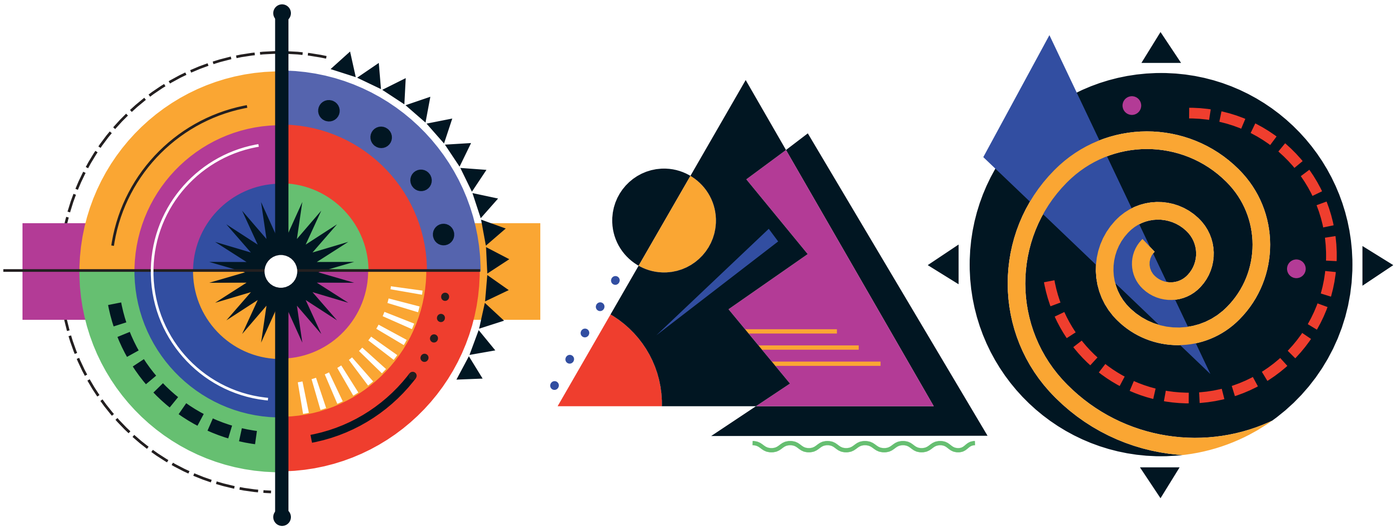
Geometría Analítica y Trigonometría

Segunda edición



Oteyza
Lam
Hernández
Carrillo
Ramírez

PEARSON
Prentice Hall

INCLUYE CD-ROM

Geometría analítica y trigonometría

Geometría analítica y trigonometría

Segunda edición

Elena de Oteyza de Oteyza
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Emma Lam Osnaya
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Carlos Hernández Garciadiego
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Ángel Manuel Carrillo Hoyo
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Arturo Ramírez Flores
Centro de Investigación en Matemáticas

PEARSON
Educación ®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay •Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

DE OTEYZA, ELENA, *et al*

Geometría analítica y trigonometría.
Segunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2008

ISBN: 978-970-26-1563-7
Área: Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 600

Editor: Enrique Quintanar Duarte
e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de Producción: Rodrigo Romero Villalobos

SEGUNDA EDICIÓN, 2008

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

ISBN 10: 970-26-1563-1
ISBN 13: 978-970-26-1563-7

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

PEARSON
Educación ®

Índice general

Prólogo

En esta obra se desarrollan los temas fundamentales para un curso de Geometría analítica y Trigonometría del nivel medio-superior de educación.

En esta segunda edición decidimos reducir el número de páginas, respecto a la primera, con objeto de lograr un libro cuyo uso resulte más ágil y en el que no aparezcan temas que, siendo útiles e interesantes, puedan desviar la atención y el tiempo de enseñanza-estudio de los temas centrales. Por ejemplo, ahora damos por vistos temas sobre los que los estudiantes tienen ya cierta experiencia, como son los números reales (incluida la resolución de las ecuaciones de segundo grado) y los sistemas de ecuaciones; y otros que para ellos pueden ser novedosos (como las ecuaciones polares de las cónicas y de otras curvas tales como las lemniscatas, los caracoles, las rosas, etcétera) no se tratan en este libro por no ser esenciales en este nivel.

Lo anterior y la reflexión crítica necesaria para preparar una nueva edición originaron un reacomodo de algunos capítulos y secciones buscando una mejor integración de los temas, y facilitar, por consiguiente, el aprendizaje. Por ejemplo, los conceptos de función y relación, fundamentales para el desarrollo de la matemática, aparecen desde el capítulo 1, y la trigonometría se presenta tempranamente en el capítulo 2 (en lugar del 5, como ocurrió en la primera edición); aquí se introducen las funciones trigonométricas como una generalización de las razones del mismo nombre y que son establecidas en los triángulos rectángulos.

El estilo de exposición lo hemos mantenido. Cada capítulo presenta los conceptos acompañados de una gran cantidad de ejemplos en los que son planteados problemas tipo; y al resolverlos hemos optado más por las resoluciones sistemáticas que por el camino ingenioso, ya que las segundas dependen mucho de las características especiales de cada ejercicio y, por tanto, son menos susceptibles de aplicarse en otras situaciones. Creemos que es importante ofrecer un método para enfocar y resolver los problemas, pero por supuesto siempre será satisfactorio y provechoso que los lectores encuentren otros métodos personales de hacerlo.

Las explicaciones casi siempre están acompañadas de figuras muy detalladas. En general las secciones son cortas y se han logrado incluir muchas aplicaciones, de manera especial sobre las cónicas, junto con una gran cantidad de ejercicios.

El CD, que se incluye como una herramienta más para el uso óptimo del libro, también lo hemos modificado: contiene una nueva versión *ad hoc* del programa interactivo *Geolab*, un laboratorio de geometría, que en su versión completa tiene mayores alcances. Con el uso de dicho programa se pueden hacer construcciones que ayuden a entender mejor varias de las situaciones señaladas en el libro y muchas otras que pueden llevar al usuario a intuir resultados que hasta ese momento le sean desconocidos. Al final de cada capítulo hay una sección de Ejercicios con Geolab en la que, como indica su nombre, se sugieren ejercicios para ser realizados usando este software.

El capítulo 3 está dedicado a los logaritmos y las exponenciales, junto con las funciones respectivas.

El capítulo 4 trata sobre los segmentos dirigidos, con particular interés en las razones aritméticas y algebraicas de segmentos.

Los resultados sobre la recta, vistos en el capítulo 5, se aplican en el siguiente para trabajar con los triángulos.

En el resto del texto se presentan los otros objetos clásicos de la geometría analítica: el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. En su estudio, al igual que en el de la recta, se establece una constante relación entre el álgebra y la geometría, lo que constituye la esencia misma de esta rama de las matemáticas. Además de un análisis individual de estas curvas y sus ecuaciones, se presenta también, como es usual, un estudio global de ellas y de la ecuación general de segundo grado con dos variables.

Los más de 1300 ejercicios y problemas de que consta el libro ofrecen al profesor la oportunidad de seleccionar algunos para trabajar en clase y dejar otros para que el alumno los resuelva de manera individual; y todavía tendrá a su disposición material suficiente para preparar los exámenes respectivos.

Como apoyo al estudiante, al final del libro aparecen las respuestas a todos los ejercicios impares, esto le permitirá evaluar de manera personal el nivel de avance. Es recomendable que a medida que sus aciertos le hagan confiar más en su destreza evite, en lo posible, confrontar sus resultados con la respuesta que se ofrece.

Capítulo 1

Relaciones y funciones

Los conceptos de relación y función son fundamentales en la matemática. El primero es más general que el segundo: una función es en particular una relación. Para definirlos se requiere el concepto de pareja ordenada, y es por esto que el capítulo se inicia con una sección dedicada al producto cartesiano de dos conjuntos. En la vida diaria es frecuente que relacionemos personas, objetos, etc., al identificar ciertas características que les son comunes (parentesco, especie, forma, color etc.), y de esta manera tenemos un criterio para decidir si dos de ellos pueden considerarse relacionados o no. En matemáticas, cuando distinguimos a una subcolección de parejas de una colección total decimos que hemos establecido una relación. Esto nos da una enorme flexibilidad para definir relaciones entre objetos de toda clase; sin embargo, muchas veces nos restringimos a trabajar con números y usamos fórmulas para determinar si dos objetos están relacionados.

Una función es, como ya dijimos, un caso particular de relación que ha tenido enorme trascendencia. Con ayuda de la noción de función se ha podido, por ejemplo, precisar la idea del movimiento y estudiarlo cuantitativamente. El estudio de las funciones constituye una lparte central de las matemáticas. Aquí daremos especial énfasis a las llamadas funciones reales de variable real, que son las que relacionan números reales con números reales. Al final del capítulo se definen las operaciones de suma, producto, resta y cociente para este tipo de funciones aprovechando las operaciones correspondientes que hay entre los números. Para funciones, en general, hay una operación llamada *composición* que es independiente de operaciones previamente definidas y cuya naturaleza está íntimamente ligada a las funciones; con la presentación de esta operación concluye el capítulo.

Producto cartesiano

En un restaurante, el menú del día consta de sopa, la cual puede ser elegida entre las siguientes opciones:

lentejas o fideos;

un guisado, a elegir entre:

pollo a la naranja, ternera con ensalada o milanesa con papas.

Cualquier opción está acompañada de frijoles y postre. ¿Cuáles son los menús posibles que se pueden formar?

Solución:

Llamamos A al conjunto de las sopas y B al de los guisados, es decir:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{lentejas, fideos}\} \\ B &= \{\text{pollo a la naranja, ternera con ensalada, milanesa con papas}\} \end{aligned}$$

Para formar todos los menús posibles tomamos una sopa y la combinamos con todos los guisados; posteriormente hacemos lo mismo con la otra sopa.

Todas las posibilidades de elegir una sopa y un guisado son:

lentejas y pollo	lentejas y ternera	lentejas y milanesa
fideos y pollo	fideos y ternera	fideos y milanesa

Puesto que estamos tomando parejas, conviene escribir:

$$\{(\text{lentejas, pollo}), (\text{lentejas, ternera}), (\text{lentejas, milanesa}),$$
$$(\text{fideos, pollo}), (\text{fideos, ternera}), (\text{fideos, milanesa})\}.$$

Este conjunto de parejas lo denotamos por $A \times B$.

Observa que escribimos las parejas de manera ordenada, es decir, de modo tal que, en este caso, siempre aparece primero la sopa y después el guisado.

En general, cuando a partir de dos conjuntos A y B deseamos formar el conjunto compuesto por todas las posibles parejas ordenadas de elementos, donde el primer elemento de cada pareja es un elemento de A y el segundo uno de B, entonces formamos el conjunto que llamamos el *producto cartesiano* de A y B, al que denotamos con $A \times B$. Es decir:

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid \ a \in A \text{ y } b \in B\}\,,$$

el cual se lee como el conjunto de parejas a coma b tales que a está en A y b está en B. Es importante notar que las parejas son *parejas ordenadas*, es decir, $(a, b) = (c, d)$ en el caso y sólo en el caso en que $a = c$ y $b = d$; así, en general $(a, b) \neq (b, a)$. Las parejas ordenadas en ocasiones también se llaman *pares ordenados*.

Observación: $\varnothing \times A = \varnothing = A \times \varnothing$.

Ejemplos

1. Para $A = \{3,\, 6,\, -2\}$ y $B = \{4,\, 2\}$, determina los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$.

Solución:

$$A \times B = \{\ (3,4)\,,\ (3,2)\,,\ (6,4)\,,\ (6,2)\,,\ (-2,4)\,,\ (-2,2)\}\,,$$

y

$$B \times A = \{\ (4,3)\,,\ (4,6)\,,\ (4,-2)\,,\ (2,3)\,,\ (2,6)\,,\ (2,-2)\}\,.$$

2. Para $A = \{n \in \mathbb{Z} |\, 2 < n < 5\}$ y $B = \{x,\, y,\, z\}$, encontrar $A \times B$.

Solución:

Observamos primero que $A = \{3,\, 4\}$, entonces

$$A \times B = \{(3,x)\,,\ (3,y)\,,\ (3,z)\,,\ (4,x)\,,\ (4,y)\,,\ (4,z)\}\,.$$

3. Si $A = \{x,\, y,\, z\}$ y $B = \{x,\, y\}$, encontrar $(A \times B) \cap (B \times A)$.

Solución:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x,x)\,,\ (x,y)\,,\ (y,x)\,,\ (y,y)\,,\ (z,x)\,,\ (z,y)\} \\ B \times A &= \{(x,x)\,,\ (x,y)\,,\ (x,z)\,,\ (y,x)\,,\ (y,y)\,,\ (y,z)\}\,. \end{aligned}$$

Entonces

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(x,x)\,,\ (x,y)\,,\ (y,x)\,,\ (y,y)\}\,.$$

Observación: En general, $A \times B \neq B \times A$.

Ejercicios

Si $A = \{-1,\, 1,\, 0\}$ y $B = \{1,\, 2,\, 3\}$, encuentra:

1. $A \times B$. **2.** $B \times A$. **3.** $(A \times B) \cap (B \times A)$. **4.** $(A \times B) \cup (B \times A)$.

Si $A = \{a,\, b\}$, $B = \{\ a,\, b,\, c\}$ y $C = \{a, c\}$, encuentra:

5. $A \times B$. **6.** $A \times C$. **7.** $B \times A$.

8. $C \times A$. **9.** $A \times (B \cup C)$. **10.** $B \times (C \cup A)$.

11. Si $A = \{-2,\, a,\, z\}$, $B = \{a, b\}$ y $C = \{3,\, b\}$, verifica que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Si $A = \{-1,\ -2,\ -3\}$ y $B = \{1,\, 2,\, 3\}$, encuentra:

12. $A \times B$. **13.** $B \times A$. **14.** $A \times A$. **15.** $B \times B$.

16. Considera los conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, $D = \{a,\, b\}$, $E = \{a,\, c\}$, $F = \{b,\, c\}$, $G = \{a,\, b,\, c\}$. Encuentra: $(G \times G) \setminus ((A \times F) \cup (B \times E) \cup (C \times D))$.

17. Si $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ y $A \times B = B \times A$, ¿qué se puede decir de los conjuntos A y B?

Los ejes coordenados

El plano cartesiano

Si trazamos dos rectas perpendiculares entre sí en un plano, éste queda dividido en cuatro regiones llamadas *cuadrantes* que, por convención, se numeran I, II, III y IV, como se muestra en la figura 1-1. A dichas rectas se les conoce como *ejes coordenados*, y a su punto de intersección se le llama *origen* y usualmente se denota por 0.

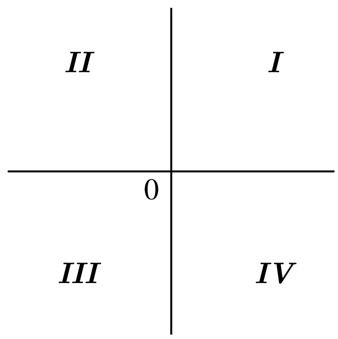


Figura 1-1

En general, uno de estos ejes se traza de modo horizontal y el otro de modo vertical; sin embargo, a veces es conveniente colocarlos en otra posición para poder analizar más fácilmente ciertas curvas o ecuaciones. Esto lo haremos, por ejemplo, en el capítulo 12, que está dedicado a la ecuación general de segundo grado.

Al eje que, por lo general, se traza horizontalmente se le conoce como *eje* X, y al eje perpendicular se le llama *eje* Y (figura 1-2). El plano, junto con sus ejes coordenados, se llama *plano cartesiano*, en honor a René Descartes, el inventor de la geometría analítica.

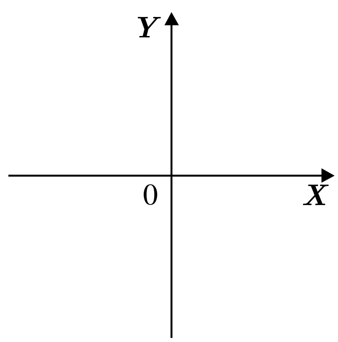


Figura 1-2

A ambos ejes los concebimos como rectas reales, con el cero colocado en el origen, y con la misma escala, es decir, la distancia del 0 al 1 es la misma en los dos ejes. *Cuando lo consideremos oportuno, nos permitiremos referirnos a los puntos de los ejes mediante los números que tienen asignados; así, diremos el punto* -5 *del eje* X*, en lugar del punto del eje* X *asociado a* -5.

En su posición usual, el eje X es horizontal y su dirección positiva es hacia la derecha, es decir, los números positivos quedan colocados a la derecha del origen y los números negativos a la izquierda; mientras que el eje Y es vertical y su dirección positiva es hacia arriba, o sea, en ese eje los números positivos están arriba del origen y los negativos abajo de él (figura 1-3).

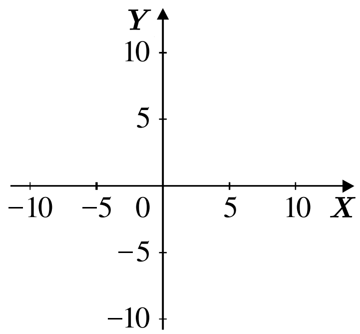


Figura 1-3

Las semirrectas o rayos, en los ejes X y Y, que comienzan en el origen y que contienen a los números positivos se llaman *semiejes positivos* X y Y, respectivamente.

Cuando necesitemos colocar los ejes en una posición distinta a la usual, una vez que hayamos fijado la dirección positiva del eje X, el semieje positivo Y se obtiene al girar $90°$ el semieje positivo X en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 1-4).

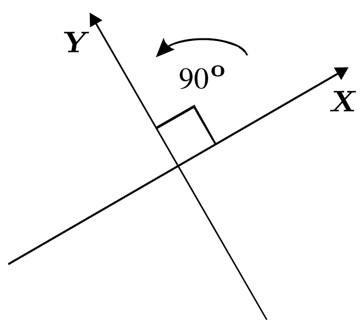


Figura 1-4

Salvo que se indique lo contrario, siempre colocaremos a los ejes coordenados en su posición usual.

Sistema de coordenadas

Si P es un punto del plano, la perpendicular al eje X, trazada desde P, corta al eje X en un punto A que se llama *proyección ortogonal*, o simplemente la *proyección* de P sobre el eje X. De manera similar, el punto B en donde el eje Y es cortado por la recta perpendicular a ella y que pasa por P, se llama proyección (ortogonal) de P sobre el eje Y (figura 1-5).

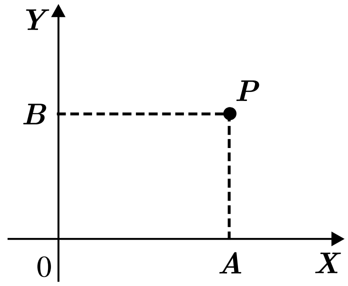


Figura 1-5

Si a es el número que corresponde al punto A del eje X y b el número que corresponde al punto B del eje Y, entonces la pareja ordenada (a, b) se identifica con el punto P. Los números reales a y b se conocen como las *coordenadas* de P. A la primera coordenada se le llama *abscisa* de P y la segunda es la *ordenada* de P.

Del mismo modo, a cada pareja ordenada de números reales (a, b) la identificamos con un punto del plano de la siguiente manera: en el eje X localizamos al punto a y por él trazamos una recta vertical; después, en el eje Y, localizamos al punto b y trazamos una recta horizontal que pase por él; por último, identificamos a la pareja (a, b) con el punto P en el que esas dos rectas se cortan (figura 1-6).

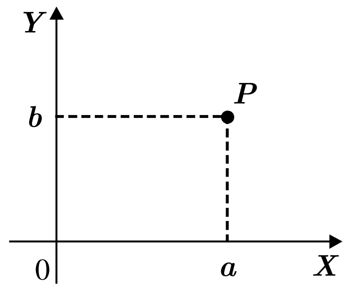


Figura 1-6

Para referirnos al punto P con coordenadas (a, b), escribimos $P\,(a, b)$. *En vista de la identificación de los puntos y las parejas, con frecuencia se dice el punto* (a, b) *en lugar del punto* $P\,(a, b)$. En ocasiones, nos tomaremos esta libertad.

Nota:

Mantén presente que estamos usando la noción de *pareja ordenada* de números. Las parejas ordenadas (a, b) y (c, d) son iguales sólo en caso de que $a = c$ y $b = d$. Por tanto, si $a \neq b$, entonces las parejas (b, a) y (a, b) difieren entre sí y determinan dos distintos puntos del plano. Ver el ejemplo 2 de la página 8.

Ejemplo

- Localizar en el plano al punto $P\,(-4, 7)$.

  Solución:

  Localizamos al número -4 en el eje X, es decir, el punto en ese eje que está 4 unidades a la izquierda del origen, y trazamos una recta vertical que pase por ese punto. Después localizamos al número 7 en el eje Y, es decir, el punto en ese eje que está 7 unidades arriba del origen, y trazamos una recta horizontal que pase por ahí. El punto en donde se cortan las dos rectas que trazamos corresponde al punto P (figura 1-7).

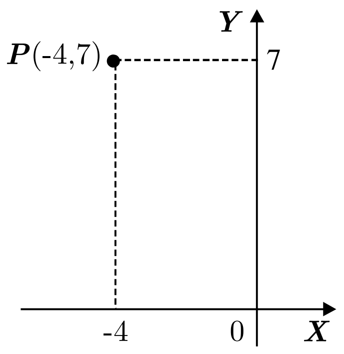


Figura 1-7

Observaciones:

- Cualquier pareja de la forma $(0, b)$ está sobre el eje Y.
- Cualquier pareja de la forma $(a, 0)$ está sobre el eje X.
- Todos los puntos que están en la recta vertical que pasa por (a, b) tienen abscisa a.
- Todos los puntos que están en la recta horizontal que pasa por (a, b) tienen ordenada b.

Ejemplos

1. Localizar en el plano al punto $Q\,(-2, -5)$.

Solución:

Localizamos al número -2 en el eje X, es decir, el punto en dicho eje que está 2 unidades a la izquierda del origen, y por él trazamos una recta vertical. Después localizamos al número -5 en el eje Y, es decir, el punto de tal eje que está 5 unidades abajo del origen, y por él trazamos una recta horizontal. El punto en donde se cortan las dos rectas que trazamos corresponde al punto Q (figura 1-8).

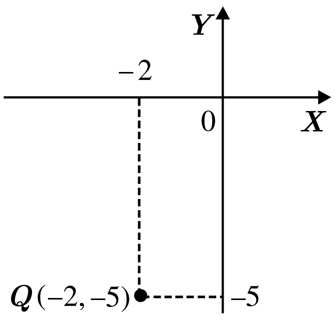


Figura 1-8

2. Localizar en el plano los puntos de coordenadas $P\,(3,-1)$ y $Q\,(-1,3)$.

Solución:

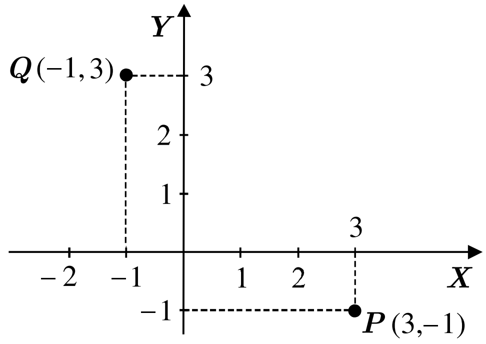


Figura 1-9

Observa que $P\,(3,-1) \neq Q\,(-1,3)$.

Ejercicios

Localiza los siguientes puntos en el plano coordenado.

1. $P\,(1,4)$. **2.** $P\,(1,-2)$. **3.** $P\,(-4,3)$. **4.** $P\,(2,5)$.

5. $P\,(0,3)$. **6.** $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. **7.** $P\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$. **8.** $P\left(-\frac{4}{5},\frac{4}{5}\right)$.

Relaciones

Si $A = \{-1,3,4\}$ y $B = \{-1,2,3\}$, encuentra el subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$ formado por las parejas cuya segunda coordenada sea menor o igual que la primera y localiza en el plano a los elementos de R.

Solución:

El producto cartesiano $A \times B$ es el conjunto:

$$\{(-1,-1)\,,\ (-1,2)\,,\ (-1,3)\,,\ (3,-1)\,,\ (3,2)\,,\ (3,3)\,,\ (4,-1)\,,\ (4,2)\,,\ (4,3)\}\,.$$

Observamos que, de acuerdo con el criterio establecido en el enunciado, una de estas parejas pertenece a R si su segunda coordenada es menor o igual que la primera, y sólo en ese caso; de donde

$$R = \{(-1,-1)\,,\ (3,-1)\,,\ (3,2)\,,\ (3,3)\,,\ (4,-1)\,,\ (4,2)\,,\ (4,3)\}\,.$$

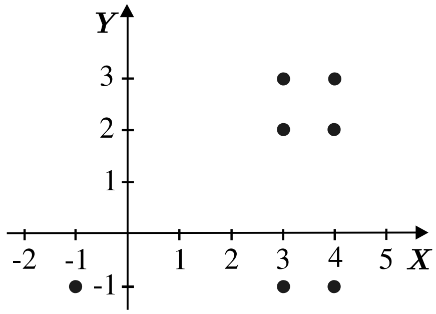


Figura 1-10

Esta colección de puntos es llamada gráfica de la relación R.

En general, una *relación* entre dos conjuntos A y B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$.

Cuando A y B son subconjuntos de los números reales, entonces podemos localizar en el plano a los elementos de R, y a la colección de los puntos así obtenidos se le llama *gráfica* (geométrica) de la relación.

El conjunto $D \subset A$ formado por las primeras coordenadas de los elementos de R se llama *dominio* de la relación, y el subconjunto $R(D)$ de B formado por las segundas coordenadas de R recibe el nombre de *imagen* de la relación. Algunos autores llaman *rango* a la imagen de una relación.

En el ejemplo anterior tenemos que el dominio de la relación coincide con A y la imagen coincide con B.

Ejemplo

- Encontrar el dominio, la imagen y la gráfica de la relación dada por el conjunto

$$C = \{(-7, 6)\,,\ (-1, -2)\,,\ (-1, 3)\,,\ (0, 3)\,,\ (5, 6)\,,\ (6, 5)\,,\ (7, -4)\,,\ (8, -2)\}\,.$$

Solución:

El dominio de C es el conjunto

$$\{-7, -1, 0, 5, 6, 7, 8\}\,.$$

La imagen de C es el conjunto

$$\{6, -2, 3, 5, -4\}\,.$$

La gráfica de la relación es:

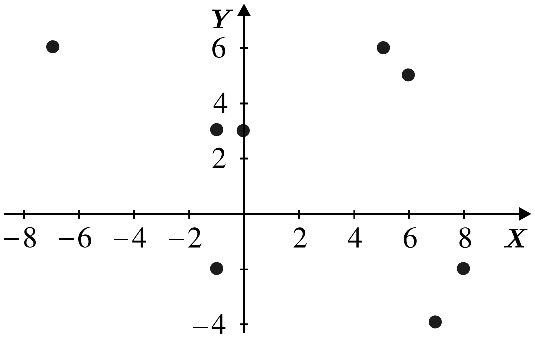


Figura 1-11

De una manera un poco más informal, pero más cercana a nuestra experiencia cotidiana, decimos que queda definida una relación de un subconjunto D de A, llamado el dominio de la relación, al conjunto B, siempre que establecemos un criterio, regla o ley a través del cual asociamos a cada elemento de D al menos un elemento de B. O sea, siempre que damos un criterio que nos permite distinguir algunos elementos del conjunto $A \times B$ de entre todos aquellos que lo forman. A ese criterio, ley o regla se le denomina regla de asociación de la relación considerada. Si de acuerdo con esa regla, que llamaremos r, a un elemento a se le asocia un elemento b, entonces escribimos

$$a \to b, \qquad \text{o bien} \qquad r(a) = b,$$

($r(a)$ se lee r de a). Podemos darle cualquier nombre a la regla de asociación, pero lo más común es usar una sola letra, misma que también usamos para referirnos a la relación, y así podemos decir que estamos trabajando con la relación r.

En el ejemplo introductorio la regla de asociación es:

A cada elemento de $A = \{-1, 3, 4\}$ asociémosle todo elemento de $B = \{-1, 2, 3\}$ que sea menor o igual que aquél.

Si llamamos m a la relación, entonces podemos presentarla mediante cualquiera de las dos listas siguientes.

$$\begin{array}{ccr}
-1 & \to & -1 \\
 & & \\
 & & -1 \\
 & \nearrow & \\
3 & \to & 2 \\
 & \searrow & \\
 & & 3 \\
 & & -1 \\
 & \nearrow & \\
4 & \to & 2 \\
 & \searrow & \\
 & & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
m(-1) & = & -1 \\
m(3) & = & -1 \\
m(3) & = & 2 \\
m(3) & = & 3 \\
m(4) & = & -1 \\
m(4) & = & 2 \\
m(4) & = & 3
\end{array}$$

O, de manera más económica, podemos representarla mediante la tabla siguiente.

-1	-1		
3	-1	2	3
4	-1	2	3

La tabla se construye poniendo en la primera columna a cada elemento del dominio, y en el resto de las columnas se incluyen, en cada renglón, los elementos de B que están asociados al primer elemento de dicho renglón. Notamos que a un elemento del dominio de una relación puede asociársele más de un elemento.

Inversamente, toda tabla con al menos 2 columnas llenas, y la primera columna sin repeticiones, establece una relación tal que: su dominio es el conjunto formado por los elementos de la primera columna, la imagen está compuesta por los elementos del resto de las columnas, y la regla de asociación consiste en asociar a cada elemento de la primera columna todo elemento que esté en el mismo renglón pero en una columna distinta de la primera.

Ejemplo

- Encontrar el dominio, la imagen y la regla de asociación de la relación representada por la tabla siguiente.

0	e	-20	$\sqrt{3}$
1	π	0	2π

Solución:

El dominio es el conjunto formado por los elementos de la primera columna, o sea $\{0, 1\}$.

La imagen está formada por los elementos del resto de las columnas:

$$\left\{e, \pi, -20, 0, \sqrt{3}, 2\pi\right\}.$$

La regla de asociación es

$$\begin{array}{ccc} & & e \\ & \nearrow & \\ 0 & \rightarrow & -20 \\ & \searrow & \\ & & \sqrt{3} \\ & & \\ & & \pi \\ & \nearrow & \\ 1 & \rightarrow & 0 \\ & \searrow & \\ & & 2\pi. \end{array}$$

Es decir, esta tabla representa a la relación

$$R = \left\{(0, e), (0, -20), \left(0, \sqrt{3}\right), (1, \pi), (1, 0), (1, 2\pi)\right\}.$$

Este ejemplo nos enseña lo arbitraria que puede ser la regla de asociación.

Otras reglas se presentan de manera natural. Consideremos la tabla de posiciones del torneo de liga del fútbol mexicano que comúnmente aparece en los periódicos, y que tiene por cabezas los siguientes conceptos:

nombre del equipo jj jg je jp gf gc p

donde: jj = juegos jugados, jg = juegos ganados, je = juegos empatados, jp = juegos perdidos, gf = goles a favor, gc = goles en contra, p = puntos.

Mediante esta tabla se establece una relación del conjunto de equipos en el conjunto de los números enteros.

Ejemplos

1. Encontrar el dominio y la imagen de la relación dada por el conjunto

$$R = \{(0, a), (1, b), (2, c), (3, a), (2, d)\}.$$

Solución:

El dominio de R es el conjunto

$$\{0, 1, 2, 3\}.$$

La imagen de R es el conjunto

$$\{a, b, c, d\}.$$

2. Encontrar el dominio, la imagen y la gráfica de la relación dada por el conjunto

$$R = \left\{\left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{5}{3}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{6}\right), (2, 4)\right\}.$$

Solución:

El dominio de R es el conjunto

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, 2\right\}.$$

La imagen de R es el conjunto

$$\left\{-1, 0, \frac{5}{6}, 4\right\}.$$

La gráfica de la relación es

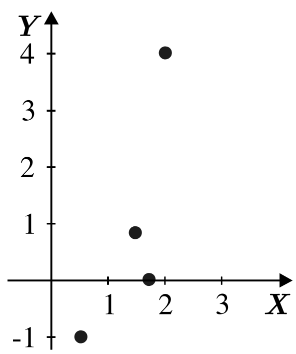


Figura 1-12

3. Encontrar el dominio, la imagen y la gráfica de la relación dada por el conjunto

$$R = [-2, 3] \times \{5\} = \{(x, y) | -2 \leq x \leq 3; \quad y = 5\}.$$

Solución:

El dominio de R es el intervalo $[-2, 3]$.

La imagen de R es el conjunto formado sólo por 5.

La gráfica de la relación es

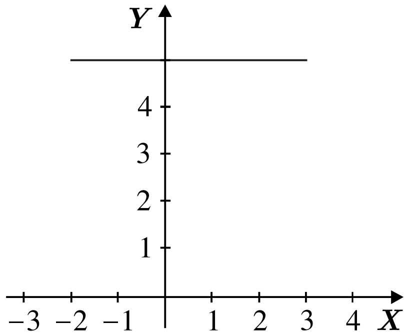


Figura 1-13

4. Encontrar el dominio, la imagen y la gráfica de la relación dada por el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \ x < -2 \quad \text{y} \quad y > 1\}.$$

Solución:

El dominio del conjunto C es el intervalo $(-\infty, -2)$.

La imagen del conjunto C es el intervalo $(1, \infty)$.

La gráfica de la relación es la región sombreada en la figura siguiente.

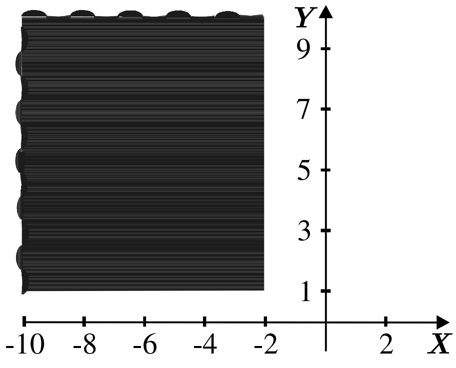


Figura 1-14

Por otra parte, algunas relaciones entre conjuntos de números reales se definen por medio de una ecuación o fórmula que indica cuál es la regla de asociación. Por ejemplo, con la ecuación

$$y = x^2 \tag{1.1}$$

podemos indicar la regla de asociación consistente en asociarle a cada número x el número y que es su cuadrado. En tales circunstancias, se dice que x es la *variable independiente* y y la *variable dependiente* y se sobreentiende, a menos que se especifique otra cosa, que el dominio está formado por todos los números reales x para los que la ecuación tiene solución; y la imagen está formada por dichas soluciones y. Así, en el caso presente, el dominio de la relación es el conjunto de los números reales y la imagen está formada por todos los números reales mayores o iguales que 0. Con esa ecuación se define la relación

$$\left\{ (x, y) \middle|\ x \in \mathbb{R}, \quad y = x^2 \right\} = \left\{ \left(x, x^2\right) \middle|\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

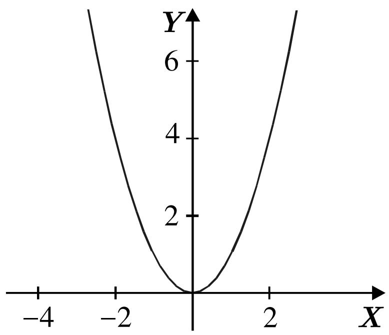


Figura 1-15

Observamos que si representáramos esta relación por medio de una tabla, ésta tendría dos columnas y una infinidad de renglones. Y si llamamos r a la regla de correspondencia, entonces podemos escribir

$$r(x) = x^2.$$

El valor asociado a un elemento particular del dominio se obtiene al sustituir este valor en la fórmula y calcular el valor así obtenido para la variable dependiente $y = r(x)$. Por ejemplo, el único valor asociado a $x = 3$ es

$$y = 3^2 = 9,$$

y para $x = \sqrt{2}$, tenemos que $y = 2$, etcétera.

El valor asociado a cualquier número real es su cuadrado, en particular, para el número real $2x$, obtenemos

$$y = r(2x) = (2x)^2 = 4x^2.$$

Cabe aclarar que a partir de la misma ecuación (1.1) podríamos definir otra relación, distinta a saber, aquella que tiene por regla de correspondencia asociarle a un número real y todo número real x que satisfaga la ecuación

$$y = x^2,$$

o sea, a y se le asocia

$$\sqrt{y} \qquad \text{y} \qquad -\sqrt{y},$$

que son los dos valores de x para los que se satisface la ecuación una vez especificado el valor de y. En este caso, se dice que y es la variable independiente y x la dependiente. El dominio de esta nueva relación es el conjunto de números reales mayores o iguales que 0, la imagen es el conjunto de los números reales, y la relación es

$$\left\{(y,x)\middle|\ y \geq 0,\quad y = x^2\right\} = \left\{\left(x^2,x\right)\middle|\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

La tabla que representa esta relación tiene una infinidad de renglones y tres columnas. En el renglón correspondiente a 0 sólo aparecen dos elementos. Y si llamamos s a la regla de correspondencia, entonces podemos escribir

$$s(y) = \pm\sqrt{y}.$$

Por ejemplo,

$$s(4) = \pm 2, \qquad s\,(2) = \pm\sqrt{2}, \qquad s\left(y^2\right) = \pm y.$$

Funciones

En una tienda de abarrotes la ganancia por la venta de cada barra de chocolate es de 40 centavos. Dibujar una gráfica que represente la ganancia obtenida al vender desde una hasta 10 barras. ¿Cuál sería la ganancia si el comerciante lograra vender 200 barras de chocolate?

Solución:

Hacemos una tabla con el registro de las ganancias por unidad vendida.

# de barras	Ganancia en pesos
1	0.40
2	0.80
3	1.20
4	1.60
5	2.00
6	2.40
7	2.80
8	3.20
9	3.60
10	4.00

La gráfica es:

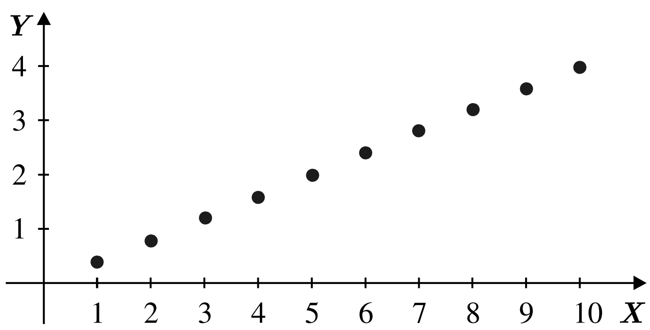


Figura 1-16

Para encontrar la ganancia obtenida al vender 200 chocolates, calculamos

$$0.40\,(200) = 80.00.$$

La ganancia es de 80 pesos.

En general, la ecuación

$$g = 0.40x$$

nos da la ganancia g que se obtiene al vender x barras de chocolate.

Esta ecuación establece una relación cuya regla de correspondencia, a la que por razones obvias llamaremos g, es

$$g(x) = 0.40x.$$

En el ejemplo anterior vemos que la cantidad de barras vendidas se relaciona con la ganancia obtenida, de modo tal que a cada cantidad de barras vendidas le corresponde un valor único de la ganancia.

En multitud de situaciones, y con relación a sucesos de muy diversas características, se ha podido encontrar que los valores de cierta cantidad y dependen de los de otra cantidad x del modo anteriormente descrito, es decir, a cada valor de x le corresponde un único valor de y. Por ejemplo:

- El área y de un cuadrado depende de la longitud x de su lado ($y = x^2$).

- La rapidez y con que un cuerpo recorre una distancia de 10 kilómetros depende del tiempo x que emplea para hacerlo $\left(y = \dfrac{10}{x}\right)$, etcétera.

De hecho, algunas de las herramientas más poderosas para entender nuestro entorno es la colección de fórmulas que hemos podido establecer, para indicar cómo se relacionan las cantidades que nos interesan.

Lo anterior llevó a introducir la siguiente noción:

Una *función* de un conjunto A en un conjunto B es una relación con dominio A e imagen contenida en B tal que su regla de correspondencia f asocia a cada elemento x del conjunto A un **único** elemento $f(x)$ en B. Es decir, al presentar a este tipo de relaciones mediante una tabla, sin repeticiones en la primera columna, ésta tiene exactamente dos columnas.

Ejemplo

- Determinar si la relación dada por el conjunto

$$C = \{(-9, 6), (-5, 4), (-2, 3), (2, 4), (6, 3)\}$$

es una función y dar su dominio e imagen.

Solución:

Presentamos la relación como una tabla

x	y
-9	6
-5	4
-2	3
2	4
6	3

Como bastan dos columnas, sin repeticiones en la primera, para representarla, entonces es una función; es decir, ningún elemento del dominio tiene asociados dos o más elementos de la imagen, lo que nos obligaría a usar más columnas.

El dominio de la función es
$$A = \{-9, -5, -2, 2, 6\}.$$

La imagen de la función es
$$B = \{3, 4, 6\}.$$

Para referirnos a una función f de A en B escribimos $f : A \to B$, y damos el criterio para obtener $f(x)$ para cada $x \in A$; esto se hace frecuentemente mediante una fórmula. Por ejemplo,

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \text{con} \quad f(x) = 2x$$

es la función de los números naturales en ellos mismos que a cada número natural le asocia su doble.

El conjunto A se llama *dominio* de la función y se denota con $Dom\ f$; B se llama *codominio* o *contradominio* de la función, y la colección de todos los valores $f(x)$ con $x \in A$ es la *imagen* o *rango* de f que se denota por $f(A)$ o bien Imf.

En el ejemplo anterior el dominio y el codominio coinciden con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, y la imagen de f son los números pares positivos.

Para x en A, usamos las siguientes expresiones para referirnos a $f(x)$: f de x, f en x, el valor que toma f en x, la imagen de f en x, y decimos también: f envía a x en $f(x)$, o f transforma a x en $f(x)$. La primera de estas dos últimas expresiones nos sugiere decir también que f envía a los elementos de A en B, y esto queda reflejado mediante la siguiente imagen que con frecuencia se usa para representar una función.

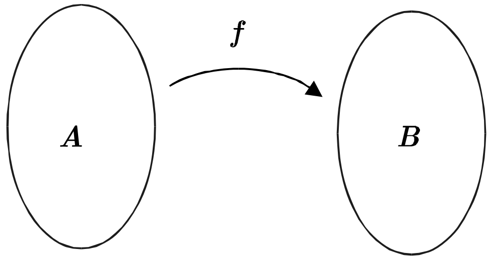


Figura 1-17

Ejemplos

1. Determinar si el siguiente diagrama corresponde a una función.

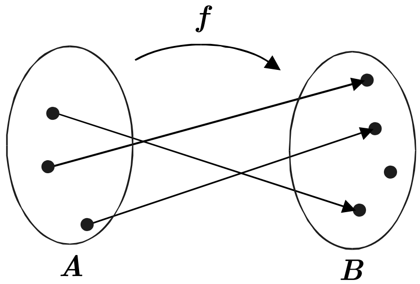


Figura 1-18

Solución:

Como cada elemento de A tiene asociado un único elemento de B, entonces el diagrama sí corresponde a una función. El hecho de que haya un elemento en B que no está asociado a un punto de A no contradice la definición, simplemente ese elemento no está en la imagen de la función.

2. Determinar si el siguiente diagrama corresponde a una función.

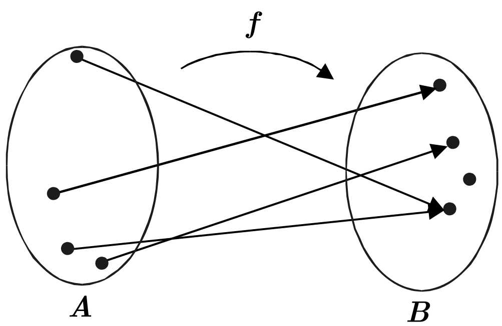


Figura 1-19

Solución:

Como cada elemento de A, compuesto por 4 puntos, tiene asociado un único elemento de B, entonces el diagrama sí corresponde a una función.

Observamos que en este ejemplo dos elementos de A tienen asociado el mismo elemento de B.

3. Determinar si el siguiente diagrama corresponde a una función.

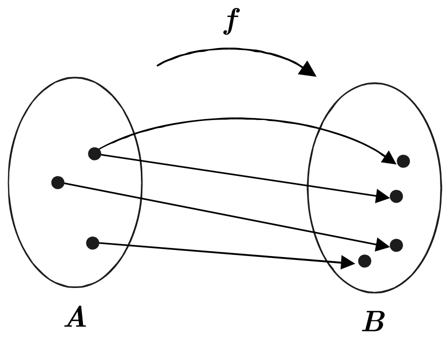


Figura 1-20

Solución:

Puesto que hay un punto del dominio que tiene asociados dos puntos del contradominio, el diagrama no corresponde a una función.

En resumen, para que un diagrama del tipo de los anteriores represente una función se requiere que no haya dos flechas con distintos puntos que tengan el mismo punto de partida.

Consideremos la función f de A en B representada en la siguiente figura.

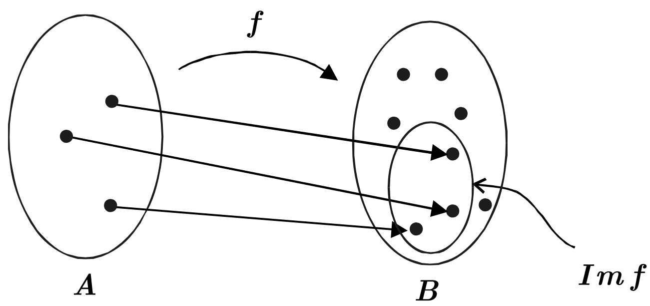


Figura 1-21

El rango o imagen de f es, en este caso, un subconjunto del dominio distinto de éste.

Sugerido por lo visto para las fórmulas con dos variables, tenemos que si la letra x se usa para designar a un elemento cualquiera del dominio, entonces x se llama la *variable independiente.* En tanto que si y se usa para denotar a los elementos de la imagen, entonces y se llama la *variable dependiente.*

Una función entre dos subconjuntos A y B de $\mathbb{R}$ se llama función real de variable real.

Para funciones reales de variable real tenemos que al localizar en el plano los puntos del conjunto

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x, y) \mid x \in A, \quad y = f(x)\},$$

obtenemos la llamada *gráfica* de f.

Observación:

Cualquier recta vertical corta a la gráfica de una función real de variable real en a lo más un punto. Si ℓ es una recta vertical, entonces todos sus puntos tienen la misma primera coordenada, digamos x; si $x \notin A$, entonces ningún punto de la recta está en la gráfica. En tanto que si $x \in A$, entonces $(x,\ f(x))$ es un punto en la intersección y es el único, porque $f(x)$ es el único elemento asociado a x.

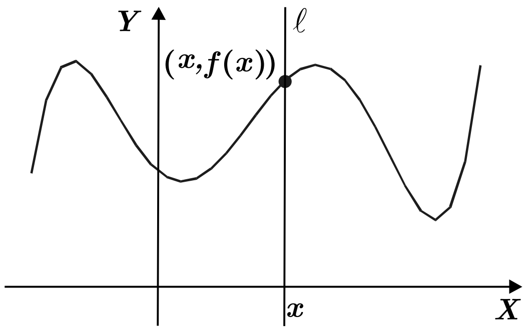


Figura 1-22

Así, si conocemos la gráfica de una relación entre dos subconjuntos A y B de $\mathbb{R}$, es muy sencillo saber si se trata de una función, pues tal será el caso si cada recta vertical corta a lo más en un punto a la gráfica; si alguna recta vertical corta a la gráfica en dos o más puntos, entonces la relación no es una función.

Ejemplos

1. Dibujar la gráfica de la relación $C = \{(-4,5), (-2,3), (0,1), (3,4), (5,5)\}$ y decir si se trata de una función.

   Solución:

   La gráfica del conjunto C es

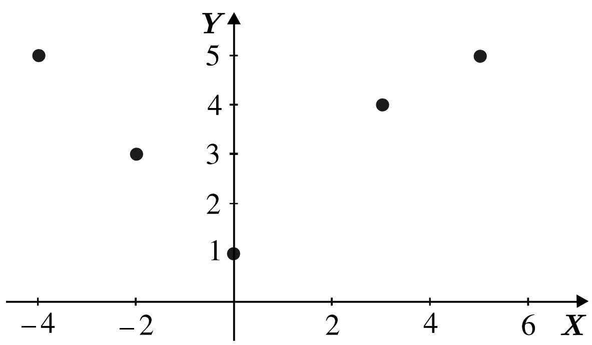


Figura 1-23

Como al trazar cualquier recta vertical ésta corta a la gráfica en a lo más un punto, entonces el conjunto C sí define una función.

2. Encontrar las imágenes correspondientes a los valores $x = 0$, $x = -5$ y $x = \frac{5}{2}$ para la función $f(x) = x^2 - x + 1$.

Solución:

- Si $x = 0$, entonces
$$f(0) = (0)^2 - (0) + 1 = 1.$$
- Si $x = -5$, entonces
$$f(-5) = (-5)^2 - (5) + 1 = 21.$$
- Si $x = \frac{5}{2}$, entonces
$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right) + 1 = \frac{19}{4}.$$

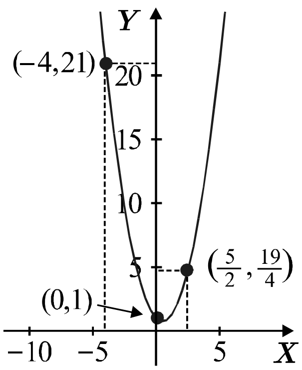


Figura 1-24

3. Podemos usar una fórmula para obtener los valores asociados a una parte del dominio y otra fórmula para obtener los asociados al resto de los puntos del dominio. En este caso decimos que tenemos una *función combinada*.

Encontrar las imágenes correspondientes a los valores $x = -4$, $x = 2$ y $x = 7$ para la función combinada
$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \in [-6, 2) \\ 2x & \text{si } x \in [2, 7] \end{cases} .$$

En este caso, el dominio es el intervalo $[-6, 7]$; para la porción $[-6, 2]$ se usa la fórmula $y = -x + 1$, y para la porción $[2, 7]$ se usa $y = 2x$.

Solución:

- -4 $\in [-6, 2)$, por tanto, usamos la fórmula $f(x) = -x + 1$:
$$f(-4) = -(-4) + 1 = 5.$$
- $2 \in [2, 7]$, por tanto, usamos la fórmula $f(x) = 2x$:
$$f(2) = 2(2) = 4.$$

- $7 \in [2,7]$, por tanto, usamos la fórmula $f(x) = 2x$:

$$f(7) = 2(7) = 14.$$

La gráfica de esta función se obtiene dibujando sobre cada porción del dominio, de acuerdo con la regla establecida para esa porción.

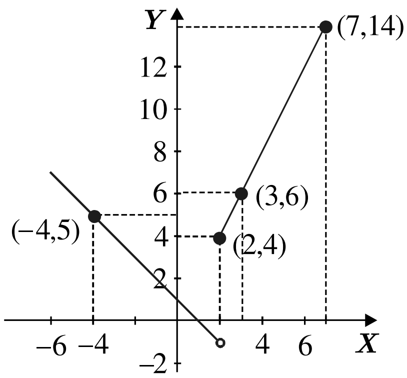


Figura 1-25

En la figura, cada punto sólido significa que ese punto pertenece a la gráfica de la función, el punto hueco significa que ese punto no está en la gráfica de la función.

4. Decir si la gráfica siguiente corresponde a una función.

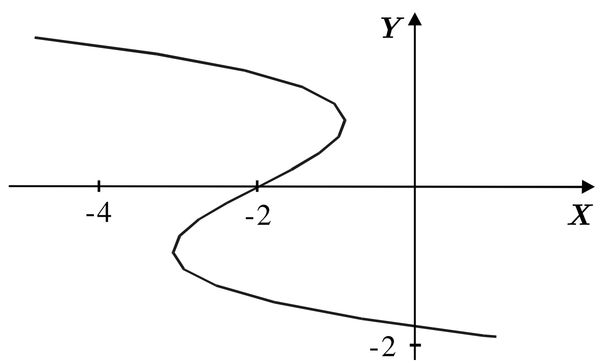


Figura 1-26

Solución:

La gráfica no corresponde a una función, pues al trazar una recta vertical, como en la figura siguiente, ésta corta a la gráfica en más de un punto; en este caso, en tres puntos.

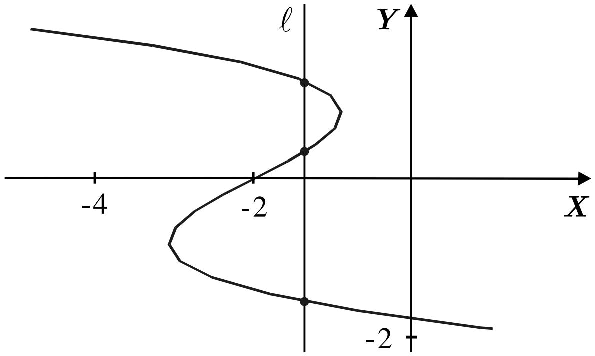


Figura 1-27

5. Decir si la gráfica siguiente corresponde a una función.

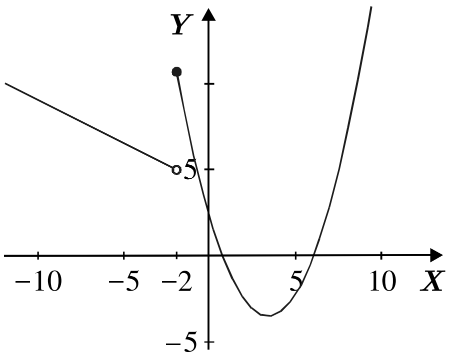


Figura 1-28

Solución:

El único punto donde podría haber duda es donde la gráfica se rompe; pero al trazar una recta vertical vemos que sólo corta en un punto.

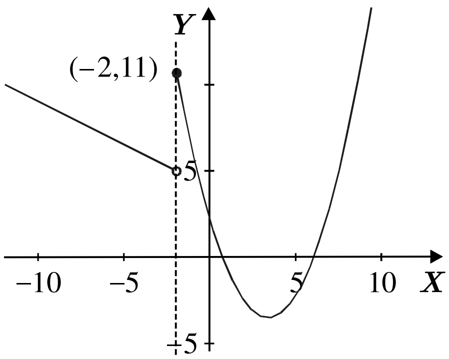


Figura 1-29

Por tanto, la gráfica sí corresponde a una función.

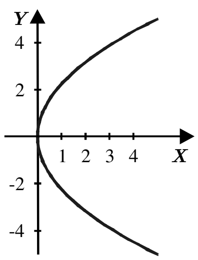
Observaciones:

- No cualquier relación define una función.
- La imagen de una función es un subconjunto del contradominio.
- Si A es el dominio de la función y B es el contradominio, entonces la gráfica es un subconjunto de $A \times B$.
- El dominio de una función dada a pedazos es la unión de los pedazos que intervienen.

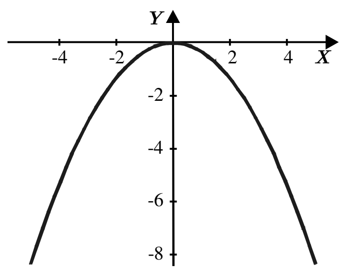
Ejercicios

Di cuáles de las siguientes gráficas representan una función.

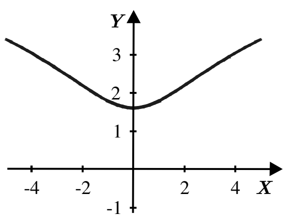
1.



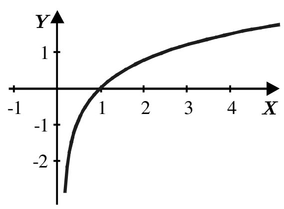
2.



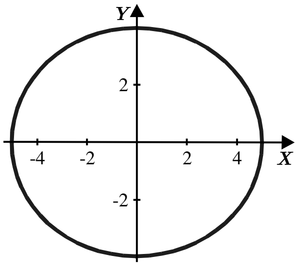
3.



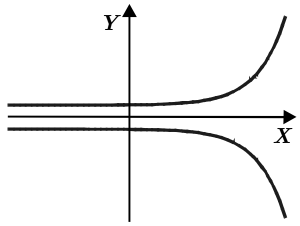
4.



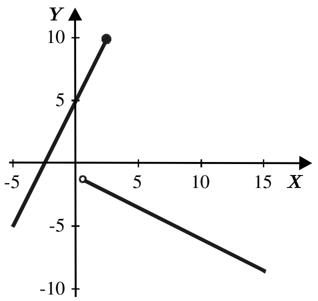
5.



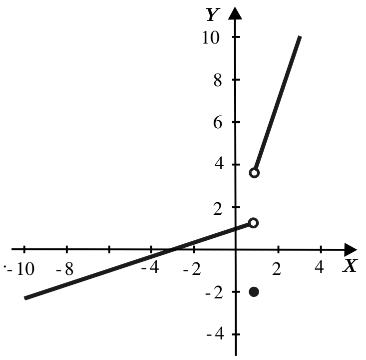
6.



7.



8.



En cada caso, evalúa la función dada en el punto indicado.

9. $f(x) = 7x^2 - 2x - 5$, $f(-3)$.

10. $g(t) = t^3 - t$, $g(2)$.

11. $h(x) = x^2 + 1$, $h(0)$.

12. $f(x) = 5x^2 + 10x - 12$, $f(-5)$.

13. $f(r) = \sqrt{3r+7}$, $f(-2)$.

14. $g(x) = \sqrt{8-5x}$, $g(1)$.

15. $g(t) = \dfrac{1}{t+6}$, $\quad g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

16. $h(x) = \dfrac{2x}{4x-9}$, $\quad h\left(\dfrac{5}{3}\right)$.

17. $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-5}$, $\quad h(-6)$.

18. $f(t) = \dfrac{(t+5)^3}{3t^2-7t+12}$, $\quad f(-3)$.

19. $f(x) = 4x^2 - x - 21$, $\quad f(x-1)$.

20. $h(x) = 10x^3 + x - 6$, $\quad h(2a)$.

21. $f(x) = 9x^2 - 19x + 29$, $\quad f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

22. $g(x) = \dfrac{(x+5)^2}{x+7}$, $\quad g(x+4)$.

23. $g(x) = \dfrac{2x^2-11x+25}{x}$, $\quad g(x^2)$.

24. $h(x) = 4x^2 + 20x$, $\quad h\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$.

25. $h(x) = \sqrt{25-x^2}$, $\quad h\left(\dfrac{1}{x+3}\right)$.

26. $f(x) = \sqrt{7x^2+31}$, $\quad f\left(\dfrac{1}{x-4}\right)$.

27. $g(x) = \dfrac{x^2-9x+36}{\sqrt{5-x^2}}$, $\quad g(x^2+1)$.

28. $h(x) = 16x^4 + 8x^2 + 48$, $\quad h\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

29. $f(x) = \dfrac{1}{x+8}$, $\quad f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

30. $g(x) = \dfrac{x}{x-9}$, $\quad g\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$.

En cada caso, evalúa la función dada en los puntos indicados.

31. $f(x) = \begin{cases} x-8 & \text{si } x \in [-10,-4] \\ 3x-1 & \text{si } x \in (-4,20) \end{cases}$, $\quad f(-8)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(10)$, $f(-7.5)$.

32. $g(x) = \begin{cases} 9x+15 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{x}{4}+20 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$, $\quad g(-10)$, $g(-5)$, $g(-2)$, $g(4)$, $g(5)$.

33. $h(x) = \begin{cases} x^2-16 & \text{si } x \leq 0 \\ 14 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $\quad h(-4)$, $h(1)$, $h\left(\frac{5}{3}\right)$, $h(-6)$, $h(0)$.

El dominio natural

¿Para qué valores $x \in \mathbb{R}$ está definida la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ si queremos que f sea una función real, o sea que $f(x) \in \mathbb{R}$?

Solución:

Para que la raíz cuadrada sea un número real, el radicando debe ser mayor o igual que cero; entonces, debe suceder:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &\geq 0 \\ x^2 &\geq 9 \\ |x| &\geq 3, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{array}{rclcrcl} x & \geq & 3 & \quad \text{o} \quad & x & \leq & -3 \\ x & \in & [3, \infty) & & x & \in & (-\infty, -3], \end{array}$$

es decir,

$$x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty).$$

La función está definida en $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.

En el caso de las funciones reales de variable real, es frecuente que sólo se dé explícitamente la regla de correspondencia mediante una expresión algebraica, sin especificar cuál es el dominio de dicha función; en ese caso, se sobreentiende que el dominio a considerar es el conjunto de los números reales x, en los cuales la expresión toma un único valor real y. Tal conjunto se denomina *dominio natural* de la función.

Ejemplos

1. Encontrar el dominio natural de la función $f(x) = 9x - 12$.

Solución:

Como la expresión $9x - 12$ toma un único valor real para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces el dominio natural de la función es el conjunto de todos los números reales.

2. Encontrar el dominio natural de la función $f(x) = \dfrac{2x}{5x+7}$.

Solución:

Para que el cociente

$$\frac{2x}{5x+7}$$

esté definido, necesitamos y nos basta con que el denominador sea diferente de cero, es decir,

$$x \neq -\frac{7}{5}.$$

En este caso, $\dfrac{2x}{5x+7}$ toma un valor único.

Entonces el dominio natural de la función es

$$\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{7}{5}\right\}=\left(-\infty,-\frac{7}{5}\right)\cup\left(-\frac{7}{5},\infty\right).$$

3. Encontrar el dominio natural de la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

Solución:

Con $\sqrt{\quad}$ estamos denotando la raíz cuadrada no negativa; para que ésta tenga un valor real único es necesario y suficiente que la expresión en el radicando sea mayor o igual que cero. Así, el dominio natural de f es la colección de números reales x tales que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 4-x^2 \\ x^2 &\leq 4 \\ |x| &\leq 2 \\ -2 &\leq x\leq 2. \end{aligned}$$

En resumen, el dominio natural de la función es el intervalo $[-2,2]$.

	Decimos que dos funciones f y g son *iguales* si:
i)	Tienen el mismo dominio.
ii)	Tienen la misma regla de correspondencia, es decir, $f(x)=g(x)$ para todo x en el dominio.

Ejemplos

1. Determinar si las funciones f y g son iguales, donde

$$f(x)=x;\ Dom\ f=[0,\infty), \qquad g(x)=\sqrt{x^2};\quad Dom\ g=[0,\infty)$$

Solución:

Las funciones tienen el mismo dominio, entonces sólo debemos ver si la regla de correspondencia es la misma.

Para $x\geq 0$ es lo mismo $\sqrt{x^2}$ que x; entonces

$$g(x)=\sqrt{x^2}=x, \qquad \text{ya que } x\geq 0.$$

Por tanto, las funciones son iguales.

Observa que para $x<0$, $\sqrt{x^2}=-x$, ya que con $\sqrt{\quad}$ nos referimos a la raíz cuadrada no negativa.

Es importante resaltar que la función f aquí considerada tiene como dominio a un subconjunto del dominio natural correspondiente a la expresión $y=x$.

2. Determinar si las funciones f y g son iguales. Si

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2};\ Dom\ f = \mathbb{R} \diagdown \{2\}, \qquad g(x) = x+2;\ Dom\ g = \mathbb{R}.$$

Solución:

Como los dominios de las funciones son distintos, entonces las funciones no son iguales, no obstante que

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

para todo x, donde ambas funciones están definidas; es decir, para $x \in \mathbb{R} \diagdown \{2\}$.

Ejercicios

Encuentra el dominio natural de cada función.

1. $f(x) = 3x - 10.$

2. $g(x) = x^2 + 2x - 5.$

3. $h(x) = 6x^3 - 2x^2 + 19.$

4. $h(x) = x^4 + 20x^2 - 15.$

5. $h(x) = \sqrt{6-8x}.$

6. $g(x) = \sqrt{5x+4}.$

7. $f(x) = \dfrac{x^2+5x+9}{x^2-16}.$

8. $g(x) = \dfrac{4x^2+x-20}{x^2+12x+27}.$

9. $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x+5}.$

10. $g(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-8}.$

11. $h(x) = \dfrac{1}{x^2+5x-6}.$

12. $f(x) = \dfrac{7x^2-18}{x^2-81}.$

13. $f(x) = \sqrt{x^2+3x-10}.$

14. $g(x) = \sqrt{-3x^2-4x+4}.$

15. $f(x) = \dfrac{x+15}{\sqrt{x^2-14x+48}}.$

16. $h(x) = \dfrac{x^4+10x^2-34}{\sqrt{33+8x-x^2}}.$

17. $g(x) = \dfrac{x^2+3x-40}{\sqrt[3]{x^2-144}}.$

18. $h(x) = \dfrac{2x^2-31x+84}{\sqrt[4]{169-x^2}}.$

En cada caso, determina si las funciones dadas son iguales.

19. $$\begin{array}{ll} f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4} & Dom\ f = \mathbb{R} \diagdown \{-4\} \\ g(x) = x-4 & Dom\ g = \mathbb{R} \end{array}.$$

20. $$\begin{array}{ll} f(x) = \sqrt{x^2+10x+25} & Dom\ f = \mathbb{R} \\ g(x) = x+5 & Dom\ g = \mathbb{R} \end{array}.$$

21. $$\begin{array}{ll} f(x) = \dfrac{x+12}{x^2-144} & Dom\ f = \mathbb{R} \diagdown \{-12, 12\} \\ g(x) = \dfrac{1}{x-12}. & Dom\ g = \mathbb{R} \diagdown \{-12, 12\} \end{array}.$$

Funciones crecientes y decrecientes

La gráfica siguiente muestra los registros de temperatura máxima tomados durante una semana. ¿A partir de qué día hubo descenso en la temperatura?

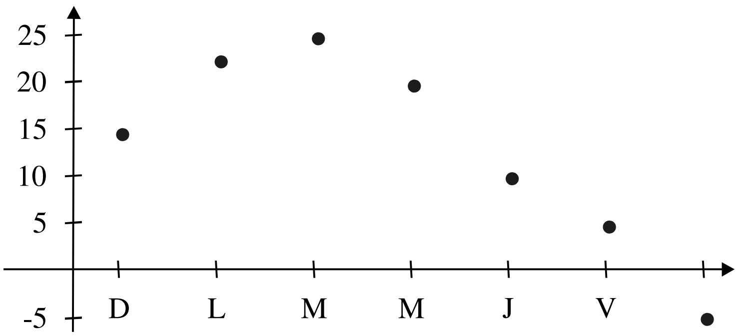


Figura 1-30

Solución:

Observando la gráfica, vemos que la mayor temperatura se registró el martes y, a partir de ese día, empezó a descender.

La gráfica es creciente de domingo a martes y decreciente del martes en adelante.

En esta sección todas las funciones son reales de variable real.

Una función f es *creciente* en un conjunto $A \subset Dom\ f$ si, para cualesquiera dos puntos x_1, $x_2 \in A$, se tiene que

$$\text{si} \quad x_1 \leq x_2, \quad \text{entonces} \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

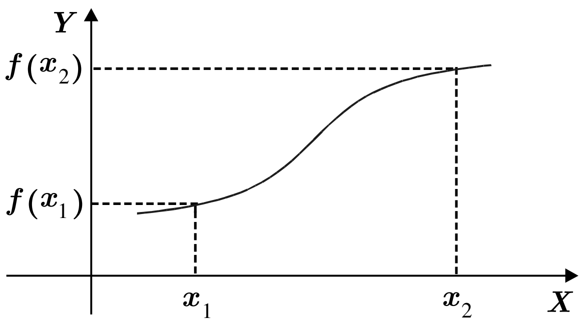


Figura 1-31

Geométricamente, la gráfica de una función es creciente en A si, al movernos hacia la derecha a través de puntos de A, los valores de la función aumentan o al menos se mantienen sin cambio.

Una función f es *decreciente* en un conjunto $A \subset Dom\ f$ si, para cualesquiera dos puntos x_1, $x_2 \in A$, se tiene que

$$\text{si} \quad x_1 \leq x_2, \quad \text{entonces} \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

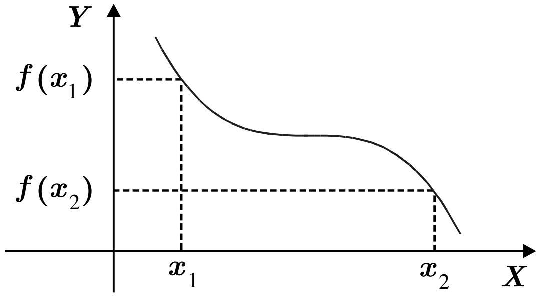


Figura 1-32

Geométricamente, la gráfica de una función es decreciente si, al movernos hacia la derecha a través de puntos de A, los valores de la función disminuyen o al menos se mantienen sin cambio.

Ejemplos

1. Determinar a partir de la gráfica si la función es creciente o decreciente.

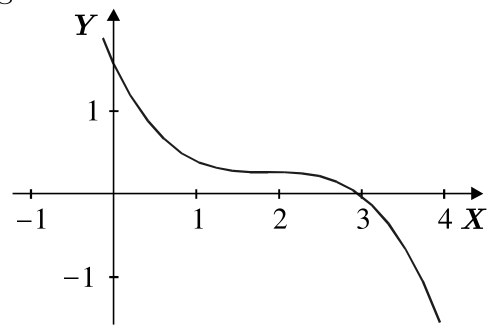


Figura 1-33

Solución:

Observamos que en la gráfica, a medida que nos movemos hacia la derecha, los valores de la función decrecen.

La función es decreciente.

2. Determinar, a partir de la gráfica, en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente.

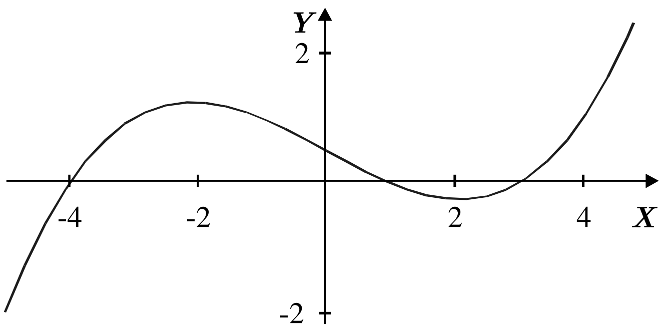


Figura 1-34

Solución:

Al observar la gráfica podemos decir que la función no es creciente ni decreciente. Sin embargo, notamos que a la izquierda de -2 la función es creciente, que en el intervalo $[-2, 2]$ la función es decreciente, y que a la derecha de 2 es creciente.

3. Determinar, a partir de la gráfica, en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente.

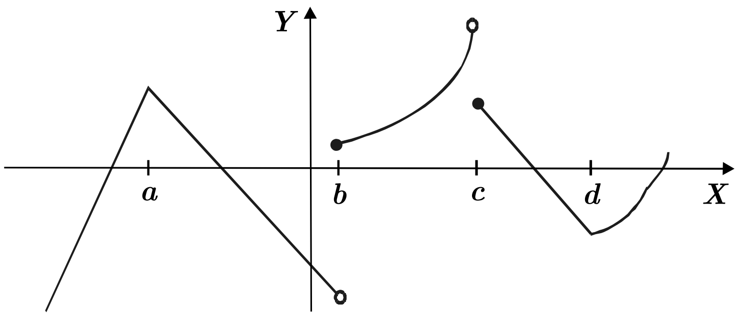


Figura 1-35

Solución:

A la izquierda de a la función es creciente. En el intervalo $[a, b)$ es decreciente. En el intervalo $[b, c)$ es creciente. En el intervalo $[c, d]$ es decreciente, y a la derecha de d es creciente.

Casos especiales

En esta sección analizaremos algunas funciones reales de variable real que aparecen con frecuencia.

- Las *funciones constantes* son aquellas cuyas reglas de correspondencia tienen la forma
$$f(x) = c,$$
donde c es una constante. Su dominio natural es el conjunto de los números reales. Su gráfica es la recta horizontal que pasa por el punto $(0, c)$.

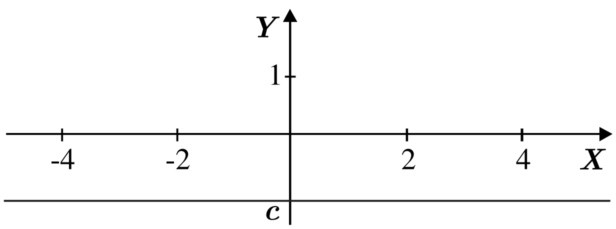


Figura 1-36

- La *función identidad* está dada por
$$f(x) = x.$$

Su dominio natural es el conjunto de los números reales. Su gráfica es:

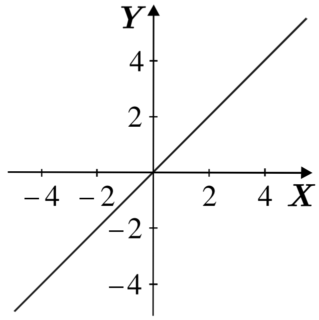


Figura 1-37

- Las *funciones lineales* son de la forma $f(x) = ax + b$.

  Su dominio natural es el conjunto de los números reales. Su gráfica es una recta no vertical que pasa por el punto $(0, b)$.

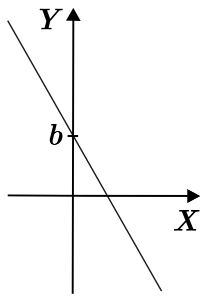


Figura 1-38

- La *función valor absoluto* está dada por $f(x) = |x|$.

  Su dominio natural es el conjunto de los números reales. Por la manera en que está definido el valor absoluto, tenemos que se trata de una función combinada, con regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Su gráfica es:

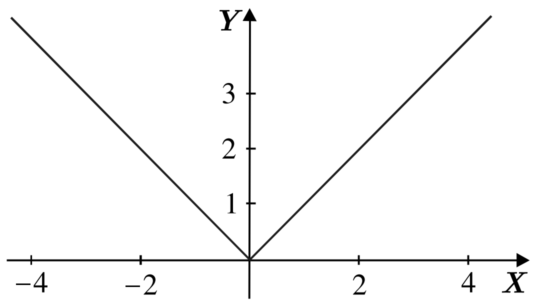


Figura 1-39

- La *función mayor entero* está dada por

$$f(x) = [x] = \text{mayor entero que es menor o igual que } x.$$

Es decir, si x es un número entero, entonces $[x] = x$. Si x no es un número entero, entonces se encuentra entre dos números enteros consecutivos, digamos n y $n+1$, en cuyo caso $[x] = n$.

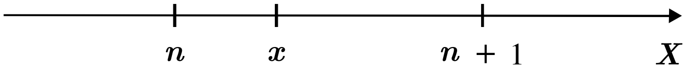


Figura 1-40

Calculamos algunos valores de la función

$$[0] = 0, \quad [-2] = -2, \quad [1.75] = 1, \quad [-3.22] = -4, \quad [6] = 6, \quad \left[\frac{5}{3}\right] = 1.$$

Su dominio natural es el conjunto de los números reales. Su gráfica es:

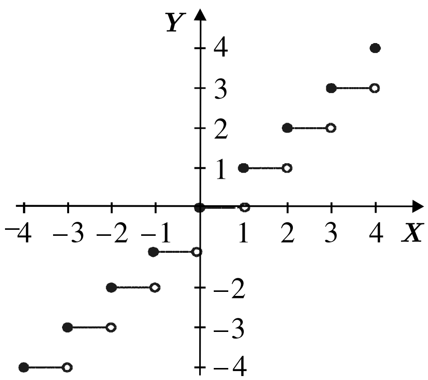


Figura 1-41

- La función $f(x) = x^2$.

Su dominio natural es el conjunto de los números reales. Su gráfica es:

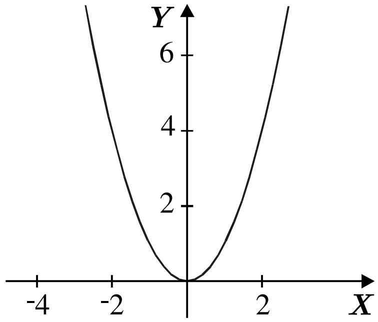


Figura 1-42

- La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

  Su dominio natural es el conjunto de los números reales excepto el cero, es decir $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Su gráfica es:

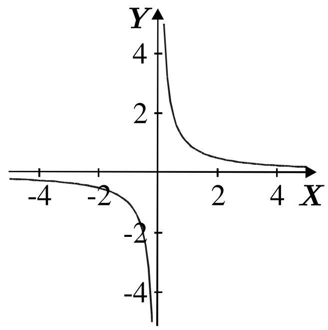


Figura 1-43

- La función $f(x) = \sqrt{x}$.

  Su dominio natural es el conjunto de los números reales no negativos, es decir $[0, \infty)$. Su gráfica es:

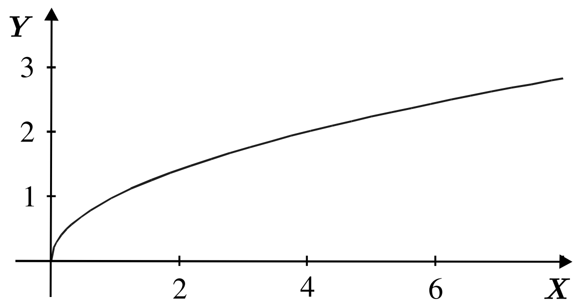


Figura 1-44

Resumimos parte de lo visto en esta sección en la siguiente tabla:

$f(x) = c$	$Dom\ f = \mathbb{R}$	$f(x) = x$	$Dom\ f = \mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$Dom\ f = \mathbb{R}$	$f(x) = \lvert x \rvert$	$Dom\ f = \mathbb{R}$
$f(x) = [x]$	$Dom\ f = \mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$Dom\ f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$Dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(x) = \sqrt{x}$	$Dom\ f = [0, \infty)$

Operaciones con las funciones

Una fábrica produce envases de plástico. Los gastos fijos por jornada de trabajo son de 600 pesos. En una jornada de ocho horas se pueden producir hasta 15,000 envases y el costo de producción es de 40 centavos por unidad. Cada unidad se vende en un peso. Encontrar la función que representa la utilidad diaria para la fábrica.

Solución:

El costo de producción de x envases en una jornada es

$$C(x) = 0.40x + 600 \qquad \text{para} \;\; 0 \leq x \leq 15,000.$$

El ingreso obtenido al vender x artículos está dado por

$$I(x) = 1.00x = x.$$

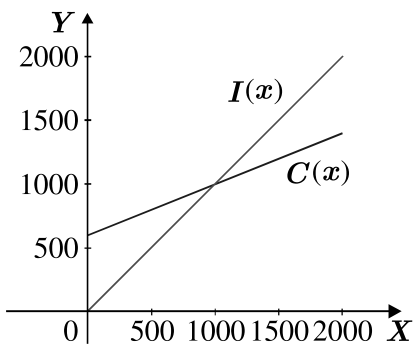


Figura 1-45

Así, la utilidad, es decir, la ganancia obtenida al vender x envases, es

$$G(x) = I(x) - C(x) = x - (0.40x + 600) = 0.60x - 600$$

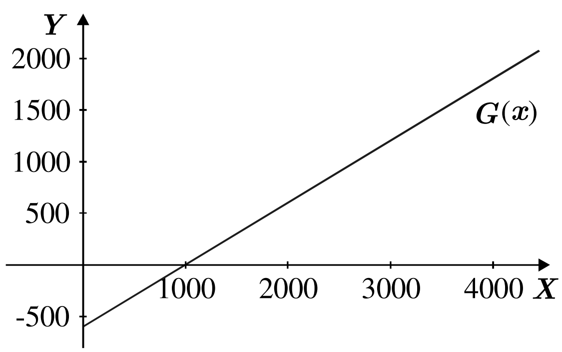


Figura 1-46

Observamos que para obtener ganancia deben venderse más de 1000 envases.

Supongamos que tenemos dos funciones reales f y g, de tal manera que $Dom f$ es el dominio de f y $Domg$ es el dominio de g. Gracias a que en $\mathbb{R}$ están definidas las operaciones de suma, diferencia, producto y cociente podemos definir las siguientes funciones a partir de f, g y un número real a.

- Suma:
  $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{si } x \in Dom\ (f+g) = Dom\ f \cap Dom\ g.$
- Producto por un escalar:
  $(af)(x) = af(x) \qquad \text{si } x \in Dom\ f.$
- Simétrica:
  $(-f)(x) = -f(x) \qquad \text{si } x \in Dom\ f.$
- Diferencia:
  $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{si } x \in Dom\ (f-g) = Dom\ f \cap Dom\ g.$
- Producto:
  $(fg)(x) = f(x)\, g(x) \qquad \text{si } x \in Dom\ (fg) = Dom\ f \cap Dom\ g.$
- Cociente:
  $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \text{si } x \in Dom\ \left(\dfrac{f}{g}\right)$, es decir, $x \in Dom\ f \cap Dom\ g$ y $g(x) \neq 0$.
- Recíproco:
  $\left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g(x)} \quad \text{si } x \in Dom\ \left(\dfrac{1}{g}\right)$, es decir, $x \in Dom\ g$ y $g(x) \neq 0$.

Observaciones:

- Las expresiones $f+g$, $f-g$, fg y $\dfrac{f}{g}$ nos sirven para denotar a las funciones con los dominios y reglas de correspondencia antes descritas; y, en vista de estas últimas, es obvia la razón para usarlas con tal objeto.
- Por otra parte, podemos pensar que una función actúa en los puntos de su dominio; por tanto, el dominio de cada una de las nuevas funciones se establece cuidando que las dos funciones que intervienen en su definición puedan actuar sobre los puntos de dicho dominio.
- Algunas de las funciones recién introducidas son casos particulares de alguna otra de ellas. Por ejemplo, la simétrica es un caso particular del producto por un escalar, ya que
  $$(-f) = (-1)\, f.$$
- Si f es una función, entonces
  $$(f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{si } x \in Dom\ f.$$
- Si f es una función, entonces
  $$\left(f\ \frac{1}{f}\right)(x) = f(x)\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 1 \quad \text{si } x \in Dom\ f \text{ y } f(x) \neq 0.$$

Ejemplos

1. Si $f(x) = x - 8$ y $g(x) = x^2 + 2x - 5$, encontrar $f + g$ y $f - g$, es decir, su regla de correspondencia y su dominio.

Solución:

Observamos que

$$Dom\ f = \mathbb{R} \qquad\qquad Dom\ g = \mathbb{R}$$

- $f + g$:

$$Dom\ (f+g) = Dom\ f \cap Dom\ g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R},$$

y la regla de correspondencia es

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x-8) + \left(x^2 + 2x - 5\right) = x^2 + 3x - 13.$$

- $f - g$.

$$Dom\ (f-g) = Dom\ f \cap Dom\ g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R},$$

y la regla de correspondencia es

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x-8) - \left(x^2 + 2x - 5\right) = -x^2 - x - 3.$$

2. Si $f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = 6x - 7$, encontrar fg y $\dfrac{f}{g}$.

Solución:

Observamos que:

$$Dom\ f = \mathbb{R} \qquad\qquad Dom\ g = \mathbb{R}$$

- fg:

$$Dom\ (fg) = Dom\ f \cap Dom\ g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R},$$

y la regla de correspondencia es

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x) = (2x+5)(6x-7) = 12x^2 + 16x - 35.$$

- $\dfrac{f}{g}$:

$$x \in Dom\ \left(\frac{f}{g}\right)$$

equivale a

$$x \in Dom\ f \cap Dom\ g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad g(x) \neq 0, \text{ es decir, } 6x - 7 \neq 0,$$

de donde

$$Dom\ \left(\frac{f}{g}\right) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{7}{6} \right\},$$

y la regla de correspondencia es

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+5}{6x-7}.$$

3. Si $f(x) = \dfrac{x+6}{5x-4}$, encontrar $\dfrac{1}{f}$.

Solución:

Observamos que

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \mid 5\,x - 4 \neq 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{4}{5} \right\}.$$

Además, debemos considerar dónde $f(x) = 0$, ya que en este punto $\dfrac{1}{f}$ no está definido.

$$\begin{aligned} \frac{x+6}{5x-4} &= 0 \\ x+6 &= 0 \\ x &= -6. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Dom\ \left(\frac{1}{f}\right) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad x \neq -6 \right\} = \mathbb{R} \diagdown \left\{ \frac{4}{5}, -6 \right\}.$$

La regla de correspondencia es

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\dfrac{x+6}{5x-4}} = \frac{5x-4}{x+6}.$$

Observación:

Hay que tener cuidado de no dar el dominio después de haber encontrado la regla de correspondencia, pues se pueden cometer errores. Puesto que si consideramos la función

$$g(x) = \frac{5x-4}{x+6}, \text{ entonces su dominio es } \mathbb{R} \diagdown \{-6\}$$

y $g(x)$ es distinta de $\dfrac{1}{f(x)}$, ya que los dominios no son iguales.

