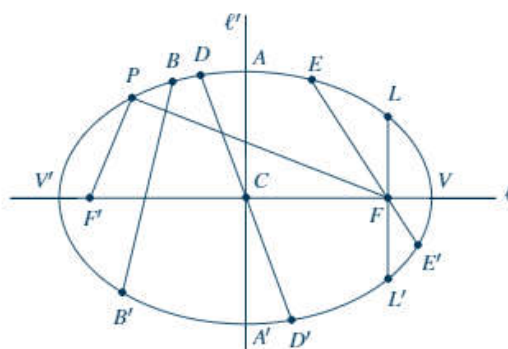


Figura 3.26

Sean F y F' los focos de una elipse; la recta ℓ que pasa por los focos se denomina **eje focal**, el cual interseca a la elipse en los puntos V y V' , denominados **vértices de la elipse**; la porción del eje focal comprendida entre los vértices, es decir, el segmento $\overline{VV'}$ se denomina **eje mayor**; el punto C que está sobre el eje focal, es el punto medio del segmento que une los focos, se denomina **centro de la elipse**. La recta ℓ' que pasa por el centro de la elipse (C) y que es perpendicular al eje focal (ℓ) se denomina **eje normal**, el cual interseca a la elipse en los puntos A y A' , el segmento $\overline{AA'}$, se denomina **eje menor**.

Al segmento $\overline{BB'}$, que une dos puntos distintos cualesquiera de la elipse, se le denomina **cuerda**; particularmente si una cuerda pasa por uno de los focos, tal como $\overline{EE'}$, se denomina **cuerda focal**; una cuerda focal, tal como el segmento $\overline{LL'}$ que es perpendicular al eje focal (ℓ) se denomina **lado recto**; una cuerda que pasa por el centro de la elipse (C), tal como el segmento $\overline{DD'}$, se denomina **diámetro de la elipse**. Si P es un punto cualquiera de la elipse, los segmentos $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ que une los focos con el punto P se denominan **radios vectores de P** (Figura 3.26).

Ecuación de la elipse de centro en el origen y ejes de coordenadas de los ejes de la elipse

Si consideramos la elipse de centro en el origen, cuyo eje focal coincide con el eje x (Figura 3.27):

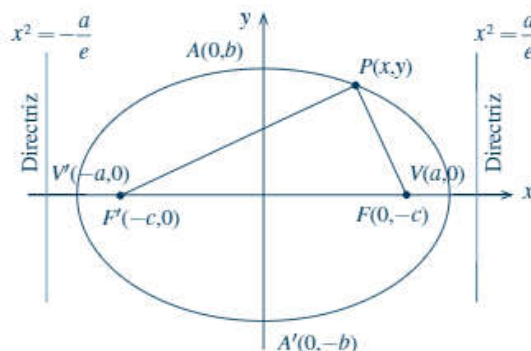


Figura 3.27

Como los focos F y F' están sobre el eje x y el centro O es el punto medio del segmento $\overline{FF'}$, por lo que las coordenadas de los focos son $F(c,0)$ y $F'(c,0)$; donde c es una constante positiva.

Si $P(x,y)$ es un punto de la elipse, por definición dicho punto debe satisfacer la condición geométrica de $|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a$, donde a es una constante positiva mayor que la constante c .

Por la ecuación de distancia entre dos puntos, resulta:

$$\begin{aligned} |\overline{FP}| &= \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ |\overline{F'P}| &= \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Por la condición geométrica, se tiene:

$$\begin{aligned} |\overline{FP}| + |\overline{F'P}| &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \end{aligned}$$

Si el segundo radical se pasa al segundo miembro de la ecuación y se eleva al cuadrado la expresión, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\ (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 - 2cx - c^2 - y^2 &= -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ -4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ cx + a^2 &= a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado nuevamente toda la expresión, resulta:

$$\begin{aligned} (cx + a^2)^2 &= \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\ c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 &= a^2[(x+c)^2 + y^2] \\ c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) \\ c^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^4 &= a^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 \\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \quad \} \quad (1) \end{aligned}$$

Como $2a > 2c$, es decir, $a^2 > c^2$, por lo que el resultado de $a^2 - c^2$ es un número positivo que se representa por b^2 , estableciéndose que:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Al sustituir la igualdad anterior en la ecuación (1), se tiene:

$$\begin{aligned} x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\ b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la elipse con centro} \\ \text{en el origen y cuyo eje focal} \\ \text{coincide con el eje } x \end{array}$$

Discutiendo la ecuación anterior y por su construcción gráfica, se deduce que las intersecciones con el eje x son $V(a,0)$ y $V'(-a,0)$, que son las coordenadas de los vértices de la elipse; por lo anterior, la longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud del semieje mayor (es) a .

Las intersecciones con el eje y son $A(0,b)$ y $A'(0,-b)$, que son las coordenadas de los extremos del eje menor de la elipse; por lo anterior, la longitud de dicho eje es $2b$ y la longitud del semieje menor es b .

Cabe mencionar que la curva es simétrica respecto a los ejes coordenados y al origen.

Despejando y de la ecuación de la elipse, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 & y^2 &= \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2} \\ b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 & y &= \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \\ a^2y^2 &= a^2b^2 - b^2x^2 \end{aligned}$$

Se obtienen valores reales de y , cuando a x se le asignan valores del siguiente intervalo:

$$-a \leq x \leq a$$

Al despejar x de la ecuación de la elipse, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 & x^2 &= \frac{a^2(b^2 - y^2)}{b^2} \\ b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 & x &= \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \\ b^2x^2 &= a^2b^2 - a^2y^2 \end{aligned}$$

Se obtienen valores reales de x , cuando a y se le asignan valores del siguiente intervalo:

$$-b \leq y \leq b$$

Por lo anterior, cabe mencionar que la elipse está limitada por el rectángulo que se forma con los lados de las rectas $x = \pm a$, $y = \pm b$, por lo que se establece que la elipse es una curva cerrada; por la misma razón; la curva no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

Como la abscisa del foco F es c , al sustituir x por c en la siguiente ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} y &= \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} \\ y &= \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} \end{aligned}$$

Por la relación $b^2 = a^2 - c^2$, resulta:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{b^2} = \pm \frac{b}{a}(b) = \pm \frac{b^2}{a}$$

La longitud del lado recto para el foco F es $\frac{2b^2}{a}$; de la misma manera,
la longitud del lado recto para el foco F' es $\frac{2b^2}{a}$.

La **excentricidad** de una elipse, se define como la razón de la semidistancia focal (c) al semieje mayor (a); se representa por la letra e y su ecuación es $e = \frac{c}{a}$. Por la relación $b^2 = a^2 - c^2$, resulta:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

Al sustituir en la ecuación de la excentricidad, resulta:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Dado que $c < a$, la excentricidad de una elipse es menor que la unidad ($e < 1$). Como la elipse tiene dos focos, también tendrá dos rectas directrices. Si el eje focal de la elipse es el eje coordenado x , se tiene que las ecuaciones de las directrices son:

$$x = \frac{a}{e} \quad \text{y} \quad x = -\frac{a}{e}$$

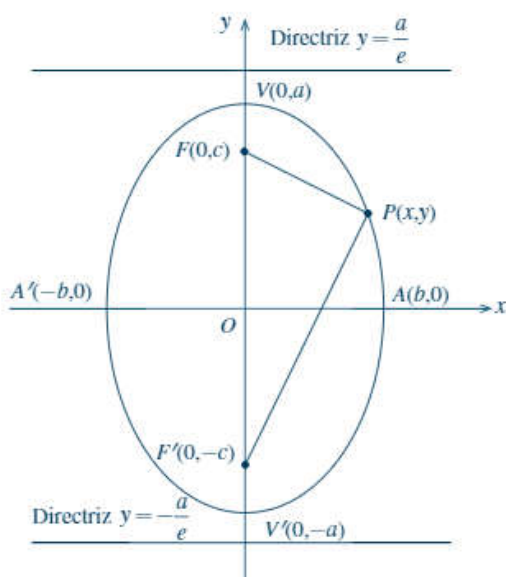


Figura 3.28

Al considerar la elipse con centro en el origen, cuyo eje focal coincide con el eje y (Figura 3.28), se observa que los focos F y F' están sobre el eje y y sea el centro de la elipse del punto medio del segmento FF' , por lo que las coordenadas de los focos son $F(0,c)$ y $F'(0,-c)$, donde c es una constante positiva.

Si $P(x,y)$ es un punto de la elipse, por la definición de la curva, p debe satisfacer la condición geométrica:

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a$$

Donde a es una constante positiva mayor que c .

Al aplicar el mismo procedimiento que condujo a determinar la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se encuentra que la ecuación de la elipse con centro en el origen, cuyo eje focal coincide con el eje y es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Discutiendo la ecuación anterior y por su construcción gráfica, las intersecciones con el eje y son $V(0,a)$ y $V'(0,-a)$, es decir la longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud del semieje mayor es a .

Las intersecciones con el eje x son $A(b,0)$ y $A'(-b,0)$, por lo que la longitud de dicho eje es $2b$ y la longitud del semieje menor es b .

La longitud del lado recto para el foco F es $\frac{2b^2}{a}$ y también para el foco F' es $\frac{2b^2}{a}$.

La excentricidad se determina por: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Al ser el eje focal de la elipse el eje coordenado y , que las ecuaciones de las directrices son:

$$y = \frac{a}{e} \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{e}$$

Las ecuaciones $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, se denominan **primera ecuación ordinaria de la elipse o de forma canónica**.

EJEMPLOS

1 ••• Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje x ; si uno de los focos es el punto $F(3,0)$ y la excentricidad es igual a $\frac{1}{2}$; determina las coordenadas del otro foco, las longitudes de los ejes mayor y menor, la ecuación de la elipse y la longitud de cada uno de sus lados rectos; traza la gráfica correspondiente.

Solución

Sean las coordenadas de los focos de la elipse $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$; como uno de los focos dados es $F(3,0)$, por tanto, $c = 3$. Así, las coordenadas del otro foco son $F'(-3,0)$.

Si la excentricidad de la elipse es $\frac{1}{2}$, por su ecuación, resulta:

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} & a(1) &= 2(3) \\ & & a &= 6 \\ \frac{1}{2} &= \frac{3}{a} \end{aligned}$$

Por la relación $b^2 = a^2 - c^2$, resulta:

$$\begin{aligned} b^2 &= (6)^2 - (3)^2 \\ b^2 &= 36 - 9 & b &= \sqrt{9(3)} \\ b^2 &= 27 & b &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

La longitud del semieje mayor es $a = 6$ y la del eje mayor es $2a = 12$; la longitud del semieje menor es $b = 3\sqrt{3}$ y la del eje menor es $2b = 6\sqrt{3}$.

Las coordenadas de los vértices de la elipse son:

$$\left. \begin{array}{ll} V(a,0) & \text{y} & V'(-a,0) \\ V(6,0) & & V'(-6,0) \end{array} \right\} \text{Coordenadas de los extremos del eje mayor.}$$

Las coordenadas de los extremos del eje menor de la elipse son:

$$\left. \begin{array}{ll} A(0,b) & \text{y} & A'(0,-b) \\ A(0,3\sqrt{3}) & & A'(0,-3\sqrt{3}) \end{array} \right\}$$

La ecuación de la elipse es:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} &= 1 \\ \frac{27x^2 + 36y^2}{972} &= 1 \\ 27x^2 + 36y^2 &= 972 \quad \text{o} \quad 3x^2 + 4y^2 = 108 \end{aligned}$$

La longitud de cada lado recto es:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$LR = \frac{2(27)}{6} = \frac{54}{6}$$

$$LR = 9$$

Las ecuaciones de las directrices son:

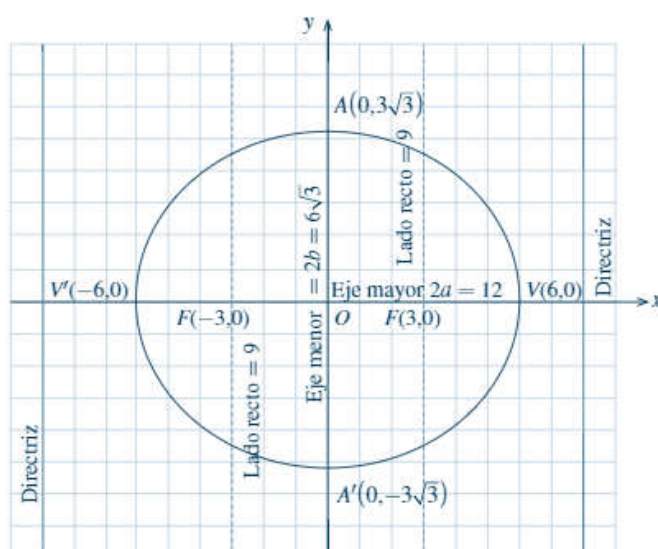
$$x = \pm \frac{a}{e}$$

$$x = \pm \frac{6}{\frac{1}{2}} = \pm 12$$

Despejando x de la ecuación de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 108$; gráficamente se tiene:

$$x = \pm \sqrt{\frac{108 - 4y^2}{3}}$$

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y	±6	±5.88	±5.53	±4.89	±3.82	±1.63



- 2 •• Determina las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad, la longitud de cada uno de sus lados rectos para la elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$; traza la gráfica correspondiente.

Solución

Si la ecuación de la elipse dada, se divide entre 400, se tiene:

$$\frac{25x^2}{400} + \frac{16y^2}{400} = \frac{400}{400}$$

$$\left. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \right\} \text{ Esta ecuación es de la forma } \left\{ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \right.$$

De la ecuación resultante se hace notar que el denominador de mayor valor, siempre está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse; por lo tanto, el eje focal es el eje coordenado y .

De la ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, se tiene:

$$a^2 = 25$$

$$a = 5$$

$$b^2 = 16$$

$$b = 4$$

Por la relación $b^2 = a^2 - c^2$, resulta:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 25 - 16$$

$$c^2 = 9$$

$$c = 3$$

Las coordenadas de los focos son:

$$F(0, c)$$

$$F(0, 3)$$

$$F'(0, -c)$$

$$F'(0, -3)$$

Las coordenadas de los vértices de la elipse son:

$$V(0, a)$$

y

$$V'(0, -a)$$

$$V(0, 5)$$

y

$$V'(0, -5)$$

} Coordenadas de los extremos del eje mayor.

Las coordenadas de los extremos del eje menor de la elipse son:

$$A(b, 0)$$

y

$$A'(-b, 0)$$

$$A(4, 0)$$

y

$$A'(-4, 0)$$

La longitud del semieje mayor es $a = 5$ y la del eje mayor es $2a = 10$; la longitud del semieje menor es $b = 4$ y la del eje menor es $2b = 8$.

La excentricidad de la elipse es: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6$ ($e < 1$)

La longitud de cada lado recto es: $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{5} = \frac{32}{5} = 6.4$

Las ecuaciones de las directrices son:

$$y = \pm \frac{a}{e}$$

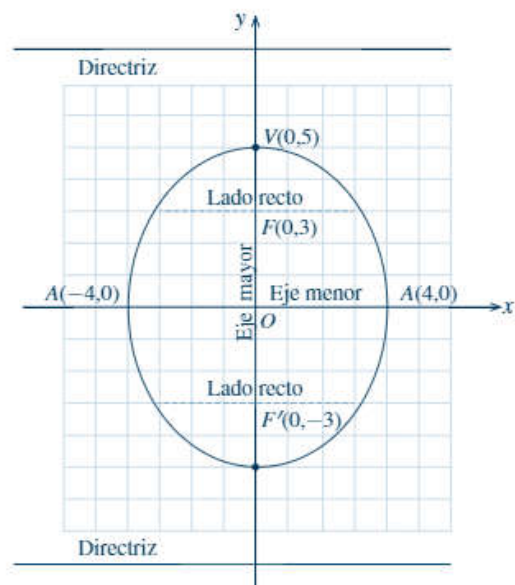
$$y = \pm \frac{5}{\frac{3}{5}} = \frac{25}{3} = 8.333$$

Se genera una tabla de valores a partir de la ecuación de la elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$.

$$y = \pm \frac{\sqrt{400 - 25x^2}}{4}$$

x	y
0	±5
±1	±4.84
±2	±4.33
±3	±3.30
±4	0

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



Ecuación de la elipse con centro fuera del origen y eje focal paralelo a uno de los ejes coordenados

Normalmente se requiere determinar la ecuación de una elipse con centro fuera del origen coordenado y cuyo eje focal es paralelo a uno de los ejes del sistema coordenado.

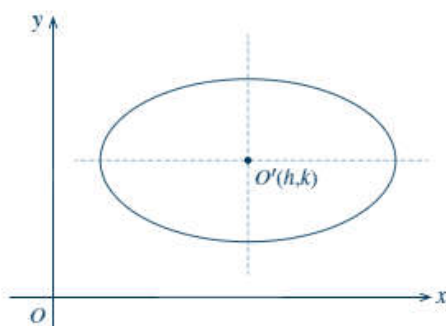


Figura 3.30

Considerando la elipse de la figura 3.30, su centro es el punto $O'(h,k)$ cuyo eje focal es paralelo al eje de las x ; donde $2a$ y $2b$ son las longitudes de los ejes mayor y menor.

Si transportamos los ejes del sistema coordenado, haciendo que el nuevo origen (O') coincida con el centro de la elipse (h,k), se establece la ecuación de la elipse con relación a los nuevos ejes coordenados x' y y' , es decir:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Aplicar el siguiente principio: Si los ejes coordenados de un sistema se transportan a un nuevo origen $O'(h,k)$; las coordenadas de un punto cualquiera P son (x,y) y (x',y') antes y después de la transportación de ejes, respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema coordenado son: $(x = x' + h)$ y $(y = y' + k)$.

Al despejar para x' y y' , se tiene:

$$\begin{aligned} x &= x' + h & y &= y' + k \\ x' &= x - h & y' &= y - k \end{aligned}$$

Sustituyendo las igualdades anteriores en la ecuación de la elipse (2), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Segunda ecuación} \\ \text{ordinaria de la elipse.} \end{array}$$

Las coordenadas de los focos para la elipse con centro en el origen son $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$; para la elipse con centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje x son:

$$F(h+c,k) \text{ y } F'(h-c,k)$$

Las coordenadas de los vértices para la elipse con centro en el origen, son $V(a,0)$ y $V'(-a,0)$; para la elipse con centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje x son:

$$V(h+a,k) \text{ y } V'(h-a,k)$$

Las coordenadas de los extremos del eje menor para la elipse con centro en el origen son $A(0,b)$ y $A'(0,-b)$; para la elipse de centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje x , son $A(h,k+b)$ y $A'(h,k-b)$.

Considerando la elipse de la figura 3.31, su centro es el punto $O'(h,k)$ cuyo eje focal es paralelo al eje de las y ; donde $2a$ y $2b$ son las longitudes de sus ejes mayor y menor.

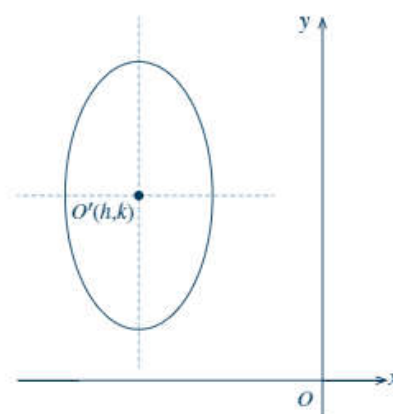


Figura 3.31

Si transportamos los ejes del sistema coordenado, haciendo que el nuevo origen (O) coincida con el centro de la elipse (h, k), establecemos que la ecuación de la elipse con relación a los nuevos ejes coordenados x' y y' es: $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$ (3)

Por el principio de la transportación de ejes coordenados, expresado anteriormente, tenemos que: ($x' = x - h$) y ($y' = y - k$).

Sustituyendo las igualdades anteriores en la ecuación de la elipse (3), tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} &= 1 \\ \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Segunda ecuación} \\ \text{ordinaria de la elipse.} \end{array}$$

Las coordenadas de los focos para la elipse de centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje y , son:

$$F(h, k + c) \text{ y } F'(h, k - c)$$

Las coordenadas de los vértices para dicha elipse, son: $V(h, k + a)$ y $V'(h, k - a)$; también las coordenadas de los extremos del eje menor para la misma elipse, son:

$$A(h + b, k) \text{ y } A'(h - b, k)$$

EJEMPLOS



- 1 •• Los vértices de una elipse son los puntos $V(9, -6)$ y $V'(1, -6)$, la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$; determina la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Solución

Dado que los vértices $V(9, -6)$ y $V'(1, -6)$ están sobre el eje focal y de acuerdo con sus coordenadas, se observa que tienen la misma ordenada -6 , por lo tanto, dicho eje es paralelo al eje x ; así, la ecuación de la elipse por aplicar tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

El centro de la elipse es el punto medio del segmento $\overline{VV'}$ (eje mayor de la elipse), sus coordenadas son:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$k = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$h = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2}$$

$$k = \frac{-6-6}{2} = \frac{-12}{2}$$

El centro es $O(5, -6)$.

$$h = 5$$

$$k = -6$$

Aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos se determina la longitud del eje mayor de la elipse, es decir:

$$d = \overline{VV'} = 2a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$2a = \sqrt{(9-1)^2 + (-6+6)^2}$$

$$2a = \sqrt{(8)^2 + (0)^2} = \sqrt{64}$$

$$2a = 8$$

La longitud del semieje mayor es: $2a = 8$

$$a = \frac{8}{2} = 4 \text{ y } a^2 = 16$$

Dado que la longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2}$ y $a = 4$, se tiene que:

$$\frac{2b^2}{4} = \frac{9}{2}$$

$$4b^2 = 36$$

$$b^2 = \frac{36}{4} = 9$$

$$b = 3 \quad \left. \vphantom{\frac{36}{4} = 9} \right\} \text{ Longitud del semieje menor.}$$

La longitud del eje menor es $2b = 6$.

Las coordenadas de los extremos del eje menor son:

$$A(h, k + b) \quad \text{y}$$

$$A'(h, k - b)$$

$$A(5, -6 + 3)$$

$$A'(5, -6 - 3)$$

$$A(5, -3)$$

$$A'(5, -9)$$

Por la relación $b^2 = a^2 - c^2$, resulta:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 16 - 9$$

$$c^2 = 7$$

y

$$c = \sqrt{7}$$

Las coordenadas de los focos de la elipse son:

$$F(h + c, k) \quad \text{y}$$

$$F'(h - c, k)$$

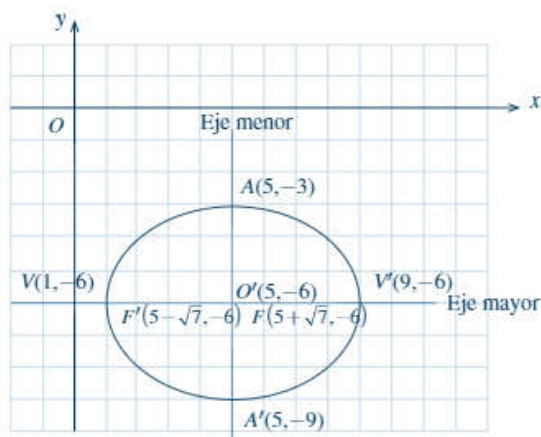
$$F(5 + \sqrt{7}, -6)$$

$$F'(5 - \sqrt{7}, -6)$$

La excentricidad de la elipse es: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0.6614$ ($e < 1$)

$$\text{La ecuación de la elipse es } \frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1.$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 ••• Los focos de una elipse son los puntos $F(-4, -2)$ y $F'(-4, 6)$, y la longitud de su eje menor es $4\sqrt{3}$; determina la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

Solución

Dado que los focos $F(-4, -2)$ y $F'(-4, 6)$ están sobre el eje mayor y de acuerdo con sus coordenadas, se observa que tienen la misma abscisa -4 , por tanto, el eje focal es paralelo al eje y ; así, la ecuación de la elipse por aplicar tiene la forma: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

El centro de la elipse es el punto medio del segmento $\overline{FF'}$ (eje focal de la elipse), sus coordenadas son:

$$\begin{aligned} h &= \frac{x_1 + x_2}{2} & k &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ h &= \frac{-4 - 4}{2} = \frac{-8}{2} & k &= \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} \\ h &= -4 & k &= -4 \end{aligned} \quad \text{El centro es } O'(-4, -4).$$

Aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, se determina la longitud focal ($2c$) de la elipse, es decir:

$$\begin{aligned} d = \overline{FF'} = 2c &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ 2c &= \sqrt{(-4 + 4)^2 + (-2 + 6)^2} & c &= \frac{4}{2} \\ 2c &= \sqrt{(0)^2 + (4)^2} = \sqrt{16} & c &= 2 \\ 2c &= 4 \end{aligned}$$

Dado que la longitud del eje menor es $2b = 4\sqrt{3}$, la longitud del semieje menor es $b = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Las coordenadas de los extremos del eje menor son los puntos:

$$\begin{aligned} A(h + b, k) & \quad y \quad A'(h - b, k) \\ A(-4 + 2\sqrt{3}, -4) & \quad A'(-4 - 2\sqrt{3}, -4) \end{aligned}$$

Por la relación $b^2 = a^2 - c^2$, resulta:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ a^2 &= (2\sqrt{3})^2 + (2)^2 \\ a^2 &= 12 + 4 \\ a^2 &= 16 & a &= 4 \end{aligned}$$

Las coordenadas de los vértices o extremos del eje mayor de la elipse son los puntos:

$$\begin{aligned} V(h, k + a) & \quad y \quad V'(h, k - a) \\ V(-4, -4 + 4) & \quad V'(-4, -4 - 4) \\ V(-4, 0) & \quad V'(-4, -8) \end{aligned}$$

La longitud del eje mayor es $2a = 8$ y la longitud del semieje mayor es $a = 4$.

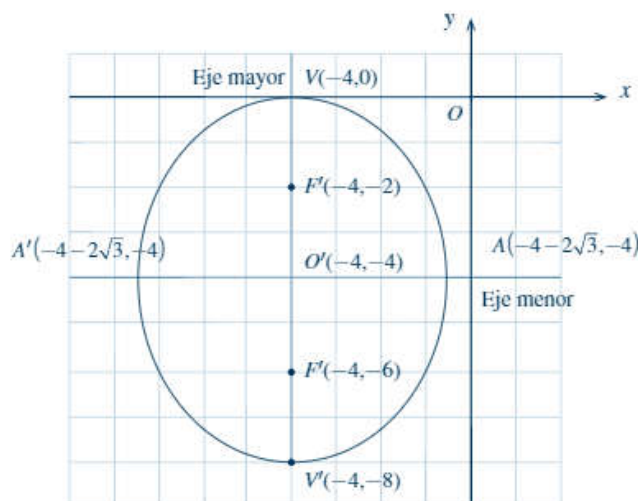
La longitud de cada lado recto es:

$$\begin{aligned} LR &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2\sqrt{3})^2}{4} = \frac{2(12)}{4} = \frac{24}{4} \\ LR &= 6 \end{aligned}$$

La excentricidad de la elipse es $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$ ($e < 1$)

La ecuación de la elipse es $\frac{(x+4)^2}{12} = \frac{(y+4)^2}{16} = 1$.

Gráficamente, se tiene:



Forma general de la ecuación de la elipse

Al desarrollar las ecuaciones de la elipse escritas en su segunda forma ordinaria, se tiene que:

a) Eliminando denominadores y desarrollando los binomios al cuadrado, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 & b^2(x^2 - 2hx + h^2) + a^2(y^2 - 2ky + k^2) &= a^2b^2 \\ \frac{b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2}{a^2b^2} &= 1 & b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2ky + a^2k^2 - a^2b^2 &= 0 \\ \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} &= 1 & b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 &= 0 \quad (4) \\ \frac{a^2(x-h)^2 + b^2(y-k)^2}{a^2b^2} &= 1 & a^2(x^2 - 2hx + h^2) + b^2(y^2 - 2ky + k^2) &= a^2b^2 \\ & & a^2x^2 - 2a^2hx + a^2h^2 + b^2y^2 - 2b^2ky + b^2k^2 - a^2b^2 &= 0 \\ & & a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2hx - 2b^2ky + a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 &= 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Para la ecuación (4), se establecen las siguientes igualdades:

$A = b^2$; $C = a^2$; $D = -2b^2h$; $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$; sustituyendo resulta:

$$\left. \begin{aligned} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la elipse con eje focal paralelo} \\ \text{al eje } x, \text{ escrita en su forma general.} \end{array}$$

Para la ecuación (5), se establecen las siguientes igualdades:

$A = a^2$; $C = b^2$; $D = -2a^2h$; $E = -2b^2k$ y $F = a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$; sustituyendo resulta:

$$\left. \begin{aligned} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la elipse con eje focal paralelo al} \\ \text{eje } y, \text{ escrita en su forma general.} \end{array}$$

Los coeficientes A y C de ambas ecuaciones generales deben ser del mismo signo.

EJEMPLOS

- 1 •• Determina la ecuación de la elipse en su forma general, si se sabe que su centro es el punto $O'(2, -4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $V'(-2, -4)$ y $F'(-1, -4)$, respectivamente; encuentra también todos los elementos de la curva.

Solución

Dado que el centro $O(2, -4)$, uno de los vértices $V'(-2, -4)$ y el foco $F'(-1, -4)$ están sobre el eje mayor y de acuerdo con sus coordenadas se observa que tiene la misma ordenada -4 , por tanto el eje focal es paralelo al eje x ; así, la ecuación de la elipse por aplicar tiene la forma: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Ya que el centro de la elipse es $O'(2, -4)$ es el punto medio del eje mayor $\overline{VV'}$ cuyos extremos son los vértices de la elipse, resulta:

$$\begin{aligned} h &= \frac{x_V + x_{V'}}{2} & (2)(2) &= x_V - 2 \\ 2 &= \frac{x_V - 2}{2} & x_V &= 4 + 2 \\ & & x_V &= 6 \end{aligned}$$

Como la ordenada es -4 , las coordenadas del otro vértice es $V(6, -4)$.

Dado que el centro de la elipse $O(2, -4)$, el punto medio del eje focal $\overline{FF'}$ cuyos extremos son los focos de la elipse es:

$$\begin{aligned} h &= \frac{x_F + x_{F'}}{2} & (2)(2) &= x_F - 1 \\ 2 &= \frac{x_F - 1}{2} & x_F &= 4 + 1 \\ & & x_F &= 5 \end{aligned}$$

Como la ordenada es -4 , las coordenadas del otro foco son $F(5, -4)$.

De la abscisa del vértice, se tiene:

$$\begin{aligned} h + a &= 6 \quad \} \text{ Si } h = 2, \text{ resulta:} \\ 2 + a &= 6 \\ a &= 6 - 2 \\ a &= 4 \quad \text{y} \quad a^2 = 16 \end{aligned}$$

La longitud del semieje mayor es $a = 4$ y la del eje mayor es $2a = 8$.

De la abscisa del foco, resulta:

$$\begin{aligned} h + c &= 5 \quad \} \text{ Si } h = 2, \text{ resulta:} \\ 2 + c &= 5 \\ c &= 5 - 2 \\ c &= 3 \quad \text{y} \quad c^2 = 9 \end{aligned}$$

Por la relación $b^2 = a^2 - c^2$, resulta:

$$\begin{aligned} b^2 &= 16 - 9 \\ b^2 &= 7 \quad \quad b = \sqrt{7} \end{aligned}$$

Las coordenadas de los extremos del eje menor son:

$$\begin{array}{ccc} A(h, k+b) & & A'(h, k-b) \\ A(2, -4+\sqrt{7}) & y & A'(2, -4-\sqrt{7}) \end{array}$$

La longitud del semieje menor es $b = \sqrt{7}$ y la del eje menor es $2b = 2\sqrt{7}$.

La longitud de cada lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(7)}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$.

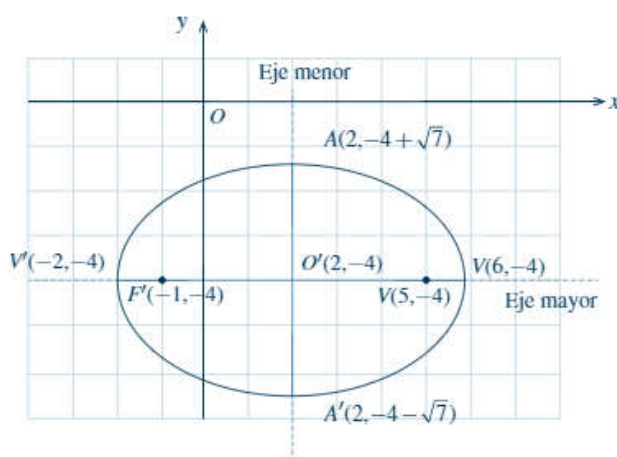
La excentricidad de la elipse es $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4} = 0.75$ ($e < 1$)

$$\text{La ecuación de la elipse es } \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1.$$

Transformando la ecuación de la elipse de la segunda forma ordinaria a la forma general, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} &= 1 \\ \frac{7(x-2)^2 + 16(y+4)^2}{112} &= 1 \\ 7x^2 - 28x + 28 + 16y^2 + 128y + 256 &= 112 \\ 7x^2 + 16y^2 - 28x + 128y + 284 - 112 &= 0 \\ 7x^2 + 16y^2 - 28x + 128y + 172 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} &= 1 \\ \frac{7(x-2)^2 + 16(y+4)^2}{112} &= 1 \\ 7x^2 - 28x + 28 + 16y^2 + 128y + 256 &= 112 \\ 7x^2 + 16y^2 - 28x + 128y + 284 - 112 &= 0 \\ 7x^2 + 16y^2 - 28x + 128y + 172 &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{Ecuación de la elipse en su forma general.}$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 •• El centro de una elipse es el punto $O'(-4, 6)$ y uno de sus vértices es el punto $V(-4, 10)$ y la longitud de cada lado recto es 6; determina la ecuación de la elipse en su forma general y todos sus elementos.

Solución

Dado que el centro $O'(-4, 6)$ y uno de los vértices $V(-4, 10)$ están sobre el eje mayor y de acuerdo con sus coordenadas, se observa que tienen la misma abscisa -4 , por tanto el eje focal es paralelo al eje y ; así, la ecuación de la elipse por aplicar tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Como el centro de la elipse $O'(-4,6)$ es el punto medio del eje mayor $\overline{VV'}$ cuyos extremos son los vértices de la elipse, tenemos que:

$$\begin{aligned} k &= \frac{y_V + y_{V'}}{2} & (2)(6) &= 10 + Y_{V'} \\ 6 &= \frac{10 + y_{V'}}{2} & Y_{V'} &= 12 - 10 \\ & & Y_{V'} &= 2 \end{aligned}$$

Como la abscisa es -4 , las coordenadas del otro vértice es $V'(-4,2)$.

De la ordenada del vértice, resulta:

$$\begin{aligned} k + a &= 10 \quad \} \text{ Si } k = 6, \text{ resulta:} \\ 6 + a &= 10 \\ a &= 10 - 6 \\ a &= 4 \quad \text{y} \quad a^2 = 16 \end{aligned}$$

La longitud del semieje mayor es $a = 4$ y la del eje mayor es $2a = 8$.