4. Encontrar fg y determinar su dominio si

$$f(x) = [x] \quad \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right], \qquad g(x) = 2x \quad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

Solución:

El dominio del producto es la intersección de los dominios de los factores. o sea,

$$Dom\ (fg) = \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \cap \mathbb{R} = \left[-\frac{1}{2}, 1\right].$$

Por otra parte, observamos que podemos presentar a f como una función combinada,

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x\in\left[-\frac{1}{2},0\right) \\ 0 & \text{si } x\in[0,1) \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}.$$

La regla de correspondencia de fg es

$$(fg)(x)=\begin{cases} -1(2x) & \text{si } x\in\left[-\frac{1}{2},0\right) \\ 0(2x) & \text{si } x\in[0,1) \\ 1(2x) & \text{si } x=1 \end{cases}=\begin{cases} -2x & \text{si } x\in\left[-\frac{1}{2},0\right) \\ 0 & \text{si } x\in[0,1) \\ 2x & \text{si } x=1 \end{cases}.$$

5. Encontrar $f+g$ y fg y determinar el dominio de cada una de las funciones, si

$$f(x)=-x+1 \qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases} 5x-8 & \text{si } x\in(-11,3] \\ x^2-4 & \text{si } x\in(3,7) \end{cases}.$$

Solución:

Observamos que

$$Dom\ f=\mathbb{R}, \qquad Dom\ g=(-11,3]\cup(3,7).$$

Puesto que el dominio de la suma de dos funciones es igual al dominio del producto, entonces

$$Dom\ (f+g)=Dom\ (fg)=Dom\ f\cap Dom\ g=(-11,3]\cup(3,7).$$

La regla de correspondencia de la suma es

$$(f+g)(x)=\begin{cases} (-x+1)+(5x-8) & \text{si } x\in(-11,3] \\ (-x+1)+(x^2-4) & \text{si } x\in(3,7) \end{cases}=\begin{cases} 4x-7 & \text{si } x\in(-11,3] \\ x^2-x-3 & \text{si } x\in(3,7) \end{cases}.$$

La regla de correspondencia del producto es

$$(fg)(x)=\begin{cases} (-x+1)(5x-8) & \text{si } x\in(-11,3] \\ (-x+1)(x^2-4) & \text{si } x\in(3,7) \end{cases}=\begin{cases} -5x^2+13x-8 & \text{si } x\in(-11,3] \\ -x^3+x^2+4x-4 & \text{si } x\in(3,7) \end{cases}.$$

Ejercicios

En cada caso, dibuja la gráfica de la función.

1. $f(x)=|2x+1|$ si $x\in[-5,5]$.

2. $f(x)=|3-x|$ si $x\in[-5,5]$.

3. $f(x)=[2x]$ si $x\in[-2,2]$.

4. $f(x)=[3x]$ si $x\in[-1,1]$.

5. $f(x)=\left[\dfrac{x}{2}\right]$ si $x\in[-4,4]$.

6. $f(x)=\left[\dfrac{x}{4}\right]$ si $x\in[-6,6]$.

En cada caso, encuentra $f+g$ y fg y determina el dominio de cada una de las funciones.

7. $f(x)=7x-1$, $g(x)=8x+3$.

8. $f(x)=3x+6$, $g(x)=3x^2-5$.

9. $f(x)=2x^2-4x+12$, $g(x)=x^3-2x^2-20$.

10. $f(x)=|x-1|$, $g(x)=5x$.

11. $f(x)=\sqrt{x+5}$, $g(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$.

12. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$.

13. $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}$, $g(x)=\dfrac{x-9}{\sqrt{16-x^2}}$.

14. $f(x)=\sqrt{x^2+6x}$, $g(x)=\sqrt{x^2-6x}$.

15. $f(x)=\begin{cases} 4x-7 & \text{si } x\in(-20,-5) \\ 9x+2 & \text{si } x\in[6,18) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si } x\in[-15,0] \\ 8x-3 & \text{si } x\in(0,15] \end{cases}$.

16. $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{si } x\in(-6,-1] \\ 2x^2-3 & \text{si } x\in(-1,22] \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 5x^2+x+2 & \text{si } x\in(-5,4) \\ -2x^2-4x+3 & \text{si } x\in[4,20] \end{cases}$.

17. $f(x)=[2x]$, $g(x)=[x]$ si $Dom\ f=Dom\ g=[-2,0)$.

En cada caso, encuentra $\dfrac{1}{f}$ determinando su dominio.

18. $f(x)=4x-9$.

19. $f(x)=7x+15$.

20. $f(x)=4x^2-49$.

21. $f(x)=x^2+7x-8$.

22. $f(x)=\sqrt{9x^2-64}$.

23. $f(x)=\sqrt{100-x^2}$.

24. $f(x)=\dfrac{x-11}{3x-15}$.

25. $f(x)=\dfrac{x^2-9x+18}{x+2}$.

26. $f(x)=\dfrac{x^2+4x-45}{x^2+16x+60}$.

27. $f(x)=\dfrac{2x^2+23x-12}{3x^2-19x+28}$.

28. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-8}{x+13}}$.

29. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2+3x-28}}$.

En cada caso, encuentra $f-g$ y $\dfrac{f}{g}$ y determina el dominio de cada una de las funciones.

30. $f(x)=x^2+4x+4$, $g(x)=x+7$.

31. $f(x)=5x^2-1$, $g(x)=x-9$.

32. $f(x)=x+12$, $g(x)=6x+14$.

33. $f(x)=\dfrac{12x-8}{x^2-16}$, $g(x)=\dfrac{4x}{x^2-16}$.

34. $f(x)=\dfrac{x^2-6x-7}{x^2+6x-16}$, $g(x)=\dfrac{x^3-12x^2+27x}{x^2+14x+48}$.

35. $f(x)=\dfrac{x^2+15x+50}{\sqrt{x^2-10x-11}}$, $g(x)=\dfrac{x^2+5x-50}{\sqrt{14-x}}$.

36. $f(x)=\begin{cases} x^2+9x & \text{si } x\in(-25,-5) \\ x^2+13x-30 & \text{si } x\in[-5,5] \\ x+1 & \text{si } x\in(5,\infty) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x+15 & \text{si } x\in(-8,3) \\ 2 & \text{si } x\in[4,16] \end{cases}$.

Composición de funciones

Si $f(y) = \dfrac{y-9}{5}$ y $g(x) = 5x+9$, escribe la regla que resulta de aplicarle a x primero la función g y, al valor resultante y aplicarle la función f.

Solución:

Al aplicar a x la función g obtenemos

$$y = g(x) = 5x + 9.$$

Ahora aplicamos f a este valor, obteniendo

$$f\left(\overbrace{y}^{5x+9}\right) = \frac{\overbrace{y}^{5x+9} - 9}{5} = \frac{5x+9-9}{5} = x.$$

O sea,

$$f(5x+9) = x.$$

La regla obtenida es la que corresponde a la función identidad, y escribimos

$$f(g(x)) = x.$$

La *composición* de g con f, denotada mediante $f \circ g$, que también se lee g compuesta con f, o bien g seguida de f (advierte el orden), es la función cuyo *dominio* es

$$\{x \in Dom\ g|\ \ g(x) \in Dom\ f\},$$

y cuya regla de correspondencia es

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

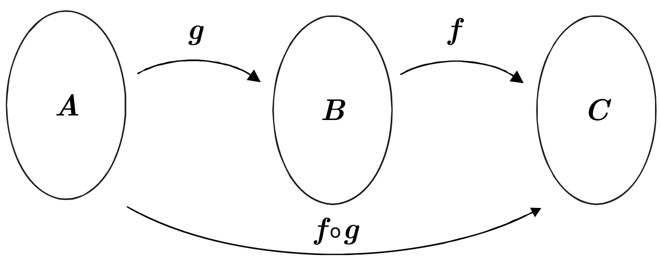


Figura 1-47

De manera un tanto informal, y sugerida por el diagrama anterior, podemos decir que el dominio de $f \circ g$ está formado por los puntos x que son enviados por g a donde f se aplica ($x \in Dom\ g$ tales que $g(x) \in Dom\ f$).

Ejemplos

1. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$, encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución:

Determinamos los dominios de f y de g.

$$Dom\ f = \mathbb{R} \qquad\qquad Dom\ g = \mathbb{R}$$

- Primero, encontramos el dominio de la composición $f \circ g$.

$$Dom\ (f \circ g) = \{x\ \in Dom\ g \mid\ g(x) \in Dom\ f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid\ x+2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

La regla de correspondencia es

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4.$$

- Analizamos ahora la composición $g \circ f$.

$$Dom\ (g \circ f) = \{x\ \in Dom\ f \mid\ f(x) \in Dom\ g\ \} = \left\{\ x \in \mathbb{R} \mid\ x^2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}.$$

La regla de correspondencia es

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = x^2 + 2.$$

Por tanto,

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 4; \quad (g \circ f)(x) = x^2 + 2; \quad Dom\ (f \circ g) = Dom\ (g \circ f) = \mathbb{R}.$$

Observación:

Este ejemplo muestra que la composición de funciones no es conmutativa, es decir, en general

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x).$$

2. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x + 3$, encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución:

Determinamos los dominios de f y de g.

$$Dom\ f = [0, \infty) \qquad\qquad Dom\ g\ = \mathbb{R}$$

- Para la composición $f \circ g$ tenemos

$$Dom\ (f \circ g) = \{x \in Dom\ g \mid\ g(x) \in Dom\ f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid\ 2x+3 \in [0, \infty)\}.$$

Analizamos cuándo se cumple la condición $2x + 3 \in [0, \infty)$, es decir,

$$\begin{aligned} 2x + 3 &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

De donde
$$x \in \mathbb{R} \cap \left[-\frac{3}{2}, \infty\right) = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right).$$
Por tanto,
$$Dom\ \ (f \circ g) = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right).$$
La regla de correspondencia es
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+3) = \sqrt{2x+3}.$$

- Para la composición $g \circ f$ tenemos
$$Dom\ \ (g \circ f) = \{x \in Dom\ f \mid f(x) \in Dom\ g\} = \left\{x \in [0,\infty) \middle| \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = [0, \infty).$$
La regla de correspondencia es
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} + 3.$$

Por tanto,
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \sqrt{2x+3},\ Dom\ \ (f \circ g) = \left[-\frac{3}{2}, \infty\right); \\ (g \circ f)(x) &= 2\sqrt{x} + 3,\ Dom\ \ (g \circ f) = [0, \infty). \end{aligned}$$

3. Si $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$, encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$.
Solución:
Determinamos los dominios de f y de g.
$$Dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \qquad\qquad Dom\ g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

- La composición de $f \circ g$ es
$$Dom\,(f \circ g) = \{x \in Dom\ g \mid g(x) \in Dom\ f\} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \ \middle|\ \frac{1}{x-3} \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\right\}.$$
La condición $\dfrac{1}{x-3} \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ no se cumple cuando
$$\begin{aligned} \frac{1}{x-3} &= -2 \\ 1 &= -2x + 6 \\ \frac{-5}{-2} &= x, \end{aligned}$$
es decir, $\dfrac{1}{x-3} \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ si $x \neq \dfrac{5}{2}$.
Así,
$$Dom\ \ (\ f \circ g) = (\mathbb{R} \setminus \{3\}) \cap \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}\right) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}, 3\right\}.$$

La regla de correspondencia es

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-3}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{x-3}+2} = \frac{x-3}{2x-5}.$$

Observación:
Es conveniente obtener el dominio de la composición de manera independiente a la que nos sugiere la regla de correspondencia, puesto que si primero obtenemos la regla de correspondencia y después nos quedamos con su dominio natural, éste puede no coincidir con el dominio de la composición. Por ejemplo, el dominio natural de

$$h(x) = \frac{x-3}{2x-5}$$

es $\mathbb{R} \diagdown \left\{\frac{5}{2}\right\}$, que no es el dominio de la composición $f \circ g$ estudiada en la primera parte del ejemplo.

- La composición $g \circ f$ es

$$Dom\ (g \circ f) = \{x \in Dom\ f \mid\ f(x) \in Dom\ g\} = \left\{x \in \mathbb{R} \diagdown \{-2\}\ \middle|\ \frac{1}{x+2} \in \mathbb{R} \diagdown \{3\}\right\}.$$

La condición $\dfrac{1}{x+2} \in \mathbb{R} \diagdown \{3\}$ no se cumple cuando

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} &= 3 \\ 1 &= 3x+6 \\ -\frac{5}{3} &= x. \end{aligned}$$

Por tanto, $\dfrac{1}{x+2} \in \mathbb{R} \diagdown \{3\}$ si $x \neq -\dfrac{5}{3}$.
Así,

$$Dom\ (g \circ f) = (\mathbb{R} \diagdown \{-2\}) \cap \left(\mathbb{R} \diagdown \left\{-\frac{5}{3}\right\}\right) = \mathbb{R} \diagdown \left\{-\frac{5}{3}, -2\right\}.$$

La regla de correspondencia es

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{x+2}-3} = -\frac{x+2}{3x+5}.$$

En resumen,

$$(f \circ g)(x) = \frac{x-3}{2x-5} \qquad Dom\ (f \circ g) = \mathbb{R} \diagdown \left\{\frac{5}{2}, 3\right\}.$$

$$(g \circ f)(x) = -\frac{x+2}{3x+5} \qquad Dom\ (g \circ f) = \mathbb{R} \diagdown \left\{-\frac{5}{3}, -2\right\}.$$

4. Encontrar $f \circ f$, si $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Solución:

Para saber cuál es el dominio de f, es necesario que determinemos cuándo

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &\geq 0 \\ x^2 &\geq 4 \\ |x| &\geq 2, \end{aligned}$$

de donde

$$x \geq 2 \qquad \text{o} \qquad x \leq -2.$$

Entonces

$$Dom\ f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty).$$

Calculamos ahora el dominio de $f \circ f$.

$$\begin{aligned} Dom\ (f \circ f) &= \{x \in Dom\ f \mid f(x) \in Dom\ f\} \\ &= \left\{ x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty) \;\middle|\; \sqrt{x^2 - 4} \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty) \right\}. \end{aligned}$$

Analizamos la condición $\sqrt{x^2 - 4} \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, es decir,

$$\sqrt{x^2 - 4} \in (-\infty, -2] \qquad \text{o} \qquad \sqrt{x^2 - 4} \in [2, \infty).$$

Sólo es posible que $\sqrt{x^2 - 4} \in [2, \infty)$, ya que la raíz es siempre positiva. Es decir, debemos determinar cuándo

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 4} &\geq 2 \\ x^2 - 4 &\geq 4 \\ x^2 &\geq 8 \\ |x| &\geq \sqrt{8}. \end{aligned}$$

Así,

$$x \geq \sqrt{8} \qquad \text{o} \qquad x \leq -\sqrt{8},$$

o lo que es lo mismo, $x \in \left(-\infty, -\sqrt{8}\right] \cup \left[\sqrt{8}, \infty\right)$.

Entonces

$$Dom\ (f \circ f) = ((-\infty, -2] \cup [2, \infty)) \cap \left(\left(-\infty, -\sqrt{8}\right] \cup \left[\sqrt{8}, \infty\right)\right).$$

Por tanto,

$$Dom\ (f \circ f) = \left(-\infty, -\sqrt{8}\right] \cup \left[\sqrt{8}, \infty\right).$$

La regla de correspondencia es:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x^2 - 4}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 - 4}\right)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4 - 4} = \sqrt{x^2 - 8}.$$

La función inversa

Para la función $f(x) = \dfrac{x-9}{5}$ encontrar una función g que satisfaga

$$(f \circ g)(x) = x \qquad \text{y} \qquad (g \circ f)(x) = x.$$

Solución:
En el ejemplo introductorio de esta sección vimos que $g(y) = 5y + 9$ satisface

$$(f \circ g)(y) = y;$$

veamos ahora si la otra condición se cumple:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\overbrace{\frac{x-9}{5}}^{y}\right) = 5\left(\frac{x-9}{5}\right) + 9 = x.$$

Por tanto, se cumplen las dos igualdades.

Decimos que una función $f : A \to B$ es *invertible* si $Im\ f = B$, y la regla de correspondencia $y = f(x) \to x$ de B en A establece una función g de B en A. En este caso, $g : B \to A$ se llama la *inversa* de f.

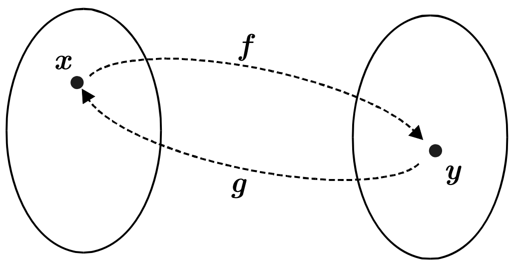


Figura 1-48

Observaciones:

- La función inversa suele denotarse como f^{-1} y no debe confundirse con $\dfrac{1}{f}$.
- Para que una función $g : B \to A$ sea la inversa de una función $f : A \to B$, debe cumplirse que
$$g(f(x)) = x \quad \text{si } x \in A \qquad \text{y} \qquad f(g(y)) = y \quad \text{si } y \in B.$$
- No toda función tiene una función inversa.
  - Veamos el siguiente esquema
    En este caso, la regla de correspondencia $f(x) \to x$ de B en A no establece una función

ya que, como podemos observar, hay un punto y en $B = Im\ f$ que, de acuerdo con dicha regla, tendría a dos puntos asociados en A, a saber, x_1 y x_2. Así, la regla $f(x) \to x$ no define una función, sino tan sólo una relación de B en A. Por tanto, en este caso f no tiene una función inversa.

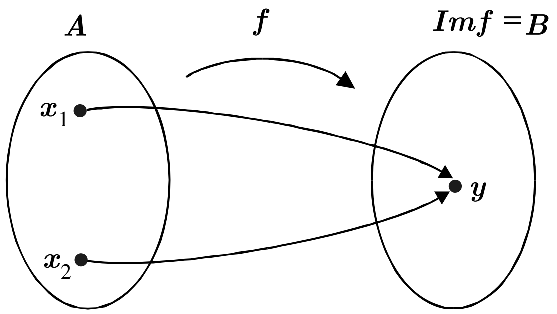


Figura 1-49

– Otra situación en la que $f : A \to B$ puede no tener una inversa de B en A es cuando la regla de asociación $f(x) \to x$ no tiene sentido para algún punto de B debido a que este punto no está en $Im\ f$, es decir, no provino de ningún punto de A.

En el siguiente diagrama se ejemplifica tal situación.

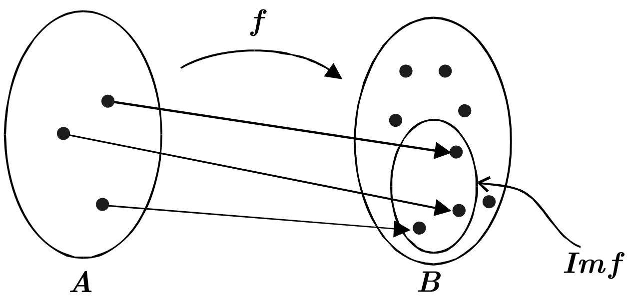


Figura 1-50

Con relación a esta segunda situación, cabe destacar que si, para una función $f : A \to B$, tenemos que $Im\ f \neq B$, pero $f : A \to Im\ f$ tiene inversa, entonces decimos que f es *invertible sobre su imagen.* Esto sucede con la función que aparece en el diagrama anterior.

Una función se llama *inyectiva* o *uno a uno* si cumple que

$$\text{si} \quad x_1 \neq x_2, \qquad \text{entonces} \qquad f(x_1) \neq f(x_2).$$

O, lo que es equivalente, si se cumple que

$$\text{si} \quad f(x_1) = f(x_2), \quad \text{entonces} \quad x_1 = x_2.$$

Para funciones reales de variable real, esto significa geométricamente que cualquier recta horizontal corta a la gráfica de la función en a lo más un punto.

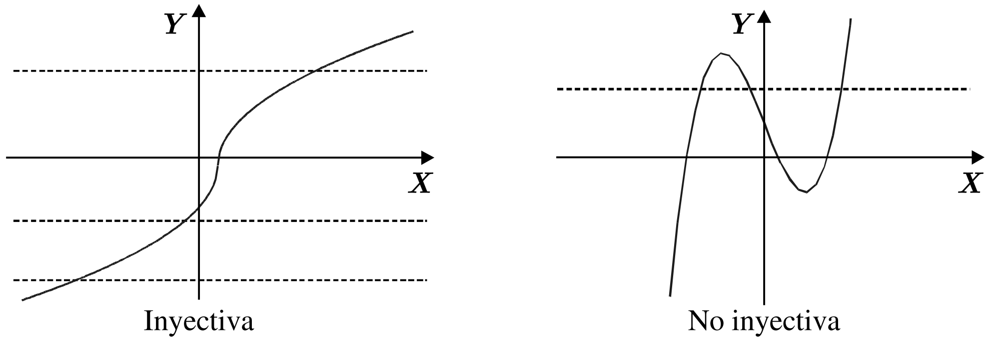


Figura 1-51

Una función $f : A \to B$ se llama *suprayectiva* si el contradominio y la imagen de la función son el mismo conjunto, es decir, si $B = Im\ f$.

Como vimos con ayuda de los esquemas que aparecen arriba, para que una función $f : A \to B$ sea invertible es necesario y suficiente que sea inyectiva y suprayectiva, lo que comúnmente se conoce como *biyectiva*. En tanto que para que una función sea invertible sobre su imagen, basta con que sea inyectiva.

Ejemplos

1. ¿Es inyectiva la función $f(x) = 6x - 8$?

Solución:

Debemos probar que

$$\text{si} \qquad f(x_1) = f(x_2), \qquad \text{entonces} \qquad x_1 = x_2.$$

Y esto se cumple en este caso, como puede verse a partir de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 6x_1 - 8 &= 6x_2 - 8 \\ 6x_1 &= 6x_2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Por tanto, la función sí es inyectiva.

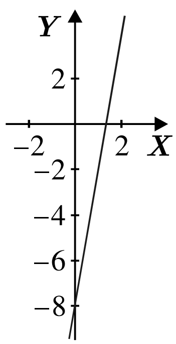


Figura 1-52

2. Determinar si la gráfica siguiente corresponde a una función inyectiva.

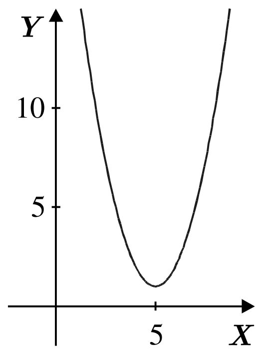


Figura 1-53

Solución:

Si trazamos la recta $y = 10$, observamos que corta a la gráfica en dos puntos:

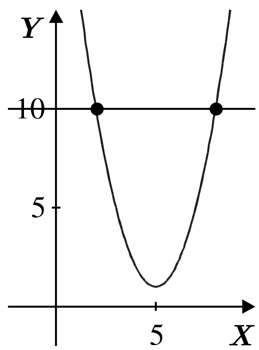


Figura 1-54

La gráfica no corresponde a una función inyectiva. En resumen:

Dos funciones f y g son una inversa de la otra si:

- $Dom\ f = Im\ g$
- $Dom\ g = Im\ f$
- $(f \circ g)(y) = y$, si $y \in Dom\ g$; y $(g \circ f)(x) = x$, si $x \in Dom\ f$.

Ejemplos

1. Encontrar la función inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = -3x - 8$.

Solución:

Vemos que la función es inyectiva a partir de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ -3x_1 - 8 &= -3x_2 - 8 \\ -3x_1 &= -3x_2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Para ver que es suprayectiva debemos mostrar que, para cada $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$y = f(x).$$

O, lo que es lo mismo, encontrar una solución x para la siguiente ecuación

$$y = -3x - 8.$$

Esa solución la obtenemos al despejar x:

$$x = \frac{y+8}{-3} = -\frac{y+8}{3}.$$

Más aún, esta última ecuación da la regla de correspondencia de la función inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(y) = -\frac{y+8}{3}.$$

Verificamos ahora que g es la inversa de f:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(-3x-8) = -\frac{(-3x-8)+8}{3} = x. \\ (f \circ g)(y) &= f(g(y)) = f\left(-\frac{y+8}{3}\right) = -3\left(-\frac{y+8}{3}\right) - 8 = y. \end{aligned}$$

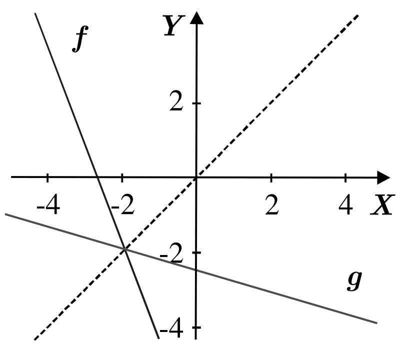


Figura 1-55

Observamos que las gráficas de f y g son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

2. Encontrar la función inversa de $f(x) = \sqrt{x+5}$.

Solución:

Cuando no se establece el dominio, sobreentendemos que consideramos a la función definida en su dominio natural. Y, si no se señala el contradominio, suponemos que éste es la imagen de la función. Así, tratamos con la invertibilidad de la función sobre su imagen.

Primero, encontramos el dominio de f:

$$\begin{aligned} x+5 &\geq 0 \\ x &\geq -5 \\ x &\in [-5,\infty)\,. \end{aligned}$$

Si $x \in [-5,\infty)$, entonces $f(x) \geq 0$. Más aún, la imagen de f es $[0,\infty)$.

La función f es inyectiva, ya que si $x_1, x_2 \in [-5,\infty)$, y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1+5} &= \sqrt{x_2+5} \\ x_1+5 &= x_2+5 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Por tanto, f es invertible sobre su imagen.

Encontremos ahora la inversa de la función

$$y = \sqrt{x+5}.$$

Despejando x tenemos

$$y^2 = x+5,$$

de donde

$$g(y) = y^2 - 5.$$

Aunque el dominio natural de g es $\mathbb{R}$, nos restringimos al intervalo $[0,\infty)$, que es la imagen de f, pues g nos interesa como inversa de f.

Verificamos ahora que $g = f^{-1}$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(\sqrt{x+5}\right) = \left(\sqrt{x+5}\right)^2 - 5 = x. \\ (f \circ g)(y) &= f(g(y)) = f\left(y^2-5\right) = \sqrt{(y^2-5)+5} = |y| = y. \end{aligned}$$

Observación:

En general, la gráfica de la función inversa f^{-1} de una función f se puede obtener reflejando la gráfica de f con respecto a la recta $y = x$, ya que si $(x, f(x))$ es un punto en la gráfica de f, entonces $x = f^{-1}(f(x))$; es decir,

$$\left(\overbrace{f(x)}^{y}, \overbrace{x}^{f^{-1}(y)}\right)$$

es un punto de la gráfica de la inversa. Para verificar que los puntos $(x, f(x))$ y $(f(x), x)$ son simétricos uno del otro con respecto a la recta $y = x$, en la figura siguiente observamos que la línea que los une es una diagonal del cuadrado que ahí aparece, y la otra diagonal está sobre la recta $y = x$. Como las diagonales de un cuadrado se cortan perpendicularmente y en el punto medio, los puntos son simétricos.

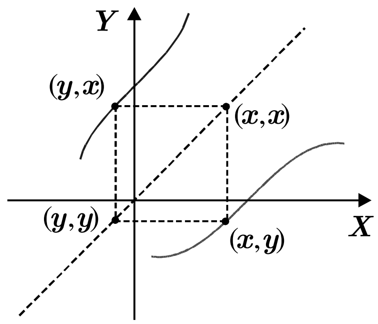


Figura 1-56

Ejercicios

En cada caso, encuentra $f \circ g$ y $g \circ f$ y determina el dominio de cada una de las funciones

1. $f(x) = 5x + 4$, $g(x) = -6x + 1$.

2. $f(x) = 2x - 12$, $g(x) = 3x + 20$.

3. $f(x) = x^2 + 7$, $g(x) = 4x^2 + 14x$.

4. $f(x) = \sqrt{x - 7}$, $g(x) = 2x + 12$.

5. $f(x) = \dfrac{x}{x - 8}$, $g(x) = \dfrac{x + 2}{x}$.

6. $f(x) = \dfrac{x + 5}{x}$, $g(x) = x^2 - 1$.

7. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x + 9}$.

8. $f(x) = \dfrac{x + 9}{x^2 - 4}$, $g(x) = 6x - 5$.

9. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x - 1}}$, $g(x) = 5x^2 - 3x$.

10. $f(x) = \dfrac{x + 10}{x - 5}$, $g(x) = \dfrac{4x - 1}{x + 9}$.

11. $f(x) = \dfrac{x + 8}{\sqrt{x + 14}}$, $g(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{x - 16}}$.

12. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 12}$, $g(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^2 - 16x + 60}$.

13. $f(x) = \begin{cases} x - 11 & \text{si } x \in [-4, 2] \\ x + 6 & \text{si } x \in (2, 8] \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x + 8 & \text{si } x \in [-1, 5) \\ x - 15 & \text{si } x \in [5, 10] \end{cases}$.

14. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \in (-6, -1) \\ 18 & \text{si } x \in (3, 21) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \in [-3, 0] \\ x - 7 & \text{si } x \in (0, 9) \end{cases}$.

15. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [1, 12] \\ x^2 & \text{si } x \in (-10, 1) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 6x - 9 & \text{si } x \in (-2, 2) \\ x^2 + 1 & \text{si } x \in [2, 15] \end{cases}$.

En cada caso, encuentra la función inversa de la función dada.

16. $f(x) = 5x - 2$.

17. $f(x) = 6x + 7$.

18. $f(x) = \frac{3}{2}x - 6$.

19. $f(x) = -x + \frac{7}{5}$.

20. $f(x) = \sqrt{x - 8}$.

21. $f(x) = \sqrt{x + 4}$.

Capítulo 2

La trigonometría

La trigonometría ha sido una herramienta fundamental desde tiempos remotos para realizar medidas indirectas. El estudio de la trigonometría es importante por sus aplicaciones, que van desde la ingeniería, la navegación y las ciencias, en general, hasta artes como la música y la arquitectura. Parte central de la trigonometría es la resolución de triángulos; es decir, la determinación de las medidas de sus elementos constitutivos, lados y ángulos, a partir del conocimiento de algunos de ellos o de propiedades que tiene el triángulo. Lo anterior es hecho aquí para triángulos en general, y no sólo para los triángulos rectángulos; para este y otros propósitos se presentan las relaciones y funciones trigonométricas, las identidades trigonométricas fundamentales, y las leyes de los senos y la de los cosenos. En la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral, este conocimiento será muy provechoso para el manejo de las funciones trigonométricas y la resolución de los múltiples problemas en que éstas aparecen. También se resuelven problemas sobre la posibilidad de la construcción de triángulos con características predeterminadas y, en su caso, la unicidad de la solución. El capítulo termina con las gráficas de las funciones trigonométricas y de sus inversas.

Los ángulos y su medición

Tomemos dos semirrectas OA y OB; a su punto común, O, lo llamaremos *vértice*. Si mantenemos fija a la semirrecta OA y hacemos girar OB desde la posición inicial OA hasta la posición final OB, diremos que generó un *ángulo* $\angle AOB$.

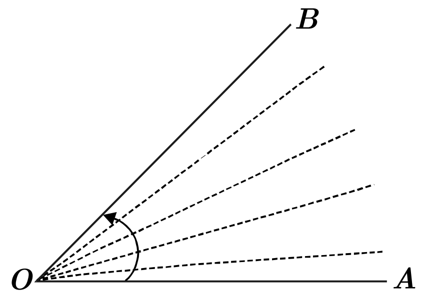


Figura 2-1

La semirrecta OA se conoce como *semirrecta inicial* del ángulo, y OB es la *semirrecta final* o *generatriz.*

Para medir un ángulo, se debe contar primero con una unidad de medida. Parece natural considerar así al ángulo recto, que es el formado por dos rectas perpendiculares; sin embargo, para fines prácticos, esta unidad es muy grande, por lo que se ha recurrido a considerar unidades más pequeñas.

Podemos dividir al ángulo recto en 90 partes iguales, llamadas *grados*. Cada grado se divide a su vez en 60 partes iguales llamadas minutos, y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos; ésta es la medida angular en el sistema *sexagesimal.*

Cada ángulo se determina estableciendo cuántos grados, minutos y segundos mide. La notación que es común usar para grados, minutos y segundos es $^\circ$, $'$, $''$ respectivamente.

Ejemplos

1. Un ángulo recto mide 90 grados, que conforme a la notación anterior se escribe 90°.
2. Cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°.
3. Para indicar la medida 35 grados, 21 minutos y 14 segundos, escribimos $35^\circ\ 21'\ 14''$.
4. Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide $25^\circ\ 25'\ 25''$, ¿cuánto mide el otro ángulo agudo?

   Solución:

   Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son *complementarios*, es decir, la suma de sus medidas es 90°, entonces calculamos

   $$90^\circ - (25^\circ\ 25'\ 25'')\,.$$

   Para poder efectuar la resta escribimos 90° como $89^\circ\ 59'\ 60''$; entonces

   $$90^\circ - (25^\circ\ 25'\ 25'') = (89^\circ\ 59'\ 60'') - (25^\circ\ 25'\ 25'') = 64^\circ\ 34'\ 35''.$$

El otro ángulo agudo mide $64^\circ\ 34'\ 35''$.

Una variante de la medición de los ángulos en grados es expresar las fracciones de grado en notación decimal, es decir, dividirlos en décimos, centésimos, milésimos, etcétera.

Para convertir de la notación de minutos y segundos a la notación decimal, utilizamos la regla de tres

$$\begin{aligned} 60 \text{ minutos} &\ \rightarrow\ 1 \text{ grado} \\ m \text{ minutos} &\ \rightarrow\ g \text{ grados} \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $1' = \dfrac{1^\circ}{60} \approx 0.01666\,7$, y la regla de tres

$$\begin{aligned} 3600 \text{ segundos} &\ \rightarrow\ 1 \text{ grado} \\ s \text{ segundos} &\ \rightarrow\ g \text{ grados} \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $1'' = \dfrac{1^\circ}{3600} \approx 0.000278$.

Ejemplos

1. Escribir $35^\circ\ 21'\ 14''$ en expresión decimal.

Solución:

Nos quedamos con los 35° y transformamos a decimales los minutos y los segundos.

$$21' = \frac{21}{60} \approx 0.35^\circ \qquad \text{y} \qquad 14'' = \frac{14}{3600} \approx 0.0039^\circ,$$

entonces

$$35^\circ\ 21'\ 14'' \approx 35.3539^\circ$$

2. Escribir 32.5892° en grados, minutos y segundos.

Solución:

Nos quedamos con la parte entera y convertimos los 0.5892 grados a minutos:

$$0.5892 \text{ grados } = 0.5892 \times 60 = 35.352 \text{ minutos;}$$

nos quedamos con la parte entera y convertimos los 0.352 minutos a segundos:

$$0.352 \text{ minutos } = 0.352 \times 60 = 21.12 \text{ segundos;}$$

así que

$$32.5892^\circ \approx 32^\circ\ 35'\ 21''.$$

Este tipo de notación ha cobrado importancia debido a la existencia de las calculadoras de bolsillo, ya que la mayoría de ellas expresan los grados en forma decimal y no en grados, minutos y segundos.

La medida circular o en radianes

Existe otra forma de medir los ángulos que es más conveniente en ciertas áreas de las matemáticas. Por ejemplo, en cálculo diferencial e integral. Dibujamos un círculo con centro en el origen de un sistema de coordenadas y radio r. Consideremos un ángulo central AOB, es decir, un ángulo cuyo vértice se encuentre en el origen. La medida del ángulo AOB en radianes es el cociente de la longitud del arco que subtiende entre el radio del círculo,

$$m_r\sphericalangle AOB = \text{medida en radianes del ángulo } AOB = \frac{x}{r}.$$

Cuando la longitud del arco es igual al radio del círculo, obtenemos la unidad de medida, a la que llamamos *radián*.

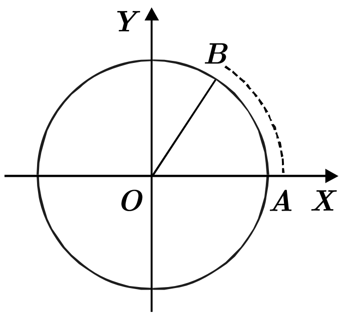


Figura 2-2

Pudiera haber la duda de si esta unidad de medida depende del radio del círculo; veremos que no es así.

A un ángulo que mida 360° le corresponde un arco que es el perímetro del círculo ($2\pi r$), de modo que a un ángulo AOB que mide θ grados le corresponde un arco que mide x unidades y se cumple que

$$\frac{360}{2\pi r} = \frac{\theta}{x},$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{\theta\,(2\pi r)}{360} \qquad (2.1)\\ \frac{x}{r} &= \frac{\pi\theta}{180}; \end{aligned}$$

pero $\frac{x}{r}$ es, por definición, la medida en radianes del $\angle AOB$, la cual no cambia al variar de radio, pues de acuerdo con la igualdad anterior, ese cociente coincide con la expresión $\frac{\pi\theta}{180}$ que es independiente del radio.

Observación:

En un círculo de radio 1, la longitud x del arco que subtiende un ángulo central es la medida en radianes del ángulo ya que $\frac{x}{1} = x$.

Si consideramos dos ángulos centrales AOB y COD de un círculo y a sus medidas en radianes, tenemos

$$m_r\angle AOB = \frac{\text{arco } AB}{r} \qquad \text{y} \qquad m_r\angle COD = \frac{\text{arco } CD}{r}$$

donde r es el radio del círculo, y a partir de lo cual

$$\frac{m_r\angle AOB}{\text{arco } AB} = \frac{1}{r} \qquad \text{y} \qquad \frac{m_r\angle COD}{\text{arco } CD} = \frac{1}{r}.$$

Así, las medidas en radianes de los ángulos centrales son proporcionales a los arcos que subtienden, es decir,

$$\frac{m_r\angle AOB}{\text{arco } AB} = \frac{m_r\angle COD}{\text{arco } CD}.$$

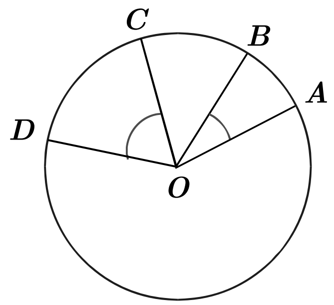


Figura 2-3

La expresión (2.1) también nos dice cómo pasar de medidas en radianes a medidas en grados y recíprocamente. Si

$$\frac{x}{r} = 1,$$

el ángulo mide 1 radián y por (2.1) su medida θ en grados es

$$\frac{180}{\pi}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{180}{\pi}.$$

En resumen,

$$1 \text{ radián } = \frac{180}{\pi} \text{ grados} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ grado } = \frac{\pi}{180} \text{ radianes.}$$

Ejemplos

1. Expresar en forma decimal el valor en grados de un radián.

Solución:

Como $\pi \approx 3.1416$, tenemos que

$$\frac{180}{\pi} = \frac{180}{3.1416} = 57.29.$$

Entonces un radián equivale, aproximadamente, a 57.29 grados.

2. Encontrar en radianes el valor correspondiente a 75 grados.

Solución:

$$\frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}.$$

En radianes, la medida de 75 grados es $\dfrac{5\pi}{12}$.

3. Encontrar el valor en grados de $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Solución:

$$\frac{\pi}{3}\frac{180}{\pi} = 60.$$

$\frac{\pi}{3}$ radianes equivalen a 60 grados.

4. Encontrar el valor en radianes de $148^\circ\ 36'\ 27''$.

Solución:

Primero escribimos $148^\circ\ 36'\ 27''$ en forma decimal.

$$36' = \frac{36}{60} = 0.6^\circ \qquad \text{y} \qquad 27'' = \frac{27}{3600} = 0.0075^\circ.$$

Entonces

$$148^\circ\ 36'\ 27'' = 148.6075^\circ,$$

de donde

$$\frac{148.6075\pi}{180} \approx 2.59.$$

$148^\circ\ 36'\ 27''$ equivalen, aproximadamente, a 2. 59 radianes.

En la tabla siguiente están las medidas, en grados y radianes, de algunos de los ángulos más comúnmente usados.

Grados	30°	45°	60°	90°	135°	180°	270°	360°
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Ejercicios

Escribe en grados, minutos y segundos cada expresión decimal.

1. 5.4267°.

2. 28.91034°.

3. 106.56°.

4. 239.8051°.

5. 327.1480°.

6. 175.60123°.

Escribe la expresión decimal de los ángulos siguientes.

7. $56^\circ\ 29'\ 8''$.

8. $98^\circ\ 54'\ 23''$.

9. $204^\circ\ 17'\ 32''$.

10. $283^\circ\ 45'\ 16''$.

11. $73^\circ\ 13'\ 57''$.

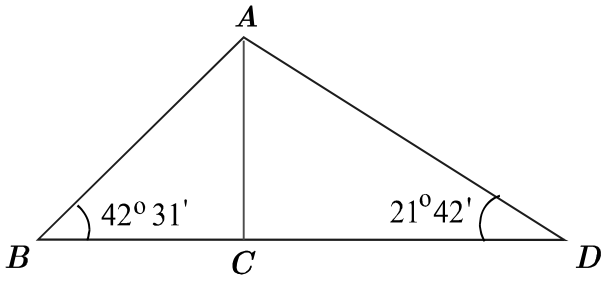
12. $152^\circ\ 36'\ 59''$.

13. ¿Cuántos minutos hay en $35^\circ\ 10'$?

14. ¿Cuántos segundos hay en $\frac{5}{6}\pi$ radianes?

15. Expresa en grados, minutos y segundos un millón de segundos.

16. Dos triángulos rectángulos que tienen un cateto común forman el triángulo de la siguiente figura. Si en B el ángulo mide $42^\circ\ 31'$ y el ángulo D mide $21^\circ\ 42'$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle DAB$?



17. ¿Cuántos segundos mide un radián?

Expresa en grados las siguientes medidas en radianes.

18. $\frac{\pi}{2}$. **19.** $\frac{\pi}{3}$. **20.** $\frac{\pi}{4}$. **21.** $\frac{\pi}{5}$. **22.** $\frac{\pi}{6}$. **23.** $\frac{\pi}{7}$.

Expresa en radianes, en términos de π, lo siguiente.

24. 45° **25.** 15° **26.** 120° **27.** 36° **28.** 75° **29.** 90°

30. Encuentra la medida en grados de cada ángulo interior de

- **a.** un pentágono regular.
- **b.** un octágono regular.
- **c.** un decágono regular.
- **d.** un hexágono regular.
- **e.** un heptágono regular.
- **f.** un dodecágono regular.

Relaciones básicas de la trigonometría

¿Cuántos triángulos rectángulos no congruentes pueden construirse si los catetos deben medir 5 y 12 metros, respectivamente?

Solución:

Recordemos que dos triángulos son congruentes si se puede establecer una correspondencia entre sus vértices de manera que los lados correspondientes midan lo mismo.

Para contestar la pregunta usamos el teorema de Pitágoras, el cual garantiza que la hipotenusa es igual a

$$\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13.$$

Conocidos los tres lados, de longitudes 5, 12 y 13, hay una sola manera de construir el triángulo, en el sentido de que cualquier otra construcción nos dará un triángulo congruente con éste.

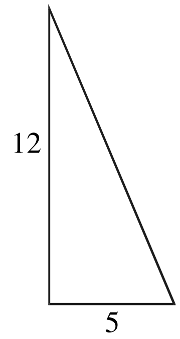


Figura 2-4

Puede construirse un único triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 12 metros.

Observación:

Si quitamos la condición de que el triángulo sea rectángulo, la solución no es única, esto es, hay una infinidad de triángulos, no congruentes entre sí, tales que dos de sus lados miden 5 y 12 metros respectivamente. Lo siguiente nos da 3 triángulos no congruentes, con esas medidas.

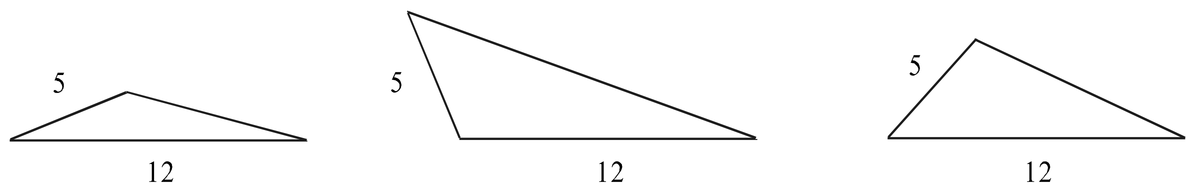


Figura 2-5

La trigonometría, como su nombre lo indica, surgió de la necesidad de medir triángulos, lo cual puede ser posible utilizando las relaciones que guardan sus lados, ángulos, áreas, así como otros elementos geométricos. En nuestros días, el estudio de la trigonometría se extiende más allá de tales alcances y se torna importante por sus aplicaciones, que van desde la ingeniería, la navegación y las ciencias, en general, hasta artes como la música y la arquitectura.

Algunos de los problemas que se plantearon en el origen de la trigonometría son del estilo siguiente.

¿Qué posibilidad hay de construir un triángulo con ciertas características?, o bien, conocidos algunos elementos del triángulo, ¿cómo determinar otros de sus elementos?

Ejemplos

1. ¿Puede construirse un triángulo rectángulo de tal manera que uno de sus ángulos mida $25°$ y uno de sus catetos mida 4 metros?

Solución:

Puesto que el triángulo es rectángulo, sólo falta conocer el otro ángulo agudo; pero éste es complementario al de $25°$, es decir, el tercer ángulo mide

$$90° - 25° = 65°.$$

Los ángulos del triángulo miden

$$90^\circ,\ 25^\circ \text{ y } 65^\circ.$$

Con estos datos podemos encontrar dos triángulos rectángulos no congruentes entre sí que tienen un cateto igual a 4 metros y un ángulo de 25°. La solución al problema no es única.

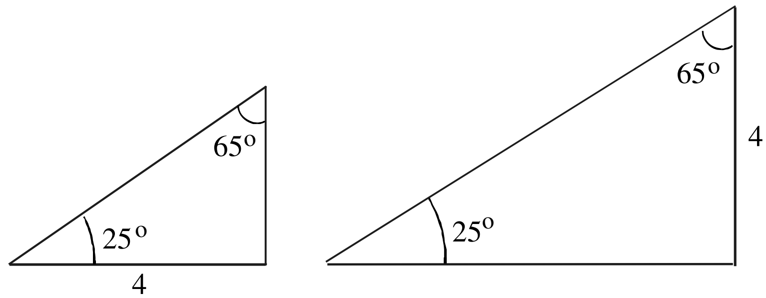


Figura 2-6

2. Los catetos de un triángulo rectángulo miden $\sqrt{3}$ y 1, ¿cuánto miden los ángulos del triángulo?

Solución:

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide

$$\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

Así, los lados del triángulo miden $\sqrt{3}$, 1, 2.

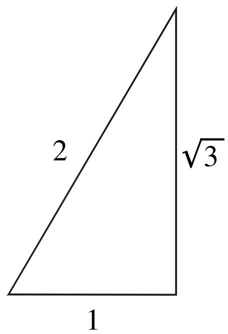


Figura 2-7

Para encontrar los ángulos, construimos otro triángulo reflejando el que ya tenemos y unimos los dos:

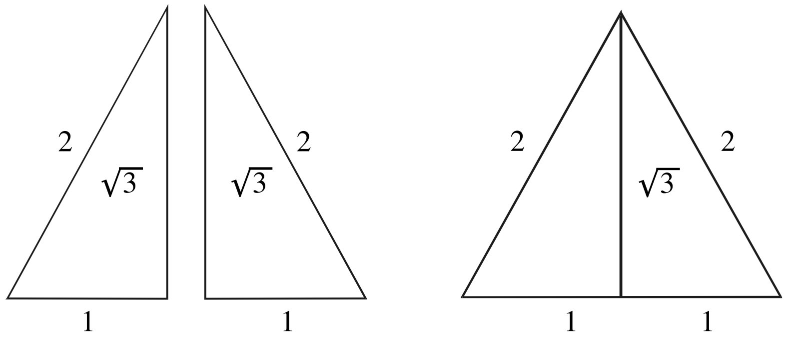


Figura 2-8

entonces el triángulo es la mitad de un triángulo equilátero de lado 2. Como cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero mide $60°$, entonces los ángulos del triángulo rectángulo miden $30°$, $60°$ y $90°$.

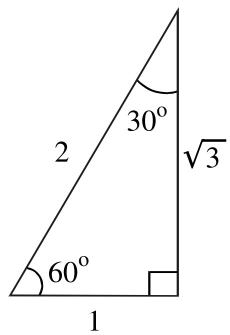


Figura 2-9

3. En un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden $30°$ y $60°$, encontrar la longitud del cateto más largo en términos de la hipotenusa.

Solución:

Llamamos A, B y C a los vértices del triángulo, ℓ al cateto más largo y x a la hipotenusa. Reflejamos, como en el ejemplo anterior, para obtener el triángulo de la figura.

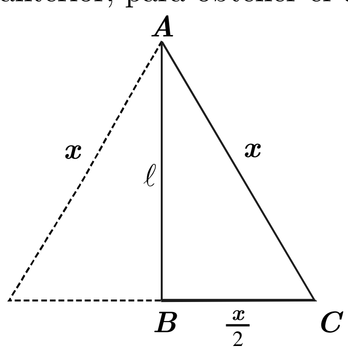


Figura 2-10

Puesto que el triángulo es equilátero, entonces la longitud del lado BC mide $\frac{x}{2}$.

Usando el teorema de Pitágoras, tenemos

$$x^2 = \ell^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

luego despejamos ℓ

$$\ell = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Así, la longitud del cateto más largo es $\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Es decir, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ por la longitud de la hipotenusa.

No siempre hay argumentos geométricos tan sencillos, como en los ejemplos anteriores, que nos permitan encontrar los ángulos de un triángulo cuando se conocen los lados. Las funciones trigonométricas, que definiremos en seguida, son la base para resolver en general problemas de este tipo.

Ejercicios

1. En un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°, encuentra el cateto mayor en términos del cateto menor.

2. Encuentra la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos ángulos agudos miden 45°, en términos de uno de los catetos.

Funciones trigonométricas para ángulos agudos

Un avión de control remoto se eleva formando un ángulo de 15° con respecto al piso. Si el avión se desploma a 35 metros del punto de partida, ¿cuál fue la altura máxima que alcanzó? ¿Qué distancia recorrió en ascenso?

Solución:

Con los datos dados, dibujamos el esquema que aparece en la figura siguiente.

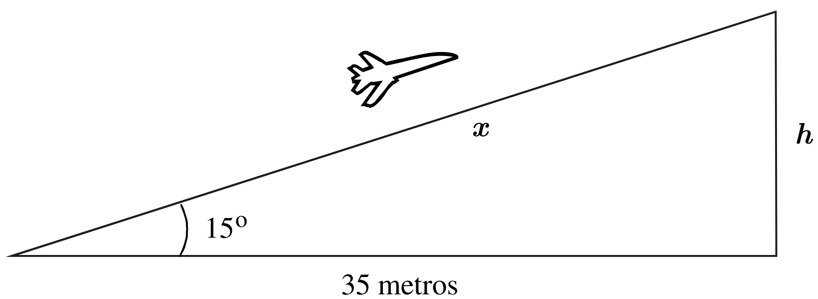


Figura 2-11

Si llamamos x a la hipotenusa del triángulo, tenemos que

$$\cos 15^\circ = \frac{35}{x};$$

puesto que $\cos 15^\circ \approx 0.9659$, despejando x tenemos

$$x = \frac{35}{0.9659} \approx 36.23.$$

La hipotenusa mide, aproximadamente, 36.23 metros.

Llamamos h a la altura que alcanzó el avión; entonces

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{h}{36.23},$$

como $\operatorname{sen} 15^\circ \approx 0.2588$, entonces

$$h = (0.2588)\,(36.23) \approx 9.37$$

El avión recorrió en ascenso, aproximadamente, 36.23 metros, y alcanzó una altura de 9.37 metros.

En lo que sigue usaremos frecuentemente a los ángulos, sus medidas, en grados o radianes, y las razones trigonométricas. Para evitar introducir más notaciones, convendremos en que si θ es el nombre del ángulo, entonces expresiones tales como $90^\circ - \theta$ y $\theta + \frac{\pi}{2}$ significan: 90° menos la **medida en grados** de θ y la **medida en radianes** de θ más $\frac{\pi}{2}$, respectivamente. En general, expresiones como $\theta + y^\circ$ y $\theta - x$, donde y y x son números, significarán la medida en grados de θ más y grados y la medida en radianes de θ menos x radianes. En tanto que si un ángulo A mide θ grados y x radianes, entonces podremos escribir, indistintamente, $\cos A$, $\cos \theta^\circ$ o $\cos x$, y lo mismo haremos con el resto de las razones trigonométricas.

Si A y B son dos ángulos, entonces las expresiones $A + B$, $A - B$, $\dfrac{A}{2}$ y $-A$ significarán los ángulos cuyas medidas son: la suma de las medidas de A y B; la medida de A menos la de B; la mitad de la medida de A, y menos la medida de A, respectivamente. En todos los casos esas medidas pueden estar dadas en grados o radianes, a condición de que se use la misma unidad para todos los ángulos considerados.

Por último, cuando escribamos, por ejemplo, $A = 10^\circ$ y $B = \frac{\pi}{3}$ se entenderá que A mide 10° y B mide $\frac{\pi}{3}$ radianes; en el primer caso diremos que A es de 10° o que vale 10°; en el segundo, se dirá que B es de $\frac{\pi}{3}$ o vale $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Como sabemos, en un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos*, y el otro lado se llama *hipotenusa*. Si B es uno de los ángulos agudos del triángulo, llamamos *cateto adyacente* a B al que es lado de B, y al otro lo llamamos *cateto opuesto*.

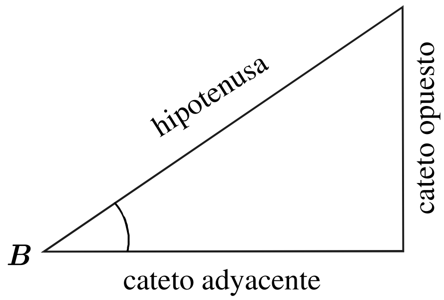


Figura 2-12

En un triángulo rectángulo ABC, es usual llamar C al ángulo recto, A y B a los ángulos agudos, y denotar con las minúsculas correspondientes los lados opuestos a dichos ángulos.

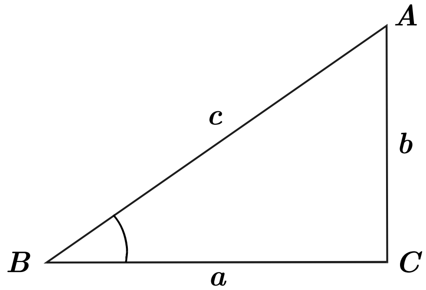


Figura 2-13

Utilizando las razones que existen entre los lados del triángulo, podemos definir el *seno*, el *coseno* y la *tangente* del ángulo B de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} B &= \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ \cos B &= \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \tan B &= \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \end{aligned}} \tag{2.2}$$

Observaciones:

1. Como la hipotenusa es el lado más largo, entonces tanto el seno como el coseno de un ángulo agudo son menores que 1; más aún

$$0 < \operatorname{sen} B < 1 \qquad \text{y} \qquad 0 < \cos B < 1.$$

2. En la figura (2-12), el cateto adyacente al ángulo B es opuesto al ángulo A, y el que es opuesto al ángulo B es adyacente al ángulo A. Así que

$$\operatorname{sen} A = \cos B \quad y \quad \cos A = \operatorname{sen} B,$$

además los ángulos A y B son complementarios, es decir, $A = 90° - B$. Podemos escribir las fórmulas anteriores como

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{sen}(90° - B) = \cos B \\ \cos(90° - B) = \operatorname{sen} B. \end{array}}$$

Ejemplos

1. Encontrar los valores del seno, del coseno y de la tangente para los ángulos agudos del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 5.

Solución:

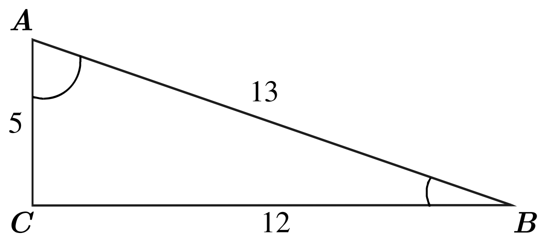


Figura 2-14

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide

$$\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Utilizando las fórmulas (2.2), tenemos

$$\operatorname{sen} A = \frac{12}{13}, \quad \cos A = \frac{5}{13}, \quad \tan A = \frac{12}{5}, \quad \operatorname{sen} B = \frac{5}{13}, \quad \cos B = \frac{12}{13}, \quad \tan B = \frac{5}{12}.$$

2. Encontrar el ángulo A si sabemos que $\operatorname{sen} A = \frac{12}{13}$ y $\cos A = \frac{5}{13}$.

Solución:

Si estamos interesados en encontrar explícitamente los valores de los ángulos, ¿qué camino debemos seguir?

En la práctica, básicamente hay dos caminos: utilizar una tabla de funciones trigonométricas que, por lo general, tiene instrucciones para su empleo, o ayudarse mediante una calculadora *científica* que incluya funciones trigonométricas y sus inversas.

En la calculadora científica tecleamos

$$\begin{array}{c} 12 \ \div \ 13 \ = \ \text{inv} \ \ \text{sen} \ = \\ 5 \ \div \ 13 \ = \ \text{inv} \ \ \cos \ = \end{array}$$

y, en ambos casos se obtiene la misma respuesta: 67.38.

Por tanto, cuando trabajamos con ángulos agudos, basta conocer el seno o el coseno de ellos para poder determinar cuánto miden.

El ángulo A mide, aproximadamente, 67.38°.

Observación:. Algunas calculadoras científicas pueden dar los ángulos en grados o en radianes. Asegúrate de que los esté dando en grados; para ello oprime

0 inv cos

y si la respuesta es 90, los está dando en grados, si la respuesta es 1.57, los está dando en radianes y debes cambiar la selección de las medidas usadas para medir los ángulos.

Solución de triángulos rectángulos

Una de las aplicaciones de la trigonometría es encontrar todos los elementos de un triángulo a partir de algunos de éstos. Aquí veremos el caso particular en que el triángulo es rectángulo. Al final del capítulo veremos el caso general.

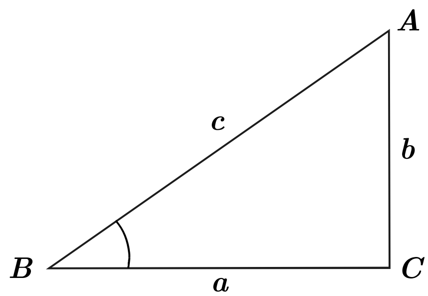


Figura 2-15

Las tres herramientas que utilizamos son:

1. **Teorema de Pitágoras**: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

   En la figura 2-14
   $$c^2 = a^2 + b^2,$$
   así que si en un triángulo rectángulo conocemos dos lados cualesquiera, con la fórmula anterior podemos encontrar el tercer lado.

2. **Teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo**: En cualquier triángulo, la suma de sus ángulos interiores es 180°. En la figura 2-14 el ángulo C mide 90°, entonces $A + B = 90°$. Así que si en un triángulo rectángulo conocemos uno de los ángulos agudos, entonces conoceremos el otro, pues será su complemento.

3. **Razones trigonométricas**:

   LL Si conocemos dos lados del triángulo rectángulo entonces, usando el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas (2.2), podemos encontrar el seno o el coseno de un ángulo, por ejemplo, $\operatorname{sen} B$ o $\cos B$ y después, con la calculadora, encontramos B utilizando INV SEN o INV COS. El ángulo A vale $90° - B$.

LA Si conocemos uno de los lados y uno de los ángulos agudos, por ejemplo B, podemos calcular el seno, el coseno y la tangente de B. Usamos la razón trigonométrica (2.2) que contenga uno de los lados conocidos y podemos encontrar el otro lado. Finalmente, usamos el teorema de Pitágoras y el teorema sobre la suma de ángulos de un triángulo para encontrar los elementos restantes.

Ejemplos

1. Encontrar los elementos restantes del triángulo con vértices A, B y C, si sabemos que $C = 90°$, $a = 15$, $c = 45$.

Solución:

Como el triángulo es rectángulo, el cateto b lo encontramos usando el teorema de Pitágoras.

$$b^2 = c^2 - a^2 = 45^2 - 15^2 = 15^2\left(3^2 - 1\right) = 15^2\,(8)\,,$$

así que $b = 15\sqrt{8} \approx 42.42$.

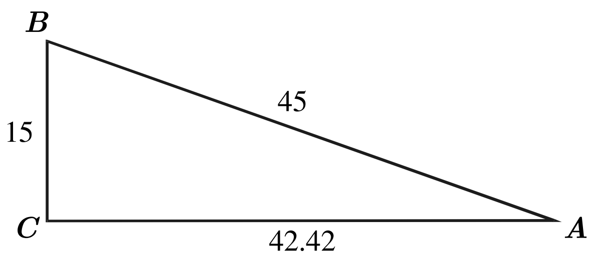


Figura 2-16

Como

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3},$$

con la calculadora, usando INV SEN, obtenemos que

$$A = 19.47°.$$

El ángulo B se obtiene restando A de $90°$:

$$B = 90° - 19.47° = 70.53°.$$

2. Encontrar los catetos del triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 12 y uno de sus ángulos agudos mide $12°$.

Solución:

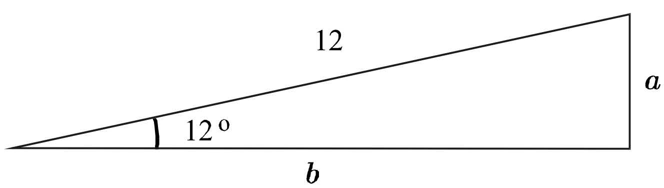


Figura 2-17

Como

$$\operatorname{sen} 12^\circ = \frac{a}{12} \qquad \text{y} \qquad \cos 12^\circ = \frac{b}{12},$$

podemos despejar a y b, obteniendo

$$a = 12 \operatorname{sen} 12^\circ \qquad \text{y} \qquad b = 12 \cos 12^\circ;$$

con ayuda de la calculadora obtenemos

$$\operatorname{sen} 12^\circ \approx 0.2079 \qquad \text{y} \qquad \cos 12^\circ \approx 0.9781,$$

por lo que

$$a \approx 2.49 \qquad \text{y} \qquad b \approx 11.73.$$

3. Una señora con estatura de 1.6 metros proyecta una sombra del doble de su estatura. ¿Cuánto mide el ángulo que forman los rayos solares con el suelo?

Solución:

Llamamos A al ángulo buscado. El largo de la sombra es de 3.2 metros.

Consideremos un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1.6 y 3.2 metros, como en la figura 2-18.

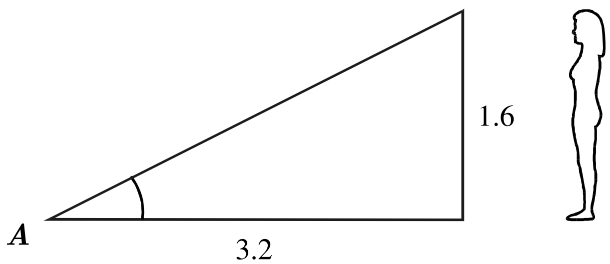


Figura 2-18

Entonces, para determinar el ángulo que forman los rayos solares con el suelo, debemos calcular el ángulo A del triángulo. Sabemos que

$$\tan A = \frac{1.6}{3.2} = 0.5.$$

Usando la calculadora, tenemos

$$A \approx 26.56^\circ.$$

El ángulo buscado es de, aproximadamente, 26.56°.

4. Una montaña tiene una altura de 3214 metros. Junto a su base se establece una reserva ecológica. ¿Cuál es el ancho de la reserva si los ángulos tomados desde los extremos de la reserva y hasta la parte más alta de la montaña miden 40° y 55°?

Solución:

Con los datos del problema construimos la siguiente figura.

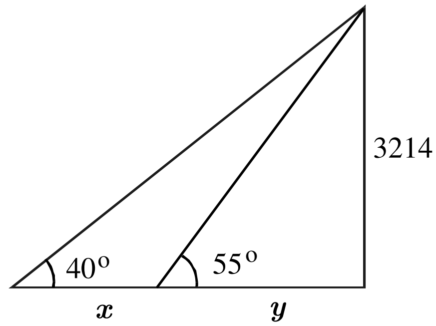


Figura 2-19

Utilizando los dos triángulos rectángulos de la figura, planteamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \tan 55^\circ &= \frac{3214}{y} \\ \tan 40^\circ &= \frac{3214}{x+y}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Despejando y de la primera ecuación de (2.3), tenemos que

$$y = \frac{3214}{\tan 55^\circ} = \frac{3214}{1.4281} = 2250.54.$$

Sustituimos este valor en la segunda ecuación de (2.3) y despejamos x:

$$\begin{aligned} \tan 40^\circ &= \frac{3214}{x + 2250.54} \\ x + 2250.54 &= \frac{3214}{\tan 40^\circ} \\ x &= \frac{3214}{0.8390} - 2250.54 = 1580.21. \end{aligned}$$

El ancho de la reserva ecológica es de 1580.21 metros.

5. Una antena está sujeta desde su punta por un tirante anclado al piso a una distancia de 20 m. El ángulo formado por el tirante con el piso es de 70°. ¿Qué longitud tiene el tirante? ¿Qué altura tiene la antena?

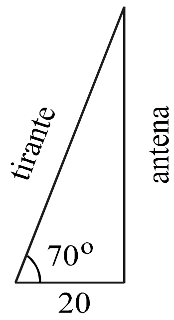


Figura 2-20

Solución:

En la figura vemos que el tirante es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 70° y cuyo cateto adyacente mide 20 metros. Usando el coseno de 70° obtenemos

$$\cos 70^\circ = \frac{20}{\ell};$$

despejando ℓ obtenemos

$$\ell = \frac{20}{\cos 70^\circ} = \frac{20}{0.342\,02} = 58.\,476,$$

así que el tirante mide 58. 476 metros.

La altura la encontramos usando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = \sqrt{(58.\,476)^2 - 20^2} = 54.\,949,$$

así que la antena tiene una altura de 54. 949 metros.

Ejercicios

Resuelve los triángulos rectángulos, es decir, encuentra los lados y los ángulos que faltan. En todos ellos, el ángulo C mide $\frac{\pi}{2}$ radianes, c representa a la hipotenusa, el lado opuesto al ángulo A es a, y el lado opuesto al ángulo B es b.

1. $a = 2,\ \ b = \sqrt{3}$.
2. $A = 27^\circ,\ \ b = 13$.
3. $a = 6,\ \ c = 12$.
4. $A = 37^\circ,\ \ c = 100$.
5. $b = \sqrt{3},\ \ c = \sqrt{6}$.
6. $A = 2B,\ \ a = \sqrt{3}$.
7. $B = \frac{2\pi}{7}$ radianes, $c = \sqrt{11}$.
8. $B = \frac{\pi}{4}$ radianes, $a = 7$.
9. $c = 2,\ \ b = \sqrt{5}$.

10. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 centímetros. Uno de sus ángulos mide 25°. Encuentra las longitudes de sus catetos.

11. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos mide 72° y el cateto adyacente a dicho ángulo mide 6.25 metros. ¿Cuánto miden la hipotenusa y el cateto opuesto?

12. En un triángulo rectángulo, el cateto opuesto a un ángulo que mide $\frac{\pi}{8}$ radianes tiene una longitud de 80 centímetros. Encuentra las longitudes del otro cateto y de la hipotenusa.

13. Considera un cuadrado con vértices A, B, C y D (acomodados en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) inscrito en un círculo con centro O y radio de 4 centímetros.

a) ¿Cuánto mide el ángulo OAB?

b) ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?

14. Una escalera de 12 metros de largo está apoyada contra una barda. Si el ángulo que forma con el suelo mide 68°, ¿a qué altura se encuentra el extremo superior de la escalera?

15. Una antena está sostenida desde su punta por un tirante de manera que forma un ángulo de 52° con el suelo. Si el tirante está atado al suelo a una distancia de 4.5 metros de la antena, ¿cuánto mide el tirante?

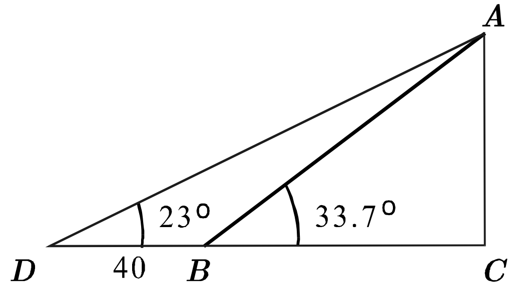
16. Un triángulo equilátero tiene un perímetro de 18 centímetros. Encuentra la longitud de una de las alturas.

17. Un edificio proyecta una sombra que mide la tercera parte de su altura. ¿Cuál es el ángulo que forman los rayos solares con el suelo?

18. ¿Cuál es el perímetro de un pentágono regular inscrito en un círculo de radio 5?

19. Considerando un heptágono regular inscrito en un círculo de radio 7 y un octágono regular inscrito en un círculo de radio 6, ¿cuál de los dos tiene mayor área?

20. Si nos paramos en el centro A de la plataforma superior de la pirámide del Sol, en Teotihuacan, y trazamos dos rectas, una vertical y otra hasta tocar el suelo en el punto B, hacia la Calzada de los Muertos, se forma un triángulo rectángulo ABC, de manera que el ángulo agudo inferior mide 33.7°. Si la hipotenusa se traza de manera que haya atravesado la calzada tocando el suelo en el punto D, el ángulo mide 23°. Ver la figura siguiente. La Calzada de los Muertos mide 40 metros de ancho. Encuentra la longitud de AD.



21. En un puente peatonal que cruza una calle se ha colocado una lámpara con el fin de alumbrarla. El puente mide 4.5 metros de altura. El rayo de luz hacia cada una de las aceras forma ángulos que miden 37° y 42°, respectivamente. ¿Cuál es el ancho de la calle?

22. Una cuerda de un círculo mide 4 centímetros. Unimos los extremos de la cuerda con el centro del círculo. Si el ángulo central mide 72°, ¿cuánto mide el radio del círculo?

23. Una persona se encuentra parada a 20 metros de la Gran Muralla china al nivel de su base. Sus ojos quedan a 1.5 metros de altura sobre el nivel del suelo y el ángulo con el que ve el extremo superior de la muralla es de 36.86° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la altura aproximada de la muralla?

24. Desde una ventana que se encuentra a 3.1 metros de altura se ata una cuerda en la que se cuelga una piñata que toca el suelo formando un ángulo de 32.55° y, desde la acera de enfrente, se jala, saliendo con un ángulo de 43.98° para llegar a una altura de 4 metros. ¿Qué distancia hay entre las aceras?

25. Un triángulo rectángulo se encuentra inscrito en un círculo. Uno de los ángulos agudos del triángulo mide 32° y el cateto adyacente al ángulo dado mide 8.48 centímetros. ¿Cuál es el radio del círculo?

26. En tres momentos distintos del día, el asta de una bandera proyecta una sombra de igual, del doble y del triple de su tamaño. Encuentra el ángulo formado, en cada momento, por la línea que une el extremo de la sombra con el extremo superior del asta y el nivel del suelo.

27. En un espacio de jardín que mide 7 metros de largo se quiere colocar una resbaladilla. La resbaladilla tiene un poste que le sirve de sostén, en el que se apoyan la escalera y la rampa. La escalera forma un ángulo de 75° con respecto al piso y la rampa, cuya longitud es de 9 metros, forma un ángulo de 35° con el piso. ¿Cabe la resbaladilla en el jardín?

Las funciones trigonométricas y el círculo unitario

Consideremos un círculo de radio 1 con centro en el origen del sistema XY y un radio que forme un ángulo agudo de θ° con el eje X. Llamemos $P\,(x, y)$ al extremo de este radio, como se muestra en la figura 2-21.

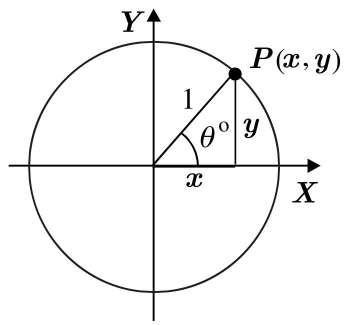


Figura 2-21

Se forma un triángulo rectángulo cuyos catetos miden x y y y cuya hipotenusa mide 1. Usando las definiciones (2.2) tenemos

$$\operatorname{sen}\theta^\circ = \frac{y}{1} = y; \qquad \cos\theta^\circ = \frac{x}{1} = x; \qquad \tan\theta^\circ = \frac{y}{x}.$$

Así que las coordenadas de P pueden escribirse en términos del seno y del coseno:

$$\boxed{x = \text{abscisa de } P = \cos\theta^\circ \qquad\qquad y = \text{ordenada de } P = \operatorname{sen}\theta^\circ.}$$

Usando esta idea, vamos a definir el seno y el coseno de cualquier ángulo θ dado entre 0° y 360°.

Extensión del seno, del coseno y de la tangente para ángulos mayores de 90°

Consideremos el radio OP_{θ° sobre el lado final del ángulo obtenido al girar θ° el semieje X positivo en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Definimos el coseno y el seno de θ° usando las coordenadas de P_{θ°:

$$\boxed{\cos\theta^\circ = x, \quad \operatorname{sen}\theta^\circ = y.} \tag{2.4}$$

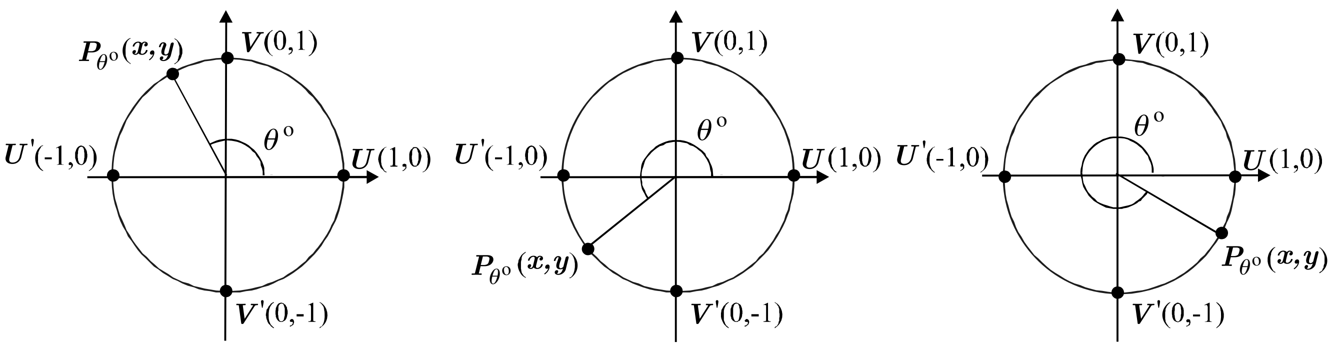


Figura 2-22

- Cuando P_{θ° está entre $V(0,1)$ y $U'(-1,0)$, θ° varía entre 90° y 180°.
- Cuando P_{θ° está entre $U'(-1,0)$ y $V'(0,-1)$, θ° varía entre 180° y 270°.
- Cuando P_{θ° está entre $V'(0,-1)$ y $U(1,0)$, θ° varía entre 270° y 360°.

En la figura 2-22 podemos ver que:

- $\cos 90^\circ = 0$; $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$.
- $\cos 180^\circ = -1$; $\operatorname{sen} 180^\circ = 0$.
- $\cos 270^\circ = 0$; $\operatorname{sen} 270^\circ = -1$.
- $\cos 360^\circ = 1$; $\operatorname{sen} 360^\circ = 0$.

Veamos ahora la relación entre el círculo unitario y la tangente de un ángulo.

Trazamos una recta vertical que pase por el punto $U(1,0)$, y prolongamos el segmento OP hasta que corte a la recta anterior en el punto T.

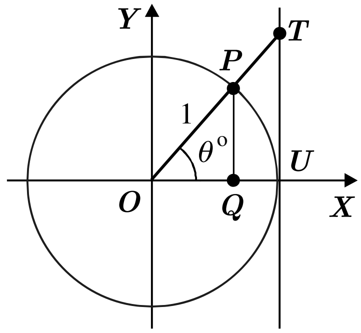


Figura 2-23

Llamamos Q al punto donde se cortan la vertical que pasa por P y el eje X, de modo que observando los triángulos OPQ y OTU obtenemos

$$\tan\theta^\circ = \frac{PQ}{OQ} = \frac{TU}{OU} = \frac{TU}{1} = TU.$$

Utilizando las igualdades (2.4)

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{\operatorname{sen}\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}.$$

Por tanto,

$$\tan\theta^\circ = \frac{\operatorname{sen}\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}. \tag{2.5}$$

Ahora, una vez que hemos definido el seno y el coseno para ángulos mayores de 90°, resulta natural, por lo anterior, definir

$$\tan\theta^\circ = \frac{\operatorname{sen}\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}.$$

La tangente de 90° y 270° no está definida, pues para esos ángulos el coseno vale cero y entonces tendríamos 0 en el denominador del cociente anterior, y éste no está definido.

Observaciones:

- $-1 \le \cos\theta^\circ \le 1$; $-1 \le \operatorname{sen}\theta^\circ \le 1$.

El signo del seno, del coseno y de la tangente de θ° depende del cuadrante donde quede colocado P_{θ°, así:

- El seno de (θ°) es positivo cuando P_{θ° está en los primeros dos cuadrantes, pues la ordenada de P_{θ° es positiva, y es negativo cuando está en el tercero y cuarto cuadrantes, ahí la ordenada de P_θ es negativa.

- El coseno de (θ°) es positivo cuando P_{θ° está en el primero y cuarto cuadrantes, y es negativo en el segundo y tercer cuadrantes.

- La tangente de (θ°), definida como el cociente del seno de (θ°) entre el coseno de (θ°), es positiva cuando P_{θ° está en el primero y tercer cuadrantes y es negativa cuando está en el segundo y cuarto cuadrantes.

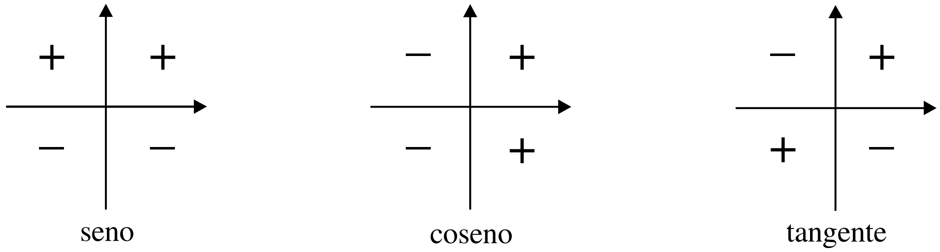


Figura 2-24

Ejemplos

1. Encontrar el seno, el coseno y la tangente de 135°.

Solución:

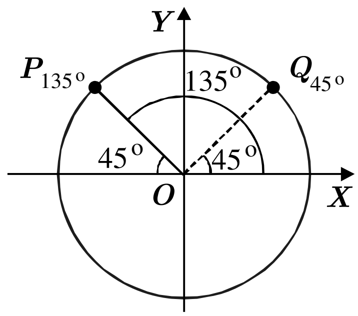


Figura 2-25

Podemos usar la calculadora y obtener directamente

$$\cos 135^\circ = -0.707\,11, \quad \operatorname{sen} 135^\circ = 0.707\,11, \quad \tan 135^\circ = -1.$$

Otra manera de resolver el problema es observar que $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, así que el punto P_{135° y el punto Q_{45° son simétricos con respecto al eje Y. Entonces sus segundas coordenadas son iguales y sus primeras coordenadas también son iguales en tamaño, pero de signo contrario. Así

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \tan 135^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1.$$

2. Encontrar el seno, el coseno y la tangente de 240°.

Solución:

Podemos usar la calculadora y obtener directamente

$$\cos 240^\circ = -0.5, \qquad \operatorname{sen} 240^\circ = -0.866\,, \qquad \tan 240^\circ = 1.\,732\,1.$$

También podemos razonar de la siguiente manera: como $240^\circ = 60^\circ + 180^\circ$, el punto P_{240°

es simétrico con respecto al origen del punto Q_{60°, como se muestra en la figura, así que las ordenadas y las abscisas de P_{240° y Q_{60° tienen signos opuestos.

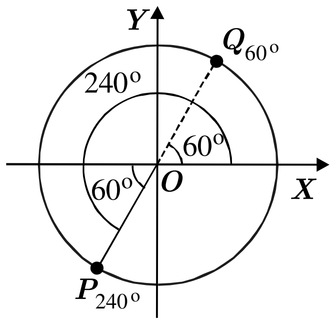


Figura 2-26

Así,

$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} = -0.5, \qquad \operatorname{sen} 240^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866,$$

y

$$\tan 240^\circ = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1.732\,1.$$

Razonando como en los ejemplos anteriores, se puede probar que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180^\circ - \theta^\circ) &= \operatorname{sen}\theta^\circ & \qquad \cos(180^\circ - \theta^\circ) &= -\cos\theta^\circ \\ \operatorname{sen}(180^\circ + \theta^\circ) &= -\operatorname{sen}\theta^\circ & \qquad \cos(180^\circ + \theta^\circ) &= -\cos\theta^\circ. \end{aligned}$$

Las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante

En un triángulo rectángulo ABC, con catetos a y b e hipotenusa c, hemos definido

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}, \qquad \cos B = \frac{a}{c} \qquad \text{y} \qquad \tan B = \frac{b}{a}.$$

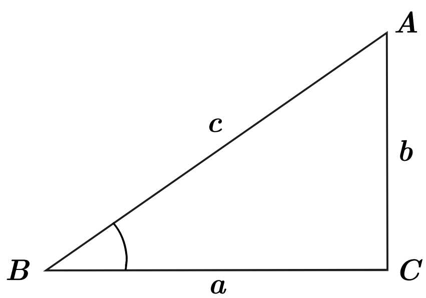


Figura 2-27

Las relaciones $\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}$ y $\frac{a}{b}$ también son de interés.Se conocen como la *cosecante*, la *secante* y la *cotangente* del ángulo B, respectivamente, y se denotan como

$$\csc B = \frac{c}{b}, \qquad \sec B = \frac{c}{a} \qquad \text{y} \qquad \cot B = \frac{a}{b}.$$

Entonces se tienen las identidades

$$\begin{aligned} \csc B &= \frac{1}{\operatorname{sen} B} \qquad \text{si } \operatorname{sen} B \neq 0, \\ \sec B &= \frac{1}{\cos B} \qquad \text{si } \cos B \neq 0, \\ \cot A &= \frac{\cos B}{\operatorname{sen} B} \qquad \text{si } \operatorname{sen} B \neq 0; \end{aligned} \tag{2.6}$$

por lo que podemos extender, con ayuda de las relaciones anteriores, la definición de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante para ángulos mayores de 90° del modo siguiente:

$$\csc \theta^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta^\circ}, \qquad \sec \theta^\circ = \frac{1}{\cos \theta^\circ} \qquad \text{y} \qquad \cot \theta^\circ = \frac{\cos \theta^\circ}{\operatorname{sen} \theta^\circ}.$$

Observaciones:

- La cosecante no está definida para 0° y 180°, ya que $\operatorname{sen} 0^\circ = \operatorname{sen} 180^\circ = 0$.
- La secante no está definida para 90° y 270°, pues $\cos 90^\circ = \cos 270^\circ = 0$.
- La cotangente no está definida para 0° y 180°, ya que $\operatorname{sen} 0^\circ = \operatorname{sen} 180^\circ = 0$.