Dado que la longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a} = 6$ y $a = 4$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{2b^2}{4} &= 6 & b^2 &= 12 \\ 2b^2 &= 24 & & \\ b^2 &= \frac{24}{2} & b &= 2\sqrt{3} \quad \} \text{ Longitud del semieje menor.} \end{aligned}$$

La longitud del eje menor es $2b = 4\sqrt{3}$.

Las coordenadas de los extremos del eje menor son:

$$\begin{aligned} A(h+b, k) & \quad \text{y} \quad \quad \quad A'(h-b, k) \\ A(-4+2\sqrt{3}, 6) & \quad \quad \quad A'(-4-2\sqrt{3}, 6) \end{aligned}$$

Por la relación $b^2 = a^2 - c^2$, resulta:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 \\ c^2 &= 16 - 12 \\ c^2 &= 4 \quad \text{y} \quad c = 2 \end{aligned}$$

Las coordenadas de los focos de la elipse son:

$$\begin{aligned} F(h, k+c) & \quad \text{y} \quad \quad \quad F(h, k-c) \\ F(-4, 6+2) & \quad \quad \quad F'(-4, 6-2) \\ F(-4, 8) & \quad \quad \quad F'(-4, 4) \end{aligned}$$

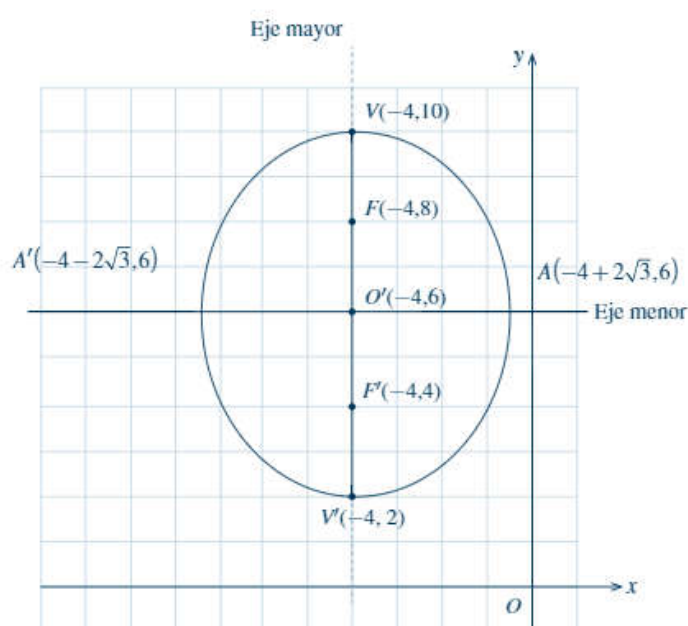
La excentricidad de la elipse es $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$ ($e < 1$)

$$\text{La ecuación de la elipse es } \frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y-6)^2}{16} = 1.$$

Transformando la ecuación de la elipse de la segunda forma ordinaria a la forma general, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y-6)^2}{16} &= 1 \\ \frac{16(x+4)^2 + 12(y-6)^2}{192} &= 1 \\ 16x^2 + 128x + 256 + 12y^2 - 144y + 432 &= 192 \\ 16x^2 + 12y^2 + 128x - 144y + 688 - 192 &= 0 \\ 16x^2 + 12y^2 + 128x - 144y + 496 &= 0 \\ 4x^2 + 3y^2 + 32x - 36y + 124 &= 0\end{aligned}\quad \left. \begin{array}{l} \text{Al simplificar} \\ \text{Ecuación de la elipse} \\ \text{en su forma general.} \end{array} \right\}$$

Gráficamente, tenemos:



El área de la elipse se determina por la fórmula $A = \pi ab$.

La longitud del perímetro de la elipse se determina por la fórmula:

$$L \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

En ambas fórmulas a representa la longitud del semieje mayor y b la del semieje menor.

EJERCICIO 25

I. Con ayuda de tu profesor, determina las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de sus lados rectos; traza y discute las siguientes elipses.

1. $49x^2 + 81y^2 = 3969$

2. $25x^2 + 9y^2 = 225$

3. $4x^2 + 9y^2 = 36$

4. $16x^2 + 25y^2 = 400$

5. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

6. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

7. $12x^2 + 8y^2 = 96$

8. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

II. Resuelve en equipo los siguientes problemas y en plenaria discutan sus resultados.

1. Determina la ecuación de la elipse cuyos vértices y focos se indican:

a) $V(5,0)$, $V'(-5,0)$ y $F(3,0)$, $F'(-3,0)$ b) $V(0,7)$, $V'(0,-7)$ y $F(0,4)$, $F'(0,-4)$

2. Determina la ecuación de la elipse cuyos focos y excentricidad se indican:

a) $F(0,2)$, $F'(0,-2)$ y $c = \frac{2}{3}$ b) $F(5,0)$, $F'(-5,0)$ y $e = \frac{5}{8}$

3. Determina la ecuación de la elipse cuyos focos y la longitud de cualquiera de sus lados rectos se indican:

a) $F(0,5\sqrt{3})$, $F'(0,-5\sqrt{3})$ y $LR = 5$ c) $F\left(\frac{2}{3},0\right)$, $F'\left(-\frac{2}{3},0\right)$ y $LR = \frac{9}{2}$

b) $F(3,0)$, $F'(-3,0)$ y $LR = 9$ d) $F(0,2\sqrt{7})$, $F'(0,-2\sqrt{7})$ y $LR = 9$

4. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen, uno de sus vértices el punto $V'(0,-7)$ y que pasa por el punto $M\left(\sqrt{5},\frac{14}{3}\right)$; encuentra todos los demás elementos y traza la gráfica correspondiente.

5. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen y su eje mayor está sobre el eje x y que pasa por los puntos $M(2,\sqrt{2})$ y $N(\sqrt{6},-1)$.

6. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen y su eje mayor está sobre el eje y y que pasa por los puntos $M\left(4,\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)$ y $N(-3,2\sqrt{3})$.

7. Determina la ecuación de la elipse que pasa por el punto $M\left(3,\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$, tiene su centro en el origen y su eje menor coincide con el eje y y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

8. Determina los radios vectores del punto $P\left(\frac{7}{4},3\right)$ que está sobre la elipse $16x^2 + 7y^2 = 112$.

9. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen, uno de sus focos en el punto $F(3,0)$ y longitud del semieje mayor igual a 5.

10. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen, eje mayor sobre el eje y y que pasa por los puntos $M(2,6)$ y $N(3,4)$.

11. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos $M(4,2)$ y $N(-2,2)$ sea igual a 8.

12. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto $(0,-2)$ es igual al doble de la correspondiente a la recta $y - 8 = 0$.

13. Si k es un número positivo, demuestra que la ecuación $4x^2 + 3y^2 = k$, representa una familia de elipses cada una de las cuales tiene excentricidad de $\frac{1}{2}$.

14. Determina e identifica la ecuación del lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en la razón 1:4 (doble solución).

III. Aplicando la definición de elipse, determina la ecuación que satisfaga cada una de las siguientes condiciones dadas.

1. Un foco en $F'(0,-6)$ y $e = \frac{1}{2}$.

2. Un vértice es $V(0,9)$ y $e = \frac{2}{3}$.

3. Un extremo del eje menor en $A\left(0,\frac{7}{5}\right)$ y $e = \frac{3}{5}$.

4. La longitud del eje mayor es 10 y la del eje menor es 8; los focos están sobre el eje x .

5. El lado recto mide $\left(\frac{32}{7}\right)$ y uno de los extremos del eje menor es $A(-0,4)$.

6. El eje menor mide 12 y uno de los focos está en el punto $F(0,8)$.

7. Pasa por los puntos $M(-4,1)$ y $N(3,2)$.
8. Un foco en el punto $F'(0,-6)$ y la longitud del semieje menor es 8.
- IV. Determina la ecuación de la elipse en su segunda forma ordinaria que satisfaga las condiciones siguientes; encuentra también todos los demás elementos y traza la gráfica correspondiente.
 1. Vértices los puntos $V(1,7)$ y $V'(1,1)$, su excentricidad es $\frac{1}{2}$.
 2. Focos los puntos $F(4,2)$, $F'(4,-2)$, la longitud de cada lado recto es 6.
 3. Vértices los puntos $V(9,6)$, $V'(1,6)$, la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$.
 4. Focos los puntos $F(-3,8)$ y $F'(-3,2)$, la longitud de su eje menor es 8.
 5. Centro en $O'(2,1)$ y uno de sus vértices es el punto $V'(-3,1)$ y la longitud de cada lado recto es 4.
 6. Centro en $O'(4,2)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son, respectivamente: $V'(4,-2)$ y $F'(4,-1)$.
 7. Centro $O'(3,-2)$, un vértice $V(5,-2)$ y $e = \frac{1}{2}$.
 8. Vértice $V(8,3)$ y focos los puntos $F(-2,3)$ y $F'(6,3)$.
 9. Centro $O'(-1,-2)$, eje mayor vertical que mide 6 y su eje menor es 4.
 10. Centro $O'(3,1)$, un vértice $V(3,-2)$ y $e = \frac{1}{3}$.
- V. Determina todos los elementos y traza la gráfica de las siguientes elipses.

1. $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$	4. $\frac{(x-8)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1$
2. $\frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$	5. $\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$
3. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$	6. $\frac{(x-6)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$
- VI. Resuelve los siguientes problemas determinando la ecuación de la elipse en su forma general y traza su gráfica.
 1. Los vértices de una elipse son los puntos $V(-3,7)$ y $V'(-3,-1)$, y la longitud de cada lado recto es 2; determina todos sus elementos y ecuación.
 2. El centro de la elipse $O'(-1,2)$, uno de los vértices es $V(-1,5)$ y uno de los focos el punto $F'(-1,2-\sqrt{5})$; determina todos los demás elementos y ecuación.
 3. El centro de la elipse $O'(-3,2)$, la longitud del semieje mayor es 4 y la del eje menor es 6; determina todos los demás elementos y su ecuación.
 4. La coordenada de uno de los focos es $F(8,2+\sqrt{3})$, uno de los extremos del eje menor es $A(9,-2)$ y uno de los vértices es el punto $V(8,0)$; determina todos los demás elementos y ecuación.
- VIII. Determina el área y la longitud perimetral de las elipses de los problemas I y V de este ejercicio.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Discusión acerca de si una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa o no una elipse; en caso afirmativo, determinación de sus elementos correspondientes

La ecuación de segundo grado en las variables x y y que no contenga término en xy , escrita en la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al discutir la ecuación anterior suponemos que los coeficientes A y C deben ser del mismo signo (positivo) y que $A \neq C$.

Una forma simple de demostrar que la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una elipse consiste en reducirla a la segunda forma ordinaria de la elipse por medio de completar cuadrados.

Al dividir la ecuación dada entre el término AC se tiene:

$$\frac{Ax^2}{AC} + \frac{Cy^2}{AC} + \frac{Dx}{AC} + \frac{Ey}{AC} + \frac{F}{AC} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{Ax^2}{AC} + \frac{Cy^2}{AC} + \frac{Dx}{AC} + \frac{Ey}{AC} + \frac{F}{AC} = 0} \right\} \text{ Al ordenar términos, se tiene:}$$

$$\left(\frac{x^2}{C} + \frac{Dx}{AC} \right) + \left(\frac{y^2}{A} + \frac{Ey}{AC} \right) = -\frac{F}{AC}$$

$$\frac{1}{C} \left(x^2 + \frac{Dx}{A} \right) + \frac{1}{A} \left(y^2 + \frac{Ey}{C} \right) = -\frac{F}{AC} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{C} \left(x^2 + \frac{Dx}{A} \right) + \frac{1}{A} \left(y^2 + \frac{Ey}{C} \right) = -\frac{F}{AC}} \right\} \text{ Completando cuadrados } x \text{ y } y, \text{ se tiene:}$$

$$\frac{1}{C} \left[x^2 + \frac{Dx}{A} + \left(\frac{D}{2A} \right)^2 \right] + \frac{1}{A} \left[y^2 + \frac{Ey}{C} + \left(\frac{E}{2C} \right)^2 \right] = \frac{1}{C} \left(\frac{D}{2A} \right)^2 + \frac{1}{A} \left(\frac{E}{2C} \right)^2 - \frac{F}{AC}$$

$$\frac{1}{C} \left(x^2 + \frac{Dx}{A} + \frac{D^2}{4A^2} \right) + \frac{1}{A} \left(y^2 + \frac{Ey}{C} + \frac{E^2}{4C^2} \right) = \frac{1}{C} \left(\frac{D^2}{4A^2} \right) + \frac{1}{A} \left(\frac{E^2}{4C^2} \right) - \frac{F}{AC}$$

Al factorizar, resulta:

$$\frac{1}{C} \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + \frac{1}{A} \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 = \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2} - \frac{F}{AC}$$

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C} \right)^2}{A} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2}$$

De lo anterior se establece que $M = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2}$, es decir:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C} \right)^2}{A} = M \quad (1)$$

Analizando los siguientes casos, se tiene:

a) Si $M > 0$, la ecuación (1) representa una elipse de la forma:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2}{MC} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C} \right)^2}{2C} = 1, \text{ cuyo centro es el punto } O \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C} \right).$$

Si $MC > MA$, el eje focal de la elipse es paralelo al eje x ; si $MA > MC$, el eje focal de la elipse es paralelo al eje y .

b) Si $M = 0$, la ecuación (1) representa la gráfica de un punto único de coordenadas $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C} \right)$, que se denomina **elipse punto**.

c) Si $M < 0$, la ecuación (1) no representa ningún lugar geométrico real.

EJEMPLOS

Ejemplos

- Analiza si la ecuación $2x^2 + 3y^2 - 8x - 18y + 29 = 0$ representa o no, una elipse; en caso afirmativo, determina sus elementos correspondientes y traza su gráfica.

Solución

Reduciendo la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la elipse, se tiene:

Al ordenar los términos.

$$(2x^2 - 8x) + (3y^2 - 18y) = -29 \quad \left. \vphantom{(2x^2 - 8x) + (3y^2 - 18y) = -29} \right\} \text{ Sacando factores en el primer miembro}$$

$$2(x^2 - 4x) + 3(y^2 - 6y) = -29 \quad \left. \vphantom{2(x^2 - 4x) + 3(y^2 - 6y) = -29} \right\} \text{ Completando cuadrados en } x \text{ y } y$$

$$2\left[x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2\right] + 3\left[y^2 - 6y + \left(\frac{-6}{2}\right)^2\right] = 2\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 29$$

$$2(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 - 6y + 9) = 2(4) + 3(9) - 29$$

$$2(x-2)^2 + 3(y-3)^2 = 8 + 27 - 29 \quad \left. \vphantom{2(x-2)^2 + 3(y-3)^2 = 8 + 27 - 29} \right\} \text{ Al dividir la ecuación entre el producto de } (2)(3) = 6$$

$$\frac{2(x-2)^2}{6} + \frac{3(y-3)^2}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1 \quad \left. \vphantom{\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1} \right\} \text{ Ecuación de la elipse en su segunda forma ordinaria.}$$

Dado que el segundo miembro de la ecuación resultante es mayor que cero, se deduce que la ecuación $2x^2 + 3y^2 - 8x - 18y + 29 = 0$ representa una elipse.

De la ecuación $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1$, resulta:

Las coordenadas del centro de la elipse son $O(2,3)$.

Como el denominador de mayor valor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado paralelo al eje mayor de la elipse y $a^2 > b^2$, resulta:

$$a^2 = 3$$

$$a = \sqrt{3}$$

$$b^2 = 2$$

$$b = \sqrt{2}$$

El eje mayor es paralelo al eje de las x .

La longitud del semieje mayor es $a = \sqrt{3}$ y la del eje mayor es $2a = 2\sqrt{3}$; longitud del semieje menor es $b = \sqrt{2}$ y la del eje menor es $2b = 2\sqrt{2}$.

Por la relación $b^2 = a^2 - c^2$, resulta:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 3 - 2$$

$$c^2 = 1 \quad \text{y} \quad c = 1$$

Las coordenadas de los vértices de la elipse son:

$$\begin{array}{ccc} V(h+a, k) & y & V'(h-a, k) \\ V(2+\sqrt{3}, 3) & & V'(2-\sqrt{3}, 3) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} V(h+a, k) & y & V'(h-a, k) \\ V(2+\sqrt{3}, 3) & & V'(2-\sqrt{3}, 3) \end{array}} \right\} \text{Coordenadas de los extremos del eje mayor.}$$

Las coordenadas de los focos de la elipse son:

$$\begin{array}{ccc} F(h+c, k) & y & F'(h-c, k) \\ F(2+1, 3) & & F'(2-1, 3) \\ F(3, 3) & & F'(1, 3) \end{array}$$

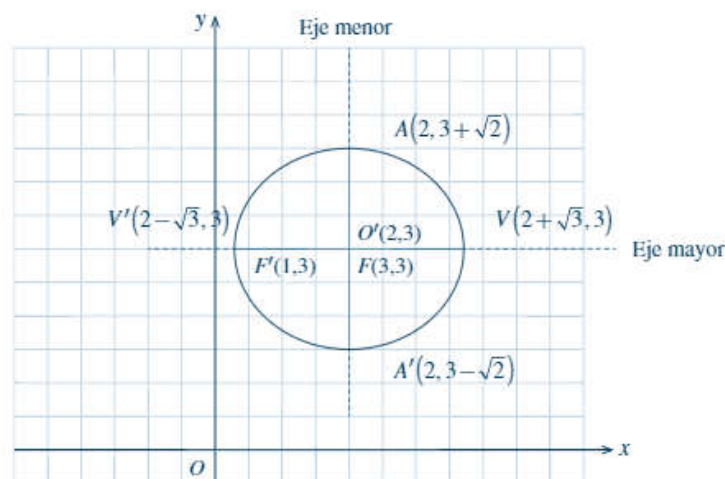
Las coordenadas de los extremos del eje menor son los puntos:

$$\begin{array}{ccc} A(h, k+b) & y & A'(h, k-b) \\ A(2, 3+\sqrt{2}) & & A'(2, 3-\sqrt{2}) \end{array}$$

La longitud de cada lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2.309$.

La excentricidad de la elipse es $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773$ ($e < 1$)

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 ••• Determina la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $P(8,5)$, $Q(12,1)$, $R(2,6)$ y $S(-6,4)$ y tiene sus ejes paralelos a los ejes coordenados.

Solución

La ecuación de la elipse en su forma general $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, que se reduce a:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{Ax^2}{A} + \frac{Cy^2}{A} + \frac{Dx}{A} + \frac{Ey}{A} + \frac{F}{A} = 0 \\ x^2 + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \end{array} \right\} \text{Al dividir la ecuación entre el coeficiente "A", resulta:}$$

Al establecer las siguientes igualdades: $C' = \frac{C}{A}$, $D' = \frac{D}{A}$, $E' = \frac{E}{A}$ y $F' = \frac{F}{A}$ la ecuación se puede expresar en la forma:

$$x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

Como los cuatro puntos dados están sobre la elipse, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación $x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$; donde las constantes C' , D' , E' y F' se deben determinar.

$$\begin{aligned} \text{Para } P(8,5) \quad & (8)^2 + C'(5)^2 + D'(8) + E'(5) + F' = 0 \\ & 64 + 25C' + 8D' + 5E' + F' = 0 \\ & 25C' + 8D' + 5E' + F' = -64 \quad (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } Q(12,1) \quad & (12)^2 + C'(1)^2 + D'(12) + E'(1) + F' = 0 \\ & 144 + C' + 12D' + E' + F' = 0 \\ & C' + 12D' + E' + F' = -144 \quad (b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } R(2,6) \quad & (2)^2 + C'(6)^2 + D'(2) + E'(6) + F' = 0 \\ & 4 + 36C' + 2D' + 6E' + F' = 0 \\ & 36C' + 2D' + 6E' + F' = -4 \quad (c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } S(-6,4) \quad & (-6)^2 + C'(4)^2 + D'(-6) + E'(4) + F' = 0 \\ & 36 + 16C' - 6D' + 4E' + F' = 0 \\ & 16C' - 6D' + 4E' + F' = -36 \quad (d) \end{aligned}$$

Por simultáneas entre las ecuaciones (a) y (b).

Si la ecuación (b) se multiplica por -1 , resulta:

$$\begin{aligned} & -C' - 12D' - E' - F' = 144 \\ & \underline{25C' + 8D' + 5E' + F' = -64} \\ & 24C' - 4D' + 4E' = 80 \quad (e) \end{aligned}$$

Por simultáneas entre las ecuaciones (b) y (c).

Si la ecuación (c) se multiplica por -1 , resulta:

$$\begin{aligned} & -36C' - 2D' - 6E' - F' = 4 \\ & \underline{C' + 12D' + E' + F' = -144} \\ & -35C' + 10D' - 5E' = -140 \quad (f) \end{aligned}$$

Por simultáneas entre las ecuaciones (c) y (d), tenemos:

Si la ecuación (d) se multiplica por -1 , resulta:

$$\begin{aligned} & -16C' + 6D' - 4E' - F' = 36 \\ & \underline{36C' + 2D' + 6E' + F' = -4} \\ & 20C' + 8D' + 2E' = 32 \quad (g) \end{aligned}$$

Por simultáneas entre las ecuaciones (e) y (f).

Si la ecuación (e) se multiplica por 10 y la ecuación (f) se multiplica por 4, resulta:

$$\begin{aligned} & 240C' - 40D' + 40E' = 800 \\ & \underline{-140C' + 40D' - 20E' = -560} \\ & 100C' + 20E' = 240 \quad (h) \end{aligned}$$

Por simultáneas entre las ecuaciones (f) y (g).

Si la ecuación (f) se multiplica por 8 y la ecuación (g) se multiplica por -10 , resulta:

$$\begin{array}{r} -280C' + \cancel{80D'} - 40E' = -1120 \\ -200C' - \cancel{80D'} - 20E' = -320 \\ \hline -480C' - 60E' = -1440 \end{array} \quad (i)$$

Por simultáneas entre las ecuaciones (h) e (i).

Si la ecuación (h) se multiplica por 3, resulta:

$$\begin{array}{r} 300C' + \cancel{60E'} = 720 \\ -480C' - \cancel{60E'} = -1440 \\ \hline -180C' = -720 \\ C' = \frac{-720}{-180} = 4 \end{array}$$

Al sustituir el valor de C' en la ecuación (i), se tiene:

$$\begin{array}{r} -480C' - 60E' = -1440 \\ -480(4) - 60E' = -1440 \\ -1920 - 60E' = -1440 \\ E' = \frac{480}{-60} = -8 \end{array}$$

Al sustituir los valores C' y E' en la ecuación (g), resulta:

$$\begin{array}{r} 20C' + 8D' + 2E' = 32 \\ 20(4) + 8D' + 2(-8) = 32 \\ 80 + 8D' - 16 = 32 \\ 8D' + 64 = 32 \\ 8D' = 32 - 64 \\ D' = \frac{-32}{8} = -4 \end{array}$$

Al sustituir los valores de C' , E' y D' en la ecuación (d), resulta:

$$\begin{array}{r} 16C' - 6D' + 4E' + F' = -36 \\ 16(4) - 6(-4) + 4(-8) + F' = -36 \\ 64 + 24 - 32 + F' = -36 \\ F' = -92 \end{array}$$

Al sustituir los valores de las constantes C' , D' , E' y F' , en la ecuación de la elipse se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0 \end{array} \right\} \text{ Ecuación de la elipse en su forma general.}$$

Reduciendo la ecuación resultante a la segunda forma ordinaria de la elipse, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 4x) + (4y^2 - 8y) &= 92 & \left. \begin{array}{l} \text{Al factorizar el segundo término del} \\ \text{primer miembro de la ecuación} \end{array} \right\} \\
 (x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) &= 92 & \left. \begin{array}{l} \text{Completando cuadrados en } x \text{ y } y \end{array} \right\} \\
 \left[x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2} \right)^2 \right] + 4 \left[y^2 - 2y + \left(\frac{-2}{2} \right)^2 \right] &= 92 + \left(\frac{-4}{2} \right)^2 + 4 \left(\frac{-2}{2} \right)^2 \\
 (x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) &= 92 + 4 + 4 & \left. \begin{array}{l} \text{Al factorizar} \end{array} \right\} \\
 (x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 &= 100 & \left. \begin{array}{l} \text{Al dividir la ecuación entre 100} \end{array} \right\} \\
 \frac{(x - 2)^2}{100} + \frac{4(y - 1)^2}{100} &= \frac{100}{100} \\
 \frac{(x - 2)^2}{100} + \frac{(y - 1)^2}{25} &= 1 & \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación de la elipse en su} \\ \text{segunda forma ordinaria.} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

A partir de la ecuación anterior se calculan las coordenadas del centro de la elipse, es decir:

Como el denominador de mayor valor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado paralelo al eje mayor de la elipse y como $a^2 > b^2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= 100 & b^2 &= 25 \\
 a &= 10 & b &= 5
 \end{aligned}$$

El eje mayor es paralelo al eje de las x .

La longitud del semieje mayor es $a = 10$ y la del eje mayor es $2a = 20$; la longitud del semieje menor es $b = 5$ y la del eje menor es $2b = 10$.

Por la relación $b^2 = a^2 - c^2$, resulta:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 - b^2 \\
 c^2 &= 100 - 25 \\
 c^2 &= 75 & \text{y} & c = 5\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Las coordenadas de los vértices son:

$$\begin{array}{ccc}
 V(h + a, k) & \text{y} & V'(h + a, k) \\
 V(2 + 10, 1) & & V'(2 - 10, 1) \\
 V(12, 1) & & V'(-8, 1)
 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Coordenadas de los}$$

extremos del eje mayor.

Las coordenadas de los focos de la elipse son:

$$\begin{array}{ccc}
 F(h + c, k) & & F'(h - c, k) \\
 F(2 + 5\sqrt{3}, 1) & \text{y} & F'(2 - 5\sqrt{3}, 1)
 \end{array}$$

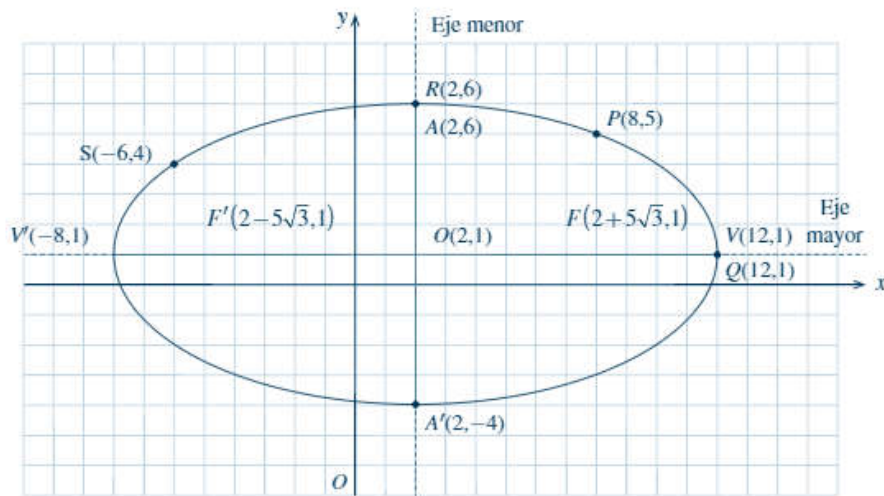
Las coordenadas de los puntos extremos del eje menor son:

$$\begin{array}{ccc}
 A(h, k + b) & \text{y} & A'(h, k - b) \\
 A(2, 1 + 5) & A(2, 6) & A'(2, 1 - 5) \quad A'(2, -4)
 \end{array}$$

La longitud de cada lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(25)}{10} = \frac{50}{10} = 5$.

La excentricidad de la elipse es $e = \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.8660$ ($e < 1$)

Al elaborar la gráfica correspondientes, se tiene:



EJERCICIO 26

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Discute en plenaria si cada una de las siguientes ecuaciones dadas representan o no una elipse; en caso afirmativo determina sus elementos correspondientes y traza su gráfica.

- $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 105 = 0$
- $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
- $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 21 = 0$
- $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0$
- $5x^2 + 3y^2 - 3y - 12 = 0$
- $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$
- $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$
- $2x^2 + 2y^2 - 2x + 18y + 33 = 0$

II. Determina en equipo la ecuación de la elipse que pasa por los cuatro puntos dados y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados.

- $P(4,0)$, $Q(1,-1)$, $R(0,1)$ y $S(2,2)$
- $P(-8,3)$, $Q(-2,4)$, $R(8,-1)$ y $S(6,-4)$

III. Resuelve los siguientes problemas.

- Determina la ecuación de la familia de elipses que tienen un centro común $O'(2,3)$, un eje focal común paralelo al eje y , la excentricidad es igual a $\frac{1}{2}$; traza la gráfica de la familia de elipses para tres valores diferentes del parámetro.
- La ecuación de una familia de elipses es $4x^2 + 9y^2 + ax + by - 11 = 0$; determina la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos $P(2,3)$ y $Q(95,1)$.
- Determina las longitudes de los radios vectores del punto $P(2,1)$ de la elipse $27x^2 + 3y^2 - 54x - 6y + 3 = 0$.
- El punto medio de una cuerda de la elipse $3x^2 + 12y^2 - 18x - 24y - 9 = 0$, en el punto $M(5,2)$; determina la ecuación de la cuerda.
- Determina el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ cuyo producto de las pendientes de las rectas que unen $P(x,y)$ con los puntos fijos $Q(3,-2)$ y $R(-2,1)$ es igual a -6 .
- Encuentra e identifica la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje x es siempre igual al doble de su distancia del punto $R(2,3)$.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Ecuación de la tangente y normal a una elipse

Dado que la ecuación de una elipse es de segundo grado, las rectas tangentes a dicha curva se determinan por la condición de tangencia empleada en la circunferencia y en la parábola.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Determina la ecuación de la tangente a una elipse dada en un punto dado de tangencia.

- a) Encuentra la ecuación de la tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de dicha curva.

Solución

La ecuación de la familia de rectas tangentes que pasan por el punto dado es $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Donde, m es la pendiente de la recta tangente que se desea determinar; al despejar respecto a y , resulta:

$$y = y_1 + mx - mx_1$$

Al sustituir esta igualdad en la ecuación de la elipse, se tiene:

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ b^2x^2 + a^2(y_1 + mx - mx_1)^2 &= a^2b^2 \\ b^2x^2 + a^2(y_1^2 + m^2x^2 + m^2x_1^2 + 2mxy_1 - 2mx_1y_1 - 2m^2xx_1) &= a^2b^2 \\ b^2x^2 + a^2y_1^2 + a^2m^2x^2 + a^2m^2x_1^2 + 2a^2mxy_1 - 2a^2mx_1y_1 - 2a^2m^2xx_1 - a^2b^2 &= 0 \\ b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mxy_1 - 2a^2m^2xx_1 + a^2y_1^2 + a^2m^2x_1^2 - 2a^2mx_1y_1 - a^2b^2 &= 0 \\ (b^2 + a^2m^2)x^2 + (2a^2my_1 - 2a^2m^2x_1)x + (a^2y_1^2 + a^2m^2x_1^2 - 2a^2mx_1y_1 - a^2b^2) &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación está escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$; aplicando la condición de tangencia, se debe comprobar el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} (2a^2my_1 - 2a^2m^2x_1)^2 - 4(b^2 + a^2m^2)(a^2y_1^2 + a^2m^2x_1^2 - 2a^2mx_1y_1 - a^2b^2) &= 0 \\ 4a^4m^2y_1^2 - 8a^4m^3x_1y_1 + 4a^4m^4x_1^2 - 4a^2b^2y_1^2 - 4a^2b^2m^2x_1^2 + 8a^2b^2mx_1y_1 + 4a^2b^4 &= 0 \\ -4a^4m^2y_1^2 - 4a^4m^4x_1^2 + 8a^4m^3x_1y_1 + 4a^2b^2m^2 &= 0 \end{aligned}$$

Al dividir la ecuación entre $4a^2b^2$, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{4a^4b^2m^2}{4a^2b^2} - \frac{4a^2b^2m^2x_1^2}{4a^2b^2} + \frac{8a^2b^2mx_1y_1}{4a^2b^2} + \frac{4a^2b^4}{4a^2b^2} - \frac{4a^2b^2y_1^2}{4a^2b^2} &= 0 \\ a^2m^2 - m^2x_1^2 + 2mx_1y_1 + b^2 - y_1^2 &= 0 \\ (a^2 - x_1^2)m^2 + (2x_1y_1)m + (b^2 - y_1^2) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, se tiene:

$$\begin{aligned} m &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ m &= \frac{-2x_1y_1 \pm \sqrt{4x_1^2y_1^2 - 4(a^2 - x_1^2)(b^2 - y_1^2)}}{2(a^2 - x_1^2)} \\ m &= \frac{-2x_1y_1 \pm \sqrt{4x_1^2y_1^2 - 4a^2b^2 + 4a^2y_1^2 + 4b^2x_1^2 - 4x_1^2y_1^2}}{2(a^2 - x_1^2)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Al factorizar el} \\ \text{radicando y ordenar} \\ \text{los términos} \end{array} \right\} \\ m &= \frac{-2x_1y_1 \pm \sqrt{4(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2)}}{2(a^2 - x_1^2)} \end{aligned}$$

Como el punto dado $P_1(x_1, y_1)$ pertenece a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, sus coordenadas satisfacen dicha ecuación, es decir:

$$\begin{aligned}b^2x_1^2 + a^2y_1^2 &= a^2b^2 \\b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2 &= 0\end{aligned}$$

Al sustituir esta igualdad en la ecuación de la fórmula general, tenemos:

$$m = \frac{-2x_1y_1 \pm \sqrt{4(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2)}}{2(a^2 - x_1^2)} = \frac{-2x_1y_1 \pm \sqrt{4(0)}}{2(a^2 - x_1^2)} = \frac{-2x_1y_1}{2(a^2 - x_1^2)} = -\frac{x_1y_1}{(a^2 - x_1^2)}$$

Al sustituir la pendiente $\left(m = -\frac{x_1y_1}{(a^2 - x_1^2)}\right)$, en la ecuación de la tangente por determinar, tenemos:

$$\begin{aligned}y - y_1 &= m(x - x_1) \\y - y_1 &= -\frac{x_1y_1}{(a^2 - x_1^2)}(x - x_1) \\(a^2 - x_1^2)(y - y_1) &= -x_1y_1(x - x_1) \\a^2y - a^2y_1 - x_1^2y + \cancel{x_1^2y_1} &= -x_1xy_1 + \cancel{x_1^2y_1} \\a^2y - a^2y_1 &= x_1^2y - xx_1y_1 \\a^2(y - y_1) &= x_1(x_1y - xy_1)\end{aligned}$$

De la ecuación $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$, se tiene $a^2 = \frac{b^2x_1^2 + a^2y_1^2}{b^2}$, al sustituir esta igualdad en la última ecuación de la tangente, resulta:

$$\begin{aligned}a^2(y - y_1) &= x_1(x_1y - xy_1) \\ \left(\frac{b^2x_1^2 + a^2y_1^2}{b^2}\right)(y - y_1) &= x_1(x_1y - xy_1) \\ (b^2x_1^2 + a^2y_1^2)(y - y_1) &= b^2x_1(x_1y - xy_1) \\ \cancel{b^2x_1^2y} - b^2x_1^2y_1 + a^2yy_1^2 - a^2y_1^3 &= \cancel{b^2x_1^2y} - b^2xx_1y_1 \\ a^2yy_1^2 - b^2x_1^2y_1 &= a^2y_1^3 - b^2xx_1y_1 \\ \cancel{y_1^3}(a^2yy_1 - b^2x_1^2) &= \cancel{y_1^3}(a^2y_1^2 - b^2xx_1) \\ a^2yy_1 + b^2xx_1 &= b^2x_1^2 + a^2y_1^2\end{aligned}$$

Dado que $a^2b^2 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2$, al sustituir en la ecuación anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}a^2yy_1 + b^2xx_1 &= a^2b^2 \\b^2xx_1 + a^2yy_1 &= a^2b^2\end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva es $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$.

- b) Encuentra la ecuación de la tangente a la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de dicha curva.

Solución

De la misma manera que se hizo en el inciso a), se establece que:

La ecuación de la recta tangente a la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva es $a^2xx_1 + b^2yy_1 = a^2b^2$.

2 ●● Determina la ecuación de la tangente a una elipse dada y que tiene una pendiente dada.

- a) Encuentra la ecuación de la tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ que tiene por pendiente m .

Solución

La ecuación de la familia de rectas tangentes que tiene la pendiente m en común es $y = mx + k$.

El parámetro k representa el segmento que la recta determina sobre el eje y , cuyo valor se debe determinar.

Al sustituir la igualdad $y = mx + k$ en la ecuación de la elipse, se tiene:

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ b^2x^2 + a^2(mx + k)^2 &= a^2b^2 \\ b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2kmx + k^2) &= a^2b^2 \\ b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2kmx + a^2k^2 - a^2b^2 &= 0 \\ (b^2 + a^2m^2)x^2 + (2a^2km)x + (a^2k^2 - a^2b^2) &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación está escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$; aplicando la condición de tangencia, se debe comprobar el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} (2a^2km)^2 - 4(b^2 + a^2m^2)(a^2k^2 - a^2b^2) &= 0 \\ 4a^4k^2m^2 - 4a^2b^2k^2 + 4a^2b^4 - 4a^4k^2m^2 + 4a^4b^2m^2 &= 0 \\ -\frac{4a^2b^2k^2}{4a^2b^2} + \frac{4a^4b^2m^2}{4a^4b^2} + \frac{4a^2b^4}{4a^2b^2} &= 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Al dividir la ecuación} \\ \text{entre } a^2b^2, \text{ resulta:} \end{array} \right\} \\ -k^2 + a^2m^2 + b^2 &= 0 \\ k^2 &= a^2m^2 + b^2 \\ k &= \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2} \end{aligned}$$

Al sustituir esta igualdad en la ecuación de la familia de rectas tangentes que tienen la pendiente m en común, resulta:

$$\begin{aligned} y &= mx + k \\ y &= mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \end{aligned}$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ que tienen pendiente m es $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

- b) Encuentra la ecuación de la tangente a la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ que tiene por pendiente m .

Solución

De la misma manera que se hizo en el inciso a, se establece que:

Las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ que tienen pendiente m es $y = mx \pm \sqrt{b^2m^2 + a^2}$.

3 ●● Determina la ecuación de la tangente a una elipse dada y que pasa por un punto exterior dado.

- a) Encuentra las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $P(3, -1)$ a la elipse $2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0$.

Solución

La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto dado $P(3, -1)$ es:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y + 1 &= m(x - 3) \end{aligned}$$

Donde m es la pendiente de la tangente buscada; al despejar respecto a y y sustituyendo en la ecuación de la elipse dada se tiene: $y = mx - 3m - 1$.

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 3(mx - 3m - 1)^2 + x - (mx - 3m - 1) - 5 &= 0 \\
 2x^2 + 3(m^2x^2 + 9m^2 + 1 - 6m^2x - 2mx + 6m) + x - mx + 3m + 1 - 5 &= 0 \\
 2x^2 + 3m^2x^2 + 27m^2 + 3 - 18m^2x - 6mx + 18m + x - mx + 3m + 1 - 5 &= 0 \\
 2x^2 + 3m^2x^2 + x - 7mx - 18m^2x + 27m^2 + 21m - 1 &= 0 \\
 (2 + 3m^2)x^2 + (1 - 7m - 18m^2)x + (27m^2 + 21m - 1) &= 0
 \end{aligned}$$

Esta última ecuación está escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$; aplicando la condición de tangencia, se debe comprobar el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, es decir:

$$\begin{aligned}
 (1 - 7m - 18m^2)^2 - 4(2 + 3m^2)(27m^2 + 21m - 1) &= 0 \\
 1 + 49m^2 + \cancel{324m^4} - 14m - 36m^2 + \cancel{252m^3} - 216m^2 - 168m + 8 - \cancel{324m^4} - \cancel{252m^3} + 12m^2 &= 0 \\
 -191m^2 - 182m + 9 = 0 \quad \} \text{ Al multiplicar por } -1 \\
 191m^2 + 182m - 9 = 0 \quad \} \text{ Al resolver por fórmula general} \\
 m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 m = \frac{-182 \pm \sqrt{33\,124 - 4(191)(-9)}}{2(191)} = \frac{-182 \pm \sqrt{40\,000}}{382} = \frac{-182 \pm 200}{382} \\
 m_1 = \frac{-182 + 200}{382} = \frac{18}{382} \quad m_2 = \frac{-182 - 200}{382} = \frac{-382}{382} \\
 m_1 = \frac{9}{191} \quad m_2 = -1
 \end{aligned}$$

Al sustituir los valores encontrados en la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto dado, resulta:

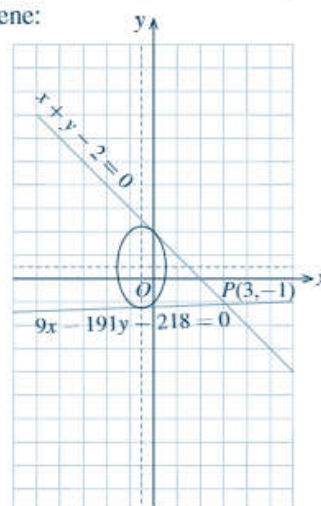
$$\begin{aligned}
 \text{Para } m = \frac{9}{191} \quad & \text{Para } m = -1 \\
 y + 1 = \frac{9}{191}(x - 3) \quad & y + 1 = -1(x - 3) \\
 191(y + 1) = 9(x - 3) \quad & y + 1 = -x + 3 \\
 191y + 191 = 9x - 27 \quad & x + y - 2 = 0 \\
 9x - 191y - 218 = 0
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, -1)$ a la elipse

$$2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0 \text{ son: } 9x - 191y - 218 = 0 \text{ y } x + y - 2 = 0.$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:

x	y
0	≈1.46 ≈-1.13
1	1 ≈-0.66
-1	≈1.33 -1
1.35 -1.85	0
-1 -1.5	1
0.5 -1	-1



Diámetro de la elipse

El lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas a una elipse, se denomina **diámetro** de dicha cónica.

Si la pendiente de las cuerdas paralelas es m , la ecuación del diámetro determinado por los puntos medios de dichas cuerdas es:

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{b^2 x}{a^2 m} \end{aligned} \right\} \text{ Si la elipse es } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{a^2 x}{b^2 m} \end{aligned} \right\} \text{ Si la elipse es } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Para la ecuación general de la elipse $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, la ecuación del diámetro es:

$$\left(Ax + \frac{D}{2} \right) + m \left(Cy + \frac{E}{2} \right) = 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Determina la ecuación del diámetro de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ correspondiente a las cuerdas de pendiente 3.

Solución

Como la ecuación de la elipse dada es de la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, la ecuación del diámetro de la elipse dada tiene la forma $y = -\frac{a^2 x}{b^2 m}$.

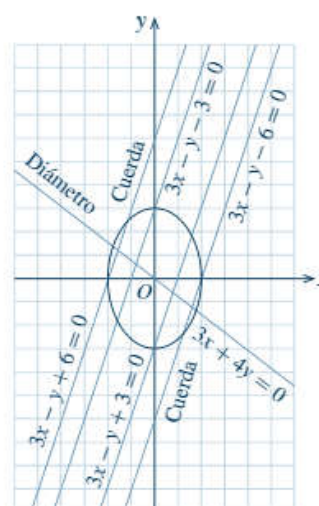
Al sustituir los datos correspondientes, se tiene:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{9x}{4(3)} & 12y &= -9x & 3x + 4y &= 0 \\ y &= -\frac{9x}{12} & 9x + 12y &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación del diámetro de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ es $3x + 4y = 0$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:

x	y
0	±3
±1	±2.59
±2	0
±1.88	±1
±1.49	±2



- 2 ••• Determina la ecuación del diámetro de la elipse $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ correspondiente a las cuerdas de pendiente 1.

Solución

Como la ecuación de la elipse dada es de la forma general, la ecuación del diámetro de la elipse por aplicar tiene la forma:

$$\left(Ax + \frac{D}{2}\right) + m\left(Cy + \frac{E}{2}\right) = 0$$

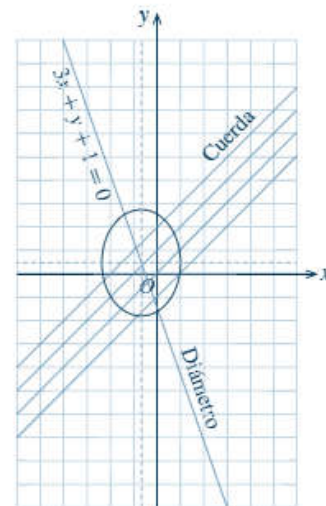
Al sustituir los datos correspondientes, se tiene:

$$\begin{aligned} \left(3x + \frac{4}{2}\right) + 1\left(y - \frac{2}{2}\right) &= 0 & 3x + y + 1 &= 0 \\ 3x + 2y + y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación del diámetro de la elipse $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ es $3x + y + 1 = 0$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:

x	y
0	3
-1	-1
-1	≈3.23
-2	≈1.23
-2	1
≈0.53	0
≈1.86	0
≈0.66	1
-2	1
≈0.53	2
≈1.86	2
0	3
≈-1.33	3
0	-1
≈-1.33	-1



EJERCICIO 27

- I. Determina las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de las tangentes normal, subtangentes y subnormal, para las siguientes elipses en el punto de contacto indicado.

1. $2x^2 + 3y^2 - 5 = 0$ en $P(1, -1)$.

2. $16x^2 + 9y^2 = 144$ en $P\left(2, \frac{45}{3}\right)$.

3. $9x^2 + y^2 = 18$ en $P(-1, 3)$.

4. $25x^2 + 9y^2 = 225$ en $P\left(2, \frac{55}{3}\right)$.

5. $25x^2 + 16y^2 = 400$ en $P\left(2, \frac{57}{4}\right)$.

6. $x^2 + 4y^2 = 4$ en $P(2, 0)$.

7. $4x^2 + 9y^2 = 72$ en $P(3, 2)$.

8. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$ en $P(8, 5)$.

9. $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$ en $P(8, 0)$.

10. $13x^2 + 23y^2 - 51x - 19y - 4 = 0$ en $P(2, 2)$.

11. $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$ en $P\left(-3, \frac{3}{2}\right)$.

12. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$ en $P\left(3, \frac{3+25}{3}\right)$.

II. Determina las ecuaciones de la recta tangente de pendiente dada a cada una de las siguientes elipses.

1. $4y^2 + 5y^2 = 8$ y $m = 2$
2. $x^2 + 4y^2 = 100$ y $m = -\frac{3}{8}$
3. $5x^2 + y^2 = 5$ y $m = 2$
4. $25x^2 + 16y^2 + 150x - 128y - 1119 = 0$ y $m = -\frac{5}{3}$
5. $4x^2 + 5y^2 = 20$ y $m = -\frac{2}{3}$
6. $3x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 45 = 0$ y $m = -\frac{1}{3}$
7. $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$ y $m = 5$
8. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ y $m = -3$

III. Resuelve los siguientes problemas y discute en plenaria el procedimiento de solución.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

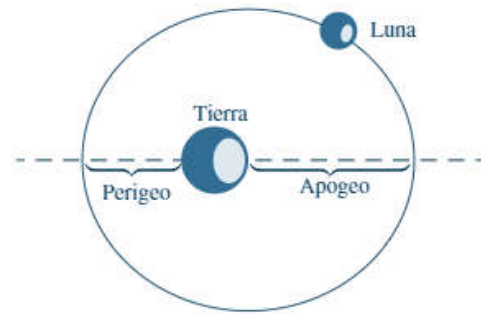
1. Determina las ecuaciones de las tangentes a la elipse $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ que son paralelas a la recta $2x + 3y - 8 = 0$.
2. Determina las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $p(5, -3)$ a la elipse $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$.
3. La ecuación de una elipse es $2x^2 + 6y^2 + 6x - 8y - 6 = 0$, determina los valores de k para los cuales las rectas de la familia $5x + 2y + k = 0$:
 - a) Cortan a la elipse en dos puntos distintos.
 - b) Son tangentes a la elipse.
 - c) No intersecan a la elipse.
4. Determina el ángulo agudo de intersección de las elipses $4x^2 + y^2 - 32x + 56 = 0$ y $6x^2 + 8y^2 = 86$ en uno de sus dos puntos de intersección.
5. Por el punto $P(-2, -7)$ se trazan tangentes a la elipse $2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0$; determina las ecuaciones de las tangentes y los puntos de tangencia.
6. Determina la ecuación de la cuerda de contacto del punto $p(3, 1)$ para la elipse $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$.
7. Determina las ecuaciones de las tangentes a la elipse $5x^2 + 7y^2 = 35$ paralelas a la recta $3x + 4y - 12 = 0$.
8. Determina la ecuación del diámetro de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendiente -3 .
9. Determina la ecuación del diámetro de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ conjugado del diámetro de la ecuación $3x - y = 0$.
10. Determina la ecuación del diámetro de la elipse $4x^2 + 5y^2 = 20$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendiente $\left(-\frac{2}{3}\right)$.
11. Determina la ecuación del diámetro de la elipse $x^2 + 4y^2 = 100$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendiente $\left(-\frac{3}{8}\right)$.
12. Determina la ecuación del diámetro de la elipse $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendiente $\frac{1}{7}$.
13. Determina la ecuación del diámetro de la elipse $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendiente -1 .

Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

• PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Elipse

- 1 ●● La Luna gira alrededor de la Tierra según una órbita elíptica con la Tierra en uno de los focos (ver dibujo). Si las longitudes de los ejes mayor y menor son 774 000 km y 773 000 km, respectivamente, ¿cuáles son las distancias máxima y mínima (apogeo y perigeo) entre los centros de la Tierra y la Luna?

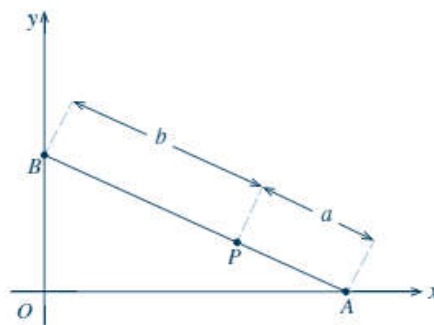


- 2 ●● Una partícula gira en el sentido de las agujas del reloj sobre una elipse de ecuación:

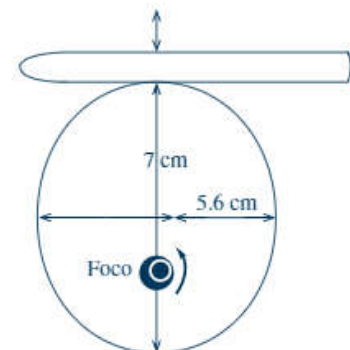
$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

La partícula abandona la órbita en el punto $(-8, 3)$ siguiendo una trayectoria tangencial a la elipse. ¿En que punto cruzará la partícula el eje y ?

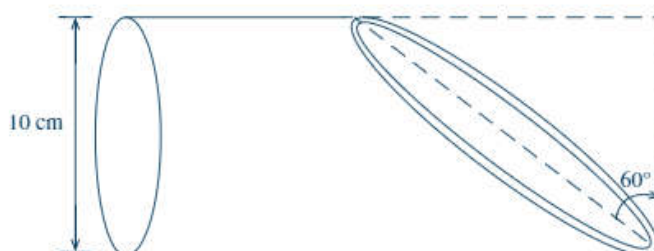
- 3 ●● La excentricidad de una elipse se define como la razón $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Si el valor de a es fijo y el de b varía, describe la forma general de la elipse cuando la excentricidad es cercana a la unidad y cuando su valor es próximo a cero.
- 4 ●● El satélite ruso Sputnik I fue puesto en órbita en octubre de 1957, de forma que sus distancias máxima y mínima a la superficie de la Tierra eran 583 millas y 132 millas, respectivamente, ¿cuál es la excentricidad de dicha órbita?
- 5 ●● Un segmento de 16 cm de longitud se mueve de forma que uno de sus extremos está siempre sobre el eje y , mientras que el otro siempre está sobre el eje x . Determina la ecuación de la curva que describe el punto del segmento que está a una distancia de 12 cm del extremo que se mueve sobre el eje y .
- 6 ●● Un segmento de recta de longitud $(a + b)$ se mueve con sus extremos A y B fijos a los ejes coordenados, como se ilustra en el siguiente dibujo. Muestra que si $a \neq b$, entonces el punto P describe una elipse.



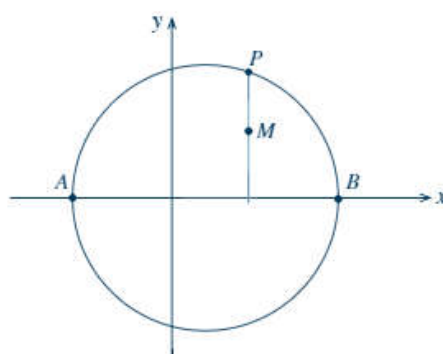
- 7 ●● Una leva elíptica gira alrededor de su foco y mueve hacia arriba y hacia abajo una palanca que descansa sobre el mismo como se muestra en el dibujo. Si el eje mayor del engrane es 7 cm y el eje menor es 5.6 cm ¿cuál es la distancia que el punto A sobre la palanca se mueve de una posición extremo a la otra?



- 8 ●● La Tierra se mueve sobre una órbita elíptica con el Sol en uno de los focos. Si la longitud de la mitad del eje mayor es de 93 millones de millas y la excentricidad es 0.017, halla las distancias mínima y máxima entre la Tierra y el Sol.
- 9 ●● El satélite estadounidense Explorer 18 se lanzó el 26 de noviembre de 1963. Las distancias máxima y mínima de su órbita a la superficie de la Tierra eran 122 000 km y 119 km.
- Determina la excentricidad de la órbita.
 - Determina una ecuación que describe la órbita.
- 10 ●● El extremo de un tubo cuyo diámetro interior es 10 cm se corta a un ángulo de 60° como se muestra en el dibujo. ¿Cuál es la longitud de los ejes mayor y menor de la abertura elíptica?

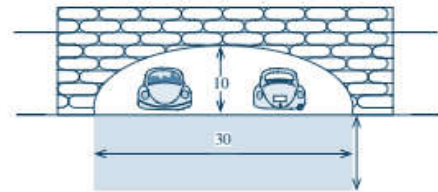


- 11 ●● El diseño de una leva para automóvil se programa empleando la ecuación de una elipse y de una circunferencia: $0.16x^2 + 0.25y^2 = 0.04$ y $(x - 0.30)^2 + y^2 = 0.01$. Traza las dos curvas en la misma gráfica para mostrar el diseño de la leva (emplea escalas adecuadas para x y y).
- 12 ●● La galería de los susurros en el edificio del capitolio en Washington, D. C., tiene como techo un domo en forma de elipsoide, superficie formada al girar una elipse sobre uno de sus ejes. Un murmullo que se emite en uno de los focos de la galería puede escucharse claramente en el otro foco (una elipse refleja ondas de un foco al otro foco), si la distancia entre los focos es 48 m y la longitud de las alas (eje mayor) es 52 m, ¿cuál es la ecuación de la elipse que forma la galería? Considérese que el eje mayor es el eje x y el centro es $(0,0)$.
- 13 ●● Desde un punto P sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ se traza un segmento de recta perpendicular al diámetro AB y se determina el punto medio M (observa la figura). Obtén la ecuación de todos esos puntos medios M y traza la gráfica.



- 14 ●● El arco de un puente es semidíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco tiene 30 pies de longitud y su parte más alta con respecto al suelo mide 10 pies (ver dibujo). Determina la altura del área a 6 pies del centro de la base.

- 15 ••• Un cuadrado, cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, está inscrito en la elipse cuya ecuación es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, expresa el área A del cuadrado en términos de a y b .



Determinación de la ecuación de la hipérbola y su gráfica

Definición

La hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto móvil a dos puntos fijos del plano llamados **focos**, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

La definición anterior no es aplicable al caso en que el punto móvil se mueve sobre la recta que pasa por los focos a excepción del segmento comprendido entre ellos, es decir, los focos y el punto medio de dicho segmento no pueden pertenecer al lugar geométrico.

También se hace notar la semejanza que por definición tienen la elipse y la hipérbola.

Elementos de una hipérbola

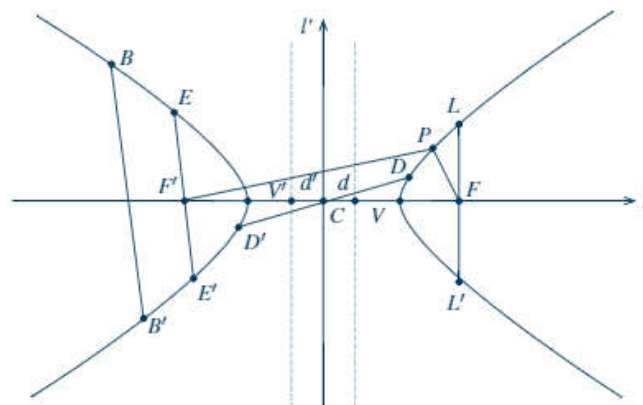


Figura 3.32

La hipérbola consta de dos **ramas** diferentes, cada una de las cuales es de extensión indefinida; designamos los **focos** por F y F' , la recta ℓ que pasa por los focos y es perpendicular a las **directrices**, se denomina **eje focal** o **eje de la hipérbola**; las **directrices** de la cónica son los segmentos $\overline{dd'}$ y $\overline{d'd'}$.

El eje focal interseca a la hipérbola en dos puntos, V y V' , que denominamos **vértices**; la porción del eje focal comprendido entre los vértices, el segmento $\overline{VV'}$ se denomina **eje transversal**; el punto medio C del eje transversal se denomina **centro**; la recta ℓ que pasa por C y es perpendicular al eje focal, se denomina **eje normal**; el eje normal no interseca a la hipérbola, no obstante, una porción del mismo, el segmento $\overline{AA'}$, y que tiene a C por punto medio, se denomina **eje conjugado**; sea $\overline{BB'}$, el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera diferentes de la hipérbola se denomina **cuerda**; particularmente si una cuerda pasa por un foco, tal como $\overline{EE'}$, se denomina **cuerda focal**; si la cuerda focal es perpendicular al eje de la hipérbola, tal como $\overline{LL'}$ se denomina **lado recto**; como la cónica tiene dos focos, también tiene dos lados rectos; la cuerda que pasa por C , tal como

$\overline{DD'}$ se denomina **diámetro**; sea P un punto cualquiera de la hipérbola, los segmentos $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$, que unen los focos con dicho punto se denominan **radios vectores** de P (figura 3.32).

Primera ecuación ordinaria de la hipérbola

Si consideramos la hipérbola de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje x (figura 3.33).

Como los focos están sobre el eje x y el centro coordenado O es el punto medio del segmento $\overline{FF'}$, por lo que las coordenadas de los focos son $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$, en donde c es una constante positiva.

Si $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la hipérbola y con base en su definición, dicho punto debe satisfacer la condición geométrica que establece que el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto P a los focos es una cantidad constante, es decir: $|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 2a$, en donde a es una constante positiva y $2a < 2c$. De la condición geométrica anterior se obtienen las siguientes equivalencias:

$$|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 2a \quad \text{y} \quad |\overline{F'P}| - |\overline{FP}| = -2a$$

La primera igualdad es verdadera cuando el punto P está sobre la **rama izquierda** de la hipérbola; la segunda igualdad también es verdadera si el punto P está sobre la **rama derecha** de la hipérbola. Por la fórmula de distancia entre dos puntos, se tiene que:

$$\begin{aligned} |\overline{FP}| &= \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ |\overline{F'P}| &= \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Expresando analíticamente la condición geométrica, tenemos que:

$$\begin{aligned} |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| &= 2a & |\overline{F'P}| - |\overline{FP}| &= -2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a & \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= -2a \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) & (2) \end{matrix}$$

Para simplificar, pasamos el segundo radical al segundo miembro de la ecuación, elevando al cuadrado, las ecuaciones (1) y (2) se reducen a:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 &= \left(2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 \\ (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{y^2} + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{y^2} + y^2 \\ -4cx - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} -4cx - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ cx + a^2 &= -a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}} \right\} \text{Simplificando} \\ cx + a^2 &= -a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} -4cx - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ cx + a^2 &= -a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}} \right\} \text{Elevando al cuadrado} \\ (cx + a^2)^2 &= \left(-a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 \\ c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 &= a^2[(x+c)^2 + y^2] \\ c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) \\ c^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^4 &= a^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 \\ c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\ x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \end{aligned}$$

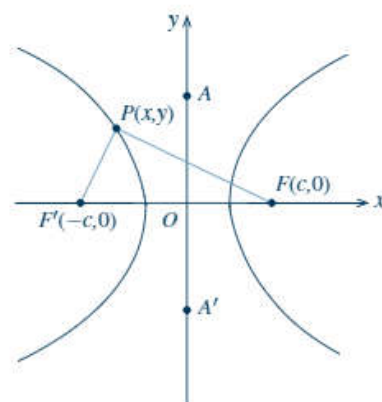


Figura 3.33

Dado que $c > a$, $c^2 - a^2$ es un número positivo que puede ser reemplazado por b^2 , es decir: $b^2 = c^2 - a^2$.
Al sustituir en la última ecuación, resulta:

$$\begin{aligned} x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\ b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Dividiendo entre } a^2b^2$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Ecuación canónica de la hipérbola.}$$

Discutiendo la ecuación anterior, se observa que las intersecciones con el eje x son a y $-a$, por lo que las coordenadas de los vértices son $V(a,0)$ y $V'(-a,0)$; la longitud del eje transversal es igual a $2a$; las coordenadas de los extremos del eje conjugado son $A(0,b)$ y $A'(0,-b)$; la longitud del eje conjugado es igual a $2b$.

La ecuación canónica o primera ecuación ordinaria $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ representa una hipérbola simétrica con respecto a los ejes coordenados y al origen.

Si de la ecuación de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, al despejar a y resulta:

$$\begin{aligned} -a^2y^2 &= a^2b^2 - b^2x^2 & y^2 &= \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2} \\ -a^2y^2 &= -b^2(x^2 - a^2) & y &= \pm \frac{a}{b} \sqrt{x^2 - a^2} \\ y^2 &= \frac{-b^2(x^2 - a^2)}{-a^2} \end{aligned}$$

Para que los valores de y sean reales, x está restringida a variar dentro de los intervalos definidos por $x \leq -a$ y $x \geq a$; por lo anterior, ninguna porción del lugar geométrico está contenida entre las rectas limitantes $x = -a$ y $x = a$.

Si de la ecuación de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, al despejar a x resulta:

$$\begin{aligned} b^2x^2 &= a^2b^2 + a^2y^2 & x &= \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2} \\ x^2 &= \frac{a^2(b^2 + y^2)}{b^2} \end{aligned}$$

Por lo anterior, los valores de x son reales para cualquier valor real de y .

Las ecuaciones $y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{x^2 - a^2}$, $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}$ y $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hacen notar que la hipérbola no es una curva cerrada sino que está formada por dos **ramas** diferentes, una de las cuales se extiende indefinidamente hacia la derecha del eje y , hacia arriba y hacia abajo del eje x ; la otra rama se extiende hacia la izquierda del eje y , hacia arriba y hacia abajo del eje x .

La hipérbola no tiene asíntotas verticales ni horizontales; sin embargo, presenta **asíntotas oblicuas**.

La abscisa del foco F es c ; si en $y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{x^2 - a^2}$ sustituimos x por este valor, se obtienen las ordenadas correspondientes $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{c^2 - a^2}$, aplicando la relación $b^2 = c^2 - a^2$, tenemos: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{b^2} = \pm \frac{b^2}{a}$, por lo tanto, la longitud del lado recto para el foco F es $\frac{2b^2}{a}$; de la misma manera, la longitud del lado recto para el foco F' es $-\frac{2b^2}{a}$.

La excentricidad e de una hipérbola se define por la razón: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ y como, $c > a$ la excentricidad de una hipérbola es mayor que la unidad ($e > 1$).

Si el centro de la hipérbola está en el origen y su eje focal coincide con el eje y , su ecuación es:

$$\left. \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \right\} \text{ Ecuación canónica de la hipérbola.}$$

Las ecuaciones de las directrices dd y $d'd'$ son $x = \pm \frac{a}{e}$ cuando los focos están sobre el eje x ; si están sobre el eje y , las ecuaciones son $y = \pm \frac{a}{e}$.

La posición de una hipérbola con relación a los ejes coordenados se determina por los **signos** de los coeficientes de las variables en la forma canónica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$; la variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transversal de la hipérbola.

EJEMPLOS

Ejemplos

1. Dada la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$, determina las coordenadas de los vértices, focos y extremos del eje conjugado, las longitudes de los ejes transversal y conjugado, la longitud del lado recto, las ecuaciones de las directrices y la excentricidad. Traza la gráfica correspondiente.

Solución

Al dividir la ecuación $9x^2 - 4y^2 = 36$ entre 36, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} &= \frac{36}{36} \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Como la posición de la hipérbola con relación a los ejes coordenados se determina por los signos de los coeficientes de las variables en la ecuación de la forma canónica, la variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transversal de la hipérbola.

Por lo anterior, se deduce que los focos de la hipérbola están sobre el eje x , es decir:

$$\begin{array}{cc} a^2 = 4 & y & b^2 = 9 \\ a = 2 & & b = 3 \end{array}$$

Aplicando la relación $b^2 = c^2 - a^2$, resulta:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= 4 + 9 \\ c^2 &= 13 & y & c = \sqrt{13} \end{aligned}$$

Las coordenadas de los vértices son:

$$\begin{array}{cc} V(a, 0) & y & V'(-a, 0) \\ V(2, 0) & & V'(-2, 0) \end{array}$$

Las coordenadas de los focos son:

$$\begin{array}{cc} F(c, 0) & y & F'(-c, 0) \\ F(\sqrt{13}, 0) & & F'(-\sqrt{13}, 0) \end{array}$$

Las coordenadas de los puntos extremos del eje conjugado son:

$$\begin{array}{ccc} A(0,b) & y & A'(0,-b) \\ A(0,3) & & A'(0,-3) \end{array}$$

La longitud del semieje transverso es $a = 2$ y la del eje transverso es $2a = 4$; la longitud del semieje conjugado es $b = 3$ y la del eje conjugado es $2b = 6$.

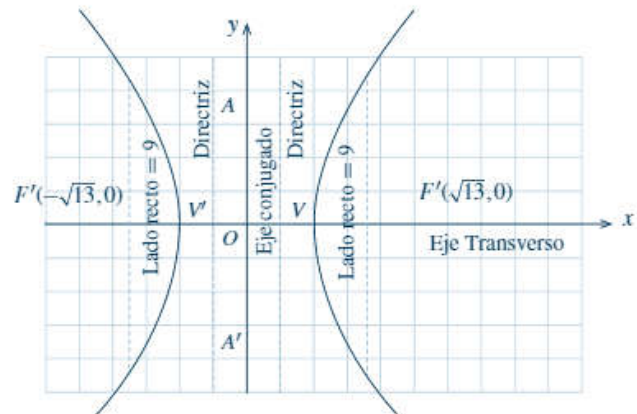
La longitud de cada lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{2} = 9$.

La excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} = 1.802$ ($e > 1$)

Las ecuaciones de directrices son $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{2}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \pm \frac{4}{\sqrt{13}}$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, tenemos:

x	y
0	±2
±1	±2.10
±2	±2.40
±3	±2.82
±4	±3.33
±5	±3.88
±6	±4.47
±7	±5.07
±8	±5.69



- 2 ••• Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(0,2)$ y $V'(0,-2)$, y sus focos son los puntos $F(0,3)$ y $F'(0,-3)$; determina su ecuación, las coordenadas de los puntos extremos del eje conjugado, las longitudes del eje transverso y conjugado, la longitud de cada lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las directrices; traza la gráfica correspondiente.

Solución

Como las coordenadas de los vértices y los focos están sobre el eje y el eje transversal coincide con dicho eje coordenado, también el punto medio del eje transversal es el origen del sistema coordenado.

Por lo anterior, la ecuación de la hipérbola por aplicar tiene la forma: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

De los datos dados, se tiene:

$$\begin{array}{ccc} a = 2 \text{ y } c = 3 \\ a^2 = 4 & & c^2 = 9 \end{array}$$

Aplicando la relación $b^2 = c^2 - a^2$, resulta:

$$\begin{array}{ccc} b^2 = 9 - 4 \\ b^2 = 5 & y & b = \sqrt{5} \end{array}$$

La ecuación de la hipérbola es $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ o $5y^2 - 4x^2 = 20$.

Las coordenadas de los puntos extremos del eje conjugado son:

$$\begin{array}{ccc} A(b,0) & & A'(-b,0) \\ A(\sqrt{5},0) & y & A'(-\sqrt{5},0) \end{array}$$

La longitud del semieje transverso es $a = 2$ y la del eje transverso $2a = 4$; la longitud del semieje conjugado es $b = \sqrt{5}$ y la del eje conjugado es $2b = 2\sqrt{5}$.

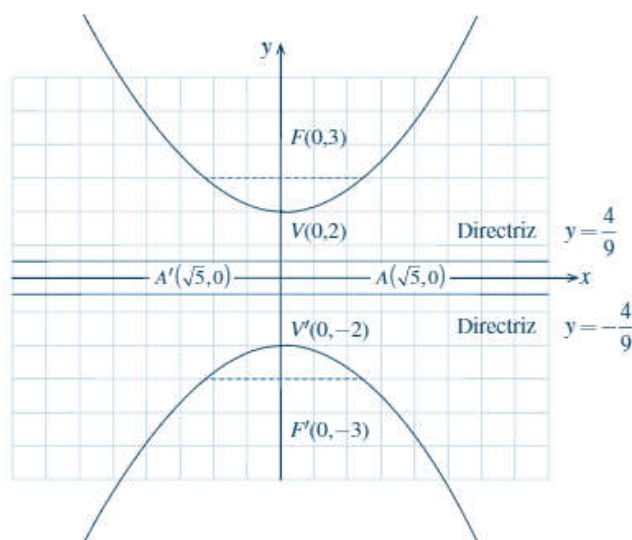
La longitud de cada lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{2} = 5$.

La excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a} = \frac{9}{2} = 4.5$ ($e > 1$).