Ejercicios

1. Completa la tabla siguiente.

Rad.	0	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$			$\frac{5\pi}{6}$			$\frac{5\pi}{4}$					$\frac{11\pi}{6}$	
Gra.			45°	60°		120°	135°		180°	210°		240°	270°	300°	315°		360°
sen																	
cos																	
tan					■								■				
cot	■								■								■
sec					■								■				
csc	■								■								■

Calcula.

2. $2\,(\cos 90^\circ)^2 - 1$.

3. $(\operatorname{sen} 45^\circ)^2 + (\cos 45^\circ)^2$.

4. $(\tan 300^\circ)^2 - (\sec 300^\circ)^2$.

5. $2 \operatorname{sen} 240^\circ \cos 240^\circ$.

Comprueba.

6. $\cos 60^\circ = (\cos 30^\circ)^2 - (\operatorname{sen} 30^\circ)^2$.

7. $2 \sec 0^\circ = \sec 45^\circ \sec \frac{4}{5}^\circ$.

8. $\csc 120^\circ - 2 \cot 240^\circ \cos 120^\circ = 2 \operatorname{sen} 120^\circ$.

9. $\operatorname{sen} 180^\circ = 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 135^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ$.

10. $\dfrac{1 + \cos 270^\circ}{2} = (\cos 135^\circ)^2$.

11. $\operatorname{sen} 270^\circ = \dfrac{2 \tan 135^\circ}{1 + (\tan 135^\circ)^2}$.

Ángulos mayores de 360°

Encontrar sobre el círculo unitario el punto P_{390°.

Solución:

Si a partir del punto de coordenadas $U\,(1,0)$ recorremos el círculo en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y damos una vuelta completa, regresaremos al punto U y habremos girado 360°. Si seguimos girando 30° más, hasta llegar a 390°, llegaremos al punto P_{390° que deseábamos, pero nos damos cuenta de que ese punto también es el punto P_{30°. Esto se debe a que 360° corresponden a una vuelta completa y a que $390^\circ = 360^\circ + 30^\circ$.

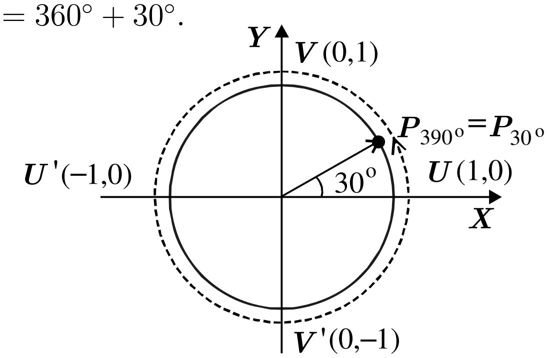


Figura 2-28

Tomemos nuevamente el círculo unitario y un punto sobre dicho círculo. Si el punto da una vuelta completa en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, es decir, gira 360°, el punto P llegará a su posición inicial.

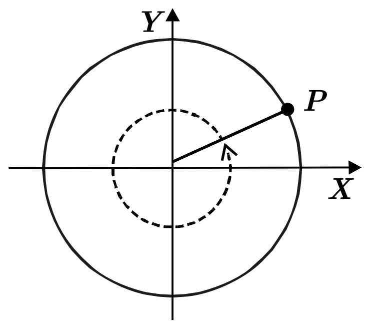


Figura 2-29

Si queremos localizar sobre el círculo unitario el punto P_{θ° correspondiente a un ángulo θ mayor de 360°, entonces, a partir del punto de coordenadas $U\,(1,0)$, nos movemos sobre el círculo hasta dar una vuelta completa. En este momento ya hemos girado 360°, seguimos girando hasta llegar al ángulo deseado y notamos que por cada 360° damos una vuelta completa.

Ejemplos

1. Encontrar sobre el círculo unitario el punto P_{585°.

Solución:

Puesto que $585^\circ = 360^\circ + 225^\circ$, el punto correspondiente a 585° es el mismo que el que corresponde a $225°$, es decir, $P_{585°}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

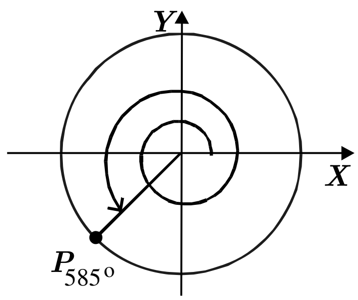


Figura 2-30

2. Dado un punto P sobre el círculo unitario, encontrar el punto Q que se obtiene al girar dos vueltas y media, a partir de P, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Solución:

Cada vez que damos una vuelta completa regresamos al punto P original, así que girar dos vueltas y media es equivalente a girar media vuelta. Así, el punto Q al que arribaremos es el simétrico de P con respecto al origen.

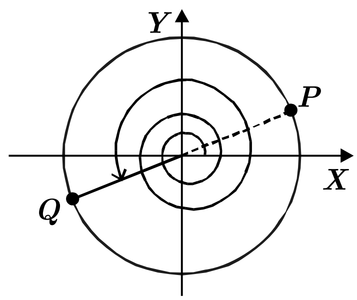


Figura 2-31

Ángulos negativos

Si giramos en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, diremos que hemos girado un *ángulo negativo*. Así, por ejemplo, si giramos $90°$ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj a partir de $U\,(1,0)$, hemos girado $-90°$ y llegamos al punto $V'\,(0,-1)$, que es el mismo punto al que hubiéramos llegado girando, a partir de U, $270°$ en contra del movimiento de las manecillas del reloj, que es el sentido positivo de giro.

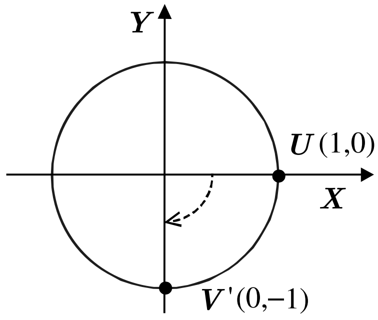


Figura 2-32

Las funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Definiremos las funciones coseno y seno de un ángulo θ arbitrario, menor o mayor de 360° y positivo o negativo, como en (2.4). Si las coordenadas de P_θ son (x, y), tenemos $\cos\theta = x$, $\operatorname{sen}\theta = y$.

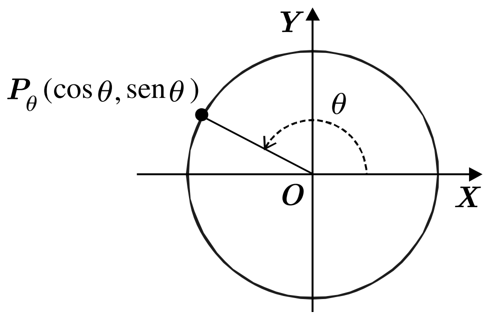


Figura 2-33

Las demás funciones trigonométricas se definen igual que antes como los cocientes

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \tag{2.7}$$

siempre que el denominador no se anule.

Ejemplos

1. Encontrar los valores de todas las funciones trigonométricas de 780°.

Solución:

Como $780 = 2\,(360°) + 60°$, al girar 780° se dan dos vueltas completas y se gira 60° más, así que todas las funciones trigonométricas de 780° son iguales a las de 60°.

$$\operatorname{sen} 780° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 780° = \frac{1}{2}, \qquad \tan 780° = \sqrt{3},$$

$$\csc 780° = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \sec 780° = 2, \qquad \cot 780° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Encontrar los valores de todas las funciones trigonométricas de $-45°$.

Solución:

Al girar $45°$ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj llegamos al punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, que es el mismo punto al que hubiéramos llegado girando $315°$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Así,

$$\operatorname{sen}(-45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan(-45°) = -1,$$

$$\csc(-45°) = -\sqrt{2}, \qquad \sec(-45°) = \sqrt{2}, \qquad \cot(-45°) = -1.$$

Ejercicios

En cada caso, encuentra los valores de todas las funciones trigonométricas del ángulo dado.

1. $945°$. **2.** $495°$. **3.** $675°$. **4.** $\frac{11\pi}{4}$.

5. $\frac{10\pi}{3}$. **6.** $-\frac{3\pi}{4}$. **7.** $-60°$. **8.** $-630°$.

9. $-225°$. **10.** $-\frac{7\pi}{6}$. **11.** $-\frac{11\pi}{3}$. **12.** $\frac{21\pi}{4}$.

Identidades trigonométricas

En la práctica, es frecuente encontrar problemas que involucran dos o más ángulos cuyas medidas están, por lo general, relacionadas mediante operaciones aritméticas (suma o resta, múltiplos o fracciones, etc.). Encontrar los valores de las razones trigonométricas en tales situaciones es todo un arte; en su desarrollo interviene el manejo y conocimiento de las *identidades trigonométricas* que presentamos enseguida. Valga la aclaración de que hemos puesto un número pequeño de identidades, las que pensamos que se usan con más frecuencia y otras que ilustran alguna técnica interesante de deducción.

Este es un buen momento para recordar la diferencia que hay entre una identidad y una ecuación en general. Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que puede incluir funciones trigonométricas o de otro tipo, y que puede tener o no solución; en cambio, una identidad es un caso particular de ecuación que es verdadera para todos los valores de la variable para los que tiene sentido.

Iniciamos presentando aquellas identidades que se desprenden inmediatamente de un hecho geométrico conocido.

Identidades pitagóricas

Probar la identidad $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1$ para cualquier ángulo A.

Solución:

Supongamos que A mide $\theta°$, entonces debemos probar que

$$\cos^2\theta° + \operatorname{sen}^2\theta° = 1,$$

donde

$$\operatorname{sen}^2\theta° \quad \text{significa} \quad (\operatorname{sen}\theta°)^2 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \cos^2\theta° \quad \text{significa} \quad (\cos\theta°)^2.$$

Recordamos que $P_{\theta°}(\cos\theta°, \operatorname{sen}\theta°)$ es un punto en el círculo unitario, por lo que el cuadrado de su distancia al origen es 1, o sea

$$\boxed{\cos^2\theta° + \operatorname{sen}^2\theta° = 1.} \tag{2.8}$$

Y así, $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1$ y $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ para cualquier ángulo A y cualquier número real x.

Recuerda que una identidad es una ecuación válida para todos los valores de las variables para los cuales tiene sentido.

A partir de la identidad (2.8) podemos deducir otras dos identidades que se utilizan con muchísima frecuencia.

Ejemplos

1. Probar que para cualquier ángulo A tal que $\cos A \neq 0$, es decir, donde estén definidas $\tan A$ y $\sec A$, se tiene

$$\boxed{1 + \tan^2 A = \sec^2 A.} \tag{2.9}$$

Solución:

Como

$$\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1$$

entonces, si $\cos A \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación entre $\cos^2 A$ y obtener

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} &= \frac{1}{\cos^2 A} \\ 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} &= \frac{1}{\cos^2 A} \\ 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A. \end{aligned}$$

Por tanto, $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, y usando medidas radián tenemos $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Probar que la identidad

$$\boxed{1 + \cot^2 A = \csc^2 A} \tag{2.10}$$

es válida para cualquier ángulo A que satisface $\operatorname{sen} A \neq 0$, es decir, siempre que estén definidas $\cot A$ y $\sec A$.

Solución:

Al igual que en el caso anterior, partimos de la identidad (2.8); pero ahora dividimos ambos lados entre $\operatorname{sen}^2 A$, y obtenemos

$$\frac{\cos^2 A}{\operatorname{sen}^2 A} + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 A},$$

luego

$$\cot^2 A + 1 = \csc^2 A.$$

Las tres identidades

$$\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1, \qquad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A, \qquad 1 + \cot^2 A = \csc^2 A,$$

se conocen como identidades pitagóricas.

Los ejemplos anteriores muestran cómo deducir identidades a partir de otras ya conocidas. Aprender esta forma de trabajar es muy útil ya que nos evita memorizar un número considerable de identidades.

Ejemplos

1. Mostrar que $\dfrac{\operatorname{sen} A}{\csc A} + \dfrac{\cos A}{\sec A} = 1$ para todo ángulo A para el que esté definido el miembro izquierdo.

Solución:

Utilizando las relaciones (2.6) y la identidad (2.8) tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\csc A} + \frac{\cos A}{\sec A} = \frac{\operatorname{sen} A}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} A}} + \frac{\cos A}{\dfrac{1}{\cos A}} = \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1.$$

2. Mostrar que $\tan^2 A - \cot^2 A = \sec^2 A - \csc^2 A$ para todo ángulo A para el que estén definidas todas las expresiones que aquí aparecen.

Solución:

$$\begin{aligned}
\tan^2 A - \cot^2 A &= \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\operatorname{sen}^2 A} = \frac{\operatorname{sen}^4 A - \cos^4 A}{\operatorname{sen}^2 A \cos^2 A} \\
&= \frac{(\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A)(\operatorname{sen}^2 A - \cos^2 A)}{\operatorname{sen}^2 A \cos^2 A} \\
&= \frac{1 \cdot (\operatorname{sen}^2 A - \cos^2 A)}{\operatorname{sen}^2 A \cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 A} = \sec^2 A - \csc^2 A.
\end{aligned}$$

3. Resolver la ecuación $3 \tan \alpha^\circ + \cot \alpha^\circ = 5 \csc \alpha^\circ$.

Solución:

Los dos ejemplos anteriores son identidades, pues no importando cual sea el ángulo A, la igualdad es cierta siempre que estén definidas las expresiones que ahí aparecen. En cambio, ahora debemos encontrar los valores de la variable α° para los cuales es cierta la igualdad de este ejemplo.

Expresamos las funciones trigonométricas en términos de las funciones seno y coseno para tratar de simplificarlas

$$\frac{3\operatorname{sen}\alpha^\circ}{\cos\alpha^\circ}+\frac{\cos\alpha^\circ}{\operatorname{sen}\alpha^\circ}=\frac{5}{\operatorname{sen}\alpha^\circ},$$

multiplicamos por $\operatorname{sen}\alpha^\circ\cos\alpha^\circ$ para eliminar los denominadores

$$3\operatorname{sen}^2\alpha^\circ+\cos^2\alpha^\circ=5\cos\alpha^\circ.$$

Escribimos todo en términos del coseno. Para ello utilizamos la identidad (2.8).

$$\begin{aligned}3\left(1-\cos^2\alpha^\circ\right)+\cos^2\alpha^\circ &= 5\cos\alpha^\circ\\ 3-2\cos^2\alpha^\circ &= 5\cos\alpha^\circ\\ 2\cos^2\alpha^\circ+5\cos\alpha^\circ-3 &= 0.\end{aligned}$$

Ésta es una ecuación de segundo grado en la que la incógnita es $\cos\alpha^\circ$. Escribimos $x=\cos\alpha^\circ$, y entonces la ecuación es

$$2x^2+5x-3=0.$$

Utilizando la solución de la ecuación general de segundo grado tenemos

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\,(2)\,(-3)}}{4}=\frac{-5\pm 7}{4},$$

de donde

$$x=\frac{1}{2}\qquad \text{o}\qquad x=-3.$$

Así, las soluciones son

$$\cos\alpha^\circ=\frac{1}{2}\qquad \text{y}\qquad \cos\alpha^\circ=-3.$$

La primera solución nos conduce a $\alpha^\circ=60^\circ$ y la segunda es imposible, pues recordemos que el coseno de cualquier ángulo es la abscisa de un punto sobre el círculo unitario y, por consiguiente, está entre -1 y 1.

Así, el único ángulo agudo que es solución de la ecuación es el de 60°. Hay más ángulos que satisfacen dicha ecuación, y para encontrarlos necesitamos las identidades que aparecen en la siguiente sección.

Comprobación:

Lado izquierdo

$$3\tan\alpha^\circ+\cot\alpha^\circ=3\tan 60^\circ+\cot 60^\circ=3\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{10}{3}\sqrt{3}.$$

Lado derecho

$$5\csc\alpha^\circ=5\csc 60^\circ=5\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{10}{3}\sqrt{3}.$$

Ejercicios

Con ayuda de las identidades de esta sección prueba que:

1. $\sec x - \cos x = \tan x \operatorname{sen} x.$

2. $\cos x \cot x + \operatorname{sen} x = \csc x.$

3. $\csc^2 x + \cot^2 x + 1 = 2\csc^2 x.$

4. $5\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x = 2 + 3\cos^2 x.$

5. $\sec^2 x\,(\csc^2 x - 1) = \csc^2 x.$

6. $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x.$

7. $\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x \tan^2 x.$

8. $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x.$

9. $\dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}.$

10. $\csc x + \cot x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}.$

11. $\dfrac{\tan x}{\tan x + \csc x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos x}.$

12. $\csc^4 x - \cot^4 x = \dfrac{1 + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}.$

13. $\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} + \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = 2\sec x.$

14. $\dfrac{\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x \cos x.$

15. $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$

16. $(\sec x - \tan x)^5 (\sec x + \tan x)^5 = 1.$

17. $\dfrac{(\csc^2 x - \cot^2 x)^2}{\csc^4 x - \cot^4 x} = \dfrac{1}{1 + 2\cot^2 x}.$

18. $(1 + \cot x + \tan x)(\operatorname{sen} x - \cos x) = \dfrac{\sec x}{\csc^2 x} - \dfrac{\csc x}{\sec^2 x}.$

19. $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x.$

20. $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,(\sec^2 x - 1) = \operatorname{sen}^4 x.$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

21. $2\operatorname{sen}^2 \alpha^\circ - 9\operatorname{sen} \alpha^\circ = 5.$

22. $\cos^2 \alpha^\circ = \cos \alpha^\circ.$

23. $\operatorname{sen}^2 \alpha^\circ = \cos^2 \alpha^\circ.$

24. $2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha^\circ - \operatorname{sen} \alpha^\circ = 0.$

25. $\cos^4 \alpha^\circ - \operatorname{sen}^4 \alpha^\circ = 0.$

26. $2 + \csc \alpha^\circ = \csc^2 \alpha^\circ.$

Identidades que relacionan al ángulo A con $-A$

Supongamos que A mide θ°. Veamos primero la relación que hay entre las funciones trigonométricas de θ° y $-\theta^\circ$.

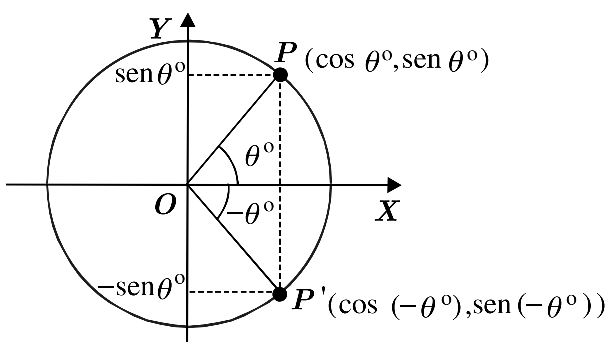


Figura 2-34

En la figura 2-34 vemos que si P es el punto que corresponde al ángulo θ° y P' el que corresponde a $-\theta^\circ$, estos dos puntos son simétricos con respecto al eje X, luego tienen las mismas primeras coordenadas y sus segundas coordenadas son opuestas una de la otra. Entonces

$$\cos(-\theta^\circ) = \cos\theta^\circ \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(-\theta^\circ) = -\operatorname{sen}\theta^\circ.$$

Así,

$$\boxed{\cos(-A) = \cos A \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen} A.} \tag{2.11}$$

Ejemplos

1. Probar la identidad $\tan(-A) = -\tan A$, donde A es un ángulo.

Solución:

$$\tan(-A) = \frac{\operatorname{sen}(-A)}{\cos(-A)} = \frac{-\operatorname{sen} A}{\cos A} = -\tan A.$$

2. Probar la identidad $\operatorname{sen} A - \cos A = \dfrac{\cos^2(-A) - \operatorname{sen}^2(-A)}{\operatorname{sen}(-A) - \cos(-A)}$, donde A es un ángulo.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2(-A) - \operatorname{sen}^2(-A)}{\operatorname{sen}(-A) - \cos(-A)} &= \frac{(\cos A)^2 - (-\operatorname{sen} A)^2}{-\operatorname{sen} A - \cos A} \\ &= \frac{(\cos A + \operatorname{sen} A)(\cos A - \operatorname{sen} A)}{-(\operatorname{sen} A + \cos A)} \\ &= \operatorname{sen} A - \cos A.\end{aligned}$$

Identidades para la suma de dos ángulos

Probar que

$$\boxed{\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} \tag{2.12}$$

es válida para cualesquiera dos ángulos A, B.

Solución:

Supongamos que α° y β° son las medidas en grados de A y B.

Localicemos en el círculo unitario los puntos correspondientes a los ángulos α° y $\alpha^\circ + \beta^\circ$, respectivamente, es decir,

$$P(\cos\alpha^\circ, \operatorname{sen}\alpha^\circ) \qquad \text{y} \qquad Q(\cos(\alpha^\circ + \beta^\circ), \operatorname{sen}(\alpha^\circ + \beta^\circ)).$$

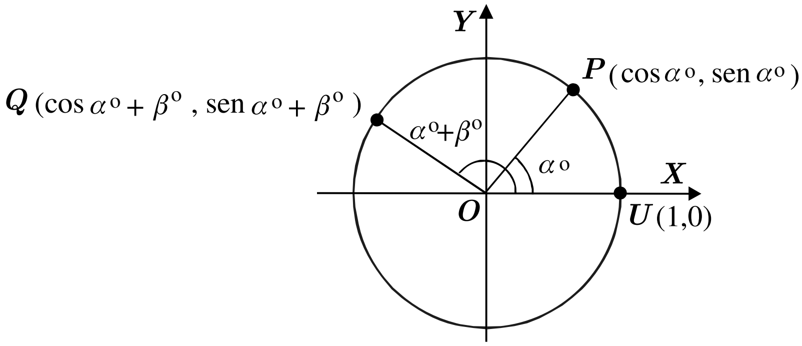


Figura 2-35

Calculamos el cuadrado de la distancia de Q a U:

$$\begin{aligned} d^2(Q,U) &= (\cos(\alpha^\circ+\beta^\circ)-1)^2+(\operatorname{sen}(\alpha^\circ+\beta^\circ)-0)^2 \\ &= \cos^2(\alpha^\circ+\beta^\circ)-2\cos(\alpha^\circ+\beta^\circ)+1+\operatorname{sen}^2(\alpha^\circ+\beta^\circ) \\ &= \operatorname{sen}^2(\alpha^\circ+\beta^\circ)+\cos^2(\alpha^\circ+\beta^\circ)+1-2\cos(\alpha^\circ+\beta^\circ) \\ &= 2-2\cos(\alpha^\circ+\beta^\circ). \end{aligned}$$

Ahora giramos la figura el ángulo α°, en sentido negativo, manteniendo fijos los ejes de manera que el punto P quede finalmente sobre el eje X:

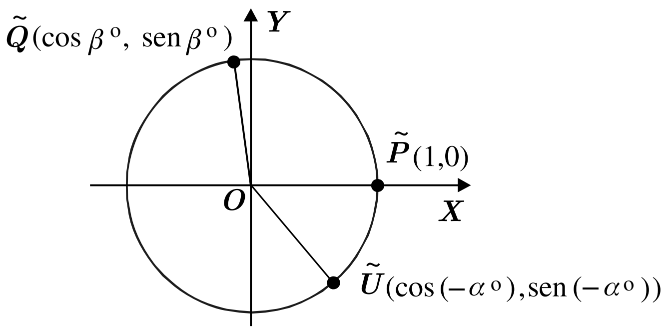


Figura 2-36

Calculamos el cuadrado de la distancia de $\widetilde{Q}$ a $\widetilde{U}$:

$$\begin{aligned} d^2\left(\widetilde{Q},\widetilde{U}\right) &= (\cos\beta^\circ-\cos(-\alpha^\circ))^2+(\operatorname{sen}\beta^\circ-\operatorname{sen}(-\alpha^\circ))^2 \\ &= (\cos\beta^\circ-\cos\alpha^\circ)^2+(\operatorname{sen}\beta^\circ+\operatorname{sen}\alpha^\circ)^2 \\ &= \cos^2\beta^\circ-2\cos\beta^\circ\cos\alpha^\circ+\cos^2\alpha^\circ+\operatorname{sen}^2\beta^\circ+2\operatorname{sen}\beta^\circ\operatorname{sen}\alpha^\circ+\operatorname{sen}^2\alpha^\circ \\ &= 2-2\cos\beta^\circ\cos\alpha^\circ+2\operatorname{sen}\beta^\circ\operatorname{sen}\alpha^\circ. \end{aligned}$$

Como giramos la figura sin deformarla, la distancia de Q a U es la misma que la distancia de $\widetilde{Q}$ a $\widetilde{U}$, por lo que

$$\begin{aligned} 2-2\cos(\alpha^\circ+\beta^\circ) &= 2-2\cos\beta^\circ\cos\alpha^\circ+2\operatorname{sen}\beta^\circ\operatorname{sen}\alpha^\circ \\ \cos(\alpha^\circ+\beta^\circ) &= \cos\alpha^\circ\cos\beta^\circ-\operatorname{sen}\alpha^\circ\operatorname{sen}\beta^\circ. \end{aligned}$$

O sea,

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

Ejemplos

1. Probar que $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ para cualesquiera dos ángulos A y B.

Solución:

Como

$$\cos(A-B) = \cos(A+(-B)),$$

aplicamos el resultado obtenido en (2.12):

$$\cos(A+(-\beta)) = \cos A \cos(-B) - \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

Por tanto,

$$\cos(A-\beta) = \cos A \cos \beta + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

2. Probar que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \operatorname{sen} A \tag{2.13}$$

para cualquier ángulo A.

Solución:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos A + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} A = 0(\cos A) + 1(\operatorname{sen} A) = \operatorname{sen} A.$$

3. Probar la identidad

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A \tag{2.14}$$

para cualquier ángulo A.

Solución:

Utilizando la identidad (2.13) tenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - A\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + A\right) = \cos A.$$

4. Probar la identidad

$$\boxed{\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B} \tag{2.15}$$

para cualesquiera dos ángulos A y B.

Solución:

Utilizando las identidades (2.12), (2.13) y (2.14)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(A+B) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (A+B)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - B\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cos B + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\operatorname{sen} B \\
&= \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B.
\end{aligned}$$

5. Probar la identidad

$$\boxed{\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}}, \tag{2.16}$$

que es válida para cualquier par de ángulos A y B, siempre que $\tan A$, $\tan B$, $\tan(A+B)$ estén definidas y $\tan A \tan B \neq 1$.

Solución:

Como

$$\tan(A+B) = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos(A+B)},$$

entonces, utilizando las identidades (2.12) y (2.15) que son válidas para cualesquiera ángulos A y B,

$$\tan(A+B) = \frac{\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B};$$

ahora, dividiendo entre $\cos A \cos B$, tenemos

$$\tan(A+B) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \dfrac{\operatorname{sen} B}{\cos B}}{1 - \left(\dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} B}{\cos B}\right)} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

6. Probar que $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A+B) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A-B)$ para cualesquiera dos ángulos A y B.

Solución:

Partimos de las identidades para el seno de una suma y una resta de ángulos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen}(A-B) &= \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B, \end{aligned}$$

sumándolas tenemos

$$\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) = 2 \operatorname{sen} A \cos B,$$

dividimos entre 2 ambos lados de la igualdad y obtenemos la identidad deseada.

7. Probar que $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$ para cualesquiera dos ángulos A y B.

Solución:

Utilizamos la identidad del ejemplo 6

$$\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) = 2 \operatorname{sen} A \cos B.$$

Hacemos $A = u + v$, $B = u - v$, por lo que

$$u = \frac{A+B}{2} \qquad v = \frac{A-B}{2}.$$

Sustituimos estos valores en la identidad del ejemplo 6

$$2 \operatorname{sen} u \cos v = \operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v) = \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B,$$

de donde

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

Ejercicios

Simplifica las siguientes expresiones.

1. $\cos(A+\pi)$.

2. $\tan(A+\pi)$.

3. $\operatorname{sen}(A+2\pi)$.

4. $\operatorname{sen}(A+\pi)$.

5. $\cos(A+2\pi)$.

6. $\sec(A+2\pi)$.

7. $\cos\left(A+\frac{3\pi}{2}\right)$.

8. $\tan\left(A+\frac{\pi}{2}\right)$.

9. $\operatorname{sen}\left(A+\frac{5\pi}{2}\right)$.

Encuentra el valor exacto de las siguientes expresiones.

10. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$.

11. $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)$.

12. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$.

13. $\tan(-45° - 30°)$.

14. $\cos(135° - 60°)$.

15. $\operatorname{sen}(180° + 135°)$.

Con ayuda de las identidades de esta sección prueba que:

16. $\sec(-A) = \sec A$.

17. $\cot(-A) = -\cot A$.

18. $\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$.

19. $\tan A + \cot A = 2 \csc 2A$.

20. $\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$.

21. $\cos^4 A - \operatorname{sen}^4 A = \cos 2A$.

22. $\cos 2A = 1 - 2\operatorname{sen}^2 A$.

23. $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$.

24. $\operatorname{sen}^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$.

25. $\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$.

26. $\operatorname{sen} 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$.

27. $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$.

28. $\operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$.

29. $\sec A \csc A = 2\csc 2A$.

30. $\frac{2}{1+\cos 2A} = \sec^2 A$.

31. $\frac{\operatorname{sen} 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$.

32. $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$.

33. $\tan A + \tan B = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A \cos B}$.

34. $\operatorname{sen} 3A = 3\operatorname{sen} A - 4\operatorname{sen}^3 A$.

35. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$.

36. $\tan(A+45°)\tan(A-45°) = -1$.

37. $\operatorname{sen} 4A = 2\operatorname{sen} A \cos 3A + \operatorname{sen} 2A$.

38. $\cos 4B = 1 - 8\cos^2 B + 8\cos^4 B$.

39. $\csc A - 2\cot 2A \cos A = 2\operatorname{sen} A$.

40. $\operatorname{sen} 15° = \cos 75° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

41. $\cos 15° = \operatorname{sen} 75° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

42. $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$.

43. $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$.

44. $\dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \tan \dfrac{A+B}{2} \cot \dfrac{A-B}{2}$.

45. $\tan^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$.

46. $\dfrac{\cos A + \cos B}{\cos B - \cos A} = \cot \dfrac{A+B}{2} \cot \dfrac{A-B}{2}$.

47. $\cot(A-B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$.

48. $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \dfrac{1}{2}\cos(A-B) - \dfrac{1}{2}\cos(A+B)$.

49. $\cos A \cos B = \dfrac{1}{2}\cos(A-B) + \dfrac{1}{2}\cos(A+B)$.

50. $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{1}{2}(A+B)\cos\dfrac{1}{2}(A-B)$.

51. $\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(A-B)$.

52. $\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{\operatorname{sen} A}{2\cos^2 \frac{A}{2}}$.

53. $2\sec 2A = \sec\left(A + \dfrac{\pi}{4}\right)\sec\left(A - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

54. $\operatorname{sen}(A-B) + \cos(A+B) = 2\operatorname{sen}\left(A + \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(B + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

55. $\operatorname{sen}(A-B) - \cos(A+B) = 2\operatorname{sen}\left(A - \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(B - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ley de los senos

Encontrar el perímetro del paralelogramo cuya diagonal mide 5 metros, y los ángulos formados entre la diagonal y cada uno de los lados son de 15° y 35°, respectivamente.

Solución:

Para determinar las longitudes de los lados del paralelogramo debemos encontrar las longitudes de los lados del triángulo ABC de la figura 2-37.

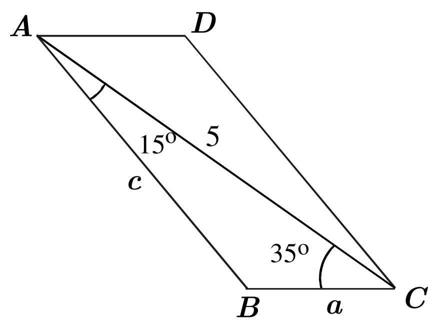


Figura 2-37

Utilizando las igualdades

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C},$$

tenemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 15^\circ} = \frac{5}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} 35^\circ}.$$

Puesto que conocemos dos de los ángulos del triángulo, tenemos

$$B = 180^\circ - (15^\circ + 35^\circ) = 130^\circ;$$

entonces

$$a = \frac{5 \operatorname{sen} 15^\circ}{\operatorname{sen} 130^\circ} \approx \frac{5\,(0.25)}{0.76} \approx 1.64$$

de igual manera que

$$c = \frac{5 \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 130^\circ} \approx \frac{5\,(0.57)}{0.76} \approx 3.75.$$

El perímetro del paralelogramo es

$$P = 2a + 2c \approx 2\,(1.64) + 2\,(3.75) = 10.78.$$

El perímetro del paralelogramo es, aproximadamente, igual a 10.78 metros.

Hemos visto que las funciones trigonométricas relacionan los lados de un triángulo rectángulo con sus ángulos agudos. En esta sección veremos tres identidades que permiten relacionar los lados de *cualquier* triángulo con sus ángulos. Dichas identidades son las leyes de los senos, los cosenos y las tangentes.

Ley de los senos

Dado un triángulo ABC cualquiera se tiene la identidad

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}}, \tag{2.17}$$

donde a es el lado opuesto a A, b a B y c a C.

Demostración:

Desde uno de los vértices trazamos la altura. En las figuras mostramos los dos posibles casos: los tres ángulos son agudos o bien hay un ángulo obtuso.

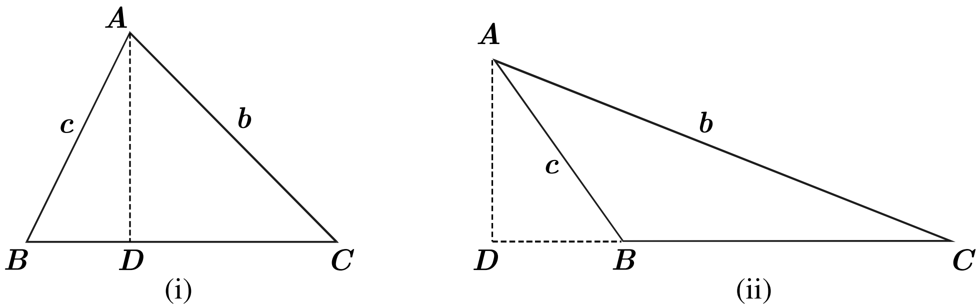


Figura 2-38

En cualquier caso,

$$\operatorname{sen} C = \frac{AD}{b},$$

de donde

$$AD = b \operatorname{sen} C. \tag{2.18}$$

En la figura 2-38(i),

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} B &= \frac{AD}{c} \\ AD &= c \operatorname{sen} B. \end{aligned}$$

En la figura 2-38(ii),

$$\angle ABD = 180^\circ - B \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} ABD = \frac{AD}{c};$$

por otra parte, sabemos que

$$\operatorname{sen}(180^\circ - B) = \operatorname{sen} B.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} B &= \frac{AD}{c} \\ c \operatorname{sen} B &= AD. \end{aligned}$$

Es decir, en ambos casos tenemos

$$AD = c \operatorname{sen} B. \tag{2.19}$$

Igualando (2.18) y (2.19) tenemos

$$b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B,$$

de donde

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

De manera análoga se prueba la igualdad restante. Por tanto,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

■

Solución de triángulos (continuación)

En la sección “Solución de triángulos rectángulos” de la página 67 resolvimos triángulos rectángulos. La ley de los senos permite resolver triángulos arbitrarios si conocemos:

LLA Dos de sus lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. (Puede haber dos soluciones)

Si llamamos a y b a los lados conocidos y A al ángulo conocido opuesto al lado a, con

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B},$$

podemos encontrar el ángulo B. Aquí debemos tener cuidado, pues $\operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(180° - B)$, así que puede haber dos soluciones. Ahora, usamos la suma de los ángulos interiores de un triángulo para encontrar C:

$$C = 180° - (A + B)$$

y finalmente usamos de nuevo la ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

para encontrar el lado c.

AAL Dos de los ángulos (y por el teorema de la suma de los ángulos interiores, el tercero) y un lado.

Si a es el lado conocido, entonces a partir de

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

obtenemos el lado b, y usando

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

encontramos el lado c.

Ejemplos

1. Si dos de los ángulos de un triángulo miden 75° y 25° grados, respectivamente, y el lado opuesto al ángulo de 25° mide 6 centímetros, encontrar las longitudes de los lados faltantes.

Solución:

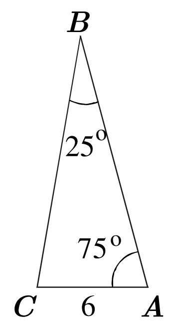


Figura 2-39

Llamamos A al ángulo que mide 75° y B al que mide 25°. Encontramos el ángulo C:

$$C = 180° - 75° - 25° = 80°.$$

Ahora utilizamos la ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Así,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{6}{\operatorname{sen} 25^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 80^\circ},$$

de donde

$$a = \frac{6 \operatorname{sen} 75^\circ}{\operatorname{sen} 25^\circ} \approx 13.71 \qquad \text{y} \qquad c = \frac{6 \operatorname{sen} 80^\circ}{\operatorname{sen} 25^\circ} \approx 14.$$

Por tanto, los lados del triángulo miden 6, 13.71 y 14 centímetros, respectivamente.

2. De un triángulo ABC sabemos que el lado AC mide 2.3, el lado CB mide 9, y el ángulo B mide 30°. Encontrar los ángulos que faltan.

Solución:

El lado AC es opuesto al ángulo B; entonces $AC = b$. Análogamente, $BC = a$ y $AB = c$. Por la ley de los senos tenemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C},$$

de donde

$$\frac{9}{\operatorname{sen} A} = \frac{2.3}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

De la primera igualdad tenemos

$$\operatorname{sen} A = \frac{9 \operatorname{sen} 30^\circ}{2.3} \approx \frac{4.5}{2.3} \approx 1.96.$$

Observamos que lo anterior no es posible, pues como el seno es la ordenada de un punto que se encuentra sobre el círculo unitario, su valor está entre -1 y 1.

Esto nos indica que no es posible construir un triángulo con tales características.

3. De un triángulo ABC sabemos que el lado AC mide 3, el lado CB mide 4, y el ángulo A mide 23°. Encontrar los ángulos que faltan.

Solución:

El lado AC es opuesto al ángulo B; entonces $AC = b$, y análogamente, $BC = a$ y $AB = c$. Por la ley de los senos

$$\frac{4}{\operatorname{sen} 23^\circ} = \frac{3}{\operatorname{sen} B}.$$

Entonces

$$\operatorname{sen} B = \frac{3 \operatorname{sen} 23^\circ}{4} \approx 0.29.$$

Como B está entre 0° y 180°, hay dos posibilidades para las cuales $\operatorname{sen} B \approx 0.29$, a saber:

$$B = 17.04^\circ \qquad \text{y} \qquad B = 180^\circ - 17.04^\circ = 162.96^\circ.$$

Desechamos la segunda posibilidad, ya que en ese caso la suma de los ángulos A y B es mayor de 180°. Encontramos C:

$$C = 180^\circ - 23^\circ - 17.04^\circ = 139.96^\circ.$$

Por tanto, los ángulos del triángulo miden 23°, 17.04° y 139.96°.

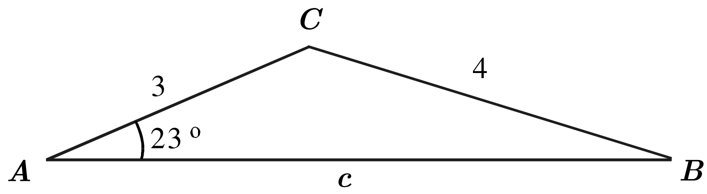


Figura 2-40

4. Modifiquemos el ejemplo anterior intercambiando los valores de AC y BC, es decir, $AC = 4$, $CB = 3$, y el ángulo A mide 23°. Encontrar los ángulos que faltan.

Solución:

Como antes, llamamos $AC = b$, $BC = a$ y $AB = c$. Por la ley de los senos

$$\frac{3}{\operatorname{sen} 23^\circ} = \frac{4}{\operatorname{sen} B}.$$

Entonces

$$\operatorname{sen} B = \frac{4 \operatorname{sen} 23^\circ}{3} \approx 0.52.$$

Con la calculadora, encontramos que $B = \arcsin(0.52) = 0.546\,85\left(\frac{180}{\pi}\right) = 31.332$. El otro ángulo menor que 180° cuyo seno es 0.52 es $B_2 = 180^\circ - 31^\circ = 149^\circ$.

En el primer caso, el tercer ángulo mide $C = 180^\circ - 23^\circ - 31^\circ = 126^\circ$ y, en el segundo caso, el tercer ángulo mide $C_2 = 180^\circ - 23^\circ - 149^\circ = 8^\circ$.

Los dos triángulos son posibles.

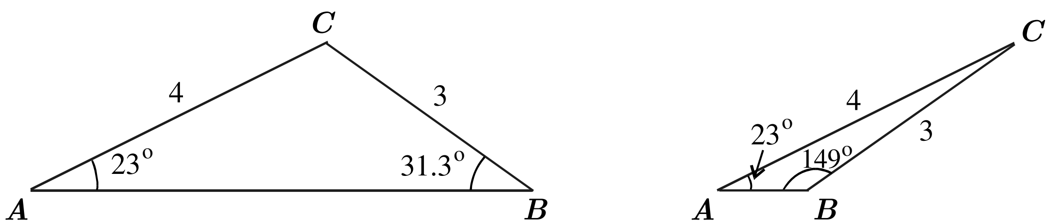


Figura 2-41

Ejercicios

En cada caso, encuentra todos los elementos del triángulo.

1. $a = 8$, $b = 5$, $A = 54^\circ$.

2. $b = 11$, $c = 24$, $C = 41^\circ$.

3. $a = 12$, $b = 3$, $B = 12^\circ$.

4. $b = 17.3$, $c = 9.8$, $C = 32.25^\circ$.

5. $a = 235.7$, $b = 128.6$, $B = 72.8^\circ$.

6. $b = 45$, $c = 57.74$, $C = 127^\circ$.

7. Viendo de frente la pirámide de Keops, en Egipto, se forma un triángulo isósceles, uno de cuyos lados iguales mide 188 metros. El ángulo superior mide 76° y el izquierdo mide 52°. Encuentra la longitud de la base y la altura de esta pirámide.

8. Dos niños se encuentran en una cabecera de una cancha de básquetbol, separados por una distancia de 10 metros, en lados opuestos a la canasta de básquetbol. ¿A qué altura se encuentra la canasta si los ángulos que se forman entre cada uno de los niños y la canasta son de 30° y 45°, respectivamente?

9. Dos niños se encuentran a 6 metros de distancia uno del otro en la orilla de una fuente circular. Los ángulos formados entre la línea recta que une a los niños y las líneas que van de cada niño al centro de la fuente son de 35°. ¿Qué radio tiene la fuente?

10. Un cono y un cilindro se colocan en un plano horizontal, uno junto al otro, de manera que sus bases se tocan. Viendo la figura en un plano vertical, el ángulo formado entre los lados del cilindro y el cono es de 23°, la distancia entre el vértice del cono y la pared superior del cilindro es de 6 centímetros, y se sabe que la altura del cilindro es de 9 centímetros. ¿Cuál es el largo de la pared lateral del cono y cuál es la altura del cono?

11. La distancia entre Pachuca y Querétaro es de 226 kilómetros y la distancia entre Pachuca y el Distrito Federal es de 94 kilómetros. Supongamos que podemos ir de un sitio a otro, en línea recta, y que las distancias han sido tomadas en esas condiciones. Si el ángulo formado por las líneas que unen a Querétaro con el Distrito Federal y a éste con Pachuca mide 57°, ¿cuál es la distancia del Distrito Federal a Querétaro?

12. A un lado de un asta bandera monumental se encuentra una estatua que mide 6 metros de alto. La recta que une el extremo superior del asta con la parte inferior de la estatua forma un ángulo de 79° con respecto al piso, y la recta que va del extremo superior del asta a la parte superior de la estatua forma un ángulo de 78.37° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la altura del asta y a qué distancia se encuentra de la estatua?

13. Un niño se encuentra parado frente a un espejo a 80 centímetros de distancia. Con una linterna lanza un rayo de luz que forma un ángulo de 35° con el espejo. Al reflejarse el rayo, parte del espejo formando nuevamente un ángulo de 35° y alumbra a otro niño que se encuentra a 60 centímetros del punto en el que se reflejó el rayo de luz. ¿Qué distancia recorrió el rayo de luz?

Ley de los cosenos

Dos personas salen de la farmacia, una caminando y la otra en bicicleta. La que camina lo hace a una velocidad de 1.8 kilómetros por hora, mientras la que va en bicicleta recorre 8 kilómetros en una hora. Si ambas siguen una trayectoria recta y entre las trayectorias se forma un ángulo de 70°, ¿a qué distancia se encontrarán entre sí después de 30 minutos?

Solución:

Como la persona que va a pie camina 1.8 kilómetros en una hora, entonces en media hora habrá recorrido 0.9 kilómetros. El ciclista recorre 4 kilómetros en media hora.

Con estos datos, dibujamos el triángulo siguiente.

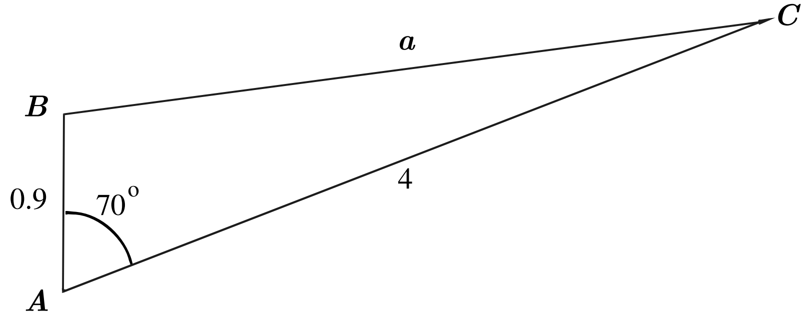


Figura 2-42

Aplicando la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

tenemos

$$a^2 = 4^2 + (0.9)^2 - 2\,(4)\,(0.9)\cos 70^\circ = 16 + 0.81 - 7.2\cos 70^\circ \approx 16.81 - 2.46 = 14.35$$

De donde

$$a \approx 3.79.$$

Por tanto, después de media hora la distancia entre las dos personas será aproximadamente de 3.79 kilómetros.

Ley de los cosenos

Dado un triángulo ABC cualquiera se tienen las identidades

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde se han nombrado a los lados y ángulos de la manera usual; a opuesto a A, etcétera.

Demostración: Colocamos el triángulo ABC en el plano cartesiano de manera que uno de sus lados esté sobre el eje X y un vértice coincida con el origen.

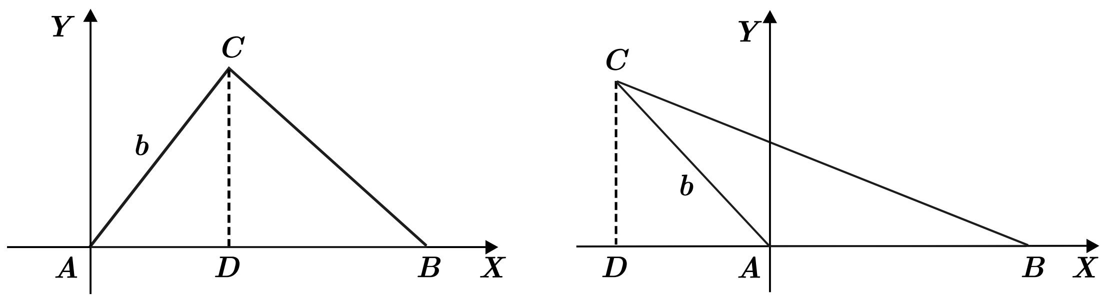


Figura 2-43

En el primer triángulo de la figura todos los ángulos son agudos, mientras que en el segundo el ángulo A es obtuso.

En ambos triángulos las coordenadas del punto B son $(c, 0)$ ya que el lado AB mide c unidades. Las coordenadas de A son $(0, 0)$.

Consideremos en la figura de la izquierda el triángulo rectángulo ADC. Entonces

$$\cos A = \frac{AD}{b} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} A = \frac{CD}{b},$$

de donde

$$AD = b\cos A \qquad \text{y} \qquad CD = b\operatorname{sen} A,$$

pero AD es la abscisa de C y CD es la ordenada. Así, $C\,(b\cos A, b\operatorname{sen} A)$.

En la figura de la derecha consideramos el triángulo rectángulo DAC; entonces el ángulo DAC es agudo y mide $180° - A$. Así,

$$\cos(180° - A) = \frac{AD}{b} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(180° - A) = \frac{CD}{b},$$

de donde

$$AD = b\cos(180° - A) \qquad \text{y} \qquad CD = b\operatorname{sen}(180° - A);$$

como C se encuentra en el segundo cuadrante, entonces su abscisa es negativa, es decir, es el opuesto de la longitud del lado DA, así que las coordenadas de C son

$$(-b\cos(180° - A), b\operatorname{sen}(180° - A)) = (-b(-\cos A), b\operatorname{sen} A) = (b\cos A, b\operatorname{sen} A).$$

En cualquier caso, el cuadrado de la distancia de $B\,(c, 0)$ a $C\,(b\cos A, b\operatorname{sen} A)$ es

$$\begin{aligned} d^2(B, C) &= (c - b\cos A)^2 + (0 - b\operatorname{sen} A)^2 = c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2\operatorname{sen}^2 A \\ &= c^2 - 2bc\cos A + b^2\left(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A\right) = c^2 + b^2 - 2bc\cos A. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$d^2(B, C) = a^2,$$

por tanto,

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A.$$

Intercambiando los papeles de A, B y C obtenemos las otras dos identidades. ∎

Solución de triángulos (continuación)

La ley de los cosenos nos permite completar la solución de triángulos arbitrarios.

LLL Conocemos los tres lados.

Usamos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

para conocer el ángulo A y similarmente para B y C.

LAL Conocemos dos lados y el ángulo entre ellos.

Llamemos b y c a los lados conocidos, entonces el ángulo que conocemos es A. Usamos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

para conocer el tercer lado a, y ahora podemos usar la ley de los senos o el inciso anterior para encontrar los otros dos ángulos.

Ejemplos

1. Un pentágono regular está inscrito en un círculo de radio $5\sqrt{2}$. Calcular su perímetro.

Solución:

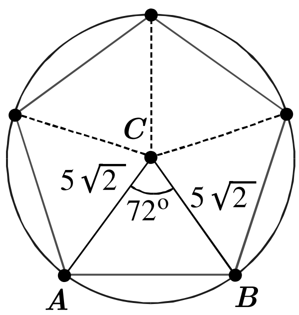


Figura 2-44

Unimos el centro del círculo con cada uno de los vértices del pentágono. Consideramos el triángulo ABC. Puesto que el pentágono es regular, el ángulo ACB mide

$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Usamos la ley de los cosenos para calcular la longitud del lado AB:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Como $a = b = 5\sqrt{2}$, entonces

$$c^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(5\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}\right)\cos 72^\circ = 50+50-100\cos 72^\circ \approx 100-30.9 = 69.1,$$

de donde

$$c \approx 8.31.$$

El perímetro del pentágono es $5\,(8.31) = 41.\,55$.

Por tanto, el perímetro del pentágono es, aproximadamente, de 41.55.

2. Dibujar el triángulo cuyos lados miden 2, 5 y 3.2 centímetros, respectivamente, y encontrar el valor de sus ángulos.

Solución:

Llamamos $a = 2$, $b = 5$, $c = 3.2$ y A, B y C a los vértices opuestos. Usamos la ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

despejando $\cos C$ y sustituyendo tenemos

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 + 25 - 10.24}{20} = 0.938,$$

de donde

$$C \approx 20.28^\circ.$$

Ahora usamos la ley de los senos para determinar el ángulo A:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\operatorname{sen} C} &= \frac{a}{\operatorname{sen} A} \\ \frac{3.2}{0.346} &= \frac{2}{\operatorname{sen} A}, \end{aligned}$$

despejando

$$\operatorname{sen} A = \frac{2\,(0.346)}{3.2} = 0.216.$$

Así,

$$A \approx 12.47^\circ.$$

Entonces

$$B = 180^\circ - 20.28^\circ - 12.47^\circ = 147.25^\circ.$$

Los ángulos del triángulo son $A \approx 12.47^\circ$, $B = 147.25^\circ$ y $C \approx 20.28^\circ$.

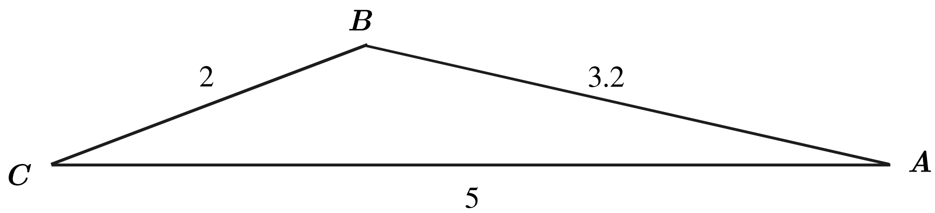


Figura 2-45

Ley de las tangentes

Dado un triángulo ABC cualquiera se tiene la identidad

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}. \tag{2.21}$$

Demostración: Utilizando la ley de los senos tenemos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = k,$$

donde k es una constante; entonces

$$a = k \operatorname{sen} A \qquad \text{y} \qquad b = k \operatorname{sen} B,$$

así que

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{k\,(\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B)}{k\,(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B)}.$$

Usando las identidades de suma-producto del final del capítulo tenemos

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\cos\frac{1}{2}\,(A+B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\,(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\,(A+B)\cos\frac{1}{2}\,(A-B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}\,(A-B)}{\tan\frac{1}{2}\,(A+B)},$$

que es lo que queríamos demostrar. ∎

Observación:

La ley de las tangentes fue usada en la resolución de triángulos para evitar el uso de la ley de los cosenos. La razón principal de esto es que en ese entonces no existían las calculadoras con las que ahora contamos, haciéndose sumamente complicado el cálculo.

Ejercicios

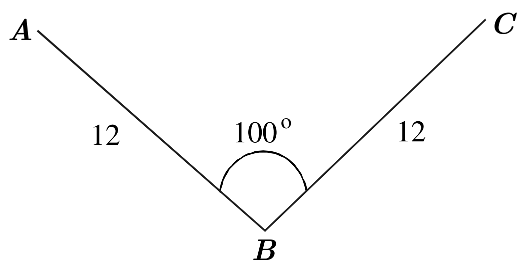
En cada caso, encuentra todos los elementos del triángulo.

1. $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$. **2.** $a = 4$, $b = 7$, $c = 5.24$. **3.** $a = 15$, $b = 10$, $C = 130°$.

4. $a = 17$, $c = 20$, $B = 117°$. **5.** $b = 7$, $c = 7$, $A = 120°$. **6.** $b = 9.5$, $c = 3.7$, $A = 60°$.

7. $a = 13$, $b = 10$, $c = 25$. **8.** $a = 4.3$, $b = 6.4$, $c = 2.8$. **9.** $a = 12.20$, $c = 18.75$, $B = 85°$.

10. Un metrónomo se encuentra en funcionamiento. Si la aguja mide 12 centímetros de largo, calcula la distancia que hay entre los puntos que toca el extremo de la aguja cuando subtiende un ángulo de 100°.



11. De las pirámides de Egipto, la de Micerino es la más pequeña. Si nos paramos frente a ella, vemos un triángulo isósceles cuya base mide 108 metros y uno de los lados restantes mide 85.27 metros. Encuentra la altura de esta pirámide.

12. Doscientos kilómetros antes de llegar a su destino, la brújula de un avión se descompone desviándose éste un ángulo de 40°. El piloto sabía cuál era la distancia que faltaba para llegar y, una vez desviado, recorre los 200 kilómetros en línea recta. ¿A qué distancia se encuentra del lugar al que se dirigía?

13. Los lados no paralelos de un paralelogramo forman un ángulo de 53° y miden 7 y 11 centímetros, respectivamente. ¿Cuál es el área del paralelogramo?

14. El minutero de un reloj mide 9 centímetros y el horario mide 6 centímetros. ¿Qué distancia hay entre los extremos de las agujas a las 2 de la tarde? ¿Qué distancia hay, entre los extremos, a las 5 de la tarde?

15. Sobre una ventana de forma rectangular se construye una cornisa en forma de V invertida cuyo centro forma un ángulo de 115°. Si los lados de la cornisa miden 76 centímetros cada uno, ¿cuál es el largo de la ventana?

16. En una bicicleta la distancia del centro del manubrio al centro de la llanta delantera es de 40 centímetros, la distancia del centro del manubrio al centro de la llanta trasera es de 80 centímetros, y el ángulo formado por las dos líneas que se determinan es de 68°. ¿Cuál es la distancia entre los centros de las llantas?

17. Para medir el ancho del cráter de un volcán, desde un helicóptero se observa que, suspendido éste en el aire, se forma un ángulo de 42° entre el helicóptero y los puntos del cráter entre los que se quiere medir la distancia. Si el helicóptero se encuentra a 22 metros de uno de los puntos y a 35 del otro, ¿cuál es el ancho del cráter?

18. Los lados de un triángulo miden 8, 15 y 17 centímetros, respectivamente. Encuentra la longitud del segmento que une el punto medio del lado más largo con el vértice opuesto. Este segmento es una de las llamadas medianas del triángulo.

19. En un triángulo ABC, la longitud del segmento que va del vértice A al punto medio D, del lado BC, mide 4. El lado b mide 3 y el ángulo C mide 60°.

a) Encuentra la longitud del lado DC.
b) Encuentra la longitud del lado AB.
c) ¿Cuál es el perímetro del triángulo ABC?
d) ¿Cuál es el área del triángulo ABC?

20. Encuentra las medidas de los ángulos de un triángulo isósceles cuyo perímetro es de 146.5 centímetros si la medida del lado desigual es de 38.5 centímetros.

21. Una persona desea comprar un terreno de 1250 metros cuadrados que le ofrecieron a razón de 120 pesos el metro cuadrado, pero observa que tiene una zona rectangular rocosa que no podrá utilizar, la cual ocupa 7 metros de ancho y cuyo largo no conoce. El dueño acepta descontar el monto correspondiente al rectángulo que contenga a esa zona. Para medir la zona, un topógrafo coloca el teodolito en un punto C y toma las distancias que hay a los puntos A y B que considera son los más alejados, de tal manera que la distancia de A a B es el largo de la zona rocosa. La distancia de C a A mide 18 metros y la de C a B es de 11 metros. Si el ángulo ACB mide 117°, ¿cuánto se pagará por el terreno?

22. Un niño hace rodar una rueda de bicicleta empujándola con un palito. Si, en cierto momento, la distancia entre la mano del niño y el centro de la rueda es de 70 centímetros, el largo del palo es de 60 centímetros, y el ángulo formado entre el palo y la línea que une el centro de la rueda con la mano del niño es de 21°, ¿cuál es el diámetro de la rueda?

23. Considera un triángulo ABC. Utilizando la ley de los cosenos y suponiendo que $\dfrac{\cos B}{c} = \dfrac{\cos C}{b}$, ¿qué puedes decir acerca de la forma del triángulo?

24. Considera un triángulo ABC. Partiendo de la ley de los senos,

- **a)** Prueba que $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} A \cos C + \cos A \operatorname{sen} C}$.
- **b)** Prueba que $\cos C = \pm\sqrt{\dfrac{a^2 - c^2 \operatorname{sen}^2 A}{a^2}}$.
- **c)** Sustituye el valor de $\cos C$ en la igualdad del inciso **a)** y prueba que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Aplicación de la trigonometría para el cálculo del área de un triángulo

Desde los primeros cursos de geometría nos enseñan que el área de un triángulo es el producto de la base y la altura dividido entre dos.

$$\boxed{\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}} \tag{2.22}$$

Pero el problema al que nos enfrentamos muchas veces es que no resulta fácil encontrar la altura. Dibuja en un patio un triángulo grande, por ejemplo, cuyos lados midan más de 5 metros. Trata luego de encontrar la altura.

Con ayuda de la trigonometría, podemos deducir otras fórmulas para el área de un triángulo que dependen de datos más fáciles de obtener, como las longitudes de los lados o la longitud de dos lados y el tamaño del ángulo comprendido entre ellos.

Área de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo entre ellos

Encuentra el área del triángulo ABC si $a = 4.5$, $b = 6.2$ y $C = 135°$.

Solución:

Para calcular el área del triángulo ABC necesitamos conocer una altura de éste. Consideramos el lado b como la base del triángulo y trazamos la altura h correspondiente a este lado.

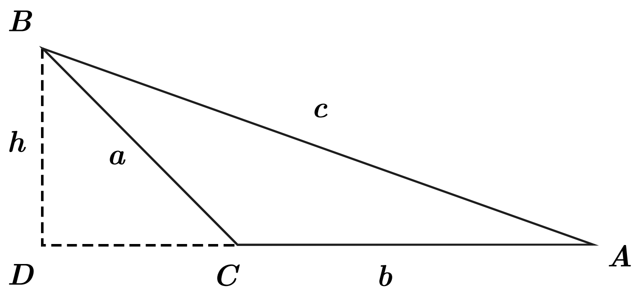


Figura 2-46

Para determinar h consideramos el triángulo rectángulo BDC. El ángulo DCB mide $180° - 135° = 45°$.

Entonces

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{h}{a},$$

de donde

$$h = a \operatorname{sen} 45° = 4.5 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 3.18.$$

Así, el área del triángulo ABC es

$$\frac{bh}{2} = \frac{6.2\,(3.18)}{2} = 9.858.$$

Por tanto, el área es aproximadamente igual a 9.85.

Supongamos que conocemos los lados a y b de un triángulo y el ángulo C entre ellos.

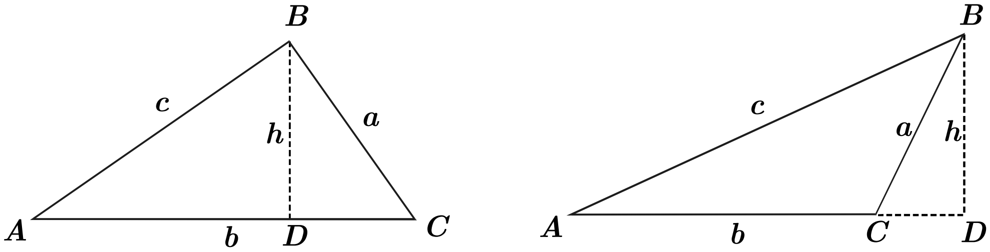


Figura 2-47

Sea h la altura del triángulo desde el vértice B. En la figura 2-47 vemos que

$$\operatorname{sen} C = \frac{h}{a},$$

así,

$$h = a \operatorname{sen} C.$$

Sustituyendo el valor de la altura en la fórmula (2.22), obtenemos

$$\boxed{\text{Área} = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}}, \tag{2.23}$$

es decir, el área del triángulo es igual a la mitad del producto de dos lados y el seno del ángulo comprendido entre ellos.

Área de un triángulo conociendo los tres lados

Ésta puede ser la fórmula más útil para calcular el área de un triángulo en el que tenemos que medir sus elementos, ya que lo más fácil de medir son sus lados.

Supongamos que conocemos los tres lados a, b y c de un triángulo. Por la ley de los cosenos tenemos

$$2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2. \tag{2.24}$$

Elevamos al cuadrado la fórmula (2.23):

$$\left(\text{Área}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\operatorname{sen}^2 C$$

y sustituimos $\operatorname{sen}^2 C = 1 - \cos^2 C$:

$$\begin{aligned}\left(\text{Área}\right)^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2 C) = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos C)(1+\cos C)\\ &= \frac{1}{16}(2ab)(1+\cos C)(2ab)(1-\cos C)\\ &= \frac{1}{16}(2ab+2ab\cos C)(2ab-2ab\cos C).\end{aligned}$$

Sustituimos ahora el valor de $2ab\cos C$ de acuerdo con la fórmula (2.24):

$$\left(\text{Área}\right)^2 = \frac{1}{16}(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2) = \frac{1}{16}\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right];$$

cada uno de los términos contenidos en los corchetes es una diferencia de cuadrados

$$\begin{aligned}\left(\text{Área}\right)^2 &= \frac{1}{16}\left[(a+b+c)(a+b-c)\right]\left[(c+a-b)(c-(a-b))\right]\\ &= \left[\frac{a+b+c}{2}\right]\left[\frac{a+b+c}{2}-c\right]\left[\frac{a+b+c}{2}-b\right]\left[\frac{a+b+c}{2}-a\right]\end{aligned}$$

si llamamos

$$s = \frac{a+b+c}{2},$$

es decir, s es la mitad del perímetro del triángulo. Entonces

$$\left(\text{Área}\right)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

y extrayendo raíz cuadrada obtenemos el área del triángulo:

$$\boxed{\text{Área} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.} \tag{2.25}$$

Esta fórmula se conoce como la *fórmula de Herón.*

Ejemplo

- Encontrar el área del triángulo cuyos lados miden $a = 13$, $b = 5$ y $c = 12$ centímetros.

  Solución:

  Calculamos el área utilizando la fórmula de Herón.

  El semiperímetro es

  $$s = \frac{13+5+12}{2} = 15.$$

  Entonces

  $$\text{Área} = \sqrt{15\,(15-13)\,(15-5)\,(15-12)} = 30.$$

  El área del triángulo es de 30 centímetros cuadrados.

Ejercicios

En cada caso, encuentra el área del triángulo.

1. $a = 8$, $b = 7$, $c = 9$. **2.** $b = 9.2$, $c = 3.7$, $A = 18°$. **3.** $b = 12$, $c = 25$, $A = 142°$.

4. $a = 5.6$, $b = 11.75$, $c = 6.8$. **5.** $b = 27.5$, $c = 31$, $A = 83°$. **6.** $a = 19$, $b = 27$, $c = 10$.

7. $a = \frac{8}{5}$, $b = \frac{9}{10}$, $c = \frac{11}{5}$. **8.** $b = 43$, $c = 26$, $A = \frac{3\pi}{8}$. **9.** $b = 3.25$, $c = 1.42$, $A = \frac{7\pi}{9}$.

Gráfica de las funciones trigonométricas

Para dibujar la *gráfica de la función seno*, debemos localizar en el plano los puntos $(x, \operatorname{sen} x)$. Para esto, primero localizamos en el círculo unitario y para cada número x el punto $P_x\,(\cos x, \operatorname{sen} x)$. El número x representa la medida en radianes del ángulo UOP_x.

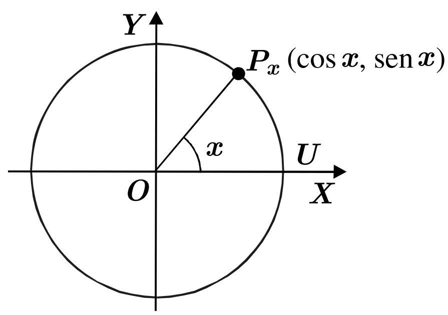


Figura 2-48

Después, desplazamos el círculo hacia la izquierda, sin girarlo, hasta que su centro quede en el punto $(-1, 0)$. Como resultado de lo anterior, P se movió al punto $P'\,(-1 + \cos x, \operatorname{sen} x)$.

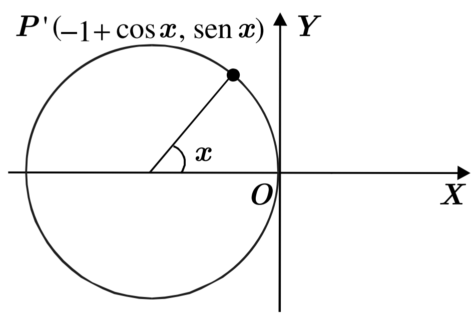


Figura 2-49

Por último, a través del punto x del eje X trazamos una vertical y por P' una horizontal; donde se cortan estas rectas es el punto $(x, \operatorname{sen} x)$.

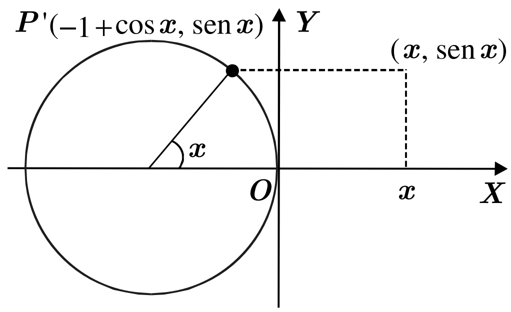


Figura 2-50

En la siguiente figura se ha aplicado el proceso anterior para $x = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}, \pi$.

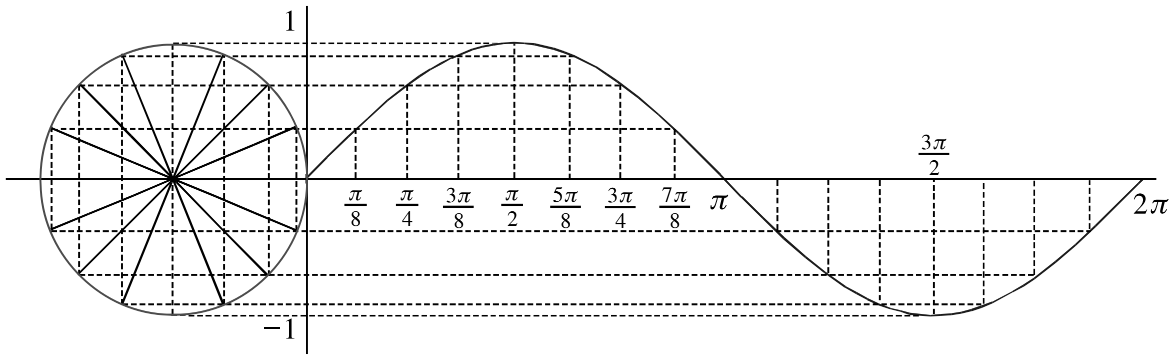


Figura 2-51

Observaciones:

- Cuantos más ángulos sean considerados, obtendremos más puntos de la gráfica y, por consiguiente, mayor exactitud en el dibujo.
- La ordenada de cualquier punto sobre el círculo está entre -1 y 1, es decir, el rango de la función seno es el intervalo $[-1, 1]$.
- La ordenada es positiva para los puntos que se encuentran en el primero y segundo cuadrantes y negativa en el tercero y cuarto cuadrantes. Entonces, la función seno es positiva en el intervalo $[0, \pi]$ y negativa en $[\pi, 2\pi]$.

Recordamos que

$$\operatorname{sen}(x + 2n\pi) = \operatorname{sen} x, \qquad \text{donde } n \text{ es un número entero;}$$

o sea, $P_x = P_{x+2n\pi}$; por tanto, la gráfica de la función seno se repite en cada intervalo de longitud 2π.

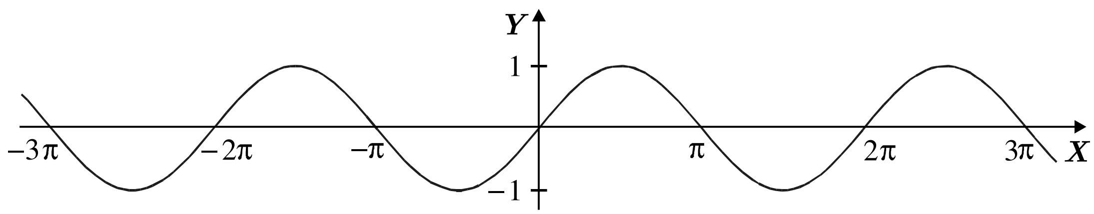


Figura 2-52

El dominio de la función seno es el conjunto de los números reales, es decir:

$$\operatorname{sen}: \quad \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]\,.$$

Para dibujar la *gráfica de la función coseno*, utilizamos la identidad

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Así, por ejemplo:

$$\cos 0 = \operatorname{sen}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad \cos \pi = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1,$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\pi = 0, \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0.$$

En la siguiente figura se indica cómo obtener el punto $(x, \cos x)$ a partir de la gráfica de la función seno.

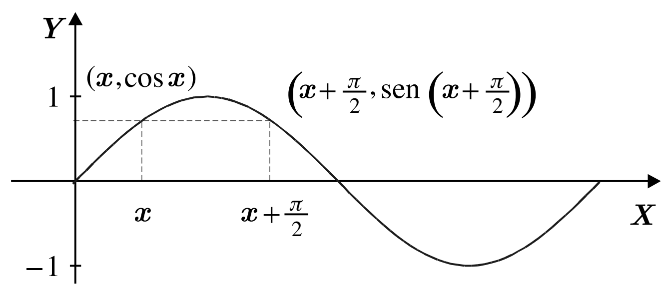


Figura 2-53

Al hacer lo anterior para cada x, se obtiene que la gráfica del coseno es la siguiente (observamos que para obtenerla basta desplazar $\frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda la gráfica de la función seno).

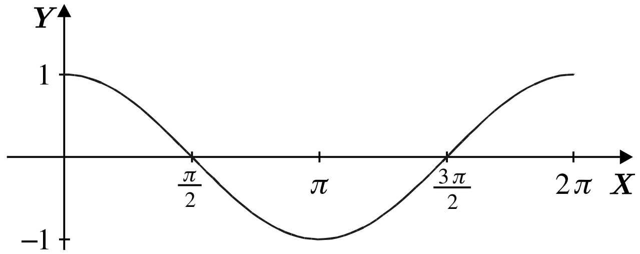


Figura 2-54

Observaciones:

- La abscisa de cualquier punto sobre el círculo está entre -1 y 1, es decir, el rango de la función coseno es el intervalo $[-1, 1]$.

- La abscisa de tales puntos es positiva para los que se encuentran en el primero y cuarto cuadrantes y negativa en el segundo y tercer cuadrantes. Entonces la función coseno es positiva en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ y negativa en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Puesto que

$$\cos(x + 2n\pi) = \cos x, \qquad \text{donde } n \text{ es un número entero;}$$

entonces la gráfica de la función coseno se repite en cada intervalo de longitud 2π.

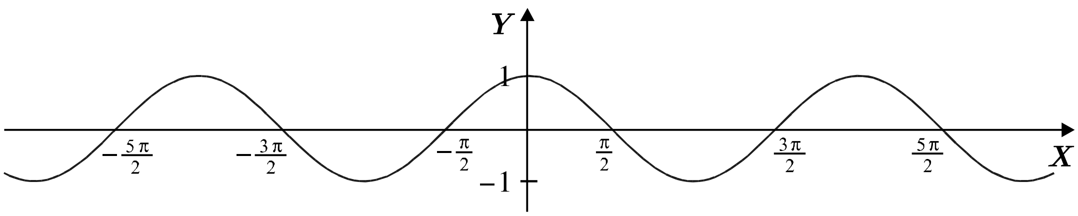


Figura 2-55

El dominio de la función coseno es el conjunto de los números reales, es decir:

$$\cos : \quad \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] .$$

Para localizar el punto $(x, \tan x)$, con $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, procedemos del modo siguiente: localizamos el punto P_x en el círculo unitario tal que x es la medida radián del ángulo UOP_x y prolongamos el radio $0P_x$ hasta que corta a la tangente al círculo que pasa por $(1, 0)$. El punto obtenido es $(1, \tan x)$. Ver la figura 2-23 de la página 75.

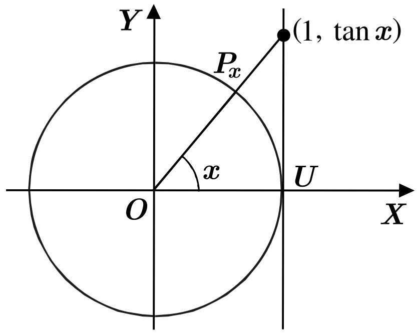


Figura 2-56

Al desplazar el círculo, sin girarlo, una unidad hacia la izquierda, obtenemos

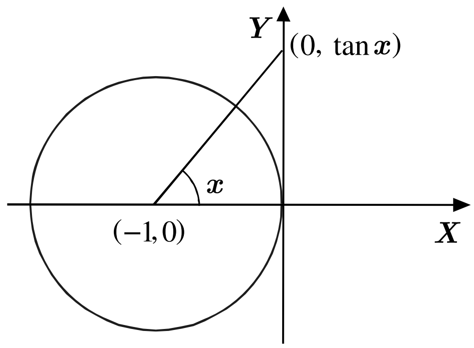


Figura 2-57

Por consiguiente, al trazar una horizontal por el punto $(0, \tan x)$ y una vertical por $(x, 0)$ obtenemos como intersección el punto $(x, \tan x)$.

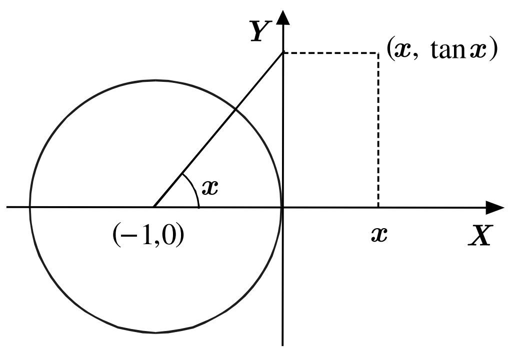


Figura 2-58

En la figura siguiente se hace lo anterior para $x = 0$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{12}$. Con el mismo procedimiento se dibuja el resto de la gráfica.

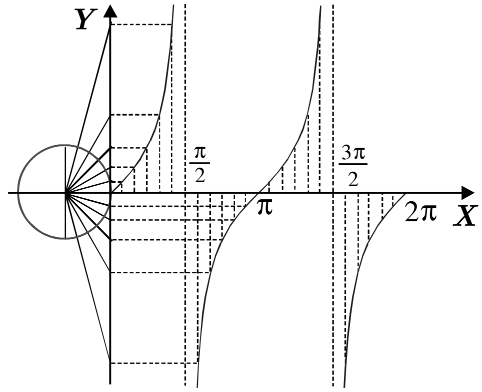


Figura 2-59

Observaciones:

- Cuantos más ángulos sean considerados, más puntos de la gráfica obtendremos y, por consiguiente, mayor exactitud en el dibujo.
- La función tangente no está definida en $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

Puesto que

$$\tan(x + n\pi) = \tan x, \qquad \text{donde } n \text{ es cualquier número entero,}$$

entonces la gráfica de la función tangente se repite en cada intervalo de longitud π.

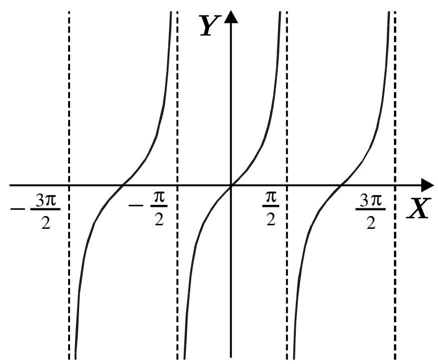


Figura 2-60

La función tangente no está definida en los puntos donde el coseno vale cero, que son los puntos de la forma

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad \text{donde } n \text{ es cualquier número entero.}$$

El dominio de la función tangente es el conjunto $\mathbb{R}\setminus\left\{x \in \mathbb{R}|\ x = (2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, es decir:

$$\tan\colon \mathbb{R}\setminus\left\{x \in \mathbb{R}|\ x = (2n+1)\frac{\pi}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La gráfica de la función cotangente es

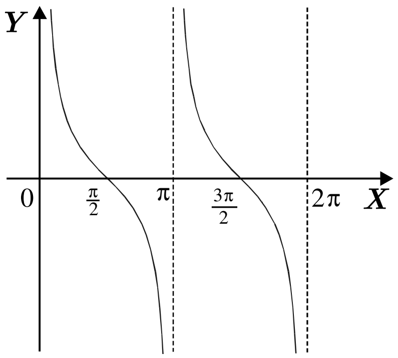


Figura 2-61

Observaciones:

- La función cotangente no está definida en π y 2π.
- Puesto que

$$\cot(x+n\pi)=\cot x, \qquad \text{donde } n \text{ es cualquier número entero,}$$

  entonces la gráfica de la función cotangente se repite en cada intervalo de longitud π.
- La función cotangente no está definida en los puntos donde el seno vale cero, que son los puntos de la forma

$$x=n\pi, \qquad \text{donde } n \text{ es cualquier número entero.}$$

- El dominio de la función cotangente es el conjunto $\mathbb{R}\diagdown\{x\in\mathbb{R}|\ x=n\pi\}$, es decir:

$$\cot\colon\ \mathbb{R}\diagdown\{x\in\mathbb{R}|\ x=n\pi\}\longrightarrow\mathbb{R}.$$

La *gráfica de la función secante* se obtiene a partir de la gráfica de la función coseno, ya que

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}.$$

En la figura siguiente aparecen ambas gráficas.

Analicemos el comportamiento de la función secante en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

A medida que x se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ los valores de la función coseno se hacen cada vez más pequeños y, por consiguiente, los de la secante crecen cada vez más.

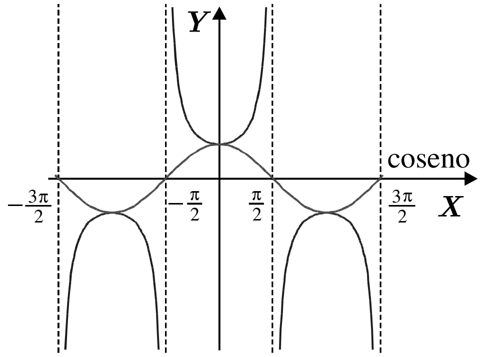


Figura 2-62

entonces la gráfica de la secante es

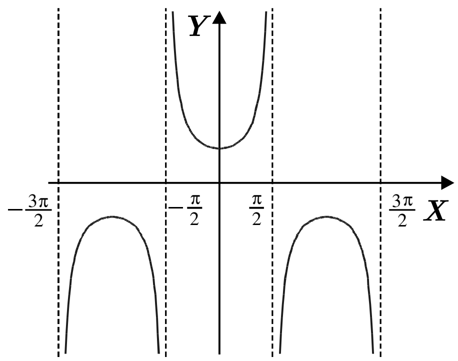


Figura 2-63

Observaciones:

- Puesto que el coseno se repite en cada intervalo de longitud 2π, entonces la gráfica de la secante se repite de igual manera.

- La función secante no está definida en los puntos donde el coseno vale cero, que son los puntos de la forma:

$$x = (2n+1)\,\frac{\pi}{2}, \qquad \text{donde } n \text{ es un número entero.}$$

  El dominio de la función secante es el conjunto $\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}|\ x=(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\right\}$, es decir:

$$\sec\colon\ \mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}|\ x=(2n+1)\,\frac{\pi}{2}\right\}\longrightarrow\mathbb{R}.$$

De manera similar al caso anterior, la *gráfica de la función cosecante* se obtiene a partir de la gráfica de la función seno.

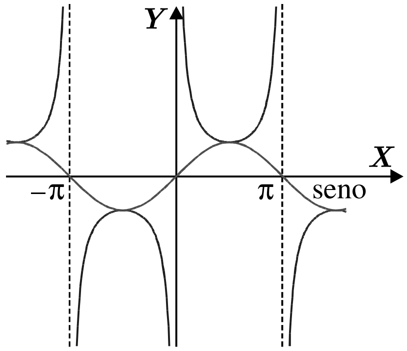


Figura 2-64

La gráfica de la función cosecante es

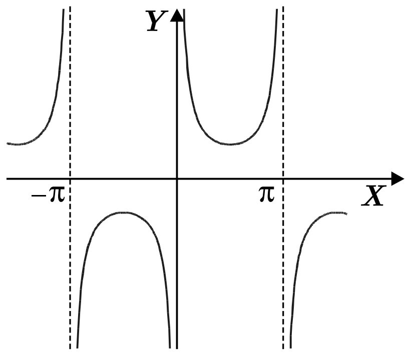


Figura 2-65

Observaciones:

- Puesto que el seno se repite en cada intervalo de longitud 2π, entonces la gráfica de la cosecante se repite de igual manera.
- La función cosecante no está definida en los puntos donde el seno vale cero, que son los puntos de la forma:

$$x = n\pi, \qquad \text{donde } n \text{ es un número entero.}$$

El dominio de la función cosecante es el conjunto $\mathbb{R}\setminus\{x \in \mathbb{R}|\ x = n\pi\}$, es decir:

$$\csc\colon \mathbb{R}\setminus\{x \in \mathbb{R}|\ x = n\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Funciones trigonométricas inversas

En general, sabemos que para hablar de la inversa de una función es necesario que ésta sea inyectiva. Puesto que las funciones trigonométricas no lo son, entonces por convención se elige, en cada caso, uno de los intervalos de mayor longitud en el que la función sea inyectiva. Como hay una infinidad de intervalos donde esto sucede, para que no haya ambigüedad, en la mayoría de los textos se toma la llamada rama principal de las funciones trigonométricas.