Las ecuaciones de las directrices son $y = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{2}{9} = \pm \frac{4}{9}$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:

x	y
0	±2
±1	±2.19
±2	±2.68
±3	±3.34
±4	±4.09
±5	±4.89
±6	±5.72



Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola

Normalmente se requiere determinar la ecuación de una hipérbola con centro fuera del origen coordenado y que tenga su eje focal paralelo a uno de los ejes del sistema coordenado.

Considerando la hipérbola de la Figura 3.34, tenemos que su centro es el punto $O'(h,k)$ y cuyo eje focal es paralelo al eje de las x ; sean también $2a$, $2b$ y $2c$ las respectivas longitudes de los ejes transverso, conjugado y entre los focos.

Si transportamos los ejes del sistema coordenado, haciendo que el nuevo origen (O') coincida con el centro

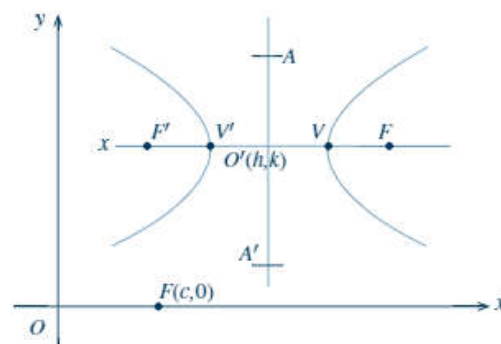


Figura 3.34

de la hipérbola (h,k) , establecemos que la ecuación de la hipérbola con relación a los nuevos ejes coordenados x' y y' , es $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$ (3)

Aplicando el siguiente principio: Si los ejes coordenados de un sistema se transportan a un nuevo origen $O'(h,k)$; si las coordenadas de un punto cualquiera P son (x,y) y (x',y') antes y después de la transportación de ejes, respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema coordenado, son: $(x = x' + h)$ y $(y = y' + k)$.

Al despejar para x' y y' , resulta:

$$\begin{aligned} x &= x' + h & y &= y' + k \\ x' &= x - h & y' &= y - k \end{aligned}$$

Al sustituir las igualdades anteriores en la ecuación de la hipérbola (3), se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola.}$$

Las coordenadas de los focos para la hipérbola de centro en el origen son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$; para la hipérbola de centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje x , son: $F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$.

Las coordenadas de los vértices para la hipérbola de centro en el origen son $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$; para la hipérbola de centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje x son $V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k)$.

Las coordenadas de los extremos del eje conjugado para la hipérbola de centro en el origen son $A(0, b)$ y $A'(0, -b)$, para la hipérbola de centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje x son $A(h, k + b)$ y $A'(h, k - b)$.

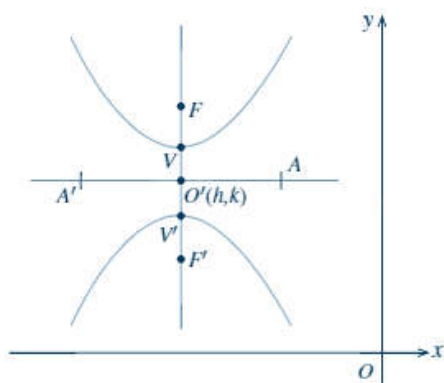


Figura 3.35

Considerando la hipérbola de la figura 3.35, tenemos que su centro es el punto $O'(h,k)$ cuyo eje focal es paralelo al eje y ; donde $2a$, $2b$ y $2c$ son las longitudes de los ejes transverso, conjugado entre los focos.

Si se transportan los ejes del sistema coordenado, haciendo que el nuevo origen (O') coincida con el centro de la hipérbola (h,k) , se establece que la ecuación de la hipérbola con relación a los nuevos ejes coordenados x' y y' es

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1. \quad (4)$$

Por el principio de la transportación de ejes coordenados, $x' = x - h$ y $y' = y - k$.

Al sustituir las igualdades anteriores en la ecuación de la elipse (4), se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola.}$$

Las coordenadas de los focos para la hipérbola de centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje y son $F(h, k + c)$ y $F'(h, k - c)$.

Las coordenadas de los vértices para dicha hipérbola son $V(h, k + a)$ y $V'(h, k - a)$; también las coordenadas de los extremos del eje conjugado para la misma hipérbola son $A(h + b, k)$ y $A'(h - b, k)$.

EJEMPLOS



- 1 • Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(3, -1)$ y $V'(3, 3)$, y su excentricidad es $\frac{3}{2}$; determina la ecuación de la hipérbola y todos sus otros elementos. Traza la gráfica correspondiente.

Solución

Dado que los vértices $V(3, -1)$ y $V'(3, 3)$ están sobre el eje focal y de acuerdo con sus coordenadas, se observa que tienen la misma abscisa 3, por tanto, dicho eje es paralelo al eje y ; así, la ecuación de la hipérbola para aplicar tiene la forma:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento $\overline{VV'}$ (eje transversal de la hipérbola), por lo que sus coordenadas son:

$$h = \frac{x_V + x_{V'}}{2}$$

$$h = \frac{3 + 3}{2} = \frac{6}{2}$$

$$h = 3$$

$$k = \frac{y_V + y_{V'}}{2}$$

$$k = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2}$$

$$k = 1$$

El centro de la hipérbola es $O'(3, 1)$.

Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos, se determina la longitud del eje transversal de la hipérbola, es decir:

$$d = \overline{VV'} = 2a = \sqrt{(x_V - x_{V'})^2 + (y_V - y_{V'})^2}$$

$$2a = \sqrt{(3 - 3)^2 + (-1 - 3)^2}$$

$$2a = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16}$$

$$2a = 4$$

La longitud del semieje transversal es: $2a = 4$

$$a = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{y} \quad a^2 = 4$$

Si la excentricidad de la hipérbola es $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ y $a = 2$, resulta:

$$\frac{c}{2} = \frac{3}{2}$$

$$c = \frac{\cancel{2}(3)}{\cancel{2}}$$

$$c = 3 \quad \text{y} \quad c^2 = 9$$

Sea la longitud entre los focos de $2c = 6$. Por la relación $b^2 = c^2 - a^2$, resulta:

$$b^2 = 9 - 4$$

$$b^2 = 5 \quad \text{y} \quad b = \sqrt{5} \quad \left. \vphantom{b^2 = 5} \right\} \text{Longitud del semieje conjugado.}$$

La longitud del eje conjugado es $2b = 2\sqrt{5}$.

Las coordenadas de los focos de la hipérbola son:

$$F(h, k + c) \quad \text{y} \quad F'(h, k - c)$$

$$F(3, 1 + 3) \quad F'(3, 1 - 3)$$

$$F(3, 4) \quad F'(3, -2)$$

Las coordenadas de los puntos extremos del eje conjugado son:

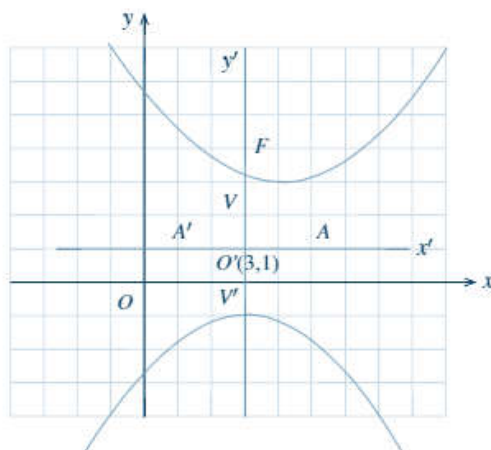
$$A(h + b, k) \quad A'(h - b, k)$$

$$A(3 + \sqrt{5}, 1) \quad A'(3 - \sqrt{5}, 1)$$

$$\text{La longitud de cada lado recto es } LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{2} = 5$$

$$\text{La ecuación de la hipérbola es } \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{5} = 1.$$

Gráficamente, tenemos:



- 2 •• El centro de una hipérbola es el punto $O'(3, -3)$ y uno de sus vértices es el punto $V'(0, -3)$; si la longitud de su lado recto es 9, determina la ecuación de la cónica, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado y su excentricidad.

Solución

Dado que el vértice $V'(0, -3)$ y el centro $O'(3, -3)$ de la hipérbola están sobre el eje focal y de acuerdo con sus coordenadas, se observa que tienen la misma ordenada -3 , por tanto, dicho eje es paralelo al eje x ; así, la ecuación de la hipérbola por aplicar tiene la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento $\overline{VV'}$ (eje transverso de la hipérbola); si las coordenadas del centro son $O'(3, -3)$ y las del vértice $V'(0, -3)$, por tanto, las coordenadas del otro vértice $V(x_v, y_v)$ son:

$$\begin{aligned} h &= \frac{x_v + x_{v'}}{2} & k &= \frac{y_v + y_{v'}}{2} \\ 3 &= \frac{x_v + 0}{2} & -3 &= \frac{y_v - 3}{2} \\ x_v &= 6 & y_v - 3 &= 2(-3) \\ & & y_v &= -6 + 3 \\ & & y_v &= -3 \end{aligned}$$

Las coordenadas del otro vértice son $V(6, -3)$.

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, se determina la longitud del eje transverso de la hipérbola, es decir:

$$\begin{aligned} d &= \overline{VV'} = 2a = \sqrt{(x_v - x_{v'})^2 + (y_v - y_{v'})^2} \\ 2a &= \sqrt{(6 - 0)^2 + (-3 + 3)^2} \\ 2a &= \sqrt{(6)^2 + (0)^2} = \sqrt{36} \\ 2a &= 6 \end{aligned}$$

La longitud del semieje transverso es $2a = 6$.

$$a = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{y} \quad a^2 = 9$$

Si la longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a} = 9$ y $a = 3$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{2b^2}{3} &= 9 \\ 2b^2 &= 27 \\ b^2 &= \frac{27}{2} \text{ y } b = \sqrt{\frac{27}{2}} = 3\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{2b^2}{3} &= 9 \\ 2b^2 &= 27 \\ b^2 &= \frac{27}{2} \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Longitud del semieje} \\ \text{conjugado.} \end{array}$$

La longitud del eje conjugado es $2b = 6\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Las coordenadas de los extremos del eje conjugado son:

$$\begin{aligned} A(h, k + b) & & A'(h, k + b) \\ A\left(3, -3 + 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right) & & A'\left(3, -3 - 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

Por la relación $b^2 = c^2 - a^2$, resulta:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= 9 + \frac{27}{2} \\ c^2 &= \frac{18 + 27}{2} \\ c^2 &= \frac{45}{2} \quad \text{y} \quad c = \sqrt{\frac{45}{2}} = 3\sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

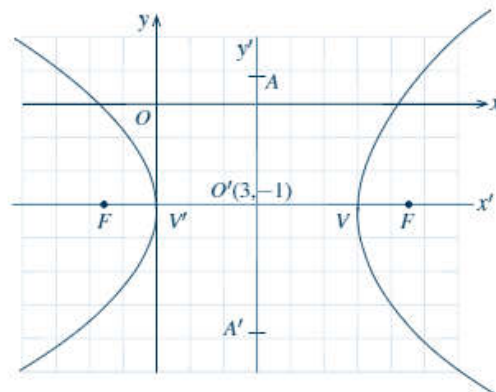
Las coordenadas de los focos de la hipérbola son:

$$\begin{array}{ll} F(h+c, k) & F'(h+c, k) \\ F\left(3+3\sqrt{\frac{5}{2}}, -3\right) & F'\left(3-3\sqrt{\frac{5}{2}}, -3\right) \end{array}$$

La excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \ (e > 1)$.

La ecuación de la hipérbola es $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{2(y+3)^2}{27} = 1$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



Forma general de la ecuación de la hipérbola

Al desarrollar las ecuaciones de la hipérbola escrita en su segunda forma ordinaria, se tiene:

a) Al eliminar denominadores y desarrollar los binomios al cuadrado, resulta:

$$\begin{array}{ll} \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 & \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \\ \frac{b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1 & \frac{b^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2}{a^2b^2} = 1 \end{array}$$

$$b^2(x^2 - 2hx + h^2) - a^2(y^2 - 2ky + k^2) = a^2b^2$$

$$b^2(y^2 - 2ky + k^2) - a^2(x^2 - 2hx + h^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 - a^2y^2 + 2a^2ky - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

$$b^2y^2 - 2b^2ky + b^2k^2 - a^2x^2 + 2a^2hx - a^2h^2 - a^2b^2 = 0$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

$$b^2y^2 - a^2x^2 + 2a^2hx - 2b^2ky - a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

(4)

(5)

Para la ecuación (4), se establecen las siguientes igualdades:

$A = b^2$; $C = -a^2$; $D = -2b^2h$; $E = 2a^2k$ y $F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$; al sustituir, resulta:

$$x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo,} \\ \text{al eje } x \text{ escrita en su forma general.} \end{array}$$

Para la ecuación (5), se establecen las siguientes igualdades:

$A = b^2$; $C = -a^2$; $D = 2a^2h$; $E = -2b^2k$ y $F = -a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$; al sustituir, resulta:

$$Ay^2 + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} Ay^2 + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Ay^2 + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo,} \\ \text{al eje } y, \text{ escrita en su forma general.} \end{array}$$

Los coeficientes A y C de ambas ecuaciones generales deben ser de signo diferente.

EJEMPLO

Ejemplo 1

- El centro de una hipérbola es el punto $O'(5,4)$ y uno de sus focos es $F(5,8)$; si la excentricidad de la hipérbola es 2, determina su ecuación en la forma general y todos los elementos correspondientes.

Solución

Dado que el foco $F(5,8)$ y el centro $O'(5,4)$ de la hipérbola están sobre el eje focal y de acuerdo con sus coordenadas, se observa que tienen la misma abscisa 5, por tanto, dicho eje es paralelo al eje y ; así, la ecuación de la hipérbola por aplicar en su segunda forma ordinaria es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento $\overline{FF'}$ (eje focal de la hipérbola); si las coordenadas del centro son $O'(5,4)$ y las del foco $F(5,8)$, las coordenadas del otro foco $F'(x_F, y_{F'})$ son:

$$\begin{array}{ll} h = \frac{x_F + x_{F'}}{2} & k = \frac{y_F + y_{F'}}{2} \\ 5 = \frac{5 + x_{F'}}{2} & 4 = \frac{8 + y_{F'}}{2} \\ 5 + x_{F'} = 10 & 8 + y_{F'} = 8 \\ x_{F'} = 10 - 5 & y_{F'} = 8 - 8 \\ x_{F'} = 5 & y_{F'} = 0 \end{array}$$

Las coordenadas del otro foco son $F(5,0)$.

Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos, se determina la longitud entre los focos de la hipérbola, es decir:

$$\begin{aligned} d = \overline{FF'} &= 2c = \sqrt{(x_F - x_{F'})^2 + (y_F - y_{F'})^2} \\ 2c &= \sqrt{(5 - 5)^2 + (8 - 0)^2} \\ 2c &= \sqrt{(0)^2 + (8)^2} = \sqrt{64} \\ 2c &= 8 \end{aligned}$$

La longitud del centro a cada foco es $2c = 8$.

$$c = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{y} \quad c^2 = 16$$

Si la excentricidad de la hipérbola es $\frac{c}{a} = 2$ y $c = 4$, se tiene:

$$\frac{4}{a} = 2$$

$$2a = 4$$

$$a = \frac{4}{2}$$

$$a = 2 \quad \text{y} \quad a^2 = 4$$

Por la relación $b^2 = c^2 - a^2$, resulta:

$$b^2 = 16 - 4$$

$$b^2 = 12 \quad \text{y} \quad b = 2\sqrt{3}$$

Las coordenadas de los vértices de la hipérbola son:

$$V(h, k + a) \quad \text{y} \quad V'(h, k - a)$$

$$V(5, 4 + 2) \quad \text{y} \quad V'(5, 4 - 2)$$

$$V(5, 6) \quad \text{y} \quad V'(5, 2)$$

Las coordenadas de los puntos extremos del eje conjugado son:

$$A(h + b, k) \quad \text{y} \quad A'(h - b, k)$$

$$A(5 + 2\sqrt{3}, 4) \quad \text{y} \quad A'(5 - 2\sqrt{3}, 4)$$

La longitud dd semieje transverso es $a = 2$ y la del eje transverso $2a = 4$.

La longitud del semieje conjugado es $b = 2\sqrt{3}$ y la del eje conjugado es $2b = 4\sqrt{3}$.

La longitud de cada lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(12)}{2} = 12$.

La ecuación de la hipérbola en su segunda forma ordinaria es:

$$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-5)^2}{12} = 1$$

Al transformar la ecuación de la hipérbola de su segunda forma ordinaria a la forma general, se tiene:

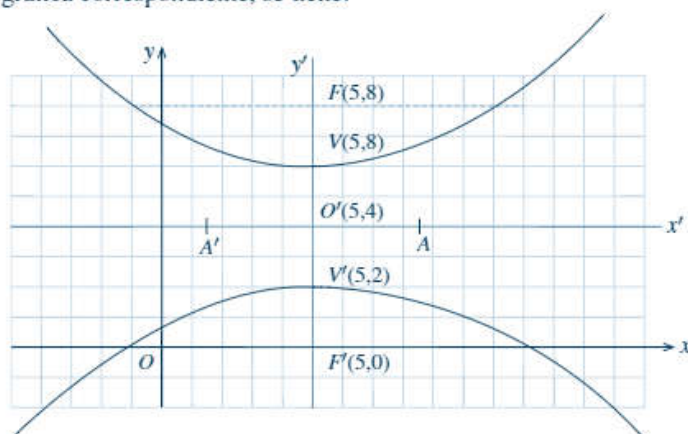
$$\left. \begin{aligned} \frac{3(y-4)^2 - (x-5)^2}{12} = 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Eliminando denominadores y desarrollando} \\ \text{los binomios al cuadrado} \end{array}$$

$$3(y^2 - 8y + 16) - (x^2 - 10x + 25) = 12$$

$$3y^2 - 24y + 48 - x^2 + 10x - 25 - 12 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} 3y^2 - x^2 + 10x - 24y + 11 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de la hipérbola de eje focal paralelo} \\ \text{al eje y, escrita en su forma general.} \end{array}$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



EJERCICIO 28

- I. Determina las coordenadas de los vértices, focos y de los puntos extremos del eje conjugado; las longitudes de los ejes transverso y conjugado; la longitud de cada lado recto; la excentricidad y las directrices para cada una de las siguientes ecuaciones de la hipérbola, traza la gráfica correspondiente.
 1. $36x^2 - 64y^2 = 2304$
 2. $16x^2 - 9y^2 = 144$
 3. $x^2 - 3y^2 = 6$
 4. $7x^2 - 9y^2 = 252$
 5. $y^2 - x^2 = 25$
 6. $3y^2 - 4x^2 = 12$
- II. Resuelve los siguientes problemas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(3,0)$ y $V'(-3,0)$ y sus focos los puntos $F(5,0)$ y $F'(-5,0)$; determina la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, la longitud de cada lado recto, la excentricidad y las directrices. Traz la gráfica correspondiente.
2. Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(2,0)$ y $V'(-2,0)$ y sus focos son los puntos $F(3,0)$ y $F'(-3,0)$; determina la ecuación de la hipérbola y sus otros elementos. Traz la gráfica correspondiente.
3. El eje transverso de una hipérbola está sobre el eje y y su centro en el origen coordenado; si un foco es el punto $F(0,7)$ y la excentricidad es igual a 4. Determina la ecuación de la hipérbola y la longitud de cada lado recto.
4. Los extremos del eje conjugado de una hipérbola son los puntos $A(0,4)$ y $A'(0,-4)$ y la longitud de cada lado recto es 8; determina la ecuación de la hipérbola y su excentricidad.
5. Los vértices de una hipérbola son $V(4,0)$ y $V'(0,-4)$ y su excentricidad es igual a $\frac{3}{2}$; determina la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.
6. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso sobre el eje x ; determina su ecuación si se sabe que su excentricidad es $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ y que la curva pasa por el punto $P(-2,-1)$.
7. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje conjugado está sobre el eje x ; la longitud de cada lado recto es $\frac{2}{3}$ y la hipérbola pasa por el punto $P(1-2)$. Determina su ecuación.
8. Determina la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $M(4,6)$ y $N(1,-3)$, tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje y .
9. Si k es un número cualquiera diferente de cero, demuestra que la ecuación $5x^2 - 5y^2 = k$ representa una familia de hipérbola de excentricidad igual a $a\sqrt{2}$.
10. Determina e identifica la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(0,6)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $2y - 3 = 0$.

III. Determina las longitudes de los radios vectores para cada una de las siguientes hipérbolas en el punto indicado.

1. $x^2 - y^2 = 9$ en $P(5,4)$.
2. $4x^2 - 5y^2 = 16$ en $P(3,2)$.
3. $9x^2 - 16y^2 = 81$ en $P(5,3)$.
4. $5y^2 - 4x^2 = 16$ en $P(4,4)$.
5. $3y^2 - x^2 = 6$ en $P(\sqrt{6}, 2)$.
6. $9y^2 - 4x^2 = 36$ en $P(3\sqrt{3}, 4)$.

IV. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute el procedimiento de solución.

1. Determina la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y cuyo eje transversal está sobre el eje x y su longitud es de 6 unidades; la cónica pasa por el punto $P(5,3)$.
2. Determina la ecuación de la hipérbola de ejes paralelos a los de coordenadas y con centro en el origen, si el lado recto vale 18 y la distancia entre los focos es 12 (doble solución).
3. Determina la ecuación de la hipérbola cuyas coordenadas de los focos son $F(0,3)$ y $F'(0,-3)$, si la longitud de su eje conjugado es 5.
4. Determina la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, su eje transversal coincide con el eje x , su excentricidad es $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ y la longitud de cada lado recto es 6.
5. Determina el lugar geométrico de los puntos (x,y) cuya distancia al punto fijo $F(4,0)$ sea igual a $\frac{4}{3}$ de la correspondiente a la recta $4x - 9 = 0$.
6. Encuentra la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y uno de sus vértices el punto $V(4,0)$ y la longitud de cada lado recto es igual a 20.
7. Determina la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y que pasa por el punto $M(2,0)$ y uno de sus vértices es punto $V(0, > 4)$.
8. Determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $F(0,6)$ sea igual a $\frac{3}{2}$ de la correspondiente a la recta $3y - 8 = 0$.
9. Determina la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, ejes sobre los de las coordenadas y que pase por los puntos $M(3,1)$ y $N(9,5)$.
10. Encuentra la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y de vértices los puntos $V(6,0)$ y $V'(-6,0)$ y cuya excentricidad es igual a $\frac{4}{3}$.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Determinación de la ecuación de las asíntotas de la hipérbola

Definición de asíntota

Línea recta de la cual se aproxima cada vez más a una curva pero nunca llega a tocarla.

Asíntotas de la hipérbola

Sea $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ la ecuación de la hipérbola en su forma canónica; al despejar con respecto a y , se tiene:

$$\begin{aligned} a^2y^2 &= b^2x^2 - a^2b^2 \\ y^2 &= \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2} \\ y &= \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \end{aligned}$$

También puede escribirse como:

$$\left. \begin{aligned} y &= \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2) \left(\frac{x^2}{x^2} \right)} \\ y &= \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2} \right)} \\ y &= \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right)} \\ y &= \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \end{aligned} \right\} \text{ Al multiplicar y dividir por} \\ \text{una misma cantidad}$$

Si un punto $P(x, y)$ de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ se mueve a lo largo de la curva de manera que la abscisa x aumenta numéricamente sin límite, se observa que el radical del segundo miembro de la ecuación

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \text{ se aproxima más y más a la unidad. Así la ecuación tiende a la forma } y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Por lo anterior, se deduce que las rectas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$, son asíntotas de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Demostración

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera ubicado en la parte superior de la rama derecha de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, tal como se indica en la Figura 3.36.

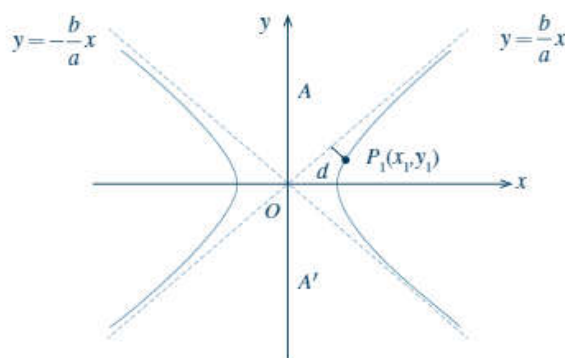


Figura 3.36

La ecuación de la recta $y = \frac{b}{a}x$ también puede escribirse en la forma $bx - ay = 0$.

Aplicando la fórmula de distancia de una recta a un punto dado, tenemos que la distancia de la recta $bx - ay = 0$ al punto $P_1(x_1, y_1)$ es $d = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$.

Al multiplicar y dividir el segundo miembro de la ecuación por $|bx_1 + ay_1|$, resulta:

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) \left(\frac{|bx_1 + ay_1|}{|bx_1 + ay_1|} \right) \\ d &= \frac{|b^2x_1^2 - a^2y_1^2|}{|bx_1 + ay_1|\sqrt{b^2 + a^2}} \end{aligned}$$

Dado que $P_1(x_1, y_1)$ pertenece a la hipérbola $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$; al sustituir en la ecuación de distancia, se tiene:

$$d = \frac{a^2b^2}{|bx_1 + ay_1|\sqrt{b^2 + a^2}}$$

Si P_1 se mueve a lo largo de la cónica y se aleja indefinidamente hacia la derecha del origen, se observa que ambas coordenadas de dicho punto aumentan de valor, de tal manera que la distancia (d) disminuye continuamente aproximándose a cero.

Por lo anterior, se establece que $bx - ay = 0$ es una asíntota de la rama derecha de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Dado que $P_1(x_1, y_1)$ está ubicado en la parte inferior de la rama izquierda de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, moviéndose a lo largo de la cónica y alejándose indefinidamente hacia la izquierda del origen, se observa que las coordenadas de dicho punto aumentan ambas de valor en la dirección negativa, de tal manera que la distancia (d) disminuye continuamente aproximándose a cero.

Por lo anterior, se establece que $bx - ay = 0$ es una asíntota de la rama izquierda de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera ubicado en la parte superior de la rama izquierda de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, tal como se indica en la figura 3.37.

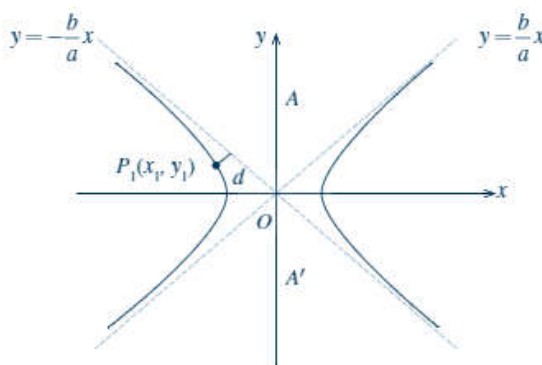


Figura 3.37

La ecuación de la recta $y = -\frac{b}{a}x$ también puede escribirse en la forma $bx + ay = 0$.

Aplicando la fórmula de distancia de una recta a un punto dado, se tiene que la distancia de la recta $bx + ay = 0$ al punto $P_1(x_1, y_1)$ es:

$$d = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

Al multiplicar y dividir el segundo miembro de la ecuación por $|bx_1 - ay_1|$, resulta:

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{|bx_1 + ay_1|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) \left(\frac{|bx_1 - ay_1|}{|bx_1 - ay_1|} \right) \\ d &= \frac{|b^2x_1^2 - a^2y_1^2|}{|bx_1 - ay_1|\sqrt{b^2 + a^2}} \end{aligned}$$

Dado que $P_1(x_1, y_1)$ pertenece a la hipérbola $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$, al sustituir en la ecuación de la distancia, tenemos que:

$$d = \frac{a^2b^2}{|bx_1 - ay_1|\sqrt{b^2 + a^2}}$$

Si P_1 se mueve a lo largo de la cónica y se aleja indefinidamente hacia la izquierda del origen, se observa que las coordenadas de dicho punto aumentan ambas de valor, x_1 , en dirección negativa y y_1 en dirección positiva; de tal manera que la distancia (d) disminuye continuamente aproximándose a cero.

Por lo anterior, se establece que $bx + ay = 0$ es una asíntota de la rama izquierda de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

En el caso en que $P_1(x_1, y_1)$ está ubicado en la parte inferior de la rama derecha de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, moviéndose a lo largo de la cónica y alejándose indefinidamente hacia la derecha del origen, se observa que las coordenadas de dicho punto aumentan ambas de valor, x_1 en dirección positiva y y_1 en dirección negativa; de tal manera que la distancia (d) disminuye continuamente aproximándose a cero.

Por lo anterior, se establece que $bx + ay = 0$ es una asíntota de la rama derecha de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

También las ecuaciones de las asíntotas, para una hipérbola cuya ecuación canónica es $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, se obtienen al sustituir el término constante (a^2b^2) por cero y factorizando el primer miembro de la ecuación, es decir:

$$\begin{aligned} b^2x^2 - a^2y^2 &= 0 \\ (bx + ay)(bx - ay) &= 0 \end{aligned}$$

$bx + ay = 0$ y $bx - ay = 0$ son las ecuaciones de las asíntotas para la hipérbola de ecuación canónica $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Sea $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ la ecuación de la hipérbola en su segunda forma ordinaria de eje transversal paralelo al eje x .

Las ecuaciones de las asíntotas para dicha cónica son las rectas:

$$y = k + \frac{b}{a}(x-h) \quad \text{y} \quad y = k - \frac{b}{a}(x-h)$$

Sea $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ la ecuación de la hipérbola en su segunda forma ordinaria de eje transversal paralelo al eje y .

Las ecuaciones de las asíntotas para dicha cónica, son las rectas:

$$y = k + \frac{a}{b}(x-h) \quad \text{y} \quad y = k - \frac{a}{b}(x-h)$$

Las ecuaciones de las asíntotas para la hipérbola escrita en su segunda forma ordinaria se determinan al sustituir el término constante (a^2b^2) por cero y factorizando el primer miembro de la ecuación, es decir:

$$\left. \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \right\} \text{ Ecuación de eje transversal paralelo al eje } x.$$

$$\frac{b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2 \quad \left. \vphantom{b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2} \right\} \text{ Al sustituir el término constante } (a^2b^2) \text{ por cero, se tiene:}$$

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = 0 \quad \left. \vphantom{b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = 0} \right\} \text{ Factorizando}$$

$$[b(x-h) + a(y-k)][b(x-h) - a(y-k)] = 0$$

$$b(x-h) + a(y-k) = 0$$

$$a(y-k) = -b(x-h)$$

$$y-k = -\frac{b(x-h)}{a}$$

$$y = k - \frac{b}{a}(x-h)$$

$$b(x-h) - a(y-k) = 0 \quad \left. \vphantom{b(x-h) - a(y-k) = 0} \right\} \text{ Al despejar a y}$$

$$-a(y-k) = -b(x-h)$$

$$y-k = \frac{-b(x-h)}{-a}$$

$$y = k + \frac{b}{a}(x-h)$$

De la misma forma se obtienen las ecuaciones de las asíntotas para la ecuación de la hipérbola en su segunda forma ordinaria y de eje transverso paralelo al eje y .

Hipérbola equilátera o rectangular

Si las longitudes de los ejes transversos y conjugado de una hipérbola son iguales, es decir, $a = b$ y si la ecuación de la cónica es $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, ésta se reduce a:

$$a^2x^2 - a^2y^2 = a^2a^2$$

$$a^2(x^2 - y^2) = a^2a^2$$

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2a^2}{a^2}$$

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Dado que $a = b$, la hipérbola se denomina **hipérbola equilátera**.

Las asíntotas de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, son:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \left. \vphantom{x^2 - y^2 = a^2} \right\} \text{ Igualando la ecuación a cero}$$

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \left. \vphantom{x^2 - y^2 = 0} \right\} \text{ Factorizando en el primer miembro}$$

$$(x+y)(x-y) = 0$$

$x+y$ y $x-y=0$ son las ecuaciones de las asíntotas para la hipérbola equilátera de ecuación $x^2 - y^2 = a^2$.

También se establece que las asíntotas de una hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí, razón por la cual se dice que la **hipérbola equilátera** es una **hipérbola rectangular**.

Si los ejes coordenados se giran en un ángulo de 45° , para la forma particular de la ecuación de la hipérbola equilátera $xy = k$, en donde k es una constante cualquiera diferente de cero, tenemos:

Si k es positiva su gráfica se representa en la Figura 3.38; si k es negativa su gráfica se representa en la figura 3.39. En ambos casos sus asíntotas coinciden con los ejes coordenados.

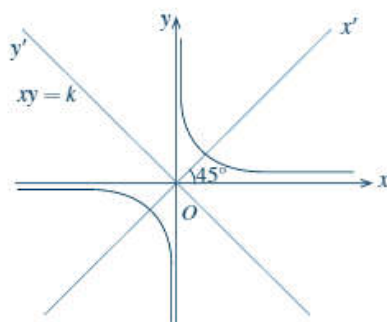


Figura 3.38

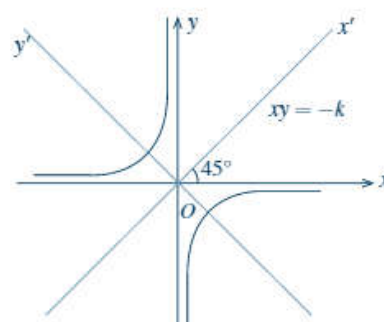


Figura 3.39

Por lo anterior, la ecuación $xy = k$ se transforma en $x'^2 - y'^2 = 2k$, debido a la transportación de ejes coordenados.

Hipérbolas conjugadas

Si el eje transverso de una hipérbola es igual al eje conjugado de otra hipérbola y viceversa, se establece que las dos hipérbolas son conjugadas.

Si la ecuación canónica o primera forma ordinaria de la hipérbola es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, la ecuación de la hipérbola conjugada es $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Un par de hipérbolas conjugadas presentan las siguientes características:

- a) Tienen un centro común.
- b) Tienen un par común de asíntotas.
- c) Todos sus focos son equidistantes del centro.

Gráficamente las hipérbolas conjugadas se representan en la figura 3.40.

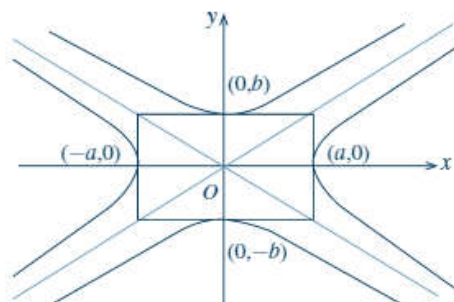


Figura 3.40

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Determina y traza las ecuaciones de las asíntotas para la hipérbola $5x^2 - 4y^2 = 7$.