En la gráfica de la función seno la rama principal se obtiene al considerar el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

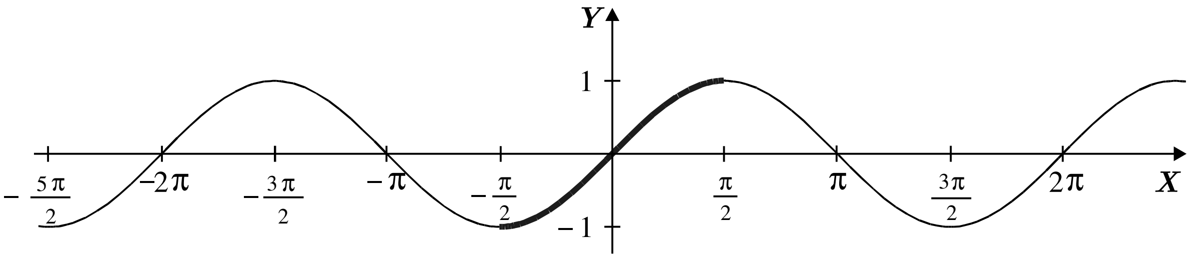


Figura 2-66

La inversa de la función seno, llamada *arco seno*, la denotaremos como arcsen y se define como

$$
\begin{array}{rccc}
\operatorname{arcsen}: & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right], \\
& x & \longrightarrow & y
\end{array}
$$

donde

$$
y=\operatorname{arcsen} x \qquad \text{si} \qquad x=\operatorname{sen} y \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}.
$$

La gráfica de la función arco seno es

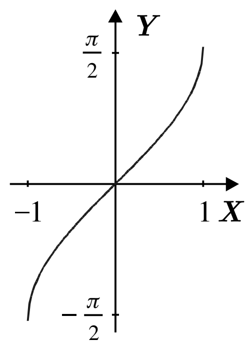


Figura 2-67

la cual se obtiene reflejando la gráfica del seno con respecto a la recta $y=x$.

Observación:

Puesto que las funciones seno y arco seno son inversas, entonces tenemos

$$
\begin{array}{ll}
\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)=x & \text{donde } x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right], \\
\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} y)=y & \text{donde } y\in[-1,1].
\end{array}
$$

La rama principal de la función coseno se obtiene al considerar el intervalo $[0,\pi]$.

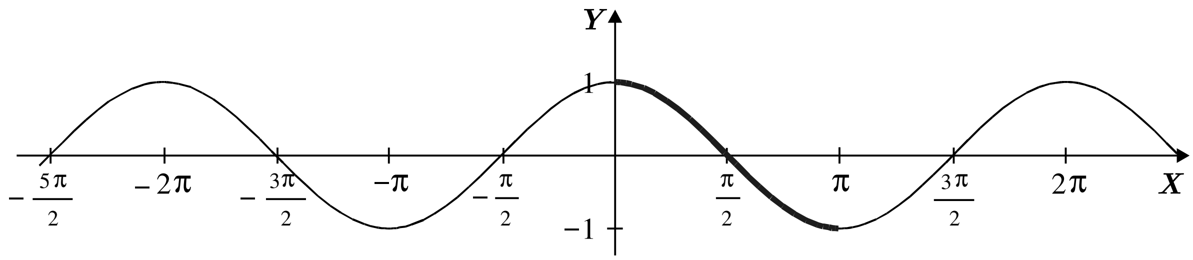


Figura 2-68

La inversa de la función coseno, llamada *arco coseno*, la denotaremos como arccos y se define como

$$\begin{array}{rccc} \arccos\colon & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi]\,, \\ & x & \longrightarrow & y \end{array}$$

donde

$$y = \arccos x \qquad \text{si} \qquad x = \cos y \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

La gráfica de la función arco coseno es

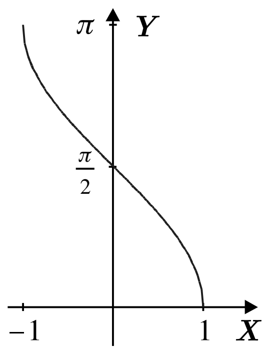


Figura 2-69

Se restringe el dominio de la función tangente considerando únicamente valores en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ para que sea uno a uno.

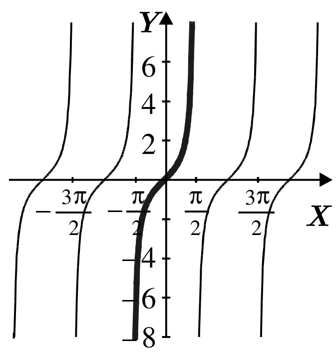


Figura 2-70

La inversa de la función tangente, llamada *arco tangente*, la denotaremos como arctan y se define como

$$\begin{array}{rccc} \arctan: & (-\infty.\infty) & \longrightarrow & \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ & x & \longrightarrow & y \end{array}$$

donde

$$y = \arctan x \qquad \text{si} \qquad x = \tan y \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

La gráfica de la función arco tangente es

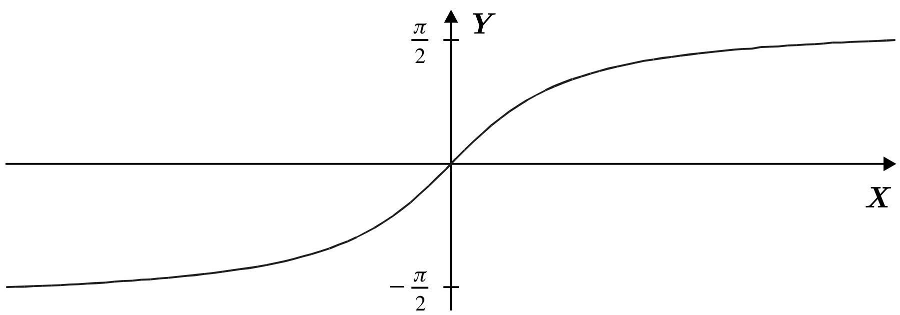


Figura 2-71

La inversa de la función cotangente, llamada *arco cotangente*, la denotaremos como arccot y se define como

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arccot}: & (-\infty.\infty) & \longrightarrow & (0, \pi), \\ & x & \longrightarrow & y \end{array}$$

donde

$$y = \operatorname{arccot} x \qquad \text{si} \qquad x = \cot y \quad \text{y} \quad 0 < y < \pi.$$

La gráfica de la función arco cotangente es

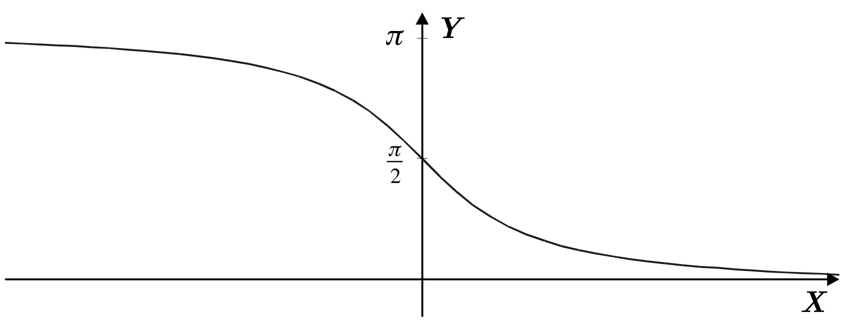


Figura 2-72

La rama principal de la función secante se obtiene al considerar el conjunto $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

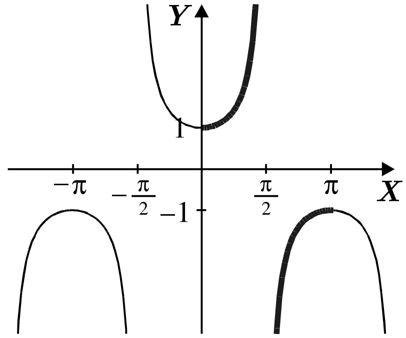


Figura 2-73

La inversa de la función secante, llamada *arco secante*, la denotaremos como arcsec y se define como

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsec}\colon \quad (-\infty,-1]\cup[1,\infty) &\longrightarrow \left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right], \\ x &\longrightarrow y \end{aligned}$$

donde

$$y=\operatorname{arcsec} x \qquad \text{si} \qquad x=\sec y \quad \text{y} \quad y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right].$$

La gráfica de la función arco secante es

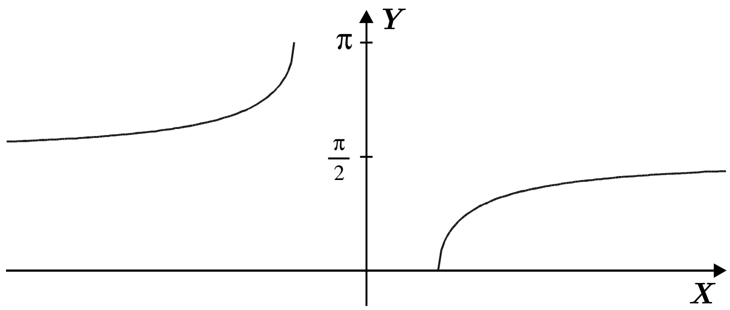


Figura 2-74

La rama principal de la función cosecante se obtiene al considerar el conjunto $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

La inversa de la función cosecante, llamada *arco cosecante*, la denotaremos como arccsc y se define como

$$\begin{aligned} \operatorname{arccsc}\colon \quad (-\infty,-1]\cup[1,\infty) &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right], \\ x &\longrightarrow y \end{aligned}$$

donde

$$y=\operatorname{arccsc} x \qquad \text{si} \qquad x=\csc y \quad \text{y} \quad y\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right].$$

La gráfica de la función arco cosecante es

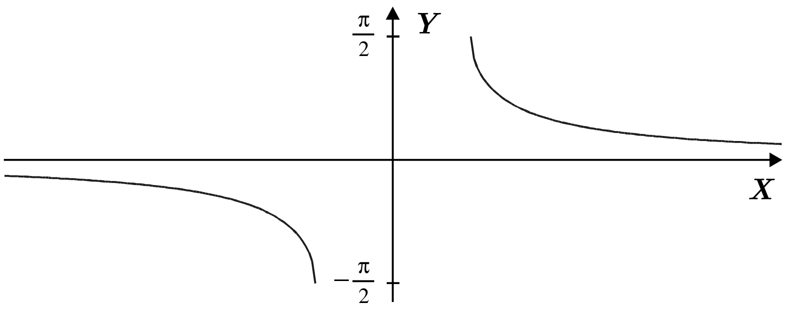


Figura 2-75

Resumen de identidades trigonométricas

Fórmulas de reducción

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-A) &= -\operatorname{sen} A & \cos(-A) &= \cos A \\ \operatorname{sen}(180^\circ - A) &= \operatorname{sen} A & \cos(180^\circ - A) &= -\cos A \\ \operatorname{sen}(180^\circ + A) &= -\operatorname{sen} A & \cos(180^\circ + A) &= -\cos A \\ \operatorname{sen}(90^\circ - A) &= \cos A & \cos(90^\circ - A) &= \operatorname{sen} A \\ \operatorname{sen}(90^\circ + A) &= \cos A & \cos(90^\circ + A) &= -\operatorname{sen} A \end{aligned}$$

Fórmulas de suma

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos \beta - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\ \tan(A+B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \end{aligned}$$

Fórmulas de diferencia

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A-B) &= \operatorname{sen} A \cos B - \cos \alpha \operatorname{sen} B \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} B \\ \tan(A-B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \end{aligned}$$

Identidades pitagóricas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ \tan^2 A + 1 &= \sec^2 A \\ \cot^2 A + 1 &= \csc^2 A \end{aligned}$$

Fórmulas del doble de un ángulo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2A &= 2 \operatorname{sen} A \cos A \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2\operatorname{sen}^2 A = 2\cos^2 A - 1 \\ \tan 2A &= \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \end{aligned}$$

Fórmulas de la mitad de un ángulo

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\\
\cos\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\\
\tan\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\frac{\operatorname{sen}A}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\operatorname{sen}A}
\end{aligned}$$

Identidades suma-producto

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B &= 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)\\
\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B &= 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)\\
\cos A+\cos B &= 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)\\
\cos A-\cos B &= -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)
\end{aligned}$$

Identidades producto-suma

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}A\cos B &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A+B)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(A-B)\\
\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B &= \frac{1}{2}\cos(A-B)-\frac{1}{2}\cos(A+B)\\
\cos A\cos B &= \frac{1}{2}\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)
\end{aligned}$$

Ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

Ley de los cosenos

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A\\
b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos B\\
c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C
\end{aligned}$$

Ley de las tangentes

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

Ejercicios de repaso

1. Prueba que $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan x\ -1}{\tan x\ +1}$.

2. Prueba que $\frac{1}{1+\sec^2 x}+\frac{1}{1+\csc^2 x}+\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{1+\cos^2 x}=2$.

3. Resuelve la ecuación $6\operatorname{sen}^2\alpha^\circ-\operatorname{sen}\alpha^\circ-1=0$.

4. Un papalote se atora en una rama de un pino. La cuerda que lo sujeta mide 20 metros de largo. Estirando la cuerda y apoyándola en el suelo, se forma un ángulo de $62°$. ¿A qué altura se encuentra atorado el papalote?

5. Un poste mide 12 metros de altura. La línea que une el extremo final de su sombra y la punta del poste forma con el suelo un ángulo de $53.13°$. ¿Qué fracción de la altura del poste mide la sombra?

6. Las bases de un trapecio isósceles miden 12 y 6 metros, respectivamente. Si los lados restantes miden 5 metros cada uno, usa la fórmula de Herón para calcular el área del trapecio.

7. Un polígono regular de n lados está inscrito en un círculo de radio 5. ¿Cuál es el perímetro del polígono?

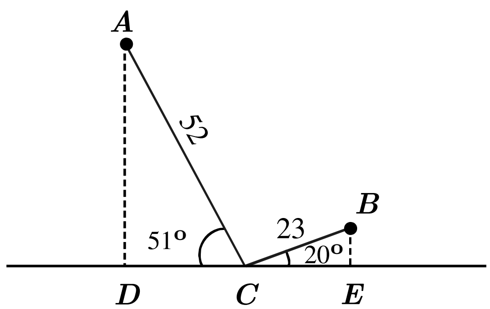
8. Dos de los ángulos de un triángulo miden $82°$ y $14°$, y el lado adyacente a ambos ángulos mide 19 metros. Encuentra el área del triángulo.

9. Uno de los ángulos de un triángulo mide $39°$, los lados que lo forman tienen longitudes de 20 y de 9 centímetros, respectivamente. ¿Cuál es el área del triángulo?

10. El vértice A de un triángulo coincide con el centro de un círculo de radio 6, mientras que los dos vértices restantes se encuentran sobre el círculo. Si el ángulo A mide $72°$, usa la fórmula de Herón para calcular su área.

11. Un pentágono regular está inscrito en un círculo de radio r. Calcula el área de la región que se encuentra dentro del círculo y fuera del pentágono.

12. Dos postes situados en los puntos A y B de la figura siguiente se encuentran en una calle y sostienen cada uno un cable, uno de 52 metros y el otro de 23. Ambos cables llevan corriente eléctrica a una casa situada en el punto C; el cable de 52 metros forma un ángulo de $51°$, mientras que el más corto forma un ángulo de $20°$. ¿Qué distancia hay entre los puntos A y B? Calcula las distancias AD y BE de cada uno de los postes a la pared de la casa.



13. En mi librero, el tomo II de la enciclopedia se ha inclinado formando en su parte superior un ángulo de $12°$ con el tomo III. Si el largo de cada tomo es de 30 centímetros, ¿qué distancia hay entre sus bases? Si el tomo I está acomodado en forma vertical y su pie toca el del tomo II, ¿qué ángulo se forma entre ellos?

14. El dedo gordo del pie de un niño de 12 años mide 3 centímetros y una radiografía muestra

que el hueso se ha desviado, de manera que la punta del dedo se encuentra a 0.5 centímetros del lugar en el que debía estar. ¿Cuántos grados se ha desviado el hueso?

15. Considera un pentágono regular de 2 centímetros de lado. Se sabe que cada uno de los ángulos interiores mide 108°. Dibuja las líneas que van desde uno de los vértices hacia los vértices restantes. Encuentra las longitudes de los lados de cada uno de los tres triángulos que se formaron. Usa la fórmula de Herón y encuentra el área del pentágono.

16. Si $x + y + z = \pi$, prueba que $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 2z = 4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$.

17. Usando las fórmulas (2.23) y (2.25) para encontrar el área de un triángulo, prueba que

i) $\operatorname{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$.

ii) $\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{s(s-a)}{bc}$.

iii) $\tan^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$.

iv) $\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$.

Ejercicios con GeoLab

Utiliza el Geolab para hacer los siguientes ejercicios.

1. Medida de ángulos. En la pantalla de datos gráficos, construye tres puntos A, B, C usando el constructor *Punto directo*.

Construye el triángulo T usando el constructor *Polígonos* que se encuentra en el menú de **Define puntos** o en el menú **Define rectas**. indicando que es un polígono de tres lados.

Arrastra los puntos para colocar el triángulo de manera que al recorrerlo de A a B, de B a C y de C a A lo recorras en sentido contrario a las manecillas del reloj. Construye el ángulo con vértice en A, para ello usa el constructor *Ángulos->Ángulo AOB* eligiendo los vértices B, A, C ¡en ese orden! Al hacerlo en ese orden entendemos que el ángulo construido es el formado al girar segmento BA en contra de las manecillas del reloj hasta llegar al segmento CA. La construcción debe quedar como la siguiente figura de la izquierda..

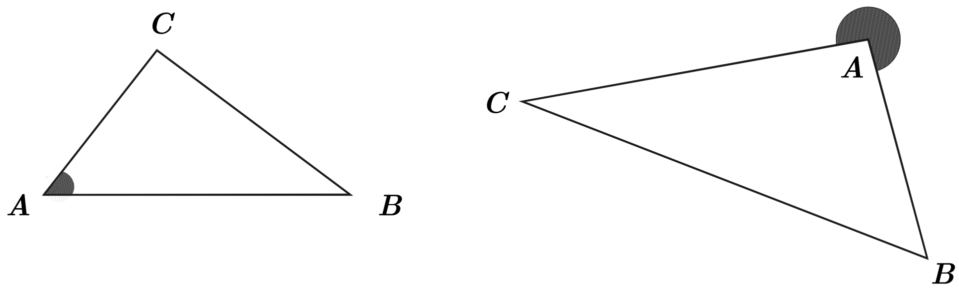


Figura 2-76

Haz clic en el icono **Datos de Objetos** para que aparezca la ventana con la lista de objetos. Haz doble clic dentro de esa ventana para que muestre los valores de los objetos. Esta ventana muestra la descripción de los objetos, sus valores en coordenadas cartesianas y sus valores en coordenadas polares. Los ángulos los puedes ver en radianes, grados con decimales o grados minutos y segundos. Para cambiar estas presentaciones elige el menú *Herramientas->Unidades angulares*, después haz doble clic en la ventana de datos o arrastra alguno de los vértices del triángulo para que refresque los valores.

2. **Ángulos en triángulos orientados**. Si arrastras los vértices del triángulo de manera que ahora el triángulo ABC se recorra enel sentido a las manecillas del reloj el ángulo marcado ahora es el de afuera, como la parte derecha de la figura anterior. Para que no suceda esto, hay que definir el ángulo de una manera más precisa. Primero hay que decir que el triángulo está orientado. El triángulo izquierdo de la figura 2-76 está orientado positivamente porque ABC se recorren en el sentido contrario a las manecillas del reloj, en cambio, el triángulo de la derecha está orientado negativamente porque se ABC se recorren en el sentido de las manecillas del reloj.

   Construye la condición *Polígono orientado* usando el constructor

   Define condiciones->Geométricas->Poligono orientado

   y señala al renglón del polígono en la ventana de objetos que está abajo a la izquierda. Arrastra un vértice del polígono de manera que cambie la orientación del triángulo y observa que la condición cambia de Verdadera a Falsa.

   Coloca nuevamente el triángulo en la posición de la izquierda de la figura 2-76 y construye el ángulo en B usando ahora el constructor *Ángulos->Ángulo AOB con orientación o* eligiendo los vértices C, B, A en este orden y finalmente haciendo clic en el renglón de la condición (a). Observa que ahora al cambiar de orientación el triángulo el ángulo en B sigue siendo el ángulo interior.

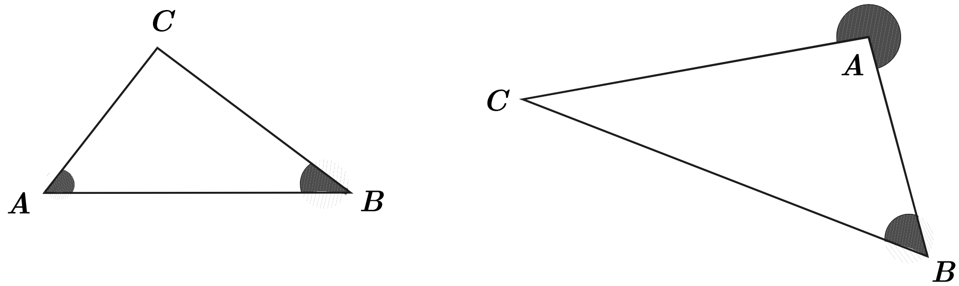


Figura 2-77

3. **Suma de ángulos interiores de triángulos**. Construye los tres ángulos interiores de un triángulo, llámalos E,F,G. Ahora construye la suma de ellos. Para ello utiliza el constructor *Medida de álgulos -> Calculado* que está en el menú de escalares. En la ventana de texto escribe E.a+F.a+G.a y acepta la construcción. La notación X.a significa el valor del ángulo del elemento X. En la ventana de objetos debe aparecer el objeto H y la leyenda "Definida por fórmula: H=H(E,F,G). Haciendo clic en la ventana, se muestra su valor 180 o 3.1416 dependiendo de la elección que se tenga en este momento de la medida de ángulos.

4. Suma de ángulos interiores de polígonos. Construye un cuadrilátero, un pentágono y un hexágono. Construye sus ángulos interiores y la suma de ellos como en el ejercicio anterior. Puedes deducir la fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono?

5. Construcción de un triángulo dados sus lados. Construiremos un triángulo de lados $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Construye tres números a, b, c con el constructor *Escalares->Definición directa* del menú Define escalares. Oprime el icono **Datos analíticos** para cambiarte a la pantalla de datos analíticos y cambia los valores de los escalares a, b y c. Asigna los valores $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Regresa a la pantalla gráfica oprimiendo el icono **Pantalla gráfica**. Construye un punto directo, llámalo A. Construye un círculo con centro en A y radio b usando el constructor *Centro y radio* del menú de Círculos. Llamalo cb. Ahora construye un punto C en el círculo cb, usa el constructor *Punto en...-> Punto en círculo* del menú de puntos . Construye otro círculo, ahora con centro en A y radio c, llámalo cc. y finalmente otro círculo ca con centro en C y radio a. Ahora construye el punto B como intersección de los círculos ca y cc. Usa el constructor Intersección de -> Intersección de Círculos -> Por ratón. Señala cualquiera de las dos intersecciones de los círculos. Construye el triángulo con vértices en los puntos A, B y C.

6. Condición para la existencia de un triángulo. Utiliza la construcción del ejercicio anterior. Modifica el valor de c haciendolo igual a 8. Observa que el punto B desaparece. Regresa su valor a 5 y modifica el valor de b haciendolo igual a 9. Nuevamente el punto B desaparece. ¿Qué relación debe haber entre los valores de a, b y c para que se forme un triángulo?

Capítulo 3

Logaritmos y exponenciales

Presentamos las funciones logarítmicas y exponenciales, examinando con especial énfasis las que tienen al número e como base. El logaritmo, en tal caso, es llamado el logaritmo natural ($\ln(x)$); éste se introduce mediante el uso de áreas de regiones bajo la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, lo cual creemos que permite aprovechar la intuición geométrica. De este modo se llega a la propiedad logarítmica fundamental: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. La función inversa de $\ln(x)$ es la función exponencial e^x. Una vez establecido que puede definirse a^r siempre que a sea un número positivo y r un número arbitrario, se dan las leyes de los exponentes y se introducen las funciones logarítmicas y exponenciales con distintas bases ($\log_a(x)$, a^x), por ejemplo con base 10, y se da la fórmula $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ conocida como de cambio de base. También se resuelven ecuaciones en las que intervienen potencias y logaritmos.

Las funciones logarítmicas y exponenciales se usan ampliamente para describir fenómenos de crecimiento y decrecimiento. Concluimos el capítulo con una sección de aplicaciones donde se tratan los temas de interés compuesto, el decaimiento radioactivo, y el crecimiento de poblaciones de bacterias.

El logaritmo natural y el número e

Sobre un intervalo $[a, b]$ del semieje positivo X construyamos dos rectángulos, uno inscrito y otro excrito a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Hagamos lo mismo sobre el intervalo $[ta, tb]$, donde $t > 0$. Probar que las áreas de los rectángulos inscritos coinciden entre sí, y que lo mismo sucede con los excritos.

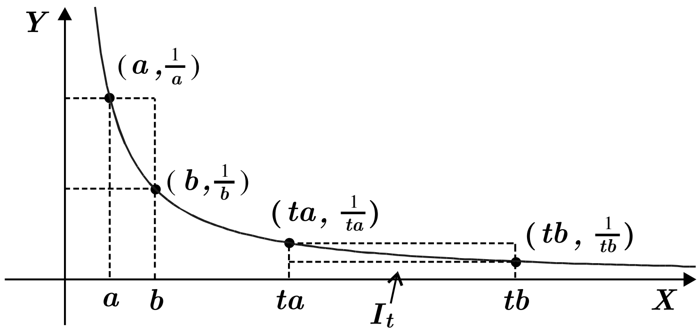


Figura 3-1

Solución:
Las áreas de los rectángulos construidos sobre $[a, b]$ son

$$I = (b - a)\,\frac{1}{b} \text{ (inscrito)} \qquad \text{y} \qquad E = (b - a)\,\frac{1}{a}, \text{ (excrito).}$$

En tanto que las áreas de los rectángulos con base en $[ta, tb]$ son

$$I_t = (tb - ta)\,\frac{1}{tb} \qquad \text{y} \qquad E_t = (tb - ta)\,\frac{1}{ta}.$$

De donde,

$$I_t = (tb - ta)\,\frac{1}{tb} = (b - a)\,\frac{1}{b} = I \qquad \text{y} \qquad E_t = (tb - ta)\,\frac{1}{ta} = (b - a)\,\frac{1}{a} = E.$$

Es posible demostrar que la propiedad anterior la comparten otras regiones basadas en tal tipo de intervalos y limitadas por arriba por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$. De hecho, si para cada intervalo $[a, b]$, con $a > 0$, llamamos $A_{[a,b]}$ al área de la región que está sobre el intervalo $[a, b]$ (figura 3-2) y abajo de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces resulta que

$$A_{[a,b]} = A_{[ta,tb]} \text{ si } t > 0. \tag{3.1}$$

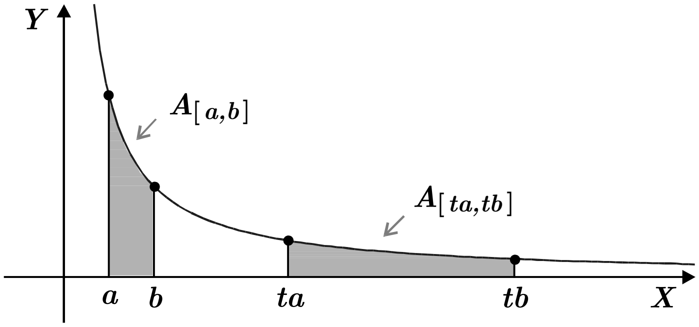


Figura 3-2

Usaremos esto en lo que sigue. Si x y y son números mayores que 0, entonces es claro a partir de la figura 3-3 que

$$A_{[1,xy]} = A_{[1,x]} + A_{[x,xy]} \qquad \text{(ver la figura 3-2)},$$

y por (3.1) tenemos

$$A_{[x,xy]} = A_{[1,y]},$$

de donde

$$A_{[1,xy]} = A_{[1,x]} + A_{[1,y]}. \tag{3.2}$$

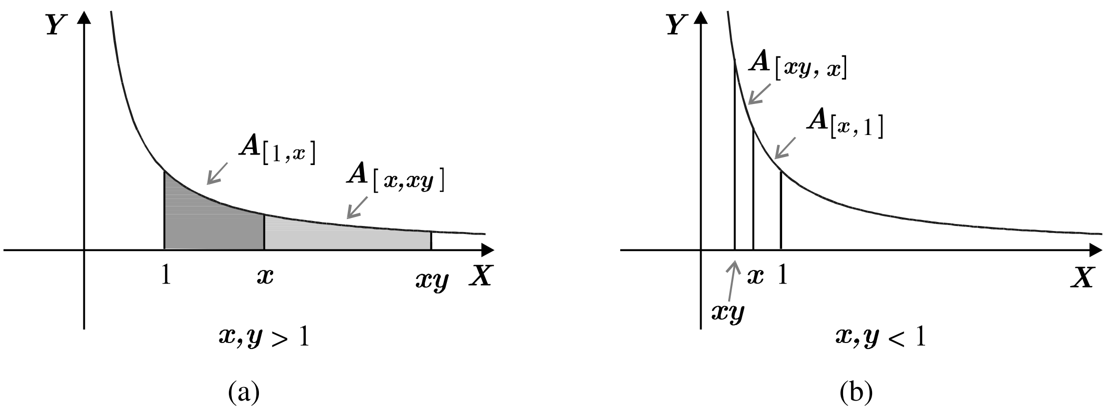


Figura 3-3

Definimos la función $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, llamada *logaritmo natural*, como

$$\boxed{\ln(x) = \begin{cases} A_{[1,x]} & \text{si } x \geq 1 \\ -A_{[x,1]} & \text{si } x < 1 \end{cases}} \tag{3.3}$$

lo cual, por la propiedad (3.2), satisface que

$$\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \ \text{ para } x \text{ y } y \text{ positivos.}} \tag{3.4}$$

Esta igualdad se conoce como *propiedad logarítmica.*

Propiedades

De la propiedad logarítmica se sigue que para todo $x > 0$, la función ln satisface

$$\begin{array}{ccccccc}
\ln(x^2) & = & \ln(xx) & = & \ln(x)+\ln(x) & = & 2\ln(x)\\
\ln(x^3) & = & \ln(x^2x) & = & \ln(x^2)+\ln(x) = 2\ln(x)+\ln(x) & = & 3\ln(x)\\
\ln(x^4) & = & \ln(x^3x) & = & \ln(x^3)+\ln(x) = 3\ln(x)+\ln(x) & = & 4\ln(x)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

O sea,

$$\ln \overbrace{(x^n)}^{x\cdot x\cdots x} = \overbrace{n\ln(x)}^{\ln(x)+\ln(x)\ldots+\ln(x)} \quad \text{para todo } x > 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Ejemplos

1. La función ln es estrictamente creciente en su dominio, es decir

$$0 < x < y \quad \text{implica} \quad \ln(x) < \ln(y), \tag{3.6}$$

El recíproco de este resultado es también cierto.

$$\text{Si } x \text{ y } y \text{ son positivos y } \ln(x) < \ln(y), \text{ entonces } x < y. \tag{3.7}$$

Solución:

Por la definición del logaritmo natural tenemos que

$$\begin{array}{lcll}
\ln(x) & < & 0 & \text{si } 0 < x < 1. \text{ En este caso } \ln x \text{ es el opuesto del valor de un área.}\\
\ln(1) & = & 0 & \text{Es el valor del área de un rectángulo degenerado en un segmento.}\\
\ln(x) & > & 0 & \text{si } x > 1. \text{ Es el valor de un área.}
\end{array}$$

Por tanto, (3.6) y (3.7) se cumplen cuando $x = 1$ o bien $y = 1$.

Los demás casos podemos justificarlos a través de figuras como la siguiente.

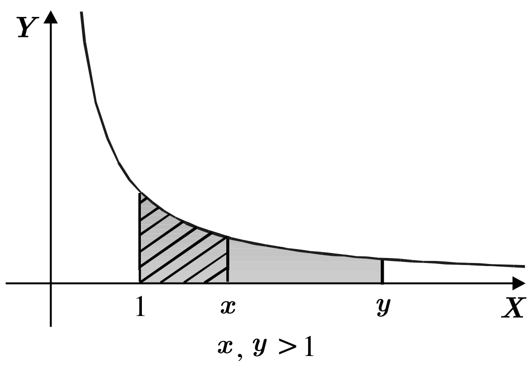


Figura 3-4

2. Justificar mediante el uso de un rectángulo inscrito y otro excrito que

$$\frac{1}{2} < \ln(2) < 1.$$

Solución:

Considerar la siguiente figura.

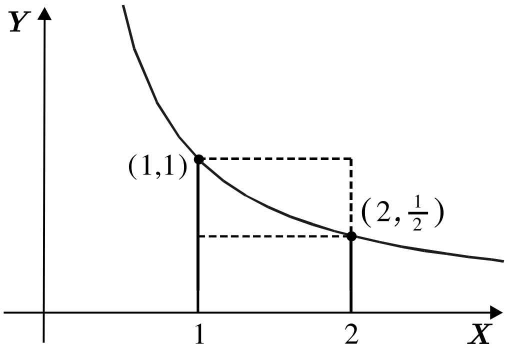


Figura 3-5

3. Probar que para cada número natural n se cumple

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1. \tag{3.8}$$

Solución:

Por (3.5) tenemos

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Por tanto, para obtener (3.8) basta probar que

$$\frac{n}{n+1} < n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1.$$

O lo que es lo mismo, al dividir entre n,

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \tag{3.9}$$

lo cual generaliza las desigualdades obtenidas en el ejemplo anterior, que es el caso $n = 1$.

Recordamos que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es el área de la región situada por debajo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y por encima del intervalo $\left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$.

Consideremos los rectángulos inscrito y excrito a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, con base en ese intervalo $\left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$. El primer rectángulo tiene un área menor que $\ln(1+\frac{1}{n})$ y dicha área vale $\frac{1}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ (figura 3-6); o sea,

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

En tanto que el segundo tiene un área mayor que $\ln(1+\frac{1}{n})$ y vale $1\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ (figura 3-6); es decir,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

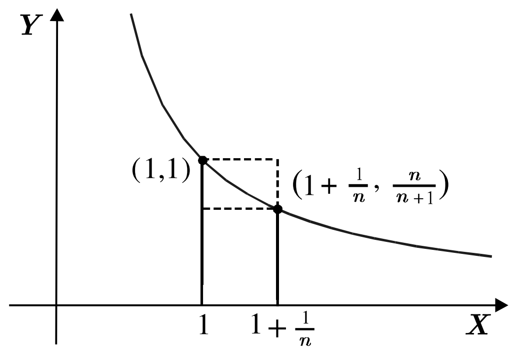


Figura 3-6

4. Considerar la recta que pasa por el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y que tiene pendiente igual a $-\frac{1}{4}$. Ésta corta a las rectas verticales $x = 1$ y $x = 3$ en los puntos $P\left(1, \frac{3}{4}\right)$ y $S\left(3, \frac{1}{4}\right)$, respectivamente. Probar que

$$1 < \ln(3).$$

Solución:

En la figura 3-7 se tiene el trapecio $PQRS$ con área A_T menor que $\ln(3) = A_{[1,3]}$.

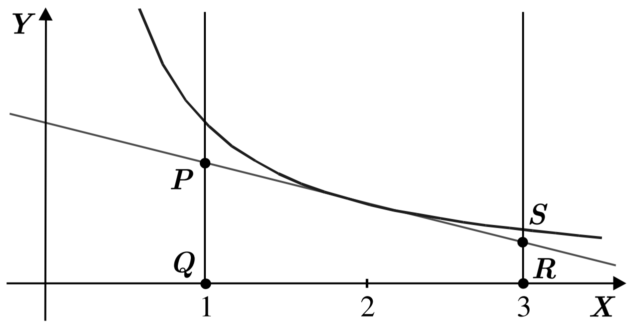


Figura 3-7

Además, de acuerdo con la fórmula determinada para el área de un trapecio, tenemos

$$A_T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)2 = 1.$$

Por tanto,

$$1 < \ln(3).$$

Hay un número, denotado con e, tal que $A_{[1,e]} = 1$, es decir, $\ln(e) = 1$.

Por los ejemplos anteriores sabemos que

$$\ln(2) < \overbrace{1}^{\ln(e)} < \ln(3).$$

Así, por (3.7) tenemos las siguientes estimaciones para e:

$$2 < e < 3.$$

En tanto que el ejemplo (**3**) nos permite obtener mejores estimaciones para e. Por ejemplo, a partir de dicho ejemplo tenemos que

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < \overbrace{1}^{\ln(e)}.$$

Por tanto,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < e.$$

O sea,

$$\frac{9}{4} < e.$$

Entonces

$$2.25 < e.$$

Con base en el ejemplo (**3**) se puede probar que, a medida que aumentamos el valor de n en la expresión $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, el valor obtenido es cada vez más cercano a e, cuyo valor hasta la tercera cifra decimal es 2.718. En los cálculos, este valor de 2.718 es el que usualmente se asigna a e, pero siempre debemos tener presente que tan sólo se trata de una aproximación.

Potenciación. Leyes de los exponentes

Escribir en la primera columna de una tabla de dos columnas los primeros 5 términos de una progresión geométrica de razón 2 y que inicia con 2, y en la segunda columna los primeros 5 términos de una progresión aritmética de razón 3 y que inicia con 3.

Solución:

Si g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 son los términos de la progresión geométrica, entonces

$$\frac{g_i}{g_{i-1}} = 2$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} g_2 &= 2g_1 & & \\ g_3 &= 2g_2 &=& \; 2^2 g_1 \\ g_4 &= 2g_3 &=& \; 2^3 g_1 \\ g_5 &= 2g_4 &=& \; 2^4 g_1. \end{aligned}$$

En tanto que si a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 son los términos de la progresión aritmética, entonces

$$a_{i+1} - a_i = 3$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} a_2 = a_1 + 3 & \\ a_3 = a_2 + 3 &= a_1 + 2 \cdot 3 \\ a_4 = a_3 + 3 &= a_1 + 3 \cdot 3 \\ a_5 = a_4 + 3 &= a_1 + 4 \cdot 3. \end{aligned}$$

Por último, como $g_1 = 2$ y $a_1 = 3$, tenemos que la tabla buscada es

g_i	a_i
2	3
2^2	$2 \cdot 3$
2^3	$3 \cdot 3$
2^4	$4 \cdot 3$
2^5	$5 \cdot 3$

En el ejemplo anterior hemos usado algunas potencias de 2 que denotamos con 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5.

Como sabemos, para un número real a positivo y para un número natural n se define la enésima potencia de a como

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n}.$$

En este caso, a se llama base, n exponente, y a^n se lee también como a a la potencia n.

Resulta útil definir

$$a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

para un número n natural.

Para cada número positivo a y cada número natural n hay un único número positivo b que satisface la ecuación

$$x^n = a.$$

O sea, $b^n = a$. Este número b lo denotamos como $\sqrt[n]{a}$ o bien $a^{\frac{1}{n}}$, y se llama *raíz enésima (principal)* de a.

Ejemplos

1. $\sqrt{16} = 4$.

Solución:

La afirmación se sigue a partir de que $4^2 = 16$ y 4 es positivo.

2. $\sqrt[3]{27} = 3$.

Solución:

La afirmación se sigue a partir de que $3^3 = 27$ y 3 es positivo.

3. $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}} = \dfrac{1}{2}$.

Solución:

La afirmación se sigue a partir de que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{64}$ y $\dfrac{1}{2}$ es positivo.

Para un número real positivo a y un número racional $\frac{m}{n}$ se tiene que

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m,$$

como comprobamos en el siguiente ejemplo:

$$\left(27^2\right)^{\frac{1}{3}} = (729)^{\frac{1}{3}} = 9, \qquad \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (3)^2 = 9.$$

Se extiende la definición de las potencias de a para exponentes racionales de la siguiente manera:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Por último, mediante la propiedad de los números reales llamada propiedad del supremo, se logra definir

$$a^r \qquad \text{para } a > 0 \text{ y } r \text{ un número real cualquiera.}$$

No trataremos aquí la propiedad del supremo y, por tanto, no daremos la definición precisa de a^r, pero señalamos, en cambio, que de acuerdo con ella tenemos las siguientes

Propiedades fundamentales de a^r.

1. Si $\frac{m}{n}$ es un número racional próximo a r, entonces $a^{\frac{m}{n}}$ está próximo a a^r.

2. $1^r = 1$, para todo número real r.

(Fácilmente podemos hacer ver que $1^{\frac{m}{n}} = 1$ para todo número racional $\frac{m}{n}$).

3. $a^r > 0$, para todo número real r.

4. Si $a > 1$ y $r > 0$, entonces $a^r > 1$.

5. Las *leyes de los exponentes* que conocemos para potencias enteras se satisfacen en el caso general, es decir, si a y b son dos números reales positivos y r y s son números reales arbitrarios, entonces

1ª $a^{r+s} = a^r a^s$. **2ª** $(a^r)^s = a^{rs}$. **3ª** $(ab)^r = a^r b^r$.

4ª $a^0 = 1$. **5ª** $a^1 = a$. **6ª** $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$.

6. $a^r = a^s$, con $a \neq 1$, implica $r = s$. (En el ejemplo **1** de la página 143 se dará una prueba cuando $a > 1$.)

Si en la tabla obtenida en el ejemplo introductorio dividimos la segunda columna entre 3 obtenemos

g_i	$\frac{a_i}{3}$
$2 = 2$	1
$2^2 = 4$	2
$2^3 = 8$	3
$2^4 = 16$	4
$2^5 = 32$	5

que es una nueva tabla en cuya segunda columna están los exponentes de las potencias de 2 que aparecen en la primera columna. Este arreglo constituye una muy pequeña *tabla de logaritmos de base* 2 en la que los elementos de la segunda columna son los logaritmos (base 2) de los números que aparecen en la primera.

Observamos que para multiplicar dos números de la primera columna, digamos 8×4, basta sumar los números correspondientes de la segunda columna, $3 + 2 = 5$, y regresar a la primera columna: 32. Esta posibilidad de transformar el cálculo de productos en sumas fue lo que hizo que las tablas de logaritmos se convirtieran en una poderosa herramienta de cálculo que sólo hasta recientes fechas fue sustituida por las calculadoras electrónicas.

Al tener esa tabla 2 columnas, sin elemento alguno repetido en la primera, tenemos definida una función que asocia a cada elemento de la primera columna el elemento de la segunda que está en el mismo renglón. Esta función se llama función *logaritmo, base 2*, se denota como $\log_2$, y está definida en el conjunto $\{2, 4, 8, 16, 32\}$ cuya regla de correspondencia consiste en asociarle a cada x en $\{2, 4, 8, 16, 32\}$ el exponente n para el cual se cumple que $x = 2^n$, es decir

$$\log_2(2^n) = n.$$

Así,

$\log_2(2)$	$=$	$\log_2(2^1)$	$=$	1
$\log_2(4)$	$=$	$\log_2(2^2)$	$=$	2
$\log_2(8)$	$=$	$\log_2(2^3)$	$=$	3
$\log_2(16)$	$=$	$\log_2(2^4)$	$=$	4
$\log_2(32)$	$=$	$\log_2(2^5)$	$=$	5.

Ejemplos

1. Para dos números reales $a > 0$ y r, probar que $\dfrac{1}{a^r} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^r$.

Solución:

La igualdad que queremos probar es equivalente a

$$1 = a^r \left(\frac{1}{a}\right)^r.$$

Por la **3ª** ley de los exponentes tenemos que

$$a^r \left(\frac{1}{a}\right)^r = \left(a\frac{1}{a}\right)^r = 1^r = 1.$$

2. Si $0 < a < 1$ y $r > 0$, entonces $a^r < 1$.

Solución:

Como $0 < a < 1$, por hipótesis, entonces $\dfrac{1}{a} > 1$. De la cuarta propiedad de a^r(página 135), se sigue que

$$\left(\frac{1}{a}\right)^r > 1$$

y, por el ejemplo anterior,

$$\frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r > 1.$$

De donde

$$a^r < 1.$$

3. Para tres números reales $a, b > 0$ y r, probar que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$.

Solución:

La igualdad que queremos probar es equivalente a

$$b^r \left(\frac{a}{b}\right)^r = a^r.$$

Esta última igualdad se sigue de la **3ª** ley de los exponentes, según la cual

$$b^r \left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(b\frac{a}{b}\right)^r = a^r.$$

4. Para tres números reales $a > 0$, r y s, probar que $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s} = \dfrac{1}{a^{s-r}}$.

Solución:

La primera igualdad que queremos probar es equivalente a

$$a^r = a^s a^{r-s}.$$

Esta igualdad se sigue de la **1ª** ley de los exponentes, ya que al aplicarla obtenemos

$$a^s a^{r-s} = a^{s+(r-s)} = a^r.$$

La segunda igualdad se sigue de la **6ª** ley de los exponentes,

$$a^{r-s} = a^{-(s-r)} = \frac{1}{a^{s-r}}.$$

Por la frecuencia con que se usan las propiedades demostradas en los últimos ejemplos, las agregaremos a la lista de las leyes de los exponentes.

7ª $\dfrac{1}{a^r} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^r.$ **8ª** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}.$ **9ª** $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s} = \dfrac{1}{a^{s-r}}.$

Ejemplos

1. Escribir $\sqrt{10} \times \sqrt[3]{2}$ como la potencia de un entero.

Solución:

Escribimos

$$\sqrt{10} \times \sqrt[3]{2} = 10^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}}.$$

Expresemos los exponentes con un común denominador,

$$\begin{aligned} 10^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} &= 10^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{2}{6}} \\ 10^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{2}{6}} &= \left(10^3\right)^{\frac{1}{6}} \left(2^2\right)^{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

Y, aplicando la **3ª** ley de los exponentes, obtenemos

$$\left(10^3\right)^{\frac{1}{6}} \left(2^2\right)^{\frac{1}{6}} = (1000 \times 4)^{\frac{1}{6}}$$

Por tanto,

$$\sqrt{10} \times \sqrt[3]{2} = (4000)^{\frac{1}{6}}.$$

2. Escribir $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}$ como la potencia de un entero.

Solución:

Escribimos

$$\begin{aligned} \frac{6}{\sqrt[3]{9}} &= \frac{6}{9^{\frac{1}{3}}} \\ \frac{6}{9^{\frac{1}{3}}} &= 6 \times 9^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Expresemos los exponentes con un común denominador,

$$\begin{aligned} 6 \times 9^{-\frac{1}{3}} &= 6^{\frac{3}{3}} \times 9^{-\frac{1}{3}} \\ 6^{\frac{3}{3}} \times 9^{-\frac{1}{3}} &= \left(6^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(9^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Y, aplicando la **3ª** ley de los exponentes, obtenemos

$$\left(6^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(9^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{(2\times 3)^3}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{8\times 27}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Por tanto,

$$\frac{6}{\sqrt[3]{9}} = (24)^{\frac{1}{3}}.$$

Ejercicios

Escribe cada una de las siguientes expresiones como la potencia de un entero.

1. $\sqrt[5]{6}\times\sqrt{8}$.

2. $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{11}$.

3. $\sqrt{7}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[6]{3}$.

4. $\sqrt{8}\times\sqrt[8]{2}$.

5. $\sqrt[12]{9}\times\sqrt[3]{12}$.

6. $\sqrt[7]{5}\times\sqrt{6}$.

7. $\dfrac{\sqrt{12}}{2}$.

8. $\dfrac{8}{\sqrt[4]{4}}$.

9. $\dfrac{\sqrt[5]{15}}{\sqrt[10]{75}}$.

Funciones logarítmicas y exponenciales

Probar que la función $\log_2 : \{2^z : z\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$ tiene la propiedad logarítmica; es decir,

$$\log_2(xy) = \log_2(x) + \log_2(y)\,,\ \text{si } x,\, y \text{ son de la forma } 2^z \text{ con } z\in\mathbb{Z}.$$

Solución:

Es muy claro que esta función $\log_2$, que en la sección anterior consideramos definida en el conjunto $\{2,4,8,16,32\}$, puede definirse en el conjunto $\{2^z : z\in\mathbb{Z}\}$, teniendo como regla de correspondencia

$$\log_2\left(2^z\right) = z.$$

Para ver que el logaritmo base 2 tiene la propiedad logarítmica, consideremos $x = 2^{z_1}$ y $y = 2^{z_2}$, con $z_1, z_2 \in\mathbb{Z}$. Así,

$$\log_2(x) = z_1,\ \ \log_2(y) = z_2$$

y

$$\log_2(xy) = \log_2(2^{z_1}2^{z_2}).$$

Y como $2^{z_1}2^{z_2} = 2^{z_1+z_2}$, entonces

$$\log_2(2^{z_1}2^{z_2}) = \log_2(2^{z_1+z_2}) = z_1 + z_2.$$

Es decir,

$$\log_2(xy) = z_1 + z_2 = \log_2(x) + \log_2(y)).$$

Por lo que $\log_2$ tiene la propiedad logarítmica.

Es posible probar que si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces para cada número $x > 0$ existe un único exponente real r tal que

$$x = a^r. \qquad \text{(Se lee “}a\text{ a la }r\text{”)}$$

(Recordamos que si $a = 1$, entonces $a^r = 1$ para todo real r y, por tanto, el resultado anterior no vale para $a = 1$.)

Gracias al resultado anterior podemos definir $\log_2(x)$ para todo $x > 0$, estableciendo

$$\log_2(x) = r, \text{ si } r \text{ es el exponente para el que } x = 2^r.$$

Y, en general, para cada $a > 0$ con $a \neq 1$, se define $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ como

$$\log_a(x) = r, \text{ si } x = a^r. \tag{3.10}$$

Ésta se denomina función logaritmo con base a, y $\log_a(x)$ se lee como el logaritmo base a de x.

De acuerdo con (3.10), el $\log_a(x)$ es, por definición, el exponente al que hay que elevar la base a para obtener x y dicho exponente es el único con tal propiedad. Así, podemos escribir esa igualdad como

$$a^{\log_a(x)} = x \text{ para todo } x \text{ positivo}, \tag{3.11}$$

y tenemos que

$$\text{si } \log_a(x) = \log_a(y), \text{ entonces } x = y, \tag{3.12}$$

ya que en caso contrario habría dos exponentes distintos tales que a elevado a esas potencias valdría x.

De acuerdo con esta última propiedad, *dos números coinciden si sus logaritmos, según una misma base a, son iguales.*

A partir de las leyes de los exponentes se tienen las siguientes

Propiedades de los logaritmos.

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, si $x, y > 0$.

2. $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$, si $x > 0$ y r es un número real arbitrario.

3. $\log_a(1) = 0$.

4. $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$, si $x > 0$.

5. $\log_a(a) = 1$.

Demostraciones:

1. Hacemos $z = \log_a(xy)$, $z_1 = \log_a(x)$ y $z_2 = \log_a(y)$. Entonces, por la definición del logaritmo base a, tenemos

$$a^z = xy, \qquad a^{z_1} = x \qquad \text{y} \qquad a^{z_2} = y.$$

De la primera ley de los exponentes se sigue que

$$a^{z_1+z_2} = a^{z_1}a^{z_2},$$

de donde

$$a^{z_1+z_2} = xy$$

y, por tanto,

$$z = z_1 + z_2$$

ya que hay un solo exponente w que satisface la ecuación $a^w = xy$. Al sustituir los valores de z, z_1 y z_2, obtenemos

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

2. Hacemos $z = \log_a(x^r)$, $z_1 = \log_a(x)$. Entonces

$$a^z = x^r \qquad \text{y} \qquad a^{z_1} = x.$$

Por la segunda ley de los exponentes, tenemos que

$$(a^{z_1})^r = a^{rz_1},$$

de donde

$$a^{rz_1} = x^r = a^z$$

y, por tanto,

$$z = rz_1$$

ya que hay un solo exponente w que satisface la ecuación $a^w = x^r$. Al sustituir los valores de z y z_1 obtenemos

$$\log_a(x^r) = r\log_a(x).$$

3. Sabemos que $a^0 = 1$.

Por la definición del logaritmo base a se sigue que $\log_a(1) = 0$.

4. Por la propiedad 1 tenemos

$$\log_a\left(\frac{x}{x}\right) = \log_a\left(x\frac{1}{x}\right) = \log_a(x) + \log_a\left(\frac{1}{x}\right).$$

Y por la propiedad 3 sabemos que $\log_a\left(\frac{x}{x}\right) = \log_a(1) = 0$. De donde

$$0 = \log_a(x) + \log_a\left(\frac{1}{x}\right).$$

Por lo que, al despejar, obtenemos

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x).$$

5. Sabemos que $a^1 = a$.

Por la definición del logaritmo base a, se sigue que $\log_a(a) = 1$.

■

Ejemplo

- Probar que la función $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es biyectiva.

  Solución:

  Debemos probar que la función es inyectiva y suprayectiva.

  La propiedad (3.12) nos dice que $\log_a(x)$ es inyectiva.

  Por otro lado, la función $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es suprayectiva ya que si $r \in \mathbb{R}$, entonces $x = a^r$ es tal que $\log_a(x) = r$.

De acuerdo con el ejemplo anterior, la función $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es invertible. De hecho, su función inversa es

$$a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty);$$

el cual asocia a cada $x \in \mathbb{R}$ el número real positivo a^x.

La función a^x se llama *función exponencial con base a*.

En la sección "Función inversa" del capítulo 1 "Relaciones y funciones", vimos que para que una función $g : B \to A$ sea la inversa de una función $f : A \to B$, debe cumplirse

$$g(f(x)) = x \quad \text{si } x \in A \qquad \text{y} \qquad f(g(y)) = y \quad \text{si } y \in B.$$

Comprobaremos lo anterior en el caso en que $g(y) = a^y$, con $y \in \mathbb{R}$, y $f(x) = \log_a(x)$, con $x > 0$.

$$g(f(x)) = g(\overbrace{\log_a(x)}^{y}) = a^{\log_a(x)}.$$

Y de acuerdo con (3.11) tenemos
$$a^{\log_a(x)} = x.$$
Así,
$$g\left(f\left(x\right)\right) = x \text{ si } x > 0.$$
Por otra parte,
$$f(g(y)) = f(\overbrace{\ a^y\ }^{x}) = \log_a(a^y)$$
y, por definición de $\log_a$, tenemos
$$\log_a(a^y) = y.$$
O sea,
$$f(g(y)) = y \quad \text{ si } y \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos

1. Probar que las funciones $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ y su inversa $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, con $a > 1$, son estrictamente crecientes.

Solución:

Probaremos primero que $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, con $a > 1$, es estrictamente creciente.

Supongamos que $x < y$, entonces $y = x + \overbrace{(y - x)}^{r}$ y $r > 0$. Así,
$$a^y = a^{x+r} = a^x a^r.$$

De acuerdo con las propiedades fundamentales 3 y 4 de a^x (página 135) se tiene que $a^r > 1$, si $a > 1$ y $r > 0$ y $a^x > 0$, para todo x. Por tanto,
$$a^x a^r > a^x.$$

O sea,
$$a^y > a^x.$$

Por lo que $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, con $a > 1$, es estrictamente creciente.

Para ver que $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, con $a > 1$, es también estrictamente creciente, debemos probar que si $0 < x < y$, entonces $\log_a(x) < \log_a(y)$.

Supongamos lo contrario, es decir, que para una pareja de números reales positivos x, y tales que $x < y$ se tenga $\log_a(x) \geq \log_a(y)$; entonces, por ser a^x estrictamente creciente, tenemos
$$a^{\log_a(x)} \geq a^{\log_a(y)},$$

y por (3.11) obtenemos
$$x \geq y,$$

lo que contradice nuestra hipótesis.

2. Dibujar las gráficas de las funciones $\log_2(x)$ y 2^x.

Solución:

La gráfica buscada corta a cada recta horizontal (por ser $\log_2(x)$ suprayectiva) en un solo punto (por ser $\log_2(x)$ inyectiva). Además, la gráfica sube a medida que nos movemos a la derecha (por ser $\log_2(x)$ estrictamente creciente).

Algunos valores de la función son

x	$\log_2(x)$
$\dfrac{1}{2^{1000}} = 2^{-1000}$	-1000
1	0
2	1
2^{1000}	$1000.$

Es decir, la gráfica corta al eje X en $x = 1$, crece indefinidamente al tomar x valores cada vez mayores, y decrece indefinidamente cuando x toma valores cada vez más próximos a 0.

Toda esta información permite construir la gráfica de $\log_2(x)$.

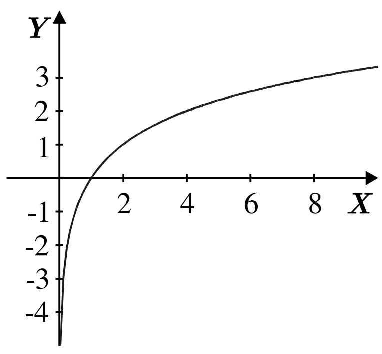


Figura 3-8

Por ser 2^x la función inversa de $\log_2(x)$, su gráfica se obtiene al reflejar la gráfica de $\log_2(x)$ con respecto a la recta $y = x$.

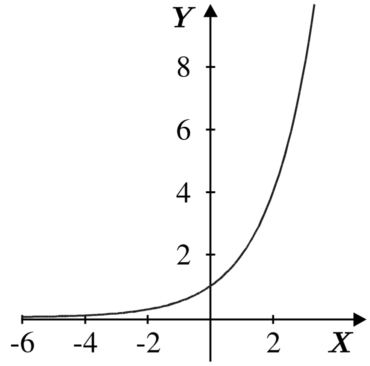


Figura 3-9

Con base en el último ejemplo, destacamos las siguientes

Propiedades de las funciones logarítmicas y exponenciales con base a mayor que 1.

1. $\log_a(x)$ y a^x, con $a > 1$, son funciones estrictamente crecientes.

2. $\log_a(1) = 0$ y, por tanto, la gráfica de $\log_a(x)$ corta al eje X en 1.

3. $a^0 = 1$ y, por tanto, la gráfica a^x corta al eje Y en 1.

4. $\log_a(x)$, con $a > 1$, crece indefinidamente al tomar x valores cada vez mayores, y decrece indefinidamente cuando x toma valores cada vez más próximos a 0.

5. a^x, con $a > 1$, crece indefinidamente al tomar x valores cada vez mayores, y toma valores cada vez más parecidos a 0 a medida que x decrece.

Observación: Como e es mayor que 1, las funciones $\log_e(x)$ y e^x tienen todas las propiedades antes mencionadas.

A continuación aparecen las gráficas de funciones logarítmicas y exponenciales para los valores de la base $a = 2$, 4, 6.

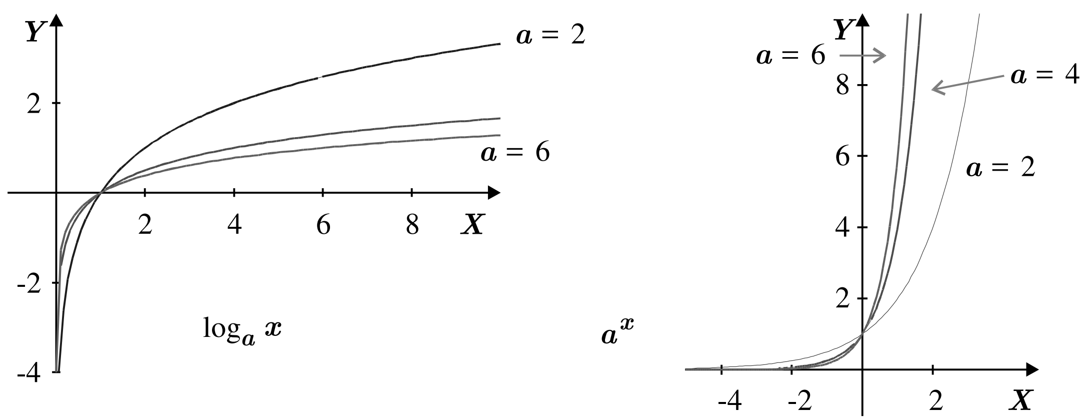


Figura 3-10

El logaritmo base e o logaritmo natural

En la primera sección de este capítulo se introdujo de manera geométrica la función logaritmo natural que denotamos con ln . Con ayuda de técnicas del cálculo es posible probar que esa función coincide con la función $\log_e$, que es una de las funciones consideradas en esta sección. Es decir, se tiene que

$$\ln(x) = y \quad \text{si} \quad x = e^y.$$

Por tanto, para la función logaritmo natural se usan indistintamente las notaciones ln o bien $\log_e(x)$, e inclusive algunos autores usan también log, aunque otros reservan esto último para los también llamados *logaritmos de base* 10 o *comunes.*

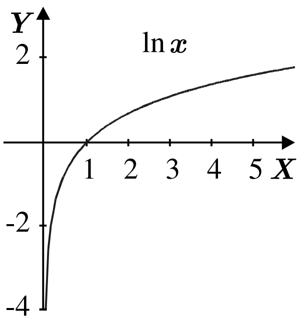
Entonces, a partir de la primera sección de este capítulo tenemos una interpretación geométrica para $\log_e(x)$, a saber: $\log_e(x)$ es el área ubicada debajo de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y encima del intervalo $[1, x]$, si $x \geq 1$; en tanto que $\log_e(x)$ es menos el área situada bajo la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y encima del intervalo $[x, 1]$ si $x < 1$.

Por lo antes expuesto, la inversa de la función logaritmo natural es la función

$$e^x : \mathbb{R} \to (0, \infty),$$

es decir, la exponencial con base e a la que se acostumbra llamar, simplemente, *función exponencial.*

A continuación presentamos las gráficas de $\ln(x)$ y e^x dibujadas con base en las propiedades arriba señaladas para las funciones logarítmicas y exponenciales.



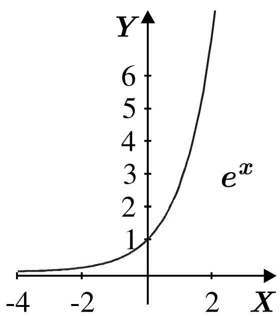


Figura 3-11

Ejemplo

- Para $a > 0$, con $a \neq 1$ y x un número real arbitrario, probar que

$$a^x = e^{x \ln a}. \tag{3.13}$$

Solución:

Como e^x es suprayectiva, sabemos que hay un número real único y tal que

$$e^y = a^x,$$

es decir,

$$y = \ln a^x = x \ln a.$$

Al sustituir este valor en la ecuación anterior obtenemos

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Cambios de base en los logaritmos

Las tablas de logaritmos con base 10 fueron ampliamente usadas para facilitar los cálculos. Sabemos, por la definición de $\log_{10}$, que $\log_{10}(1000) = 3$. Dar un valor aproximado para el logaritmo natural de 1000 si usamos la aproximación $\ln(10) \approx 2.3026$ ($\approx$ se lee "aproximadamente igual").

Solución:

Sabemos que $e^{\ln(10)} = 10$ y $10^3 = 1000$. Por tanto,

$$\left(e^{\ln(10)}\right)^3 = 1000.$$

Por la **2ª** ley de los exponentes, tenemos que

$$e^{3\ln(10)} = 1000.$$

Para terminar, por la definición del logaritmo natural o base e, $\log_e$, concluimos que

$$\ln(1000) = \log_e(1000) = 3\ln(10),$$

y usando el valor aproximado $\ln(10) \approx 2.3026$ obtenemos

$$\ln(1000) \approx 3 \times 2.3026 = 6.9078.$$

En el ejemplo anterior se estableció, de hecho, un procedimiento para obtener el logaritmo de un número, según una base b, si se conoce su logaritmo con respecto a otra base a y el logaritmo $\log_a(b)$. Al seguir dicho procedimiento obtenemos la siguiente fórmula.

Fórmula para el cambio de base en los logaritmos

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

Demostración:

Hagamos $y = \log_b(x)$ y $r = \log_a(b)$, entonces $b^y = x$ y $a^r = b$. Por tanto,

$$(a^r)^y = b^y = x.$$

Por la **2ª** ley de los exponentes, tenemos entonces

$$a^{ry} = x.$$

Por último, de acuerdo con la definición de $\log_a$, concluimos que

$$\log_a(x) = ry = \log_a(b)\log_b(x).$$

Despejando,

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

■

Ejemplo

- Probar que $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

  Solución:

  Por la fórmula de cambio de base en los logaritmos, tenemos que

$$\log_a(x) = \frac{\log_e(x)}{\log_e(a)} = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Ejercicios

Calcula los valores de los siguientes logaritmos.

1. $\log_2(64)$. **2.** $\log_3(81)$. **3.** $\log_9(9)$. **4.** $\log_7(343)$.

5. $\log_5(625)$. **6.** $\log_a(a)$. **7.** $\log_e(1)$. **8.** $\log_{10}(100000)$.

9. $\log_{\sqrt{2}}(2)$. **10.** $\log_{\frac{1}{3}}(27)$. **11.** $\log_4(64)$. **12.** $\log_6(7776)$.

13. $\log_4\left(\frac{1}{16}\right)$. **14.** $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$. **15.** $\log_{10}\left(\frac{1}{1\,000\,000}\right)$. **16.** $\log_{\frac{1}{2}}(256)$.

Calcula.

17. $\ln(4e) + \log_e(e^6) - \ln(4)$. **18.** $\log_5(25x) + \log_5(x^4) - 5\log_5(x)$.

19. $\log_3(81) - \log_3\left(\frac{1}{27}\right) + 3\log_3(3)$. **20.** $\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \log_{10}(100) - \log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right)$.

En cada caso, escribe una expresión equivalente a la dada en la que aparezcan exponentes.

21. $\log_2(256) = 8$. **22.** $\log_4(1024) = 5$. **23.** $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$.

24. $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$. **25.** $\log_{\frac{1}{4}}(64) = -3$. **26.** $\log_{\frac{e}{\sqrt{2}}}(e^2) = 2$.

Encuentra el dominio natural de cada función.

27. $f(x) = \ln(10 + x)$. **28.** $f(x) = \log_8(5 - 2x)$. **29.** $f(x) = \log_4 x^3$.

30. $f(x) = \log_5(x^2 - 16)$. **31.** $f(x) = \log_{10}((x-8)(x-1))$. **32.** $f(x) = \ln((x+4)(x-6))$.

33. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+8}\right)$. **34.** $f(x) = \log_3\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$. **35.** $f(x) = \log_8\left(\dfrac{x-5}{x-3}\right)$.

Escribe los siguientes logaritmos en términos de ln, utiliza la fórmula de cambio de base.

36. $\log_6(42)$. **37.** $\log_{12}(30)$. **38.** $\log_7(24)$.

39. $\log_{\frac{1}{5}}(65)$. **40.** $\log_{\frac{1}{7}}(e)$. **41.** $\log_{\frac{\pi}{2}}(2\pi)$.

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Resolver las ecuaciones $\log_5(3x+4)=2$ y $2^{x^2+x+1}=2^{-x}$.
Solución:
Primero resolvemos
$$\log_5(3x+4)=2.$$
Sabemos, por la definición de $\log_5$, que
$$\begin{aligned} 5^2 &= 3x+4 \\ 25 &= 3x+4. \end{aligned}$$
Al despejar obtenemos
$$x=7.$$
En tanto que para resolver
$$2^{x^2+x+1}=2^{-x}$$
recordamos que $a^x=a^y$, con $0<a$ y $a\neq 1$, lo cual implica que $x=y$ (propiedad 6 de a^r, página 135).

Así,
$$x^2+x+1=-x$$
o, lo que es lo mismo,
$$x^2+2x+1=0$$
que tiene por única solución $x=-1$.

Los anteriores son ejemplos de las llamadas ecuaciones logarítmicas y exponenciales y, para resolverlas, deben tenerse presentes las propiedades de $\log_a$ que aparecen en la página 145 y las de a^r que están en la página 135.

Ejemplos

1. Resolver $\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{x-1}-\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{x}=-1$.

Solución:

Sabemos que
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y.$$
Así, la ecuación propuesta se transforma en
$$\log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}=-1, \quad \text{de donde} \quad \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=-1.$$
Como
$$\log_a z^r=r\log_a z,$$
obtenemos
$$\frac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}\frac{x-1}{x}=-1.$$

Entonces debemos resolver

$$\log_{\frac{3}{2}} \frac{x-1}{x} = -2,$$

es decir,

$$\frac{x-1}{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9}.$$

Al despejar, obtenemos

$$5x - 9 = 0.$$

La solución es $x = \frac{9}{5}$.

2. Resolver la ecuación $\pi^{1-x} = e^x$.

Solución:

Aplicando el logaritmo natural a ambos miembros

$$\ln\left(\pi^{1-x}\right) = x, \quad \text{de donde} \quad (1-x)\ln\pi = x.$$

Al despejar, obtenemos

$$x = \frac{\ln\pi}{1+\ln\pi}.$$

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones.

1. $\log_5(10x-3) = -1$.

2. $\log_7(x^2-32) = 2$.

3. $\log_9(x^2-4x-44) = 0$.

4. $\log_2(x^2-13x+52) = 4$.

5. $\log_4(x^2+7) = 2$.

6. $\log_{10}(x^2+4x-4) = 2\log_{10}(x)$.

7. $6^{x+1} = 2^{x-1}$.

8. $2e^{\frac{1}{3}x} = 3$.

9. $\log_5(x-4) + \log_5 x = 1$.

10. $6^{5x-9} = 216$.

11. $\log_2\left(\sqrt{9x-11}\right) = 2$.

12. $\log_4(8) - 3\log_4(x-6) + 5 = 0$.

13. $\log_{10}(3x+7)^{\frac{1}{3}} = 1$.

14. $\log_2(x+5)^2 = 4$.

15. $\left(\frac{8}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$.

16. $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}$.

17. $16^{5x-1} - 64 = 0$.

18. $\log_2(x) + \log_{\sqrt{2}}(x) - 2 = 0$.

19. $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-11x) - \log_{\frac{1}{4}}(-x^2+6x) = -1$.

20. $\ln(x-2) - \ln(3x) = \ln(x+1) - \ln(x)$.

21. $-2\log_{12}\left(x+\frac{1}{5}\right) = \log_{12}(25)$.

22. $\log_{\frac{1}{3}}\left(2x^2-\frac{5}{3}\right) + \log_{\frac{1}{9}}\left(2x^2-\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{2}$.

23. $\log_{16}(x) + \log_4(x-2) - 1 = 0$.

24. $\log_3(x) + \log_{27}(x) + \log_9(x) - 11 = 0$.

25. $\ln(x-1)^2 = \ln(2) + \ln(x-1)$.

26. $\log_6(x) + \log_6(x-1) = \log_6(x+35)$.

27. $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{x-1}\right) + \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x+1}{x}\right) - \log_{\frac{1}{4}}(x^2-1) = 1$.

28. $\log_{\frac{3}{4}}\left(\sqrt{6x-1}\right) + \log_{\frac{3}{4}}(7) - \log_{\frac{3}{4}}\left(\sqrt{\frac{49}{x}}\right) = 0$.

Aplicaciones

El interés compuesto

Una persona invierte \$10 000.00 con una tasa de interés anual del 20%. ¿Cuánto recibirá al término de 1 año si el interés es simple? ¿Cuánto recibirá en el mismo periodo si el interés se compone trimestralmente?

Solución:

Escribimos el interés en forma decimal, esto es, el interés es de 0.20.

En el primer caso, el inversionista recibirá su inversión, \$10 000.00, más el interés devengado I cuyo monto es

$$I = 10\,000 \times 0.20 = 2000$$

El total será de \$12 000.00.

En el segundo caso, el interés que se genera al término de cada trimestre $\left(\text{a razón de } \frac{0.20}{4}\right)$ se agrega al capital para, sobre la nueva cantidad así obtenida, determinar el interés correspondiente al siguiente periodo; o sea, se paga interés sobre interés. Siguiendo este proceso, hacemos la tabla siguiente para calcular lo que recibirá el inversionista al final de 1 año. Llamamos C_0 al capital inicial, o sea, $C_0 = 10\,000$.

Trimestre	Capital al final del trimestre	Trimestre	Interés en el trimestre
		1°	$\dfrac{10\,000 \times 0.20}{4} = 500$
1°	$C_1 = 10\,000 + 500 = 10\,500$	2°	$\dfrac{10\,500 \times 0.20}{4} = 525$
2°	$C_2 = 10\,500 + 525 = 11\,025$	3°	$\dfrac{11\,025 \times 0.20}{4} = 551.\,25$
3°	$C_3 = 11\,025 + 551.\,25 = 11576$	4°	$\dfrac{11\,576 \times 0.20}{4} = 578.\,8$
4°	$C_4 = 11\,576 + 578.\,8 = 12\,155$		

Por tanto, el inversionista recibirá \$12 155.00

En el ejemplo, C_0 es el capital inicial. En tanto que C_1, C_2, C_3 y C_4 son capitales cuyo valor se obtiene del capital anterior al agregarle el interés generado en el periodo previo. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0 + \frac{0.20 \times C_0}{4} = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)\\
C_2 &= C_1 + \frac{0.20 \times C_1}{4} = C_1\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^2\\
C_3 &= C_2 + \frac{0.20 \times C_2}{4} = C_2\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^2\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^3\\
C_4 &= C_3 + \frac{0.20 \times C_3}{4} = C_3\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^3\left(1 + \frac{0.20}{4}\right) = C_0\left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^4.
\end{aligned}$$

En general, si un capital C_0 se invierte con un interés anual i (expresado en forma decimal) y éste se compone n veces a lo largo del año (en nuestro ejemplo, $n = 4$), entonces la fórmula que nos da el capital C_n que se recibirá al término de un año es

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n.$$

Conforme crece n también crece C_n. En la página 133 señalamos que, a medida que aumentamos el valor de n en la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ésta toma un valor cada vez más cercano a e. Análogamente $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$ se aproxima a e^i, así

$$C_n \approx e^i C_0,$$

y la aproximación es mejor cuanto mayor sea n.

Comportamiento exponencial

Las sustancias radiactivas, por ejemplo, el radio, se desintegran y, por tanto, la cantidad de un material radiactivo disminuye con el tiempo. La cantidad de material $C(t)$ presente en el instante t está dada por la fórmula

$$C(t) = C_0 e^{-kt},$$

donde $k > 0$ es una constante que varía de acuerdo con la sustancia de que se trate, y C_0 es, por supuesto, la cantidad presente en el instante $t = 0$.

La *vida media* de un material radiactivo es el tiempo que debe transcurrir para que una cantidad de dicho material se reduzca a la mitad.

Encontrar la fórmula para determinar la vida media de un material radiactivo en función de k.

Solución:

La vida media será el tiempo $\bar{t}$ para el cual $C(\bar{t}) = \dfrac{C_0}{2}$. Por tanto, debemos resolver

$$\frac{C_0}{2} = C_0 e^{-k\bar{t}},$$

lo que nos lleva a la ecuación exponencial

$$e^{k\bar{t}} = 2.$$

Al aplicar ln a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$k\bar{t} = \ln 2.$$

Es decir, la vida media es

$$\bar{t} = \frac{\ln 2}{k}.$$

Notamos que ese tiempo no depende de la cantidad inicial de material.

El tipo de fórmula

$$f(t) = f_0 e^{\alpha t}, \tag{3.14}$$

donde α es una constante, positiva o negativa, se presenta cuando las observaciones o hipótesis de trabajo permiten suponer que, para todo instante t, se tiene

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \approx kf(t),$$

donde dicha aproximación es mejor cuanto más próxima esté s de t. Es decir, cuando el cambio promedio de f,

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t},$$

en un intervalo de tiempo pequeño (s, t) o (t, s) es muy parecido a un múltiplo del valor de f en t.

Tal es el caso del ejemplo considerado, donde experimentalmente se observa que

$$\frac{C(s) - C(t)}{s - t} \approx -kC(t).$$

Si en la fórmula (3.14) f_0 es positivo, entonces, cuando $\alpha > 0$, se dice que f *crece exponencialmente*, en tanto que se dice que *decrece exponencialmente* cuando $\alpha < 0$.

Ejemplos

1. En un cultivo de bacterias, la población en el tiempo t, $P(t)$, satisface la condición

$$\frac{P(s) - P(t)}{s - t} \approx kP(t) \tag{3.15}$$

para valores de s muy próximos a t. Si en el instante $t = 0$ la población es de 100 bacterias, o sea $P(0) = 100$, y 6 horas después hay 400 bacterias, ¿cuántas bacterias habrá al transcurrir 1 día, o sea para $t = 24$ (recordemos que 1 día = 24 horas)?

Solución:

Como $P(t)$ satisface (3.15) se sigue, por lo dicho después del ejemplo introductorio, que

$$P(t) = P_0 e^{kt},$$

y como, por hipótesis, $P(0) = 100$, tenemos

$$100 = P_0 e^{k0} = P_0 e^0 = P_0.$$

O sea,

$$P(t) = 100e^{kt}.$$

Debemos calcular $P(24) = 100e^{k24}$. Así, sólo necesitamos conocer k.

De acuerdo con la hipótesis, tenemos $P(10) = 400$, o sea

$$100e^{6k} = 400$$

o, lo que es lo mismo,

$$e^{6k} = 4.$$

Con lo que se plantea una ecuación exponencial. Para resolverla aplicamos ln a ambos miembros de la ecuación

$$\begin{aligned} \ln(e^{6k}) &= \ln(4) \\ 6k &= \ln(4), \end{aligned}$$

de donde

$$k = \frac{\ln(4)}{6} = \frac{\ln(2^2)}{6} = \frac{2\ln(2)}{6} = \frac{\ln(2)}{3}$$

y

$$P(t) = 100e^{\frac{\ln(2)}{3}t},$$

entonces

$$P(24) = 100e^{\frac{\ln(2)}{3}24} = 100e^{8\ln(2)},$$

pero

$$e^{8\ln(2)} = e^{\ln(2^8)} = 2^8,$$

de donde

$$P(24) = 2^8 \times 100 = 25\,600.$$

Al transcurrir 1 día habrá 25 600 bacterias.

2. Si un material radiactivo tiene una vida media de 3.8 días, ¿en cuánto tiempo 15 gramos de esa sustancia se reducirán a 5 gramos?

Solución:

Por lo visto en el ejemplo introductorio, la cantidad de material en el tiempo t está dada por la fórmula

$$C(t) = C_0 e^{-kt},$$

y la vida media, también llamada semivida, es

$$\bar{t} = \frac{\ln 2}{k}. \tag{3.16}$$

En el tiempo $t = 0$ tenemos 15 gramos de material, es decir, $C(0) = C_0 = 15$. Por lo que la ecuación anterior se transforma en

$$C(t) = 15e^{-kt},$$

y sabemos que la semivida es de 3.8 días, por lo que de (3.16) obtenemos $3.8 = \dfrac{\ln 2}{k}$ o, lo que es lo mismo,

$$k = \frac{3.8}{\ln 2}.$$

Debemos encontrar el tiempo t para el cual $C(t) = 5$. Así, tenemos que resolver la ecuación exponencial

$$5 = 15e^{-\frac{3.8}{\ln 2}t},$$

que al despejar se reduce a

$$e^{\frac{3.8}{\ln 2}t} = 3.$$

Aplicamos ln a ambos miembros y obtenemos

$$\frac{3.8}{\ln 2}t = \ln 3,$$

de donde

$$t = \frac{(\ln 2)(\ln 3)}{3.8} \approx \frac{0.7615}{3.8} \text{ días } = 0.20039 \text{ días},$$

es decir, $t \approx 4$ horas 45 min.

Ejercicios

1. ¿Cuánto tiempo tendrá que invertirse un capital de 30 000 pesos para duplicarse si el interés anual es del 3% y éste se compone anualmente? Si se cambia la cantidad inicial por cualquier otra, ¿cuánto tiempo se requiere?

2. El uranio 238, U^{238} (hay 238 neutrones en su composición), tiene una vida media de 4.5×10^9 años. ¿Cuántos años deberán pasar para que 16 384 gramos de uranio 238 se reduzcan a 256 gramos?

3. ¿Cuál de las dos opciones siguientes da, al finalizar, un mayor rendimiento?

- **a.** Invertir el capital a una tasa de interés del 12% anual compuesto bimestralmente.
- **b.** Invertir el capital a una tasa de interés del 12% anual compuesto trimestralmente.

4. El carbono 14 es un elemento radiactivo que se encuentra en los seres vivos y cuya cantidad se mantiene constante gracias a que se renueva de manera continua. Al morir, la cantidad de carbono 14 empieza a disminuir. Si la vida media del carbono 14 es de 5730 años, ¿qué porcentaje de la cantidad de carbono 14 conserva un fósil humano de 22 920 años?

5. En el año de 1963, en las escuelas primarias oficiales de la Ciudad de México los alumnos adquirían timbres con valor de 20 centavos cada uno. Al reunir en una libreta un total de 10 pesos, ésta era canjeada por un "bono del ahorro nacional", el cual duplicaba su valor a los 10 años. ¿Qué porcentaje de interés anual se pagaba si éste se componía anualmente?

6. El protozoario Glaucoma se reproduce por fisión binaria cada 3 horas. Suponiendo que al inicio haya un solo individuo, ¿cuántos puede haber después de transcurridas 27 horas?

7. El polonio 214 es uno de los elementos que resulta de la desintegración del uranio 238. El polonio 214 tiene una vida media de 16×10^{-5} segundos. ¿Qué tiempo debe pasar para que de 8192 gramos de polonio 214 sólo queden 512 gramos?

8. El torio 230 resulta de la desintegración del uranio 238 y tiene una vida media de 80 000 años. Se usa para calcular la edad de sedimentos oceánicos tan antiguos que las pruebas de carbono no funcionan o bien sólo sirven como complemento. ¿Cuántos años deben pasar para que la cantidad de torio 230 contenida en el sedimento se reduzca a la octava parte?

9. Una colonia de bacterias triplica su población cada dos horas. Si se colocan 5200 bacterias en una charola de cultivo, ¿cuántas habrá una semana después?

10. En una ampolleta se guarda cierta cantidad de radio, elemento radiactivo cuya vida media es de 1620 años. La ampolleta se pierde y 8100 años después es encontrada. ¿Qué fracción del radio inicial queda en ese momento?

11. El protactinio 231 resulta de la desintegración del uranio 235 y es útil en la determinación de la edad de algunos fósiles, tiene una vida media de 34 300 años. Si hace 205 800 años había 100 gramos de protactinio 231, ¿cuántos gramos hay ahora?

12. En 1997, México tenía aproximadamente 94 millones de habitantes. Un cálculo estimativo indica que para finales del año 2000 la población mexicana sería de alrededor de 99 millones. Suponiendo que el comportamiento es exponencial, ¿cuál será la población para el año 2010? Puedes usar una calculadora para obtener el valor del logaritmo.

13. Después de un desastre nuclear, en el aire quedan residuos de un elemento radiactivo cuya vida media es de 25 días. ¿Cuántos días deben pasar para que la cantidad de dicho elemento se reduzca a $\frac{1}{27}$ de la cantidad existente?

14. Un ahorrador depositó en un banco mexicano, el primer día del año de 1972, un capital de 10 000 pesos. En el documento correspondiente se estipuló que el interés fijo anual sería del 5% y que en caso de no ser retirado, al término de cada año se reinvertirían nuevamente el capital y los intereses al mismo plazo y con la misma tasa de interés. Si el ahorrador decide retirar su dinero el primer día del año 2000, ¿cuánto dinero recibirá? Recuerda que en México, en el año 1993, se le quitaron tres ceros a la moneda, es decir, 1000 pesos se convirtieron en 1 nuevo peso.

15. Un médico administra a un bebé 100 microgramos de medicamento, y sabe que el cuerpo elimina la mitad del medicamento cada 4 horas, ¿qué cantidad de medicamento tiene el cuerpo del bebé 24 horas después de ser ingerido?

16. En una película de ciencia ficción, un par de científicos descubre un meteorito que se encuentra a 120 millones de kilómetros de la Tierra y pierde velocidad de modo exponencial, dirigiéndose a la Tierra de tal manera que la distancia se reduce a la mitad cada 8 horas. Los científicos calculan que el meteorito es tan grande que, al chocar con la Tierra, ésta desaparecerá. Uno de los científicos afirma que a la Tierra le quedan menos de 9 días de vida, mientras que el otro asegura que el meteorito no destruirá el planeta. ¿Cuál de los dos tiene razón?

*$\mathbf{a}^x$ *versus* $\mathbf{x}^a$, con $a > 1$

Probar que $0 < \ln(x) < x$ si $x > 1$ y, a partir de esta desigualdad, estudiar el comportamiento de $\dfrac{x}{\ln(x)}$ cuando x crece indefinidamente.

Solución:

A partir de la siguiente figura

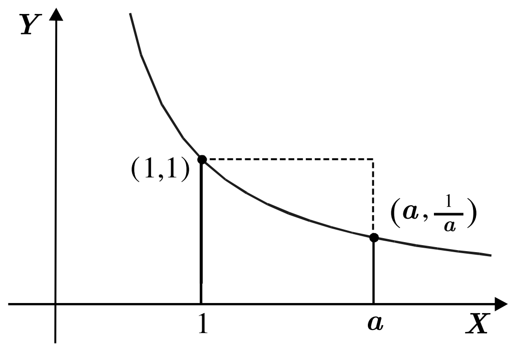


Figura 3-12

concluimos que el área del rectángulo excrito a la gráfica de $\frac{1}{x}$ y con base en el intervalo $[1, a]$ es mayor estrictamente que $\ln(a)$, para todo $a > 1$, es decir,

$$\ln(a) < a - 1 < a;$$

y sabemos que $a > 1$ implica $\ln(a) > \ln(1) = 0$. Así,

$$0 < \ln(a) < a, \tag{3.17}$$

como queríamos probar.

Sabemos que $\sqrt{x} > 1$ si $x > 1$ (Propiedad fundamental 4 de a^r, página 135). Así, tomando $a = \sqrt{x}$ en (3.17) obtenemos

$$0 < \ln\left(\sqrt{x}\right) < \left(\sqrt{x}\right), \text{ si } x > 1.$$

Como $\ln\sqrt{x} = \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$, las desigualdades anteriores se transforman en

$$0 < \frac{1}{2}\ln(x) < \left(\sqrt{x}\right),$$

de donde

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{\ln(x)}, \quad \text{si } x > 1$$

y, por tanto,

$$\frac{x}{2\sqrt{x}} < \frac{x}{\ln(x)}, \quad \text{si } x > 1.$$

Es decir,

$$\frac{\sqrt{x}}{2} < \frac{x}{\ln(x)}, \quad \text{si } x > 1. \tag{3.18}$$

Como $\frac{\sqrt{x}}{2}$ crece indefinidamente cuando x crece (ver la gráfica $\frac{\sqrt{x}}{2}$ en la figura 3-13), y como $\frac{x}{\ln(x)}$ supera a $\frac{\sqrt{x}}{2}$, se sigue que

$$\frac{x}{\ln(x)} \text{ crece indefinidamente cuando } x \text{ crece indefinidamente.}$$

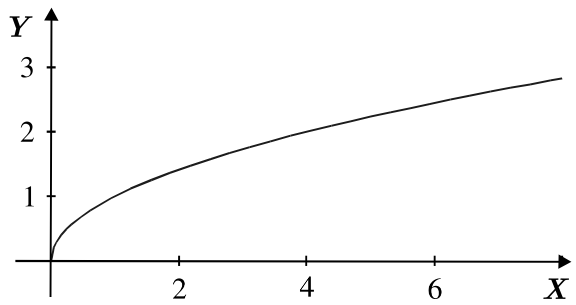


Figura 3-13

Para señalar que una función f crece indefinidamente cuando x crece indefinidamente, escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

(léase $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a infinito).

Así, podemos escribir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \infty \tag{3.19}$$

En la siguiente figura aparecen las gráficas de las funciones $I(x) = x$ y $\ln(x)$; ambas son crecientes y tienden a infinito cuando x tiende a infinito.

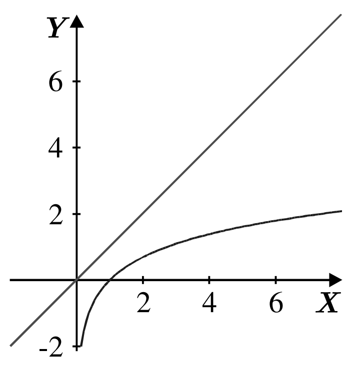


Figura 3-14

El hecho de que $\frac{x}{\ln(x)}$ tenga el mismo comportamiento, tal y como concluimos en el ejemplo introductorio, indica que $I(x) = x$ crece más rápido de lo que lo hace $\ln(x)$ (ver la tabla siguiente).

x	$\ln(x)$	$\dfrac{x}{\ln(x)}$
10	2.3026	4.3429
100	4.6052	21.715
1000	6.9078	144.76
10000	9.2103	1085.7
100000	11.513	8685.8
1000000	13.816	72380
10000000	16.118	620420
100000000	18.421	5 428600

El resultado (3.19) puede generalizarse, así obtenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{z}{(\ln(z))^r} = \infty, \text{ donde } r \text{ es un número real cualquiera} \tag{3.20}$$

Así,

$$\boxed{z \text{ crece más rápido que } (\ln z)^r, \text{ si } r > 1.}$$

Cuando una función $g(x)$ crece más rápido que otra función $f(x)$, y ambas tienden a infinito cuando x tiende a infinito, entonces el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ se acerca a 0 cuando x crece. Esto sucede, por ejemplo, con $g(x) = x^2$ y $f(x) = x + 10$ (ver la tabla siguiente).

x	$x + 1000$	x^2	$\dfrac{x+1000}{x^2}$
10	1010	100	1.010
10000	11000	10^8	0.00011
100000	101000	10^{10}	0.0000101
100000000	100001000	10^{16}	0.00000001

Ejemplos

1. ¿Cuál crece más rápido, x o e^x?

Solución:

Sabemos que ambas funciones tienden a infinito cuando x tiende a infinito. Reescribamos (3.18) como

$$\frac{(a)^{\frac{1}{2}}}{2} < \frac{a}{\ln(a)}, \quad \text{si } a > 1. \tag{3.21}$$

Recordamos que
$$e^x > e^0 > 1, \quad \text{si } x > 0.$$
Por tanto, si en (3.21) hacemos $a = e^x$, con $x > 0$, entonces tenemos
$$\frac{(e^x)^{\frac{1}{2}}}{2} < \frac{e^x}{\ln(e^x)}, \quad \text{si } x > 0,$$
o sea,
$$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} < \frac{e^x}{x}, \quad \text{si } x > 0.$$
Y como $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$ tienden, a infinito cuando x tiende a infinito, concluimos que

$$\boxed{e^x \text{ crece más rápido que } x.}$$

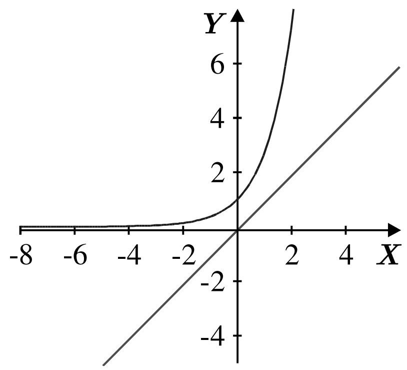


Figura 3-15

2. ¿Cuál crece más rápido, x^{100} o e^x?

Solución:

Como $z = e^x$ crece indefinidamente cuando x crece, de (3.20) resulta, con $r = 100$, que
$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{(\ln(z))^r} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{(\ln(e^x))^{100}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = \infty.$$
Es decir, e^x crece más rápido que x^{100} cuando x crece.

Si $r > 1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} x^r = \infty$. Al proceder como en el último ejemplo, podemos concluir que
$$e^x \text{ crece más rápido que } x^r$$
y, a partir de aquí, se llega a que

$$\boxed{a^x \text{ crece más rápido que } x^a \text{ para todo } a > 1.}$$

Capítulo 4

Segmentos dirigidos

En este capítulo damos la fórmula necesaria para calcular la distancia entre dos puntos de los que conocemos sus coordenadas. Con esto podemos determinar la longitud de un segmento a partir de las coordenadas de sus extremos. Podemos comparar las longitudes de segmentos formulando el cociente de las mismas, lo que determina una razón. Tales cocientes aparecen en situaciones diversas, por ejemplo en la geometría, donde múltiples resultados se expresan en términos de razones de segmentos. Aquí se presenta uno de tales resultados: la hipótesis fundamental de proporcionalidad. Dichas razones son llamadas razones aritméticas para diferenciarlas de las llamadas razones algebraicas; las cuales se obtienen cuando se manejan segmentos a los que se les ha dado una dirección y que son los llamados segmentos dirigidos. Para dar dirección a un segmento no nulo, o sea que no se reduce a un punto, se escoge una de las dos posibles maneras en que puede considerarse fue generado al moverse uno de sus extremos hacia el otro; así, cada segmento no nulo origina dos segmentos dirigidos. Para dos segmentos dirigidos que están sobre una misma recta se define su razón algebraica; por ejemplo, dado un punto R en la recta que contiene al segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$, se determinan los segmentos dirigidos $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ y podemos obtener su razón algebraica, $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$, siempre que R no coincida con Q. Esta razón es un número r que puede ser positivo, negativo o cero. Al final del capítulo se presenta la manera de determinar las coordenadas del punto R que divide a un segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ en una razón r preestablecida.

Longitud de un segmento

Distancia entre dos puntos

En una carta de navegación el origen se sitúa en un puerto. Un barco se encuentra en el punto $(-5,6)$ y otro en el $(2,3)$. ¿Qué distancia hay entre estos barcos, si las unidades de la carta corresponden a kilómetros?

Solución:

Construimos el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa al segmento que une los puntos $(-5,6)$ y $(2,3)$, como se muestra en la figura 4-1.

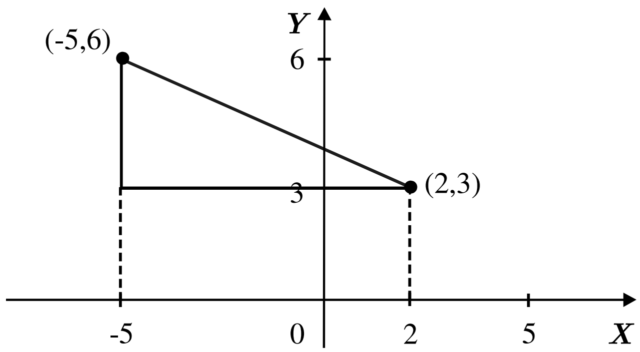


Figura 4-1

Las longitudes de los catetos son

$$|2-(-5)| = 7 \quad \text{y} \quad |3-6| = 3.$$

Recordemos que el teorema de Pitágoras establece:

"En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos."

Por tanto,

$$\sqrt{7^2+3^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58} \approx 7.6.$$

Los dos barcos se encuentran a una distancia de aproximadamente 7.6 kilómetros.

Al segmento que une los puntos $P\,(x_1,y_1)$ y $Q\,(x_2,y_2)$ lo denotamos mediante $\overline{PQ}$; en tanto que escribimos $\left|\overline{PQ}\right|$ para referirnos a su *longitud*, cuyo valor se conoce como la *distancia de* P a Q, la cual se calcula, como sugiere el ejemplo anterior, con la siguiente fórmula:

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Observamos que si los puntos están alineados vertical u horizontalmente, uno de los dos sumandos de la fórmula anterior vale cero, pero aún así es válida en esos casos.

La distancia entre P y Q también se denota mediante $d(P,Q)$, por lo que

$$\boxed{d(P,Q) = \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.} \tag{4.1}$$

Justificamos esta fórmula del modo que nos sugiere el ejemplo introductorio de esta sección. Supongamos que los puntos P y Q no están en una misma recta vertical u horizontal y construyamos un triángulo rectángulo que tenga al segmento $\overline{PQ}$ por hipotenusa, como muestra la figura 4-2; las longitudes de sus catetos son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$.

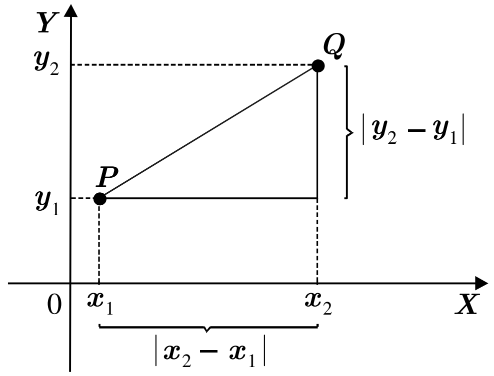


Figura 4-2

Al utilizar el teorema de Pitágoras, obtenemos que la distancia entre los puntos es

$$\left|\overline{PQ}\right|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 .$$

Por las propiedades del valor absoluto sabemos que

$$|a|^2 = a^2 \qquad \text{para cualquier número real } a,$$

por lo que podemos escribir

$$\left|\overline{PQ}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

y

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplos

1. Encuentra la distancia entre $P(3, 5)$ y $Q(-1, 6)$.

Solución:

Sustituimos las coordenadas de P y Q en la fórmula (4.1) y obtenemos

$$d(P, Q) = \sqrt{((-1) - 3)^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

Observamos que no importa el orden en que tomemos los puntos.

$$d(P, Q) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

2. Encontrar la longitud del segmento que une a los puntos $P(-3, -4)$ y $Q(-3, 2)$.

Solución:

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{((-3) - (-3))^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{0 + 36} = 6.$$

3. ¿Qué coordenadas tiene el punto $C(x, y)$ del eje X que equidista de $A\,(0, 6)$ y de $B\,(5, 1)$?

Solución:

Como C está sobre el eje X, su coordenada y vale 0. Nos falta determinar el valor de x. Como la distancia de $C(x, 0)$ a A debe ser igual a la distancia de C a B, entonces

$$d\,(C, A) = d\,(C, B)\,.$$

Sustituimos las coordenadas de los puntos

$$\sqrt{(x-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (0-1)^2}.$$

Al efectuar las operaciones que se encuentran en los radicales, obtenemos

$$\sqrt{x^2 + 36} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 1}.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación y encontramos el valor de x.

$$\begin{aligned} x^2 + 36 &= x^2 - 10x + 25 + 1 \\ 10x &= -10 \\ x &= -1, \end{aligned}$$

entonces el punto del eje X que equidista de A y de B es $C\,(-1, 0)$ (figura 4-3).

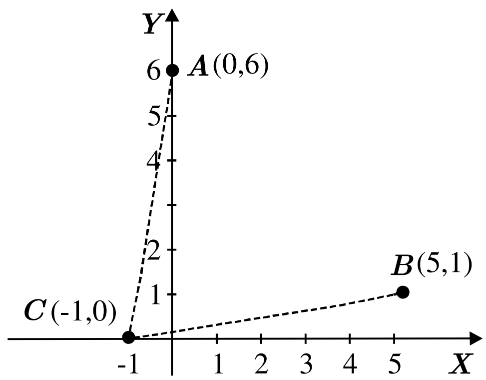


Figura 4-3

4. Encontrar el punto $P\,(x, y)$ que equidista de $A\,(0, 1)$, $B\,(-6, 9)$, $C\,(2, 5)$.

Solución:

El punto P debe satisfacer

$$d\,(P, A) = d\,(P, B) = d\,(P, C)\,,$$

es decir,

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+6)^2 + (y-9)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}.$$

Primero simplificamos

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+6)^2 + (y-9)^2}.$$

Elevando al cuadrado, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 + 12x + 36 + y^2 - 18y + 81 \\ -12x + 16y &= 116, \end{aligned}$$

dividiendo entre 4

$$-3x + 4y = 29. \tag{4.2}$$

Ahora simplificamos

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}.$$

Elevando al cuadrado, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 \\ 4x + 8y &= 28, \end{aligned}$$

dividiendo entre 4

$$x + 2y = 7. \tag{4.3}$$

Por último, resolvemos simultáneamente las ecuaciones (4.2) y (4.3)

$$\begin{aligned} -3x + 4y &= 29 \\ x + 2y &= 7. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Multiplicamos por 3 la segunda ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned} -3x + 4y &= 29 \\ 3x + 6y &= 21. \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones y simplificando, tenemos

$$\begin{aligned} 10y &= 50 \\ y &= 5. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación de (4.4), obtenemos

$$x = -3.$$

Así, el punto P que equidista de A, B y C tiene coordenadas $(-3, 5)$.

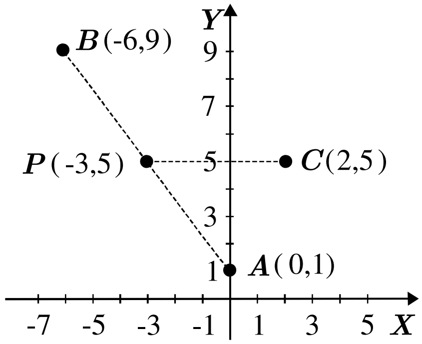


Figura 4-4

Ejercicios

En cada caso, encuentra la distancia entre los dos puntos dados.

1. $P\,(7,1)$ y $Q\,(2,3)$.

2. $P\,(4,8)$ y $Q\,(7,3)$.

3. $P\,(1,1)$ y $Q\,(-8,-5)$.

4. $P\,(0,4)$ y $Q\,(3,0)$.

5. $P\,(-2,-2)$ y $Q\,(7,1)$.

6. $P\,(5,3)$ y $Q\,(3,5)$.

7. $P\,(6,2)$ y $Q\,(8,5)$.

8. $P\,(-4,3)$ y $Q\,(0,0)$.

9. $P\left(2\sqrt{2},\sqrt{7}\right)$ y $Q\left(\sqrt{2},0\right)$.

10. $P\,(3,9)$ y $Q\,(7,-1)$.

11. $P\,(-6,0)$ y $Q\,(0,6)$.

12. $P\left(\sqrt{3},5\right)$ y $Q\left(5\sqrt{3},\sqrt{5}\right)$.

13. ¿Qué coordenadas tiene el punto del eje Y que equidista de $A\,(5,5)$ y de $B\,(4,2)$? ¿Qué tipo de triángulo forman estos tres puntos?

14. ¿Qué coordenadas tiene el punto del eje X que equidista de $A\,(-3,-2)$ y de $B\,(4,5)$? ¿Qué tipo de triángulo forman estos tres puntos?

15. ¿Cuál es la ordenada del punto de abscisa -1 que equidista de los puntos $A\,(6,8)$ y $B\,(-3,4)$?

16. ¿Cuál es la abscisa del punto cuya ordenada es $\frac{1}{2}$ que equidista de los puntos $A\,(-1,0)$ y $B\left(\frac{5}{2},-3\right)$?

En los ejercicios 17 al 20 localiza los puntos dados. Dibuja el triángulo formado con esos puntos como vértices y calcula las longitudes de sus lados.

17. $A\,(-3,6)$, $B\,(-4,3)$ y $C\,(4,7)$.

18. $A\,(-1,2)$, $B\,(6,2)$ y $C\,(-2,-3)$.

19. $A\,(-2,-1)$, $B\,(5,-2)$ y $C\,(3,1)$.

20. $A\,(0,0)$, $B\,(8,5)$ y $C\,(2,4)$.

21. Demuestra que el triángulo con vértices $A\,(2,5)$, $B\,(4,-1)$ y $C\,(6,5)$ es isósceles.

22. Demuestra que el cuadrilátero cuyos vértices son $A\,(8,-3)$, $B\,(6,5)$, $C\,(-2,3)$ y $D\,(0,-5)$ es un cuadrado. Recuerda que si los cuatro lados de un cuadrilátero miden lo mismo y sus diagonales son iguales, entonces se trata de un cuadrado.

23. Demuestra que el cuadrilátero cuyos vértices son $A\,(1,-4)$, $B\,(4,5)$, $C\,(1,6)$ y $D\,(-2,-3)$ es un rectángulo. Recuerda que si en un cuadrilátero los lados opuestos son iguales y las diagonales son iguales entre sí, entonces se trata de un rectángulo.

Segmentos dirigidos

Si P y Q son dos puntos distintos en el plano, el segmento $\overline{PQ}$ puede interpretarse como el resultado de un movimiento rectilíneo de P hacia Q o bien de Q hacia P. Desde este punto de vista, podemos hacer una distinción entre sus extremos: uno es el *extremo inicial* y el otro el *extremo final* (figura 4-5).

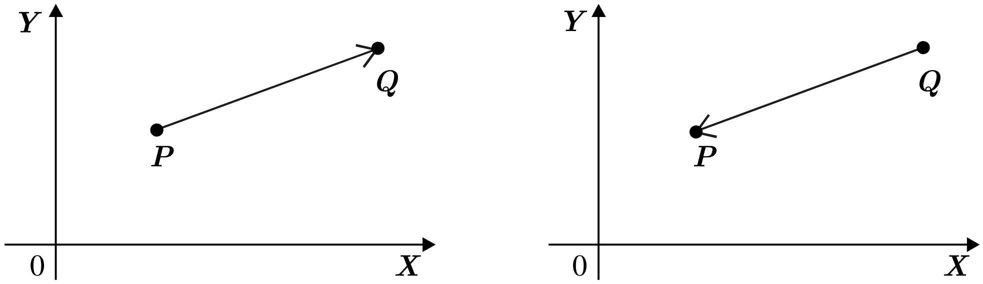


Figura 4-5

Cuando en un segmento se hace tal distinción entre sus extremos, entonces se dice que el segmento está *dirigido* u *orientado*, y escribimos $\overrightarrow{PQ}$ si P es el extremo inicial y Q el final.

Por tanto, un segmento $\overline{PQ}$ da lugar a dos segmentos dirigidos:

$$\overrightarrow{PQ} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{QP},$$

el primero con extremo inicial P y el segundo con extremo inicial Q.

Por supuesto, la longitud de un segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$, a la que denotamos mediante $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$, es la longitud del segmento $\overline{PQ}$. O sea,

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overline{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{QP}\right|.$$

De acuerdo con lo que vimos en la sección anterior, si $P(x_1, y_1)$ y $Q\,(x_2, y_2)$ son dos puntos en el plano, entonces

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{QP}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Observación:

En el caso en que $P = Q$, los segmentos $\overline{PQ}$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ constan de un solo punto, tienen longitud cero y se denominan *segmentos nulos.*

Dos segmentos dirigidos, no nulos, pertenecientes a la misma recta pueden tener la *misma dirección* o *dirección opuesta.*

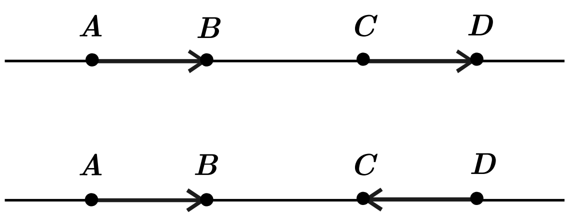


Figura 4-6

Ejemplos

1. Dados $P\,(1,2)$, $Q(3,6)$ y $R\,(2,4)$

a. Determina si $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$ tienen la misma dirección o dirección opuesta.

b. Encuentra la longitud de los segmentos dirigidos $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$.

Solución:

a. Si dibujamos los segmentos, vemos que apuntan en direcciones opuestas, por tanto, tienen dirección opuesta (figura 4-7).

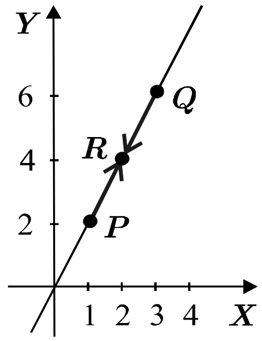


Figura 4-7

b. La longitud del segmento dirigido $\overrightarrow{PR}$ es

$$\left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

La longitud del segmento dirigido $\overrightarrow{QR}$ es

$$\left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{(2-3)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

2. Tomamos un punto R en la recta que contiene al segmento dirigido no nulo $\overrightarrow{PQ}$, ¿cómo debe estar colocado R para que

a. $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ tengan la misma dirección?

b. $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ tengan direcciones contrarias?

c. $\overrightarrow{PR}$ o $\overrightarrow{RQ}$ sean nulos?

Solución:

Con base en la figura 4-8 podemos responder que

a. $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ tienen la misma dirección cuando R está entre P y Q.

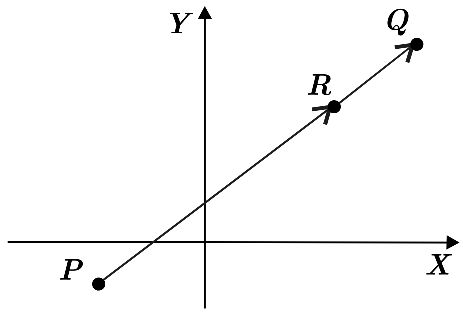


Figura 4-8

b. $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ tienen direcciones contrarias cuando R está fuera del segmento $\overline{PQ}$ (figura 4-9).

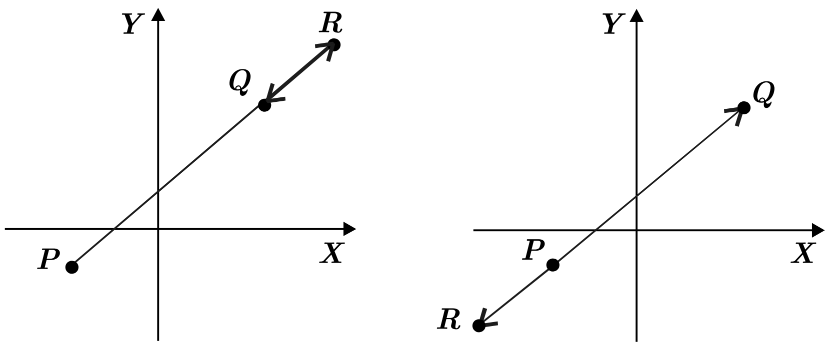


Figura 4-9

c. $\overrightarrow{PR}$ o $\overrightarrow{RQ}$ son nulos cuando R coincide con P o Q, respectivamente (figura 4-10).

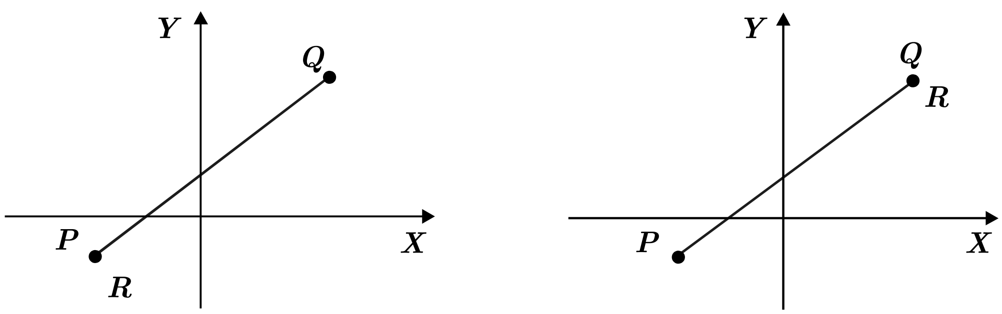


Figura 4-10

División de un segmento

Punto medio de un segmento

Si dos vértices opuestos de un cuadrado tienen coordenadas $(-2,-1)$ y $(2,-1)$, ¿cuáles son las coordenadas de su centro?

Solución:

El segmento que une los puntos $(-2,-1)$ y $(2,-1)$ es una diagonal del cuadrado, de manera que el punto medio de dicho segmento coincide con el centro del cuadrado (figura 4-11).

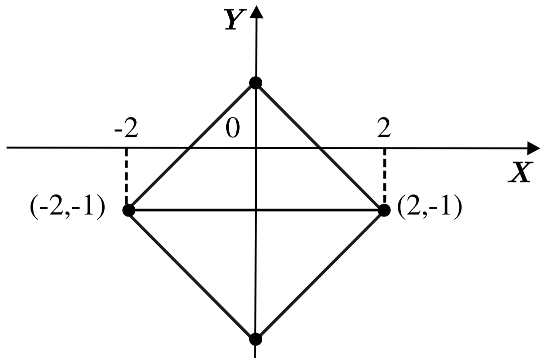


Figura 4-11

Puesto que los dos puntos tienen la misma ordenada, la diagonal es horizontal. Entonces el punto medio tendrá la ordenada igual a -1 y la abscisa igual al promedio de las abscisas de los vértices que la determinan.

$$\frac{-2+2}{2}=0,$$

es decir, el centro del cuadrado tiene coordenadas $(0,-1)$.

Para generalizar, consideremos dos puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$. Deseamos encontrar las fórmulas para determinar las coordenadas (a,b) del *punto medio* M *del segmento* $\overline{PQ}$. En la figura 4-12, observamos que las proyecciones de los puntos P, M y Q sobre el eje X tienen asociados los números x_1, a y x_2, respectivamente. Como establecemos más adelante (página 173), la proyección de M es el punto medio del segmento que determinan las proyecciones de P y Q. Así, a es el promedio de x_1 y x_2:

$$a=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

De manera análoga, b es el promedio de y_1 y y_2:

$$b=\frac{y_1+y_2}{2},$$

de donde

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right) \tag{4.5}$$

es el punto medio del segmento que une a $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$.

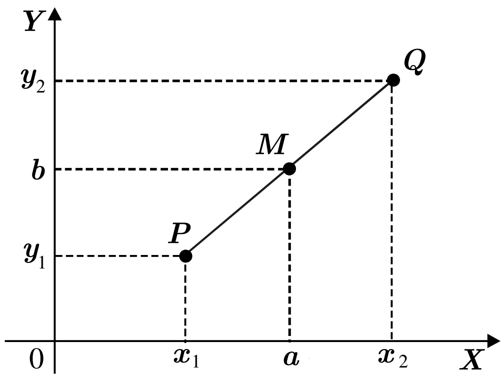


Figura 4-12

Ejemplos

1. Encuentra las coordenadas del punto medio del segmento que une a $P(3,1)$ y $Q(9,1)$.

Solución:

Sustituimos los valores de las coordenadas de P y Q en (4.5). El punto medio del segmento PQ es

$$M = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (6,1).$$

2. Si el extremo de un segmento es el punto $P\left(-6, \frac{1}{3}\right)$ y el punto medio de dicho segmento es $M(1,2)$, ¿cuál es el otro extremo del segmento?

Solución:

Las coordenadas del punto medio son

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Si sustituimos los valores del extremo conocido y del punto medio tenemos

$$1 = \frac{-6+x_2}{2} \qquad \text{y} \qquad 2 = \frac{\frac{1}{3}+y_2}{2}.$$

Al despejar x_2 y y_2, tenemos

$$x_2 = 8 \qquad \text{y} \qquad y_2 = \frac{11}{3}.$$

El extremo buscado es $Q\left(8, \frac{11}{3}\right)$.

Razón (aritmética) de segmentos

En una carrera entre Aquiles y una tortuga, después de un minuto Aquiles ha recorrido 500 metros mientras que la tortuga sólo ha recorrido 5 metros. ¿Cuál es la razón entre la longitud recorrida por Aquiles y la longitud recorrida por la tortuga (figura 4-13)?

Solución:

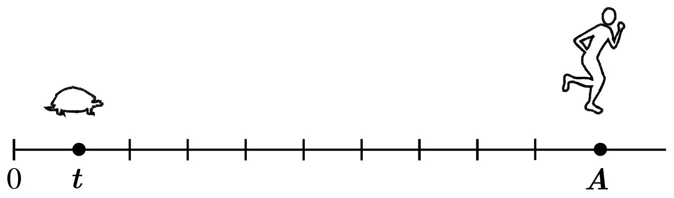


Figura 4-13

La razón es

$$\frac{500}{5} = 100.$$

Esto significa que el segmento recorrido por Aquiles es 100 veces mayor que el segmento recorrido por la tortuga.

Para dos segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ cualesquiera, con $R \neq S$, la razón $\dfrac{PQ}{RS}$ se define como el cociente de las longitudes respectivas, es decir,

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{\left|\overline{PQ}\right|}{\left|\overline{RS}\right|}.$$

Este cociente sólo toma en consideración el tamaño de los segmentos. Tal tipo de razones aparecen en situaciones diversas; por ejemplo, en la llamada *hipótesis fundamental de proporcionalidad*, que dice:

Si en un triángulo ABC una recta corta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en dos puntos distintos, P y Q, y la recta es paralela al tercer lado $\overline{BC}$, entonces determina segmentos proporcionales a los lados (figura 4-14). Es decir, $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AB}{AC}$ o, lo que es lo mismo,

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}.$$

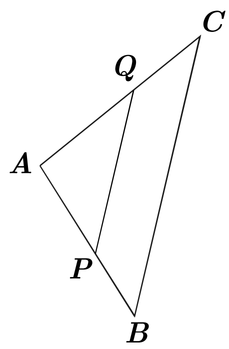


Figura 4-14

Consecuencia de la igualdad anterior es la siguiente, que es la que usaremos más adelante.

Proposición 1 Si en el triángulo ABC una recta corta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en dos puntos distintos P y Q, y la recta es paralela al tercer lado BC, entonces

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}. \tag{4.6}$$

La siguiente proposición nos dice que las razones de segmentos se conservan al proyectar ortogonalmente puntos de una recta en otra. Esto será útil cuando veamos cómo dividir un segmento en una razón dada.

Proposición 2 *(Conservación de las razones bajo proyecciones)* Si P, Q y R son tres puntos de una recta ℓ, con $R \neq Q$ y P', Q' y R' son sus proyecciones ortogonales sobre otra recta ℓ' no perpendicular a ℓ; entonces

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{P'R'}{R'Q'}.$$

Demostración:

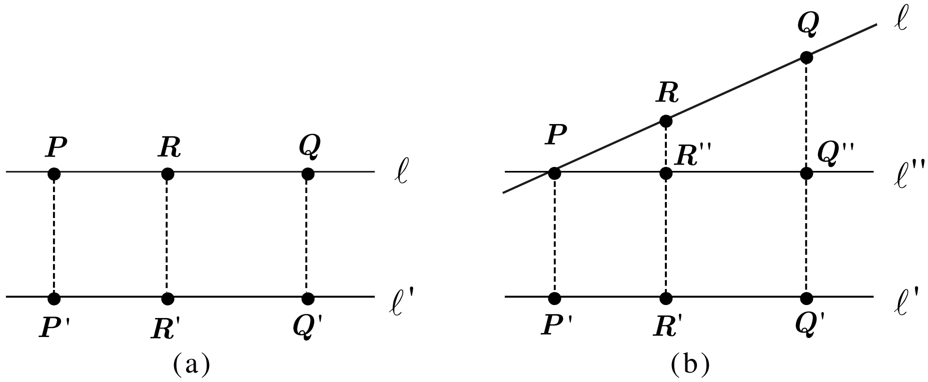


Figura 4-15

Si las rectas ℓ y ℓ' son paralelas, el resultado es verdadero ya que los lados opuestos de un rectángulo miden lo mismo. Ver la figura 4-15 (a).

Supongamos ahora que ℓ y ℓ' no son paralelas y que P, Q y R están colocados como en la figura 4-15 (b).

Por P trazamos una una recta ℓ'' paralela a ℓ'; llamamos Q'' y R'' a las proyecciones de Q y R sobre la recta ℓ''. Por lo visto, cuando ℓ y ℓ' son paralelas tenemos

$$\frac{PR''}{R''Q''} = \frac{P'R'}{R'Q'},$$

por lo que sólo necesitamos probar que

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{PR''}{R''Q''}.$$

Sin embargo, esta igualdad es la igualdad (4.6) cuando al triángulo PQQ'' se le aplica la hipótesis fundamental de proporcionalidad, y así queda probada la proposición. ∎

Observación: Cuando R es el punto medio de PQ, entonces lo divide en la razón $\frac{PR}{RQ} = 1$ y R' hace lo mismo con $P'Q'$. O sea, $\frac{P'R'}{R'Q'} = 1$. Por tanto, $P'R' = R'Q'$, y R' es el punto medio de $P'Q'$.

La hipótesis fundamental de proporcionalidad nos da una proporción entre dos lados del triángulo APQ y dos de los lados del triángulo ABC (ver figura 4-14). También los otros lados están en la misma razón.

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$$

Razón algebraica de segmentos dirigidos

Cuando los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ están en una misma recta, entonces a la razón

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{RS}|}$$

también se le llama *razón aritmética* de los segmentos; dicho nombre se usa para distinguirla de la razón entre segmentos dirigidos, la cual presentaremos a continuación.

Para dos segmentos dirigidos cualesquiera $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ contenidos en una misma recta, con $R \neq S$, la *razón algebraica* o *razón entre segmentos dirigidos* se define como:

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}} = \pm \frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{RS}|}, \tag{4.7}$$

donde se elige el signo + si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma dirección, o si $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento nulo; y se elige el signo − si esos segmentos tienen direcciones contrarias.

Cuando resulta claro que se trabaja con razones entre segmentos dirigidos, se acostumbra simplificar la escritura suprimiendo las flechas; en ese caso, la dirección del segmento queda determinada por el orden en que se escriben sus extremos. Así, por ejemplo, escribiremos $\dfrac{PQ}{RS}$, en lugar de $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}}$. Con esta convención, la definición (4.7) de razón algebraica o entre segmentos dirigidos se escribe como

$$\frac{PQ}{RS} = \pm \frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{RS}|},$$

donde la elección del signo $+$ o $-$ se realiza como indicamos anteriormente. *En el siguiente apartado expresaremos, de este modo, la razón entre segmentos dirigidos.*

Ejemplos

1. Encontrar las razones algebraicas

$$\frac{PQ}{RS}, \quad \frac{PQ}{SR}, \quad \frac{QP}{RS} \quad \text{y} \quad \frac{QP}{SR},$$

si P, Q, R y S son los puntos del eje X que corresponden a los números 2, 5, -1 y 7, respectivamente (figura 4-16).

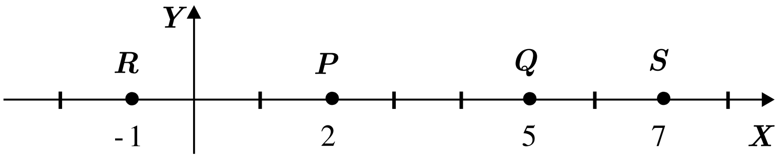


Figura 4-16

Solución:

Tenemos que

$$\frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{RS}|} = \frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{SR}|} = \frac{|\overline{QP}|}{|\overline{RS}|} = \frac{|\overline{QP}|}{|\overline{SR}|} = \frac{|5-2|}{|7-(-1)|} = \frac{3}{8}.$$

Los segmentos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma dirección, y lo mismo sucede con $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{SR}$. En tanto que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{SR}$ tienen direcciones contrarias, al igual que $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{RS}$. Por tanto,

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{QP}{SR} = \frac{3}{8} \quad \text{y} \quad \frac{PQ}{SR} = \frac{QP}{RS} = -\frac{3}{8}.$$

2. Consideremos dos segmentos dirigidos, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$, en una recta, con $R \neq S$. Explicar por qué

$$\frac{PQ}{RS} = -\frac{QP}{RS}.$$

Solución:

Tenemos que

$$\frac{PQ}{RS} = \pm\frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{RS}|} \qquad \text{y} \qquad \frac{QP}{RS} = \pm\frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{RS}|}.$$

Si $\overrightarrow{PQ}$ es el vector nulo, también lo es $\overrightarrow{QP}$, y entonces

$$\frac{PQ}{RS} = 0 = -\frac{QP}{RS}.$$

Cuando $\overrightarrow{PQ}$ no es el vector nulo, entonces $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ tienen direcciones contrarias; por tanto, la dirección de sólo uno de ellos puede coincidir con la de $\overrightarrow{RS}$; entonces el signo a escoger para $\dfrac{QP}{RS}$ es el contrario al elegido para $\dfrac{PQ}{RS}$ (figura 4-17).

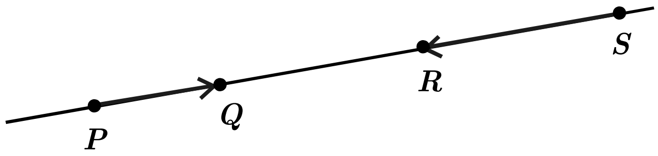


Figura 4-17

Proposición 3 Si los puntos P, Q, R, S están en la recta real y p, q, r, s son los números asociados a ellos, respectivamente, entonces podemos calcular la razón algebraica $\dfrac{PQ}{RS}$ de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{PQ}{RS} = \frac{q-p}{s-r},} \tag{4.8}$$

es decir, tanto en el numerador como en el denominador, se resta el valor del extremo final menos el valor del extremo inicial, independientemente de cuál es mayor.

Resolvamos nuevamente el ejemplo **1** de la página 175.

Ejemplo

- Encontrar las razones algebraicas

$$\frac{PQ}{RS}, \quad \frac{PQ}{SR}, \quad \frac{QP}{RS} \quad \text{y} \quad \frac{QP}{SR},$$

si P, Q, R y S son los puntos del eje X que corresponden a los números 2, 5, -1 y 7, respectivamente.

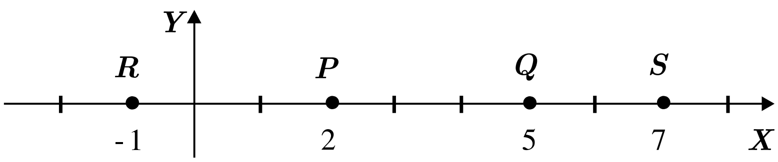


Figura 4-18

Solución:

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{5-2}{7-(-1)} = \frac{3}{8}; \quad \frac{QP}{SR} = \frac{2-5}{-1-7} = \frac{3}{8}; \quad \frac{PQ}{SR} = \frac{5-2}{-1-7} = -\frac{3}{8}; \quad \frac{QP}{RS} = \frac{2-5}{7-(-1)} = -\frac{3}{8}$$

que son los mismos resultados que habíamos obtenido anteriormente en el ejemplo 1 de la página 175.

División de un segmento en una razón dada

Supongamos que tenemos una pista de 100 metros de largo. Llamemos P al punto inicial, Q al punto final, y R al punto en donde se encuentra un corredor. Supongamos que el corredor ha recorrido 30 metros. ¿En qué razón divide R a la pista?

Solución:

Consideremos la razón del segmento ya recorrido entre el segmento que falta por recorrer:

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

Decimos que R divide a la pista en la razón $r = \frac{3}{7}$.

Observa que:

• Cuando el corredor no ha iniciado su carrera, R divide a la pista en la razón 0.

• Cuando el corredor va a la mitad de la pista, R divide a la pista en la razón 1.

• Conforme el corredor se acerca a la meta, R divide a la pista en una razón cada vez más grande, pues RQ es cada vez más pequeño.

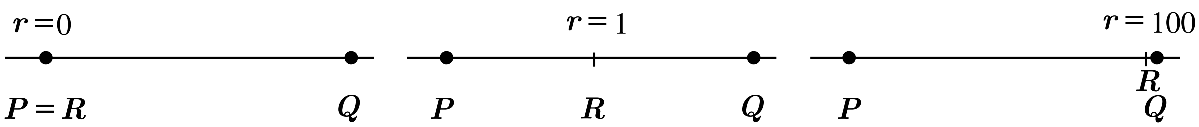


Figura 4-19

Tomemos un punto $R \neq Q$ en la recta que contiene al segmento dirigido no nulo, $\overrightarrow{PQ}$. *La razón en que R divide a $\overrightarrow{PQ}$* se define como la siguiente razón algebraica o de segmentos dirigidos:

$$r = \frac{PR}{RQ}. \tag{4.9}$$

Entonces decimos que R *divide al segmento $\overrightarrow{PQ}$ en la razón (algebraica) r.* Más adelante veremos que si $r \neq -1$, entonces hay un único punto que divide a un segmento dado en la razón r.

De acuerdo con lo anterior, el punto medio M de un segmento $\overrightarrow{PQ}$ lo divide en la razón 1, ya que

$$\left|\overline{PM}\right| = \left|\overline{MQ}\right|;$$

y $\overrightarrow{PM}$ y $\overrightarrow{MQ}$ tienen la misma dirección, así que

$$\frac{PM}{MQ} = 1.$$

Cabe mencionar que algunos otros autores usan un cociente distinto al que aparece en (4.9) para definir la razón en que un punto divide a un segmento (ver el ejercicio 9 de los ejercicios de repaso).

Observaciones:

El signo de $\dfrac{PR}{RQ}$ depende de cómo se comparan las direcciones de $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$. Por esto, y de acuerdo con el ejemplo **2** de la página 168, tenemos

- $\dfrac{PR}{RQ} \geq 0$ sólo cuando R está en el segmento $\overline{PQ}$. Y se tiene la igualdad $\dfrac{PR}{RQ} = 0$ sólo cuando R coincide con P.
- $\dfrac{PR}{RQ} < 0$ sólo cuando R está fuera del segmento $\overline{PQ}$.
- R no puede dividir a PQ en la razón $r = -1$, ya que entonces debería de satisfacerse que
$$\left|\overline{PR}\right| = \left|\overline{RQ}\right|$$
y que R esté fuera de $\overline{PQ}$, y estas dos condiciones son incompatibles, pues si R está fuera de $\overline{PQ}$ (figura 4-20) entonces

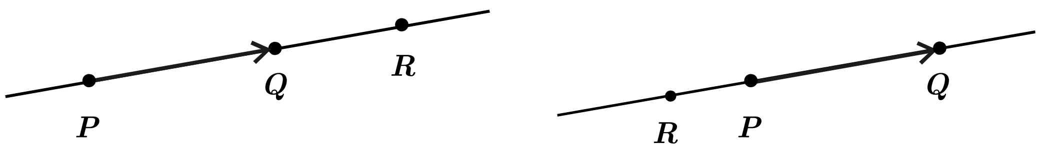


Figura 4-20

$$\left|\overline{PR}\right| = \left|\overline{PQ}\right| + \left|\overline{RQ}\right| > \left|\overline{RQ}\right|$$

si R está más cerca de Q que de P y, en caso contrario,

$$\left|\overline{RQ}\right| = \left|\overline{PQ}\right| + \left|\overline{RP}\right| > \left|\overline{PR}\right|.$$

Para evitar la exclusión a la razón $r = -1$, algunos autores establecen la convención de que el punto al infinito divide al segmento en tal razón. Nosotros no la adoptamos.

Tomemos dos puntos $P\,(5, 0)$ y $Q\,(9, 0)$ en el eje X y la razón $r = -2$. Busquemos el punto R que divide al segmento PQ en la razón r.

Solución:

Queremos que
$$-2 = \frac{PR}{RQ}.$$

Llamemos z a la abscisa de R. De la ecuación (4.8) tenemos que
$$\frac{PR}{RQ} = \frac{z-5}{9-z},$$

por tanto, debemos resolver
$$-2 = \frac{z-5}{9-z},$$

de donde despejamos la z,

$$z = 13.$$

Es decir, $R(13, 0)$ divide al segmento PQ en la razón -2, como podemos comprobar:

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{13-5}{9-13} = \frac{8}{-4} = -2.$$

Veamos el caso general.

Proposición 4 Si $P(x_1, 0)$ y $Q(x_2, 0)$ y $r \neq -1$, entonces $R\left(\dfrac{x_1 + rx_2}{1+r}, 0\right)$ es el único punto en el eje X que divide al segmento PQ en la razón r.

Demostración: Supongamos que $R(z, 0)$ es un punto en el eje X tal que $z \neq x_2$ y

$$\frac{PR}{RQ} = r. \tag{4.10}$$

De acuerdo con (4.8)

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{z - x_1}{x_2 - z} = r,$$

y al despejar z,

$$z = \frac{x_1 + rx_2}{1+r},$$

es decir,

$$R(z, 0) = R\left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, 0\right).$$

Comprobación:

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{z - x_1}{x_2 - z} = \frac{\dfrac{x_1 + rx_2}{1+r} - x_1}{x_2 - \dfrac{x_1 + rx_2}{1+r}} = \frac{x_1 + rx_2 - x_1 - rx_1}{x_2 + rx_2 - x_1 - rx_2} = r.$$

∎

De manera similar, tenemos que:

Proposición 5 Si $P(0, y_1)$ y $Q(0, y_2)$ y $r \neq -1$, entonces $R\left(0, \dfrac{y_1 + ry_2}{1+r}\right)$ es el único punto en el eje Y que divide al segmento PQ en la razón r.

Ampliamos los resultados obtenidos en las proposiciones anteriores al caso de segmentos arbitrarios en el plano.

Proposición 6 *(Fórmula para el punto de división de un segmento)* Tomemos $r \neq -1$. El punto

$$R\left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r}\right) \tag{4.11}$$

es el único punto que divide en la razón r al segmento $\overrightarrow{PQ}$, cuyos extremos son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$; es decir, ese punto R es el único que satisface la igualdad

$$\frac{PR}{RQ} = r.$$

Ejemplos

1. Encuentra las coordenadas del punto R que divide al segmento $\overrightarrow{PQ}$, con extremos $P(-4,1)$ y $Q(8,5)$, en la razón 3 a 5. Es decir, $\dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{3}{5}$.

Solución:

Al sustituir los datos en la fórmula (4.11) obtenemos

$$\frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{-4 + \frac{3}{5}\cdot 8}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{1 + \frac{3}{5}\cdot 5}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}.$$

Por lo que el punto buscado es $R\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

2. Encuentra las coordenadas del punto R que divide al segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$, con extremos $P(6,-2)$ y $Q(7,5)$, en la razón $\frac{5}{7}$.

Solución:

Al sustituir los datos en la fórmula (4.11) obtenemos

$$\frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{6 + \frac{5}{7}\cdot 7}{1+\frac{5}{7}} = \frac{77}{12} \quad \text{y} \quad \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{-2 + \frac{5}{7}\cdot 5}{1+\frac{5}{7}} = \frac{11}{12}.$$

Por lo que el punto buscado es $R\left(\frac{77}{12}, \frac{11}{12}\right)$.

3. Encuentra las coordenadas del punto R que satisface $\dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{2}{3}$ para el segmento dirigido con extremos $P(-3,5)$ y $Q(2,-4)$.

Solución:

De nuevo, sustituimos los datos en (4.11) y obtenemos

$$\frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{-3 + \frac{2}{3}\cdot 2}{1+\frac{2}{3}} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{5 + \frac{2}{3}\cdot(-4)}{1+\frac{2}{3}} = \frac{7}{5}.$$

$R\left(-1, \frac{7}{5}\right)$ es el punto con la propiedad requerida.

4. Encuentra las coordenadas del punto R, en el segmento que une a $P(3,-2)$ y $Q(-1,5)$, de tal manera que $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{3}{4}$.

Solución:

Observa que R no es el extremo inicial del denominador PQ y, por tanto, no podemos aplicar la fórmula (4.11).

Como $PQ = PR + RQ$, entonces

$$\frac{PR}{PQ} = \frac{PR}{PR + RQ}.$$

Para simplificar, utilizamos el recíproco de este último cociente, es decir,

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{PR + RQ}{PR} = 1 + \frac{RQ}{PR}.$$

Como $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{3}{4}$, entonces $\dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{4}{3}$; sustituyendo

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{RQ}{PR},$$

de donde

$$\frac{RQ}{PR} = \frac{1}{3};$$

así,

$$\frac{PR}{RQ} = 3.$$

Es decir, R debe dividir el segmento PQ en la razón 3. Aquí ya podemos usar (4.11), y tenemos que las coordenadas de R son

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{3 + 3\,(-1)}{1 + 3} = 0 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{-2 + 3\,(5)}{1 + 3} = \frac{13}{4}.$$

Las coordenadas de R son $\left(0, \frac{13}{4}\right)$.

5. ¿En qué punto debes colocar un soporte para que al colocar un peso de 6 kilogramos en el lado izquierdo y otro de 15 kilogramos en el lado derecho de una tabla de 5 metros de largo ésta permanezca equilibrada (figura 4-21)?

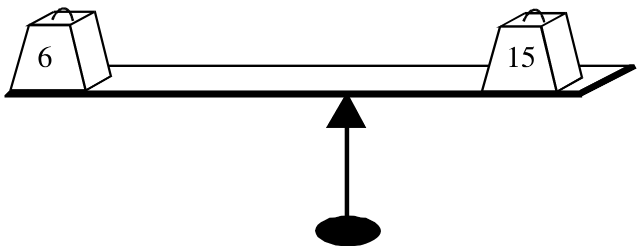


Figura 4-21

Solución:

Por comodidad, supongamos que el extremo izquierdo de la tabla se encuentra en el origen; entonces el extremo derecho se encuentra en el punto de coordenadas $(5, 0)$. Para conservar la notación, llamamos a estos puntos $P\,(0, 0)$ y $Q\,(5, 0)$. Si $R\,(x, y)$ es el punto en el que debemos colocar el soporte, entonces, por la ley de las palancas, debe cumplirse que

$$6PR = 15RQ,$$

es decir,

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

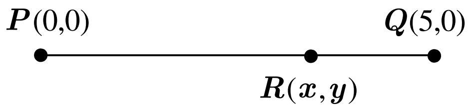


Figura 4-22

Así,

$$R\left(\frac{\frac{5}{2}\cdot 5}{1+\frac{5}{2}}, 0\right) = R\left(\frac{25}{7}, 0\right).$$

Por tanto, el soporte debe colocarse a $\frac{25}{7}$ m ≈ 3.57 m del extremo izquierdo de la tabla.

Ejercicios

Encuentra el punto medio del segmento que une los pares de puntos dados.

1. $(-1,-2)$ y $(2,2)$. **2.** $(-2,5)$ y $(-7,5)$. **3.** $(3,6)$ y $(6,1)$.

4. $(-3,-1)$ y $(-3,-8)$. **5.** $(-4,2)$ y $(2,6)$. **6.** $(7,1)$ y $(-5,7)$.

7. $\left(\frac{1}{6},3\right)$ y $\left(-2,\frac{3}{4}\right)$. **8.** $(6,-3)$ y $\left(\frac{2}{5},8\right)$. **9.** $\left(-2,\frac{5}{8}\right)$ y $\left(\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right)$.

10. Si dos vértices de un triángulo equilátero son los puntos $(-3,2)$ y $(1,2)$, encuentra el tercer vértice. (Hay dos soluciones.)

11. Si el extremo de un segmento es el punto $P\,(3,-4)$ y el punto medio de dicho segmento es $M\,(-2,-1)$, ¿cuál es el otro extremo del segmento?

12. Si $P\left(\frac{1}{2},1\right)$ y $Q\left(\frac{11}{2},5\right)$ son los extremos de un segmento, encuentra:

- **a.** Las coordenadas del punto $R_1\,(a_1,b_1)$ que divide al segmento $\overrightarrow{PQ}$ en la razón $\frac{1}{2}$.
- **b.** Las coordenadas del punto $R_2\,(a_2,b_2)$ que divide al segmento $\overrightarrow{PQ}$ en la razón 2.
- **c.** Prueba que los puntos R_1 y R_2 dividen al segmento $\overline{PQ}$ en tres segmentos de igual longitud.

13. Encuentra las coordenadas del punto R que divide al segmento con extremos $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $Q\,(2,5)$ en la razón $\frac{7}{4}$.

14. Si $P\,(3,-2)$ y $Q\,(-1,5)$, encuentra las coordenadas del punto R de tal manera que $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{4}{3}$.

15. Encuentra las coordenadas de los puntos R, S y T que dividen al segmento con extremos $P\,(-5,-2)$ y $Q\,(-1,6)$ en cuatro segmentos de igual longitud.

16. Encuentra las coordenadas del punto R que divide al segmento $\overrightarrow{PQ}$, con extremos $P(-4,0)$ y $Q(0,6)$, en la razón $\frac{1}{6}$.

17. Un triángulo tiene vértices $A(0,3)$, $B(-1,1)$ y $C(3,2)$. Calcula las coordenadas del punto medio M del segmento que une los vértices B y C. Calcula la longitud del segmento que une los puntos A y M. La recta que pasa por A y M es una de las medianas del triángulo.

18. ¿En qué razón divide el punto de coordenadas $(-1,-7)$ al segmento $\overrightarrow{PQ}$ que une a los puntos $P(-3,-15)$ y $Q(2,5)$?

19. Si $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $C(0,0)$ son los vértices de un triángulo equilátero, prueba que el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de sus lados es equilátero y que su lado es la mitad del lado del triángulo dado.

20. El centro de un hexágono regular se encuentra en el origen; si uno de los vértices es el punto $A(5,0)$, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices restantes?

21. Al colgar un platito en cada extremo de una regla de 30 centímetros de largo formamos una balanza. Además contamos con cierto número de monedas iguales entre sí y sabemos que, al colocar el punto de apoyo de la balanza en el centro de la regla, ésta se encuentra equilibrada. ¿Dónde debemos colocar el punto de apoyo para que al poner cinco monedas en el plato izquierdo y tres en el derecho la balanza se mantenga en equilibrio?

Resumen

- La distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- El punto medio del segmento que une a $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
- Fórmula para el punto de división de un segmento. El punto $R\left(\dfrac{x_1 + rx_2}{1+r}, \dfrac{y_1 + ry_2}{1+r}\right)$ es el punto que divide en la razón $r \neq -1$ al segmento $\overrightarrow{PQ}$, cuyos extremos son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$.

Ejercicios de repaso

1. Encuentra un punto cuya abscisa es 5 y cuya distancia al punto $P(0,8)$ es 13.

2. Encuentra un punto cuya ordenada es 3 y cuya distancia al punto $P(-5,2)$ es 8.

3. Encuentra el punto que equidista de los puntos $A(-3,-4)$, $B(3,14)$ y $C(9,12)$.

4. Los vértices de un triángulo rectángulo son $A(-2,1)$, $B(5,8)$ y $C(-6,5)$. Encuentra el punto medio de la hipotenusa y prueba que equidista de los tres vértices.

5. Los vértices de un triángulo rectángulo son $A\,(2,-1)$, $B\,(0,3)$ y $C\,(6,7)$. Encuentra el punto medio E de AB y el punto medio D de AC. Encuentra la longitud de ED y determina la relación entre esta longitud y la longitud del lado BC.

6. Si $P\,(-5,-6)$ y $Q\,(4,1)$ son los extremos de un segmento, encuentra la razón r en la cual el punto $R\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ divide a este segmento.

7. Encuentra las coordenadas del punto R que satisfaga $\dfrac{PR}{PQ}=\dfrac{5}{2}$ si $P\left(-6,-\dfrac{1}{7}\right)$ y $Q\,(-2,4)$.

8. Encuentra las coordenadas del punto R que divide al segmento $\overrightarrow{PQ}$, con extremos $P\left(-8,\frac{3}{5}\right)$ y $Q\left(-1,\frac{6}{7}\right)$, en la razón $\frac{1}{11}$.

9. Tomemos un punto R en la recta ℓ que contiene al segmento $\overrightarrow{PQ}$. En algunos libros se dice que R divide a $\overline{PQ}$ en la razón (algebraica) r, si

$$\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PQ}}=r.$$

Conforme a esta definición, se tiene

$$\frac{\left|\overline{PR}\right|}{\left|\overline{PQ}\right|}=r,$$

y R está en el rayo $\overrightarrow{PQ}$, cuando $r\geq 0$ y

$$\frac{\left|\overline{PR}\right|}{\left|\overline{PQ}\right|}=-r,$$

y R está fuera del rayo $\overrightarrow{PQ}$, cuando $r<0$. Por tanto, según esta definición, el punto que divide al segmento $\overrightarrow{PQ}$ en la razón r es

$$R\left(x_1+r\left(x_2-x_1\right),y_1+r\left(y_2-y_1\right)\right),$$

si el extremo inicial es $P(x_1,y_1)$ y el final $Q(x_2,y_2)$.

a) Encuentra, usando esta definición, el punto que divide al segmento con extremo inicial $P(1,2)$ y extremo final $Q(5,-1)$ en la razón $\frac{1}{3}$.

b) Con esta definición, ¿en qué razón divide a un segmento el punto medio de éste? Compara tu respuesta con la obtenida en esta sección al usar la definición que ahí adoptamos (página 177).

Ejercicios con Geolab

Utiliza el Geolab para hacer los siguientes ejercicios.

1. Construye los puntos $A(-3,4)$ y $B(1,1)$. Para ello, elige el constructor *Punto directo* del menú de puntos. Observa que Geolab te sugiere el nombre A, pero puedes cambiarlo. Da un clic en cualquier punto de la pantalla para terminar la construcción. Después le das las coordenadas correctas. Haz lo mismo con el punto B. Cámbiate a la pantalla de datos analíticos colocando el cursor sobre el renglón donde están los datos del punto A, escribe -3, y 4 en los campos x, y que están en la parte superior de la pantalla. Pon el cursor en el renglón del objeto B y escribe 1 y 1 en los campos x, y. Ahora regresa a la pantalla gráfica. Los puntos están en las coordenadas indicadas. Para ver los ejes, selecciona la casilla que está junto a la letra E, en la parte inferior del margen izquierdo de la pantalla.

2. Construye un número real d que sea la distancia entre los puntos. Para ello, elige el constructor *Escalares->Definición directa* del menú de escalares. Cámbiale el nombre propuesto para que sea d. El valor de este número se puede ver de varias maneras:

  a. Haz clic en el botón *Datos de objetos*. Al hacerlo, aparece en la parte inferior de la pantalla una ventana con la lista de todos los objetos que has construido. Al hacer clic sobre cualquier renglón de esta lista, se te irá mostrando consecutivamente la descripción de los objetos, sus valores o ecuaciones cartesianas, sus valores o ecuaciones polares.

  b. En la pantalla de datos analíticos selecciona con el botón derecho los renglones que quieres ver en la pantalla gráfica, éstos se pondrán amarillos y aparecen unos iconos en la parte superior derecha de la lista de objetos. Elige el icono *Objetos para observar* y regresa a la pantalla gráfica. Los objetos elegidos aparecen en una ventana transparente en la esquina superior derecha.

  c. Construye el segmento que une a los puntos A y B. Utiliza el constructor *Segmento por dos puntos* del menú de puntos, llámalo a. En la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor en el renglón de d, en el panel de características de la etiqueta elige ecuación y escribe la letra a (el nombre del segmento) en el campo de ancla. Con esto, debe aparecer $d = 5$ cerca del segmento a.

3. Construye el punto medio de A y B, llámalo C. Para ello utiliza el constructor *Punto medio* del menú de puntos. Encuentra la razón en la que C divide al segmento AB. Utiliza el constructor *Escalares->División de un segmento* del menú de escalares. El punto medio divide al segmento en una razón de 1.

4. Construye otro punto en el segmento AB. Utiliza el constructor *Punto en segmento* del menú de puntos, llámalo E. Encuentra la razón en la que E divide a AB, llámala r. Arrastra E sobre el segmento y observa cómo cambia la razón. Observa que cuando E está sobre A, r vale cero. Cuando E se aproxima a B desde dentro del segmento, r se hace cada vez más grande. Cuando E está fuera del segmento, del lado de A, r está entre -1 y 0, y cuando está fuera del lado de B, es menor que -1. ¿Por qué?

5. Ahora veamos el problema inverso. Construye un escalar directo, f, y dale el valor de 2. Luego construye el punto F que divida al segmento AB en la razón f. Utiliza el constructor *División de un segmento* del menú de puntos. ¿En dónde queda F? Experimenta cambiando los valores de f.

Capítulo 5

La línea recta

Con la recta comenzamos el estudio sistemático de curvas en el plano. Nos basamos en la idea intuitiva que tenemos de ella para presentarla y la describimos algebraicamente a través de su ecuación, en la cual intervienen, al igual que en el resto de las ecuaciones que veremos más adelante, dos variables, denotadas generalmente por x y y.

La ecuación de una recta puede adoptar varias formas, algunas de éstas reciben nombres especiales. Debemos tener presente que no son varias las ecuaciones de una recta sino una sola que se escribe en diversas formas, y que podemos pasar de una a otra mediante el manejo algebraico de las ecuaciones: despeje, multiplicación por constantes no nulas, etcétera.

Muchos de los procesos o fenómenos que se estudian en la matemática y otras ciencias son lineales, es decir, en ellos intervienen dos variables que están relacionadas por una ecuación que representa a una recta (ecuación lineal en dos variables). Un ejemplo de esto es presentado en la sección *Punto de equilibrio,* donde se considera el caso en que la ecuación de demanda (en las variables: precio de un artículo y cantidad demandada por el mercado) y la ecuación de oferta (en las variables: precio de un artículo y cantidad de artículos que pueden ponerse en el mercado) son lineales. El punto donde se cortan las dos rectas representadas por estas ecuaciones se conoce como punto de equilibrio, cuyas coordenadas nos indican el precio unitario a establecer para que coincidan las cantidades que demanda el mercado y ofrece el productor.

La línea recta

Todos tenemos la idea intuitiva de lo que es una recta. Las propiedades fundamentales de la recta, de acuerdo con los axiomas de Euclides, son:

- Por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta.
- Dos rectas distintas se cortan en un solo punto o son paralelas.

La pendiente de una recta

Encontrar la tangente del ángulo que forman la recta que pasa por los puntos $P\,(-2,2)$ y $Q\,(3,5)$ y el eje X.

Solución:

Trazamos la recta que une los puntos P y Q. Ésta corta al eje X en el punto A. Llamamos α al ángulo que nos interesa, el cual está señalado en la figura.

Por P trazamos una recta paralela al eje X; y desde Q trazamos una recta paralela al eje Y. Las dos rectas se cortan en B. Observamos que el triángulo QPB es un triángulo rectángulo. El ángulo $\beta = \angle QPB$ es igual al ángulo α por ser ángulos correspondientes. (Ver la figura 5-1.)

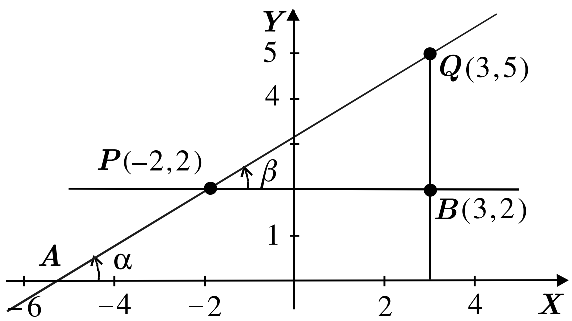


Figura 5-1

Entonces

$$\tan\alpha = \tan\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5-2}{3-(-2)} = \frac{3}{5}.$$

Así que la tangente del ángulo que forma la recta con el eje X es igual a $\frac{3}{5}$, o, dicho en otras palabras, la pendiente de la recta que pasa por P y por Q es de $\frac{3}{5}$.

Dada una recta no horizontal, el ángulo que se obtiene al hacer girar el eje X en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj hasta que coincida con la recta se llama *ángulo de inclinación* de la recta (figura 5-2).

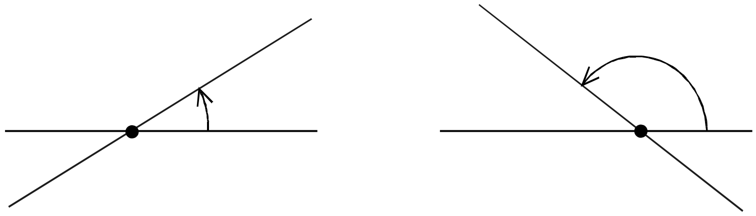


Figura 5-2

Si la recta es horizontal, su ángulo de inclinación es cero. El ángulo de inclinación de una recta puede variar de $0°$ a $180°$.

Recordemos que llamamos *sentido positivo* de giro al que es contrario al movimiento de las manecillas del reloj y *sentido negativo* al que coincide con dicho movimiento (figura 5-3).

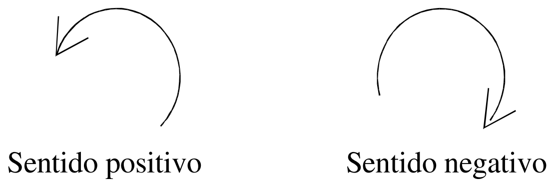


Figura 5-3

La *pendiente* de una recta es el valor de la tangente de su ángulo de inclinación.

Observaciones:

La pendiente de una recta no vertical es un número que mide la inclinación de la recta y hacia dónde está inclinada respecto a la vertical.

- La pendiente es positiva cuando la recta está inclinada hacia la derecha.
- La pendiente es cero cuando la recta es horizontal.
- La pendiente es negativa cuando la recta está inclinada hacia la izquierda.
- La recta es casi vertical cuando el valor absoluto de la pendiente es muy grande.
- La recta es casi horizontal cuando el valor absoluto de la pendiente es muy pequeño.
- Una recta vertical no tiene pendiente.
- No está definida la tangente del ángulo de $90°$, por lo que no se define la pendiente de una recta vertical, es decir, de la recta que tiene ángulo de inclinación de $90°$.

A continuación veremos cómo, a partir de conocer un punto de una recta y su pendiente, podemos obtener un segundo punto de la recta y viceversa, es decir, cómo determinar la pendiente de una recta si conocemos dos de sus puntos.

Ejemplos

1. Dibuja la recta que pasa por el punto $O\,(0,0)$ y tiene pendiente igual a $\frac{7}{4}$.

Solución:

A partir de $O\,(0,0)$ avanzamos horizontalmente 4 unidades (el denominador de la pendiente) hacia la derecha, puesto que el denominador es positivo, hasta llegar al punto $(4,0)$. A partir de este punto, subimos verticalmente 7 unidades (el numerador de la pendiente) ya que el numerador es positivo, y de ese modo llegamos al punto $Q\,(4,7)$ (figura 5-4).

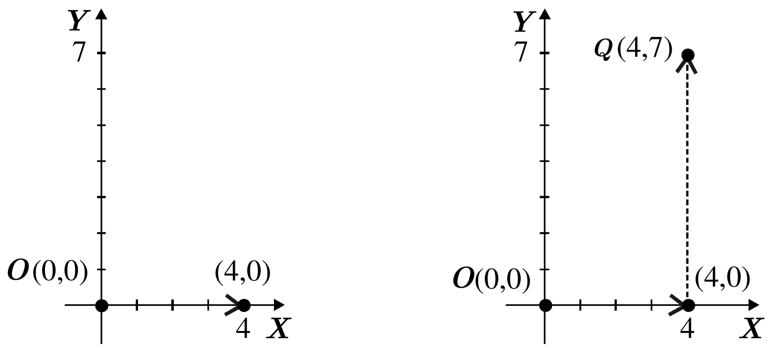


Figura 5-4

Trazamos la recta que pasa por los puntos O y Q. La recta que obtuvimos tiene pendiente igual a $\frac{7}{4}$ (figura 5-5). La recta está inclinada hacia la derecha.

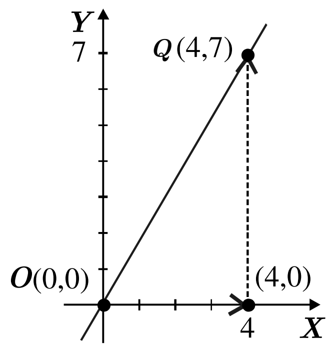


Figura 5-5

2. Dibuja la recta que pasa por el punto $P\,(1,3)$ y tiene pendiente -2.

Solución:

Escribimos a -2 como $\frac{-2}{1}$. A partir de $P\,(1,3)$ avanzamos horizontalmente 1 unidad (el denominador de la pendiente) hacia la derecha, puesto que el denominador es positivo, hasta llegar al punto $(2,3)$ y, a partir de este punto, bajamos verticalmente 2 unidades (bajamos ya que el numerador de la pendiente es negativo) así llegamos al punto $Q\,(2,1)$ (figura 5-6).

Figura 5-6

Trazamos la recta que pasa por los puntos P y Q. La recta que obtuvimos tiene pendiente igual a -2 (figura 5-7).

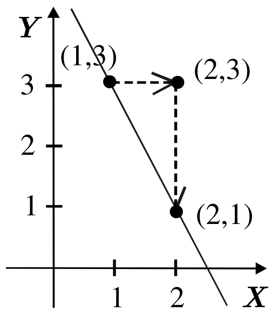


Figura 5-7

La recta está inclinada hacia la izquierda con respecto a la vertical.

En general, la pendiente se denota con la letra m. Para encontrar la pendiente de una recta no vertical cuando conocemos dos puntos de ella, $P\,(x_1, y_1)$ y $Q\,(x_2, y_2)$, calculamos el cociente

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.} \tag{5.1}$$

Si tomamos otro par de puntos $P'\,(x_1', y_1')$ y $Q'\,(x_2', y_2')$ en la misma recta, como se muestra en la figura 5-8, obtenemos dos triángulos semejantes y, por tanto, la razón de sus catetos es la misma:

$$\frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

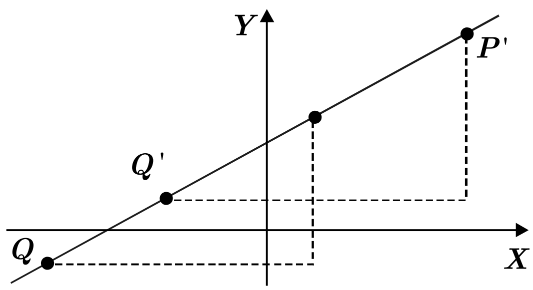


Figura 5-8

Es decir, la pendiente de una recta puede determinarse usando dos puntos cualesquiera de la recta (figura 5-8).

Si la recta es vertical, todos sus puntos $P(x, y)$ tienen la misma primera coordenada x, de modo que el denominador de la expresión anterior vale cero, por lo que no puede evaluarse m; por tanto, las rectas verticales no tienen pendiente, como ya habíamos mencionado.

Ejemplos

1. Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 7)$ y $Q(-2, 3)$.

Solución:

Usamos la fórmula (5.1) para obtener la pendiente de la recta (figura 5-9):

$$m = \frac{3-7}{-2-2} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

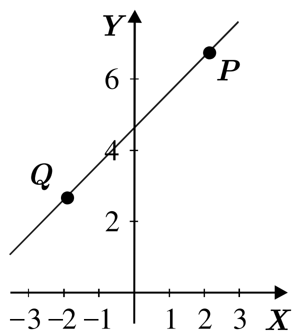


Figura 5-9

2. Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(3, -4)$ y $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Solución:

La pendiente de la recta es (figura 5-10):

$$m = \frac{2-(-4)}{\frac{1}{2}-3} = \frac{6}{\frac{1-6}{2}} = -\frac{12}{5}.$$

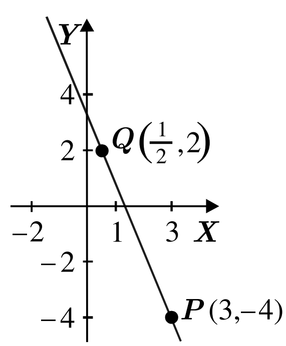


Figura 5-10

3. Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(-5,-3)$ y $Q(-1,-3)$.

Solución:

La pendiente de la recta es (figura 5-11):

$$m = \frac{-3-(-3)}{-1-(-5)} = \frac{0}{4} = 0.$$

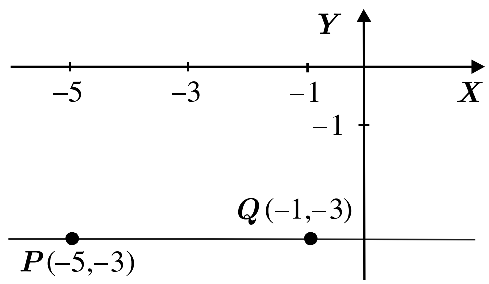


Figura 5-11

4. Si $P(-2,5)$ y $m = -\frac{4}{3}$, encontrar las coordenadas de otro punto de la recta que pasa por P y tiene pendiente m.

Solución:

Para encontrar otro punto en la recta, a partir de P, avanzamos horizontalmente 3 unidades hacia la derecha y llegamos al punto de coordenadas $(1,5)$. A partir de este punto, bajamos verticalmente 4 unidades y llegamos al punto $Q(1,1)$. Podemos comprobar que la recta que pasa por los puntos P y Q tiene pendiente m:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-5}{1-(-2)} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}.$$

El punto Q se encuentra sobre la recta que pasa por P y tiene pendiente m (figura 5-12).

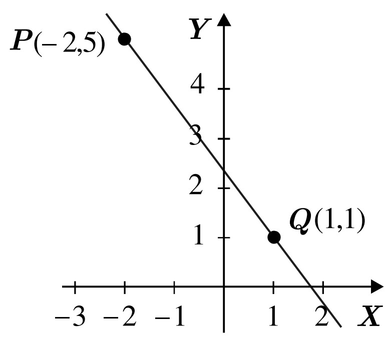


Figura 5-12

5. Si $P\,(0,7)$ y $m=\sqrt{2}$, encontrar las coordenadas de otro punto de la recta que pasa por P y tiene pendiente m.

Solución:

Para encontrar otro punto, a partir de P, avanzamos horizontalmente 1 unidad hacia la derecha hasta llegar al punto de coordenadas $(1,7)$. A partir de este punto, subimos verticalmente $\sqrt{2}$ unidades hasta llegar al punto $Q\left(1,7+\sqrt{2}\right)$. Podemos comprobar que la recta que pasa por los puntos P y Q tiene pendiente m:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7+\sqrt{2}-7}{1-0}=\sqrt{2}.$$

El punto Q se encuentra sobre la recta que pasa por P y tiene pendiente m (figura 5-13).

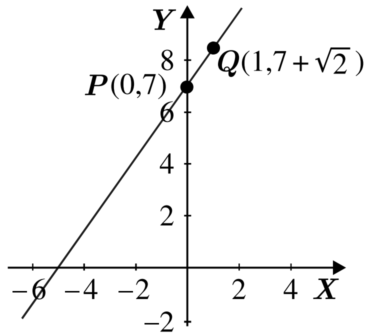


Figura 5-13

En la siguiente sección justificamos por qué

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

donde α es el ángulo de inclinación de una recta y P_1 y P_2 son dos puntos de la recta.

Ángulo de una recta con el eje X

Cuando Jorge estaba jugando con su avión de control remoto, éste se atoró en la punta de un pino que se encontraba a 6 metros de distancia. Jorge quiere bajar el avión pateando una pelota. Si el pino mide 3 metros de altura, ¿cuál es el ángulo, con respecto al piso, con el que debe salir la pelota para golpear el avión y que éste caiga al suelo?

Solución:

En realidad, la pelota no seguiría una línea recta sino que describiría un arco de parábola. La situación que presentamos es una simplificación del caso real.

Para resolver este problema, supongamos que la pelota que Jorge va a patear se encuentra en el origen; entonces, la base del árbol se encuentra en el punto $P\,(6,0)$, el avión en $Q\,(6,3)$ y α es el ángulo buscado. Así, podemos considerar el siguiente esquema (figura 5-14).

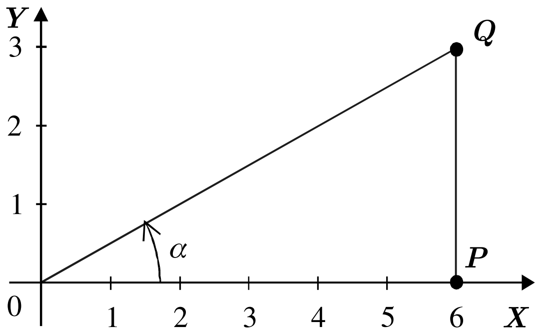


Figura 5-14

El triángulo OPQ es rectángulo; entonces:

$$\tan\alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Si utilizamos una calculadora, o recurrimos a unas tablas trigonométricas, tenemos

$$\alpha \approx 27^\circ.$$

El ángulo buscado es, aproximadamente, de 27°.

Recordemos que el ángulo que forma una recta con el eje X se llama *ángulo de inclinación de la recta.*

Podemos tener los siguientes casos:

- $\alpha = 0^\circ$. En este caso, la recta es horizontal y tiene pendiente $m = \tan 0^\circ = 0$.

- $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. En la recta, tomamos dos puntos $P\,(x_1, y_1)$ y $Q\,(x_2, y_2)$. Trazamos una recta paralela al eje X que pase por P. El ángulo formado por la paralela al eje X y la recta que pasa por P y Q es igual al ángulo α, por ser ángulos correspondientes. Ahora, para encontrar el valor de α, en la figura 5-15 observamos que se forma un triángulo rectángulo en el que uno de los ángulos agudos es α y que la pendiente m de la recta satisface

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\alpha,$$

así que α es el ángulo cuya tangente es la pendiente de la recta.

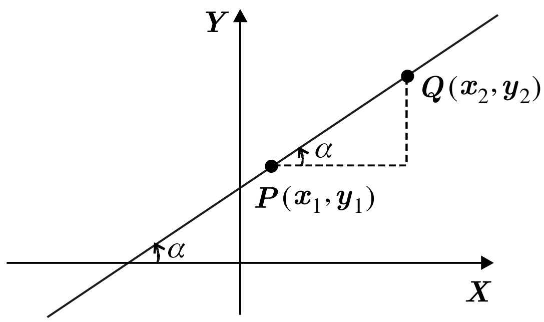


Figura 5-15

- $\alpha = 90°$. Cuando la recta es vertical, como en la figura 5-16, el ángulo formado por la recta y el eje X es de $90°$. Las rectas verticales no tienen pendiente, ya que el ángulo de $90°$ no tiene tangente.

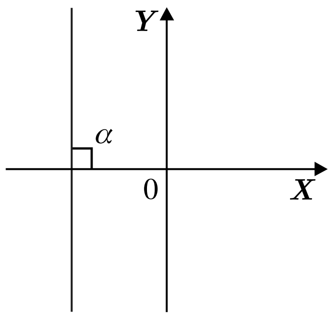


Figura 5-16

- $90° < \alpha < 180°$. De manera similar al segundo caso, tomamos dos puntos de la recta para calcular su pendiente. Trazamos entonces la recta paralela al eje X que pasa por P. En la figura 5-17, vemos que se forma un triángulo rectángulo y observamos que α y β son suplementarios, es decir, $\alpha + \beta = 180°$.

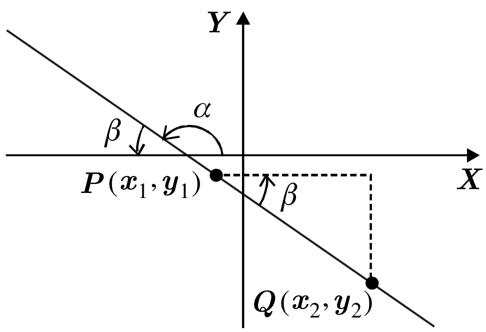


Figura 5-17

Por un lado, tenemos que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

por otro lado, puesto que la tangente de β es el cociente de las longitudes de los catetos,

$$\tan \beta = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = -m.$$

Por último, como α y β son ángulos suplementarios, entonces

$$\tan \alpha = -\tan \beta;$$

por tanto,

$$\tan \alpha = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m,$$

así que, de nuevo, la tangente de α es m.

Observación:

En este caso, m es negativo; o sea, $m = -n$, donde $n > 0$. Para resolver la ecuación $\tan \alpha = m = -n$, introducimos en la calculadora el valor de n y calculamos la inversa de la tangente. El resultado es el valor del ángulo β. Por tanto, $\alpha = 180° - \beta$.

Ejemplos

1. Encontrar el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos $P\,(-4, -2)$ y $Q\,(3, 5)$ con el eje X.

Solución:

Llamamos α al ángulo que forma la recta con el eje X. Como $\tan \alpha = m$, debemos encontrar la pendiente de la recta.

$$m = \frac{5 - (-2)}{3 - (-4)} = 1,$$

de donde

$$\tan \alpha = 1.$$

Con una calculadora, encontramos el ángulo cuya tangente es 1; es decir, $\alpha = 45°$ (figura 5-18).

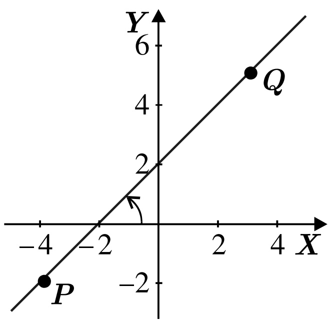


Figura 5-18

La recta que pasa por P y Q forma un ángulo de 45° con el eje X.

2. Encontrar el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos $P\,(-3,1)$ y $Q\left(0,1-3\sqrt{3}\right)$ con el eje X.