Solución

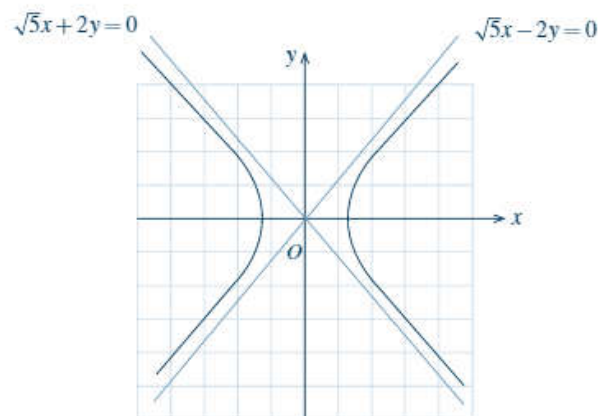
Al sustituyendo el término constante 7 por cero y factorizar el primer miembro de la ecuación de la hipérbola dada, resulta:

$$5x^2 - 4y^2 = 0$$

$$(\sqrt{5}x + 2y)(\sqrt{5}x - 2y) = 0$$

Las ecuaciones de las asíntotas son $\sqrt{5}x + 2y = 0$ y $\sqrt{5}x - 2y = 0$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 ••• Determina y traza las ecuaciones de las asíntotas para la hipérbola $\frac{(y-2)^2}{1} - \frac{(x+5)^2}{4} = 1$.

Solución

Escribiendo la ecuación de la hipérbola dada en su forma lineal, se tiene:

$$\frac{4(y-2)^2 - (x+5)^2}{4} = 1$$

$$4(y-2)^2 - (x+5)^2 = 4$$

Al sustituir el término constante 4 por cero y factorizar el primer miembro de la ecuación resultante, se tiene:

$$4(y-2)^2 - (x+5)^2 = 0$$

$$[2(y-2) + (x+5)][2(y-2) - (x+5)] = 0$$

$$2(y-2) + (x+5) = 0 \qquad 2(y-2) - (x+5) = 0$$

$$2(y-2) = -(x+5) \qquad 2(y-2) = (x+5)$$

$$y-2 = -\frac{(x+5)}{2} \qquad y-2 = \frac{(x+5)}{2}$$

$$y = 2 - \frac{1}{2}(x+5) \qquad y = 2 + \frac{1}{2}(x+5)$$

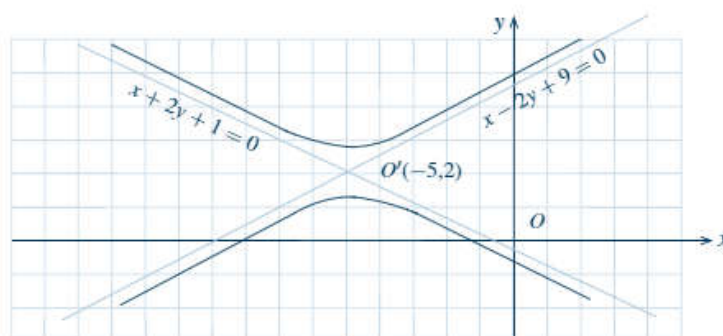
$$y = \frac{4-x-5}{2} \qquad y = \frac{4+x+5}{2}$$

$$2y = -x-1 \qquad 2y = x+9$$

$$x+2y+1=0 \qquad x-2y+9=0$$

Las ecuaciones de las asíntotas son $x + 2y + 1 = 0$ y $x - 2y + 9 = 0$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



3 ●● Analiza y traza la gráfica de la ecuación $xy = 5$.

Solución

a) Intersección con los ejes coordenados

Al hacer $x = 0$ o $y = 0$ en $xy = 5$, la curva no interseca a los ejes coordenados.

b) Simetría

Si en la ecuación dada se sustituye y por $-y$ y x por $-x$, la ecuación se altera, observándose que la curva no es simétrica respecto a los ejes coordenados.

Si a la misma vez se sustituye y por $-y$ y x por $-x$, la ecuación no se altera, es decir:

$$(-x)(-y) = 5$$

$$xy = 5$$

La curva es simétrica respecto al origen coordenado.

c) Extensión

Despejando y en $xy = 5$, se obtiene: $y = \frac{5}{x}$; se hace notar que para cualquier valor real de x , excepto para $x = 0$, la función y también existe.

Despejando x en $xy = 5$, se obtiene: $x = \frac{5}{y}$; se hace notar que para cualquier valor real de y , excepto para $y = 0$ la función x también existe.

La curva es infinita hacia arriba y hacia abajo del eje x y presenta una rama a la derecha del eje y y otra izquierda del mismo eje. Dichas ramas son opuestas e infinitas.

d) Asíntotas

De la ecuación $y = \frac{5}{x}$ se observa que para $x = 0$, la función y se hace infinita, es decir:

$$y = \frac{5}{x} = \frac{5}{0} = \infty$$

De la ecuación $x = \frac{5}{y}$, se observa que para $y = 0$, la función x se hace infinita, es decir:

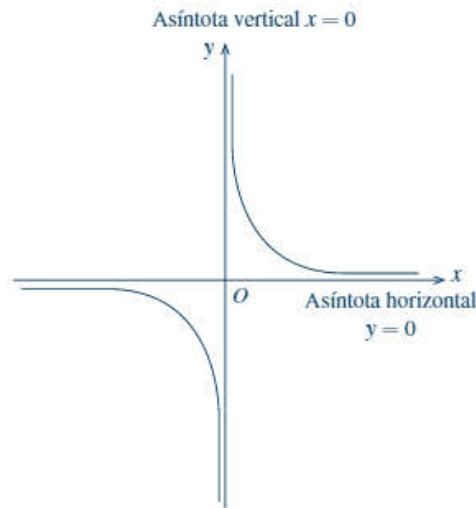
$$x = \frac{5}{y} = \frac{5}{0} = \infty$$

Tenemos una asíntota horizontal para $y = 0$ y una asíntota vertical para $x = 0$.

e) Trazado de la curva

Al obtener una tabla con valores para la ecuación $xy = 5$, se tiene:

y	∞	10	5	2.5	1.25	1	0.625	0.5	-10	-5	-2.5	-1.25	-1	-0.625	-0.5
x	0	0.5	1	2	4	5	8	10	-0.5	-1	-2	-4	-5	-8	-10



- 6 ••• Determina las coordenadas de los vértices y focos; la excentricidad y la longitud de cada lado recto de la hipérbola que es conjugada a la que tiene por ecuación $9x^2 - 4y^2 = 36$.

Solución

Al dividir la ecuación dada entre 36, se tiene:

$$\frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad (1)$$

Por definición, una hipérbola es conjugada de otra cuando su eje transverso es idéntico al eje conjugado de la otra.

De acuerdo con la definición, la hipérbola conjugada de la ecuación (1) tiene por ecuación a $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ (2)

Como la posición de la hipérbola con relación a los ejes coordenados se determina por los signos de los coeficientes de las variables en la ecuación de la forma canónica, la variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso de la hipérbola. Por lo anterior, para la ecuación (2) se deduce que los focos de la hipérbola están sobre el eje y. Así:

$$\begin{array}{lll} a^2 = 9 & y & b^2 = 4 \\ a = 3 & & b = 2 \end{array}$$

Aplicando la relación $b^2 = c^2 - a^2$, resulta:

$$\begin{array}{lll} c^2 = a^2 - b^2 & & \\ c^2 = 9 - 4 & y & c = \sqrt{5} \end{array}$$

Las coordenadas de los vértices son:

$V(0, a)$	y	$V'(0, -a)$
$V(0, 3)$	y	$V'(0, -3)$

Las coordenadas de los focos son:

$$F(0, c)$$

$$F(0, \sqrt{13})$$

$$F'(0, -c)$$

$$F'(0, -\sqrt{13})$$

Las coordenadas de los puntos extremos del eje conjugado, son:

$$A(b, 0)$$

y

$$A'(-b, 0)$$

$$A(2, 0)$$

y

$$A'(-2, 0)$$

La longitud del semieje transversal es $a = 3$ y la del eje transversal es $2a = 6$; la longitud del semieje conjugado es $b = 2$ y la del eje conjugado es $2b = 4$.

La longitud de cada lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$.

La excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} = 1.2018$ ($e > 1$)

Las ecuaciones de las directrices son $y = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{3}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \pm \frac{9}{\sqrt{13}}$.

Las ecuaciones de las asíntotas son:

Para la ecuación (1) $3x - 2y = 0$ y $3x + 2y = 0$.

Para la ecuación (2) $2y - 3x = 0$ y $2y + 3x = 0$.

De la ecuación (1) la longitud del eje transversal es $2a = 4$ y la longitud del eje conjugado es $2b = 6$.

Por la definición de hipérbolas conjugadas, se demuestra que:

eje transversal de (1) = eje conjugado de (2)

eje transversal de (2) = eje conjugado de (1)

$$2a = 2b$$

$$4 = 4$$

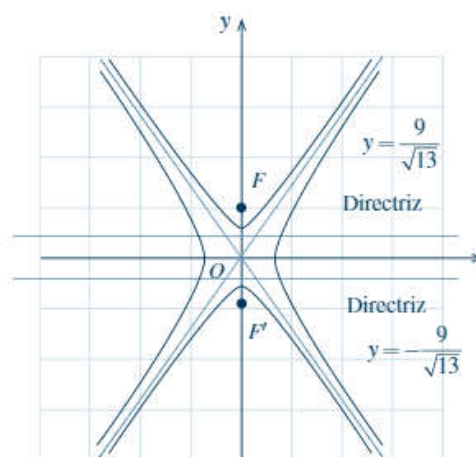
$$2a = 2b$$

$$6 = 6$$

Al tabular respecto a $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ y $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$, se obtiene la gráfica correspondiente:

y	x
0	±2
±1	±2.10
±2	±2.40
±3	±2.82
±4	±3.33
±5	±3.88
±6	±4.47
±7	±5.07
±8	±5.69

y	x
0	±3
±1	±3.35
±2	±4.24
±3	±5.40
±4	±6.70
±5	±8.07
±6	±9.48
±7	±10.92
±8	±12.36



EJERCICIO 29

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Determina y traza las ecuaciones de las asíntotas para cada una de las siguientes hipérbolas.

1. $4x^2 - 9y^2 = 11$

3. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1$

2. $5x^2 - 4y^2 = 7$

4. $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$

II. Resuelve los siguientes problemas.

- Determina la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $M(2,3)$, tiene su centro en el origen, su eje transversal está sobre el eje y y una de sus asíntotas es la recta $2y - \sqrt{7}x = 0$.
- Determina la distancia del foco que se encuentra a la derecha de la hipérbola $12x^2 - 4y^2 = 48$ a cualquiera de sus dos asíntotas.
- Determina la distancia del foco de arriba de la hipérbola $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$ a cualquiera de sus dos asíntotas.
- Determina los puntos de intersección de la recta $9x - 2y - 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola $9y^2 - 4x^2 = 11$.
- Determina la ecuación de la hipérbola cuyos focos son los puntos $F(7,4)$ y $F'(-1,4)$ y su excentricidad es 3; encuentra también las ecuaciones de las asíntotas.
- Determina la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $M(-3,-1)$, su centro está en el origen, su eje transversal está sobre el eje x y una de sus asíntotas es la recta $3x + 5\sqrt{2}y = 0$.
- Determina la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son los puntos $V(1,0)$ y $V'(-1,0)$ y sus asíntotas las rectas $y = \pm 3x$.

III. Discute y traza la gráfica para las siguientes ecuaciones.

1. $xy = -16$

3. $xy = -9$

5. $3x^2 - 3y^2 = 18$

2. $xy = 25$

4. $x^2 - y^2 = 4$

IV. Determina todos los elementos para la hipérbola que es conjugada a cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $2x^2 - 3y^2 = 6$

3. $7y^2 - 4x^2 = 28$

5. $11x^2 - 7y^2 = 77$

2. $x^2 - 9y^2 = 9$

4. $4x^2 - 3y^2 = 24$

V. Resuelve los siguientes problemas.

- Determina la ecuación de la hipérbola equilátera que pasa por el punto $M(-1,-5)$ y tiene por asíntotas a los ejes coordenados.
- Demuestra que la excentricidad para cualquier hipérbola equilátera es siempre $\sqrt{2}$.
- Determina la ecuación de la hipérbola equilátera que pasa por el punto $M(4,3)$ y tiene por asíntotas a los ejes coordenados.
- Determina la ecuación de la hipérbola equilátera que pasa por el punto $M(-7,5)$ y tiene por asíntotas a los ejes coordenados.

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Discusión acerca de si una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa o no una hipérbola; en caso afirmativo, determinación de sus elementos correspondientes

La ecuación de segundo grado en las variables x y y que no contenga término en xy , escrita en la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al discutir la ecuación anterior, suponemos que los coeficientes A y C difieren en el signo.

Una forma simple de demostrar que la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una hipérbola, consiste en reducirla a la segunda forma ordinaria de la hipérbola por medio de completar cuadrados.

Al dividir la ecuación dada entre el término AC , se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Ax^2}{AC} + \frac{Cy^2}{AC} + \frac{Dx}{AC} + \frac{Ey}{AC} + \frac{F}{AC} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Ordenando términos}$$

$$\left(\frac{x^2}{C} + \frac{Dx}{AC} \right) + \left(\frac{y^2}{A} + \frac{Ey}{AC} \right) = -\frac{F}{AC}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{C} \left(x^2 + \frac{Dx}{A} \right) + \frac{1}{A} \left(y^2 + \frac{Ey}{C} \right) &= -\frac{F}{AC} \end{aligned} \right\} \text{ Completando cuadrados en } x \text{ y } y$$

$$\frac{1}{C} \left[x^2 + \frac{Dx}{A} + \left(\frac{D}{2A} \right)^2 \right] + \frac{1}{A} \left[y^2 + \frac{Ey}{C} + \left(\frac{E}{2C} \right)^2 \right] = \frac{1}{C} \left(\frac{D}{2A} \right)^2 + \frac{1}{A} \left(\frac{E}{2C} \right)^2 - \frac{F}{AC}$$

$$\frac{1}{C} \left(x^2 + \frac{Dx}{A} + \frac{D^2}{4A^2} \right) + \frac{1}{A} \left(y^2 + \frac{Ey}{C} + \frac{E^2}{4C^2} \right) = \frac{1}{C} \left(\frac{D^2}{4A^2} \right) + \frac{1}{A} \left(\frac{E^2}{4C^2} \right) - \frac{F}{AC}$$

Al factorizar, resulta:

$$\frac{1}{C} \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + \frac{1}{A} \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 = \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2} - \frac{F}{AC}$$

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C} \right)^2}{A} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2}$$

De lo anterior se establece que $M = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2}$, es decir:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C} \right)^2}{A} = M \quad (1)$$

Analizado los siguientes casos, se tiene:

- a) Si $M \neq 0$, la ecuación (1) representa una hipérbola con centro en el punto $O' \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C} \right)$ cuya ecuación es de la forma

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2}{MC} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C} \right)^2}{MA} = 1.$$

Su eje transversal es vertical si MC es positivo y MA es negativo.

Su eje transversal es horizontal si MA es positivo y MC es negativo.

- b) Si $M = 0$, la ecuación (1) representa la gráfica de dos rectas que se cortan.

EJEMPLO

- 1 •• Discute si la ecuación $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$ representa o no una hipérbola; en caso afirmativo, determina sus elementos correspondientes y traza su gráfica.

Solución

Reduciendo la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la hipérbola.

Al ordenar los términos, se tiene:

$$(4x^2 + 32x) - (9y^2 - 36y) = -64 \quad \left. \vphantom{(4x^2 + 32x) - (9y^2 - 36y) = -64} \right\} \text{ Sacando factores en el primer miembro}$$

$$4(x^2 + 8x) - 9(y^2 - 4y) = -64 \quad \left. \vphantom{4(x^2 + 8x) - 9(y^2 - 4y) = -64} \right\} \text{ Completando cuadrados en } x \text{ y } y$$

$$4\left[x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2\right] - 9\left[y^2 - 4y + \left(\frac{-4}{2}\right)^2\right] = 4\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 9\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 64$$

$$4(x^2 + 8x + 16) - 9(y^2 - 4y + 4) = 4(16) - 9(4) - 64$$

$$4(x+4)^2 - 9(y-2)^2 = \cancel{64} - 36 - \cancel{64} \quad \left. \vphantom{4(x+4)^2 - 9(y-2)^2 = \cancel{64} - 36 - \cancel{64}} \right\} \text{ Al dividir la ecuación entre 36, se tiene:}$$

$$\frac{4(x+4)^2}{36} - \frac{9(y-2)^2}{36} = \frac{-36}{36} \quad \left. \vphantom{\frac{4(x+4)^2}{36} - \frac{9(y-2)^2}{36} = \frac{-36}{36}} \right\} \text{ Al multiplicar la ecuación por } -1$$

$$-\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \quad \left. \vphantom{-\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1} \right\} \text{ Ordenando los términos}$$

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1 \quad \left. \vphantom{\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1} \right\} \text{ Ecuación de la hipérbola en su segunda forma ordinaria y cuyo eje transversal es vertical (paralelo al eje } y \text{).}$$

Dado que el segundo miembro de la ecuación resultante es diferente de cero, se deduce que la ecuación $4x^2 + 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$ representa una hipérbola.

De la ecuación $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$, se tiene:

Las coordenadas del centro de la hipérbola son $O'(-4, 2)$.

Como $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$, entonces: $a = 2$ y $b = 3$

Por la relación $b^2 = c^2 - a^2$, resulta:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 4 + 9$$

$$c^2 = 13$$

y

$$c = \sqrt{13}$$

Las coordenadas de los vértices de la hipérbola son:

$$V(h, k + a)$$

y

$$V'(h, k - a)$$

$$V(-4, 2 + 2)$$

$$V'(-4, 2 - 2)$$

$$V(-4, 4)$$

$$V'(-4, 0)$$

Las coordenadas de los focos de la hipérbola son:

$$F(h, k + c)$$

y

$$F'(h, k - c)$$

$$F(-4, 2 + \sqrt{13})$$

$$F'(-4, 2 - \sqrt{13})$$

Las coordenadas de los extremos del eje conjugado, son:

$$\begin{array}{lll} A(h+b, k) & y & A'(h-b, k) \\ A(-4+3, 2) & & A'(-4-3, 2) \\ A(-1, 2) & & A'(-7, 2) \end{array}$$

La longitud del semieje transverso es $a = 2$ y la longitud del eje transverso es $2a = 4$; la longitud del semieje conjugado es $b = 3$ y la longitud del eje conjugado es $2b = 6$.

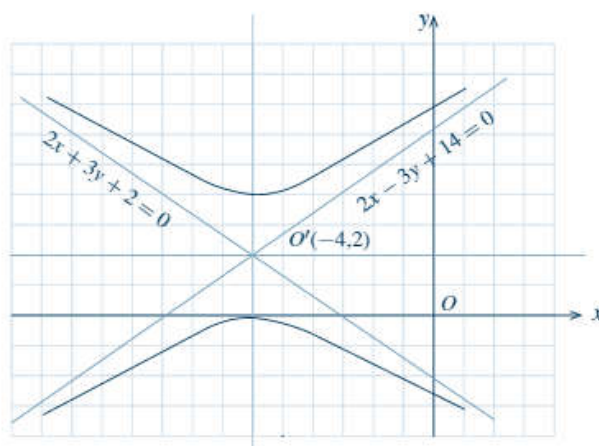
La longitud de cada lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{2} = 9$.

La excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} = 1.802$ ($e > 1$).

Las ecuaciones de las asíntotas para la hipérbola son $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$

$$\begin{array}{ll} y = k \pm \frac{a}{b}(x-h) & 3y = 6 + 2x + 8 \\ y = 2 \pm \frac{2}{3}(x+4) & 2x - 3y + 14 = 0 \\ y = \frac{6 \pm 2(x+4)}{3} & 3y = 6 - 2x - 8 \\ & 2x - 3y + 2 = 0 \end{array}$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



EJERCICIO 30

I. Discute si las siguientes ecuaciones representan o no una hipérbola; en caso afirmativo determina sus elementos correspondientes, las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica respectiva.

1. $3x^2 - y^2 + 18x - 2y + 14 = 0$
2. $4x^2 - 9y^2 - 32x + 54y - 17 = 0$
3. $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$
4. $16y^2 - x^2 + 2x + 64y + 63 = 0$
5. $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$
6. $4y^2 - 2x^2 - 4y - 8x - 15 = 0$
7. $4x^2 - y^2 - 4y - 8x - 4 = 0$
8. $9x^2 - y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$
9. $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$
10. $3y^2 - 4x^2 - 8x - 24y - 40 = 0$
11. $x^2 - y^2 + 6x + 10y - 4 = 0$
12. $4x^2 - y^2 + 56x + 2y + 195 = 0$

II. Resuelve los siguientes problemas.

1. Determina el ángulo agudo de intersección de las asíntotas de las siguientes hipérbolas:

a) $16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 89 = 0$

c) $9y^2 - x^2 - 36y - 2x + 44 = 0$

b) $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$

d) $5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y + 4 = 0$

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

Ecuaciones de la tangente y la normal a una hipérbola

Dado que la ecuación de una hipérbola es de segundo grado, las rectas tangentes a dicha curva se determinan por la condición de tangencia empleada en la circunferencia, parábola y elipse.

Consideremos los siguientes casos:

EJEMPLO

1. Determina la ecuación de la tangente a una hipérbola dada en un punto dado de tangencia.

a) Encuentra la ecuación de la tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de dicha curva.

Solución

La ecuación de la familia de rectas tangentes que pasan por el punto dado, es:

$$y - y_1 = m - (x - x_1)$$

Donde m es la pendiente de la recta tangente por determinar, al despejar respecto a y se tiene:

$$y = y_1 + mx - mx_1$$

Al sustituir esta igualdad en la ecuación de la hipérbola, resulta:

$$\begin{aligned} b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \\ b^2x^2 - a^2(y_1 + mx - mx_1)^2 &= a^2b^2 \\ b^2x^2 - a^2(y_1^2 + m^2x^2 + m^2x_1^2 + 2mxy_1 - 2mx_1y_1 - 2m^2xx_1) &= a^2b^2 \\ b^2x^2 - a^2y_1^2 - a^2m^2x^2 - a^2m^2x_1^2 - 2a^2mxy_1 + 2a^2mx_1y_1 + 2a^2m^2xx_1 - a^2b^2 &= 0 \\ b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mxy_1 + 2a^2m^2xx_1 - a^2y_1^2 - a^2m^2x_1^2 + 2a^2mx_1y_1 - a^2b^2 &= 0 \\ (b^2 - a^2m^2)x^2 - (2a^2my_1 - 2a^2m^2x_1)x - (a^2y_1^2 + a^2m^2x_1^2 - 2a^2mx_1y_1 + a^2b^2) &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación está escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$; aplicando la condición de tangencia, se debe comprobar el discriminante $b^2 - 4ac = 0$; es decir:

$$\begin{aligned} [-(2a^2my_1 - 2a^2m^2x_1)]^2 - 4(b^2 - a^2m^2)[-(a^2y_1^2 + a^2m^2x_1^2 - 2a^2mx_1y_1 + a^2b^2)] &= 0 \\ 4a^4m^2y_1^2 - 8a^4m^3x_1y_1 + 4a^4m^4x_1^2 + 4a^2b^2y_1^2 + 4a^2b^2m^2x_1^2 - 8a^2b^2mx_1y_1 + 4a^2b^4 & \\ - 4a^4m^2y_1^2 - 4a^4m^4x_1^2 + 8a^4m^3x_1y_1 - 4a^4b^2m^2 &= 0 \end{aligned}$$

Al dividir la ecuación entre $4a^2b^2$, resulta:

$$\begin{aligned} -\frac{4a^4b^2m^2}{4a^2b^2} + \frac{4a^2b^2m^2x_1^2}{4a^2b^2} - \frac{8a^2b^2mx_1y_1}{4a^2b^2} + \frac{4a^2b^4}{4a^2b^2} + \frac{4a^2b^2y_1^2}{4a^2b^2} &= 0 \\ -a^2m^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 + b^2 + y_1^2 &= 0 \quad \} \text{ Multiplicando por } -1 \\ a^2m^2 - m^2x_1^2 + 2mx_1y_1 - b^2 - y_1^2 &= 0 \\ (a^2 - x_1^2)m^2 + (2x_1y_1)m - (b^2 + y_1^2) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, se tiene:

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 m &= \frac{-2x_1y_1 \pm \sqrt{4x_1^2y_1^2 - 4(a^2 - x_1^2)[-(b^2 + y_1^2)]}}{2(a^2 - x_1^2)} \\
 m &= \frac{-2x_1y_1 \pm \sqrt{\cancel{4x_1^2y_1^2} + 4a^2b^2 + 4a^2y_1^2 - 4b^2x_1^2 - \cancel{4x_1^2y_1^2}}}{2(a^2 - x_1^2)} \quad \left. \vphantom{\frac{-2x_1y_1 \pm \sqrt{\cancel{4x_1^2y_1^2} + 4a^2b^2 + 4a^2y_1^2 - 4b^2x_1^2 - \cancel{4x_1^2y_1^2}}}{2(a^2 - x_1^2)}}} \right\} \begin{array}{l} \text{Factorizando en el radicando y} \\ \text{ordenando los términos} \end{array} \\
 m &= \frac{-2x_1y_1 \pm \sqrt{-4(b^2x_1^2 - a^2y_1^2 - a^2b^2)}}{2(a^2 - x_1^2)}
 \end{aligned}$$

Como el punto dado $P_1(x_1, y_1)$ pertenece a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, sus coordenadas satisfacen dicha ecuación, es decir:

$$\begin{aligned}
 b^2x_1^2 - a^2y_1^2 &= a^2b^2 \\
 b^2x_1^2 - a^2y_1^2 - a^2b^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Al sustituir esta igualdad en la ecuación de la fórmula general, resulta:

$$m = \frac{-2x_1y_1 \pm \sqrt{-4(b^2x_1^2 - a^2y_1^2 - a^2b^2)}}{2(a^2 - x_1^2)} = \frac{-2x_1y_1 \pm \sqrt{-4(0)}}{2(a^2 - x_1^2)} = \frac{-x_1y_1}{(a^2 - x_1^2)}$$

Al sustituir la pendiente $\left(m = -\frac{x_1y_1}{(a^2 - x_1^2)}\right)$ en la ecuación de la tangente por determinar, se tiene:

$$\begin{aligned}
 y - y_1 &= m(x - x_1) \\
 y - y_1 &= -\frac{x_1y_1}{(a^2 - x_1^2)}(x - x_1) \\
 (a^2 - x_1^2)(y - y_1) &= -x_1y_1(x - x_1) \\
 a^2y - a^2y_1 - x_1^2y + \cancel{x_1^2y_1} &= -xx_1y_1 + \cancel{x_1^2y_1} \\
 a^2y - a^2y_1 &= x_1^2y - xx_1y_1 \\
 a^2(y - y_1) &= x_1(x_1y - xy_1)
 \end{aligned}$$

De la ecuación $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$, $a^2 = \frac{b^2x_1^2 - a^2y_1^2}{b^2}$, al sustituir esta igualdad en la última ecuación de la tangente, resulta:

$$\begin{aligned}
 a^2(y - y_1) &= x_1(x_1y - xy_1) \\
 \left(\frac{b^2x_1^2 - a^2y_1^2}{b^2}\right)(y - y_1) &= x_1(x_1y - xy_1) \\
 (b^2x_1^2 - a^2y_1^2)(y - y_1) &= b^2x_1(x_1y - xy_1) \\
 \cancel{b^2x_1^2y} - b^2x_1^2y_1 - a^2yy_1^2 + a^2y_1^3 &= \cancel{b^2x_1^2y} - b^2xx_1y_1 \\
 -a^2yy_1^2 - b^2x_1^2y_1 &= -a^2y_1^3 - b^2xx_1y_1 \\
 \cancel{y_1^3}(a^2yy_1 + b^2x_1^2) &= \cancel{y_1^3}(a^2y_1^2 + b^2xx_1) \\
 -b^2xx_1 + a^2yy_1 &= -b^2x_1^2 + a^2y_1^2 \\
 b^2xx_1 - a^2yy_1 &= b^2x_1^2 - a^2y_1^2
 \end{aligned}$$

Dado que $a^2b^2 = b^2x_1^2 - a^2y_1^2$, al sustituir en la ecuación anterior resulta:

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$$

La ecuación de la recta tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva es $b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$.

- b) Encuentra la ecuación de la tangente a la hipérbola $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de dicha curva.

Solución

De la misma manera que se hizo en el inciso a), se establece que:

La ecuación de la recta tangente a la hipérbola $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva, es $b^2yy_1 - a^2xx_1 = a^2b^2$.

- 2 ••• Determina la ecuación de la tangente a una hipérbola dada y que tiene una pendiente dada.

- a) Encuentra la ecuación de la tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ que tiene por pendiente m .

Solución

La ecuación de la familia de rectas tangentes que tienen la pendiente m en común, es: $y = mx + k$.

El parámetro k representa el segmento que la recta determina sobre el eje y cuyo valor debe determinarse.

Al sustituir la igualdad $y = mx + k$ en la ecuación de la hipérbola, se tiene:

$$\begin{aligned} b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \\ b^2x^2 - a^2(mx + k)^2 &= a^2b^2 \\ b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + 2kmx + k^2) &= a^2b^2 \\ b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2kmx + a^2k^2 - a^2b^2 &= 0 \\ (b^2 - a^2m^2)x^2 - (2a^2km)x - (a^2k^2 + a^2b^2) &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación está escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$; aplicando la condición de tangencia se debe comprobar el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, es decir:

$$[-(2a^2km)]^2 - 4(b^2 - a^2m^2)[- (a^2k^2 + a^2b^2)] = 0$$

$$4a^4k^2m^2 + 4a^2b^2k^2 + 4a^2b^4 - 4a^4m^2k^2 - 4a^4b^2m^2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{4a^2b^2k^2}{4a^2b^2} - \frac{4a^4b^2m^2}{4a^2b^2} + \frac{4a^2b^4}{4a^2b^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Dividiendo la ecuación entre } 4a^2b^2$$

$$k^2 - a^2m^2 + b^2 = 0$$

$$k^2 = a^2m^2 - b^2$$

$$k = \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

Al sustituir esta igualdad en la ecuación de la familia de rectas tangentes que tienen la pendiente m en común, resulta:

$$y = mx + k$$

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \quad \text{Si } |m| > \frac{b}{a}$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ que tienen pendiente m es $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

- b) Encuentra la ecuación de la tangente a la hipérbola $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ que tienen por pendiente m .

Solución

De la misma manera que se hizo en el inciso a), se establece que:

Las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ que tienen pendiente m es $y = mx \pm \sqrt{a^2 - b^2m^2}$.

3 ••• Determina la ecuación de la tangente a una hipérbola dada y que pasa por un punto exterior dado.

- a) Encuentra las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $P(3,6)$ a la hipérbola $x^2 - y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$.

Solución

La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto dado $P(3,6)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = m(x - 3)$$

Donde m es la pendiente de la tangente buscada; despejando respecto a y y sustituyendo en la ecuación de la hipérbola dada, se tiene: $y = mx - 3m + 6$.

$$\begin{aligned} x^2 - (mx - 3m + 6)^2 + 4x - 2(mx - 3m + 6) - 5 &= 0 \\ x^2 - m^2x^2 - 9m^2 - 36 + 6m^2x - 12mx + 36m + 4x - 2mx + 6m - 12 - 5 &= 0 \quad \text{Ordenando términos} \\ x^2 - m^2x^2 - 6m^2x - 14mx + 4x - 9m^2 + 42m - 53 &= 0 \\ (1 - m^2)x^2 + (6m^2 - 14m + 4)x - (9m^2 - 42m + 53) &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación está escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$; aplicando la condición de tangencia se debe comprobar el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} (6m^2 - 14m + 4)^2 - 4(1 - m^2)[- (9m^2 - 42m + 53)] &= 0 \\ \cancel{36m^4} + 196m^2 + 16 - \cancel{168m^3} + 48m^2 - 112m + 36m^2 - 168m + 212 - \cancel{36m^4} + \cancel{168m^3} - 212m^2 &= 0 \\ 68m^2 - 280m + 228 &= 0 \quad \text{Simplificando} \\ 17m^2 - 70m + 57 &= 0 \quad \text{Resolviendo por fórmula general} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ m &= \frac{70 \pm \sqrt{(-70)^2 - 4(17)(57)}}{2(17)} = \frac{70 \pm \sqrt{4\,900 - 3\,876}}{34} = \frac{70 \pm \sqrt{1\,024}}{34} = \frac{70 \pm 32}{34} \\ m_1 &= \frac{70 + 32}{34} = \frac{102}{34} = 3 \quad m_2 = \frac{70 - 32}{34} = \frac{38}{34} = \frac{19}{17} \approx 1.1176 \end{aligned}$$

Al sustituir los valores encontrados en la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto dado, resulta:

Para $m = 3$

$$\begin{aligned} y - 6 &= 3(x - 3) \\ y - 6 &= 3x - 9 \\ 3x - y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Para $m = \frac{19}{17}$

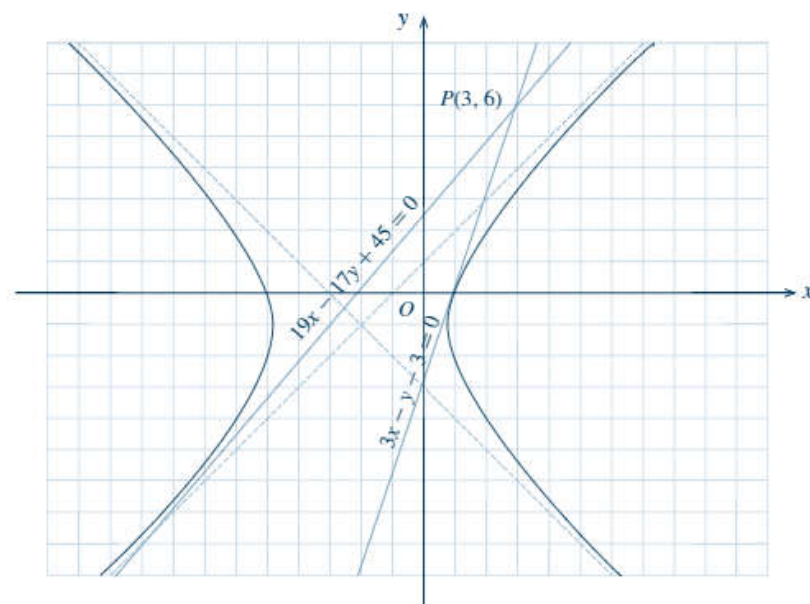
$$\begin{aligned} y - 6 &= \frac{19}{17}(x - 3) \\ 17y - 102 &= 19x - 57 \\ 19x - 17y + 45 &= 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes trazadas desde el punto $P(3,6)$ a la hipérbola $x^2 - y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ son $3x - y - 3 = 0$ y $19x - 17y + 45 = 0$.

Tabulando la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$, se tiene:

y	0	1	2	3	4	5	6	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
x	1	1.46	2.12	2.89	3.74	4.63	5.54	0.82	1	1.46	2.12	2.89	3.74	4.63
x	-5	-5.46	-6.12	-6.89	-7.74	-8.63	-9.54	-4.82	-5	-5.46	-6.12	-6.89	-7.74	-8.63

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



Diámetro de la hipérbola

El lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas a una hipérbola, se denomina **diámetro** de dicha cónica.