Solución:

Llamamos α al ángulo que forma la recta con el eje X. Como $\tan\alpha = m$, debemos encontrar la pendiente de la recta.

$$m = \frac{1-3\sqrt{3}-1}{0-(-3)} = -\sqrt{3},$$

de donde

$$\tan\alpha = -\sqrt{3}.$$

Con una calculadora, encontramos el ángulo cuya tangente es $\sqrt{3}$, es decir, $\beta = 60°$.

De acuerdo con la observación de la página 197, tenemos que (figura 5-19)

$$\alpha = 180° - 60° = 120°.$$

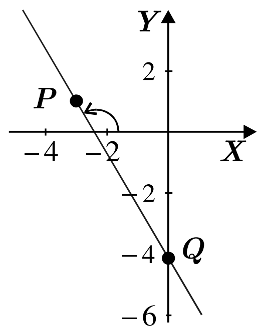


Figura 5-19

Ejercicios

Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos dados.

1. $P\,(-9,0)$, $Q\,(0,3)$. **2.** $P\,(3,2)$, $Q\,(6,2)$. **3.** $P\,(5,7)$, $Q\,(-1,4)$.

4. $P\,(-5,5)$, $Q\,(1,1)$. **5.** $P\,(-2,-2)$, $Q\,(-1,6)$. **6.** $P\,(7.5,-2.2)$, $Q\,(4.8,-5.6)$.

7. $P\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$, $Q\left(3,\frac{5}{2}\right)$. **8.** $P\left(-5,\frac{3}{4}\right)$, $Q\left(8,\frac{11}{4}\right)$. **9.** $P\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $Q\left(-\frac{8}{3},-4\right)$.

10. $P\,(4\pi,0)$, $Q\,(0,9\pi)$. **11.** $P\,(3\pi,5)$, $Q\,(-8\pi,2)$. **12.** $P\,(-6,-3)$, $Q\,(4,-7)$.

13. $P\left(\sqrt{3},1\right)$, $Q\,(0,1)$. **14.** $P\left(4\sqrt{2},8\right)$, $Q\left(\sqrt{2},6\right)$. **15.** $P\left(\sqrt{2},2\sqrt{5}\right)$, $Q\left(2,\sqrt{5}\right)$.

16. Encuentra la pendiente de las rectas ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 donde:

ℓ_1 pasa por los puntos $P\,(-5,2)$ y $Q\,(-3,4)$.
ℓ_2 pasa por los puntos $P\,(-5,2)$ y $R\,(4,2)$.
ℓ_3 pasa por los puntos $P\,(-5,2)$ y $S\,(-1,-3)$.

Dibuja las tres rectas siguientes en el mismo sistema de ejes coordenados. ¿Qué puedes decir de estas rectas?

17. Dibuja una recta que pase por $P(1,3)$ y tenga pendiente positiva.

18. Dibuja una recta que pase por $P(1,3)$ y tenga pendiente negativa.

19. Dibuja una recta que pase por $P(1,3)$ y tenga pendiente igual a cero.

En cada caso, dibuja la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m.

20. $P(1,0)$, $m=2$.

21. $P(0,0)$, $m=-3$.

22. $P(-2,8)$, $m=0$.

23. $P(5,5)$, $m=1$.

24. $P(7,-3)$, $m=-1$.

25. $P(0,-2)$, $m=4$.

26. $P(3,7)$, $m=-\frac{1}{2}$.

27. $P(6,-2)$, $m=\frac{1}{6}$.

28. $P(-3,-1)$,$m=\frac{2}{5}$.

29. Los vértices de un triángulo son $A(1,8)$, $B(-7,4)$ y $C(4,-3)$. Encuentra la pendiente de cada lado del triángulo.

30. Los vértices de un triángulo son $A(-5,6)$, $B(-4,-4)$ y $C(6,0)$. Encuentra la pendiente de cada lado del triángulo.

Ecuación de la recta cuando se conocen la pendiente y un punto

Las ecuaciones en dos variables representan lugares geométricos en el plano. Empezaremos nuestro estudio de lugares geométricos con las rectas, puesto que son los más sencillos.

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(5,4)$ y tiene pendiente igual a 4 (figura 5-20).

Solución:

Si $Q(x,y)$ es cualquier otro punto de la recta, entonces se debe tener que la pendiente m satisface

$$m=\frac{y-4}{x-5},$$

pero sabemos que $m=4$. Entonces

$$4=\frac{y-4}{x-5}.$$

Así, la ecuación buscada es

$$y-4=4(x-5).$$

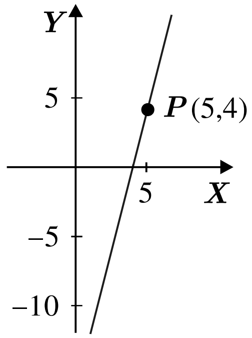


Figura 5-20

En general, consideremos el problema de encontrar la ecuación de una recta sabiendo que pasa por un punto $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m; es decir, conocemos las coordenadas (x_1, y_1) y el valor m.

Si $Q(x, y)$ es cualquier otro punto de la recta, se debe satisfacer que

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1};$$

y viceversa, si un punto $Q \neq P$ está en la recta, entonces satisface esta ecuación.

Por tanto, la ecuación de la recta es

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1).} \tag{5.2}$$

A esta expresión se le llama *forma punto-pendiente* de la ecuación de una recta, ya que la obtuvimos a través de la pendiente y de un punto de la recta, y de manera recíproca, si vemos una ecuación de este tipo, podemos saber por qué punto pasa la recta y qué pendiente tiene. (Ver el segundo de los siguientes ejemplos.)

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(4, -1)$ y tiene pendiente igual a -2.

   Solución:

   Hacemos $(x_1, y_1) = (4, -1)$ y $m = -2$ para sustituir en (5.2), y obtenemos

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-1) &= (-2)(x - 4) \\ y + 1 &= -2(x - 4). \end{aligned}$$

2. Proporcionar un punto y la pendiente de la recta $y - 5 = -7(x + 3)$.

   Solución:

   Al comparar la ecuación

$$y - 5 = -7(x - (-3))$$

con la ecuación (5.2) observamos que

$$y_1 = 5, \qquad x_1 = -3, \qquad m = -7,$$

de donde concluimos que la recta pasa por el punto $P\,(-3, 5)$ y tiene pendiente $m = -7$.

3. Dibuja la recta cuya ecuación es $3x + y = 2$.

Solución:

- Primer método:

  Escribimos la ecuación en la forma (5.2):

$$y - 2 = -3x;$$

o sea

$$y - 2 = -3\,(x - 0)\,.$$

La información que obtenemos con esta última ecuación es que la recta pasa por el punto $P\,(0, 2)$ y tiene pendiente igual a -3.

Para dibujar la recta, primero localizamos en el plano cartesiano el punto $P\,(0, 2)$. Expresamos la pendiente -3 como $\frac{-3}{1}$. A partir de $P\,(0, 2)$ avanzamos horizontalmente una unidad hacia la derecha (el denominador de la pendiente), y llegamos al punto $(1, 2)$; a partir de este punto, bajamos verticalmente 3 unidades (bajamos porque el numerador es negativo), y llegamos al punto $Q\,(1, -1)$ (figura 5-21).

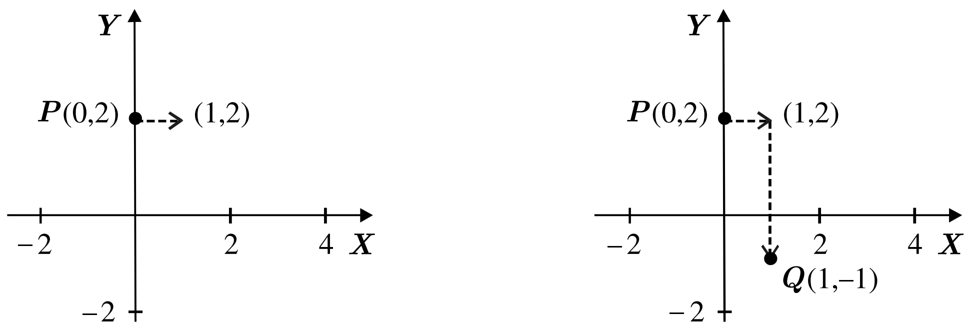


Figura 5-21

Ahora unimos los puntos P y Q con una recta (figura 5-22).

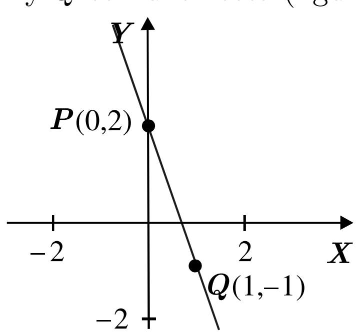


Figura 5-22

- Segundo método:
  Despejamos y:
  $$y = -3x + 2.$$
  Si $x = 0$, entonces $y = 2$, es decir, la recta pasa por el punto $P(0, 2)$. Ahora podemos tomar cualquier otro valor de x y encontrar el correspondiente de y; por ejemplo, si $x = -1$, entonces $y = 5$. Hemos encontrado que el punto $Q(-1, 5)$ está sobre la recta. Trazamos la recta que pasa por P y Q.

Podemos obtener la ecuación de una recta de varias maneras, de acuerdo con los datos que sepamos de ella, y de manera recíproca, si tenemos la ecuación de una recta podemos escribirla en distintas formas y obtener de esas expresiones información diversa acerca de la recta. Un caso importante es cuando conocemos la pendiente m y el punto P donde corta al eje Y; a la ordenada de este punto P, que usualmente se denota con la letra b, se le llama *ordenada al origen* de la recta. O sea, las coordenadas de P son $(0, b)$. Como conocemos un punto $P(0, b)$ de la recta y la pendiente m podemos obtener, por medio de (5.2), la ecuación de la recta

$$y - b = m(x - 0),$$

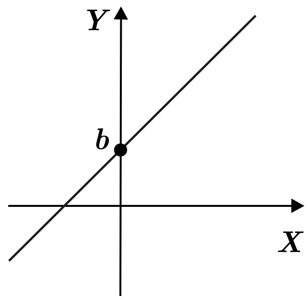


Figura 5-23

que también puede escribirse como

$$\boxed{y = mx + b.} \tag{5.3}$$

Esta última expresión se conoce como la forma *pendiente-ordenada al origen* de la ecuación de la recta.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente igual a 3 y corta al eje Y en el punto -1.

Solución:

La pendiente es $m = 3$ y la ordenada al origen es $b = -1$. Sustituimos estos valores en la ecuación 5.3 y obtenemos

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ y &= 3x + (-1) \\ y &= 3x - 1. \end{aligned}$$

Así, la ecuación buscada es

$$y = 3x - 1.$$

2. Dibujar la recta que tiene por ecuación $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

Solución:

La recta corta al eje Y en -5, es decir, pasa por el punto $P\,(0, -5)$ y tiene pendiente $m = -\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$.

Ahora elegimos cualquier otro valor de x y lo sustituimos en la ecuación de la recta. Por ejemplo, si $x = -3$, entonces (figura 5-24)

$$y = -\frac{2}{3}\,(-3) - 5 = -3.$$

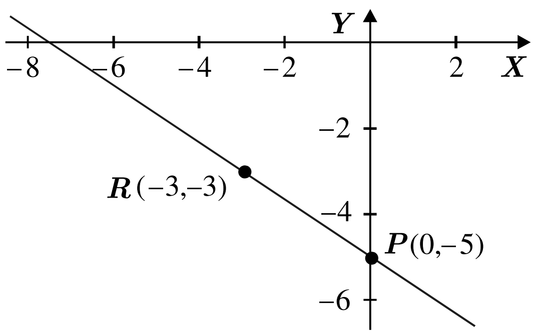


Figura 5-24

3. Dibujar la recta que tiene por ecuación $4x - y = -3$.

Solución:

Escribimos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$\begin{aligned} 4x - y &= -3 \\ -y &= -4x - 3 \\ y &= 4x + 3 \end{aligned}$$

La recta corta al eje Y en 3 y tiene pendiente $m = 4 = \frac{4}{1}$.

Marcamos el punto $P\,(0, 3)$; a partir de ahí, avanzamos 1 unidad a la derecha y después 4 hacia arriba, con lo que llegamos al punto $Q\,(1, 7)$. Trazamos la recta que une a P y Q (figura 5-25).

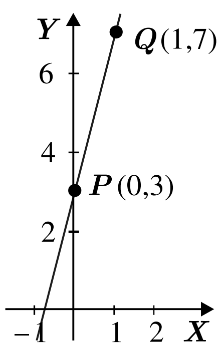


Figura 5-25

4. Encontrar el ángulo α que forma la recta $3x - 3y = 5$ con el eje X.

Solución:

Primero debemos encontrar la pendiente de la recta. Para ello la escribimos en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$\begin{aligned} 3x - 3y &= 5 \\ -3y &= -3x + 5 \\ y &= x - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

La pendiente de la recta es $m = 1$, es decir, $\tan \alpha = 1$. Debemos usar una calculadora, o simplemente acordarnos del triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 45°, para encontrar que el ángulo cuya tangente es 1 es $\alpha = 45°$ (figura 5-26).

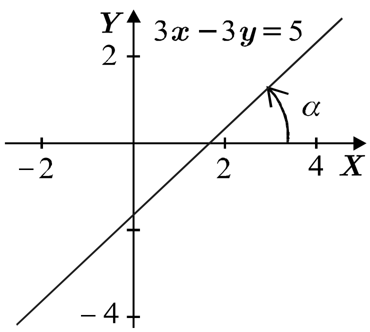


Figura 5-26

La recta $3x - 3y = 5$ forma un ángulo de 45° con el eje X.

5. Encontrar el ángulo α que forma la recta $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ con el eje X.

Solución:

Escribimos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen para encontrar la pendiente.

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x + y - 1 &= 0 \\ y &= -\sqrt{3}x + 1, \end{aligned}$$

así que $m = -\sqrt{3}$. Con la ayuda de una calculadora, encontramos que el ángulo cuya tangente es $\sqrt{3}$ es $\beta = 60°$ (también podemos obtener este valor si recordamos el triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°). De acuerdo con la observación de la página 197, tenemos que α es el ángulo suplementario de β, o sea:

$$\alpha = 180° - 60° = 120°.$$

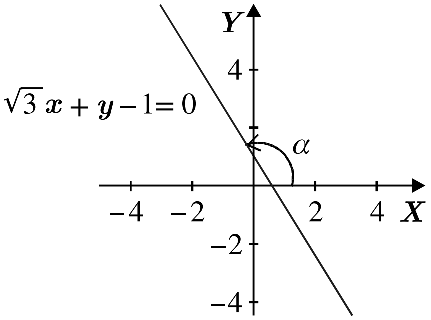


Figura 5-27

La recta $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ forma un ángulo de $120°$ con el eje X (figura 5-27).

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m.

1. $P(2,3)$, $m = -1$. **2.** $P(-2,7)$, $m = 5$. **3.** $P(-1,-5)$, $m = 0$.

4. $P(8,0)$, $m = \pi$. **5.** $P(-9,-3)$, $m = -10$. **6.** $P(1.25, 0.5)$, $m = -6$.

Encuentra la ecuación de la recta que tiene pendiente m y corta el eje Y en el punto con ordenada b.

7. $m = 3$, $b = \pi$. **8.** $m = 0$, $b = 5$. **9.** $m = 11$, $b = 0$. **10.** $m = \frac{4}{5}$, $b = -8$.

11. $m = -12$, $b = -\frac{3}{4}$. **12.** $m = 7$, $b = -\frac{2}{3}$. **13.** $m = \frac{1}{2}$, $b = \frac{6}{7}$. **14.** $m = \frac{9}{8}$, $b = 16$.

Dibuja las siguientes rectas.

15. $3y - 5x = 0$. **16.** $y = -2$. **17.** $3x + 2y = -9$. **18.** $-2x + 5y = 3$.

19. $4x - y = 11$. **20.** $-9y + 6x = -18$. **21.** $8x + 4y = -16$. **22.** $3x - 5y - 8 = 0$.

23. Encuentra la ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto $P(-2,-4)$ y dibújala.

24. Una recta con pendiente igual a -2 pasa por el punto $P(5,-1)$. La abscisa del punto Q que está en esa recta es 1. Encuentra la ordenada de Q.

25. Una recta con pendiente igual a $-\frac{6}{11}$ pasa por el punto $P(-4,5)$. La abscisa del punto Q que está en esa recta es 3. Encuentra la ordenada de Q.

26. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ y corta al eje X en -8.

27. Deduce la forma pendiente-abscisa al origen de la ecuación de la recta. Es decir, encuentra la ecuación de la recta que tiene pendiente m y corta al eje X en el punto de abscisa a.

Encuentra el ángulo formado por la recta dada con el eje X.

28. $\sqrt{2}x + y + 6 = 0$. **29.** $\sqrt{3}x - 2y - 5 = 0$. **30.** $x - 2y + 3 = 0$.

31. $x + y + 4 = 0$. **32.** $5x + 6y - 12 = 0$. **33.** $7x - 3y + 6 = 0$.

Ecuación de la recta cuando se conocen dos de sus puntos

Un colegio organiza un paseo a las grutas de Cacahuamilpa. Al hacer el análisis del costo se determina que si asisten 30 niños, el costo que debe cubrir cada uno debe ser de 80 pesos. Si van 40 niños, entonces el costo será de 75 pesos por niño. Si suponemos que la ecuación de demanda-precio es lineal, ¿cuál sería el costo que debe cubrir cada persona si asisten 90 niños?

Solución:

Que la ecuación de demanda-precio sea lineal quiere decir que se trata de la ecuación de una recta.

Llamamos x al número de niños y p al precio que debe pagar cada uno. Consideraremos parejas de la forma (x, p). Con los datos del problema, tenemos $P\,(30, 80)$ y $Q\,(40, 75)$ (figura 5-28).

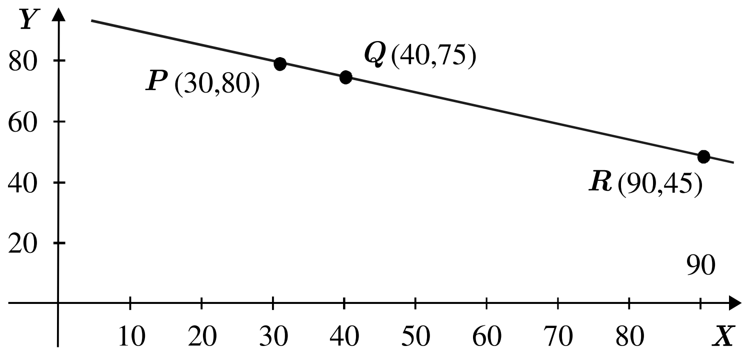


Figura 5-28

Con las parejas dadas calculamos la pendiente, es decir,

$$m = \frac{75 - 80}{40 - 30} = -\frac{1}{2}.$$

Ahora elegimos cualquiera de los dos puntos que conocemos, digamos $Q\,(40, 75)$, y utilizamos la forma punto-pendiente (5.2) de la ecuación de la recta para escribir la ecuación deseada, es decir, en la ecuación

$$p - p_1 = m\,(x - x_1)\,,$$

sustituimos los valores numéricos conocidos para obtener

$$p - 75 = -\frac{1}{2}\,(x - 40)\,.$$

Así, la ecuación de la recta es

$$p = -\frac{1}{2}x + 95.$$

De manera que si asisten 90 niños, es decir $x = 90$, al sustituir este valor tenemos

$$p = -\frac{1}{2}(90) + 95 = 50.$$

Esto es, cada niño pagará 50 pesos.

Veamos ahora cómo encontrar, en general, la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$.

Si conocemos dos puntos de la recta, podemos encontrar su pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ahora, si tomamos como punto fijo cualquiera de los dos puntos que conocemos, podemos sustituir en (5.2) y obtener

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).} \tag{5.4}$$

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(4, -1)$ y $Q(8, 3)$ (figura 5-29).

Solución:

Elegimos a P como el punto conocido y sustituimos en (5.4):

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ y - (-1) &= \frac{3 - (-1)}{8 - 4}(x - 4) \\ y + 1 &= \frac{3 + 1}{4}(x - 4) \\ y + 1 &= x - 4 \\ y &= x - 5. \end{aligned}$$

Veamos ahora qué pasa si en lugar de elegir a P elegimos a Q para hacer la sustitución en (5.4):

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ y - 3 &= \frac{3 - (-1)}{8 - 4}(x - 8) \\ y - 3 &= \frac{3 + 1}{4}(x - 8) \\ y - 3 &= x - 8 \\ y &= x - 5. \end{aligned}$$

Como era de esperarse, obtuvimos la misma ecuación.

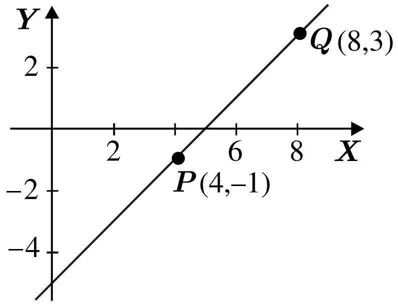


Figura 5-29

2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(5,2)$ y $Q(7,-2)$ (figura 5-30).

Solución:

Elegimos a Q como el punto conocido y sustituimos en (5.4):

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ y - (-2) &= \frac{-2-2}{7-5}(x-7) \\ y + 2 &= -2(x-7) \\ y &= -2(x-7) - 2 \\ y &= -2x + 12. \end{aligned}$$

También podemos calcular la pendiente

$$m = \frac{-2-2}{7-5} = -2,$$

y después sustituir en la ecuación (5.2):

$$\begin{aligned} y - (-2) &= -2(x-7) \\ y + 2 &= -2x + 14 \\ y &= -2x + 12. \end{aligned}$$

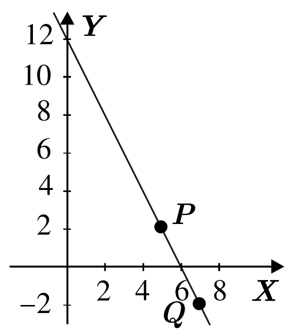


Figura 5-30

Rectas verticales

Las ecuaciones anteriores sirven para representar a cualquier recta excepto a las rectas verticales, ya que éstas no tienen pendiente. Sin embargo, las ecuaciones para las rectas verticales son muy sencillas ya que, como hicimos notar en la página 192, todos sus puntos tienen la misma primera coordenada. Así, la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto (h,k) es

$$x = h.$$

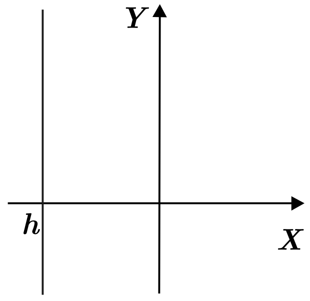


Figura 5-31

Ejemplo

- Escribir la ecuación de la recta vertical que pasa por $P(3,2)$.

  Solución:

La ecuación de la recta vertical que pasa por $P\,(3,2)$ es $x = 3$ (figura 5-32).

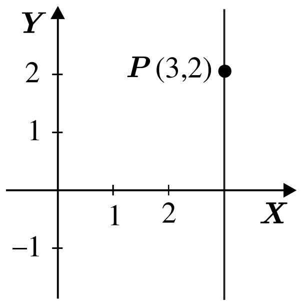


Figura 5-32

Ejercicios

En cada caso, escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

1. $P\,(3,-4)$, $Q\,(2,2)$.

2. $P\,(4,0)$, $Q\,(-7,-1)$.

3. $P\,(-6,8)$, $Q\,(3,-1)$.

4. $P\left(\frac{1}{6},5\right)$, $Q\left(2,\frac{5}{2}\right)$.

5. $P\left(\frac{3}{4},\frac{1}{8}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2},\frac{2}{6}\right)$.

6. $P\left(-\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$, $Q\left(\frac{8}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

7. $P\,(7,2)$, $Q\,(2,7)$.

8. $P\,(-2\pi,7)$, $Q\left(-1,\sqrt{2}\right)$.

9. $P\,(-11,-3)$, $Q\,(-18,-24)$.

En cada caso, demuestra que los puntos dados son colineales y encuentra la ecuación de la recta que pasa por ellos.

10. $P\,(-2,3)$, $Q\,(1,2)$, $R\,(4,1)$.

11. $P\,(-4,-3)$, $Q\,(-1,1)$, $R\,(2,5)$.

12. $P\,(0,7)$, $Q\,(5,-13)$, $R\,(-2,15)$.

13. $P\,(5,-3)$, $Q\,(0,-5)$, $R\,(10,-1)$.

14. $P\,(7,10)$, $Q\left(\frac{1}{2},\frac{44}{7}\right)$, $R\left(-\frac{1}{4},\frac{41}{7}\right)$.

15. $P\left(\frac{1}{6},-\frac{31}{4}\right)$, $Q\left(-\frac{1}{3},-\frac{17}{2}\right)$, $R\left(1,-\frac{13}{2}\right)$.

En cada caso, A, B y C son los vértices de un triángulo; dibújalo y encuentra las ecuaciones de sus lados.

16. $A\,(-5,3)$, $B\,(1,3)$, $C\,(-1,6)$.

17. $A\,(8,0)$, $B\,(2,-2)$, $C\,(-5,1)$.

18. $A\,(-3,2)$, $B\,(4,4)$, $C\,(6,-3)$.

19. $A\,(-2,5)$, $B\,(9,-5)$, $C\,(7,0)$.

20. Los vértices de un cuadrilátero son $A\,(5,-2)$, $B\,(4,4)$, $C\,(-1,2)$, $D\,(-2,-2)$. Dibújalo y encuentra las ecuaciones de sus lados y de sus diagonales.

21. Encuentra la condición que satisfacen los puntos que equidistan de los puntos $A\,(-7,5)$ y $B\,(6,-3)$.

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos AB y CD, donde:

22. $A\,(9,-2)$, $B\,(2,-1)$, $C\,(-5,3)$, $D\,(-2,7)$.

23. $A\,(-4,-2)$, $B\,(-1,-4)$, $C\,(-1,6)$, $D\,(1,2)$.

24. Una compañía hace una cotización para un banquete, de manera que el costo es de 12 000 pesos para 100 personas o de 16 500 pesos para 150 personas.

- **a.** Encuentra la ecuación de demanda-precio que determina el costo del banquete para x personas, suponiendo que la ecuación es la de una recta.
- **b.** ¿Cuánto costaría el banquete para 125 personas?

25. Un viaje con boleto de avión incluido tiene cierto costo por persona. Si se desea permanecer un tiempo mayor en el lugar se debe pagar una cuota adicional por noche. Con permanencia de dos noches adicionales el pago total es de 6400 pesos, y con seis noches adicionales el costo es de 8200 pesos. Los alimentos no están incluidos.

- **a.** Encuentra el costo total del viaje con x noches adicionales suponiendo que está dado por la ecuación de una recta.
- **b.** ¿Cuál es el costo sin noches adicionales?
- **c.** ¿Cuánto cuesta cada noche adicional?

26. Un punto $P\,(x,y)$ equidista de los puntos $Q\,(-4,-1)$ y $R\,(1,-4)$. La recta que une a P con el punto $S\,(-3,3)$ tiene pendiente igual a $-\frac{2}{3}$. Encuentra las coordenadas del punto P.

27. Considera el cuadrilátero con vértices $A\,(-6,1)$, $B\,(-3,-5)$, $C\,(2,-2)$ y $D\,(3,3)$.

- **a.** Encuentra los puntos medios de AB y CD y la ecuación de la recta que los une.
- **b.** Encuentra los puntos medios de AD y BC y la ecuación de la recta que los une.

c. Encuentra el punto de intersección de las rectas que obtuviste en los incisos anteriores.

d. Encuentra los puntos medios de las diagonales AC y BD y la ecuación de la recta que los une.

e. Prueba que el punto obtenido en el inciso **(c)** está sobre la recta que obtuviste en **(d)**.

Forma general de la ecuación de la recta

La *forma general* de la ecuación de la recta abarca tanto a las rectas verticales como a las que no lo son. Dicha forma general se obtiene pasando todos los términos de la ecuación a un miembro, de manera que éste quede igualado a cero.

$$\boxed{Ax + By + C = 0.}$$

Ejemplos

1. Escribir la ecuación $y = 4x + 5$ en la forma general.

Solución:

Si pasamos todos los términos a un lado de la ecuación, obtenemos la ecuación en su forma general:

$$4x - y + 5 = 0.$$

2. Escribir la forma general de la ecuación de la recta que pasa por $P(-3, 2)$ y tiene pendiente igual a 8.

Solución:

La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta es

$$y - 2 = 8(x + 3).$$

Si efectuamos las operaciones y pasamos todos los términos a un lado de la ecuación, obtenemos la forma general de la ecuación:

$$8x - y + 26 = 0.$$

3. Encontrar la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(4, 3)$ y forma un ángulo de $135°$ con el eje X (figura 5-33).

Solución:

Para poder utilizar la ecuación de la recta que pasa por un punto conocido y tiene pendiente dada, debemos encontrar la pendiente de la recta. Dicha pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje X.

$$m = \tan 135° = -\tan 45° = -1,$$

ya que $135°$ y $45°$ son ángulos suplementarios. (El valor de $\tan 135°$ también se puede obtener directamente con una calculadora.)

La ecuación de la recta es

$$y - 3 = -1(x - 4).$$

Para obtener la ecuación en su forma general, pasamos todo al primer miembro:

$$x + y - 7 = 0.$$

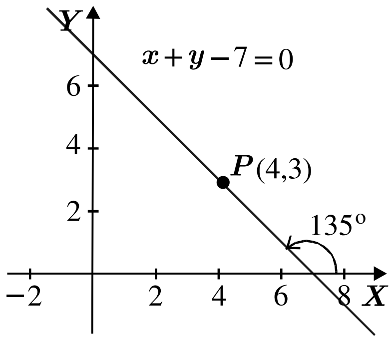


Figura 5-33

La forma general de la ecuación de la recta es $x + y - 7 = 0$.

Si $Ax + By + C = 0$ es la ecuación general de una recta y $B \neq 0$, entonces la recta tiene pendiente $m = -\dfrac{A}{B}$ y ordenada al origen $-\dfrac{C}{B}$ ya que al despejar y obtenemos

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

que es la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = mx + b.$$

Así,

$$m = -\frac{A}{B} \qquad \text{y} \qquad b = -\frac{C}{B}.$$

Ejemplo

- Encontrar la pendiente y la ordenada al origen de la recta $2x - 5y + 1 = 0$.

  Solución:

  La pendiente es

  $$m = -\frac{2}{-5} = \frac{2}{5},$$

  y la ordenada al origen es

  $$b = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5}.$$

Si obtenemos una ecuación en dos variables a partir de otra, por medio de las operaciones siguientes:

- Sumar la misma cantidad (que puede ser una expresión algebraica) a ambos lados de la ecuación.
- Multiplicar ambos lados de la ecuación por una misma cantidad distinta de cero.

Entonces las dos ecuaciones son *equivalentes*, es decir, son satisfechas por los mismos puntos (x, y).

Dos ecuaciones en dos variables que son equivalentes representan la misma curva. En el caso de ecuaciones lineales en dos variables, representan la misma recta.

Observa que la forma general de la ecuación de una recta puede escribirse de diversas maneras, ya que si multiplicamos la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

por una constante λ distinta de cero, obtenemos la ecuación

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0,$$

que es de la misma forma que la anterior y representa a la misma recta por ser esas ecuaciones equivalentes entre sí.

Ejemplo

- Demostrar que las tres ecuaciones siguientes son equivalentes.

$$\begin{aligned} 3x - 6y + 12 &= 0 \\ x - 2y + 4 &= 0 \\ -x + 2y - 4 &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Solución:

Si multiplicamos la primera ecuación dada en (5.5) por $\frac{1}{3}$, obtenemos la segunda:

$$\begin{aligned} 3x - 6y + 12 &= 0 \\ \frac{1}{3}(3x - 6y + 12) &= 0 \\ x - 2y + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Al multiplicar la segunda ecuación de (5.5) por (-1), obtenemos la tercera:

$$\begin{aligned} x - 2y + 4 &= 0 \\ -(x - 2y + 4) &= 0 \\ -x + 2y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Por último, cuando multiplicamos la tercera ecuación de (5.5) por (-3), obtenemos la primera:

$$\begin{aligned} -x+2y-4 &= 0 \\ -3(-x+2y-4) &= 0 \\ 3x-6y+12 &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones son equivalentes.

Las tres ecuaciones representan a la recta cuya ecuación escrita en la forma pendiente-ordenada al origen es

$$y=\frac{1}{2}x+2.$$

Esta última ecuación es equivalente a las ecuaciones anteriores, pues se obtiene a partir de cualquiera de ellas utilizando sucesivamente las dos operaciones que producen ecuaciones equivalentes.

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m. Escríbela en la forma general $Ax+By+C=0$.

1. $P(-5,0)$, $m=\frac{3}{2}$.

2. $P(0,\pi)$, $m=\frac{\pi}{2}$.

3. $P(6,3)$, $m=-1$.

4. $P(-4,-1)$, $m=5$.

5. $P\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, $m=-\frac{1}{6}$.

6. $P\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{3}\right)$, $m=7$.

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q. Escríbela en la forma general $Ax+By+C=0$.

7. $P(2,-3)$,$Q(6,-1)$.

8. $P\left(\sqrt{2},1\right)$,$Q(-3,-3)$.

9. $P(0,4)$,$Q(2,0)$.

10. $P(-1,0)$,$Q(0,1)$.

11. $P\left(-\frac{\pi}{2},-\pi\right)$,$Q(2\pi,5\pi)$.

12. $P\left(\frac{7}{6},\frac{11}{6}\right)$,$Q\left(\frac{13}{6},\frac{7}{3}\right)$.

13. Las escalas Fahrenheit y Celsius (en centígrados) utilizadas para medir la temperatura están relacionadas por la ecuación lineal

$$C=\frac{5}{9}(F-32).$$

Dibuja esta recta y coloca la F en el eje horizontal y la C en el eje vertical.

a) ¿A cuántos grados centígrados equivalen $32°F$, $100°F$, $410°F$?

b) ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen $36.5°C$, $100°C$, $-10°C$?

c) ¿En qué valor coinciden las escalas Celsius y Fahrenheit?

Una aproximación de la fórmula anterior es $C=\dfrac{F-30}{2}$, la cual podemos usar en la práctica.

Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto P y cuyo ángulo de inclinación mide $\alpha°$.

14. $P(-2,-1)$, $\alpha° = 120°$. **15.** $P(3,5)$, $\alpha° = 75°$. **16.** $P(4,-3)$, $\alpha° = 45°$.

17. $P(-1,-5)$, $\alpha° = 60°$. **18.** $P(5,8)$, $\alpha° = 30°$. **19.** $P(2,-6)$, $\alpha° = 45°$.

Escribe la forma general de la ecuación de la recta con pendiente m y ordenada al origen b.

20. $m = -5$, $b = 1$. **21.** $m = 8$, $b = -3$. **22.** $m = 2$, $b = 6$.

23. $m = -\frac{1}{6}$, $b = -10$. **24.** $m = \frac{9}{4}$, $b = \frac{3}{7}$. **25.** $m = -1$, $b = -\frac{12}{5}$.

Forma simétrica de la ecuación de la recta

A partir de la forma general de la ecuación de la recta

$$Ax + By + C = 0,$$

podemos escribir

$$Ax + By = -C.$$

Si $C \neq 0$, podemos dividir entre $-C$ y obtenemos:

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1;$$

si, además, A y B son distintos de cero, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Llamamos $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$ y escribimos

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.}$$

Esta expresión se llama *forma simétrica* de la ecuación de la recta y tiene la ventaja de que en ella podemos ver explícitamente los puntos en los que la recta corta a los dos ejes (figura 5-34).

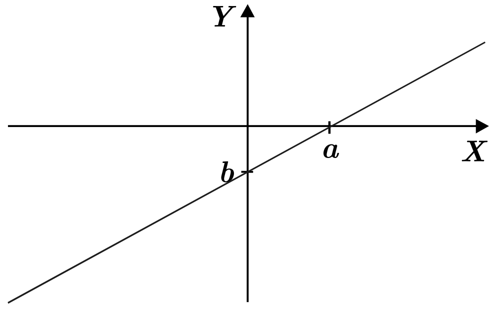


Figura 5-34

Observaciones:

- Si $x = 0$, obtenemos $y = b$.
- Si $y = 0$, obtenemos $x = a$.

De las observaciones anteriores, deducimos que la recta corta al eje Y en $y = b$ y al eje X en $x = a$. Notamos que una recta corta a ambos ejes en puntos distintos del origen si, y sólo si, en su ecuación de la forma general tenemos $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$, y sólo en este caso se puede escribir la ecuación de la recta en su forma simétrica.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que corta a los ejes en $(5, 0)$ y $(0, -3)$.

Solución:

Hacemos $a = 5$ y $b = -3$; ahora, sustituimos en la ecuación simétrica

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1,$$

al efectuar las operaciones podemos transformarla a la forma general

$$-3x + 5y + 15 = 0.$$

2. Encontrar los puntos en los que la recta $5x + 8y - 6 = 0$ corta a los ejes.

Solución:

Pasamos el término independiente al otro lado de la ecuación y dividimos entre dicho término el resto de la ecuación.

$$\begin{aligned} 5x + 8y &= 6 \\ \frac{5x}{6} + \frac{8y}{6} &= 1, \end{aligned}$$

que puede escribirse como $$\frac{x}{\frac{6}{5}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1.$$

Así, la recta corta a los ejes en $(\frac{6}{5}, 0)$ y $(0, \frac{3}{4})$ (figura 5-35).

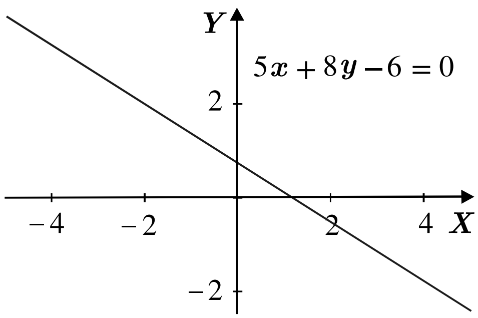


Figura 5-35

Ejercicios

En cada caso, menciona qué información inmediata te proporciona la ecuación.

1. $y = \frac{3}{5}x + 8.$

2. $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1.$

3. $6x - 9y + 7 = 0.$

4. $x - 3 = 0.$

5. $y + 1 = \frac{9}{8}(x - 3).$

6. $y - 2 = \frac{3-2}{4-6}(x - 6).$

7. $y + 9 = 0.$

8. $y = -7(x + 1).$

9. $\frac{x}{-4} + \frac{y}{7} = 1.$

10. $\frac{3}{4}x + 5y - 12 = 0.$

11. $5x - 8y + 3 = 0.$

12. $y = -20x - 13.$

13. $y + \frac{4}{5} = -4(x + 7).$

14. $y + 8 = \frac{6+8}{5+9}(x + 9).$

15. $y = -\frac{5}{11}x + 4.$

Escribe las siguientes ecuaciones de rectas en la forma simétrica y dibuja esas rectas.

16. $3x + 8y - 6 = 0.$

17. $6x - 5y - 30 = 0.$

18. $y = -\frac{5}{12}x + \frac{5}{4}.$

19. $y - 3 = -\frac{7}{9}(x + 4).$

20. $2x + 20y - 5 = 0.$

21. $y + 7 = 6(x - 4).$

22. $20x - 5y + 25 = 0.$

23. $4x + 7y - 28 = 0.$

24. $y = -\frac{6}{11}x + 3.$

Encuentra la ecuación de la recta que corta al eje X en a y al eje Y en b. Escríbela en la forma general.

25. $a = -5,\ b = 8.$

26. $a = -3,\ b = 5.$

27. $a = -\frac{1}{2},\ b = -4.$

28. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 4)$ y es tal que la distancia del origen al punto de intersección de la recta con el eje X es igual a la distancia del origen al punto de intersección de la recta con el eje Y. **Sugerencia:** usa la forma simétrica de la ecuación de la recta.

Intersección de rectas

Un fabricante de radios tiene costos fijos de 140 pesos diarios más 72 pesos por concepto de mano de obra y materiales por cada radio fabricado. Si cada aparato se vende en 107 pesos, ¿cuántos radios debe producir y vender cada día el fabricante para garantizar que no haya pérdidas ni ganancias?

Solución:

El costo total de producción de x radios al día es

$$C(x) = 72x + 140.$$

Puesto que cada aparato se vende en 107 pesos, los ingresos correspondientes son

$$I(x) = 107x.$$

Para garantizar que no haya pérdidas ni ganancias, el costo total y los ingresos deben ser iguales; es decir,

$$\begin{aligned} I(x) &= C(x) \\ 107x &= 72x + 140, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 107x - 72x &= 140 \\ x &= \frac{140}{35} = 4. \end{aligned}$$

La solución de esta ecuación es $x = 4$.

De lo anterior deducimos que, para que no haya pérdidas, el fabricante debe producir y vender por lo menos 4 radios diariamente.

Cuando dibujamos las rectas $y = C(x)$ y $y = I(x)$, que representan el costo total y los ingresos, observamos que se cortan sobre el punto $x = 4$ (figura 5-36), o sea en $(4, 428)$.

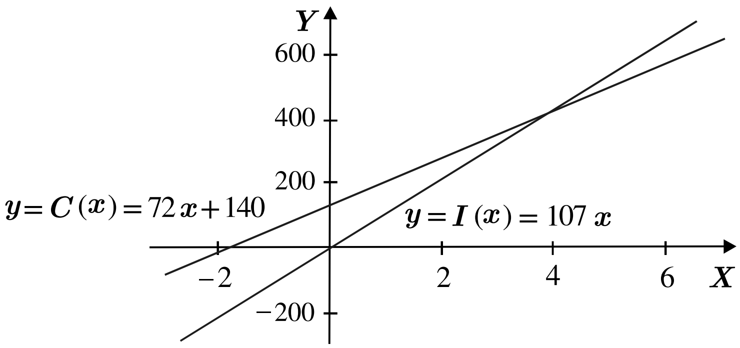


Figura 5-36

Dadas dos rectas en el plano, sabemos que sucede uno y sólo uno de los siguientes hechos:

- Se cortan en un solo punto.
- Son paralelas y distintas.
- Son la misma recta.

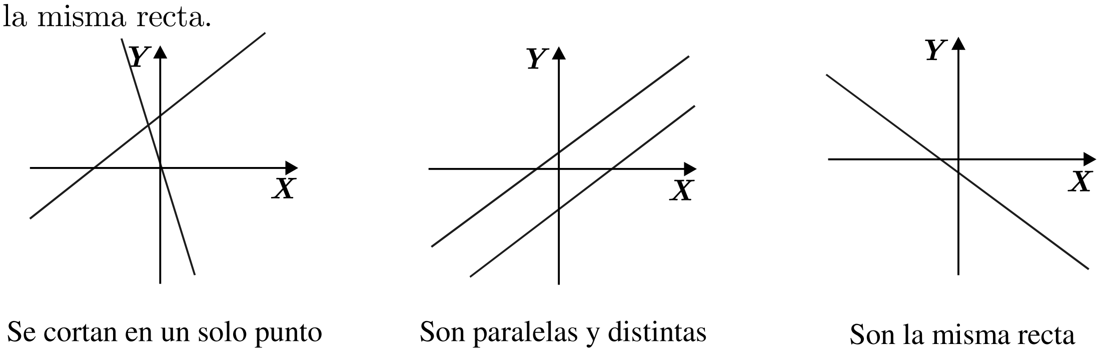


Figura 5-37

Un punto en el plano está en dos rectas si satisface las ecuaciones de ambas rectas. Si tenemos las ecuaciones de dos rectas y queremos encontrar la intersección de éstas, lo que debemos hacer es resolver las ecuaciones simultáneamente. De acuerdo con la explicación anterior, podemos esperar uno y sólo uno de los siguientes resultados:

- Hay un solo punto (x, y) que satisface ambas ecuaciones. Éste es el punto donde se cortan las rectas.
- Ningún punto satisface ambas ecuaciones. Las rectas son paralelas y distintas.
- Las dos ecuaciones son equivalentes y todos los puntos que satisfacen a una también satisfacen a la otra. Las dos ecuaciones representan la misma recta.

Ejemplos

1. Encontrar la intersección de las rectas $5x - y - 11 = 0$ y $x + 3y + 1 = 0$.

Solución:

Debemos resolver simultáneamente

$$\begin{aligned} 5x - y - 11 &= 0 \\ x + 3y + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Para eliminar una de las variables, multiplicamos la primera ecuación por 3:

$$\begin{aligned} 15x - 3y - 33 &= 0 \\ x + 3y + 1 &= 0, \end{aligned}$$

al sumar las ecuaciones anteriores obtenemos

$$16x - 32 = 0,$$

luego despejamos x:

$$x = 2.$$

Ahora sustituimos este valor en la segunda ecuación de (5.6):

$$2 + 3y + 1 = 0,$$

de donde

$$y = -1.$$

El punto donde se cortan las rectas es $P\,(2, -1)$ (figura 5-38).

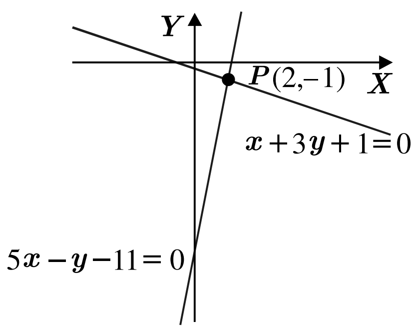


Figura 5-38

2. Encontrar la intersección de las rectas $3x - y - 5 = 0$ y $6x - 2y + 7 = 0$.

Solución:

Para resolver simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - y - 5 &= 0 \\ 6x - 2y + 7 &= 0, \end{aligned}$$

multiplicamos la primera ecuación por -2:

$$\begin{aligned} -6x + 2y + 10 &= 0 \\ 6x - 2y + 7 &= 0, \end{aligned}$$

sumamos y obtenemos

$$17 = 0,$$

lo cual no es posible. Por tanto, las rectas no se cortan. Como puedes ver en la figura 5-39, estas rectas son paralelas.

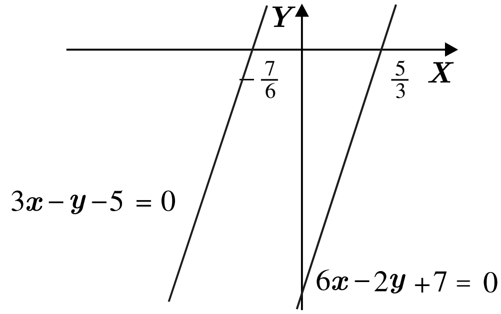


Figura 5-39

3. Encontrar la intersección de las rectas $3x - 6y - 9 = 0$ y $2x - 4y - 6 = 0$.

Solución:

Para resolver simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - 6y - 9 &= 0 \\ 2x - 4y - 6 &= 0, \end{aligned}$$

multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3, y obtenemos

$$\begin{aligned} 6x - 12y - 18 &= 0 \\ 6x - 12y - 18 &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones originales son equivalentes; es decir, las dos ecuaciones iniciales representan a la misma recta.

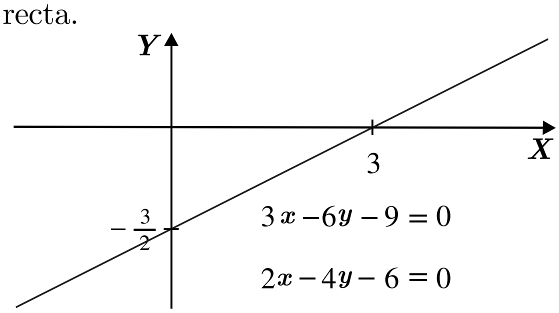


Figura 5-40

Ejercicios

En cada caso, determina si las rectas se cortan o no. Dibuja las rectas.

1. $\begin{aligned} 3x+9y &= 12 \\ x-3y &= 4 \end{aligned}$ **2.** $\begin{aligned} 14x-10y &= -5 \\ 7x-5y &= -8 \end{aligned}$ **3.** $\begin{aligned} 3x+2y &= -4 \\ 6x+4y &= 20 \end{aligned}$ **4.** $\begin{aligned} 5x-8y &= 2 \\ 40x+40y &= 13 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x-3y &= 4 \\ 3x-9y &= 12 \end{aligned}$ **6.** $\begin{aligned} -12x+4y &= 11 \\ 4x+2y &= -7 \end{aligned}$ **7.** $\begin{aligned} 6x-3y &= 2 \\ 2x+6y &= 3 \end{aligned}$ **8.** $\begin{aligned} 6x+2y &= -7 \\ 2x+5y &= -1 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 3x-4y &= 4 \\ 2x-y &= 6 \end{aligned}$ **10.** $\begin{aligned} 6x+4y &= -2 \\ -3x-2y &= 1 \end{aligned}$ **11.** $\begin{aligned} 4x-y &= -17 \\ 2x+y &= 11 \end{aligned}$ **12.** $\begin{aligned} \pi x+2\pi y &= 2 \\ 2\pi x+6\pi y &= 5 \end{aligned}$

13. Determina si las rectas $5x-6y=0$, $2x-y-17=0$ y $3x-7y=0$ forman un triángulo. Si es el caso, encuentra los vértices del triángulo.

14. Determina si las rectas $3x-y+23=0$, $4x+3y+30=0$ y $3x-y+11=0$ forman un triángulo. Si es el caso, encuentra los vértices del triángulo.

15. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ y por el punto donde se cortan las rectas $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$ y $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$.

16. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-4,5)$ y por el punto donde se cortan las rectas $\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{5}=1$ y $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{-4}=1$.

17. Prueba que la recta que pasa por los puntos $P(3,1)$ y $Q(7,-2)$ divide en dos partes iguales al segmento que tiene como extremos a los puntos $A(-8,4)$ y $B(6,4)$.

18. Prueba que la recta que pasa por los puntos $P(2,-5)$ y $Q(-1,6)$ divide en dos partes iguales al segmento que tiene como extremos a los puntos $A(-3,-3)$ y $B(4,4)$.

19. Determina si las rectas $x-y-2=0$, $3x+y-18=0$ y $3x+4y-27=0$ se cortan en un punto.

20. Prueba que la recta que pasa por los puntos $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $Q\left(\frac{1}{3},0\right)$ corta a la recta que pasa por el origen y cuya pendiente es 1 en el punto de coordenadas $R\left(\frac{1}{2+3},\frac{1}{2+3}\right)$.

21. Encuentra los valores de las constantes a y b tales que las rectas $ax+3y-11=0$ y $-x+by-8=0$ se cortan en el punto $P(2,5)$.

22. La densidad del plomo menos la densidad de la plata es igual a 0.88. Si al doble de la densidad de la plata le restamos 9.59, se obtiene la densidad del plomo. Encuentra las densidades del plomo y de la plata.

Ángulo entre dos rectas

En las siguientes secciones usaremos las convenciones establecidas en la página 64 sobre los ángulos.

Consideremos dos rectas cualesquiera ℓ_1 y ℓ_2 que se corten en un punto A, como muestra la figura 5-41. En A, se forman dos ángulos suplementarios θ_1 y θ_2. Esto crea cierta ambigüedad al tratar de definir el ángulo entre las rectas. Para evitarla, distinguiremos entre el ángulo de ℓ_1 a ℓ_2 (que se obtiene al hacer girar en sentido positivo a la recta ℓ_1 hasta que coincide con la recta ℓ_2), que es el ángulo θ_1 en la figura 5-41, y el ángulo de ℓ_2 a ℓ_1 que en la figura representamos como θ_2.

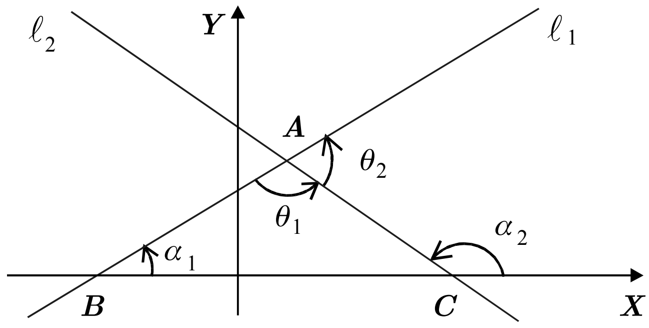


Figura 5-41

Por supuesto, al conocer uno de los ángulos, también conocemos al otro, pues son ángulos suplementarios. La recta ℓ_1 corta al eje X en B, y su ángulo de inclinación es α_1. La recta ℓ_2 corta al eje X en C, formando un ángulo α_2.

Consideremos el triángulo ABC. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°, tenemos

$$\alpha_1 + \theta_1 + (180^\circ - \alpha_2) = 180^\circ$$

es decir,

$$\boxed{\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1,} \tag{5.7}$$

así que, para encontrar el ángulo de ℓ_1 a ℓ_2, calculamos la diferencia del ángulo de inclinación de la recta final ℓ_2 menos el ángulo de inclinación de la recta inicial ℓ_1.

Si ninguna de las rectas es vertical, también podemos expresar la tangente de θ_1 directamente en términos de las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 a partir de la fórmula de la tangente de la diferencia de dos ángulos:

$$\tan\theta_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}.$$

Si llamamos m_1 y m_2 a las pendientes de ℓ_1 y ℓ_2, respectivamente, y sustituimos

$$m_1 = \tan\alpha_1 \quad \text{y} \quad m_2 = \tan\alpha_2$$

en la ecuación anterior, obtenemos

$$\boxed{\tan\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.} \tag{5.8}$$

Ahora calculamos el ángulo θ_2. Como θ_1 y θ_2 son suplementarios, entonces

$$\theta_2 = 180^\circ - \theta_1,$$

de donde

$$\tan\theta_2 = \tan(180^\circ - \theta_1) = -\tan\,\theta_1,$$

es decir,

$$\tan\theta_2 = -\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

Observamos que, en cualquier caso, en el numerador aparece la pendiente de la recta final menos la pendiente de la recta inicial.

Si las ecuaciones de ℓ_1 y ℓ_2 en la forma general son respectivamente:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \end{aligned}$$

sus pendientes son

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} \qquad \text{y} \qquad m_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Al sustituir estos valores en (5.8):

$$\tan\theta_1 = \frac{-\dfrac{A_2}{B_2} - \left(-\dfrac{A_1}{B_1}\right)}{1 + \left(-\dfrac{A_1}{B_1}\right)\left(-\dfrac{A_2}{B_2}\right)},$$

luego simplificamos las fracciones y obtenemos

$$\boxed{\tan\theta_1 = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.} \tag{5.9}$$

En general, la fórmula (5.9) es más fácil de evaluar que la fórmula (5.8), con la ventaja adicional de que (5.9) sirve para calcular el ángulo entre dos rectas, aun en el caso de que una de ellas sea vertical.

Una forma de recordar esta fórmula es la siguiente:

Si se desea encontrar el ángulo θ_1 de la recta ℓ_1 a la recta ℓ_2, escribimos sus ecuaciones generales en ese orden.

$$\begin{aligned} \ell_1 &: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ \ell_2 &: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned}$$

Para obtener el numerador de la fracción que nos da $\tan\theta_1$, debemos realizar la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 \end{array}$$

O sea, $A_1B_2 - A_2B_1$ y, para obtener el denominador, hacemos las operaciones

$$\begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ \downarrow & \downarrow \\ A_2 & B_2 \end{array}$$

es decir, $A_1A_2 + B_1B_2$.

Con lo que obtenemos la fórmula

$$\tan\theta_1 = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Ejemplos

1. Encontrar el ángulo θ de la recta $x + 3y + 2 = 0$ a la recta $-x + 3y + 5 = 0$ (figura 5-42).

Solución:

- Una manera de resolver este ejemplo es por medio de la fórmula (5.9). Como en este caso tenemos

$$\begin{array}{rclcrcl} A_1 & = & 1 & \qquad & B_1 & = & 3 \\ A_2 & = & -1 & & B_2 & = & 3, \end{array}$$

entonces

$$\tan\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{(1 \cdot 3) - ((-1) \cdot 3)}{(1 \cdot (-1)) + (3 \cdot 3)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

y el ángulo θ cuya tangente es igual a $\frac{3}{4}$ mide $36.8°$.

- Otra solución es encontrar las pendientes de las rectas

$$\begin{array}{rclcrcl} x + 3y + 2 & = & 0 & \qquad & -x + 3y + 5 & = & 0 \\ 3y & = & -x - 2 & & 3y & = & x - 5 \\ y & = & -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, & & y & = & \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}. \end{array}$$

De donde $m_1 = -\frac{1}{3}$ y $m_2 = \frac{1}{3}$.

Ahora utilizamos la fórmula (5.8) y obtenemos

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2} = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4},$$

y el ángulo θ cuya tangente es igual a $\frac{3}{4}$ mide $36.8°$, que, por supuesto, es el mismo resultado de la primera solución.

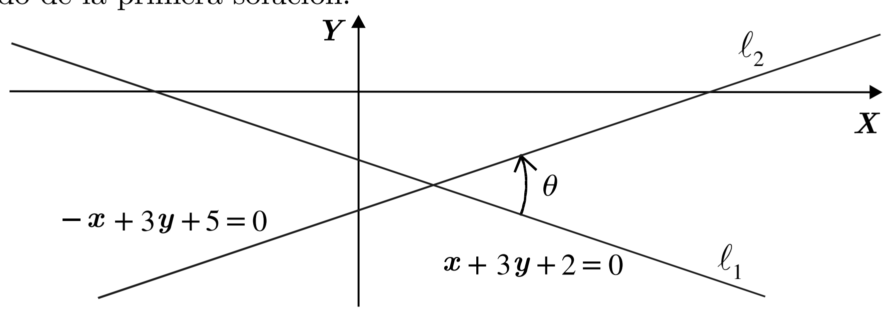


Figura 5-42

2. Encontrar el ángulo θ de la recta $x = 7$ a la recta $5x - 3y = 4$ (figura 5-43).

Solución:

La recta $x = 7$ es vertical y, por tanto, no tiene pendiente, así que no podemos utilizar la fórmula (5.8); pero la fórmula (5.9) sí es aplicable. Observamos que en este caso

$$\begin{array}{rclcrcl} A_1 & = & 1 & \qquad\qquad & B_1 & = & 0 \\ A_2 & = & 5 & & B_2 & = & -3. \end{array}$$

Entonces

$$\tan\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{1\,(-3) - (5\,(0))}{(1\,(5)) + 0\,(-3)} = -\frac{3}{5}.$$

El ángulo θ cuya tangente es igual a $-\frac{3}{5}$ mide 159° (figura 5-43).

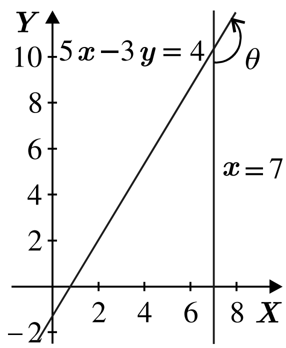


Figura 5-43

3. Encontrar el ángulo θ de la recta $2x - 3y - 6 = 0$ a la recta $x + 5y + 10 = 0$ (figura 5-44).

Solución:

Llamamos ℓ_1 a la recta $2x - 3y - 6 = 0$ y ℓ_2 a la recta $x + 5y + 10 = 0$. Puesto que ambas rectas están escritas en la forma general, aplicaremos la fórmula (5.9).

En este caso, tenemos que

$$\begin{array}{rclcrcl} A_1 & = & 2 & \qquad\qquad & B_1 & = & -3 \\ A_2 & = & 1 & & B_2 & = & 5; \end{array}$$

entonces

$$\tan\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{(2\cdot 5) - (1\,(-3))}{(2\cdot 1) + ((-3)\cdot 5)} = -1.$$

Por medio de la observación de la página 197 y el uso de una calculadora, encontramos que el ángulo cuya tangente es igual a 1, mide 45°. Entonces, el ángulo cuya tangente es igual a -1, mide $180° - 45° = 135°$.

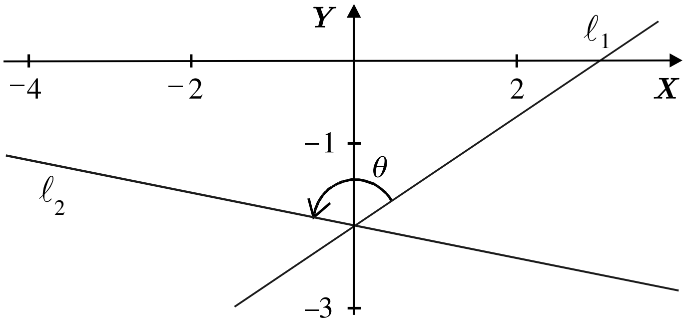


Figura 5-44

4. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son $A\,(2,6)$, $B\,(-3,-1)$ y $C\,(4,-5)$?

Solución:

Dibujamos el triángulo (figura 5-45)

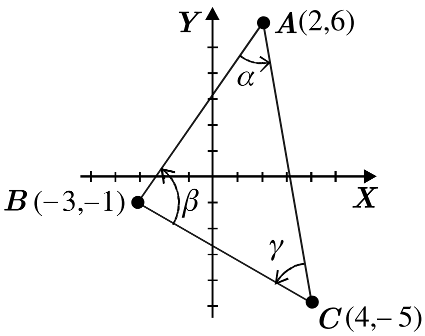


Figura 5-45

Para encontrar el ángulo α calculamos las pendientes m_1 y m_3 de los lados AB y AC, respectivamente. Entonces

$$m_1 = \frac{6-(-1)}{2-(-3)} = \frac{7}{5} \qquad \text{y} \qquad m_3 = \frac{6-(-5)}{2-4} = -\frac{11}{2}.$$

Así,

$$\tan\alpha = \frac{m_3 - m_1}{1 + m_1 m_3} = \frac{-\frac{11}{2} - \frac{7}{5}}{1 + \left(\frac{7}{5}\right)\left(-\frac{11}{2}\right)} = \frac{69}{67}.$$

Por tanto, α mide aproximadamente 45.85°. Calculamos la pendiente m_2 del lado BC:

$$m_2 = \frac{-1-(-5)}{-3-4} = -\frac{4}{7}.$$

Ahora calculamos el ángulo β, es decir,

$$\tan\beta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{7}{5} - \left(-\frac{4}{7}\right)}{1 + \frac{7}{5}\left(-\frac{4}{7}\right)} = \frac{69}{7},$$

de donde β mide aproximadamente 84.20°. Y el ángulo γ es:

$$\tan\gamma = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3} = \frac{-\frac{4}{7} - \left(-\frac{11}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{11}{2}\right)} = \frac{69}{58}.$$

Así, γ mide aproximadamente 49.95°.

Ejercicios

Encuentra el ángulo de la primera recta a la segunda.

1. $x + 3y = 0$ y $x - y + 5 = 0$.

2. $5x + 6y - 7 = 0$ y $4x - 3y - 11 = 0$.

3. $x - 2y - 1 = 0$ y $x - y + 1 = 0$.

4. $4x + y - 7 = 0$ y $x - 6y + 8 = 0$.

5. Un cuadrilátero tiene vértices $A(2,3)$, $B(3,2)$, $C(2,1)$ y $D(1,2)$. Encuentra las pendientes de los lados y los ángulos interiores del cuadrilátero. Dibújalo.

6. Un triángulo tiene vértices $A(-2,6)$, $B(-5,-1)$, $C(6,-2)$. Encuentra las pendientes de los lados y los ángulos interiores del triángulo. Dibújalo.

7. Una recta ℓ_1 tiene pendiente igual a $\frac{3}{4}$. El ángulo de ℓ_1 a una recta ℓ_2 es de 45°. Encuentra la pendiente de la recta ℓ_2.

8. Una recta ℓ_1 tiene pendiente igual a 2. El ángulo de ℓ_1 a una recta a ℓ_2 es de 135°. Encuentra la pendiente de la recta ℓ_2.

9. Los lados de un triángulo se encuentran sobre las rectas $4x + 3y - 19 = 0$, $3x - 4y + 17 = 0$ y $2x - 11y + 3 = 0$. Encuentra los ángulos interiores del triángulo y de qué tipo es el triángulo.

Paralelismo y perpendicularidad

Un número de dos cifras cumple con las siguientes condiciones:

La cifra de las unidades es tres unidades menor que la de las decenas. Cinco veces la cifra de las decenas menos cinco veces la cifra de las unidades es igual a cero. Encuentra el número.

Solución:

Llamamos d a la cifra de las decenas y u a la de las unidades. Si traducimos la información al lenguaje algebraico tenemos

$$\begin{aligned} u &= d - 3, \\ 5d - 5u &= 0. \end{aligned}$$

Como u está despejada en la primera ecuación del sistema, entonces la sustituimos en la segunda y obtenemos

$$\begin{aligned} 5d - 5(d-3) &= 0 \\ 5d - 5d + 15 &= 0 \\ 15 &= 0. \end{aligned}$$

Como $15 \neq 0$ concluimos que el sistema no tiene solución.

Recordemos que esto significa, geométricamente, que las rectas representadas por estas ecuaciones no se cortan; es decir, son paralelas.

Observamos que al escribir las ecuaciones en la forma general

$$\begin{aligned} -d+u+3 &= 0 \\ 5d-5u &= 0, \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= -1 & \qquad B_1 &= 1 \\ A_2 &= 5 & \qquad B_2 &= -5, \end{aligned}$$

entonces, si θ es el ángulo entre las dos rectas,

$$\tan\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{(-1)(-5) - 5(1)}{(-1)5 + 1(-5)} = \frac{0}{-10} = 0.$$

Puesto que $\tan\theta = 0$, entonces $\theta = 0°$. Esto concuerda con el hecho de que las rectas son paralelas.

Los casos en que dos rectas forman un ángulo de 90° o un ángulo de 0° son particularmente importantes.

- Si el ángulo formado es de 90°, entonces decimos que las rectas son *perpendiculares*.
- Si las dos rectas forman un ángulo de 0°, entonces lo que sucede es que son la misma recta, o no se cortan; es decir, son *paralelas*.

A partir de la fórmula (5.9) podemos obtener condiciones sobre las ecuaciones de dos rectas para saber si son paralelas o perpendiculares.

- Dos rectas distintas son paralelas cuando el ángulo formado por ellas es de 0°. Como $\tan 0° = 0$, entonces el numerador de (5.9) es igual a cero.

$$\boxed{A_1B_2 - A_2B_1 = 0} \tag{5.10}$$

En el caso de que ninguna de las rectas sea vertical, podemos dividir la ecuación anterior entre B_1B_2

$$0 = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{B_1B_2} = \frac{A_1}{B_1} - \frac{A_2}{B_2},$$

como las pendientes de las rectas están dadas por

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} \qquad \text{y} \qquad m_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

obtenemos

$$-m_1 + m_2 = 0$$

y al despejar m_2 tenemos

$$\boxed{m_2 = m_1},$$

es decir, las pendientes de dos rectas paralelas no verticales son iguales.

- Cuando las rectas son perpendiculares, el ángulo formado por ellas es de 90° y la tangente de 90° no está definida; esto sucede cuando el denominador de (5.9) vale cero. Entonces, la condición para que dos rectas sean perpendiculares es

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}. \tag{5.11}$$

En el caso de que ninguna de las rectas sea vertical, podemos dividir la ecuación anterior entre B_1B_2 y, como las pendientes de las rectas están dadas por

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} \qquad \text{y} \qquad m_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

obtenemos

$$m_1m_2 + 1 = 0;$$

si despejamos m_1, tenemos

$$\boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2}},$$

es decir, la pendiente de una de las dos rectas no verticales, perpendiculares entre sí, es el simétrico del recíproco de la otra recta.

Ejemplos

1. Encontrar, en su forma general, la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por el punto $P(2, 1)$ y es perpendicular a la recta ℓ_2, cuya ecuación es $2x - 3y - 1 = 0$.

Solución:

Escribimos la ecuación de ℓ_2 en la forma pendiente-ordenada al origen para encontrar su pendiente:

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 1 &= 0 \\ -3y &= -2x + 1 \\ y &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

por lo que su pendiente es $m_2 = \frac{2}{3}$; y la pendiente de ℓ_1 es

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}.$$

Ahora utilizamos la forma punto-pendiente para encontrar la ecuación de ℓ_1 (figura 5-46).

$$\begin{aligned} y - 1 &= -\frac{3}{2}(x - 2) \\ 2(y - 1) &= -3(x - 2) \\ 2y - 2 &= -3x + 6 \\ 3x + 2y - 8 &= 0. \end{aligned}$$

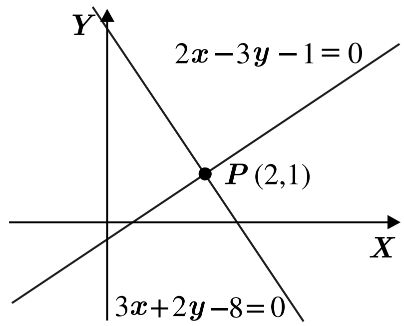


Figura 5-46

Por tanto, la ecuación de ℓ_1 es $3x + 2y - 8 = 0$.

2. Encontrar, en su forma general, la ecuación de la recta que pasa por $P(3, 4)$ y es paralela a la recta $2x - 3y = 10$.

Solución:

Escribimos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen para encontrar la pendiente:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 10 \\ y &= \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

La pendiente de la recta es igual a $\frac{2}{3}$. La ecuación de la recta que buscamos tiene esa misma pendiente y pasa por $P(3, 4)$ (figura 5-47).

$$\begin{aligned} y - 4 &= \frac{2}{3}(x - 3) \\ 2x - 3y + 6 &= 0. \end{aligned}$$

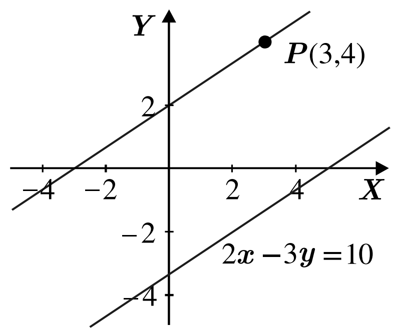


Figura 5-47

3. Encontrar la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por $Q(-3, -2)$ y es perpendicular a la recta ℓ_2 cuya ecuación es $x = 4$.

Solución:

La recta $x = 4$ es vertical, así que una recta perpendicular a ella debe ser horizontal. (Ver la segunda observación de la página 189.) Como queremos que pase por el punto $Q(-3, -2)$, su ecuación debe ser $y = -2$ (figura 5-48).

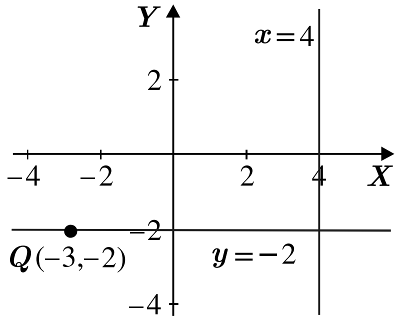


Figura 5-48

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y es perpendicular a la recta dada.

1. $P(-3,1)$; $5x+6y-13=0$. **2.** $P(-1,1)$; $2x-y+10=0$. **3.** $P(4,-2)$; $7x-3y-1=0$.

4. $P(0,3)$; $5x-y-3=0$. **5.** $P(-1,-5)$; $x=-2$. **6.** $P(2,2)$; $y=1$.

Encuentra la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por el punto dado y es paralela a la recta dada.

7. $P(-2,-3)$; $y=\frac{3}{4}x+4$. **8.** $P\left(\frac{4}{3},0\right)$; $x+5y-12=0$. **9.** $P(-2.5,4)$; $y=-2$.

10. $P(5,5)$; $x=3$. **11.** $P\left(\sqrt{2},-1\right)$; $x=y+5$. **12.** $P(4,3)$; $x+\sqrt{2}y=0$.

Determina si los siguientes pares de rectas se cortan en un punto, si son paralelas o si son la misma recta. En caso de que se corten en un punto, analiza si son perpendiculares.

13. $4x+y-3=0$ y $2x-5y+4=0$. **14.** $3x-y+1=0$ y $x+3y-15=0$.

15. $2x-y-3=0$ y $8x-4y+3=0$. **16.** $6x-3y+32=0$ y $4x-2y+2=0$.

17. $4x-y+6=0$ y $2x-5y+12=0$. **18.** $x-y+2=0$ y $x+y+5=0$.

19. Dado el cuadrilátero con vértices en $A\,(0,0)$, $B\,(6,0)$, $C\,(1,2)$, $D\,(5,4)$, demuestra que las rectas que unen a los puntos medios de los lados sucesivos del cuadrilátero forman un paralelogramo. Realiza un dibujo.

20. Dado el paralelogramo con vértices $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(3,4)$, $D(8,4)$,

a. demuestra que las diagonales de este paralelogramo son perpendiculares. Realiza un dibujo;

b. demuestra que este paralelogramo es un rombo. Realiza un dibujo.

21. Dado el paralelogramo con vértices $A(-1,3)$, $B(3,3)$, $C(-3,-2)$, $D(1,-2)$, demuestra que sus diagonales se cortan en el punto medio. Haz un dibujo.

22. Dado el triángulo rectángulo con vértices $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(0,-6)$, demuestra que las distancias entre los vértices y el punto medio de la hipotenusa son iguales entre sí. Realiza un dibujo.

23. Dados los puntos $A(-2,3)$, $B(8,8)$, $C(2,2)$, $D(4,3)$, $E\,(0,-2)$, $F\,(6,1)$:

a. Encuentra las ecuaciones de las rectas que pasan por A y B; C y D, y E y F.

b. ¿Cómo son las rectas que encontraste?

c. Encuentra las ecuaciones de las rectas que pasan por A y E, y por B y F. Encuentra las coordenadas del punto P en que se cortan las dos rectas.

d. Encuentra las ecuaciones de las rectas que pasan por E y C, y por F y D. Encuentra las coordenadas del punto Q en que se cortan las dos rectas.

e. Encuentra las ecuaciones de las rectas que pasan por A y C, y por B y D. Encuentra las coordenadas del punto R en que se cortan las dos rectas.

f. Demuestra que los puntos P, Q y R son colineales.

g. Realiza un dibujo en el que aparezcan todas las rectas y puntos que encontraste.

Desigualdades y regiones del plano

Describir las regiones determinadas por la recta $x + 2y - 8 = 0$.
Solución:
Escribimos la recta en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Al dibujarla obtenemos (figura 5-49):

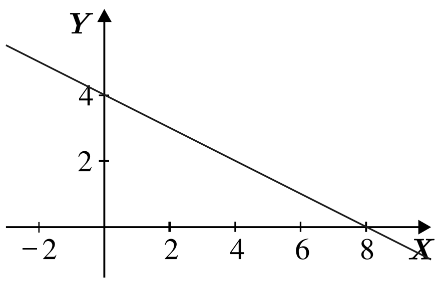


Figura 5-49

Observamos que la recta divide al plano en tres conjuntos:

- Los puntos que están en la recta.
- Los puntos que están arriba de la recta.
- Los puntos que están abajo de la recta.

Sabemos que los puntos que están en la recta son los que satisfacen la ecuación

$$y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Observamos que si nos movemos verticalmente hacia arriba, la ordenada del punto es cada vez mayor. Así, los puntos (x, y) que están arriba de la recta satisfacen la siguiente desigualdad:

$$y > -\frac{1}{2}x + 4.$$

De igual manera, si nos movemos verticalmente hacia abajo, la ordenada del punto es cada vez menor, por lo que los puntos (x, y) que están abajo de la recta satisfacen la desigualdad:

$$y < -\frac{1}{2}x + 4.$$

En general, consideremos una recta en el plano. La recta divide al plano en tres conjuntos:

- El conjunto de puntos que están en la recta.
- La región formada por el conjunto de puntos que están a un lado de la recta.
- La región formada por el conjunto de puntos que están al otro lado de la recta.

Consideremos una recta no vertical cuya ecuación es $y = mx + b$; los puntos que están en la recta son precisamente los que satisfacen su ecuación. Consideremos ahora un punto $P(x, y)$ que esté en la parte del plano que se encuentra arriba de la recta, como se muestra en la figura 5-50.

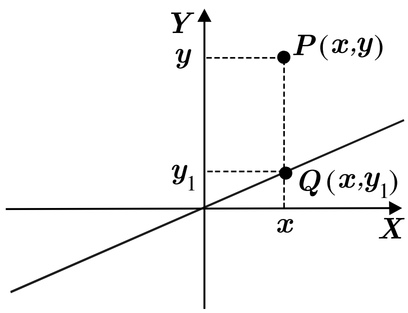


Figura 5-50

La recta paralela al eje Y corta a la recta dada en un punto Q, el cual tiene la misma primera coordenada x que P. Al trazar desde Q una paralela al eje X, obtenemos la segunda coordenada y_1 de Q.

$$Q(x, y_1).$$

Puesto que Q está en la recta, tenemos

$$y_1 = mx + b,$$

además, como P está arriba de la recta, la segunda coordenada de P es mayor que la de Q, es decir,

$$y > y_1,$$

por tanto,

$$y > mx + b. \tag{5.12}$$

Como el punto P se eligió de manera arbitraria arriba de la recta, cualquier otro punto que esté de ese mismo lado de la recta satisface la desigualdad (5.12).

Si tomamos un punto cualquiera que esté debajo de la recta, obtendremos la desigualdad

$$y < mx + b.$$

Para resumir, una recta con ecuación $y = mx + b$ divide al plano en tres conjuntos:

- Los puntos (x, y) que están en la recta, los cuales satisfacen la ecuación $y = mx + b$.
- Los puntos (x, y) que están arriba de la recta, los cuales satisfacen la desigualdad $y > mx + b$.
- Los puntos (x, y) que están abajo de la recta, los cuales satisfacen la desigualdad $y < mx + b$.

Ejemplos

1. Describir las regiones determinadas por la recta $y = -7$.

Solución:

Los puntos que están en la recta satisfacen $y = -7$.

Los puntos que se encuentran arriba de la recta satisfacen la desigualdad $y > -7$.

Los puntos que se encuentran abajo de la recta satisfacen la desigualdad $y < -7$ (figura 5-51).

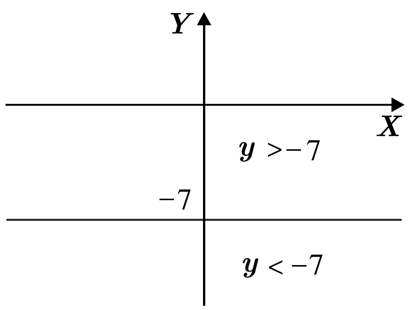


Figura 5-51

2. Describir mediante desigualdades la región sombreada en la figura 5-52, la cual está limitada por las rectas ℓ_1: $6x + 2y + 3 = 0$ y ℓ_2: $x + 2y - 16 = 0$.

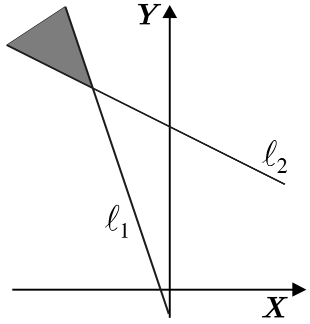


Figura 5-52

Solución:

Escribimos las ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = -3x - \frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{1}{2}x + 8.$$

Los puntos que están en la zona sombreada quedan abajo de la recta ℓ_1 y, por tanto, satisfacen

$$y < -3x - \frac{3}{2},$$

y están arriba de la recta ℓ_2, así que satisfacen

$$y > -\frac{1}{2}x + 8.$$

Por tanto, la zona sombreada consiste en los puntos (x, y) que satisfacen ambas desigualdades:

$$y > -\frac{1}{2}x + 8 \quad \text{y} \quad y < -3x - \frac{3}{2},$$

que podemos resumir como

$$-\frac{1}{2}x + 8 < y < -3x - \frac{3}{2}.$$

3. Encontrar los valores de x para los cuales la recta $y = -6x + 10$ está debajo de la recta $y = -2x + 2$.

Solución:

Resolvemos la desigualdad

$$\begin{aligned} -6x + 10 &< -2x + 2 \\ -6x + 2x &< 2 - 10 \\ -4x &< -8, \end{aligned}$$

al dividir entre -4 la desigualdad se invierte

$$\begin{aligned} x &> \frac{-8}{-4} \\ x &> 2. \end{aligned}$$

Si $x > 2$, entonces los puntos de la recta $y = -6x + 10$ están debajo de $y = -2x + 2$ (figura 5-53).

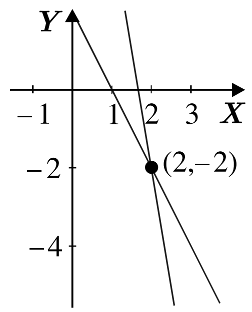


Figura 5-53

4. Dibujar la región del plano que satisface las desigualdades $y < 3x + 2$ y $y < 6 - 7x$.

Solución:

Primero encontramos la solución de cada una de las desigualdades. Los puntos que satisfacen $y < 3x + 2$ son los que están debajo de la recta $y = 3x + 2$.

Los puntos que satisfacen $y < 6 - 7x$ son los que están abajo de la recta $y = 6 - 7x$.

Por tanto, los puntos que satisfacen ambas desigualdades son los que están debajo de cada una de las dos rectas (figura 5-54).

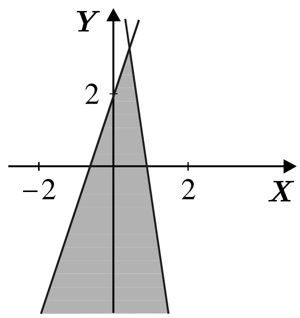


Figura 5-54

Rectas verticales

Las únicas rectas con las que no se puede proceder de la manera anterior son las rectas verticales, ya que no tienen pendiente. Sin embargo, dada una recta vertical $x = k$, ésta también divide al plano en tres regiones:

- Los puntos (x, y) que están en la recta satisfacen la ecuación $x = k$.
- Los puntos (x, y) que están a la derecha de la recta satisfacen la desigualdad $x > k$.
- Los puntos (x, y) que están a la izquierda de la recta satisfacen la desigualdad $x < k$.

Ejemplos

1. Dibujar las regiones determinadas por la recta $x = 5$ (figura 5-55).

Solución:

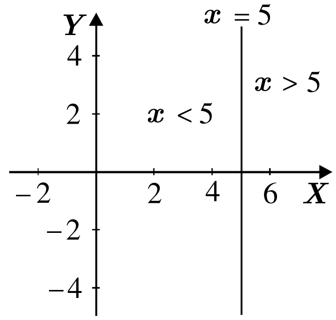


Figura 5-55

2. Dibujar la región determinada por las desigualdades $x > 3$, $y < -x + 9$ y $y > -5$.

Solución:

La región que determina la desigualdad $x > 3$ son los puntos que están a la derecha de la recta $x = 3$.

La región que determina la desigualdad $y < -x + 9$ son los puntos que están abajo de la recta $y = -x + 9$.

La región que determina la desigualdad $y > -5$ son los puntos que están arriba de la recta $y = -5$ (figura 5-56).

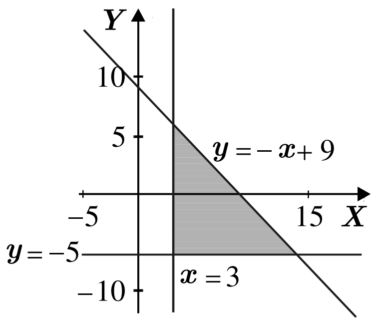


Figura 5-56

Punto de equilibrio

Un fabricante de cochecitos de juguete tiene como gastos fijos la cantidad de 630 pesos diarios, y el costo de cada cochecito es de 15 pesos. El precio de venta es de 20 pesos. Durante el primer mes produjo y vendió 3528 cochecitos. ¿Cuál fue la ganancia en ese mes? ¿Cuántos cochecitos debe producir y vender durante el mes para que manteniendo ese precio no tenga pérdidas?

Solución:

Llamamos x al número de cochecitos producidos en un mes. El costo total de producción mensual es

$$y = C(x) = (630)(30) + 15x = 18\ 900 + 15x,$$

los ingresos al vender son:

$$y = I(x) = 20x.$$

Calculamos la utilidad obtenida en el mes al vender los cochecitos, que es la diferencia entre los ingresos y los costos:

$$I(x) - C(x) = 20x - 18\ 900 - 15x = 5x - 18\ 900.$$

Puesto que en el mes en cuestión se vendieron 3528 cochecitos, entonces la utilidad fue

$$5(3528) - 18\ 900 = -1260.$$

La fábrica perdió durante el mes 1260 pesos.