Si la pendiente de las cuerdas paralelas es m , la ecuación del diámetro determinado por los puntos medios de dichas cuerdas es:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{b^2 x}{a^2 m} \\ y &= \frac{a^2 x}{b^2 m} \\ y &= -mx \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Si la hipérbola es } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ &\text{Si la hipérbola es } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \\ &\text{Si la hipérbola es equilátera } xy = a^2 \end{aligned}$$

Para la ecuación general de la hipérbola $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, la ecuación del diámetro es:

$$\left(Ax + \frac{D}{2} \right) + m \left(Cy + \frac{E}{2} \right) = 0$$

EJEMPLO
Ejemplo 1

- Determina la ecuación del diámetro de la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ correspondiente a las cuerdas de pendiente 3.

Solución

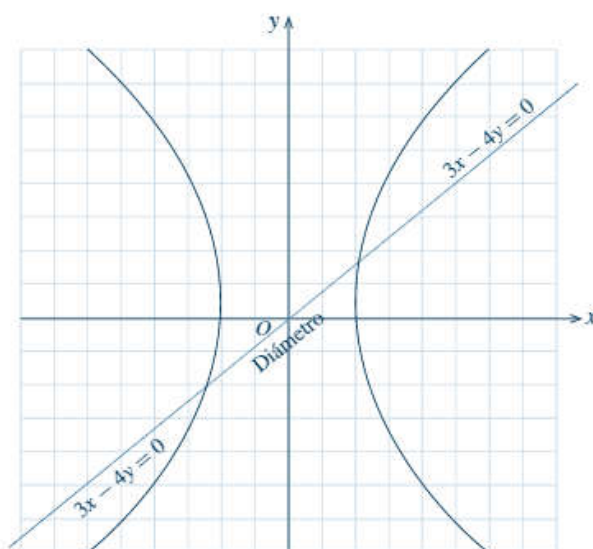
Como la ecuación de la hipérbola dada es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, la ecuación del diámetro de la hipérbola por aplicar es de la forma $y = \frac{b^2x}{a^2m}$.

Al sustituir los datos correspondientes, se tiene:

$$\begin{aligned} y &= \frac{9x}{4(3)} & 12y &= 9x & 3x - 4y &= 0 \\ y &= \frac{9x}{12} & 9x - 12y &= 0 & & \end{aligned}$$

La ecuación del diámetro de la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ es $3x - 4y = 0$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 •• Determina la ecuación del diámetro de la hipérbola $xy = 16$ que pase por los puntos medios de las cuerdas de pendiente 2.

Solución

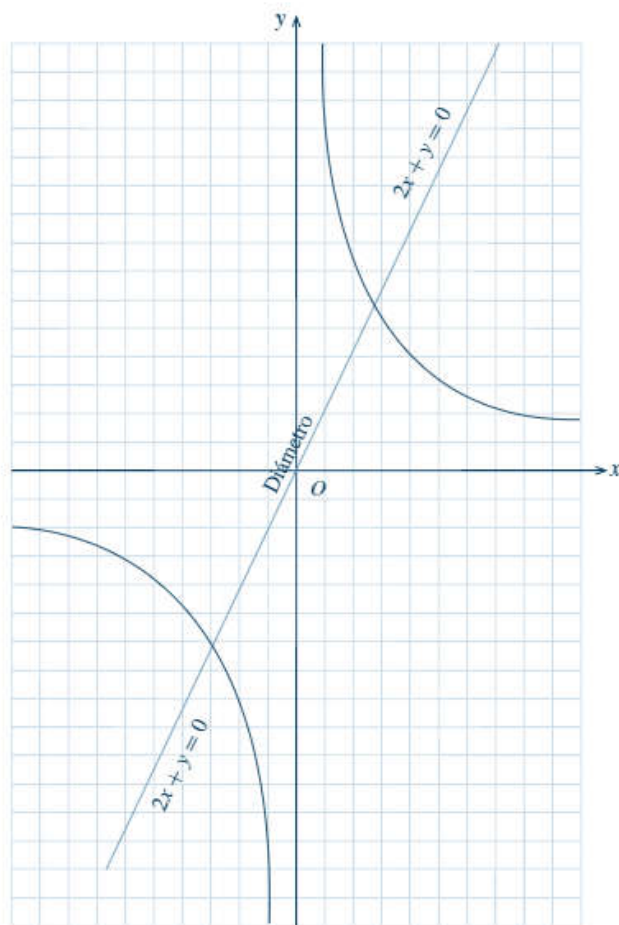
Como la ecuación de la hipérbola dada es de la forma equilateral $xy = k$, la ecuación del diámetro de la hipérbola por aplicar es de la forma $y = -mx$.

Al sustituir los datos correspondientes, resulta $y = -2x$. Así,

$$2x + y = 0$$

La ecuación del diámetro de la hipérbola $xy = 16$ es $2x + y = 0$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



EJERCICIO 31

- I. Determina la ecuación de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para las siguientes hipérbolas en el punto indicado.
 1. $6x^2 - 9y^2 - 8x + 3y + 16 = 0$ en $P(-1,2)$.
 2. $3x^2 - 2y^2 + 3x - 4y - 12 = 0$ en $P(2,1)$.
 3. $5y^2 - 9x^2 = 36$ en $P(1,-3)$.
 4. $3x^2 - y^2 = 27$ en $P(6,9)$.
 5. $3y^2 - x^2 = 27$ en $P(9,6)$.
 6. $xy - 8 = 0$ en $P(4,2)$.
- II. Resuelve los siguientes problemas.
 1. Determina la ecuación de las tangentes a la hipérbola $xy = 2$ perpendiculares a la recta $x - 2y - 7 = 0$.
 2. Determina las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $4x^2 - 8y^2 + 16x - 32y - 24 = 0$ paralelas a la recta $4x - 4y + 11 = 0$.

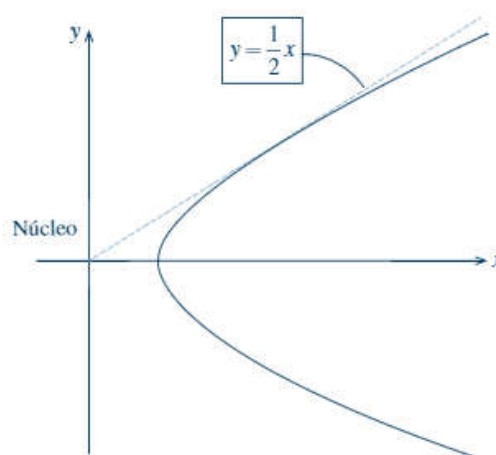
3. Determina las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(1,4)$ a la hipérbola $x^2 - 4y^2 - 12 = 0$.
 4. Determina la ecuación de las tangentes a la hipérbola $x^2 - 4y^2 - 8 = 0$ perpendiculares a la recta $4x + 5y = 2$.
 5. Determina la ecuación de las tangentes a la hipérbola $2xy + y^2 = 8$ cuya pendiente sea $-\frac{2}{3}$.
 6. Determina las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ paralelas a la recta $8x - 2y - 28 = 0$.
 7. Encuentra el valor del parámetro m para los cuales las rectas de la familia $y = mx - 1$ son tangentes a la hipérbola $4x^2 - 5y^2 = 7$.
 8. Encuentra los puntos de intersección entre las cónicas $4y^2 - x^2 - 4 = 0$ y $2x^2 + y^2 = 10$.
 9. Utilizando el concepto de cónicas homofocales, demuestra que las siguientes cónicas satisfacen dicho principio:
 - a) $x^2 + 3y^2 = 6$ y $x^2 - 3y^2 = 3$
 - b) $9x^2 + 4y^2 = 18$ y $9x^2 - 4y^2 = 36$
 - c) $2x^2 + y^2 = 10$ y $4y^2 - x^2 = 4$
 10. Utilizando el concepto *cuerda de contacto*, encuentra la ecuación de la cuerda de contacto del punto $(-2,4)$ de la hipérbola $3x^2 - 2y^2 = 3$.
- III. Determina la ecuación del diámetro de las siguientes hipérbolas que pasen por los puntos medios de las cuerdas de pendiente indicada.
1. $xy = 8$ y $m = -1$
 2. $x^2 - 4y^2 = 9$ y $m = 4$
 3. $2x^2 - 8y^2 = 18$ y $m = \frac{3}{5}$
 4. $16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 89 = 0$ y $m = 2$
 5. $9x^2 - 7y^2 + 63 = 0$ y $m = -3$

➔ Verifica tus resultados en la sección de respuestas correspondiente.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Hipérbola

- 1 ●● El físico Ernesto Rutherford descubrió que cuando se disparan partículas alfa hacia el núcleo de un átomo, llega un momento en que son repelidas del núcleo, según trayectorias hiperbólicas. El dibujo representa la trayectoria de una partícula que se dirige hacia el origen sobre la recta $y = \frac{1}{2}x$ y llega a 3 unidades de distancia respecto del núcleo. Determina la ecuación de la trayectoria.

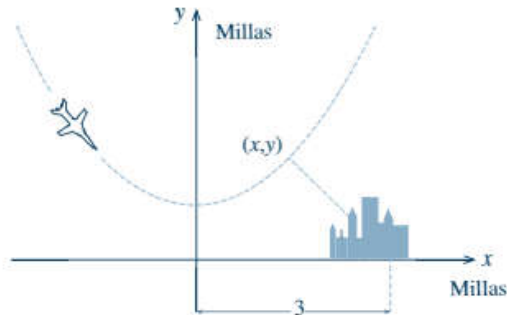


- 2 ●●● Un avión *jet* de la Fuerza Aérea Mexicana ejecuta una maniobra a alta velocidad sobre la trayectoria $2y^2 - x^2 = 8$. ¿Qué tanto se aproxima el avión a una ciudad situada en $(3,0)$? **Sugerencia:** representa con S el cuadrado de la distancia de un punto (x,y) sobre la trayectoria al punto $(3,0)$ y obtén el valor mínimo de S . ¿Qué es $\sqrt{S}$?

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas ☐

Competencias disciplinares ☐

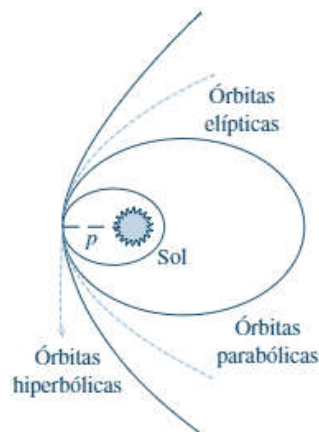


- 3 ●●● Una explosión es registrada por dos micrófonos separados entre sí una milla de distancia. El sonido es recibido en el micrófono A, 2 segundos antes que en el micrófono B. ¿Dónde se produjo la explosión?
- 4 ●●● Con base en la siguiente figura, prueba que la curvatura (en el vértice) de cada órbita elíptica es mayor que la curvatura de la órbita parabólica que a su vez es mayor que la de la hipérbola.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas ☐

Competencias disciplinares ☐



- 5 ●●● Tres estaciones de radar situadas en $(4\,400,0)$, $(4\,400,1\,100)$ y $(-4\,400,0)$ registran una explosión. Averigua el lugar de la explosión al suponer que las dos últimas estaciones registran el sonido que se produce un segundo y cinco segundos después, respectivamente, que la primera. Mide las longitudes en pies y toma $1\,100$ pies/s. como velocidad del sonido.
- 6 ●●● Cuando un aeroplano rompe la barrera del sonido la onda de choque tiene la forma de un cono, el cual interseca la Tierra en una rama de una hipérbola. El choque se siente al mismo tiempo en cada punto de la hipérbola. Una mujer en el vértice de una onda hiperbólica de choque a una milla al norte del centro la experimenta al mismo tiempo que un hombre a una milla al este y dos millas al norte del centro.
- Traza la rama de la hipérbola con centro en $(0,0)$ que representa la onda de choque, empleando el eje y como eje transversal.
 - Determina la ecuación de toda la hipérbola.

- 7 ●● Cuando la potencia en un circuito eléctrico es constante el voltaje E es inversamente proporcional a la corriente I expresada por la ecuación $P = EI$. Traza la curva de E contra I para una potencia de salida de 100 watts.
- 8 ●● Para un gas a temperatura constante, la ley de Boyle enuncia que $PV = K$, donde P = presión y V = volumen. Si 5 m^3 de hidrógeno se encuentran bajo una presión de 800 KPa, traza la gráfica del volumen V contra la presión P a una temperatura constante.
- 9 ●● Un cometa sigue una trayectoria hiperbólica con el Sol como foco. Cuando el cometa se encuentra en el punto más cercano al Sol se calcula que se encuentra a $2 \times 10^8 \text{ km}$ del centro del Sol y a $8 \times 10^8 \text{ km}$ del centro de su trayectoria. Determina la ecuación de la ruta si el Sol se encuentra sobre el eje x y el centro está en $(0,0)$.
- 10 ●● Si 10 m^3 de butano se encuentran bajo una presión de 240 KPa, determina la ecuación y traza la curva de volumen contra presión a temperatura constante.

Forma polar de las cónicas

Ecuación de una circunferencia en coordenadas polares

El centro de una circunferencia cualquiera es $C(r_1, \theta_1)$ y cuyo radio es a (figura 3.41).

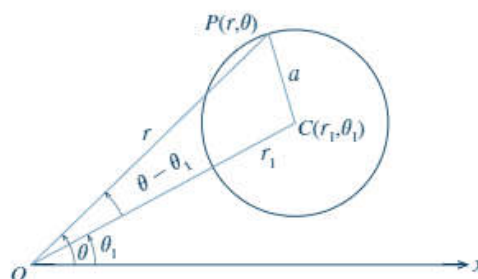


Figura 3.41

Si $P(r, \theta)$ es un punto cualquiera de la circunferencia por donde se traza el radio $PC = a$ y los radios vectores PO y CO , dando lugar al triángulo OPC .

Aplicando la ley de los cosenos para dicho triángulo se tiene:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Ley de los cosenos} \\ a^2 &= r_1^2 + r^2 - 2r_1r \cos(\theta - \theta_1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Ordenando los términos} \\ r^2 - 2r_1r \cos(\theta - \theta_1) + r_1^2 &= a^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Ecuación polar de la circunferencia} \end{aligned}$$

La ecuación polar de una circunferencia de centro $C(r_1, \theta_1)$ y con radio igual a a es $r^2 - 2r_1r \cos(\theta - \theta_1) + r_1^2 = a^2$.

Los casos especiales de la ecuación polar de la circunferencia son:

a) Si su centro está en el polo, la ecuación polar es:

$$r = a$$

a) Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje polar, la ecuación polar tiene la forma:

$$r = \pm 2a \cos \theta$$

Se toma el signo positivo si el centro está a la derecha del polo, el signo negativo es cuando el centro, está a la izquierda del polo.

- c) Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje a 90° , su ecuación polar es de la forma:

$$r = \pm 2a \sin \theta$$

Se toma el signo positivo si el centro está arriba del polo, el signo negativo es cuando el centro está abajo del polo.

Ecuación general de las cónicas en coordenadas polares

Una cónica es una **parábola** si su excentricidad es igual a la unidad ($e = 1$); una cónica es una **elipse** si su excentricidad es menor que la unidad ($e < 1$); una cónica es una **hipérbola** si su excentricidad es mayor que la unidad ($e > 1$).

Otra manera de identificar a las cónicas es utilizando la expresión $b^2 - 4ac$ (donde los coeficientes a , b y c pertenecen a la ecuación general de segundo grado que representa a una cónica), es decir: Si $b^2 - 4ac = 0$, la cónica es una parábola; si $b^2 - 4ac < 0$, la cónica es una elipse; si $b^2 - 4ac > 0$, la cónica es una hipérbola.

Cónica	$b^2 - 4ac$	e
Parábola	$= 0$	$= 1$
Elipse	< 0	< 1
Hipérbola	> 0	> 1

La ecuación polar de una cónica es de forma sencilla cuando uno de los focos está en el polo y su eje focal coincide con el eje polar (figura 3.42).

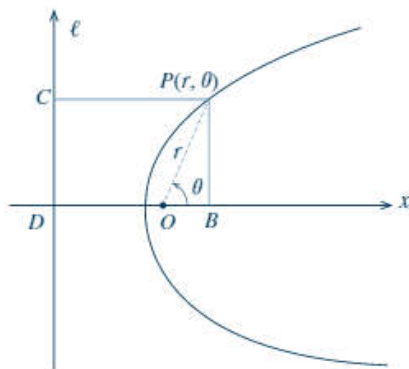


Figura 3.42

Si la recta ℓ es la correspondiente directriz a la izquierda del foco O y es perpendicular al eje polar A , donde su intersección es el punto D .

Sea p la distancia $|DO|$ entre el foco y la directriz; si $P(r, \theta)$ es un punto cualquiera de la cónica y por el cual se trazan las perpendiculares PB y PC al eje polar y a la directriz, respectivamente.

Aplicando la definición general de la cónica, deduce la ecuación polar respectiva. Por dicha definición el punto P debe satisfacer la condición geométrica:

$$\frac{|PO|}{|PC|} = e \quad (1)$$

Si $|PO| = r$ y $|PC| = |DB| = |DO| + |OB| = p + r \cos \theta$, al sustituir estos valores en (1), se tiene:

$$\frac{r}{p + r \cos \theta} = e, \text{ simplificando resulta:}$$

$$r = e(p + r \cos \theta)$$

$$r = ep + er \cos \theta$$

$$r - er \cos \theta = ep$$

$$r(1 - e \cos \theta) = ep$$

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta} \quad \left. \vphantom{r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}} \right\} \text{ Ecuación polar de la cónica.}$$

Si la directriz está a la derecha del polo (foco O) y a p distancia de él, de la misma manera demostramos que la ecuación polar de la cónica es $r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}$.

Si el eje focal coincide con el eje a 90° de tal manera que la directriz es paralela al eje polar y p distancia de él, se demuestra que la ecuación polar de la cónica es:

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \sin \theta}$$

Si la directriz está arriba del eje polar, se toma el signo positivo; si la directriz está abajo del eje polar, se toma el signo negativo.

Las ecuaciones polares de las cónicas son:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{ep}{1 \pm e \cos \theta} \\ r &= \frac{ep}{1 \pm e \sin \theta} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Eje horizontal y vértices en } \theta = 0^\circ \text{ y } \theta = \pi. \\ &\text{Eje vertical y vértices en } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ y } \theta = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

En particular, la cónica es una parábola si $e = 1$ es una elipse si $e < 1$ y es una hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLOS

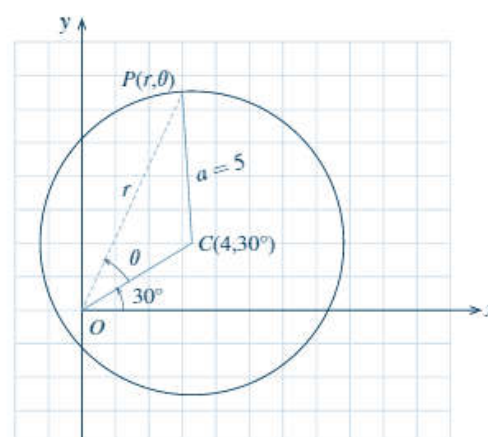
1. Determina la ecuación polar de la circunferencia de centro en el punto $C(4, 30^\circ)$ y radio igual a 5.

Solución

De los datos dados, se tiene que: $r_1 = 4$, $\theta_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$; al sustituir en la ecuación polar de la circunferencia, resulta:

$$\begin{aligned} r^2 - 2r_1 r \cos(\theta - \theta_1) + r_1^2 &= a^2 \\ r^2 - 2(4)r \cos(\theta - 30^\circ) + (4)^2 &= (5)^2 \\ r^2 - 8r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + 16 &= 25 \\ r^2 - 8r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + 16 - 25 &= 0 \\ r^2 - 8r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 2 ••• Identifica la cónica cuya ecuación polar es $r = \frac{4}{2 - \cos \theta}$, determina todos sus elementos correspondientes y traza su gráfica.

Solución

Dado que la ecuación ordinaria de una cónica tiene a la unidad como primer término del denominador, es necesario dividir el numerador y denominador del segundo miembro de la ecuación polar dada entre 2, es decir:

$$r = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{2 - \cos \theta}{2}} = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

Comparando la ecuación resultante con la ecuación polar de la cónica $r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$, se observa que:

La excentricidad es menor que la unidad ($e = \frac{1}{2}$), por lo que la cónica es una elipse.

Como $ep = 2$ y $e = \frac{1}{2}$, entonces, $\frac{1}{2}p = 2$
 $p = 4$

Por lo anterior, la directriz es perpendicular al eje polar y está a 4 unidades a la izquierda del foco O (polo).

Si $\theta = 0$, $r = \frac{2}{1 - 1} = \frac{2}{1 - 1} = \frac{2}{0} = 4$.

Si $\theta = \pi$, $r = \frac{2}{1 - 1} = \frac{2}{1 - 1} = \frac{2}{0} = \frac{4}{3}$.

Las coordenadas de los vértices son $V(4, 0)$ y $V(\frac{4}{3}, \pi)$.

Como el centro de la cónica está sobre el eje polar y en el punto medio de la recta que une los vértices, es decir: $C(\frac{4}{3}, 0)$.

La longitud del eje mayor es la distancia entre los vértices, es decir, $2a = \frac{16}{3}$.

Si la longitud de cada lado recto es 4, se tiene:

$$\frac{2b^2}{a} = 4$$

$$\frac{2b^2}{8/3} = 4$$

$$2b^2 = 4\left(\frac{8}{3}\right)$$

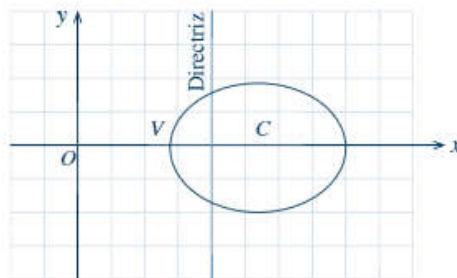
$$b^2 = \frac{32}{8}$$

$$b^2 = \frac{32}{6}$$

$$b^2 = \frac{16}{3} \text{ y } b = \frac{4}{\sqrt{3}} \left. \vphantom{b^2 = \frac{16}{3}} \right\} \text{ Longitud del semejante menor.}$$

La longitud del eje menor es $2b = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



- 3 ●● Identifica la cónica cuya ecuación polar es $r = \frac{4}{2+3 \cos \theta}$.

Solución

Dado que la ecuación ordinaria de una cónica tiene a la unidad como primer término del denominador, es necesario dividir el numerador y denominador del segundo miembro de la ecuación polar dada entre 2, es decir:

$$r = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{2+3 \cos \theta}{2}} = \frac{2}{1+3 \cos \theta}$$

Comparando la ecuación resultante con la ecuación polar de la cónica $r = \frac{ep}{1+e \cos \theta}$ se observa que:

La excentricidad es mayor que la unidad ($e = \frac{3}{2}$), por lo que la cónica es una **hipérbola**.

Como $ep = 2$ y $e = \frac{3}{2}$, entonces, $\frac{3}{2}p = 2$.

$$p = \frac{4}{3}$$

Por lo anterior, la directriz es perpendicular al eje polar y está a $\frac{4}{3}$ unidades a la derecha del foco correspondiente.

- 4 ●● Identifica la cónica cuya ecuación polar es $r = \frac{6}{2-2 \sin \theta}$.

Solución

Dado que la ecuación ordinaria de una cónica tiene a la unidad como primer término del denominador, es necesario dividir el numerador y denominador del segundo miembro de la ecuación polar dada entre 2, es decir:

$$r = \frac{\frac{6}{2}}{\frac{2-2 \sin \theta}{2}} = \frac{3}{1-\sin \theta}$$

Comparando la ecuación resultante con la ecuación polar de la cónica $r = \frac{ep}{1-e \sin \theta}$, se observa que:

La excentricidad es igual a la unidad ($e = 1$), por lo que la cónica es una **parábola**.

Como $ep = 3$ y $e = 1$, entonces: $(1)p = 3$

$$p = 3$$

Por lo anterior, la directriz es paralela al eje polar y está a 3 unidades debajo del polo.

- 5 ●● Una parábola tiene su foco en el polo y su vértice en el punto $V(4, \pi)$; determina la ecuación polar de la cónica.

Solución

Dado que el foco está en el polo y el vértice $V(4, \pi)$, se deduce que el eje polar está sobre el eje de la parábola; también se hace notar que el vértice está a la izquierda del foco al igual que la directriz.

Por lo anterior, la ecuación polar de la cónica por aplicar es $r = \frac{ep}{1-e \cos \theta}$.

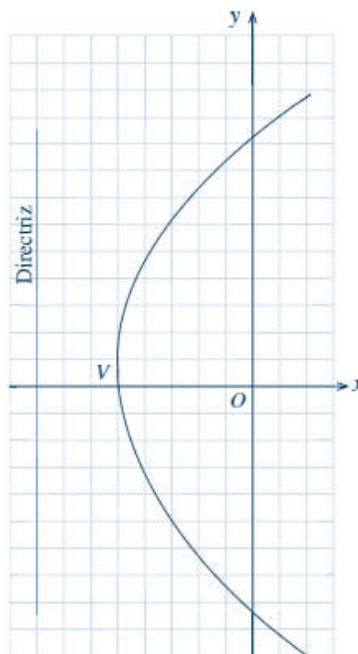
Sea p la distancia del foco a la directriz y que es el doble de la distancia del foco al vértice, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p &= 4 \\ p &= 8 \end{aligned}$$

La excentricidad de una parábola es igual a la unidad, por lo que la ecuación de la cónica es:

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta} = \frac{(1)(8)}{1 - (1) \cos \theta} = \frac{8}{1 - \cos \theta}$$

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



EJERCICIO 32

I. Determina la ecuación polar de la circunferencia para los siguientes datos; traza la gráfica correspondiente.

1. Centro en el polo y radio igual a 7.
2. Centro $(5, 0^\circ)$ y que pasa por el polo.
3. Centro $(8, \frac{\pi}{3})$ y que pasa por el polo.
4. Centro $(3, \frac{\pi}{2})$ y que pasa por el polo.
5. Centro $(6, 120^\circ)$ y que pasa por el punto $M(3, 60^\circ)$.
6. Centro $(4, \frac{\pi}{4})$ y radio igual a 8.
7. Centro $(4, \frac{\pi}{6})$ y radio igual a 1.
8. Que pasa por el polo, por $M(3, 90^\circ)$ y por $N(4, 0^\circ)$.
9. Centro $(8, 135^\circ)$ y radio igual a 6.
10. Centro $(5, 210^\circ)$ y que pasa por el punto $M(4, 240^\circ)$.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas ☐

Competencias disciplinares ☐

II. Determina el centro y radio de las siguientes circunferencias cuya ecuación polar se da; traza la gráfica correspondiente.

1. $r = 6 \cos \theta$
2. $r = 4 \cos \theta + 4\sqrt{3} \sin \theta$
3. $r^2 - 2\sqrt{2}r \cos \theta - 2\sqrt{2}r \sin \theta - 5 = 0$
4. $r^2 + r \cos \theta - \sqrt{3}r \sin \theta - 3 = 0$
5. $r^2 - 4\sqrt{3}r \cos \theta - 4r \sin \theta + 15 = 0$
6. $r = 5 \cos \theta - 5\sqrt{3} \sin \theta$
7. $r = 8 \sin \theta - 8\sqrt{3} \cos \theta$
8. $r = 5$
9. $r^2 - 6r \cos (8 - 30^\circ) - 16 = 0$
10. $r^2 - 16r \cos (\theta - 240^\circ) + 16 = 0$

III. Identifica la cónica para las siguientes ecuaciones polares, determina todos sus elementos correspondientes y traza su gráfica.

1. $r = \frac{7}{3 + 3 \cos \theta}$
2. $r = \frac{4}{2 - 3 \sin \theta}$
3. $r = \frac{9}{5 - 4 \cos \theta}$
4. $r = \frac{3}{2 + 6 \sin \theta}$
5. $r = \frac{8}{4 - \sin \theta}$
6. $r = \frac{2}{1 - \sin \theta}$
7. $r = \frac{12}{4 - 3 \cos \theta}$
8. $r = \frac{3}{3 + 2 \cos \theta}$
9. $r = \frac{6}{4 - 8 \cos \theta}$
10. $r = \frac{6}{2 - \cos \theta}$
11. $r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$
12. $r = \frac{4}{1 - 2 \sin \theta}$

IV. Resuelve los siguientes problemas.

1. Escribe la siguiente ecuación en coordenadas cartesianas $r^2 - 2r(\cos \theta - \sin \theta) - 7 = 0$.
2. Transforma la ecuación de la elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ a coordenadas polares.
3. Transforma la ecuación de la hipérbola $x^2 - 3y^2 - 4y - 1 = 0$ a coordenadas polares.
4. Transforma la ecuación de la parábola $y^2 - 8x - 16 = 0$ a coordenadas polares.
5. Transforma las siguientes ecuaciones de cónicas a coordenadas polares, identificando la cónica.
 - a) $9x^2 + 16y^2 = 144$
 - b) $4x^2 - 5y^2 + 18y - 9 = 0$
 - c) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$
 - d) $3x^2 - y^2 = 2$
 - e) $y^2 + 8x = 0$
 - f) $y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$
 - g) $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$
 - h) $2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0$
6. Determina la ecuación polar para la cónica, cuyos datos se presentan a continuación.

- a) Parábola de foco $(0,0^\circ)$ y vértice $(4, -\frac{\pi}{2})$.
- b) Elipse de foco $(0 > 0^\circ)$ y vértices $(4,0^\circ)$ y $(10,\pi)$.
- c) Hipérbola de foco $(0,0^\circ)$ y vértices $(2, \frac{3\pi}{2})$ y $(10, \frac{3\pi}{2})$.
- d) Elipse de foco $(4,0^\circ)$ y vértices $(6,0^\circ)$ y $(6,\pi)$.
- e) Parábola de foco $(0,0^\circ)$ y vértice $(1,0)$.
- f) Hipérbola de foco $(5, \frac{\pi}{2})$ y vértices $(3, \frac{\pi}{2})$ y $(3, -\frac{\pi}{2})$.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

Autoevaluación

1. Dada la ecuación de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 24x + 10y - 11 = 0$, calcula las rectas tangentes a ella que son paralelas a la recta
2. Determina la ecuación reducida por la elipse que pasa por $(50,0)$ y la distancia semifocal es 14, además se sabe que pasa por $(8,2)$ y por $(0,6)$.
3. Clasifica cada una de las siguientes cónicas cuyas ecuaciones son:
 - a) $2x^2 + 2y^2 - 3x + 8y - 10 = 0$ $x^2 + 2y^2 + 3x + 8y - 10 = 0$.
 - b) $4x^2 + 12y^2 = 110$ $4x + 10y + 12y^2 = 110$.
 - c) $y = x^2 + 6x - 4$ $y = x^2 - 6x - 4$.
 - d) $x = 3y^2 - 15y + 8$ $x = -3y^2 - 15y + 8$.
 - e) $x^2 - 2y^2 = 125$ $x^2 - 2y^2 = 125$.
4. Los vértices de un triángulo son los puntos $(-2,4)$, $(-4,-6)$ y $(6,-8)$.
 - a) Encuentra las ecuaciones de dos de sus mediatrices y el punto de intersección de estas.
 - b) Usa este punto para trazar la circunferencia que circunscribe el triángulo y mención como se llama dicho punto.
 - c) Deduce la ecuación de la circunferencia.

Respuestas de algunos reactivos de los distintos ejercicios propuestos

EJERCICIO 1

- I. 1. René Descartes.
3. Al establecer una correspondencia biunívoca entre puntos del plano cartesiano y números reales, la geometría analítica aplica los métodos del álgebra y el análisis al estudio de la geometría. Descartes sustituye las palabras enteras, abreviaturas y notaciones por un simbolismo puro, cuidadosamente ideado.
5. En este trabajo consigue establecer una sólida relación entre la geometría (prácticamente experimental entonces) y el álgebra, que caminaban por separado. Esto ha marcado el desarrollo de las Matemáticas hasta hoy, dando lugar al nacimiento de la geometría. Muestra cómo es posible estudiar las curvas a partir de ecuaciones algebraicas a través de una identificación de los puntos del plano con pares de números, sus coordenadas, a través del establecimiento de un sistema de referencia o ejes de coordenadas.

EJERCICIO 2

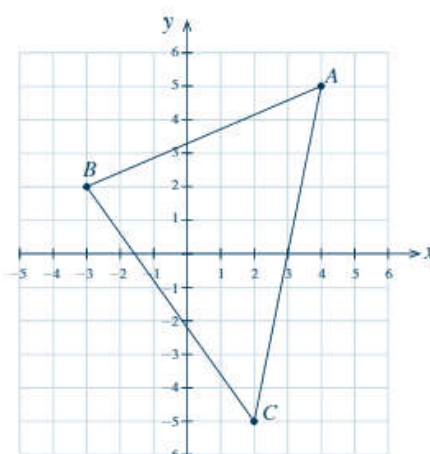
- I. 1. Se denomina **cartesiano** en honor a René Descartes por ser quien lo empleó en la unión del álgebra y la geometría plana para dar lugar a la geometría analítica.
3. Se ordenan en contra del giro de las manecillas del reloj.
5. Las abscisas son negativas cuando se miden sobre el eje x y a la izquierda del origen; las ordenadas son negativas cuando se miden sobre el eje y y hacia abajo del origen.
7. Se traza una recta A perpendicular al eje x y otra B perpendicularmente al eje y , las cuales pasan por el punto P de interés, la distancia del origen al punto donde corta la recta A se representa por x y se llama abscisa de P ; la distancia del origen al punto donde corta la recta B se representa por y y se llama ordenada de P .