Para que no haya pérdida, la utilidad deberá ser no negativa, es decir:

$$20x - 18\ 900 - 15x \geq 0,$$

simplificando:

$$\begin{aligned} 5x - 18\ 900 &\geq 0 \\ x &\geq \frac{18\ 900}{5} \\ x &\geq 3780. \end{aligned}$$

Para que no haya pérdidas, es necesario que el fabricante produzca y venda por lo menos 3780 cochecitos (figura 5-57).

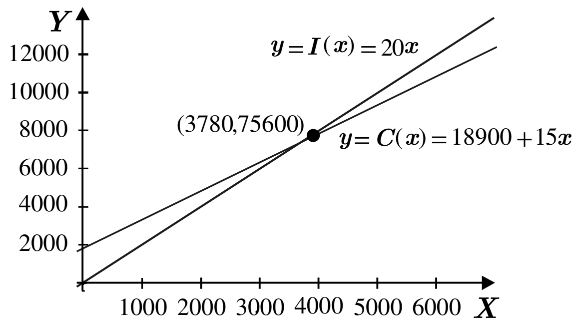


Figura 5-57

Observamos que cuando x es mayor que 3780, la recta $y = 20x$ está arriba de la recta $y = 18\ 900 + 15x$; es decir, la cantidad obtenida al vender los artículos es mayor que el costo de producción y, por consiguiente, hay ganancia. Si, por el contrario, x es menor que 3780, entonces la recta $y = 20x$ está debajo de $y = 18\ 900 + 15x$; es decir, el número de artículos producidos es menor que 3780, de modo que la cantidad obtenida al venderlos es menor que el costo de producción, en cuyo caso hay pérdidas.

El punto donde se cortan las dos rectas se conoce como *punto de equilibrio de costo-ingreso*.El precio de un artículo puesto en el mercado está relacionado con el número de artículos que pueden venderse. Cuando el precio de un artículo es muy alto, los consumidores no lo adquieren; en cambio, cuando es bajo, el artículo se vende muy bien. La ecuación que relaciona el precio de un artículo con la cantidad de artículos que los consumidores están dispuestos a comprar se llama *ecuación de demanda*.

La ecuación de demanda más simple es una ecuación lineal como

$$p = ax + b,$$

donde p es el precio por unidad, x es el número de artículos, y a y b son constantes. Pusimos el precio en función del número de artículos, ya que esta forma permite calcular fácilmente los ingresos brutos y la utilidad neta de una empresa que vende x artículos a un precio p cada uno.

Queda claro de la experiencia, que si el precio de un artículo aumenta, entonces se venderá menos; mientras que si el precio baja se venderá más. Esto significa que la pendiente a de la recta es negativa (figura 5-58).

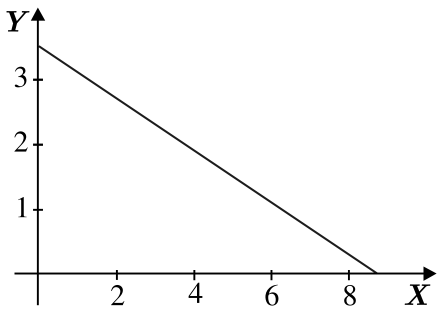


Figura 5-58

Puesto que tanto el precio como el número de artículos vendidos son cantidades no negativas, únicamente dibujamos la parte de la recta que se encuentra en el primer cuadrante.

De igual manera, la cantidad de artículos que un fabricante está dispuesto a poner en el mercado está relacionada con el precio al que puede venderlos. Si el precio de los artículos es alto, el fabricante producirá muchos artículos; en cambio, si el precio es bajo, producirá pocos con la esperanza de crear escasez. La relación entre el número de artículos que pueden ponerse en el mercado y su precio se llama *ecuación de oferta*. De nuevo, la ecuación de oferta más simple es la ecuación lineal, aunque en la vida real la ecuación no siempre es así. La ecuación lineal se escribe como

$$p = cx + d,$$

donde p es el precio ofrecido por unidad, x es el número de artículos que se ponen a la venta y c y d son constantes.

En este caso, la pendiente c es positiva, pues cuando el precio es alto los fabricantes tratan de producir muchos artículos y, cuando es bajo, producen pocos (figura 5-59).

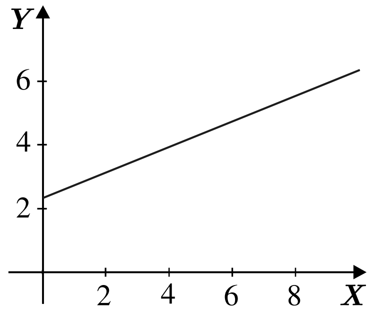


Figura 5-59

El punto en el que la cantidad de artículos demandada por los consumidores coincide con el número de artículos que ofrece el productor es el punto donde se cortan las rectas, y se llama *punto de equilibrio de mercado*.

Ejemplos

1. Una fábrica de colchones lanza al mercado uno de sus productos y encuentra que no es aceptado. Debido a esto decide variar el precio de acuerdo con la experiencia obtenida y las políticas de la empresa; al hacerlo, se determinan dos ecuaciones, una de oferta y otra de demanda, las cuales suponemos lineales.

Encuentra esas ecuaciones a partir de la siguiente información:

- Con un precio de 2900 pesos, la empresa observa que durante un mes no se registran ventas.
- Decide disminuir el precio a 2700 pesos y en un mes logra vender 100 colchones.
- Un estudio de mercado muestra que por cada 200 pesos que la empresa disminuya el precio, la demanda se incrementará en 100 unidades.
- La empresa no está dispuesto a vender cada colchón en menos de 1700 pesos.
- A un comerciante le ofrece 800 colchones a 2000 pesos cada uno.

Solución:

Primero encontraremos la ecuación de la demanda.

Para ello, escribimos los datos como parejas ordenadas. Observamos que no hay demanda si el precio (p) es de 2900 pesos; es decir, consideramos la pareja

$$(0, 2900) .$$

De igual manera, con los datos del problema escribimos

$$(100, 2700) .$$

Puesto que la ecuación debe ser lineal y satisfacer los datos anteriores, debemos encontrar la ecuación de la recta que pasa por ellos:

$$\begin{aligned} p - 2700 &= \frac{2700 - 2900}{100 - 0}(x - 100) \\ p &= -2x + 2900. \end{aligned}$$

Ahora encontramos la ecuación de la oferta.

El hecho de que la empresa no esté dispuesta a vender cada artículo en menos de 1700 pesos lo interpretamos como que el número de artículos que venderá en 1700 pesos es cero. Utilizando la condición restante, encontramos que para la oferta podemos escribir las parejas

$$(0, 1700) \quad \text{y} \quad (800, 2000).$$

Ahora encontramos la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:

$$\begin{aligned} p - 2000 &= \frac{2000 - 1700}{800 - 0}(x - 800) \\ p &= \frac{3}{8}x + 1700. \end{aligned}$$

Así, la ecuación de demanda es $p = -2x + 2900$ y la de oferta es $p = \frac{3}{8}x + 1700$ (figura 5-60).

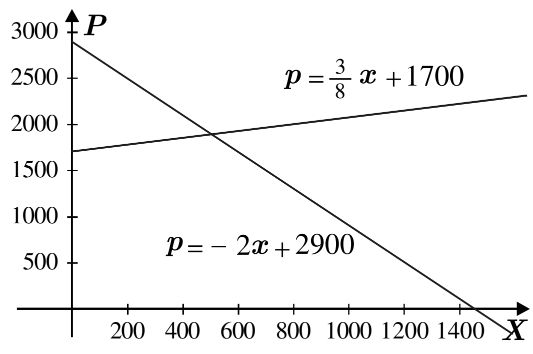


Figura 5-60

2. Encontrar el punto de equilibrio de mercado del ejemplo anterior.

Solución:

Consideramos las ecuaciones de oferta y de demanda que obtuvimos:

$$p = -2x + 2900 \quad \text{y} \quad p = \frac{3}{8}x + 1700. \tag{5.13}$$

Como en las dos ecuaciones la p está despejada para obtener el punto en el que se cortan las rectas basta con igualarlas:

$$-2x + 2900 = \frac{3}{8}x + 1700,$$

despejando x obtenemos

$$\begin{aligned} 2900 - 1700 &= 2x + \frac{3}{8}x \\ 1200 &= \frac{19}{8}x \\ \frac{9600}{19} &= x. \end{aligned}$$

Si sustituimos este valor de x en la primera ecuación de (5.13) obtenemos

$$p = -2\left(\frac{9600}{19}\right) + 2900 = \frac{35\ 900}{19} \approx 1889.5.$$

Las rectas se cortan en el punto $\left(\frac{9600}{19}, \frac{35\ 900}{19}\right)$ que es, de manera aproximada, el punto $(505, 1890)$.

Ejercicios

Encuentra las desigualdades que describen las regiones que se encuentran a los lados de la recta.

1. $2x - y + 7 = 0.$ **2.** $-x - 8 = 0.$ **3.** $y - 5 = 0.$

4. $-\frac{1}{2}x + 2y = 0.$ **5.** $\frac{4}{3}x - \frac{3}{4}y + 1 = 0.$ **6.** $-x + \frac{5}{8}y - 5 = 0.$

7. Encuentra los valores de x para los cuales la recta $y = -4x + 7$ está arriba de la recta $y = \frac{4}{3}x - 1.$

8. Encuentra los valores de x para los cuales la recta $y = \frac{5}{2}x + \frac{15}{2}$ está arriba de la recta $y = -\frac{5}{6}x + \frac{25}{6}.$

9. Dibuja la región que consta de los puntos que satisfacen las siguientes desigualdades: $y < -6x + 10$, $y > -2x + 2$, $y < 2x + 2.$

10. El dueño de una zapatería ubicada en la Ciudad de México hace un pedido a una fábrica de León, Guanajuato. Cada par de zapatos tiene un costo de 190 pesos, y por concepto de flete deben pagarse 2 600 pesos.

a. Escribe la función de costo suponiendo que es lineal.

Si cada par se vende en 230 pesos:

b. ¿Cuántos pares deben venderse para recuperar la inversión, sin obtener ganancia?

c. ¿Cuántos pares deben venderse para obtener una ganancia de 16 000 pesos?

11. Una ama de casa hace pasteles para mejorar su economía familiar. Cada pastel tiene un costo de 19 pesos por concepto de materia prima, y el aumento en el gasto diario de la casa por concepto de agua, luz y gas asciende a 16 pesos.

a. Escribe la ecuación de costo suponiendo que es lineal.

Si cada pastel se vende en 27 pesos:

b. ¿Cuántos pasteles deben venderse diariamente para asegurar que no haya pérdidas?
c. ¿Cuántos pasteles deben venderse para ganar al día por lo menos 70 pesos?

12. Un vendedor expende artículos por comisión y recibe 3 pesos por cada artículo que vende. El vendedor trabaja de lunes a viernes. Paga diariamente 5 pesos para que se le permita vender en un mercado y 6 pesos para transportarse. Después de una semana en la que no tuvo ingresos, para compensar los gastos decide no continuar con la venta.

a. ¿Cuántos artículos vendió durante esa semana?
b. ¿Cuántos artículos debe vender en una semana para que al restar sus gastos le queden 35 pesos por cada día de trabajo?

13. Una fábrica tiene gastos fijos mensuales de 8500 pesos y cada artículo producido tiene un costo de 6.50 pesos. Un vendedor le ofrece un equipo nuevo con el que puede producir el mismo artículo en 4.75 pesos, pero el dueño de la fábrica calcula que la adquisición del nuevo equipo aumentará los gastos fijos mensuales a 15 000 pesos. Si cada artículo se vende en 9 pesos:

a. ¿Cuál es el punto de equilibrio en cada caso?

Si al mes se venden 15 000 artículos:

b. ¿Debe adquirirse el nuevo equipo o conviene conservar el que ya se tiene?

14. Un comerciante adquiere un lote de telas. Estima que si establece un precio de 52 pesos por metro de tela, en un mes podría vender 385 metros; sin embargo, si disminuye el precio a 45 pesos por metro podría vender 630 metros. Si la oferta está dada por la ecuación $y = 175x - 6\,500$:

a. Escribe la ecuación de demanda suponiendo que es lineal.
b. ¿Cuál es el precio por metro que equilibra la oferta y la demanda?

15. Una señora que vende tamales observa que puede vender 200 tamales al día si los da a 3 pesos cada uno, pero si aumenta el precio a 3.50 pesos, entonces sólo vende 150 tamales. Si la oferta está dada de manera que a un precio de 3 pesos puede ofrecer 250 tamales diarios y a 2.50 pesos ofrecería solamente 50 tamales:

a. Encuentra la ecuación de demanda suponiendo que es lineal.
b. Encuentra la ecuación de oferta suponiendo que es lineal.
c. ¿Cuál es el precio que equilibra la oferta y la demanda?

16. En una recaudería, el vendedor observa que a un precio de 4.50 pesos por kilo puede vender 60 kg de jitomate en una semana, pero si aumenta el precio a 5.50 pesos sólo vende 40 kg. La ecuación de oferta está dada por

$$y = \begin{cases} 4 + \frac{1}{10}x & \text{si } x \leq 20 \\ \frac{3}{10}x & \text{si } x > 20 \end{cases}.$$

a. Encuentra la ecuación de demanda suponiendo que es lineal.

b. Encuentra el punto de equilibrio de mercado.

17. En una fábrica familiar, los costos fijos mensuales son de 5 500 pesos y pueden producirse hasta 25 000 artículos, cada uno de los cuales tiene un costo de 16 pesos. Cierto mes, la demanda aumenta y el dueño pide a otro fabricante que le apoye para lograr una producción de 40 000 artículos. El fabricante estima que a partir de 25 000 artículos el costo será de 16.22 pesos por unidad. Cada artículo puede venderse en 19 pesos.

a. Escribe la ecuación de costo suponiendo que hasta 25 000 artículos es lineal.

b. ¿Cuál es el número mínimo de artículos que deben venderse para no registrar pérdidas?

c. ¿Con qué cantidad de artículos vendidos se ganaría más por unidad, con 25 000 o con 37 000 artículos?

Distancia de un punto a una recta

Encontrar la distancia del punto $P\left(-4, \frac{7}{2}\right)$ a la recta $x - 2y - 2 = 0$.
Solución:
La distancia del punto $P\left(-4, \frac{7}{2}\right)$ a la recta $x - 2y - 2 = 0$ es la distancia de P al punto más cercano de la recta.

Escribimos la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = \frac{1}{2}x - 1.$$

Consideramos la recta perpendicular a y que pase por $P\left(-4, \frac{7}{2}\right)$; sabemos que ésta tiene pendiente igual a -2 y, por tanto, su ecuación es

$$\begin{aligned} y - \frac{7}{2} &= -2\left(x - (-4)\right) \\ y &= -2x - \frac{9}{2} \\ 4x + 2y + 9 &= 0. \end{aligned}$$

Encontremos el punto en donde se cortan las rectas

$$x - 2y - 2 = 0 \qquad \text{y} \qquad 4x + 2y + 9 = 0.$$

Para ello, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 4x + 2y &= -9. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Si sumamos las ecuaciones y despejamos x, tenemos

$$\begin{aligned} 5x &= -7 \\ x &= -\frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la primera ecuación de (5.14) y obtenemos el valor de y:

$$\begin{aligned} -\frac{7}{5} - 2y &= 2 \\ 2y &= -\frac{7}{5} - 2 \\ y &= -\frac{17}{10}. \end{aligned}$$

El punto donde se cortan las dos rectas es $Q\left(-\frac{7}{5}, -\frac{17}{10}\right)$ (figura 5-61).

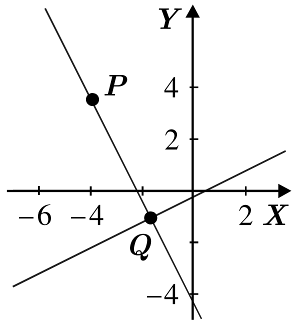


Figura 5-61

La distancia del punto P a la recta es la distancia que hay de P a Q:

$$d\,(P, Q) = \sqrt{\left(-4-\left(-\frac{7}{5}\right)\right)^2 + \left(\frac{7}{2}-\left(-\frac{17}{10}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{13}{5}\right)^2 + \left(\frac{26}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}.$$

Así, la distancia de $P\left(-4, \frac{7}{2}\right)$ a la recta $x - 2y - 2 = 0$ es de $\frac{13}{5}\sqrt{5}$.

El procedimiento mostrado en el ejemplo introductorio se puede extender al caso general.

Consideremos una recta ℓ cualquiera y un punto P en el plano. La distancia del punto P a la recta ℓ se define como la distancia de P al punto de ℓ que esté más cercano a él.

Si ℓ tiene ecuación $Ax + By + C = 0$ y P tiene coordenadas (x_1, y_1), entonces la distancia de P a ℓ está dada por:

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{5.15}$$

Es decir, se sustituyen las coordenadas de P en la recta y se divide entre $\sqrt{A^2 + B^2}$. Como la distancia es un número no negativo, debemos tomar el valor absoluto del resultado obtenido.

Observa que si P pertenece a la recta, entonces $Ax_1 + By_1 + C = 0$; así que su distancia a la recta es 0.

Ejemplo

- Encuentra la distancia del punto $P(2,3)$ a la recta $y = \frac{3}{4}x + 1$.

  Solución:

  Escribimos la ecuación de la recta en la forma general:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{4}x + 1 \\ -\frac{3}{4}x + y - 1 &= 0 \\ -3x + 4y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

  Sustituimos las coordenadas de $P\,(2,3)$ y los coeficientes de la ecuación de la recta en la fórmula (5.15):

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(-3)(2) + (4)(3) + (-4)|}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2}} = \frac{2}{5}.$$

Entonces la distancia es $d = \frac{2}{5}$ (figura 5-62).

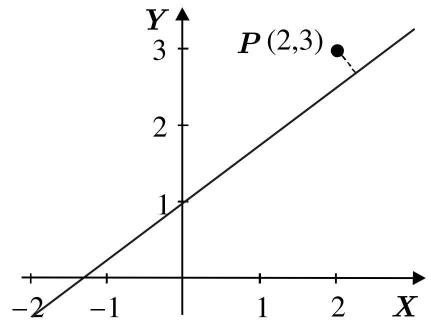


Figura 5-62

Distancia entre dos rectas paralelas

Encontrar la distancia entre las rectas $6x + 2y - 3 = 0$ y $6x + 2y + 5 = 0$.

Solución:

Observemos que los coeficientes de x y de y son iguales en ambas ecuaciones; entonces las rectas tienen la misma pendiente (-3) y, por tanto, son paralelas.

Elegimos un punto cualquiera en la primera recta. Para ello, tomamos cualquier valor de x, por ejemplo $x = 1$, lo sustituimos en la ecuación, y encontramos el valor de y correspondiente:

$$6(1) + 2y - 3 = 0, \qquad \text{de donde} \qquad y = -\frac{3}{2}.$$

Así, el punto $P(1, -\frac{3}{2})$ pertenece a la primera recta. Ahora calculamos la distancia de P a la segunda recta:

$$d = \frac{\left|6(1) + 2(-\frac{3}{2}) + 5\right|}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{|8|}{\sqrt{40}} = \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}.$$

Por tanto, la distancia entre las rectas es de $\frac{4}{\sqrt{10}}$ (figura 5-63).

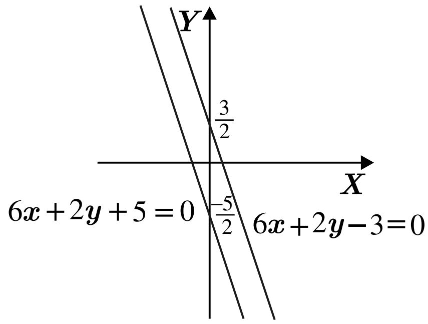


Figura 5-63

Para encontrar la distancia entre dos rectas paralelas, tomamos un punto localizado en una de ellas y encontramos la distancia que hay desde ese punto hasta la otra recta.

Ejercicios

Encuentra la distancia entre la recta y el punto dados.

1. $y = \frac{1}{2}x + 5, \quad P(-1, 2).$

2. $y = -\frac{7}{5}x + \frac{3}{5}, \quad P(-3, -4).$

3. $\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1, \quad P(1, 5).$

4. $y = -\frac{3}{2}x - 2, \quad P(2, -1).$

5. $3x + 5y - 8 = 0, \quad P(6, 2).$

6. $y + 2 = 0, \quad P(4, 8).$

7. $x - 2 = 0, \quad P(7, 1).$

8. $x + y = 0, \quad P(-4, -5).$

9. $-4x + 6y + 7 = 0, \quad P(0, -3).$

10. $2x - 10y - 5 = 0, \quad P(-2, 4).$

Encuentra la distancia entre las dos rectas dadas.

11. $6x + 9y - 9 = 0, \quad 2x + 3y + 7 = 0.$

12. $x + 2y + 2 = 0, \quad 2x + 4y - 3 = 0.$

13. $7x - 5y + 1 = 0, \quad 7x - 5y - 1 = 0.$

14. $-2x + 4y - 3 = 0, -8x + 16y - 2 = 0.$

15. $x + 2y + 2 = 0, \quad 2x + 4y - 3 = 0.$

16. $8x + 3y - 8 = 0, \quad 8x + 3y + 6 = 0.$

17. $5x + 6y = 20, \quad 5x + 6y = 15.$

18. $-x + 3y - 5 = 0, \quad 5x - 15y + 8 = 0.$

19. Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular al segmento que pasa por el origen y forma un ángulo de $30°$ con el eje X, y cuya distancia al origen es 5.

20. Considera los puntos $A(-1, 3)$, $B(2, 6)$ y $C(4, 1)$. Calcula la distancia del punto A a la recta que pasa por B y C. Calcula el área del triángulo con vértices A, B y C.

21. Considera las rectas cuyas ecuaciones son $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ y $9x - 12y - 5 = 0$, y los puntos $A\left(2, \frac{7}{2}\right)$ y $B(8, 8)$. Calcula las distancias de A y B a cada una de las rectas. ¿Qué puedes decir acerca de la recta que pasa por los puntos A y B?

22. Un punto $P(x, y)$ equidista de los puntos $A(3, 7)$ y $B(6, 6)$. La distancia de P a la recta que pasa por A y tiene pendiente igual a 2 es de $\frac{4}{\sqrt{5}}$. Encuentra las coordenadas de P.

23. Los puntos $A\,(x,4)$ y $B\,(5,y)$ se encuentran a una distancia de $\frac{20}{\sqrt{130}}$ de la recta que pasa por los puntos $P\,(-3,2)$ y $Q\,(8,5)$. Encuentra la abscisa de A y la ordenada de B.

Bisectriz de un ángulo

Encuentra el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas $4x-3y+2=0$ y $5x-12y+19=0$.

Solución:

Llamemos ℓ_1 y ℓ_2 a las rectas y sea $P(x,y)$ un punto que equidista de ambas rectas, entonces

$$d\,(P,\ell_1)=d\,(P,\ell_2)$$

Por la fórmula de la distancia de un punto a una recta, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{|4x-3y+2|}{\sqrt{4^2+3^2}} &= \frac{|5x-12y+19|}{\sqrt{5^2+12^2}}\\ \frac{|4x-3y+2|}{5} &= \frac{|5x-12y+19|}{13};\end{aligned}$$

así que

$$\frac{4x-3y+2}{5}=\frac{5x-12y+19}{13} \quad \text{o bien} \quad \frac{4x-3y+2}{5}=-\frac{5x-12y+19}{13}.$$

Simplificando la primera ecuación se obtiene la recta b_1:

$$9x+7y-23=0;$$

y de la igual manera, de la segunda ecuación obtenemos la recta b_2:

$$7x-9y+11=0.$$

En la figura siguiente se muestran estas cuatro rectas.

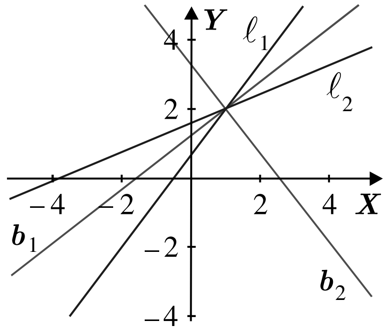


Figura 5-64

Observa que las soluciones del problema son las rectas que son las bisectrices de los ángulos formados por las rectas originales. También observa que estas dos bisectrices son perpendiculares entre sí.

Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 que se cortan forman dos ángulos θ_1 y θ_2 que son suplementarios, como vimos en la página 196. Las *bisectrices* de estos ángulos son los lugares geométricos de los puntos que equidistan de las rectas ℓ_1 y ℓ_2. Las bisectrices son dos rectas perpendiculares entre sí, y se encuentran resolviendo

$$\boxed{d\,(P,\ell_1) = d\,(P,\ell_2)}, \tag{5.16}$$

donde P es un punto cualquiera.

Si $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ son las ecuaciones de ℓ_1 y ℓ_2, respectivamente, la fórmula (5.16) queda como

$$\boxed{\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}. \tag{5.17}$$

Ejemplos

1. Encontrar las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $y = 0$ y $x = 0$.

Solución:

Las ecuaciones ya están en la forma general, así que sustituimos en (5.17) y simplificamos

$$\begin{aligned} \frac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} &= \frac{|x|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \\ |y| &= |x|\,; \end{aligned}$$

lo cual da origen a dos ecuaciones

$$y = x \quad \text{y} \quad y = -x.$$

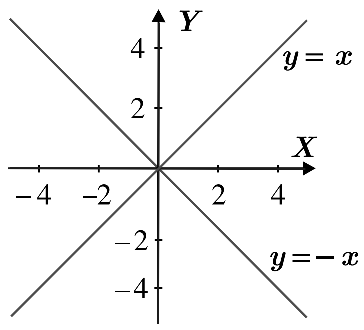


Figura 5-65

2. Encontrar las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $x = y$ y $3x + 4y = 2$.

Solución:

Escribimos las ecuaciones en la forma general y sustituimos en (5.17)

$$\begin{aligned}\frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+1^2}} &= \frac{|3x+4y-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}\\ \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} &= \frac{|3x+4y-2|}{5};\end{aligned}$$

lo cual da origen a dos ecuaciones

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{3x+4y-2}{5} \quad \text{y} \quad \frac{x-y}{\sqrt{2}} = -\frac{3x+4y-2}{5}.$$

Escribimos cada ecuación en la forma general:

$$\begin{aligned}5\,(x-y) &= \sqrt{2}\,(3x+4y-2)\\ 5\,(x-y)-\sqrt{2}\,(3x+4y-2) &= 0\\ \left(5-3\sqrt{2}\right)x+\left(-5-4\sqrt{2}\right)y+2\sqrt{2} &= 0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}5\,(x-y) &= -\sqrt{2}\,(3x+4y-2)\\ 5\,(x-y)+\sqrt{2}\,(3x+4y-2) &= 0\\ \left(5+3\sqrt{2}\right)x+\left(-5+4\sqrt{2}\right)y-2\sqrt{2} &= 0,\end{aligned}$$

para obtener las dos rectas

$$b_1 : \left(5-3\sqrt{2}\right)x+\left(-5-4\sqrt{2}\right)y+2\sqrt{2}=0$$

y

$$b_2 : \left(5+3\sqrt{2}\right)x+\left(-5+4\sqrt{2}\right)y-2\sqrt{2}=0.$$

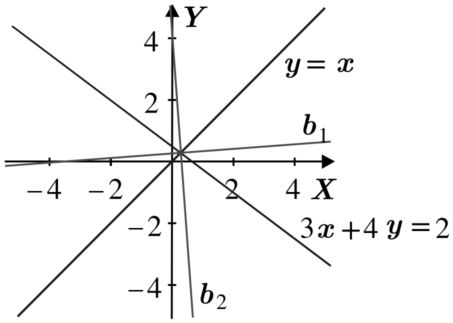


Figura 5-66

Ejercicios

Encuentra la ecuación de cada una de las bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas dadas.

1. $12x - 5y - 8 = 0$ y $6x + 8y - 7 = 0$.

2. $9x + 12y + 21 = 0$ y $3x + 4y + 5 = 0$.

3. $y - 6 = 0$ y $4x - 3y + 6 = 0$.

4. $4x + 2y - 3 = 0$ y $2x - y + 3 = 0$.

5. $7x + 24y - 21 = 0$ y $12x + 9y - 6 = 0$.

6. $8x + 15y + 5 = 0$ y $3x - 4y - 25 = 0$.

Resumen

- Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta $y - y_1 = m\,(x - x_1)$.
- La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P\,(x_1, y_1)$ y $Q\,(x_2, y_2)$ es

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)\,.$$

- Forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación de una recta $y = mx + b$.
- Ecuación de la recta vertical que pasa por el punto (h, k), $x = h$.
- Forma general de la ecuación de una recta $Ax + By + C = 0$.
- Forma simétrica de la ecuación de una recta $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.
- Dos rectas distintas, no verticales, son paralelas si $m_1 = m_2$.
- Dos rectas, no verticales, son perpendiculares si $m_1 m_2 = -1$.
- La distancia de un punto $P\,(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$ es $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- Si $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ son las ecuaciones de ℓ_1 y ℓ_2, respectivamente, las bisectrices de los ángulos determinados por ellas están dadas por $\dfrac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \dfrac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Ejercicios de repaso

En cada caso, encuentra la ecuación de la recta que tiene las propiedades dadas.

1. La pendiente es igual a $-\frac{1}{5}$ y pasa por el punto $P\,(2,6)$.

2. Pasa por los puntos $P\,(-2,3)$ y $Q\,(4,-3)$.

3. La pendiente mide 1 y la ordenada al origen es igual a -2.

4. Paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$ y pasa por el punto $P\,(-5,-1)$.

5. Perpendicular a la recta $2x - 5y = 0$ y pasa por el punto $P\,(2,-1)$.

6. Perpendicular a la recta $x = 6$ y pasa por el punto $P\,(7,-1)$.

7. Paralela a la recta $y = -2$ y pasa por el punto $P\,(3,4)$.

8. Pasa por el punto $P\,(1,-4)$ y forma un ángulo de $135°$ con el eje X.

En cada caso, encuentra lo que se pide.

9. Si dos vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A\,(-3,2)$ y $B\,(1,2)$, encuentra el tercer vértice.

10. Si el extremo de un segmento es el punto $A\,(5,3)$ y el punto medio de dicho segmento es $B\,(6,1)$, ¿cuál es el otro extremo del segmento?

11. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P\,(x,y)$ tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos $A\,(5,3)$ y $B\,(-1,6)$ es igual a 25.

12. Dado el triángulo con vértices $A\,(-3,7)$, $B\,(-7,-5)$ y $C\,(5,1)$, encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta que une los puntos medios de los lados AB y BC y pasa por el punto medio de AC.

13. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos AB y CD, donde $A\,(7,4)$, $B\,(11,4)$, $C\,(-3,-4)$, $D\,(4,2)$.

14. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos AB y CD, donde $A\,(3,7)$, $B\,(1,3)$, $C\,(3,4)$, $D\,(5,8)$.

15. Los lados de un triángulo están sobre las rectas $11x - 3y - 1 = 0$, $7x + 4y + 23 = 0$ y $2x - 3y + 19 = 0$. Encuentra sus vértices y la longitud de sus lados.

16. Dadas las rectas $20x - 21y + 6 = 0$ y $8x - 6y - 9 = 0$, encuentra la ecuación de la recta bisectriz del ángulo agudo.

17. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto donde se cortan las rectas $4x + 9y + 7 = 0$ y $x - 6y - 23 = 0$ y el punto $P\,(2,7)$.

18. Encuentra los valores de las constantes m y b en la ecuación de la recta $y = mx + b$ si la recta pasa por los puntos $P\,(-2,6)$ y $Q\,(3,-4)$.

19. Demuestra que la longitud de cualquier lado del triángulo cuyos vértices son $A\,(5,-2)$, $B\,(2,-2)$ y $C\,(5,-6)$ es menor que la suma de los otros dos lados.

20. Encuentra la ecuación de la recta que es paralela a la recta determinada por los puntos $A\,(-3,-5)$ y $B\,(2,-2)$ y que pasa por el punto $C\,(-3,0)$.

21. Dibuja la región que se encuentra arriba de la recta $2x-9y+5=0$, debajo de la recta $2x-y+10=0$, y debajo de la recta $2x+7y-22=0$. Escribe las desigualdades que describen la región.

22. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto donde se cortan las rectas $x+4y=0$ y $x-3y-7=0$ y que tiene pendiente igual a -6.

23. Encuentra la distancia entre las rectas $5x-3y+6=0$ y $5x-3y-24=0$.

24. Encuentra la distancia entre la recta $5x-8y+16=0$ y el punto $P\,(5,-2)$.

25. Dado el triángulo con vértices $A\,(1,7)$, $B\,(-3,0)$ y $C\,(6,-2)$, encuentra la distancia de cada uno de los vértices al lado opuesto del triángulo.

26. Considera el triángulo con vértices $A\,(0,4)$, $B\,(-2,0)$ y $C\,(2,0)$ y encuentra sus tres ángulos. ¿Es un triángulo isósceles?

27. Prueba que las rectas $2x+y-11=0$ y $4x+2y-3=0$ son paralelas y encuentra la distancia entre ellas.

28. Sean $A\,(-2,6)$, $B\,(1,6)$ y $C\,(-2,3)$ los vértices de un triángulo isósceles. Prueba que el punto $P\,(-1,4)$ está sobre la recta que une a B y a C. Prueba que la suma de las distancias de P a los lados del triángulo es igual a la distancia de C a la recta AB.

29. Repite el problema **28**, pero ahora con $P\,(-3,2)$. ¿Podrías encontrar otro punto para el cual se obtenga el mismo resultado?

30. Encuentra la ecuación de la recta que cumpla que el área del paralelogramo formado por las rectas $x-y-2=0$, $3x-3y-1=0$ y el eje X sea 2. Recuerda que el área del paralelogramo se obtiene multiplicando la base por la altura. La solución no es única.

31. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ y forma en el primer cuadrante, con los ejes coordenados, un triángulo cuya área es 9.

32. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\,(2,-2)$ y es tal que la suma de la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Y, más la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje X, sea igual a 3.

33. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\,(-30,8)$ y es tal que la suma de la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje X sea igual a 8, más la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Y.

34. Considera la recta ℓ dada por la ecuación $7x-3y-63=0$ y el triángulo con vértices $A\,(-2,7)$, $B\,(-5,4)$ y $C\,(4,0)$. Cada lado del triángulo es la diagonal de un paralelogramo cuyos lados son paralelos a la recta ℓ y al eje X.

a) Encuentra los vértices de cada uno de los paralelogramos.
b) Para cada paralelogramo, encuentra la ecuación de la recta que contiene a la otra diagonal.
c) Encuentra las coordenadas del punto en el que se cortan las tres rectas del inciso anterior.

35. La cuota por consumo de agua durante el tercer bimestre de 1999 en la Ciudad de México es de \$25.10 si el consumo fue de 20 m^3, al bimestre, mientras que por un consumo de 30 m^3 también bimestral, la cuota es de \$40.86. Si la cuota se calculara de manera lineal, ¿cuál sería el monto a pagar por un consumo bimestral de 25 m^3?

36. Considera el triángulo cuyos vértices son el origen, $A\,(5,0)$ y $B\,(0,8)$.

a) Encuentra la ecuación de la altura del triángulo que pasa por el origen.
b) Construye un cuadrado en el segundo cuadrante que tenga a B como uno de sus vértices. Llamamos E al vértice opuesto al origen y F al que está sobre el eje X.
c) Construye un cuadrado en el cuarto cuadrante que tenga a A como uno de sus vértices. Llamamos C al vértice opuesto al origen y D al que está sobre el eje Y.
d) Encuentra las coordenadas del punto donde se cortan las rectas EA y BC y prueba que el punto está sobre la altura del inciso **a)**.
e) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por D y por C. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por E y por F. Encuentra las coordenadas del punto donde se cortan estas rectas y prueba que el punto está sobre la altura del inciso **a)**.

37. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\,(1,-3)$ y cuya distancia al origen es igual a 1. **Sugerencia:** Puedes suponer que la ecuación de la recta buscada es de la forma $x+By+C=0$.

Ejercicios con Geolab

Utiliza el Geolab para hacer los siguientes ejercicios.

1. Recta punto-pendiente. Construye el punto $P\,(2,3)$ y el escalar $m=4$. Ahora construye la recta, a, que pasa por P y tiene pendiente m. Utiliza el constructor *Recta Punto-pendiente* del menú de rectas. En la pantalla de datos analíticos oprime el botón de datos cartesianos para ver los valores de los objetos construidos. Observa la ecuación de la recta. Posiblemente no es la que esperabas. Si haces el ejercicio a mano, es probable que obtengas $4x-y-5=0$. Recuerda que si multiplicas la ecuación de una recta por una constante, obtienes la misma recta. De todas las ecuaciones dadas en la forma $Ax+By+C=0$ que representan una recta, Geolab elige aquella en la que $A^2+B^2=1$, es decir, la normalizada. Para normalizar una ecuación hay que dividir todos los coeficientes entre $\sqrt{A^2+B^2}$; en el ejemplo, si dividimos los coeficientes entre $\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$, obtenemos $0.970\,143x-0.242\,536y-1.\,212\,68=0$, que es el resultado que da Geolab.

2. En la pantalla gráfica, arrastra el punto P y observa que la recta lo persigue pero sigue teniendo la misma inclinación.

3. Animación. Generaremos la familia de rectas que pasa por P variando la pendiente de las rectas. Crea una animación que mueva el escalar m entre -10 y 10. En la pantalla de datos analíticos, pon el cursor en el renglón de la recta a y elige que deje traza. En la pantalla gráfica, enciende el botón de traza (T) y ejecuta la animación. Observa un abanico de rectas que pasan por P.

4. Pendiente. En una recta $Ax+By+C=0$ obtenemos la pendiente despejando y y fijándonos en el coeficiente de x; así, $m=-\frac{A}{B}$. Utiliza la construcción del ejercicio 1. Geolab puede utilizar los elementos de un objeto para construir otros. Así, si a es una recta, $a.A$, $a.B$, $a.C$ son los coeficientes A, B y C de la recta. Construye el escalar calculado $n=-a.A/a.B$ y comprueba que $n=m$.

5. Ángulo. Usa la construcción del ejercicio anterior. El ángulo que forma una recta con el eje X es el ángulo cuya tangente es la pendiente de la recta. Usa el constructor *Medida de ángulos* →*Calculado* para construir el *ángulo calculado*, g, poniendo la fórmula *atan*(n). En el menú de herramientas puedes elegir la manera en que quieres que te dé el valor del ángulo: radianes, grados:minutos:segundos, o grados con decimales.

6. Recta por dos puntos. Construye los puntos $P(4,-1)$ y $Q(8,3)$ y la recta r que pasa por ellos. Observa en la pantalla gráfica que los puntos P y Q aparecen en la lista que está a la derecha. Esto es porque fueron puntos construidos directamente. Puedes elegir cualquiera de ellos y arrastrarlo con el ratón. Observa que la recta lo persigue. Ve también cómo cambia su ecuación.

7. Intersección de dos rectas. Utiliza la construcción del ejercicio anterior. Construye otros dos puntos $R\,(2,3)$, $S\,(-2,1)$ y la recta s que pasa por ellos. En el menú de construcción de puntos elige *Intersección de rectas* y construye la intersección, W, de estas rectas; observa el resultado. Ahora cambia los valores de las coordenadas de R y S a $R\,(5,2)$ y $S\,(9,6)$. Observa cómo son las rectas. Si en la pantalla de datos analíticos oprimes el botón *Datos cartesianos*, en el renglón del punto W dice *no existe el objeto*. Ahora, pon los valores $R(5,0)$ y $S(9,4)$; en este caso, las dos rectas coinciden y nuevamente el punto W dice *no existe el objeto*.

8. Rectas perpendiculares y paralelas. Utiliza la construcción del ejercicio 6. Construye un punto arbitrario A. Ahora construye la recta p perpendicular a r que pasa por A. Observa los coeficientes de ambas rectas, ¿qué relación hay entre ellos?

Construye una recta t paralela a r que pase por A. ¿Qué relación hay entre los coeficientes de t y r?

9. Distancia de un punto a una recta. Utiliza la construcción del ejercicio 6. Construye una recta r que pase por P y Q (al construirla, elige los puntos en ese orden). Construye un punto arbitrario A y la distancia d del punto A a la recta r. Observa que $d<0$ cuando A está arriba de la recta, y $d>0$ cuando está debajo. Esto no coincide con lo expuesto en la sección **Distancia de un punto a una recta**. ¿Por qué? Si Geolab construye una recta por los puntos P y Q, la orienta como si fuera un río. Al ir de P a Q, el lado izquierdo es el negativo y el derecho es el positivo. Al calcular la distancia del punto a la recta, no toma el valor absoluto del numerador de la ecuación (5.15) de la página 245, sino que pone un signo de acuerdo con la orientación de la recta.

En la pantalla de datos analíticos selecciona la recta, y en tipo de dibujo (a la derecha de donde se elige el color) selecciona *orientada* → *continua*. Observa que en el extremo de la recta aparece una flecha que muestra la orientación.

Construye otra recta s que pase por Q y P (en ese orden). Observa que la ecuación de s es igual a la de r si multiplicamos todos los coeficientes por -1. La recta s está orientada en el otro sentido que r. Construye la distancia e del punto A a la recta s y observa que ahora s es positiva cuando A está arriba de la recta.

10. Bisectriz de un ángulo. Construye los puntos $P\,(4,-1)$, $Q\,(8,3)$ y $R\,(3,6)$. Construye las rectas r y s de P a Q y de P a R, respectivamente (los puntos en ese orden). Construye un punto arbitrario A y las distancias, $d1$ y $d2$, de A a r y s, respectivamente. Las rectas dividen al plano en cuatro regiones. Mueve el punto A hacia cada una de las regiones y observa que los números $d1$ y $d2$ son positivos en una de ellas, negativos en la región opuesta por el vértice a la anterior, y que tienen signos opuestos en las otras dos regiones.

Construye la bisectriz de las rectas r, s utilizando la opción *Interior* del menú de *Bisectriz.*

Observa que esta bisectriz pasa por las regiones donde $d1$ y $d2$ tienen el mismo signo.

Construye la bisectriz de las rectas r, s utilizando la opción *Exterior* del menú de *Bisectriz.* ¿Por qué regiones pasa?

En ocasiones no deseamos que Geolab tome la decisión de cuál bisectriz dibujar, en ese caso, podemos construir la bisectriz que pase por la región en donde está cierto punto. Construye la bisectriz de las rectas r, s utilizando la opción *En la misma región que un punto*, y utiliza al punto A para determinar la región. Cámbiale de color para distinguirla de las otras bisetrices. Arrastra el punto A hacia las diferentes regiones y observa cómo lo persigue la bisectriz.

Capítulo 6

Los triángulos

El triángulo es una de las figuras planas más estudiadas y usadas. Se conocen muchas propiedades de puntos y rectas que se asocian con los triángulos. En los cursos de geometría, dichas propiedades son probadas con el uso de las técnicas de la geometría sintética; aquí se ejemplifican, con el auxilio de la geometría analítica, algunas, tales como que las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices (de los ángulos interiores) de un triángulo concurren en los puntos llamados ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro, respectivamente.

También se da una fórmula para calcular el área de un triángulo a partir del conocimiento de las coordenadas de sus vértices.

Para todo lo anterior se usan esencialmente los resultados vistos sobre la ecuación de una recta, además de la relación que hay entre las pendientes de dos rectas que son perpendiculares o paralelas entre sí.

Propiedades de los triángulos

En esta sección veremos algunas de las propiedades elementales de los triángulos.

Recordamos que una *altura* de un triángulo es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado *ortocentro*.

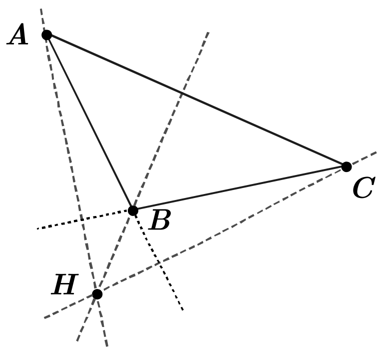


Figura 6-1

Ejemplo

- Encontrar las ecuaciones de las alturas y el ortocentro del triángulo cuyos vértices son $A\,(-5,7)$, $B\,(-3,3)$ y $C\,(2,4)$.

  Solución:

  Calculamos las pendientes de los lados del triángulo:

$$\begin{aligned}\text{Pendiente de } AB\text{:}\quad m_1 &= \frac{3-7}{-3-(-5)} = -2.\\ \text{Pendiente de } BC\text{:}\quad m_2 &= \frac{4-3}{2-(-3)} = \frac{1}{5}.\\ \text{Pendiente de } CA\text{:}\quad m_3 &= \frac{7-4}{-5-2} = -\frac{3}{7}.\end{aligned}$$

  Como la altura es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto, entonces la altura que pasa por C tiene la ecuación

$$\begin{aligned} y-4 &= \frac{1}{2}\,(x-2)\\ y &= \frac{x}{2}+3.\end{aligned}$$

  La altura que pasa por A tiene la ecuación

$$\begin{aligned} y-7 &= -5\,(x-(-5))\\ y &= -5x-18.\end{aligned}$$

  La altura que pasa por B tiene la ecuación

$$\begin{aligned} y - 3 &= \frac{7}{3}(x - (-3)) \\ y &= \frac{7}{3}x + 10. \end{aligned}$$

Para encontrar el ortocentro basta con resolver el sistema formado por dos de las ecuaciones de las alturas; ya que sabemos que las tres alturas se cortan en él, tomemos la primera y la tercera

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{2} + 3 \\ y &= \frac{7}{3}x + 10. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Igualamos las ecuaciones para obtener el valor de x:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 3 &= \frac{7}{3}x + 10 \\ x &= -\frac{42}{11}. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la primera ecuación de (6.1):

$$y = \frac{x}{2} + 3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{42}{11}\right) + 3 = \frac{12}{11}.$$

Así, el ortocentro es $H\left(-\frac{42}{11}, \frac{12}{11}\right)$.
Ahora podemos verificar que la tercera altura, $y = -5x - 18$, pasa por el ortocentro:

$$y = -5\left(-\frac{42}{11}\right) - 18 = \frac{12}{11}.$$

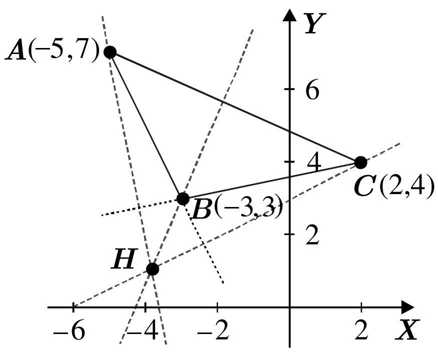


Figura 6-2

En este caso veremos que el ortocentro está fuera del triángulo.

Una *mediana* de un triángulo es la recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado *baricentro* o *punto mediano*. Si se construye un triángulo de lámina y se apoya en el baricentro, el triángulo se mantiene en equilibrio; por eso el baricentro también se llama *centro de gravedad*.

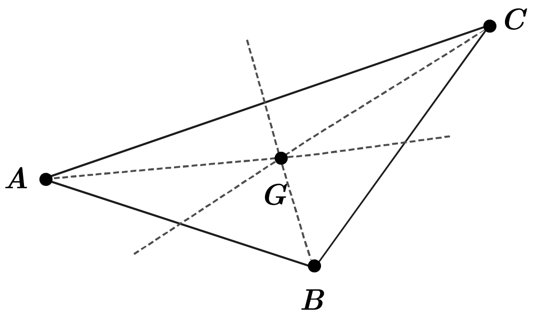


Figura 6-3

Ejemplo

- Encontrar las ecuaciones de las medianas y el baricentro del triángulo cuyos vértices son $A\,(2,6)$, $B\,(-1,3)$ y $C\,(8,1)$.

  Solución:

  Calculamos los puntos medios de los lados del triángulo:

$$\text{Punto medio de } AB\text{:}\quad \left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{6+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

$$\text{Punto medio de } BC\text{:}\quad \left(\frac{-1+8}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 2\right).$$

$$\text{Punto medio de } CA\text{:}\quad \left(\frac{8+2}{2}, \frac{6+1}{2}\right) = \left(5, \frac{7}{2}\right).$$

  Como la mediana es la recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto, entonces la mediana que pasa por $C\,(8,1)$ tiene la ecuación

$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{\frac{9}{2}-1}{\frac{1}{2}-8}\,(x-8) \\ y &= -\frac{7}{15}x+\frac{71}{15}. \end{aligned}$$

  La mediana que pasa por $A\,(2,6)$ tiene la ecuación

$$\begin{aligned} y-6 &= \frac{2-6}{\frac{7}{2}-2}\,(x-2) \\ y &= -\frac{8}{3}x+\frac{34}{3}. \end{aligned}$$

La mediana que pasa por $B\,(-1,3)$ tiene la ecuación

$$\begin{aligned} y-3 &= \frac{\frac{7}{2}-3}{5-(-1)}\,(x-(-1)) \\ y &= \frac{1}{12}x+\frac{37}{12}. \end{aligned}$$

Para encontrar el baricentro, basta con resolver el sistema formado con dos de las ecuaciones anteriores, escogemos las dos últimas:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{8}{3}x+\frac{34}{3} \\ y &= \frac{1}{12}x+\frac{37}{12}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

e igualando,

$$\begin{aligned} -\frac{8}{3}x+\frac{34}{3} &= \frac{1}{12}x+\frac{37}{12} \\ -32x+136 &= x+37 \\ 3 &= x. \end{aligned}$$

Para obtener el valor de y, sustituimos este valor de x en la primera ecuación de (6.2):

$$y=-\frac{8}{3}x+\frac{34}{3}=-\frac{8}{3}\,(3)+\frac{34}{3}=\frac{10}{3}.$$

Por tanto, las coordenadas del baricentro son $G\left(3,\frac{10}{3}\right)$.

Ahora podemos verificar que la otra mediana pasa por el baricentro:

$$y=-\frac{7}{15}x+\frac{71}{15}=-\frac{7}{15}\,(3)+\frac{71}{15}=\frac{10}{3}.$$

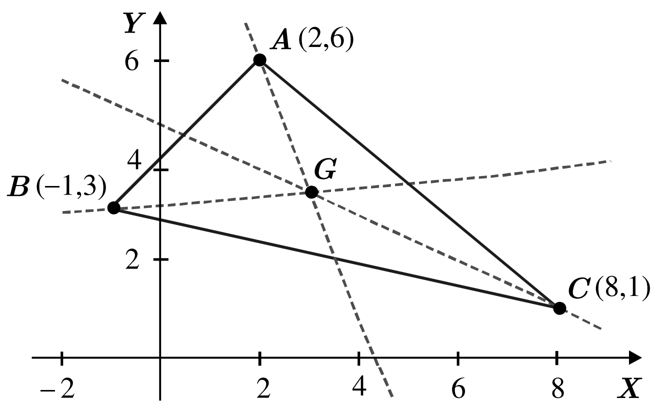


Figura 6-4

Observación:

Las coordenadas (x,y) del baricentro pueden encontrarse calculando los promedios de las abscisas y las ordenadas de los vértices, respectivamente.

En el ejemplo anterior tenemos

$$x = \frac{2-1+8}{3} = 3 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{6+3+1}{3} = \frac{10}{3},$$

que son las coordenadas que obtuvimos previamente.

La *mediatriz* de un segmento es la recta perpendicular a él que pasa por su punto medio y tiene la propiedad de que sus puntos equidistan de los extremos del segmento. Las tres mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto llamado *circuncentro* que, por lo anterior, equidista de los tres vértices del triángulo y, por tanto, es el centro del círculo que pasa por los vértices. Dicho círculo se llama *círculo circunscrito* o *circuncírculo*.

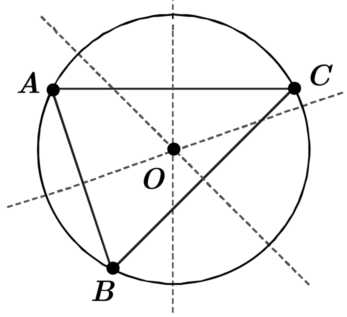


Figura 6-5

Ejemplo

- Encontrar las ecuaciones de las mediatrices y el circuncentro del triángulo cuyos vértices son $A\,(2,-1)$, $B\,(3,-4)$ y $C\,(6,-1)$.

  Solución:

  Calculamos los puntos medios de los lados del triángulo:

$$\text{Punto medio de } AB\text{:} \quad \left(\frac{2+3}{2}, \frac{-1+(-4)}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right).$$

$$\text{Punto medio de } BC\text{:} \quad \left(\frac{3+6}{2}, \frac{-4+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}\right).$$

$$\text{Punto medio de } CA\text{:} \quad \left(\frac{2+6}{2}, \frac{-1+(-1)}{2}\right) = (4,-1)\,.$$

  Calculamos las pendientes de los lados del triángulo:

$$\text{Pendiente de } AB\text{:} \quad m_1 = \frac{-4-(-1)}{3-2} = -3.$$

$$\text{Pendiente de } BC\text{:} \quad m_2 = \frac{-1-(-4)}{6-3} = 1.$$

$$\text{Pendiente de } CA\text{:} \quad m_3 = \frac{-1-(-1)}{6-2} = 0.$$

  Como la mediatriz es la recta que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular a él, entonces la mediatriz del lado AB es

$$\begin{aligned} y-\left(-\frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right) \\ y &= \frac{1}{3}x-\frac{10}{3}. \end{aligned}$$

La mediatriz del lado BC es

$$\begin{aligned} y-\left(-\frac{5}{2}\right) &= -1\left(x-\frac{9}{2}\right) \\ y &= -x+2. \end{aligned}$$

La mediatriz del lado CA es

$$x=4.$$

Para encontrar el circuncentro, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de dos de las mediatrices; ya que sabemos que las tres se cortan en el circuncentro, escogemos la segunda y la tercera:

$$\begin{aligned} y &= -x+2 \\ x &= 4. \end{aligned} \tag{6.3}$$

De donde

$$y=-4+2=-2.$$

Entonces las coordenadas del circuncentro son $O\,(4,-2)$.

Ahora podemos verificar que la tercera mediatriz pasa por el punto $O\,(4,-2)$, es decir,

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}=\frac{1}{3}(4)-\frac{10}{3}=-2.$$

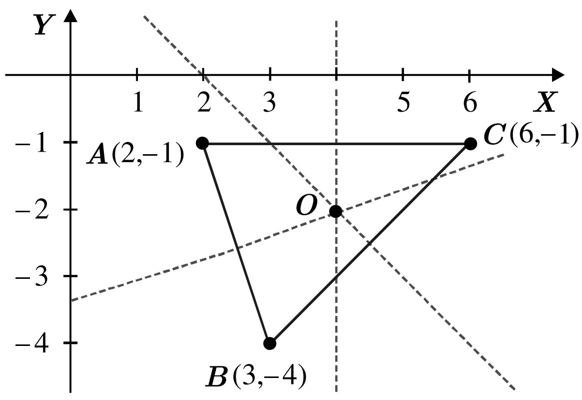


Figura 6-6

La *bisectriz* de un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y divide a éste en dos ángulos iguales. Sus puntos equidistan de los dos lados del ángulo. Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un punto llamado *incentro* que, por lo anterior, equidista de los tres lados del triángulo y es el centro del *círculo inscrito* en el triángulo. Dicho círculo también se llama *incírculo*.

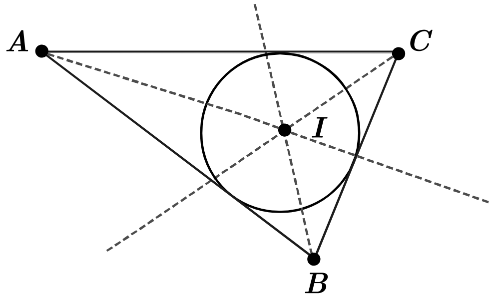


Figura 6-7

Ejemplo

- Encontrar las ecuaciones de las bisectrices y las coordenadas del incentro del triángulo cuyos vértices son $A\left(-\frac{11}{3},\frac{3}{2}\right)$, $B\left(\frac{5}{21},-\frac{10}{7}\right)$, $C\left(\frac{35}{24},\frac{3}{2}\right)$.

  Solución:

  1. Encontramos las ecuaciones de los lados del triángulo, en su forma general.

  Lado AB:

$$\begin{aligned} y-\frac{3}{2} &= \frac{-\frac{10}{7}-\frac{3}{2}}{\frac{5}{21}-\left(-\frac{11}{3}\right)}\left(x-\left(-\frac{11}{3}\right)\right) \\ 3x+4y+5 &= 0. \end{aligned}$$

  Lado BC:

$$\begin{aligned} y-\frac{3}{2} &= \frac{-\frac{10}{7}-\frac{3}{2}}{\frac{5}{21}-\frac{35}{24}}\left(x-\frac{35}{24}\right) \\ 12x-5y-10 &= 0. \end{aligned}$$

  Lado CA:

$$\begin{aligned} y-\frac{3}{2} &= \frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{35}{24}-\left(-\frac{11}{3}\right)}\left(x-\frac{35}{24}\right) \\ 2y-3 &= 0. \end{aligned}$$

  2. Una vez que cada una de las tres ecuaciones está en su forma general $Ax+By+C=0$, realizamos los siguientes dos pasos:

  – Evaluamos $Ax+By+C$ en el vértice que no está en el lado correspondiente y comparamos el valor obtenido con 0.

$$\text{Lado } AB\text{, evaluamos en } C\text{:}\quad 3\left(\frac{35}{24}\right)+4\left(\frac{3}{2}\right)+5=\frac{123}{8}>0.$$

$$\text{Lado } BC\text{, evaluamos en } A\text{:}\quad 12\left(-\frac{11}{3}\right)-5\left(\frac{3}{2}\right)-10=-\frac{123}{2}<0.$$

$$\text{Lado } AC\text{, evaluamos en } B\text{:}\quad 2\left(-\frac{10}{7}\right)-3=-\frac{41}{7}<0.$$

Para cada evaluación que sea negativa cambiamos $Ax + By + C = 0$ por $-Ax-By-C = 0$, en otro caso dejamos la misma ecuación. En este ejemplo cambiamos la ecuaciones segunda y tercera:

$$\begin{aligned}
&\text{Lado } AB\text{:} \quad 3x + 4y + 1 = 0.\\
&\text{Lado } BC\text{:} \quad -12x + 5y + 10 = 0.\\
&\text{Lado } AC\text{:} \quad -y + \frac{3}{2} = 0.
\end{aligned}$$

– Dividimos cada ecuación entre $\sqrt{A^2 + B^2}$, que en este caso toma los valores

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \qquad \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = 2,$$

respectivamente,

$$\begin{aligned}
&\text{Lado } AB\text{:} \quad \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1.\\
&\text{Lado } BC\text{:} \quad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{10}{13} = 0.\\
&\text{Lado } AC\text{:} \quad y - \frac{3}{2} = 0.
\end{aligned}$$

3. Para encontrar la bisectriz de cada ángulo, simplemente igualamos las ecuaciones que aparecen en la última tabla de los lados que lo forman y simplificamos.

Bisectriz del ángulo A. Igualamos las ecuaciones de los lados AB y AC y simplificamos:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1 &= -y + \frac{3}{2}\\
6x + 18y - 5 &= 0.
\end{aligned}$$

Bisectriz del ángulo B. Igualamos las ecuaciones de los lados AB y BC y simplificamos:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1 &= -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + \frac{10}{13},\\
33x + 9y + 5 &= 0.
\end{aligned}$$

Bisectriz del ángulo C. Igualamos las ecuaciones de los lados AC y BC y simplificamos:

$$\begin{aligned}
-y + \frac{3}{2} &= -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + \frac{10}{13},\\
24x - 36y + 19 &= 0.
\end{aligned}$$

Para encontrar el incentro, resolvemos simultáneamente dos de estas ecuaciones, ya que sabemos que las tres se cortan en un punto; por ejemplo, tomamos la primera y la segunda:

$$\begin{aligned}
6x + 18y - 5 &= 0 \qquad (6.4)\\
33x + 9y + 5 &= 0.
\end{aligned}$$

Para despejar x, multiplicamos la segunda ecuación de (6.4) por -2 y la sumamos a la primera:

$$\begin{aligned} -60x - 15 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación de (6.4), obtenemos el valor de y.

$$y = \frac{13}{36}.$$

Sustituimos $\left(-\frac{1}{4}, \frac{13}{36}\right)$ en la tercera ecuación para comprobar que el punto se encuentra en ella.

$$24\left(-\frac{1}{4}\right) - 36\left(\frac{13}{36}\right) + 19 = -6 - 13 + 19 = 0.$$

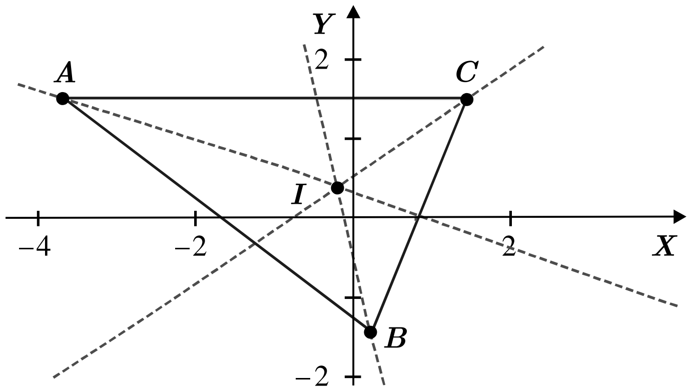


Figura 6-8

Por tanto, el incentro es el punto $I\left(-\frac{1}{4}, \frac{13}{36}\right)$.

Observación:
La siguiente propiedad es sorprendente.
El circuncentro, el baricentro y el ortocentro están alineados. La recta que los une se llama *recta de Euler*.
Ejemplo

- Encontrar la recta que contiene al baricentro, al circuncentro y al ortocentro del triángulo cuyos vértices son $A(4, -3)$, $B(-4, 11)$, $C(-6, 1)$.

  Solución:

  1. Lados del triángulo.

  a. Lado AB: La ecuación de la recta que une a $A(4, -3)$ y $B(-4, 11)$ es

$$y - (-3) = \frac{11 - (-3)}{-4 - 4}\,(x - 4)\,,$$

de donde

$$y = -\frac{7}{4}x + 4.$$

Conviene verificar que la ecuación obtenida es correcta sustituyendo las coordenadas de los puntos dados para determinarla:

$$y = -\frac{7}{4}\,(4) + 4 = -3 \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{7}{4}\,(-4) + 4 = 11.$$

Se recomienda al alumno que verifique las ecuaciones que obtengamos a continuación.

b. Lado AC: La ecuación de la recta que une a $A(4,-3)$ y $C(-6,1)$ es

$$y - (-3) = \frac{1 - (-3)}{-6 - 4}(x - 4),$$

de donde

$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}.$$

c. Lado BC: La ecuación de la recta que une a $B(-4,11)$ y $C(-6,1)$ es

$$y - 11 = \frac{1 - 11}{-6 - (-4)}(x - (-4)),$$

de donde

$$y = 5x + 31.$$

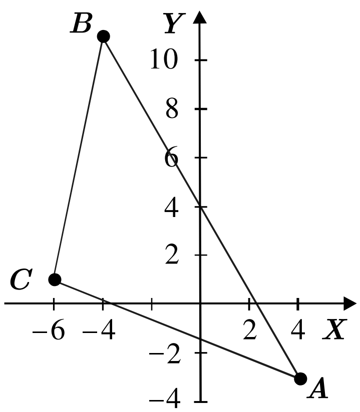


Figura 6-9

2. Puntos medios de los lados del triángulo.

a. Punto medio del lado AB:

$$M\left(\frac{4 + (-4)}{2}, \frac{-3 + 11}{2}\right) = M(0,4).$$

b. Punto medio del lado BC:

$$N\left(\frac{-4+(-6)}{2},\frac{11+1}{2}\right)=N(-5,6).$$

c. Punto medio del lado AC:

$$P\left(\frac{4+(-6)}{2},\frac{-3+1}{2}\right)=P(-1,-1).$$

3. Medianas del triángulo.

a. Mediana AN:

$$y-(-3)=\frac{6-(-3)}{-5-4}(x-4),$$

así, $y=-x+1$.

b. Mediana BP:

$$y-11=\frac{-1-11}{-1-(-4)}(x-(-4)),$$

así, $y=-4x-5$.

c. Mediana CM:

$$y-1=\frac{4-1}{0-(-6)}(x-(-6)),$$

así, $y=\frac{1}{2}x+4$.

4. Baricentro del triángulo ABC.

El baricentro es la intersección de las medianas. Para encontrarlo, resolvemos simultáneamente dos de las ecuaciones de las medianas ((a) y (b)):

$$\begin{aligned} y &= -x+1 \\ y &= -4x-5, \end{aligned} \tag{6.5}$$

de donde

$$\begin{aligned} -x+1 &= -4x-5 \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la primera ecuación de (6.5) para obtener el valor de y:

$$y=-(-2)+1=3.$$

Obtenemos $G(-2,3)$. Podemos comprobar que el punto G pertenece a la tercera mediana:

$$y=\frac{1}{2}(-2)+4=3.$$

El baricentro es $G(-2,3)$.

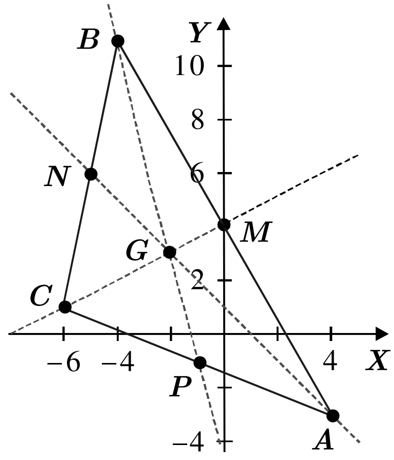


Figura 6-10

5. Mediatrices del triángulo.

a. Mediatriz del lado AC:
Buscamos la recta que pasa por el punto medio de AC y es perpendicular a AC. La recta AC tiene pendiente igual a $-\frac{2}{5}$, así que la mediatriz tiene pendiente igual a $\frac{5}{2}$ y pasa por $P(-1,-1)$:

$$\begin{aligned} y-(-1) &= \frac{5}{2}(x-(-1)) \\ y &= \frac{5}{2}x+\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

b. Mediatriz del lado BC:
La recta BC tiene pendiente igual a 5 y el punto medio de BC es $N(-5,6)$, de modo que la mediatriz de BC tiene pendiente igual a $-\frac{1}{5}$ y pasa por N:

$$\begin{aligned} y-6 &= -\frac{1}{5}(x-(-5)) \\ y &= -\frac{1}{5}x+5. \end{aligned}$$

c. Mediatriz del lado AB:
La recta AB tiene pendiente igual a $-\frac{7}{4}$ y el punto medio de AB es $M(0,4)$, de modo que la mediatriz de AB tiene pendiente igual a $\frac{4}{7}$ y pasa por M:

$$\begin{aligned} y-4 &= \frac{4}{7}(x-0) \\ y &= \frac{4}{7}x+4. \end{aligned}$$

6. Circuncentro del triángulo ABC.

El circuncentro es la intersección de las mediatrices. Para encontrarlo, resolvemos simultáneamente dos de las ecuaciones de las mediatrices. ((a) y (b)):

$$\begin{aligned} y &= \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \\ y &= -\frac{1}{5}x + 5, \end{aligned} \tag{6.6}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} &= -\frac{1}{5}x + 5 \\ \frac{27}{10}x &= \frac{7}{2} \\ x &= \frac{35}{27}. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la segunda ecuación de (6.6) para obtener el valor de y:

$$y = -\frac{1}{5}\left(\frac{35}{27}\right) + 5 = \frac{128}{27},$$

obteniendo el punto $O\left(\frac{35}{27}, \frac{128}{27}\right)$. Comprobamos que se satisface la tercera ecuación:

$$y = \frac{4}{7}\left(\frac{35}{27}\right) + 4 = \frac{128}{27}.$$

Por tanto, el circuncentro es $O\left(\frac{35}{27}, \frac{128}{27}\right)$.

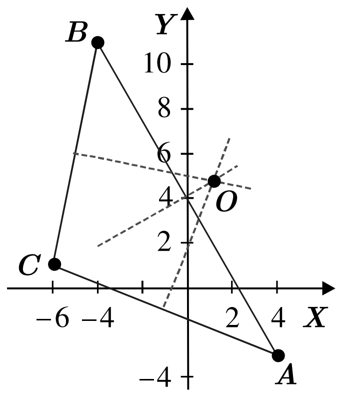


Figura 6-11

7. Alturas del triángulo.

a. Altura perpendicular al lado AC:
Buscamos la recta que pasa por el vértice B y es perpendicular a AC.
La recta AC tiene pendiente igual a $-\frac{2}{5}$, así que la altura tiene pendiente igual a $\frac{5}{2}$ y pasa por $B(-4, 11)$:

$$y - 11 = \frac{5}{2}(x - (-4)),$$

así,

$$y = \frac{5}{2}x + 21.$$

b. Altura perpendicular al lado BC:
La recta BC tiene pendiente igual a 5, así que la altura perpendicular a BC tiene pendiente igual a $-\frac{1}{5}$ y pasa por $A(4,-3)$:

$$y-(-3)=-\frac{1}{5}(x-4),$$

así,

$$y=-\frac{1}{5}x-\frac{11}{5}.$$

c. Altura perpendicular al lado AB:
La recta AB tiene pendiente igual a $-\frac{7}{4}$, así que la altura perpendicular a AB tiene pendiente igual a $\frac{4}{7}$ y pasa por $C(-6,1)$:

$$y-1=\frac{4}{7}\left(x-(-6)\right),$$

así,

$$y=\frac{4}{7}x+\frac{31}{7}.$$

8. Ortocentro del triángulo ABC.
El ortocentro es la intersección de las alturas. Para encontrarlo, resolvemos simultáneamente dos de las ecuaciones obtenidas ((a) y (b)):

$$\begin{aligned} y &= \frac{5}{2}x+21 \\ y &= -\frac{1}{5}x-\frac{11}{5}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Igualándolas, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}x+21 &= -\frac{1}{5}x-\frac{11}{5} \\ \frac{27}{10}x &= -\frac{116}{5} \\ x &= -\frac{232}{27}. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la segunda ecuación de (6.7) para obtener el valor de y:

$$y=-\frac{1}{5}\left(-\frac{232}{27}\right)-\frac{11}{5}=-\frac{13}{27}.$$

El punto de intersección es $H\left(-\frac{232}{27},-\frac{13}{27}\right)$.
Comprobamos que está en la tercera altura sustituyendo en la ecuación de ésta:

$$y=\frac{4}{7}\left(-\frac{232}{27}\right)+\frac{31}{7}=-\frac{13}{27}.$$

El ortocentro es $H\left(-\frac{232}{27}, -\frac{13}{27}\right)$.

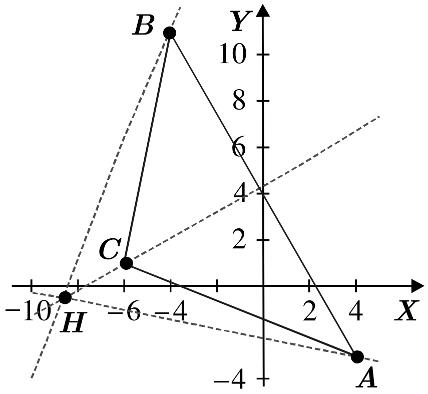


Figura 6-12

9. Recta que contiene al baricentro, al circuncentro y al ortocentro.
Encontramos la ecuación de la recta que une al baricentro $G(-2, 3)$ y al circuncentro $O\left(\frac{35}{27}, \frac{128}{27}\right)$.

$$y - 3 = \frac{3 - \frac{128}{27}}{-2 - \frac{35}{27}}(x - (-2)),$$

es decir,

$$y = \frac{47}{89}x + \frac{361}{89}.$$

Para verificar que el ortocentro está alineado con el baricentro y el circuncentro, verificamos que las coordenadas del ortocentro $H\left(-\frac{232}{27}, -\frac{13}{27}\right)$ satisfacen la ecuación de la recta obtenida:

$$-\frac{13}{27} = \frac{47}{89}\left(-\frac{232}{27}\right) + \frac{361}{89}.$$

Por tanto, el baricentro, el circuncentro y el ortocentro están alineados, y la ecuación de la recta que los contiene es

$$47x - 89y + 361 = 0.$$

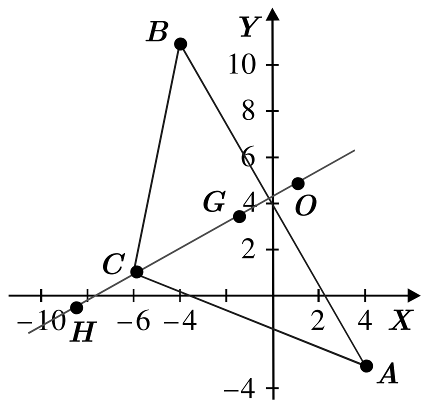


Figura 6-13

Otra fórmula para calcular el área de un triángulo

Desde la escuela primaria conocimos la fórmula

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \ \times \ \text{altura}}{2}$$

para calcular el área de un triángulo. Usando trigonometría se pueden deducir las fórmulas siguientes.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A, \tag{6.8}$$

donde b y c son dos lados del triángulo y A es el ángulo entre ellos; y conociendo los tres lados:

$$\text{Área} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}, \tag{6.9}$$

donde s es la mitad del perímetro del triángulo.

Ahora veremos otra fórmula para el área del triángulo en la que aplicaremos la geometría analítica.

Área de un triángulo conociendo sus vértices

Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son $A(-1,-2)$, $B(2,2)$, $C(1,4)$.

Solución:

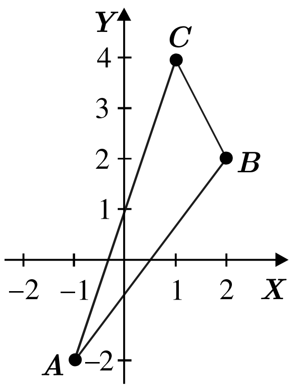


Figura 6-14

Para calcular el área del triángulo ABC utilizamos la fórmula

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3\right],$$

donde $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$ y $C\,(x_3, y_3)$ están enumerados en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Sustituyendo, tenemos

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left[(-1)\,2 - 2\,(-2) + 2\,(4) - 1\,(2) + 1\,(-2) - (-1)\,4\right] = \frac{10}{2} = 5u^2.$$

Podemos comprobar que el resultado es correcto usando la fórmula

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}.$$

Para obtener una altura del triángulo, calculamos la distancia del punto C a la recta que pasa por A y B. La ecuación de la recta es

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{2-(-2)}{2-(-1)}(x-2) \\ 4x - 3y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

La forma normalizada de esta recta es

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5} = 0, \tag{6.10}$$

de donde la distancia del punto C a la recta (6.10) es

$$-\frac{4}{5}(1) + \frac{3}{5}(4) + \frac{2}{5} = 2.$$

Así, la altura mide 2 y la longitud del lado AB es

$$d(A,B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-2)^2} = 5,$$

de tal manera que

$$\text{Área} = \frac{5 \times 2}{2} = 5u^2.$$

Supongamos que conocemos los vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ de un triángulo y que éstos están enumerados en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Llamemos a, b y c a los lados opuestos a estos vértices, respectivamente. Si consideramos al lado b como la base del triángulo y llamamos h a la altura sobre ese lado, el área del triángulo es

$$\text{Área} = \frac{bh}{2}. \tag{6.11}$$

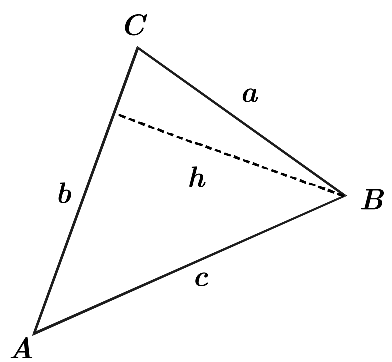


Figura 6-15

El valor de b es la distancia del punto A al punto C:

$$b = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}.$$

El valor de h es la distancia del vértice B a la recta que pasa por A y C cuya ecuación es

$$y - y_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x - x_1);$$

dicha ecuación, escrita en la forma general, es

$$(y_3 - y_1)x - (x_3 - x_1)y + (x_3y_1 - x_1y_3) = 0.$$

Sustituyendo esta ecuación y las coordenadas de B en la fórmula de la distancia de un punto a una recta (5.15), obtenemos

$$h = \frac{(y_3 - y_1)x_2 - (x_3 - x_1)y_2 + (x_3y_1 - x_1y_3)}{\pm\sqrt{(y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2}}.$$

Tomamos el signo positivo del denominador, porque B está en el lado positivo de la recta que pasa por AC; además, dicho denominador es igual a b, así que sustituyendo en (6.11), tenemos que el área del triángulo es

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left[(y_3 - y_1)x_2 - (x_3 - x_1)y_2 + (x_3y_1 - x_1y_3)\right].$$

Efectuando las operaciones dentro de los corchetes y acomodando los términos, obtenemos

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3\right]. \tag{6.12}$$

Para recordar esta fórmula, observa que multiplicas la primera coordenada del punto A por la segunda coordenada de B y restas el producto de la segunda coordenada de B por la primera coordenada de A; luego haces lo mismo con la pareja de puntos B y C; y finalmente repites el procedimiento con los puntos C y A.

Con el uso de determinantes, podemos escribir la fórmula anterior de la siguiente manera:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Recuerda que los vértices del triángulo deben recorrerse en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Para verificar la afirmación, calculamos el determinante desarrollando por menores con respecto a la tercera columna:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\
&= x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1.
\end{aligned}$$

Ejemplo

- Comprobar las fórmulas (6.8), (6.9), (6.11) y (6.12) para el área de un triángulo con el triángulo cuyos vértices son $A(3,1)$, $B(6,1)$, $C(3,5)$.

  Solución:

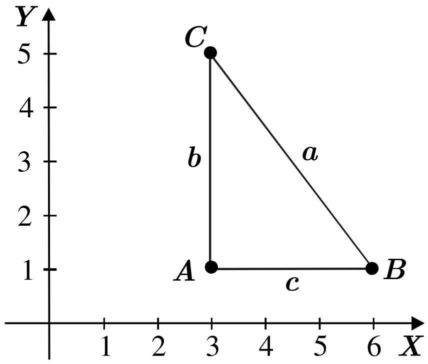


Figura 6-16

a) En la figura 6-16, vemos que la base mide 3 y la altura mide 4; entonces, usando la fórmula (6.11),

$$\text{Área } = \frac{3 \times 4}{2} = 6u^2.$$

b) Los lados c y b forman un ángulo de 90°; entonces, por la fórmula (6.8),

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \operatorname{sen} 90^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 1 = 6u^2.$$

Si tomamos otro par de lados, por ejemplo los lados a y c, el lado a es la hipotenusa, así que, por el teorema de Pitágoras,

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$$

y aunque no conocemos la medida del ángulo B, sí podemos calcular su seno dividiendo el cateto opuesto entre la hipotenusa. De modo que el área del triángulo es

$$\text{Área} = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \frac{4}{5} = 6u^2.$$

c) Como $a = 5$, $b = 4$ y $c = 3$, la mitad del perímetro es

$$s = \frac{5+4+3}{2} = 6,$$

así que, por la fórmula (6.9),

$$\text{Área} = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)} = \sqrt{36} = 6u^2.$$

d) Finalmente, utilizando la fórmula (6.12), obtenemos

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left[3\,(1) - 6\,(1) + 6\,(5) - 3\,(1) + 3\,(1) - 3\,(5)\right] = \frac{12}{2} = 6u^2.$$

En cada caso particular, dependiendo de los datos que tengamos o que podamos medir, debemos aplicar la fórmula más adecuada.

Área de cualquier polígono

La fórmula (6.12) puede generalizarse a cualquier polígono de la siguiente manera.

Si (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) son los vértices de un polígono, tomados en contra del movimiento de las manecillas del reloj, entonces su área es

$$\text{Área } = \frac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_ny_1 - x_1y_n)\right]. \tag{6.13}$$

No demostraremos esta fórmula, pero veremos un ejemplo en el que podamos calcular el área por otro método.

Ejemplo

- Calcular el área del paralelogramo cuyos vértices son $A(-1,-1)$, $B(4,-1)$, $C(5,2)$ y $D(0,2)$.

  Solución:

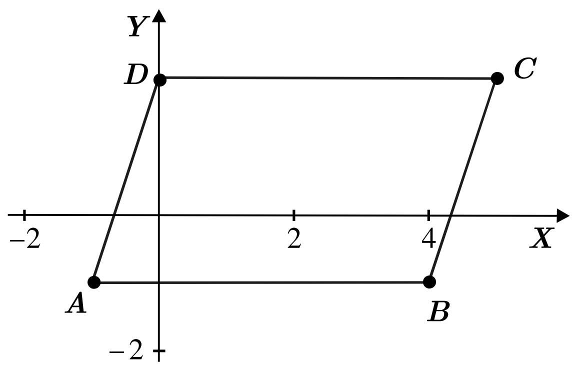


Figura 6-17

Como podemos deducir de la figura 6-17, la base del paralelogramo mide 5 unidades y la altura mide 3 unidades, así que su área es de $15u^2$.

Si aplicamos la fórmula (6.13) obtenemos

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \left[\frac{1}{2}\left((-1)(-1) - 4(-1)\right) + \left(4\,(2) - 5(-1)\right) + \left(5\,(2) - 0\,(2)\right) + \left(0(-1) - (-1)2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[5 + 13 + 10 + 2\right] = \frac{1}{2} \times 30 = 15u^2,\end{aligned}$$

lo que coincide con el resultado conocido.

Ejercicios

1. Los lados de un triángulo están sobre las rectas $2x + 7y - 17 = 0$, $4x - 3y + 17 = 0$ y $x - 5y = 0$. Encuentra los vértices del triángulo.

Dado el triángulo con vértices A, B y C, prueba que la recta que pasa por los puntos medios de los lados AB y AC es paralela al lado BC.

2. $A(-3,2)$, $B(2,5)$, $C(-4,6)$.

3. $A(0,0)$, $B(-2,-2)$, $C(3,-4)$.

En cada caso, encuentra el baricentro, el circuncentro y el ortocentro del triángulo cuyos vértices son los puntos dados, así como la recta de Euler.

4. $A(2,3)$, $B(-5,-1)$, $C(5,-2)$.

5. $A(1,-1)$, $B(5,-1)$, $C(3,5)$.

6. $A(0,0)$, $B(11,0)$,$C(12,10)$.

7. $A(0,0)$, $B(-4,-4)$, $C(-7,-1)$.

Encuentra el área del triángulo utilizando la fórmula conveniente.

8. Dos de los lados del triángulo miden 3 y 4, respectivamente, y el ángulo entre ellos mide $30°$.

9. Los lados del triángulo miden 8, 6 y 10.

10. Los vértices del triángulo tienen coordenadas $A(4,1)$, $B(-2,4)$, $C(6,3)$.

11. Dos de los lados del triángulo miden 6 y 5, respectivamente, y el ángulo entre ellos mide $45°$.

12. Los lados del triángulo miden 5, 12 y 13.

13. Los vértices del triángulo tienen coordenadas $A(-5,-3)$, $B(2,5)$, $C(7,-4)$.

14. Los lados del triángulo miden 24, 10 y 26.

15. Los vértices del triángulo tienen coordenadas $A(1,-1)$, $B(5,-1)$, $C(3,5)$.

Encuentra el área del polígono cuyos vértices son:

16. $A(3,5)$, $B(-1,4)$, $C(-3,1)$, $D(8,1)$.

17. $A(-2,4)$, $B(-6,-1)$, $C(-3,-5)$, $D(4,1)$, $E(2,4)$.

18. $A(-3,-3)$, $B(-3,3)$, $C(3,3)$, $D(3,-3)$.

19. $A(-1,1)$, $B(-4,-3)$, $C(0,-5)$, $D(7,-4)$, $E(6,0)$, $F(4,2)$.

20. Dado el triángulo con vértices $A\,(0,6)$, $B\,(2,0)$ y $C\,(5,4)$, encuentra las ecuaciones de las medianas.

21. Los lados de un triángulo están en las rectas $4x - 3y + 15 = 0$, $6x + 8y + 40 = 0$, $24x + 7y - 56 = 0$. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo y las coordenadas del incentro.