EJERCICIO 3

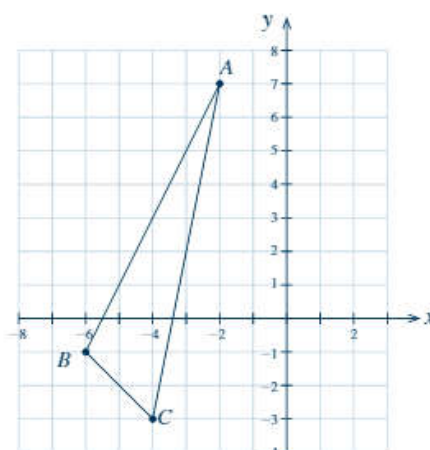
- I. 1. Al estar observando el globo terráqueo, podemos localizar cualquier país mencionando dos datos, su longitud y latitud.
3. a) sobre el eje y entre el cuadrante I y II
 b) sobre el eje x entre el cuadrante II y III
 c) cuadrante I
 d) cuadrante III
 e) cuadrante II
 f) cuadrante IV
 g) cuadrante I
 h) cuadrante III
 i) cuadrante IV

- j) cuadrante IV
 k) cuadrante II
 l) cuadrante IV

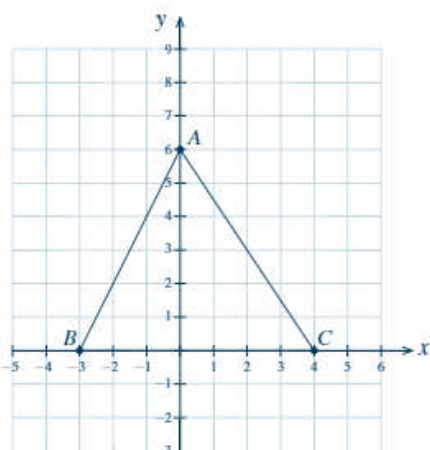
5. a)



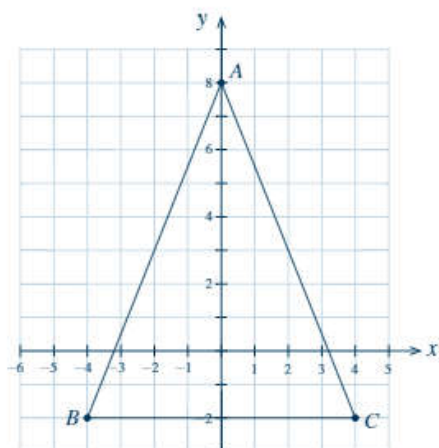
b)



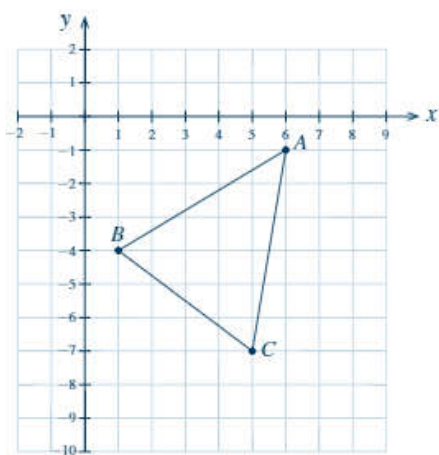
c)



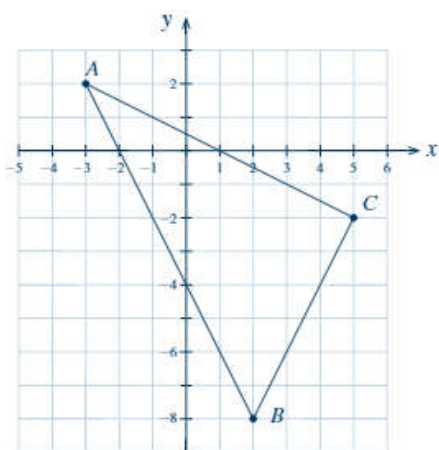
d)



d)



e)



EJERCICIO 4

I. 1. $d \overline{AB} = 10$

3. $d \overline{CM} = 5.9184$

5. $d \overline{LB} = 10.8166$

II. 1. $x = (11)$ y (5)

3. $x = (4)$ y (-6)

III. 1. $x = (9)$ y (-7)

5. $x = (-3)$ y (-9)

3. $y = (14)$ y (-2)

IV. 1. Falso

3. Verdadero

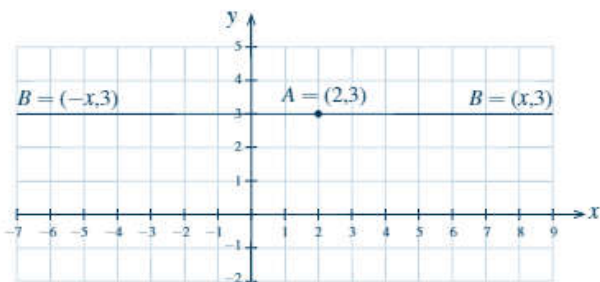
V. 1. Verdadero

3. Verdadero

VI. 1. Verdadero

3. Verdadero

VII. 1.



Graficando los puntos se observa que la distancia dirigida de A a B es:

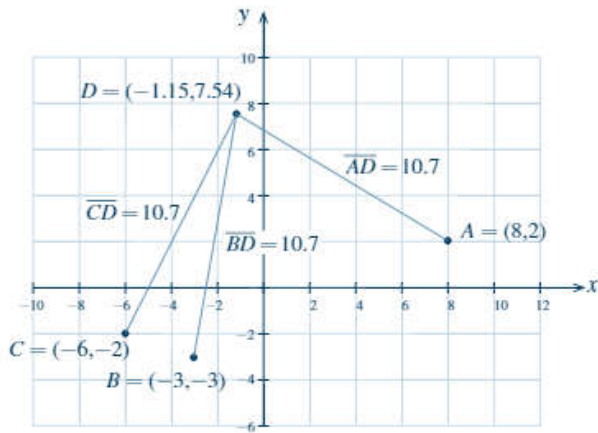
$$d = x_2 - x_1$$

$$d = x - 2$$

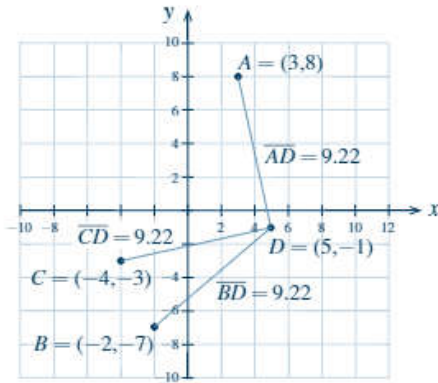
5. $B(-0.73, -3)$ o $B(2.73, -3)$

7. $C(4.5, 6.33)$ o $C(4.5, -2.33)$

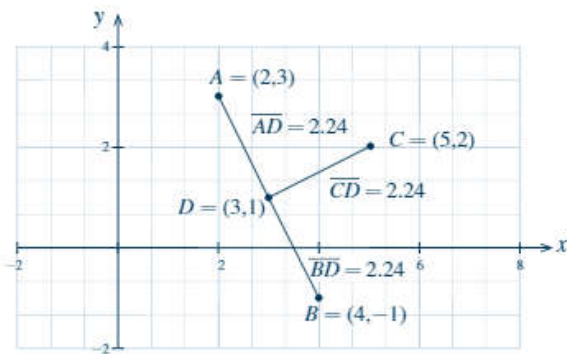
9. a) $D\left(-\frac{15}{13}, \frac{98}{13}\right)$



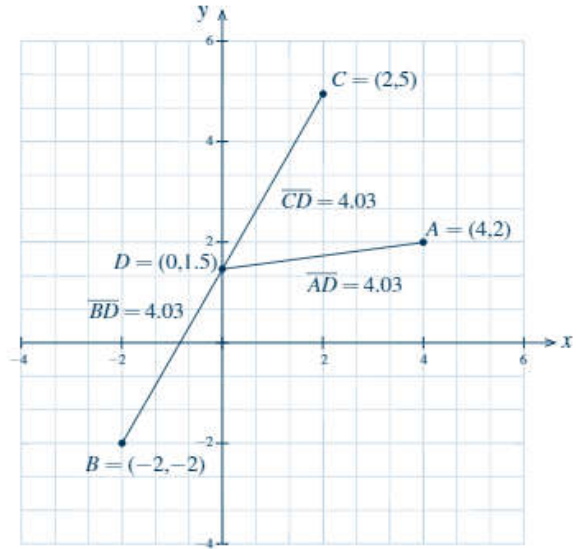
b) $D(5, -1)$



c) $D(3, 1)$



d) $D\left(0, \frac{3}{2}\right)$


EJERCICIO 5

1. $P\left(\frac{14}{5}, \frac{11}{5}\right)$

3. $P_1(4, 0), P_1(5, 5), Pm\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$

5. $P\left(\frac{19}{2}, 5\right)$

7. $x + y - 11 = 0; P\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)$

9. a) $A(-5, -4)$

b) $A(1, -8)$

c) $A(-2, 1)$

d) $A(2, -8)$

$B(1, 6)$

$B(9, 0)$

$B(8, 5)$

$B(14, -8)$

$C(9, -2)$

$C(-3, 4)$

$C(4, -7)$

$C(-10, 6)$

11. $P_1\left(\frac{25}{4}, -\frac{1}{2}\right), P_2 = Pm\left(\frac{7}{2}, 2\right), P_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{2}\right)$

13. a) $P\left(10, \frac{11}{2}\right)$

d) $P\left(8, \frac{5}{3}\right)$

b) $P(-5, -7)$

e) $P\left(-\frac{41}{5}, \frac{26}{5}\right)$

c) $P\left(-14, -\frac{7}{2}\right)$

f) $P\left(-\frac{5}{3}, \frac{34}{3}\right)$

15. $P\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$

21. $B(-6, 1)$

17. $P(2, 2)$

23. $P(22, 37)$

19. $D(3, 5)$

25. $P(-2, -2)$

EJERCICIO 6I. 1. $(A) \text{Área} = 31$ $(P) \text{Perímetro} = 29.374$ $(p) \text{Semiperímetro} = 14.687$ 3. $A = 21.5$ $P = 22.502$ $p = 11.251$ 5. $A = 29$ $P = 25.612$ $p = 12.806$ II. 1. $A = 66$ $P = 31.907$ $p = 15.953$ 3. $A = 59.5$ $P = 33.525$ $p = 16.7628$ 5. $A = 21.5$ $P = 60.632$ $p = 15.316$ III. 1. $y = \left(\frac{65}{9}\right) y \left(-\frac{35}{9}\right)$ 3. $A(-5, -2)$ $A = 26.5$ $B(4, 3)$ $P = 24.855$ $C(2, -4)$ $p = 12.427$ 5. $A = 5$ 7. $A = 34$ 9. a) $A_{ABC} = 10$

b) $E = \left(\frac{4+6}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (5, 5)$

$F = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = (5, 5)$

Por lo tanto el punto medio de la hipotenusa es equidistante a cada uno de los vértices.

c)

$\triangle ABC = \triangle ABC$

$A_{ABCD} = \triangle ABC + \triangle ABC = 2\triangle ABC$

11. $A_{ABC} = 20$

13. $P_{AC_y} = \frac{3+C_y}{2} = 0 \rightarrow C_y = -3$

$P_{BD_y} = \frac{4+D_y}{2} = 0 \rightarrow D_y = -4$

$A_{ABC} = 6 \quad x_c = -7$

$\therefore C(-7, -3)$

$A_{ABC} = 6 \quad x_D = -6$

$\therefore D(-6, -4)$

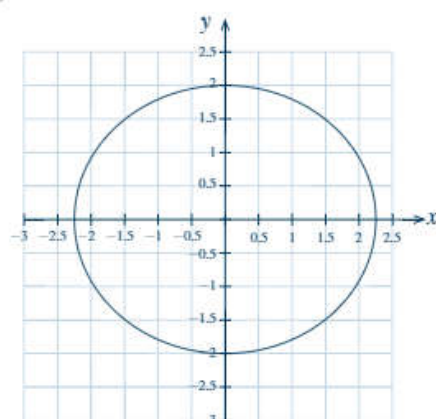
EJERCICIO 7I. 1. a) intersección con el eje x son $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$ y con el eje y son $(0, 2)$ y $(0, -2)$ b) Si hay simetría respecto al eje x Si hay simetría con respecto al eje y

Si hay simetría con respecto al origen

c) La curva es de extensión cerrada y como es simétrica a los ejes coordenados y al origen, se deduce que se trata de una circunferencia de centro en el origen.

d) No tiene asíntotas

e)

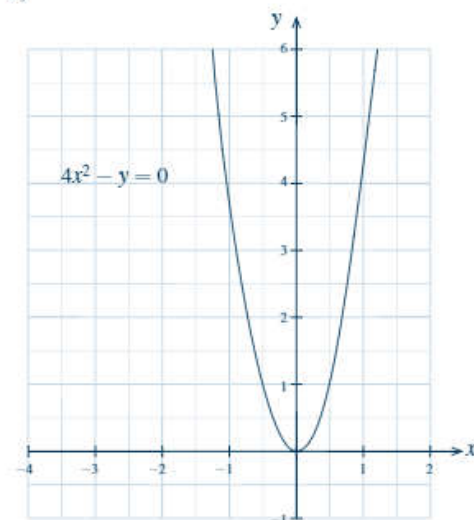
3. a) La intersección con el eje x es $(0,0)$ y con el eje y es $(0,0)$ b) No hay simetría respecto al eje x Si hay simetría con respecto al eje y

No hay simetría con respecto al origen

c) La curva es una parábola que se extiende hacia las y positivas

d) No tiene asíntotas

e)

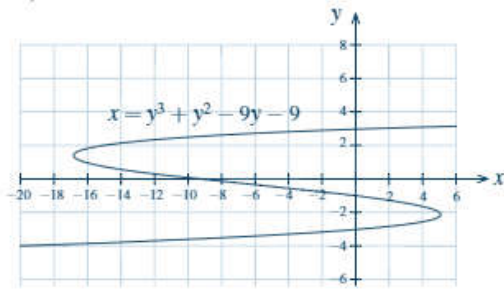
5. a) La intersección con el eje x es $(-9,0)$ y con el eje y son $(0, -3)$, $(0,3)$ y $(0, -1)$ b) No hay simetría respecto al eje x No hay simetría con respecto al eje y

No hay simetría con respecto al origen

c) La curva es indefinida hacia la derecha y hacia la izquierda del eje y , hacia arriba y hacia debajo de x

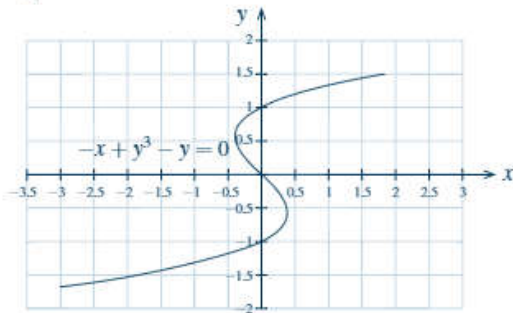
d) No tiene asíntotas

e)



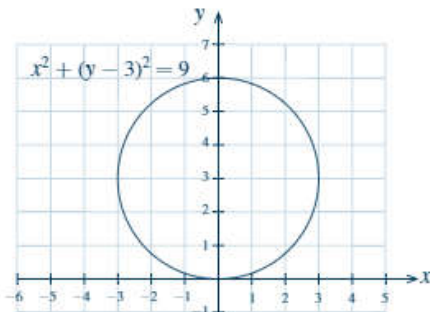
7. a) La intersección con el eje x es $(0,0)$ y con el eje y son $(0,0)$, $(0,-1)$ y $(0,1)$
 b) No hay simetría respecto al eje x
 No hay simetría con respecto al eje y
 Si hay simetría con respecto al origen
 c) La curva es indefinida hacia la derecha y hacia la izquierda del eje y , hacia arriba y hacia abajo de x
 d) No tiene asíntotas

e)



9. a) La intersección con el eje x es $(0,0)$ y con el eje y son $(0,0)$ y $(0,6)$
 b) No hay simetría respecto al eje x
 Si hay simetría con respecto al eje y
 No hay simetría con respecto al origen
 c) Como la curva es simétrica respecto al eje y y además es cerrada, entonces, se trata de una circunferencia centrada en $(0,3)$
 d) No tiene asíntotas

e)



11. a) La intersección con el eje y es $(0,0)$

b) Si hay simetría respecto al eje x

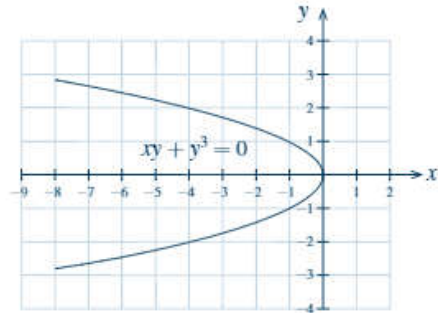
No hay simetría con respecto al eje y

No hay simetría con respecto al origen

c) Para todo valor de y , los valores de x son reales

d) No tiene asíntotas

e)



13. a) Las intersecciones con el eje x son $(0,0)$, $(4,0)$ y $(-4,0)$ y con el eje y es $(0,0)$

b) No hay simetría respecto al eje x

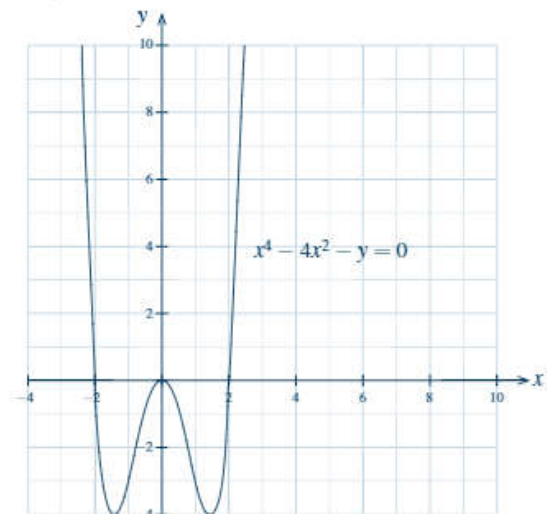
Si hay simetría con respecto al eje y

No hay simetría con respecto al origen

c) Solo para valores de $y \geq 4$, los valores de x son reales

d) No tiene asíntotas

e)



15. a) La intersección con el eje x es $(0,0)$ y con el eje y es $(0,0)$

b) No hay simetría respecto al eje x

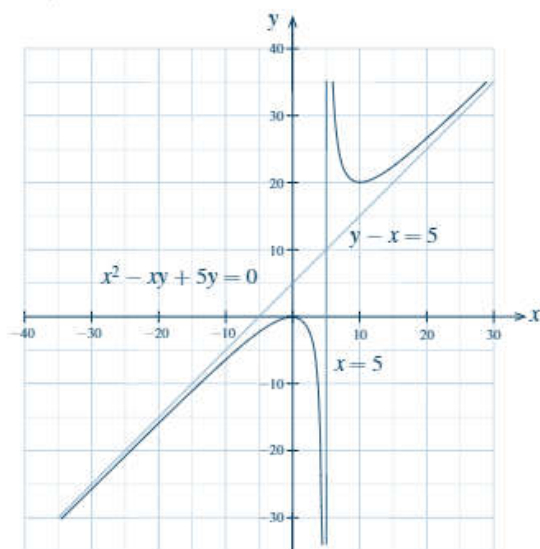
No hay simetría con respecto al eje y

No hay simetría con respecto al origen

c) Solo para valores de $0 \leq y \leq 20$, los valores de x son reales

d) Las asíntotas son: $x = 5$ y $y = x + 5$

e)


 17. a) La intersección con el eje x es $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

 b) No hay simetría respecto al eje x

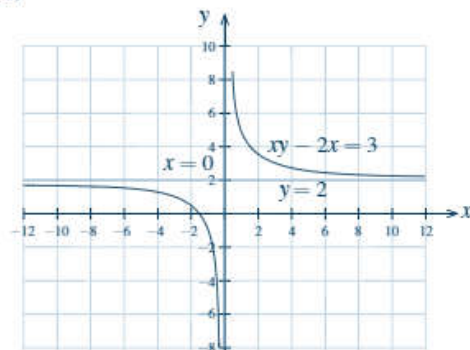
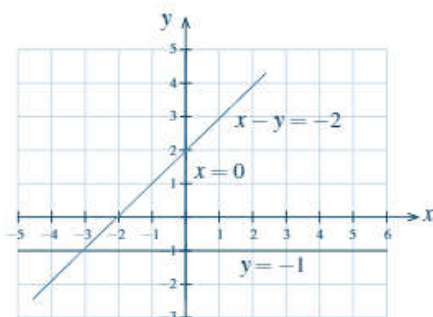
 No hay simetría con respecto al eje y

No hay simetría con respecto al origen

 c) Solo para valores de $y \neq 2$, los valores de x son reales

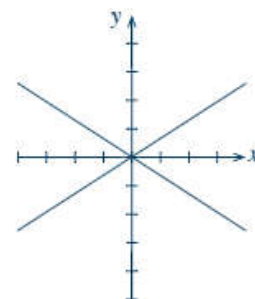
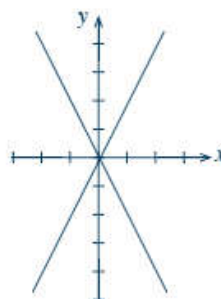
 d) Las asíntotas son $x = 0$ y $y = 2$

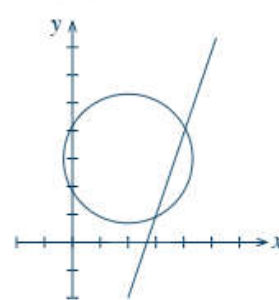
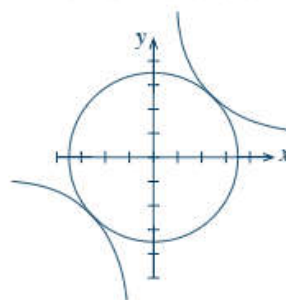
e)


 II. 1. $x^2y + x^2 - xy^2 + xy + 2x = x(2 + x - y)(1 + y)$


3. $(y + 2x)(y - 2x) = 0$

5. $(2x + 3y)(2x - 3y) = 0$


 III. 4. $(3, 2)(-3, -2), (2, 3), (-2, -3)$

 3. $(4, 4), (3, 1)$


EJERCICIO 8

I. 1. $m = \frac{7}{12}; \theta = 30^\circ 15' 23''$

3. $m = -\frac{4}{11}; \theta = 160^\circ 01' 01''$

4. $m = -3; \theta = 108^\circ 26' 06'' 32''$

II. 1. Verdadero

$$m = -\frac{3}{4}$$

3. Verdadero

$$m = -\frac{5}{6}$$

 III. 1. $y = -6$

3. $A\left(x = \frac{1}{2}\right); B(y = 1)$

5. $8(y - y_1) = -7(x - x_1)$

7. a) $m = -1$;

c) $m = \infty$;

e) $m = 1$

9. $m_{\overline{PQ}} = \frac{2}{3}; m_{\overline{QR}} = \frac{14}{3}; m_{\overline{RP}} = -\frac{4}{3};$

 Sean R', P' y Q' los puntos medios de $\overline{PQ}, \overline{QR}$ y $\overline{RP}$ respectivamente, entonces:

$$m_{\overline{RR'}} = -\frac{22}{3}; m_{\overline{PP'}} = -\frac{2}{15}; m_{\overline{QQ'}} = \frac{5}{3}$$

11. a) Perpendiculares

b) Perpendiculares

c) Perpendiculares

d) Perpendiculares

e) Paralelas

13. a) Falso

b) Verdadero

c) falso

19. $m_{AB} = \frac{2}{3}$

EJERCICIO 9

- I. 1. $3x - y - 6 = 0$
3. $x + 2y - 13 = 0$
- II. 1. $\sqrt{3}x - y + 4 - 7\sqrt{3} = 0$
- III. 1. $3x + 5y + 15 = 0$
3. $20x - 5y + 6 = 0$
- IV. 1. $x + 9y - 38 = 0$
3. $x - y + 4 = 0$
- V. 1. $2x + 5y + 10 = 0$
3. $x - 2y + 4 = 0$
- VI. 1. $\overline{AB} = x - y + 3 = 0$
 $\overline{BC} = 5x + 2y - 34 = 0$
 $\overline{AC} = x - By + 10 = 0$
3. $7x + 2y + 2 = 0$
 $-\frac{x}{2} - y = 1$
7
5. $15x + 9y + 40 = 0$
7. $x + y + 4 = 0$
9. $\overline{AB} = 3x - 4y + 10 = 0$; $\overline{BC} = 6x + y - 43 = 0$;
 $\overline{AC} = 3x + 5y - 26 = 0$
11. $y = 1$
13. $7x + 5y - 31 = 0$
 $11x + y - 35 = 0$
15. $A = 5$; $B = 9$
17. $3x + 5y - 1 = 0$
19. $m = \frac{3}{4}$; $\theta = 36^\circ 52' 11''$
Eje $x = \frac{25}{3}$; Eje $y = -\frac{25}{4}$;
 $3x - 4y - 25 = 0$; $y = \frac{3x}{4} - \frac{25}{4}$; $\frac{x}{25} - \frac{y}{25} = 1$
21. Se bisecan en el punto $P(-2, -3)$
23. $12x + 3y - 2 = 0$
25. Paralela $x - 11y + 64 = 0$
Perpendicular $11x + y - 28 = 0$
27. $3x - 10y = 15$
29. $A = 7$; $B = -1$; $C = -13$
31. $k = \pm 18$
33. $x + 2y - 7 = 0$
35. a) $k = 1$
b) $k = -\frac{9}{4}$
c) $k = 6$

EJERCICIO 10

- I. 1. $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 8 = 0$
3. $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 6 = 0$
- II. 1. $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 5 = 0$
3. $\omega = 311^\circ 48' 38''$
5. $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - 7 = 0$

III. 1. $\frac{-x - y - 4}{\sqrt{2}} = 0$

$$p = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\omega = 225^\circ$$

10. $\frac{x - y - 9}{\sqrt{2}} = 0$

$$p = \frac{9}{\sqrt{2}}; \omega = 315^\circ$$

$$\omega = 333^\circ 26' 06''$$

IV. 1. $d = \frac{11}{\sqrt{74}} = 1.278$

V. 1. $\frac{4x - 5y + 17}{-\sqrt{41}} = 0$

$$p = \frac{17}{\sqrt{41}}$$

$$\omega = 128^\circ 39' 35''$$

3. $\frac{3x + 2y - 7}{\sqrt{13}} = 0$

$$p = \frac{7}{\sqrt{13}}; \omega = 33^\circ 41' 24''$$

VI. 1. $3x - 4y + 25 = 0$

$$4x + 3y - 25 = 0$$

$$3. 4x - 3y - 4 = 0$$

$$4x - 3y + 4 = 0$$

5. $\frac{x + y + 8}{-\sqrt{2}} = 0$

9. $d_1 = \frac{33}{\sqrt{41}}$; $d_2 = \frac{35}{\sqrt{41}}$

$$d = \frac{68}{\sqrt{41}}$$

13. $\overline{AB} \left\{ \frac{3x + 5y - 22}{-\sqrt{2}} = 0; \overline{BC} \left\{ \frac{2x - y - 3}{\sqrt{5}} = 0; \overline{AC} \left\{ \frac{3x + 2y - 8}{\sqrt{5}} = 0 \right. \right. \right.$

15 a) $d = \frac{7}{\sqrt{13}} = 1.94145$

b) $d = \frac{24}{17} = 1.41176$

c) $d = 0.5$

17. $x + 2y \pm 6\sqrt{5} = 0$

19. $k = \pm\sqrt{63}$

EJERCICIO 11

I. 1. $A\left(\frac{8}{\sqrt{2}}, \frac{8}{\sqrt{2}}\right)$

5. $G(-4, -4)$

II. 1. $N(13, 67^\circ 22' 48'')$

5. $C(65, 330^\circ 15' 18'')$

III. 1. $5r \cos \theta - 4r \sin \theta + 20 = 0$

3. $3r^2 + 3r \cos \theta - 6r \sin \theta + 9 = 0$

3. $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

3. $(\sqrt{117}, 123^\circ 41' 24'')$

$$5. r^2 \cos^2 \theta - 4r \sin \theta - 4 = 0$$

$$7. r \cos(\theta - \omega) = p$$

$$9. r = \frac{4p \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$\text{IV. } 1. x^2 + y^2 - 5x = 0$$

$$3. x - y = 0$$

$$\text{V. } 1. d = 5.319$$

$$\text{VI. } 1. A = 5.437$$

$$P = 10.854$$

$$P = 5.427$$

$$\text{VII. } 1. r \cos(\theta - 60^\circ) = 2$$

$$3. r \cos(\theta - 15^\circ) = 8$$

$$5. r \cos(\theta - 45^\circ) = 6$$

$$\text{VIII. } 1. r \cos(\theta - 315^\circ) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$3. r \cos(\theta - 36^\circ 52' 11'') = 2$$

$$5. r \cos(\theta - 153^\circ 26' 6'') = 0$$

$$\text{IX. } 1. r \cos \theta = -3\sqrt{3}$$

$$3. r \cos \theta = 4.53$$

$$5. r \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\text{X. } 1. r \sin \theta = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$3. r \sin \theta = 2.298177$$

$$5. r \sin \theta = 0.9063$$

$$\text{XI. } 1. \frac{5}{2} r \sin(20^\circ - \theta) + 4r \sin(\theta - 135^\circ) = 20 \sin(-115^\circ)$$

$$\text{XII. } 1. (2\sqrt{2}, 45^\circ), (2\sqrt{2}, 135^\circ), (2\sqrt{2}, 225^\circ), (2\sqrt{2}, 315^\circ)$$

$$3. (4, 60^\circ), (4, 300^\circ)$$

$$5. A = 2\sqrt{3}$$

$$7. \text{ Verdadero}$$

$$9. \text{ Verdadero}$$

$$11. 2r \sin(120^\circ - \theta) = 0$$

$$13. r \cos(\theta - 50^\circ) = 7 \sin 50^\circ$$

EJERCICIO 12

$$\text{I. } 1. \angle A = 90^\circ$$

$$\angle B = 45^\circ$$

$$\angle C = 45^\circ$$

$$5. \angle K = 50^\circ 54' 22''$$

$$\angle L = 53^\circ 07' 48''$$

$$\angle M = 75^\circ 57' 49''$$

$$3. \angle K = 69^\circ 13' 40''$$

$$\angle L = 24^\circ 43' 03''$$

$$\angle M = 86^\circ 03' 17''$$

$$\text{II. } 1. x = 9$$

$$3. m_1 = \frac{1}{7}$$

$$5. \theta = 45^\circ$$

$$7. \angle A = 90^\circ, \angle B = 90^\circ, \angle C = 90^\circ \text{ y } \angle D = 90^\circ$$

$$\text{Comprobación } \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$9. \angle A = 45^\circ, \angle B = 90^\circ, \angle C = 45^\circ$$

$$\text{Comprobación } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$11. m_1 = \frac{5 + \sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 1}$$

$$13. A = 28$$

$$15. y = -\frac{1}{6}x + k$$

$$x + 6y + 16 = 0$$

$$17. \text{ Punto de intersección } P\left(-\frac{39}{4}, \frac{85}{16}\right)$$

$$19. \theta = 103^\circ 19' 29''$$

$$\text{III. } 1. \text{ Paralelas}$$

$$3. \text{ Punto de intersección } P(1, 6)$$

$$5. \text{ Coincidentes}$$

$$7. \text{ Coincidentes}$$

$$9. \text{ Punto de intersección } P\left(\frac{136}{61}, \frac{135}{61}\right)$$

$$\text{IV. } 1. \theta_1 = 56^\circ 18' 35'' \quad \theta_2 = 75^\circ 57' 49''$$

$$\theta_2 = 123^\circ 41' 25'' \quad 5. \theta_1 = 103^\circ 14' 26''$$

$$3. \theta_1 = 104^\circ 02' 11'' \quad \theta_2 = 76^\circ 45' 34''$$

EJERCICIO 13

$$\text{I. } 1. y = \frac{15}{11}x + k \quad 3. y = \frac{4}{5}x + k \quad 5. y = -3x + k$$

$$\text{II. } 1. y = x + k \quad 3. y = -6x + k \quad 5. y = -\frac{1}{5}x + k$$

$$\text{III. } 1. \text{ Su pendiente debe ser: } m = -\frac{3}{2}$$

$$3. \text{ Su ordenada en el origen es } 2.$$

$$5. \text{ Pasan por el punto } A(4, 1).$$

$$7. \text{ Su abscisa en el origen es } 2.$$

$$\text{IV. } 1. K = 2; 2x - y + 3 = 0 \quad 7. 3x - y + 5 = 0$$

$$3. 4x - 3y + 24 = 0 \quad 9. 4x + 3y - 25 = 0$$

$$5. 2x + y - 6 = 0 \quad 11. \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -9 \\ 3 & 4 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

$$13. x - 2y + 6 = 0 \text{ y } 4x - y - 4 = 0$$

$$15. a) y = -3x + k$$

$$b) y - 4 = k(x - 2)$$

$$c) y = kx + 6$$

$$d) y = k(x + 4)$$

$$e) \frac{x}{k} + \frac{y}{12 - k} = 1$$

$$f) y = \pm 3x + k$$

$$g) y = \pm \frac{1}{2}x + k$$

$$y = \pm 2x + k$$

$$h) y = -\frac{3}{4}x + k$$

$$i) 2x - 5y + 3 + k(x - 3y - 7) = 0$$

$$j) y = -\frac{15}{8}x + k$$

EJERCICIO 14

$$I. 1. d = \frac{20}{\sqrt{41}}$$

$$3. d = \frac{27}{\sqrt{29}}$$

$$II. 1. d = -\frac{38}{\sqrt{34}}$$

$$5. d = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$3. d = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$7. d = \frac{28}{\sqrt{37}}$$

$$III. 1. d = -\frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$3. d = -\frac{84}{\sqrt{61}}$$

$$5. d = -\frac{20}{\sqrt{34}}$$

$$IV. 1. d = -\frac{23}{\sqrt{73}}; A = 11.5$$

$$7. k = \frac{-4 \pm 4\sqrt{37}}{6}$$

$$3. y = 6.08516$$

$$9. k = -3$$

$$5. x = -4 \text{ y } x = 7$$

$$V. 1. 182x + 14y + 15 = 0$$

$$22x - 286y + 495 = 0$$

$$3. (2\sqrt{2} + \sqrt{5})x + (\sqrt{5} - \sqrt{2})y + (\sqrt{2} - \sqrt{5}) = 0$$

$$(2\sqrt{2} - \sqrt{5})x - (\sqrt{2} + \sqrt{5})y + (\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 0$$

$$VI. 1. (4\sqrt{2} + \sqrt{65})x + (7\sqrt{2} + \sqrt{65})y + 9\sqrt{2} = 0$$

$$3. (\sqrt{26} + 5\sqrt{5})x + (2\sqrt{26} + \sqrt{5})y - 27\sqrt{5} = 0$$

$$5. (2\sqrt{26} + 5\sqrt{13})x - (3\sqrt{26} + \sqrt{13})y + (5\sqrt{13} - 32\sqrt{13}) = 0$$

$$VII. 1. 3x + (2 - 2\sqrt{13})y - 14 = 0 \text{ y } 3x + (2 + 2\sqrt{13})y - 14 = 0$$

$$5. y^2 = 20x$$

EJERCICIO 15

$$I. 1. \text{Gravicentro } (3.667, 3.667)$$

$$\text{Circuncentro } (2.75, 3.875)$$

$$\text{Ortcentro } (5.5, 3.25)$$

$$\text{Incentro } (4, 3.76)$$

$$3. \text{Gravicentro } (2.333, 2.333)$$

$$\text{Circuncentro } (1.95, 2.425)$$

$$\text{Ortcentro } (3.1, 2.15)$$

$$\text{Incentro } (3.4, 0.4)$$

$$III. 1. \text{Incentro } (-1.558, -0.889)$$

$$3. \text{Pasan por el punto } P\left(2, \frac{5}{3}\right)$$

$$5. \text{Verdadero}$$

$$5. \text{Gravicentro } (1.666, 2.666)$$

$$\text{Circuncentro } (2.656, 2.083)$$

$$\text{Ortcentro } (-0.333, 3.833)$$

$$\text{Incentro } (1.443, 3.074)$$

5. Cuando el plano no es perpendicular al eje de simetría del cono, pero corta a todas las rectas generatrices, su intersección da lugar a la elipse.

7. Cuando el plano es paralelo al eje de simetría del cono y que además corta a los dos mantos, su intersección da lugar a una hipérbola.

9. Cuando el plano pasa por el vértice perpendicularmente, su intersección da lugar a un punto.

11. Cuando el plano pasa paralelamente a las generatrices del cono, su intersección da lugar a una sola recta.

EJERCICIO 17

$$I. a) x^2 + y^2 = 36$$

$$d) x^2 + y^2 = \frac{289}{16}$$

$$b) x^2 + y^2 = 13$$

$$c) x^2 + y^2 = \frac{20}{9}$$

$$e) x^2 + y^2 = \frac{9}{25}$$

$$II. 1. (x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$$

$$3. \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$$

$$x^2 + y^2 + 9x - 7y - \frac{39}{4} = 0$$

$$5. (x-5)^2 + y^2 = 100$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 75 = 0$$

$$III. 1. \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{65}{4}$$

$$x^2 + y^2 + 7x - 4y = 0$$

$$5. (x-6)^2 + y^2 = 5$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 31 = 0$$

$$3. (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - y - 30 = 0$$

$$IV. 1. (x+6)^2 + (y-7)^2 = 89$$

$$x^2 + y^2 + 12x - 14y - 4 = 0$$

$$3. (x+3)^2 + (y-4)^2 = 106$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 81 = 0$$

$$5. \left(x + \frac{23}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{17}{7}\right)^2 = \frac{14\,909}{392}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{46x}{7} + \frac{34y}{7} - \frac{1195}{56} = 0$$

$$V. 1. 9x - 7y + 16 = 0$$

$$5. 4x - 22y + 43 = 0$$

$$3. 3x + 4y - 16 = 0$$

$$VI. 1. (x-3)^2 + (y+6)^2 = 9$$

$$3. (x+2)^2 + (y-5)^2 = 81$$

$$5. 7x + y = 0$$

$$7. (x+3)^2 + (y-6)^2 = 25$$

$$9. \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{2}$$

$$11. 10x + 8y + 41 = 0$$

$$13. (x-5)^2 + (y+3)^2 = 8$$

$$15. (x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$$

$$17. (x-2)^2 + (y-8)^2 = 25$$

$$19. x^2 - y^2 - 30x - 6y + 109 = 0$$

$$21. x^2 + y^2 = \frac{144}{289}$$

$$25. \left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{250}{9}$$

$$23. x^2 + (y+2)^2 = 4$$

EJERCICIO 16

I. 1. Es el conjunto de puntos que se forman de la intersección de un cono de revolución de dos mantos con un plano.

3. El eje de simetría, su vértice y las generatrices.

VII. 1. Circunscrita: $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$

Inscrita: $(x-5)^2 + (y-1.61)^2 = 0.96$

3. Inscrita: $(x-0.9561)^2 + (y-0.8704)^2 = 3.10041$

Circunscrita: $x^2 + y^2 + \frac{55}{39}x + \frac{25}{13}y - \frac{278}{13} = 0$

VIII. 1. Inscrita: $(x-1.8588)^2 + (y-2.1411)^2 = 0.2603$

Circunscrita: $x^2 + y^2 - \frac{13}{3}x - \frac{11}{3}y + \frac{20}{3} = 0$

3. Inscrita: $(x-3.2038)^2 + (y-1.5726)^2 = 27.1493$

Circunscrita: $(x+0.48)^2 + (y-0.48)^2 = 6.46$

5. Inscrita: $(x-2)^2 + (y-2.21199)^2 = 3.8864$

Circunscrita: $(x-3)^2 + y^2 = 26$

IX. 1. $x^2 + (y+1)^2 = \frac{324}{25}$

3. $\left(x - \frac{25}{16}\right)^2 + (y-2)^2 - \frac{625}{256} = 4 - \frac{25x}{8} + x^2 - 4y + y = 0$

X. 1. $A = 254.469$

$L = 43.9822$

3. $A = 172.7875$

$L = 46.5973$

EJERCICIO 18

1. Real; $C(-4,2); r=4$

5. No es real

3. Real; $C\left(\frac{17}{7}, \frac{24}{7}\right); r=\frac{12}{7}$

7. No es real

9. No es real

II. 1. $A = 50.269$

$L = 25.132$

5. No es real

7. No es real

3. $A = 9.232$

$L = 10.771$

9. No es real

III. 1. Concéntricas de $C(-1,4)$

3. Concéntricas de $C\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

IV. 1. $(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 36$

3. Verdadero.

5. $k = 25$

7. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$

EJERCICIO 19

I. 1. $x^2 + y^2 - 5x + 7y - 44 = 0$

$C\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right); r = \frac{5}{2}\sqrt{10}$

3. $x^2 - y^2 + 3x - y - 10 = 0$

$C\left(-32, \frac{1}{2}\right); r = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

5. $6x^2 + 6y^2 - 25x - 32y - 34 = 0$

$C\left(\frac{25}{12}, \frac{8}{3}\right); r = \frac{\sqrt{2} \cdot 465}{12}$

7. $5x^2 + 5y^2 - 8x - 32y - 34 = 0$

$C\left(\frac{4}{5}, \frac{16}{5}\right); r = \frac{\sqrt{442}}{5}$

9. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0;$

$C(4,1); r = \sqrt{5}$

II. 1. $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$

3. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 20$

5. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$

$y \quad (x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$

III. 1. $(x-10)^2 + (y+5)^2 = 125;$

$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$

3. $\left(x - \frac{77}{25}\right)^2 + \left(y + \frac{253}{50}\right)^2 = \frac{2601}{100}$

EJERCICIO 20

I. 1. $3x - y - 1 = 0$

3. $2x - 3y + 20 = 0$

5. $3x - 4y - 50 = 0$

II. 1. $3x - 4y + 51 = 0$

$3x - 4y + 1 = 0$

3. $x - y - 10 = 0$

$x - y - 2 = 0$

5. $2x + 3y - 99.918 = 0$

$2x + 3y - 19.146 = 0$

III. 1. $3x - 4y + 1 = 0$

$4x + 3y - 7 = 0$

3. $x + 2y - 12 = 0$

$2x - y + 11 = 0$

5. $x - 41y + 169 = 0$

$x + y + 1 = 0$

IV. 1. $\tan(8x + 7y - 76 = 0)$

$N(7x - 8y - 10 = 0)$

$\text{long. tan} = \left| \frac{1}{2} \sqrt{113} \right|$

$\text{long. Subtan} = \left| \frac{7}{2} \right|$

$\text{long. } N = \frac{4\sqrt{113}}{7}$

$\text{long. Sub } N = \left| \frac{32}{7} \right|$

3. $\tan(7x - 4y + 26 = 0)$

$N(4x + 7y - 13 = 0)$

$\text{long. tan} = \frac{3}{7} \sqrt{65}$

$\text{long. Subtan} = \frac{12}{7}$

$\text{long. } N = \frac{3}{4} \sqrt{65}$

$\text{long. Sub } N = \frac{21}{4}$

5. $\tan(x - 4y + 12 = 0)$

$N(4x + y - 3 = 0)$

$\text{long. tan} = \sqrt{17}$

$\text{long. Subtan} = 12$

$\text{long. } N = \frac{3}{4} \sqrt{17}$

$\text{long. Sub } N = \frac{3}{4}$

V. 1. a) $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$

b) $k = \pm\sqrt{2}$

c) $-\sqrt{2} > k, k > \sqrt{2}$

$$3. \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$$

$$x + 4y - 14 = 0$$

$$y = -\frac{1}{4}x - 5$$

$$x + 4y + 20 = 0$$

$$5. \quad y = \frac{2}{11}(-10 - 3\sqrt{5})x - 6\frac{2}{11}(-10 - 3\sqrt{5}) - 4$$

$$y = \frac{2}{11}(-10 + 3\sqrt{5})x - 6\frac{2}{11}(-10 + 3\sqrt{5}) - 4$$

$$7. \quad \theta_2 = 62^\circ 48' 45''$$

$$9. a) \quad -\frac{12}{5} < m < 3$$

$$b) \quad m = -\frac{12}{5}; 3 \text{ son tangentes}$$

$$c) \quad \text{Para valores fuera del intervalo } \left[-\frac{12}{5}, 3\right] \text{ no tienen ningún punto en común}$$

$$11. \quad \theta_2 = 90^\circ \text{ Por lo tanto, las circunferencias se intersecan ortogonalmente}$$

$$13. \quad y = -\frac{1}{2}x - 5$$

$$x + 2y + 10 = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 20$$

$$x + 2y - 40 = 0$$

$$15. \quad 55 + 112m + 49m^2 + (16m + 14m^2)x + (1 + m^2)x^2 = 0$$

EJERCICIO 21

$$I. 1. (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = k^2$$

$$2. (x - 3)^2 + (y + 8)^2 = k^2$$

$$3. x^2 + (y - 4)^2 = k^2$$

$$II. 1. (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = k$$

$$K = \sqrt{5} \quad \text{Forma ordinaria} \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

$$K = 3 \quad \text{Forma ordinaria} \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

$$K = 4 \quad \text{Forma ordinaria} \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

$$3. \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = K^2$$

$$K = \frac{\sqrt{29}}{2} \quad \text{Forma ordinaria} \quad \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{29}{4}$$

$$K = 4 \quad \text{Forma ordinaria} \quad \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

$$K = 5 \quad \text{Forma ordinaria} \quad \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

$$III. 1. x^2 + y^2 + 2x - 8y - 33 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 14x - 18y + 49 = 0;$$

$$3. x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 7x + 3y + 2 = 0$$

$$4x - 3y - 1 = 0.$$

$$5. K = -3;$$

$$7. x^2 + y^2 + 30.247x - 36.247y + 125.986 = 0$$

$$IV. 1. 24x - 28y + 3 = 0$$

$$3. 5x + 4y + 6 = 0$$

$$V. 1. x - y - 4 = 0$$

$$5. CR(5, 3)$$

$$3. CR(-2, -4)$$

$$t_1 = 3$$

$$t_2 = 3$$

$$t_3 = 3$$

EJERCICIO 22

$$I. 1. F(0, 5)$$

$$y = -5$$

$$LR = |20|$$

$$3. F(0,$$

$$y = 3$$

$$LR = |12|$$

$$II. 1. y^2 = -8x$$

$$F(-2, 0)$$

$$x = 2$$

$$LR = |8|$$

$$III. 1. x^2 = -8y$$

$$F(0, -2)$$

$$y = 2$$

$$LR = |8|$$

$$IV. 1. y^2 = 16x$$

$$x = -4$$

$$LR = |16|$$

$$V. 1. y^2 = -20x$$

$$F(-5, 0)$$

$$LR = |20|$$

$$VI. 1. d = 4\sqrt{5}$$

$$3. d = 6.25$$

$$5. \text{ Verdadero}$$

$$7. y^2 = -12x$$

$$F(-3, 0)$$

$$x = 3$$

$$LR = |12|$$

$$VII. 1. x^2 - 6x + 12y + 33 = 0 \quad x'^2 + 12y' = 0$$

$$3. x^2 - 2xy + y^2 + 14x + 6y - 21 = 0$$

$$y''^2 + 5\sqrt{2}x'' = 0$$

$$5. r = -8(x, -2)$$

$$VIII. 1. (y - 2)^2 = 12(x + 5);$$

$$x = -8;$$

$$3. x^2 - 6x + 12y - 15 = 0$$

$$y = 2;$$

$$y^2 - 12x - 4y - 56 = 0$$

$$5. y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$$

$$y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$$

$$7. x^2, 4x - 2y + 10 = 0$$

EJERCICIO 23

$$I. 1. \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -12\left(y - \frac{7}{2}\right); V\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right); F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right); y = \frac{13}{2}; x = -\frac{3}{2};$$

$$LR = |12|$$

$$3. \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(x + 2); V\left(-2, \frac{5}{2}\right); F\left(1, \frac{5}{2}\right); x = -5; y = \frac{5}{2}; LR = |12|$$

$$5. \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(y - 3); V(5, 3); F\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right); y = \frac{3}{2}; x = \frac{5}{2}; LR = |6|$$

$$7. (y - 10)^2 = 8\left(x - \frac{11}{3}\right); V\left(\frac{11}{3}, 10\right); F\left(\frac{17}{3}, 10\right); x = \frac{5}{3}; y = 10;$$

$$LR = |8|$$

$$9. (y - 3)^2 = 8\left(x - \frac{7}{4}\right); V\left(\frac{7}{4}, 3\right); F\left(1 - \frac{5}{4}, 3\right); x = -\frac{1}{4}; y = 3;$$

$$LR = |8|$$

$$11. (x - 2)^2 = 2(y - 3); V(2, 3); F\left(2, \frac{9}{2}\right); y = \frac{5}{2}; x = 2; LR = |2|$$

$$13. (y + 1)^2 = 4(x - 2); V(2, -1); F(3, -1); x = 1; y = -1;$$

$$LR: |4|$$

$$II. 1. y^2 + 3x - 10y = 0$$

$$3. 5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$$

$$5. 13y^2 - 84x - 59y + 186 = 0$$

$$III. 1. x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$$

$$3. x^2 - x - y = 0$$

$$5. 2x^2 + 2x + y - 6 = 0$$

$$IV. 1. \text{Mínimo en: } \left(-\frac{11}{8}, -\frac{169}{16}\right); \text{positiva en: } (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right);$$

$$\text{negativa en } \left(-3, \frac{1}{4}\right); \text{cero en: } \left\{-3, \frac{1}{4}\right\}$$

$$3. \text{Mínimo en: } (2, 0); \text{positiva en: } (-\infty, 2) \cup (2, \infty);$$

$$\text{no es negativa; cero en: } \{2\}$$

$$5. \text{Máximo en: } (4, 0); \text{no es positiva;}$$

$$\text{negativa en: } (-\infty, 4) \cup (4, \infty); \text{cero en: } \{4\}$$

$$7. \text{Mínimo en: } \left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right); \text{positiva en: } (-\infty, 1) \cup (4, \infty);$$

$$\text{negativa en: } (1, 4); \text{cero en: } \{1, 4\}$$

$$9. \text{Máximo en: } (-\infty, 1) \cup (4, \infty); \text{positiva en: } (-2, 3);$$

$$\text{negativa en: } (-\infty, -2) \cup (3, \infty); \text{cero en: } \{-2, 3\}$$

$$11. \text{Máximo en: } (1, -3); \text{no es positiva;}$$

$$\text{negativa en: } (-\infty, -\infty); \text{no es cero}$$

$$13. \text{Mínimo en: } (-20, -500);$$

$$\text{positiva en: } (-\infty, -20 - 10\sqrt{5}) \cup (-20 + 10\sqrt{5}, \infty);$$

$$\text{negativa en: } (-20 - 10\sqrt{5}, -20 + 10\sqrt{5});$$

$$\text{cero en: } (-20 - 10\sqrt{5}, -20 + 10\sqrt{5})$$

$$15. \text{Mínimo en: } (-1, -12);$$

$$\text{positiva en: } (-\infty, -1 - 2\sqrt{3}) \cup (-1 + 2\sqrt{3}, \infty);$$

$$\text{negativa en: } (-1 - 2\sqrt{3}, -1 + 2\sqrt{3});$$

$$\text{cero en: } \{-1 - 2\sqrt{3}, -1 + 2\sqrt{3}\}$$

$$V. 1. y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$$

$$5. a) (y - 2)^2 = 6\left(x + \frac{7}{3}\right); V\left(-\frac{7}{3}, 2\right); F\left(-\frac{5}{6}, 2\right)$$

$$\text{Dir: } x = -\frac{23}{6}; \text{Eje: } y = 2; LR = 6$$

$$c) \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(y + \frac{3}{2}\right); V\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right); F\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{8}\right)$$

$$\text{Dir: } y = -\frac{15}{8}; \text{Eje: } x = \frac{5}{2}; LR = \frac{3}{2}$$

$$e) (x + 1)^2 = 4(y + 3); V(-1, -3); F(-1, -2)$$

$$\text{Dir: } y = -4; \text{Eje: } x = -1; LR = 4$$

EJERCICIO 24

$$I. 1. \tan(x - y - 2 = 0); N(x + y - 6 = 0); \text{long. } \tan = 2\sqrt{2}$$

$$\text{long. } N = 2\sqrt{2}; \text{long. Subtan} = 2; \text{long. Sub } N = 2$$

$$3. \tan(x + y - 3 = 0); N(x - y - 9 = 0); \text{long. } \tan = 3\sqrt{2}$$

$$\text{long. } N = 3\sqrt{2}; \text{long. Subtan} = 3; \text{long. Sub } N = 3$$

$$5. \tan(x - 2y - 8 = 0); N(2x + y + 19 = 0); \text{long. } \tan = 7\sqrt{5}$$

$$\text{long. } N = \frac{7\sqrt{5}}{2}; \text{long. Subtan} = 14; \text{long. Sub } N = \frac{7}{2}$$

$$7. \tan(x + 3y - 2 = 0); N\left(6x - 2y + \frac{4}{3} = 0\right); \text{long. } \tan = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{long. } N = \frac{2\sqrt{10}}{9}; \text{long. Subtan} = 2; \text{long. Sub } N = \frac{2}{9}$$

$$9. \tan(x + 2y - 7 = 0); N(2x - y + 1 = 0); \text{long. } \tan = 3\sqrt{5}$$

$$\text{long. } N = \frac{3\sqrt{5}}{2}; \text{long. Subtan} = 6; \text{long. Sub } N = \frac{3}{2}$$

$$II. 1. 2x - y + 1 = 0$$

$$9. 63^\circ 26'$$

$$3. 9x + 3y - 2 = 0$$

$$11. y = 4$$

$$5. 9x + 6y - 2 = 0$$

$$13. y = 2$$

$$7. a) K < 8$$

$$15. x = \frac{3}{2}$$

$$b) K = 8$$

$$c) K > 8$$

$$III. 1. x + 2y - 3 = 0; 3x - 2y + 15 = 0; \theta = 82^\circ 52' 30''$$

$$3. x + 2y + 3 = 0; x - 6y - 5 = 0; \theta = 36^\circ 01' 39''$$

$$5. 6x - y + 3 = 0; y + 3 = 0; \theta = 80^\circ 32' 16''$$

EJERCICIO 25

$$I. 1. V(9, 0), V'(-9, 0); F(4\sqrt{2}, 0), F'(-4\sqrt{2}, 0); A(0, 7), A'(0, -7); \text{long.}$$

$$\text{eje mayor } (2a) = 18; \text{long. eje menor } (2b) = 14; e = 0.6285;$$

$$LR = 10.888$$

$$3. V(3, 0), V'(-3, 0); F(\sqrt{5}, 0), F'(-\sqrt{5}, 0); A(0, 2), A'(0, -2); \text{long.}$$

$$\text{eje mayor } (2a) = 6; \text{long. eje menor } (2b) = 4; e = 0.7453;$$

$$LR = 2.666.$$

5. $V(6,0)$, $V'(-6,0)$; $F(3,0)$, $F'(-3,0)$; $A(0,3\sqrt{3})$, $A'(0,-3\sqrt{3})$;
long. eje mayor $(2a) = 12$; long. eje menor $(2b) = 6\sqrt{3}$; $e = 0.5$;
 $LR = 9$.
7. $V(0,2\sqrt{3})$, $V'(0,-2\sqrt{3})$; $F(0,2)$, $F'(0,-2)$; $A(2\sqrt{2},0)$,
 $A'(-2\sqrt{2},0)$; long. eje mayor $(2a) = 4\sqrt{3}$; long. eje menor
 $(2b) = 4\sqrt{2}$; $e = 0.5773$; $LR = 4.6188$
- II. 1. a) $16x^2 + 25y^2 = 400$;
b) $49x^2 + 33y^2 = 1617$;
c) $225x^2 + 289y^2 = 65025$
3. a) $4x^2 + y^2 = 100$;
c) $3x^2 + 4y^2 = 27$
5. $x^2 + 2y^2 = 8$
7. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
9. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
11. $7x^2 + 16y^2 - 14x - 64y - 41 = 0$
13. $K = 12$
- III. 1. $\frac{x^2}{108} + \frac{y^2}{144} = 1$
3. $16x^2 + 25y^2 = 49$
5. $16x^2 + 49y^2 = 784$
7. $3x^2 + 7y^2 = 55$
- IV. 1. $\frac{4(x-1)^2}{27} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ 7. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$
3. $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$ 9. $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$
5. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{10} = 1$
- V. 1. $C(1,2)$; $V(1,2 \pm 3)$; $F(1,2 \pm 2\sqrt{2})$
3. $C(2,3)$; $V(2 \pm 2,3)$; $F(2 \pm \sqrt{3},3)$
5. $C(3,1)$; $V(3,1 \pm 3)$; $F(3,1 \pm 1)$
- VI. 1. $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ 3. $\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

EJERCICIO 26

- I. 1. Elipse punto $(2,3)$
3. Elipse con eje focal horizontal:
Centro: $C(-4,1)$, Semiejes: $a = \sqrt{13}$, $b = \frac{2\sqrt{13}}{3}$
Distancia focal: $c = \frac{\sqrt{65}}{3}$
Focos: $\left(-4 \pm \frac{\sqrt{65}}{3}, 1\right)$
Vértices: $\left(-4 \pm \sqrt{13}, 1\right)$ y $\left(-4, 1 \pm \frac{2\sqrt{13}}{3}\right)$
5. Elipse con eje focal vertical:
Centro: $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$, Semiejes: $a = \sqrt{\frac{51}{20}}$, $b = \sqrt{\frac{17}{4}}$

$$\text{Distancia focal: } c = \sqrt{\frac{17}{10}}$$

$$\text{Focos: } \left(0, \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{10}}\right)$$

$$\text{Vértices: } \left(0, \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{10}}\right) \text{ y } \left(\pm \sqrt{\frac{51}{20}}, \frac{1}{2}\right)$$

7. Elipse con eje focal horizontal:
Centro: $C(-4,1)$, Semiejes: $a = 3$, $b = 2$
Distancia focal: $c = \sqrt{5}$
Focos: $(-4 \pm \sqrt{5}, 1)$
Vértices: $(-4 \pm 3, 1)$ y $(-4, 1 \pm 2)$

$$13. \frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1;$$

$$V(0,4), V'(0,-2); F(0,1+\sqrt{5}), F'(0,1-\sqrt{5})$$

$$\text{II. 1. } 13x^2 + 23y^2 - 51x - 19y - 4 = 0$$

$$\text{III. 3. } \overline{FP} = 3 \text{ y } \overline{F'P} = 3$$

$$5. 6x^2 + y^2 + y - 6x - 38 = 0$$

EJERCICIO 27

- I. 1. $\tan(2x - 3y - 5 = 0)$; $N(3x + 2y - 1 = 0)$;
long. $\tan = \frac{\sqrt{13}}{2}$; long. $N = \frac{\sqrt{13}}{3}$
long. Subtan = $\frac{3}{2}$; long. Sub $N = \frac{2}{3}$
3. $\tan(3x - y + 6 = 0)$; $N(x + 3y - 8 = 0)$
long. $\tan = \sqrt{10}$; long. $N = 3\sqrt{10}$;
long. Subtan = 1; long. Sub $N = 9$
5. $\tan(15x + 4\sqrt{7}y - 80 = 0)$; $N(16\sqrt{7}x - 60y + 27\sqrt{7} = 0)$
long. $\tan = \frac{7}{3}\sqrt{\frac{337}{112}}$; long. $N = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2359}{112}}$;
long. Subtan = $\frac{7}{3}$; long. Sub $N = \frac{75}{16}$
7. $\tan(2x + 3y - 12 = 0)$; $N(3x - 2y - 5 = 0)$
long. $\tan = \sqrt{13}$; long. $N = \frac{2}{3}\sqrt{13}$;
long. Subtan = 3; long. Sub $N = \frac{4}{3}$
11. $\tan(x + 3 = 0)$; $N(2y - 3 = 0)$
long. $\tan = \frac{3}{2}$; long. $N = \infty$;
long. Subtan = 0; long. Sub $N = \infty$
- II. 1. $2x - y \pm \sqrt{\frac{48}{5}} = 0$
3. $2x - y \pm 3 = 0$
5. $2x + 3y \pm 2\sqrt{13} = 0$
7. $5x - y - 7 \pm \sqrt{231} = 0$

III. 1. $18x + 27y - 19 \pm 2\sqrt{682} = 0$

3. a) $-7 < K < \frac{58}{3}$

b) $K = -7, \frac{58}{3}$

c) $K < -7, K > \frac{58}{3}$

5. $\tan_1 \left(\frac{408 + 6\sqrt{19}}{72 - 17\sqrt{19}}x - y + \frac{312 + 131\sqrt{19}}{72 - 17\sqrt{19}} = 0 \right)$, aproximadamente

$\tan(-206.614x - y - 420.227 = 0)$ en el punto

$T_1 \left(\frac{-182 - 102\sqrt{19}}{307}, \frac{299 + 36\sqrt{19}}{307} \right) \approx (-2.04107, 1.48508)$.

$\tan \left(\frac{408 - 6\sqrt{19}}{72 + 17\sqrt{19}}x - y + \frac{312 - 131\sqrt{19}}{72 + 17\sqrt{19}} = 0 \right)$, aproximadamente

$\tan_2 (2.61357x - y - 1.77285 = 0)$ en el punto

$T_2 \left(\frac{-182 + 102\sqrt{19}}{307}, \frac{299 - 36\sqrt{19}}{307} \right) \approx (0.855400, 0.462800)$.

7. $\tan(3x + 4y \pm \sqrt{143} = 0)$

9. $x + 12y = 0$

11. $2x - 3y = 0$

13. $x - 4y + 2 = 0$

EJERCICIO 28

I. 1. $V(8,0)$; $V'(-8,0)$; $F(10,0)$, $F'(-10,0)$; $A(0,6)$, $A'(0,-6)$; Eje transversal (2a): 16; Eje conjugado (2b) = 12; $LR = 9$; $e = 1.25$; Directrices $x = \pm \frac{32}{5}$

3. $V(\sqrt{6},0)$, $V'(-\sqrt{6},0)$; $F(2\sqrt{2},0)$, $F'(-2\sqrt{2},0)$; $A(0,\sqrt{2})$, $A'(0,-\sqrt{2})$; Eje transversal (2a) = $2\sqrt{6}$; Eje conjugado (2b) = $2\sqrt{2}$; $LR = \frac{2}{3}\sqrt{6}$; $e = 1.1547$; Directrices $x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$

5. $V(0,5)$, $V'(0,-5)$; $F(0,5\sqrt{2})$, $F'(0,-5\sqrt{2})$; $A(5,0)$, $A'(-5,0)$; Eje transversal (2a) = 10; Eje conjugado (2b) = 10; $LR = 10$; $e = 1.4142$; Directrices $y = \pm \frac{5}{x}$

II. 1. $16x^2 - 9y^2 = 144$; Eje transversal (2a) = 6; Eje conjugado (2b) = 8; $LR = \frac{32}{3}$; $e = \frac{5}{3}$; Directrices $x = \pm \frac{9}{5}$

3. Ecuación: $-240x^2 + 16y^2 = 735$; $LR = \frac{7\sqrt{15}}{30} \approx 0.9037$

5. Ecuación: $x^2 + 18xy + y^2 + 32x - 32y - 144 = 0$
Focos: $F(5,1)$, $F'(-1,-5)$

7. $y^2 - 3x^2 = 1$

9. La ecuación $5x^2 - 5y^2 = k$ se escribe en la forma

$\frac{x^2}{\frac{k}{5}} - \frac{y^2}{\frac{k}{5}} = 1$ y de ahí se deduce que $a^2 = b^2 = \frac{k}{5}$, de lo que resulta

$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{2k}{5}$. Se concluye que la excentricidad es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{5}}}{\sqrt{\frac{k}{5}}} = \sqrt{2}$$

III. 1. $\overline{PF} = 5\sqrt{2} \pm 3 \in \{4.071, 10.071\}$

3. $\overline{PF} = \frac{13}{4}$, $\overline{PF} = \frac{37}{4}$

5. $\overline{PF} = 857$, $\overline{PF} = 5.4144 \pm \sqrt{2} \in \{2.5857, 5.4142\}$

IV. 1. $9x^2 - 16y^2 = 81$

3. $100y^2 - 44x^2 = 275$

5. $7y^2 - 9x^2 = 63$

7. $y^2 - 12x^2 = 16$

9. Si su eje focal coincide con el eje x $x^2 - 3y^2 = 6$

EJERCICIO 29

I. 1. $2x + 3y = 0$; $2x - 3y = 0$

3. $x + 2y + 3 = 0$; $x - 2y - 5 = 0$

II. 1. $4y^2 - 7x^2 = 8$

3. $d = 12$

5. $72(x-3)^2 - 9(y-4)^2 = 128$

$6\sqrt{2}x + 3y - 12 - 18\sqrt{2} = 0$

$6\sqrt{2}x - 3y + 12 - 18\sqrt{2} = 0$

7. $9x^2 - y^2 = 9$

III. Ejercicios demostrativos

IV. 1. Centro: $C(0,0)$; Focos: $F(0, \pm\sqrt{5})$

Vértices $V(0, \pm\sqrt{2})$ y $A(\pm\sqrt{3}, 0)$; Eje transversal (2b): $2\sqrt{2}$

Eje conjugado (2a): $2\sqrt{3}$; Lado recto: $LR = 3\sqrt{2}$;

Excentricidad: $e = \sqrt{\frac{5}{2}}$; Directrices: $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. Centro: $C(0,0)$; Focos: $F(\pm\sqrt{11}, 0)$;

Vértices: $V(\pm\sqrt{7}, 0)$ y $A(0, \pm 2)$; Eje transversal (2a): $2\sqrt{7}$;

Eje conjugado (2b): 4; Lado recto: $LR = \frac{8\sqrt{7}}{7}$;

Excentricidad: $e = \sqrt{\frac{11}{7}}$; Directrices: $x = \pm \frac{7\sqrt{11}}{11}$

5. Centro: $C(0,0)$; Focos: $F(0, \pm 3\sqrt{2})$;

Vértices: $V(0, \pm\sqrt{11})$ y $A(\pm\sqrt{7}, 0)$; Eje transversal (2b): $2\sqrt{11}$;

Eje conjugado (2a): $2\sqrt{7}$; Lado recto: $LR = \frac{14\sqrt{11}}{11}$;

Excentricidad: $e = \frac{3\sqrt{22}}{11}$; Directrices: $y = \pm \frac{11\sqrt{2}}{6}$

V. 1. $xy = 5$

3. $xy = 12$

EJERCICIO 30

1. $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{12} = 1$; Centro $(-3, -1)$; $V(-1, -1)$, $V'(-5, -1)$;
 $F(1, -1)$, $F'(-7, -1)$; $A(-3, -1+2\sqrt{3})$, $A'(-3, -1-2\sqrt{3})$;
 Asíntotas $\sqrt{3}x + y + 1 + 3\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x - y - 1 + 3\sqrt{3} = 0$

3. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$; Centro $(1, -2)$; $V(3, -2)$, $V'(-1, -2)$;
 $F(1+2\sqrt{2}, -2)$, $F'(1-2\sqrt{2}, -2)$; $A(1, 0)$, $A'(1, -4)$; Asíntotas
 $x + y + 1 = 0$, $x - y - 3 = 0$

5. $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$; Centro $(-3, 2)$; $V(-1, 2)$, $V'(-5, 2)$;
 $F(-3+\sqrt{13}, 2)$, $F'(-3-\sqrt{13}, 2)$; $A(-3, 5)$, $A'(-3, 1)$; Asíntotas
 $3x + 2y + 5 = 0$, $3x - 2y - 13 = 0$

7. Representa la gráfica de dos rectas que se cortan $x + 4y + 7 = 0$,
 $x - 4y - 9 = 0$

9. $\frac{\left(\frac{y-1}{2}\right)^2}{2} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$; Centro $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$; $V\left(-2, \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$,
 $V'\left(-2, \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right)$; $F\left(-2, \frac{1}{2} + \sqrt{6}\right)$, $F'\left(-2, \frac{1}{2} - \sqrt{6}\right)$; $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$,
 $A'\left(-4, \frac{1}{2}\right)$; Asíntotas $\sqrt{2}x + 2y - 1 + 2\sqrt{2} = 0$,
 $\sqrt{2}x - 2y + 1 + 2\sqrt{2} = 0$

11. $\frac{(y-5)^2}{12} - \frac{(x+3)^2}{12} = 1$; Centro $(-3, 5)$; $V(-3, 5+2\sqrt{3})$,
 $V'(-3, 5-2\sqrt{3})$; $F(-3, 5+2\sqrt{6})$, $F'(-3, 5-2\sqrt{6})$;
 $A(-3+2\sqrt{3}, 5)$, $A'(-3-2\sqrt{3}, 5)$; Asíntotas; $x + y - 2 = 0$,
 $x - y + 8 = 0$

II. a) $73^\circ 44' 23''$

b) $81^\circ 47' 12''$

c) $33^\circ 52' 11''$

d) $83^\circ 37' 14''$

EJERCICIO 31

I. 1. $\tan(20x + 33y - 46 = 0)$; $N(33x - 20y + 73 = 73 = 0)$;

$$\text{long. tan} = \left| \frac{\sqrt{1489}}{x} \right|$$
; $\text{long. } N = \left| \frac{2\sqrt{1489}}{33} \right|$; $\text{long. Subtan} = \left| \frac{33}{10} \right|$;

$$\text{long. Sub } N = \left| \frac{40}{33} \right|$$

3. $\tan(3x + 5y + 12 = 0)$; $N(5x - 3y - 14 = 0)$; $\text{long. tan} = \sqrt{34}$;

$$\text{long. } N = \left| \frac{3}{5}\sqrt{34} \right|$$
; $\text{long. Subtan} = 5$; $\text{long. Sub } N = \frac{9}{5}$.

5. $\tan(x - 2y + 3 = 0)$; $N(2x + y - 24 = 0)$; $\text{long. tan} = 6\sqrt{5}$;

$$\text{long. } N = 3\sqrt{5}$$
; $\text{long. Subtan} = 12$; $\text{long. Sub } N = 3$.

II. 1. $2x + y - 4 = 0$, $2x + y + 4 = 0$

3. $x - y + 3 = 0$, $19x + 11y - 63 = 0$

5. $2x + 3y - 8 = 0$, $2x + 3y + 8 = 0$

7. $m = \pm 4\sqrt{\frac{3}{35}}$

9. Verdadero (a, b y c)

III. 1. $x - y = 0$

3. $5x - 12y = 0$

5. $3x + 7y = 0$

EJERCICIO 32

I. 1. $r = 7$

3. $r = 16 \cos(\theta - 60^\circ)$

5. $r^2 - 12r \cos(\theta - 120^\circ) + 9 = 0$

7. $r^2 - 4\sqrt{3}r \cos \theta - 4r \sin \theta + 15 = 0$

9. $r^2 - 16r \cos(\theta - 135^\circ) + 28 = 0$

II. 1. $C(3, 0^\circ)$; $a = 3$

3. $C(2, 45^\circ)$; $a = 3$

5. $C(4, 30^\circ)$; $a = 1$

7. $C(8, 150^\circ)$; $a = 8$

9. $C(3, 30^\circ)$; $a = 5$

III. 1. Parábola

3. Parábola

5. Parábola

7. Elipse

9. Parábola

11. Elipse

IV. 1. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

3. $r = \frac{1}{1 - 2 \sin \theta}$

5. a) $r^2(9 \cos^2 + 16 \sin^2 \theta) = 144$

b) $r(2 + 3 \sin \theta) = 3$

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com 

ISBN 978-607-32-2777-3