22. Los lados de un triángulo están en las rectas $5x - 12y + 48 = 0$, $12x + 9y - 15 = 0$, $6x - 8y - 48 = 0$. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo y las coordenadas del incentro.

23. Dado el triángulo con vértices $A\,(0,1)$, $B\left(-\frac{7}{20},-\frac{9}{5}\right)$ y $C\left(\frac{28}{11},-\frac{38}{11}\right)$, encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo y las coordenadas del incentro.

24. Calcula el área del triángulo en cuyos lados están las rectas $x - y + 7 = 0$, $4x + y + 3 = 0$ y $x + 4y - 3 = 0$.

25. Encuentra la ecuación de la recta con pendiente igual a 2 que pasa por el baricentro del triángulo con vértices $A\,(1,6)$, $B\,(3,2)$ y $C\,(-5,4)$.

26. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\,(5,6)$ y el baricentro del triángulo con vértices $A\,(4,-3)$, $B\,(-4,11)$ y $C\,(-6,1)$.

27. Dos vértices de un triángulo equilátero son $A\,(8,2)$ y $B\,(2,8)$. Encuentra el tercer vértice y las ecuaciones de los tres lados.

Ejercicios con Geolab

Utiliza el Geolab para hacer los siguientes ejercicios.

1. Ortocentro. Construye un triángulo con las siguientes características:

Construye tres puntos directos A, B, C.

Construye el segmento c que une a los puntos A y B. De esta manera, el lado c queda opuesto al vértice C.

De la igual manera construye los lados a y b.

Para construir las alturas utiliza la construcción *Recta perpendicular*. Llama ha a la altura que va desde el vértice A (recta perpendicular a la recta a desde el punto A), similarmente construye hb y hc.

Construye el ortocentro H como la intersección de dos de estas alturas. Observa que la tercer altura pasa por el ortocentro.

Cambia de color las alturas para distinguirlas de los lados, también cámbialas de nivel, ponlas en el nivel 3. De esta manera, puedes ocultarlas apagando dicho nivel.

Mueve los vértices para observar cómo se comporta el ortocentro. ¿Puede salirse del triángulo?

¿Cuál es el ortocentro del triángulo A, B, H?

Da a las coordenadas de los vértices los valores $A\,(-5,7)$, $B\,(-3,3)$ y $C\,(2,4)$, y compara las coordenadas de H y las ecuaciones de las rectas con las del ejemplo de la página 258.

2. Circuncentro. Construye un triángulo como el del ejercicio anterior o usa el mismo.

Construye los puntos medios de los lados del triángulo: M es el punto medio del segmento AB, N el punto medio de BC, y L el punto medio de CA.

Construye las mediatrices de los lados usando la construcción de *Recta perpendicular*. Llámalas p, q, u.

Cambia de color las mediatrices para distinguirlas de las alturas y de los lados del triángulo; también cámbialas de nivel, ponlas en el nivel 4. De esta manera, puedes ocultarlas apagando dicho nivel.

Construye el circuncentro del triángulo intersectando dos de las mediatrices. Llámalo O. Observa que la tercera mediatriz pasa por él.

Construye las distancias da, db y dc del circuncentro a los vértices A, B, C, respectivamente. Utiliza el constructor *Distancia entre puntos* del menú de escalares. Comprueba que son iguales. Esto implica que un círculo con centro en O que pase por uno de los vértices también pasará por los otros. Dicho círculo es el circuncírculo del triángulo.

Mueve los vértices para observar cómo se comporta el circuncentro. ¿Puede salirse del triángulo?

Da a las coordenadas de los vértices los valores $A\,(2,-1)$, $B\,(3,-4)$ y $C\,(6,-1)$ y compara los resultados con el ejemplo de la página 262.

3. **Baricentro**. Utiliza la construcción del ejercicio anterior. Construye las medianas del triángulo. Utiliza el constructor *Segmento por dos puntos*. Llama n a la mediana desde N, m a la mediana desde M, y l a la mediana desde L.

   Cámbialas de color para distinguirlas de las mediatrices y las alturas. También cámbialas de nivel, ponlas en el nivel 5. De esta manera, puedes ocultarlas apagando dicho nivel.

   Construye el baricentro, G, del triángulo intersectando dos de las medianas. Llámalo G. Observa que la tercera mediana pasa por él.

   Construye los triángulos AMC y MBC usando el constructor de polígonos (3 vértices).

   Encuentra el área de los triángulos AMC y MBC. Utiliza el constructor *Area de un polígono*. Comprueba que son iguales, es decir, la mediana m divide al triángulo en dos triángulos con la misma área. Sucede algo semejante con las medianas n y l. Esta es la razón por la que la intersección de las medianas es el centro de gravedad del triángulo.

4. **Recta de Euler**. Utiliza las construcciones de los ejercicios anteriores. Construye la recta que pasa por H y G y comprueba que pasa por O. Esta recta se llama recta de Euler.

   Mueve el triángulo y observa las posiciones de H, G y O. ¿Puedes lograr que los tres coincidan? ¿Puedes lograr que dos coincidan y uno no? ¿Puedes lograr que cambien de orden?

   Construye la distancia $d1$ de H a G, y la distancia $d2$ de G a O. ¿Qué relación hay entre ellas?

   Con el constructor *escalares* $\rightarrow$ *calculado*, construye el escalar r poniendo como fórmula $d1/d2$ para comprobar tu conjetura.

   Da a las coordenadas de los vértices los valores $A(4,-3)$, $B(-4,11)$, $C(-6,1)$ y compara todos los resultados con el ejemplo de la página 266.

Capítulo 7

Las cónicas

En este capítulo se introducen las curvas que constituyen una de las partes centrales de los temas que presentamos en este libro: las cónicas. Éstas han sido profusamente tratadas por los matemáticos. Hay trabajos sobre ellas que se remontan a la época de los famosos geómetras griegos de la antigüedad. Sus propiedades son muchas, varias son aprovechadas en la ingeniería, la arquitectura, y en la elaboración de instrumentos ópticos y acústicos.

En esta introducción, las cónicas se presentan al inicio como cortes planos de un cono de dos mantos y, en ciertos casos, de cilindros. Posteriormente, de forma dinámica, las relacionamos con ecuaciones de segundo grado al reconocerlas como lugares geométricos de puntos que satisfacen condiciones relativas a distancias entre puntos o de puntos a rectas. Para establecer esta conexión que las trae al ámbito de la geometría analítica, dedicamos una sección en donde, con argumentos geométricos, establecemos ecuaciones que relacionan distancias.

Es conveniente recordar que todas las tangentes de un punto P a una esfera dada tienen la misma longitud; como también sucede en el caso del círculo. También utilizamos otros argumentos geométricos intuitivamente claros, por ejemplo: una esfera inscrita en un cono (o cilindro) circular recto es tangente a éste a lo largo de un círculo, y el plano que contiene a dicho círculo es paralelo a la base del cono (o cilindro).

Las secciones cónicas

Un cono circular recto de dos mantos es una superficie que se obtiene al girar una recta ℓ del modo que a continuación se indica (figura 7-1):

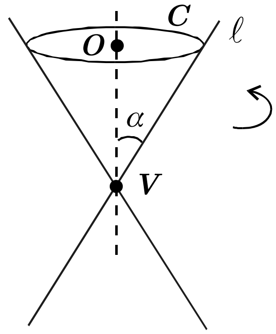


Figura 7-1

La figura C es un círculo con centro O.

El punto V que queda fijo al girar ℓ se conoce como *vértice* del cono, y cada recta que pasa por V y está en la superficie se llama *generatriz* del cono. La recta OV, que es perpendicular al plano que contiene al círculo C, se conoce como *eje del cono.*

El ángulo α formado por el eje del cono y cualquiera de las generatrices se llama *semiángulo central del cono.*

Para lo que sigue es conveniente recordar que el ángulo formado por un plano P y una recta ℓ que no es perpendicular a P es el ángulo β que a continuación indicamos (7-2).

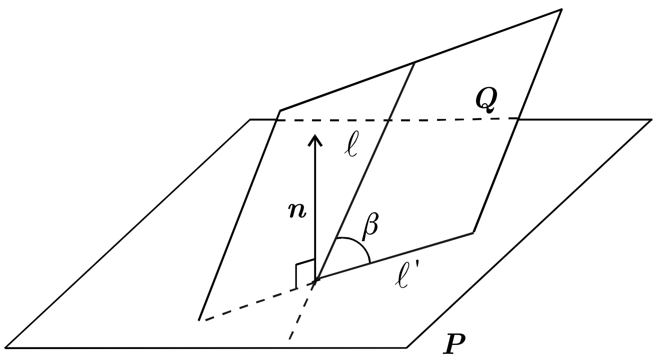


Figura 7-2

Dicho ángulo $0 \leq \beta < 90°$ es el ángulo ubicado entre la recta ℓ y la recta ℓ', que es la intersección del plano P y el plano Q que contiene a las rectas ℓ y n; donde n es perpendicular al plano P. Cuando ℓ es perpendicular a P, definimos $\beta = 90°$.

Así, el ángulo entre una recta y un plano varía entre $0°$ y $90°$. Decimos que el plano y la recta son paralelos si $\beta = 0°$, y que son perpendiculares si $\beta = 90°$.

Aquellas curvas que pueden obtenerse al cortar un cono de dos mantos con un plano se conocen como *secciones cónicas*, como se muestra en la figura 7-3.

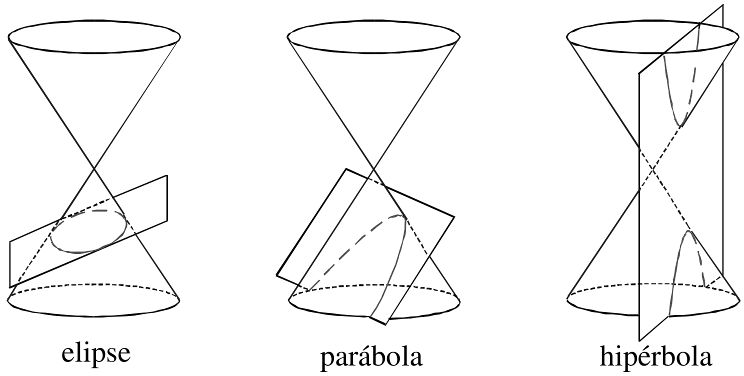


Figura 7-3

Supongamos que α es el semiángulo central del cono y que el plano forma un ángulo $0 \leq \beta < 90°$ con el eje del cono, entonces la cónica originada en el corte es:

- Una *elipse*, si $\alpha < \beta \leq 90°$.
- Una *parábola*, si $\beta = \alpha$.
- Una *hipérbola*, si $0 < \beta < \alpha$.

Los siguientes son casos particulares de cónicas.

- El *círculo* es un caso particular de la elipse cuando $\beta = 90°$; es decir, cuando el eje del cono es perpendicular al plano que hace el corte. O sea, el plano es horizontal.
- *Dos rectas que se cortan* constituye un caso particular de la hipérbola; es decir, el plano de corte es vertical y pasa por el vértice del cono.
- *Un punto*: cuando el plano corta al cono únicamente en el vértice (caso especial de $\alpha < \beta \leq 90°$) y que el plano pasa por el vértice.
- *Una recta*: cuando el plano es tangente al cono (caso especial de $\beta = \alpha$) (figura 7-4).

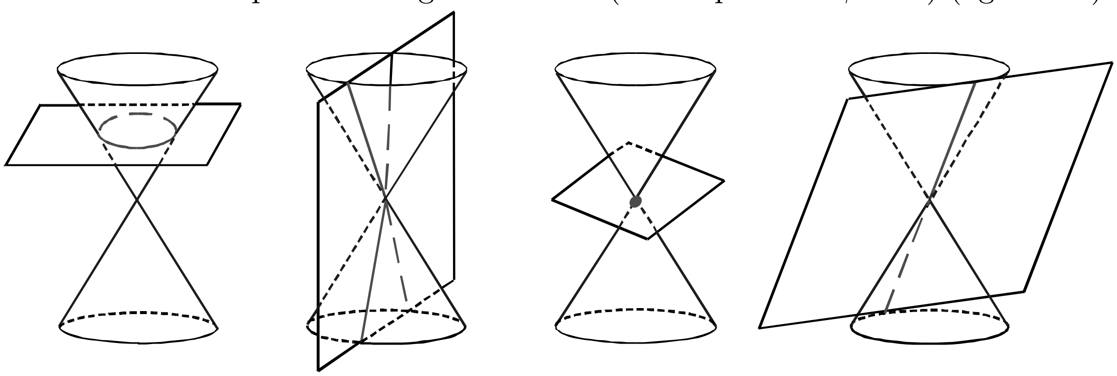


Figura 7-4

Los tres últimos casos se llaman *cónicas degeneradas*.

Cuando se corta un cilindro con un plano, también se obtienen cónicas, algunas de las cuales son cónicas degeneradas (figura 7-5).

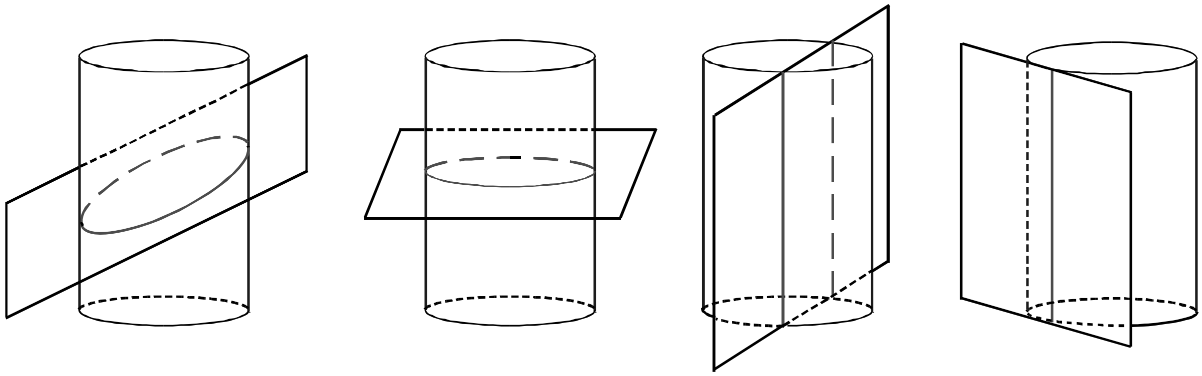


Figura 7-5

- Cuando el plano no es paralelo ni perpendicular al eje del cilindro, se obtiene una *elipse.*
- Cuando el plano es perpendicular al eje del cilindro, se obtiene un *círculo.*
- Cuando el plano es paralelo al eje del cilindro se pueden obtener *dos rectas paralelas*, *una recta* o el *conjunto vacío.*

Las definiciones geométricas de las cónicas no resultan prácticas para muchas aplicaciones. Por medio de la geometría sintética es posible probar que estas definiciones son equivalentes a otras que están dadas en términos de distancias y permiten obtener propiedades y aplicaciones a partir de ellas.

Primero veamos algunos ejemplos.

El círculo

Encontrar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen es 4 (figura 7-6).

Solución:

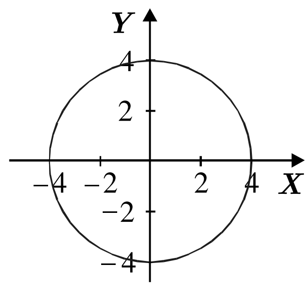


Figura 7-6

En general, los puntos que equidistan de un punto dado describen un círculo con centro en dicho punto. Así, en este caso, el lugar geométrico es un círculo de radio 4 con centro en el origen. Todo punto $P(x, y)$ del lugar geométrico satisface

$$d(P, O) = 4.$$

Sustituimos las coordenadas de P y O en la fórmula de la distancia entre dos puntos (4.1),

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=4.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación y obtenemos

$$x^2+y^2=16,$$

o bien

$$x^2+y^2-16=0,$$

que es la ecuación del círculo con centro en O y radio 4.

En el capítulo 8 estudiaremos con detenimiento el círculo.

La parábola

Encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $y+1=0$ y del punto $P(0,1)$.

Solución:

Llamamos ℓ a la recta. Para que un punto $Q(x,y)$ pertenezca a este lugar geométrico debe satisfacer que (figura 7-7).

$$d(Q,\ell)=d(Q,P).$$

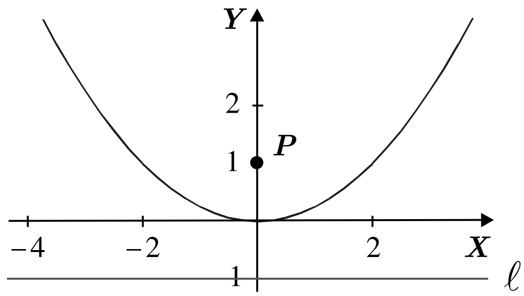


Figura 7-7

Sustituimos la ecuación de ℓ y las coordenadas de P y Q en las fórmulas de la distancia de un punto a una recta (5.15) y de la distancia entre dos puntos (4.1) y obtenemos

$$\frac{y+1}{\pm\sqrt{1^2}}=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2},$$

donde el signo $+$ o $-$ se toma de manera que el cociente sea positivo.

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$$(y+1)^2=x^2+(y-1)^2.$$

Pasamos todos los términos al mismo miembro y efectuamos las operaciones

$$\begin{aligned}(y+1)^2-x^2-(y-1)^2 &= 0\\ y^2+2y+1-x^2-\left(y^2-2y+1\right) &= 0\\ -x^2+4y &= 0,\end{aligned}$$

con lo que $-x^2+4y=0$ es la ecuación buscada.

Esta curva se denomina *parábola* y la estudiaremos con detenimiento en el capítulo 9.

La elipse

Encontrar el lugar geométrico de los puntos tal que la suma de sus distancias a los puntos $F(12,0)$ y $F'(-12,0)$ sea igual a 26.

Solución:

Para que un punto $P(x,y)$ pertenezca a este lugar geométrico debe satisfacer (figura 7-8)

$$d(P,F)+d(P,F')=26.$$

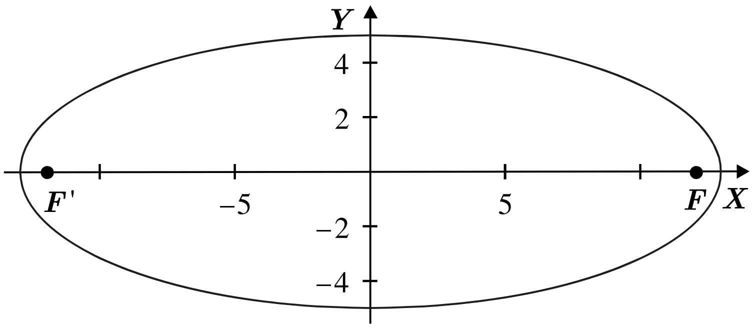


Figura 7-8

Sustituimos las coordenadas de los puntos $P\,(x,y)$, $F(12,0)$ y $F'(-12,0)$ en la ecuación anterior y utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos (4.1), con lo que obtenemos

$$\sqrt{(x-12)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-(-12))^2+(y-0)^2}=26.$$

Para eliminar los radicales, pasamos uno de ellos al lado derecho de la ecuación

$$\sqrt{(x-12)^2+y^2}=26-\sqrt{(x+12)^2+y^2}$$

y elevamos ambos miembros al cuadrado, cuidándonos de aplicar correctamente la fórmula del cuadrado de un binomio.

$$(x-12)^2+y^2=676-52\sqrt{(x+12)^2+y^2}+\left[(x+12)^2+y^2\right].$$

Efectuamos las operaciones indicadas, pasamos todos los términos al lado izquierdo, excepto el radical, y simplificamos lo más posible.

$$\begin{aligned} x^2-24x+144+y^2 &= 676-52\sqrt{(x+12)^2+y^2}+x^2+24x+144+y^2 \\ -48x-676 &= -52\sqrt{(x+12)^2+y^2} \\ 12x+169 &= 13\sqrt{(x+12)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Elevamos nuevamente al cuadrado para eliminar el segundo radical

$$(12x+169)^2=169\left[(x+12)^2+y^2\right].$$

Efectuamos las operaciones y pasamos todos los términos a un lado de la ecuación para finalmente obtener

$$144x^2+24\,(169)\,x+(169)^2-169\left(x^2+24x+144+y^2\right)=0;$$

es decir,

$$25x^2 + 169y^2 - 4225 = 0,$$

que es la ecuación del lugar geométrico pedido.

El lugar geométrico formado por los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante se denomina *elipse*. En el capítulo 10 estudiaremos las elipses con detenimiento.

La hipérbola

Encontra el lugar geométrico que consta de todos los puntos tales que la diferencia entre las distancias de ellos a los puntos $F(2,0)$ y $F'(-2,0)$ sea igual a 2 (figura 7-9).

Solución:

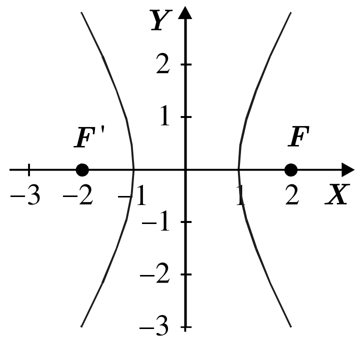


Figura 7-9

Para que un punto $P(x,y)$ pertenezca a este lugar geométrico debe satisfacer

$$d(P,F') - d(P,F) = 2, \tag{7.1}$$

o bien

$$d(P,F) - d(P,F') = 2,$$

es decir,

$$d(P,F') - d(P,F) = -2. \tag{7.2}$$

Combinamos las ecuaciones (7.1) y (7.2) y obtenemos

$$d(P,F) - d(P,F') = \pm 2.$$

Sustituimos las coordenadas de los puntos $P(x,y)$, $F(2,0)$ y $F'(-2,0)$ en la fórmula de la distancia entre dos puntos (4.1) y obtenemos

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-0)^2} = \pm 2.$$

Procedemos de manera similar al caso de la elipse y pasamos un radical al otro lado de la ecuación, y elevando al cuadrado obtenemos

$$(x-2)^2 + y^2 = \left[(x+2)^2 + y^2\right] \pm 4\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + 4.$$

Simplificamos y dejamos sólo al radical en un lado de la ecuación

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 &= x^2 + 4x + 4 + y^2 \pm 4\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + 4 \\ 2x + 1 &= \pm\sqrt{(x+2)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

De nuevo elevamos al cuadrado, y el signo $\pm$ deja de ser importante:

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= (x+2)^2+y^2\\ 4x^2+4x+1 &= x^2+4x+4+y^2.\end{aligned}$$

Pasamos todos los términos a un lado de la ecuación

$$3x^2-y^2-3=0,$$

que es la ecuación del lugar geométrico pedido.

El lugar geométrico formado por los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante se denomina *hipérbola*. En el capítulo 11 estudiaremos las hipérbolas con detenimiento.

De acuerdo con los ejemplos anteriores, podemos definir las cónicas de la siguiente manera:

- Una *parábola* es el conjunto de los puntos del plano que equidistan de una recta fija y de un punto fijo que no está en ella.
- Una *elipse* es el conjunto de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.
- Una *hipérbola* es el conjunto de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante.

Estas definiciones son similares a la que conocemos del *círculo* como el conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto fijo es constante.

La geometría analítica toma estas definiciones y las combina con el álgebra; así, todas las cónicas pueden representarse mediante ecuaciones de segundo grado en dos variables, y de manera recíproca, toda ecuación de segundo grado describe una cónica o un caso degenerado de alguna cónica.

Equivalencia entre las definiciones de las cónicas en términos de distancias y mediante cortes de un cono o un cilindro, por un plano

Un cilindro circular recto es una superficie que se obtiene al hacer girar una recta ℓ como indicamos a continuación.

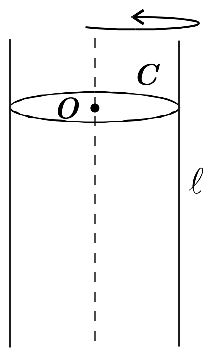


Figura 7-10

En la figura 7-10, C es un círculo con centro en O. Observemos que ℓ es perpendicular al plano que contiene a C. La recta que pasa por O y es perpendicular al plano que contiene a C se llama *eje del cilindro*.

Es claro que si un plano corta al eje del cilindro en un ángulo recto se forma un círculo.

Cuando el plano corta al cilindro de manera que no sea paralelo ni perpendicular al eje, forma una curva E que parece elipse. Veremos que efectivamente es una elipse.

Consideremos una esfera del mismo radio que el cilindro; deslicémosla en el cilindro, como si fuera una pelota de tenis dentro de su envase, hasta que toque al plano. Tomemos otra esfera y hagamos lo mismo en el otro lado del plano. Las esferas tocan al plano en dos puntos F_1 y F_2 (figura 7-11). Veremos que éstos son los focos de la elipse. (A la derecha aparece la misma figura vista de perfil, y puede ser más fácil seguir la construcción en ella.)

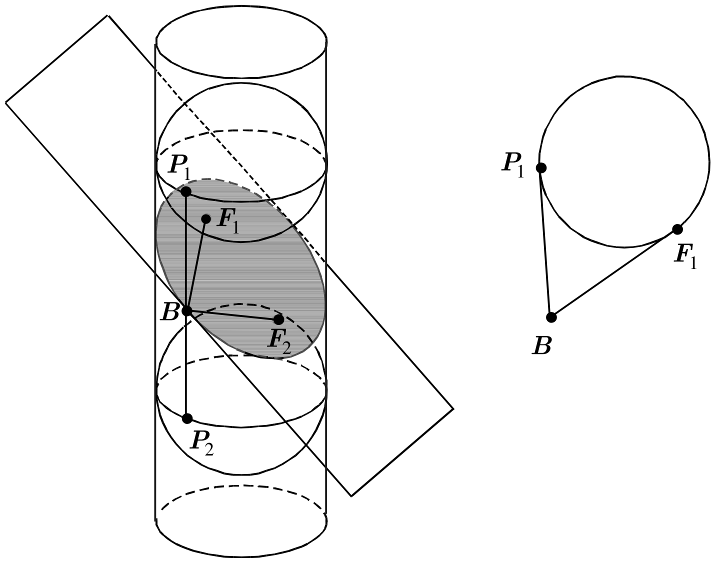


Figura 7-11

Sea B un punto de la curva E. La recta que está en el cilindro y pasa por B toca a las esferas en dos puntos, P_1 y P_2.

BF_1 y BP_1 son tangentes a la esfera desde B, así que por la simetría de la esfera tenemos

$$BF_1 = BP_1;$$

de igual manera,

$$BF_2 = BP_2,$$

luego

$$BF_1 + BF_2 = BP_1 + BP_2 = P_1P_2.$$

Sin embargo, la distancia P_1P_2 es independiente del punto B que se haya escogido en la curva E, ya que es la distancia entre los ecuadores de las esferas, por tanto, $BF_1 + BF_2$ es constante para todo punto B de la curva E, así que E es una elipse.

El argumento anterior puede aplicarse también a la figura 7-12, por lo que un plano que corta a un cono con un ángulo menor al formado por el eje y la generatriz genera una elipse.

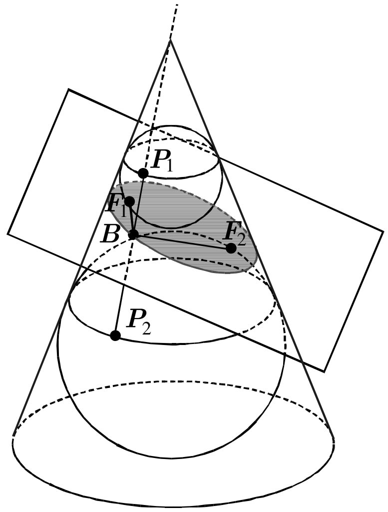


Figura 7-12

Conforme se inclina el plano la elipse se alarga; y cuando es paralelo a la generatriz, la curva deja de ser cerrada y se vuelve una parábola, como veremos un poco más adelante.

Si inclinamos más el plano, éste corta al cono dos veces; una vez en la parte inferior y otra en la superior. Llamemos H a la curva formada por la intersección del plano y el cono. Veamos que H es una hipérbola.

Coloquemos dos esferas dentro del cono de manera que sean tangentes al plano de corte, como se muestra en la figura 7-13

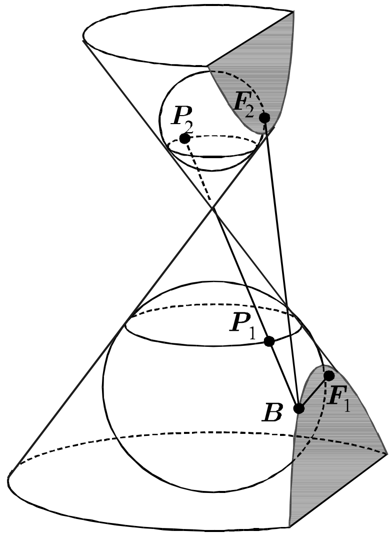


Figura 7-13

Consideremos un punto B en la curva H. De manera similar a como lo hicimos con la elipse, si sobre el cono construimos una recta que pase por B, ésta es tangente a las esferas en P_1 y P_2; entonces

$$BF_1 = BP_1 \qquad \text{y} \qquad BF_2 = BP_2,$$

luego

$$BF_2 - BF_1 = BP_2 - BP_1 = P_1P_2.$$

Como esta distancia es constante, entonces $BF_2 - BF_1$ es constante y, por tanto, H es una hipérbola.

Por último, consideremos un plano γ paralelo a la generatriz del cono. Veremos que la curva P formada por la intersección del plano y el cono es una parábola.

Consideremos dentro del cono una esfera que sea tangente al plano, como en la figura 7-14. La intersección de la esfera y el cono forma un círculo C. Este círculo está en un plano δ que es perpendicular al eje del cono.

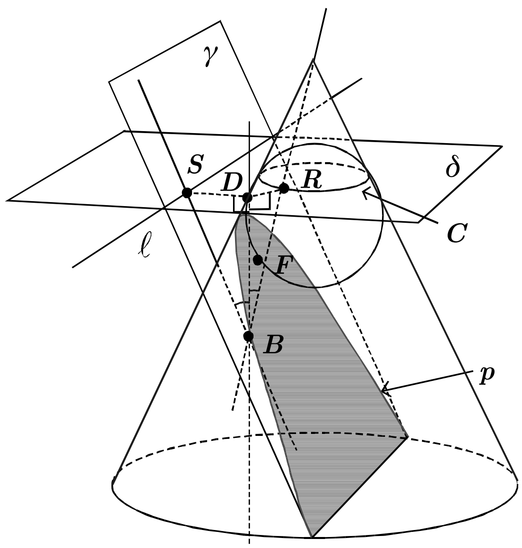


Figura 7-14

Los planos γ y δ se cortan en una recta ℓ. Veremos que esta recta es la directriz de la parábola, y el punto F donde la esfera toca al plano γ es su foco.

Tomemos un punto B en la curva p. La recta que une a B y al vértice del cono corta al círculo C en un punto R. Este punto está también en el plano δ.

La recta vertical que pasa por B corta al plano δ en un punto D.

En el plano γ, tracemos la recta perpendicular a ℓ que pasa por B. Esta recta corta a ℓ en el punto S. La longitud del segmento BS es la distancia de B a ℓ.

$BF = BR$ ya que BF y BR son tangentes a la esfera, trazadas desde B.

Como el plano γ tiene la misma inclinación que una generatriz del cono, los ángulos RBD y DBS son iguales y los ángulos RDB y DSB son rectos, así que los triángulos RBD y DBS son congruentes y, por tanto,

$$BS = BR = BF;$$

es decir, la distancia de B a F es la misma que la distancia de B a ℓ. Como B era un punto arbitrario de la curva p, entonces p es una parábola.

Traslaciones de los ejes

Consideremos los puntos $A(5,2)$, $B(0,0)$ y $C(4,6)$ con respecto a un sistema de coordenadas XY en el plano cartesiano. Si colocamos otros ejes cartesianos $X'Y'$ paralelos a los anteriores, pero de manera que su origen esté en el punto $C(4,6)$ del sistema original, ¿cuáles serán las coordenadas de los puntos A, B y C, con respecto a los ejes $X'Y'$?

Solución:

Primero veamos la solución gráficamente.

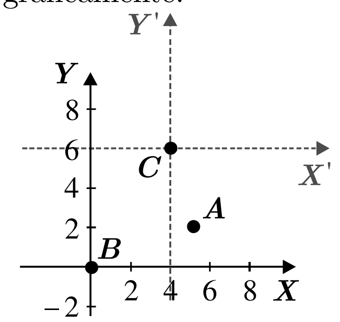


Figura 7-15

Dibujamos los ejes cartesianos XY y marcamos los puntos A, B y C, como en la figura. Ahora olvidémonos de los ejes originales y dibujemos un nuevo par de ejes $X'Y'$ utilizando la misma escala que la original, cuyo origen esté en C. Vemos que las coordenadas de los puntos A, B y C, con respecto al nuevo sistema de coordenadas, son $A(1,-4)$, $B(-4,-6)$ y $C(0,0)$.

Observamos que lo que hicimos fue restar las coordenadas de C a las coordenadas de los puntos A y B, todas ellas con respecto al sistema XY, para obtener sus nuevas coordenadas con respecto al sistema de coordenadas $X'Y'$.

$$\begin{aligned}(5,2) &\longrightarrow (5-4, 2-6) = (1,-4)\\ (0,0) &\longrightarrow (0-4, 0-6) = (-4,-6)\\ (4,6) &\longrightarrow (4-4, 6-6) = (0,0)\end{aligned}$$

En el estudio de las cónicas, a veces es conveniente "mover" los ejes cartesianos para que la curva que estamos estudiando quede en una posición más "sencilla" y su ecuación sea más simple. Los movimientos que se pueden hacer con los ejes son *traslaciones*, que veremos a continuación, y *rotaciones*, que veremos en el capítulo 12.

Consideremos un sistema coordenado XY en el plano cartesiano. Tomemos un punto $O'(h,k)$ distinto del origen y tracemos un nuevo par de ejes cartesianos $X'Y'$, con origen en O', paralelos a los ejes X y Y originales. Cada punto P del plano puede expresarse con coordenadas en términos de XY, o en términos de $X'Y'$.

Veamos cómo encontrar las coordenadas de un punto P cualquiera con respecto al nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$.

Llamemos (x,y) a las coordenadas de P con respecto al sistema XY, y (x',y') a sus coordenadas con respecto a $X'Y'$.

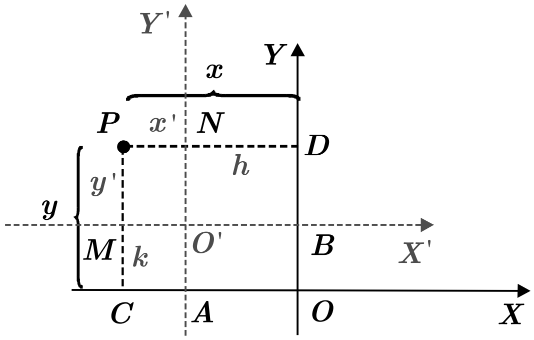


Figura 7-16

En la figura 7-16, desde P trazamos rectas perpendiculares a los ejes. Los puntos C y D en los ejes X, Y corresponden a las coordenadas x, y de P, y los puntos M y N en los ejes X', Y' corresponden a sus coordenadas x', y'. De igual manera, los puntos A y B corresponden a las coordenadas h, k de O' con respecto a los ejes X, Y.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} x' &= PN = PD - ND = PD - O'B = x - h \\ y' &= PM = PC - MC = PC - O'A = y - k, \end{aligned}$$

con lo cual hemos encontrado la relación entre los dos sistemas de coordenadas de P:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k. \end{aligned}} \tag{7.3}$$

Esto es, para obtener las coordenadas de P con respecto al nuevo sistema $X'Y'$, debemos restar a las coordenadas originales de P las coordenadas de O' con respecto a XY. Estas fórmulas se conocen como *fórmulas de traslación de ejes* y relacionan las coordenadas de P, con respecto al sistema original de coordenadas XY, con sus respectivas coordenadas del nuevo sistema $X'Y'$.

Ejemplos

1. Encontrar las coordenadas $X'Y'$ de los puntos $A\,(3,-2)$, $B\,(-7,3)$, $C\,(2.4,-8.6)$ si se traslada el origen de coordenadas al punto $O'(-4,3)$.

Solución:

Sustituimos las coordenadas de O' en las fórmulas de traslación (7.3):

$$\begin{aligned} x' &= x - (-4) = x + 4 \\ y' &= y - 3. \end{aligned}$$

Sustituimos las coordenadas x, y de los puntos A, B, C en las ecuaciones anteriores para obtener sus coordenadas x', y'.

Para el punto A:

$$\begin{aligned} x' &= 3 + 4 = 7 \\ y' &= -2 - 3 = -5. \end{aligned}$$

Para el punto B:

$$\begin{aligned} x' &= -7+4=-3 \\ y' &= 3-3=0. \end{aligned}$$

Para el punto C:

$$\begin{aligned} x' &= 2.4+4=6.4 \\ y' &= -8.6-3=-11.6. \end{aligned}$$

Así que las nuevas coordenadas de los puntos son $A\,(7,-5)$, $B\,(-3,\,0)$, $C\,(6.4,-11.6)$.

2. Trasladar los ejes para tener un nuevo sistema de coordenadas con origen O' en el punto medio del segmento con extremos $A\,(5,5)$ y $B\,(11,-3)$, y proporcionar las coordenadas de A y B con respecto a este nuevo sistema de coordenadas.

Solución:

Primero encontramos el punto medio de A y B:

$$h=\frac{5+11}{2}=8 \qquad\qquad k=\frac{5-3}{2}=1,$$

así que las coordenadas del punto medio son $(8,1)$.

Entonces, en este caso, las fórmulas de traslación de ejes están dadas por las fórmulas

$$\begin{aligned} x' &= x-8 \\ y' &= y-1. \end{aligned}$$

Las nuevas coordenadas de A son

$$\begin{aligned} x' &= 5-8=-3 \\ y' &= 5-1=4. \end{aligned}$$

Las nuevas coordenadas de B son

$$\begin{aligned} x' &= 11-8=3 \\ y' &= -3-1=-4. \end{aligned}$$

Observemos que el punto medio de $(-3,4)$ y $(3,-4)$ tiene coordenadas $(x',y')=(0,0)$, como era de esperarse (figura 7-17).

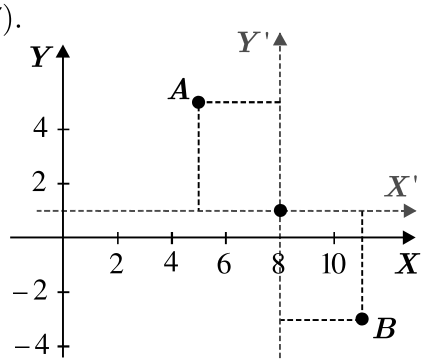


Figura 7-17

Supongamos que la recta ℓ tiene ecuación $5x - 3y - 15 = 0$ en el sistema XY. Encuentra la ecuación de la misma recta con respecto al sistema $X'Y'$ con ejes paralelos a los originales y origen en $O'(9, 5)$.

Solución:

Primero resolvamos el problema geométricamente. Dibujamos la recta. Para ello, conviene escribir la ecuación en la forma de pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} 3y &= 5x - 15 \\ y &= \frac{5}{3}x - 5. \end{aligned}$$

Así, vemos que la recta tiene pendiente igual a $\frac{5}{3}$ y corta al eje Y en $(0, -5)$.

Ahora dibujemos los nuevos ejes X' y Y' con origen en $O'(9, 5)$ (figura 7-18).

Vemos que la recta corta al nuevo eje Y' en el punto $(0, 5)$ y tiene la misma pendiente igual a $\frac{5}{3}$.

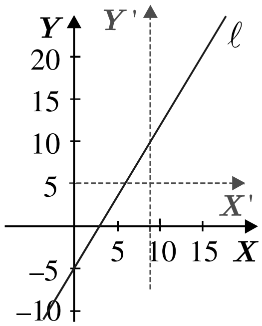


Figura 7-18

Si llamamos (x', y') a las coordenadas de los puntos con respecto al nuevo sistema de coordenadas, la ecuación de la recta es

$$y' = \frac{5}{3}x' + 5,$$

que en la forma general es

$$5x' - 3y' + 15 = 0. \tag{7.4}$$

Ahora veamos otra manera de obtener esta última ecuación por medio de las fórmulas de traslación de ejes (7.3).

Tenemos la recta dada por una ecuación en x, y,

$$5x - 3y - 15 = 0. \tag{7.5}$$

Queremos trasladar los ejes de manera que el nuevo origen quede en el punto $O'(9, 5)$. Las fórmulas de la traslación de ejes son

$$\begin{aligned} x' &= x - 9 \\ y' &= y - 5, \end{aligned}$$

las cuales nos dan los valores de x', y' en términos de x, y.

Lo que necesitamos ahora es conocer los valores de x, y en términos de x', y' para sustituirlos en la ecuación (7.5).

Despejamos x, y de las ecuaciones anteriores,

$$\begin{aligned} x &= x' + 9 \\ y &= y' + 5, \end{aligned}$$

y sustituimos estos valores en la ecuación de la recta ℓ (7.5)

$$5(x' + 9) - 3(y' + 5) - 15 = 0.$$

Al efectuar las operaciones obtenemos

$$5x' - 3y' + 15 = 0,$$

que es la misma ecuación que obtuvimos geométricamente.

En general, si tenemos un lugar geométrico que satisface una ecuación en x, y con respecto a un sistema de coordenadas XY, y trasladamos los ejes a un sistema $X'Y'$, de manera que el origen quede colocado en un punto $O'\,(h, k)$, para obtener la ecuación de dicho lugar geométrico con respecto a ese nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ debemos despejar x y y de las ecuaciones de traslación,

$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k, \end{aligned}$$

o sea,

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned}} \tag{7.6}$$

y sustituir estos valores en la fórmula del lugar geométrico dado.

Ejemplos

1. Encontra la ecuación de la recta $4x - 7y - 6 = 0$ con respecto al sistema trasladado cuyo origen es $O'(-2, 5)$ y determinar el punto (x', y') donde corta al nuevo eje Y' de las ordenadas.

   Solución:

   Sustituimos x y y de acuerdo con las fórmulas (7.6),

   $$\begin{aligned} x &= x' + (-2) \\ y &= y' + 5, \end{aligned}$$

   en la ecuación de la recta

   $$4(x' - 2) - 7(y' + 5) - 6 = 0.$$

   Efectuamos las operaciones y ponemos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen:

   $$y' = \frac{4}{7}x' - 7.$$

   Así, la recta corta al nuevo eje Y' de las ordenadas en el punto $(x', y') = (0, -7)$ (figura 7-19).

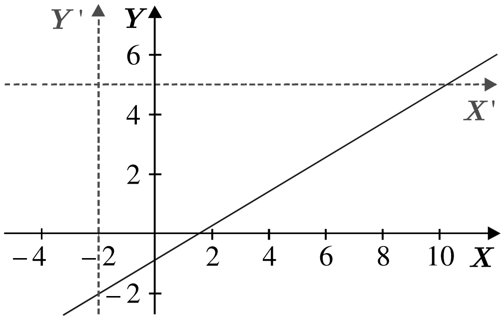


Figura 7-19

2. Encontrar la ecuación de la parábola formada por los puntos que equidistan del punto $P(5,6)$ y de la recta ℓ cuya ecuación es $y = 4$.

Solución:

En la ecuación

$$d(\ell, Q) = d(P, Q)$$

debemos sustituir los valores tomando (x, y) como coordenadas de Q y simplificar la ecuación. Otra manera de resolver el ejemplo es trasladar los ejes de manera que el nuevo origen quede en el punto medio localizado entre P y ℓ, que es $O'(5,5)$, y utilizar las fórmulas (7.3).

$$\begin{aligned} x' &= x - 5 \\ y' &= y - 5. \end{aligned}$$

(Observa la figura 7-20.)

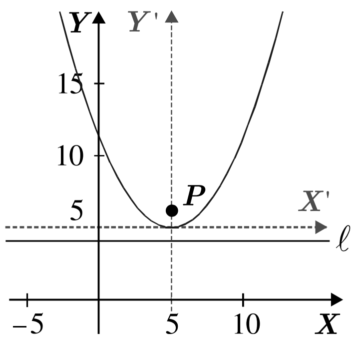


Figura 7-20

Las coordenadas de P en el nuevo sistema son

$$(5 - 5, 6 - 5) = (0, 1).$$

Despejamos y de la segunda fórmula de traslación y sustituimos en la ecuación de la recta para obtener su nueva ecuación

$$y' + 5 = 4,$$

es decir,

$$y' + 1 = 0.$$

Éstos son los datos de la parábola de la página 285, así que la ecuación de la parábola, con respecto al sistema de coordenadas $X'Y'$, es

$$(x')^2 - 4y' = 0.$$

Para escribirla en términos del sistema de coordenadas original, sustituimos x', y' en las fórmulas de traslación de ejes y obtenemos

$$(x-5)^2 - 4(y-5) = 0.$$

Al efectuar las operaciones obtenemos

$$x^2 - 10x - 4y + 45 = 0,$$

que es la ecuación buscada.

3. Encontrar la ecuación de la elipse formada por los puntos cuyas distancias a los puntos $F'(-17,-3)$ y $F(7,-3)$ suman 26. Observa la figura 7-21.

Solución:

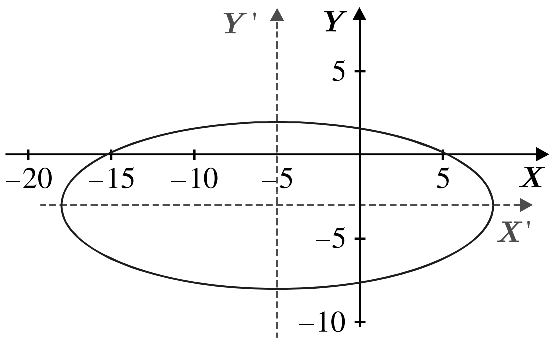


Figura 7-21

Escogemos un nuevo origen O' en el punto medio localizado entre F' y F, cuyas coordenadas son

$$O'\left(\frac{-17+7}{2}, \frac{-3-3}{2}\right) = O'(-5,-3).$$

Por medio de las fórmulas de traslación (7.3)

$$\begin{aligned} x' &= x-(-5) = x+5 \\ y' &= y-(-3) = y+3, \end{aligned}$$

las coordenadas de F' y F con respecto a este nuevo sistema de coordenadas son

$$\begin{aligned} F'&:\ \ (-17+5, -3+3) = (-12, 0) \\ F&:\ \ (7+5, -3+3) = (12, 0). \end{aligned}$$

Éstos son los datos de la elipse de la página 286, así que la ecuación de la elipse con respecto al sistema $X'Y'$ es

$$25\,(x')^2 + 169\,(y')^2 - 4225 = 0.$$

Para escribirla en términos del sistema de coordenadas original, sustituimos x', y' en las fórmulas de traslación, y obtenemos

$$25\,(x+5)^2+169\,(y+3)^2-4225=0.$$

Al efectuar las operaciones, llegamos finalmente a la ecuación de la elipse relativa al sistema original

$$25x^2+169y^2+250x+1014y-2079=0.$$

En estos dos últimos ejemplos vimos cómo utilizar las ecuaciones de cónicas con centro en el origen para encontrar la ecuación de otras cónicas cuyo centro no estaba en el origen. Ésta es la técnica que utilizaremos en general a lo largo de los siguientes capítulos.

Ejercicios

En cada caso encuentra la ecuación de la cónica.

1. El círculo con centro en el origen y radio $\sqrt{3}$.

2. La parábola formada por los puntos que equidistan de la recta $y=3$ y del punto $P(0,-1)$.

3. La parábola formada por los puntos que equidistan de la recta $x+6=0$ y del punto $P(-2,0)$.

4. La elipse formada por los puntos tales que la suma de sus distancias a los puntos $F(0,4)$ y $F'(0,-4)$ es igual a 10.

5. La hipérbola formada por los puntos tales que la diferencia entre las distancias de ellos a los puntos $F'\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ y $F\left(0,\frac{3}{2}\right)$ sea igual a 2.

Escribe las coordenadas de $A(-6,2)$, $B(2,4)$ y $C(3,-1)$ con respecto al sistema de coordenadas $X'\,Y'$ con origen en:

6. $O'\,(-2,-1)$. **7.** $O'\,(3,-6)$. **8.** $O'\,(5,2)$.

9. $O'\,(-1,4)$. **10.** $O'\,(2,4)$. **11.** $O'\,(-7,1)$.

Encuentra la ecuación de la recta $6x+2y+1=0$ con respecto al sistema de ejes $X'Y'$ paralelos a los originales y con origen en:

12. $O'\,(5,-8)$. **13.** $O'\,(-4,7)$. **14.** $O'\,(-3,6)$.

Encuentra la ecuación de cada recta con respecto al sistema de ejes $X'Y'$ paralelos a los originales y con origen en $O'\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$.

15. $3x-y+5=0$. **16.** $-x+3y=4$. **17.** $x-y=6$.

18. $y=7x-9$. **19.** $2x-y=5$. **20.** $y=3$.

21. $x=9$. **22.** $x=6y-1$. **23.** $5x+2y-4=0$.

24. Encuentra la ecuación de la elipse formada por los puntos tales que la suma de sus distancias a los puntos $F(5,-4)$ y $F'(5,-14)$ sea igual a 20.

25. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(3,1)$ y $B(6,2)$ sea igual a 14.

26. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que la suma de sus distancias a los puntos $A(-2,1)$ y $B(1,-3)$ sea igual a 6.

Resumen

- El lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo es constante es un círculo.
- El lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta ℓ y un punto P es una parábola.
- El lugar geométrico de los puntos tal que la suma de sus distancias a los puntos F y F' es constante es una elipse.
- El lugar geométrico de los puntos tal que la diferencia de sus distancias a los puntos F y F' es constante es una hipérbola.
- Fórmulas de traslación: $x' = x - h$, $y' = y - k$, donde el nuevo origen es $O'(h, k)$.

Ejercicios con Geolab

1. **Elipse como lugar geométrico**. Construye un círculo con centro en $(0, 0)$ y radio 5. En *Pantalla de datos*, utiliza el constructor *Círculo directo*. Escribe C en el campo de nombre y oprime la tecla ENTER; luego llena los campos $a = 0$, $b = 0$ y $r = 5$.

   Construye un punto directo P y colócalo dentro del círculo. Utiliza el constructor *Punto en círculo* para construir un punto Q sobre el círculo. Construye la mediatriz, m, de P y Q.

   Arrastra el punto Q y observa cómo se mueve la mediatriz. Ahora indícale a la mediatriz que deje traza. Ve a la pantalla gráfica, prende el botón de traza y vuelve a mover el punto Q. ¿Qué figura envuelve la mediatriz? Crea una animación, anima el punto Q entre 0 y 1 y ejecuta la animación.

2. Utiliza la construcción del ejercicio anterior. Construye un *Escalar calculado*, a, colocando la fórmula $C.r/2$ para indicar que a vale la mitad del radio de C. Construye una Cónica con focos en C y P, y con a como semieje mayor. Utiliza el constructor *Cónica*: *Focos y a.*

3. **Hipérbola como lugar geométrico**. Utiliza la construcción del ejercicio anterior. Lleva al punto P fuera del círculo y ejecuta nuevamente la animación. Observa que la elipse construida en el ejercicio anterior se convierte en hipérbola y que la mediatriz de P y Q la envuelve.

4. En los capítulos de la elipse y de la hipérbola revisa las construcciones, doblando el papel para entender las construcciones anteriores.

5. **Parábola como lugar geométrico**. Construye dos puntos A y B y el segmento, s, que los une. Construye un punto directo P y un punto Q en el segmento AB. Después construye la mediatriz, m, de P y Q.

   Arrastra el punto Q y observa cómo se mueve la mediatriz. Ahora indícale a la mediatriz que deje traza. Ve a la pantalla gráfica, prende el botón de traza y vuelve a mover el punto Q. ¿Qué figura envuelve la mediatriz?

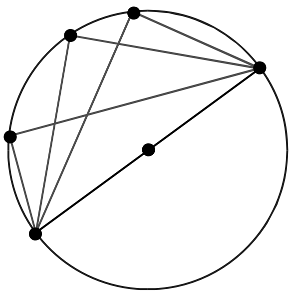
   Crea una animación, anima el punto Q entre -1 y 2 y ejecuta la animación.

6. Utiliza la construcción del ejercicio anterior. Construye una parábola con foco P y directriz m. Ejecuta nuevamente la animación.

Capítulo 8

El círculo

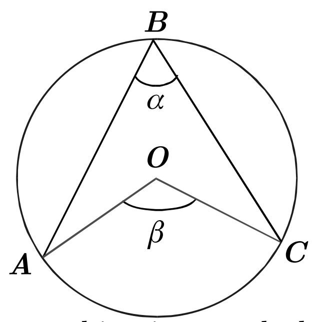
En este capítulo estudiamos una de las figuras planas más conocidas: el círculo. Enunciamos y demostramos uno de sus resultados básicos sobre esta figura:



Todo ángulo inscrito en un círculo que abarca un diámetro es un ángulo recto

La demostración que damos al respecto usa herramientas de la geometría analítica; en particular, la ecuación de un círculo con centro en el origen. Este resultado es un caso especial del teorema siguiente, más general:

Un ángulo α inscrito en un círculo es la mitad del ángulo central β que abarca el mismo arco



Muchas de las propiedades del círculo no dependen de su ubicación en el plano y, por consiguiente, para demostrarlas por medio de la geometría analítica podemos suponerlo colocado en el lugar que más nos convenga dentro de nuestro sistema cartesiano; por ejemplo, con su centro en el origen, en cuyo caso la ecuación del círculo se reduce a una ecuación cuadrática muy simple.

Mediante un ejemplo vemos que a partir de tres puntos conocidos del círculo éste queda determinado; es decir, hay un solo círculo que pasa por tres puntos dados no alineados y, con base en propiedades antes vistas, justificamos esta afirmación.

Definición del círculo

De un pedazo de tela, ¿cómo cortarías un mantel circular?

Solución:

La manera más sencilla es que, una vez elegido el radio deseado, tomemos una cinta con esa medida, fijemos sobre la tela uno de los extremos de la cinta, y la desplacemos estirada en cualquier dirección hasta volver al punto de partida. Ello determinará la orilla del mantel.

Observamos que la distancia desde el centro hasta cualquier punto de la orilla del mantel es siempre la misma: el radio que elegimos.

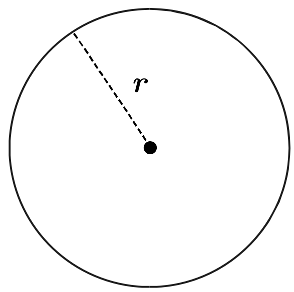


Figura 8-1

Un *círculo* es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado *centro*.

Muchos libros de geometría hacen la distinción entre los términos "circunferencia" y "círculo" para nombrar al borde y al interior de un disco, respectivamente. Algunos utilizan la palabra "circunferencia" como sinónimo de "perímetro", es decir, la longitud del borde del disco.

La tendencia moderna es utilizar la palabra "círculo" para referirse ya sea al borde, o al borde junto con el interior de la figura. De igual manera se procede con los polígonos. Por ejemplo, al hablar de "triángulo" nos referimos indistintamente al borde o a la figura llena delimitada por tres lados, y hacemos lo mismo con el "cuadrado", "rectángulo", "pentágono", etc. Por ejemplo, hablamos tanto del perímetro de un cuadrado como de su área. Asimismo, podremos hablar del perímetro de un círculo o de su área.

Empecemos el estudio sistemático del círculo determinando la ecuación de los que tienen su centro en el origen.

Ecuación del círculo con centro en el origen

Encuentra el lugar geométrico de los puntos que distan del origen 4 unidades.

Solución:

Llamamos $P(x, y)$ a un punto de ese lugar geométrico.

Puesto que la distancia del origen a $P(x, y)$ debe ser 4, entonces, utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos, tenemos que debe cumplirse la ecuación

$$d(P, O) = 4.$$

Es decir,

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 4;$$

y si elevamos al cuadrado ambos miembros obtenemos

$$x^2 + y^2 = 16.$$

El lugar geométrico buscado tiene la ecuación $x^2 + y^2 = 16$.

En general, si deseamos encontrar la ecuación que satisfacen los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al origen $O(0,0)$ es igual a r, donde r es cualquier número no negativo, entonces observamos que dichos puntos, y sólo ellos, deben satisfacer

$$d(P, O) = r.$$

Al sustituir las coordenadas de P y O en la fórmula de la distancia entre dos puntos, obtenemos

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, llegamos finalmente a

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}, \tag{8.1}$$

que es la *ecuación del círculo de radio* r y *centro* en el origen (figura 8-2).

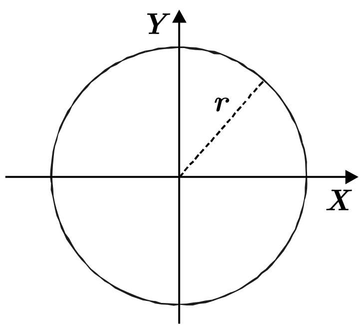


Figura 8-2

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación del círculo con centro en el origen y radio 5.

Solución:

En este caso, $r = 5$; sustituyendo este valor en la ecuación (8.1), obtenemos

$$x^2 + y^2 = 25.$$

2. Proporciona el radio del círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 3$.

Solución:

De acuerdo con la ecuación (8.1), $r^2 = 3$, así que $r = \sqrt{3}$.

Observa que como el radio debe ser un número no negativo, tomamos la raíz positiva de 3.

3. Si un ángulo inscrito en un círculo subtiende (abarca) un diámetro, entonces es un ángulo recto (figura 8-3).

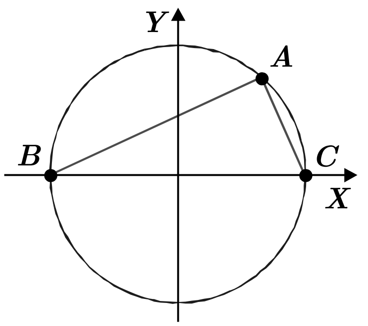


Figura 8-3

Solución:

Para facilitar los cálculos, podemos colocar al círculo con centro en el origen y al diámetro de referencia sobre el eje X.

Los puntos ABC forman un triángulo inscrito en el círculo. Las coordenadas de los vértices son $A\,(x_0, y_0)$, $B\,(-r, 0)$ y $C\,(r, 0)$.

Calculamos las pendientes m_1 y m_2 de los lados AB y AC del triángulo, respectivamente.

Entonces
$$m_1 = \frac{y_0 - 0}{x_0 + r}, \qquad m_2 = \frac{y_0 - 0}{x_0 - r}.$$

Para probar que el ángulo es recto, debemos ver que los lados AB y AC son perpendiculares, para lo cual debemos probar que
$$m_1 m_2 = -1.$$

En efecto:
$$m_1 m_2 = \left(\frac{y_0 - 0}{x_0 + r}\right)\left(\frac{y_0 - 0}{x_0 - r}\right) = \frac{y_0^2}{x_0^2 - r^2}.$$

Como el punto $A\,(x_0, y_0)$ está sobre el círculo, entonces
$$x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

de donde
$$x_0^2 - r^2 = -y_0^2.$$

Entonces
$$m_1 m_2 = \frac{y_0^2}{x_0^2 - r^2} = \frac{y_0^2}{-y_0^2} = -1.$$

Por tanto, los lados AB y AC son perpendiculares y el ángulo es recto.

4. Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son los extremos de una cuerda del círculo $x^2 + y^2 = r^2$, entonces la recta que une el punto medio del segmento PQ con el centro del círculo es perpendicular a la cuerda dada. Es decir, el centro de un círculo pertenece a la mediatriz de cualquiera de sus cuerdas.

Solución:

Supongamos que la recta PQ no es vertical ni horizontal, o sea $x_1 \neq x_2$ y $x_1 \neq -x_2$.

El círculo $x^2 + y^2 = r^2$ tiene centro $C(0,0)$ y radio r (figura 8-4).

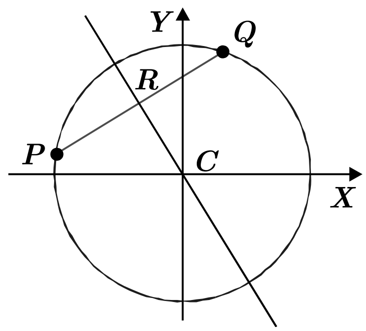


Figura 8-4

El punto medio del segmento PQ es

$$R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

La pendiente de la recta que une $R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ con el centro $C(0,0)$ del círculo es

$$m_1 = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} - 0}{\frac{x_1 + x_2}{2} - 0} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

La pendiente de la recta que pasa por P y por Q es

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Para ver que las dos rectas son perpendiculares debemos probar que

$$m_1 m_2 = -1.$$

Entonces

$$m_1 m_2 = \left(\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}\right)\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2}.$$

Como P y Q están sobre el círculo, entonces

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \qquad \text{y} \qquad x_2^2 + y_2^2 = r^2$$

de donde
$$y_1^2 = r^2 - x_1^2 \qquad \text{y} \qquad y_2^2 = r^2 - x_2^2.$$

Así,
$$m_1 m_2 = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{r^2 - x_2^2 - (r^2 - x_1^2)}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{-x_2^2 + x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = -1.$$

Por tanto, la cuerda que pasa por P y Q y la mediatriz de la cuerda PQ son perpendiculares.

Los casos en que la recta PQ es vertical u horizontal pueden probarse al observar que entonces RC es horizontal o vertical, respectivamente.

Ejercicios

Encuentra la ecuación del círculo con centro en el origen y el radio dado.

1. $r = 8$. **2.** $r = 1$. **3.** $r = 7$. **4.** $r = \pi$.

5. $r = \frac{5}{2}$. **6.** $r = \frac{4}{3}$. **7.** $r = \frac{3}{7}$. **8.** $r = \sqrt{16}$.

En cada caso, encuentra el radio del círculo.

9. $x^2 + y^2 - 7 = 0$. **10.** $-x^2 - y^2 = -64$. **11.** $x^2 + y^2 = 121$.

12. $x^2 + y^2 - 19 = 0$. **13.** $x^2 + y^2 - 169 = 0$. **14.** $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

15. $x^2 + y^2 = 15$. **16.** $x^2 + y^2 = 100$. **17.** $x^2 + y^2 = \frac{64}{25}$.

Encuentra la ecuación del círculo cuyo diámetro es AB, donde

18. $A(-2, -6)$ y $B(2, 6)$. **19.** $A\left(0, -\sqrt{5}\right)$ y $B\left(0, \sqrt{5}\right)$.

20. $A\left(-3, \frac{3}{2}\right)$ y $B\left(3, -\frac{3}{2}\right)$. **21.** $A\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ y $B\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

22. Encuentra la ecuación del círculo que tiene como centro el punto de intersección de las rectas $3x + y = 0$ y $x - 4y = 0$, y como radio la distancia de dicho punto a la recta $x - y - 4 = 0$.

23. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P\,(-3, 4)$, $Q\,(0, -5)$ y cuyo centro se encuentra sobre la recta $x - 5y = 0$.

24. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P\left(\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $Q\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ y cuyo centro se encuentra sobre la recta $x + \sqrt{6}y = 0$.

25. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P\left(-2, \frac{16}{3}\right)$, $Q\,(3, 2)$ y cuyo centro se encuentra sobre la recta $3x - 2y + 1 = 0$.

26. Encuentra la ecuación de la recta que contiene al diámetro con pendiente igual a $\frac{4}{5}$ del círculo $x^2 + y^2 - 100 = 0$.

27. El punto $(-1, 3)$ divide en partes iguales a una cuerda del círculo $x^2 + y^2 = 20$. Encuentra la ecuación de la recta que contiene a la cuerda y la longitud de ésta.

28. Demuestra que el ángulo que subtiende el diámetro del círculo $x^2 + y^2 = 10$ y tiene vértice en el punto $(-3, -1)$ es recto.

Ecuación general del círculo

Encuentra el lugar geométrico de los puntos que distan 5 unidades del punto $Q(4,3)$.

Solución:

Llamamos $P(x,y)$ a un punto de ese lugar geométrico. Entonces tenemos que la distancia de P a Q debe ser 5, es decir,

$$d(P,Q) = 5.$$

O sea,

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 5.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad tenemos

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

Esta ecuación representa un círculo.

Para encontrar la ecuación de un círculo cuyo centro es el punto $C(h,k)$, distinto del origen, utilizamos la traslación de ejes como lo hicimos en el capítulo anterior.

Construimos un nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ con centro en C. Con respecto a este nuevo sistema de coordenadas, el círculo con centro en C y radio r tiene por ecuación

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2.$$

Para encontrar la ecuación del círculo con respecto al sistema de coordenadas original XY, hacemos la sustitución

$$x' = x - h, \qquad y' = y - k$$

y obtenemos

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}, \tag{8.2}$$

que es la *forma estándar* o *canónica del círculo de radio* r y *con centro en* $C(h,k)$ (figura 8-5).

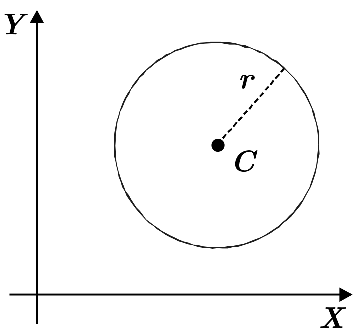


Figura 8-5

Si desarrollamos los términos que están al cuadrado, obtenemos

$$\begin{aligned}(x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2\\ x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2 &= r^2\\ x^2+y^2+(-2h)\,x+(-2k)\,y+h^2+k^2-r^2 &= 0.\end{aligned}$$

Si hacemos $D=-2h$, $E=-2k$ y $F=h^2+k^2-r^2$, entonces llegamos a una ecuación del tipo

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

que se llama *forma general de la ecuación del círculo*. Observamos que los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales a 1.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación del círculo con centro en $C(-4,6)$ y radio 2.

Solución:

Sustituyendo directamente las coordenadas de C y el valor del radio en la ecuación (8.2), obtenemos

$$(x-(-4))^2+(y-6)^2=2^2;$$

es decir,

$$(x+4)^2+(y-6)^2=4,$$

la cual se escribe en la forma general como

$$x^2+y^2+8x-12y+48=0.$$

2. Encontrar el centro y el radio del círculo cuya ecuación es $x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

Solución:

Agrupamos los términos en x y en y y despejamos el término independiente

$$(x^2+2x)+(y^2-4y)=4.$$

En cada paréntesis completamos el trinomio cuadrado perfecto. Recuerda que tomamos el coeficiente de x, lo dividimos entre dos, lo elevamos al cuadrado y lo sumamos. Hacemos lo mismo con el segundo paréntesis.

$$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=4+1+4.$$

Observa que como en el lado izquierdo sumamos 1 y 4, debemos hacer lo mismo en el lado derecho para no alterar la igualdad.

Al factorizar los términos entre paréntesis obtenemos

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9.$$

Si comparamos ésta con la ecuación (8.2), reconocemos el radio y las coordenadas del centro:

$$r=\sqrt{9}=3 \qquad \text{y} \qquad C\,(h,k)=C(-1,2).$$

3. Encontrar el centro y el radio del círculo cuya ecuación es $4x^2 + 4y^2 - 12x + 40y + 77 = 0$.

Solución:

Dividimos entre 4:
$$x^2 + y^2 - 3x + 10y + \frac{77}{4} = 0.$$

Como antes, agrupamos los términos en x y en y y despejamos el término independiente,
$$(x^2 - 3x) + (y^2 + 10y) = -\frac{77}{4}.$$

En cada paréntesis completamos el trinomio cuadrado perfecto, sumamos las mismas cantidades en el lado derecho para que la igualdad no se altere.
$$\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 + 10y + 25\right) = -\frac{77}{4} + \frac{9}{4} + 25.$$

Factorizando los términos entre paréntesis y simplificando el lado derecho, obtenemos
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 5)^2 = 8.$$

Si comparamos esta ecuación con la (8.2), reconocemos que el centro es $C\left(\frac{3}{2}, -5\right)$ y el radio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ejercicios

Encuentra la ecuación del círculo que satisface las condiciones dadas.

1. Centro $(1, 2)$, radio 4.

2. Centro $(-4, 3)$, radio 5.

3. Centro $(5, -1)$, radio 9.

4. Centro $(-3, 2)$, radio 8.

5. Centro $(-7, 4)$, pasa por $P(-2, -2)$.

6. Centro $(-3, 2)$, pasa por $P(-5, -1)$.

7. Centro $(-5, -2)$, pasa por $P(-8, 2)$.

8. Centro $(\frac{1}{2}, 3)$, pasa por $P(\frac{3}{2}, 3 + \sqrt{3})$.

9. Centro $(3, -1)$, pasa por $P(6, 3)$.

10. Centro $(-4, -3)$, pasa por $P(-2, -4)$.

Encuentra la ecuación del círculo cuyo diámetro es AB, donde

11. $A(-1, -2) \quad B(5, 4)$.

12. $A(-5, -3) \quad B(-1, -1)$.

13. $A(-6, 7) \quad B(2, 3)$.

14. $A(8, -4) \quad B(-2, 4)$.

15. Dado el cuadrado con vértices $A(-3, 2)$, $B(-7, 2)$, $C(-7, -2)$ y $D(-3, -2)$, encuentra la ecuación del círculo inscrito y la del círculo circunscrito.

Encuentra el centro y el radio de los siguientes círculos.

16. $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 30 = 0$.

17. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$.

18. $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$.

19. $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$.

20. $9x^2 + 9y^2 - 24x + 12y + 11 = 0$.

21. $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

22. $25x^2 + 25y^2 + 30x - 10y - 6 = 0.$

23. $4x^2 + 4y^2 + 12x - 12y + 14 = 0.$

24. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + 9 = 0.$

25. $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y + 11 = 0.$

26. $x^2 + y^2 + 14x - 6y = -30.$

27. $5x^2 + 5y^2 + 25x + 15y = -19.$

28. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P(2, 2)$ y $Q(-6, 2)$, y cuyo centro está sobre la recta $6x + 5y - 18 = 0$.

29. Una cuerda del círculo $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$ se divide en partes iguales en el punto $(-4, -1)$. Encuentra la ecuación y la longitud de la cuerda.

30. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P(2, -1)$ y $Q(-9, 0)$, y cuyo centro está sobre la recta $3x - y + 6 = 0$.

31. Encuentra la ecuación del círculo que tiene como centro el punto de intersección de las rectas $x - 2y + 13 = 0$ y $2x + 7y - 29 = 0$, y como radio la distancia desde dicho punto a la recta $3x - 4y + 4 = 0$.

Intersección de un círculo con una recta

Encontrar los puntos en los que la recta $y = 2x - 10$ corta al círculo con centro en el punto $(4, -2)$ y radio $\sqrt{20}$.

Solución:

La ecuación del círculo es

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20.$$

Debemos resolver simultáneamente ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y+2)^2 &= 20 \\ y &= 2x - 10. \end{aligned}$$

Aprovechamos que en la ecuación de la recta ya está despejada la y, sustituimos su valor en la ecuación del círculo y despejamos x:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (2x-10+2)^2 &= 20 \\ (x-4)^2 + (2x-8)^2 &= 20 \\ 5x^2 - 40x + 80 &= 20 \\ 5x^2 - 40x + 60 &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{(40)^2 - 4(5)(60)}}{10} = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{10} = \frac{40 \pm 20}{10}.$$

Entonces tenemos dos valores posibles para x, a saber, $x = 6$ o $x = 2$ (figura 8-6).

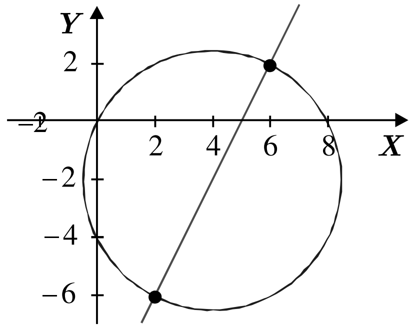


Figura 8-6

Ahora encontramos los valores de y. Si $x = 6$, entonces

$$y = 2x - 10 = 2\,(6) - 10 = 2.$$

Así, el punto es $(6, 2)$.

Si $x = 2$, entonces

$$y = 2x - 10 = 2\,(2) - 10 = -6,$$

y el punto es $(2, -6)$.

Por tanto, la recta $y = 2x - 10$ corta al círculo en los puntos $(6, 2)$ y $(2, -6)$.

En la figura 8-7 observamos que, dados un círculo y una recta, puede suceder que:

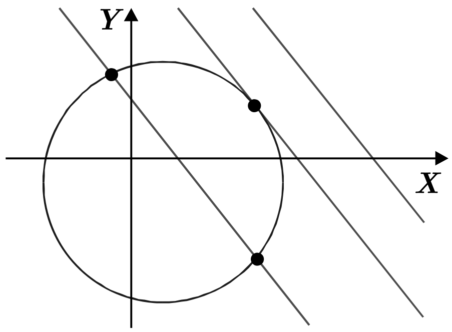


Figura 8-7

- No se corten.
- La recta corte al círculo en un punto.
- La recta corte al círculo en dos puntos.

En términos algebraicos, estas situaciones se traducen de la siguiente manera. Si consideramos las ecuaciones de la recta y del círculo y las resolvemos simultáneamente, resulta que:

- No hay solución (no se cortan).
- Hay una sola solución (se cortan en un solo punto).
- Hay dos soluciones (se cortan en dos puntos).

Ejemplos

1. Encontrar la intersección de la recta cuya ecuación es $x + y + 5 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

Solución:

Debemos resolver simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + 5 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Para ello, despejamos una de las dos variables de la ecuación de la recta; por ejemplo y,

$$y = -x - 5,$$

y la sustituimos en la ecuación del círculo:

$$x^2 + (-x - 5)^2 - 2x - 4(-x - 5) - 4 = 0.$$

Simplificamos:

$$2x^2 + 12x + 41 = 0.$$

Al aplicar la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado obtenemos

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - (4)(2)(41)}}{2(2)} = \frac{-12 \pm \sqrt{-184}}{4}.$$

Como el discriminante, es decir, el término dentro del radical, es negativo, la ecuación no tiene solución, lo cual significa que la recta y el círculo no se cortan (figura 8-8).

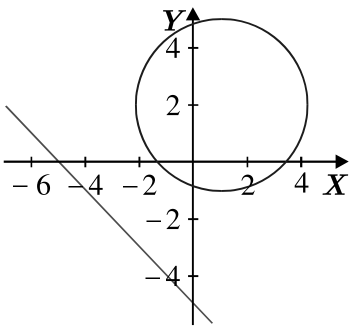


Figura 8-8

2. Encontrar la intersección del círculo cuya ecuación es $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 20$ con la recta $2x - y + 1 = 0$.

Solución:

Debemos resolver simultáneamente las ecuaciones del círculo y la recta; para esto, despejamos y de la ecuación de la recta:

$$y = 2x + 1,$$

la sustituimos en la ecuación del círculo y simplificamos

$$\begin{aligned}(x-6)^2+((2x+1)-3)^2 &= 20\\ x^2-4x+4 &= 0\\ (x-2)^2 &= 0.\end{aligned}$$

La única raíz de la última ecuación es $x=2$; sustituimos este valor en la ecuación de la recta y obtenemos $y=5$, así que el único punto donde se cortan la recta y el círculo es $P(2,5)$, lo cual significa que la recta es tangente al círculo en este punto (figura 8-9).

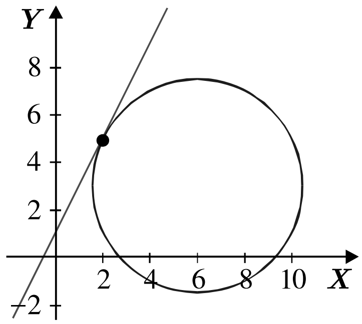


Figura 8-9

3. Encontrar la intersección del círculo $x^2+y^2=16$ y la recta $x-2y+2=0$.

Solución:

Resolvemos simultáneamente ambas ecuaciones. Despejamos x de la ecuación de la recta:

$$x=2y-2,$$

la sustituimos en la ecuación del círculo y simplificamos

$$\begin{aligned}(2y-2)^2+y^2 &= 16\\ 5y^2-8y-12 &= 0.\end{aligned}$$

Usamos la fórmula general para la solución de la ecuación de segundo grado y obtenemos

$$y=\frac{8\pm\sqrt{64+240}}{10}=\frac{4\pm2\sqrt{19}}{5};$$

es decir,

$$y_1=\frac{4+2\sqrt{19}}{5},\qquad y_2=\frac{4-2\sqrt{19}}{5};$$

Sustituimos los dos valores de y en la ecuación de la recta y obtenemos

$$x_1=\frac{-2+4\sqrt{19}}{5},\qquad x_2=\frac{-2-4\sqrt{19}}{5}$$

es decir, los puntos donde se cortan la recta y el círculo son dos (figura 8-10):

$$P\left(\frac{-2+4\sqrt{19}}{5},\frac{4+2\sqrt{19}}{5}\right)\approx(3.1,2.5)\quad\text{y}\quad Q\left(\frac{-2-4\sqrt{19}}{5},\frac{4-2\sqrt{19}}{5}\right)\approx(-3.9,-0.9)\,.$$

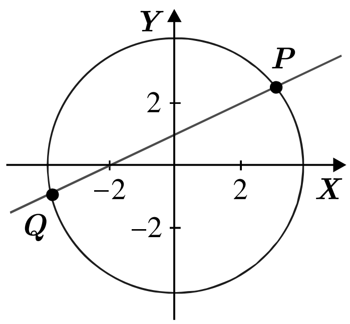


Figura 8-10

Recta tangente a un círculo

Una recta es *tangente* a un círculo si toca a éste en un solo punto. La recta tangente a un círculo tiene la propiedad de que es perpendicular al radio que une al centro del círculo con el punto de tangencia. Esta propiedad nos permite encontrar la ecuación de la recta tangente.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente al círculo $(x-3)^2+(y-12)^2=100$ en el punto $P(-5,6)$.

Solución:

Primero debemos encontrar la pendiente del radio que une a P con el centro del círculo.

El centro tiene coordenadas $(3,12)$. La pendiente buscada es

$$m=\frac{6-12}{-5-3}=\frac{3}{4},$$

de donde vemos que la pendiente de la recta tangente al círculo en P es igual a $-\frac{4}{3}$; por tanto, su ecuación es

$$y-6=-\frac{4}{3}(x-(-5)),$$

es decir (figura 8-11),

$$4x+3y+2=0.$$

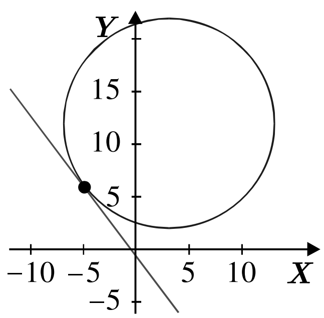


Figura 8-11

2. Encontrar la ecuación del círculo que es tangente a la recta $x-2y+2=0$ en el punto $P(8,5)$ y pasa por $Q(12,9)$.

Solución:

El centro $C(h,k)$ del círculo debe estar en la recta ℓ que es perpendicular a la recta dada y pasa por P (figura 8-12).

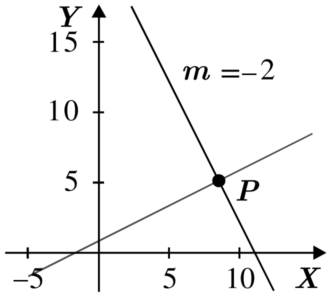


Figura 8-12

Como la recta dada tiene pendiente igual a $\frac{1}{2}$, la recta ℓ tiene pendiente $m=-2$; por tanto, su ecuación es

$$y-5=-2(x-8);$$

es decir,

$$2x+y-21=0.$$

Por tanto, las coordenadas de C satisfacen

$$2h+k-21=0. \tag{8.3}$$

Como la distancia de $C(h,k)$ a $P\,(8,5)$ debe ser igual a la distancia de $C(h,k)$ a $Q\,(12,9)$, tenemos que (figura 8-13):

$$\sqrt{(h-8)^2+(k-5)^2}=\sqrt{(h-12)^2+(k-9)^2}.$$

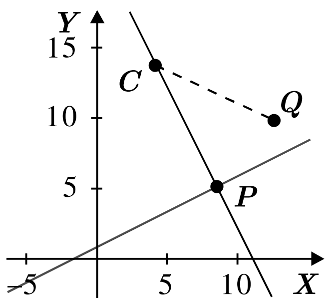


Figura 8-13

Si elevamos al cuadrado ambos miembros y simplificamos las expresiones obtenemos

$$h+k-17=0. \tag{8.4}$$

Resolvemos simultáneamente las ecuaciones (8.3) y (8.4) y encontramos que las coordenadas de C son $C(4, 13)$. El radio es la distancia de C a P:

$$r = \sqrt{(4-8)^2 + (13-5)^2} = \sqrt{80}.$$

Así que la ecuación del círculo buscado es

$$(x-4)^2 + (y-13)^2 = 80,$$

la cual se escribe en la forma general como $x^2 + y^2 - 8x - 26y + 105 = 0$ (figura 8-14).

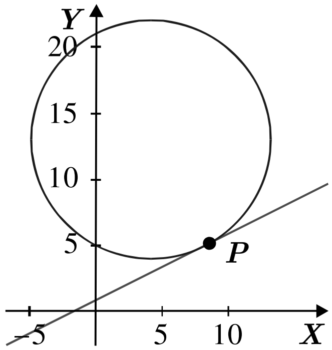


Figura 8-14

Ahora veamos otra propiedad de la recta tangente que nos servirá también para definir las rectas tangentes de las otras cónicas.

Sea P un punto de un círculo y ℓ la recta tangente al círculo que pasa por P. Observemos en la figura 8-15 que todos los puntos de ℓ distintos de P están en una sola de las dos regiones determinadas por el círculo, esto es, en la región de afuera, ya que si Q es otro punto de ℓ,

$$d\,(C, Q) > d\,(C, P)\,,$$

puesto que en el triángulo rectángulo CPQ el segmento CP es un cateto y el segmento CQ es la hipotenusa.

En general, diremos que una recta ℓ es tangente a una cónica en un punto P de ella, si corta a la cónica únicamente en P, y todos los demás puntos de ℓ están en una sola de las regiones determinadas por la cónica.

Una recta es *normal* a una cónica en un punto P de la cónica, si es la perpendicular a la recta tangente a la cónica en ese punto P.

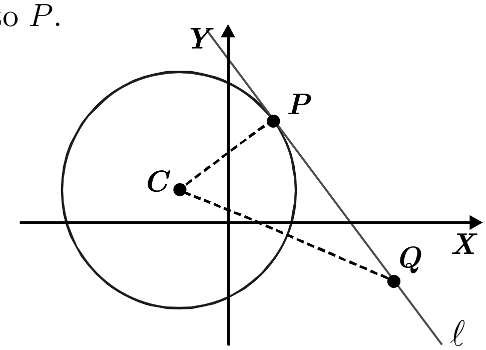


Figura 8-15

Intersección de dos círculos

Encontrar los puntos de intersección de los círculos cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$.

Solución:

Debemos resolver el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + y^2 - 3x - 4y &= 0. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Restamos la segunda ecuación de (8.5) de la primera y despejamos y:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 25 \\ y &= -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Sustituimos en la primera ecuación de (8.5):

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}\right)^2 &= 25 \\ \frac{25}{16}x^2 - \frac{75}{8}x + \frac{625}{16} &= 25 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0. \end{aligned}$$

De donde $x = 3$. Sustituimos este valor en (8.6):

$$y = -\frac{3}{4}(3) + \frac{25}{4} = 4.$$

Por tanto, los dos círculos se cortan en el punto de coordenadas $(3, 4)$ (figura 8-16).

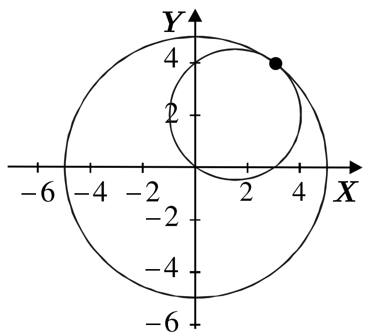


Figura 8-16

Si consideramos dos círculos, puede suceder que:

- No se corten (figura 8-17).

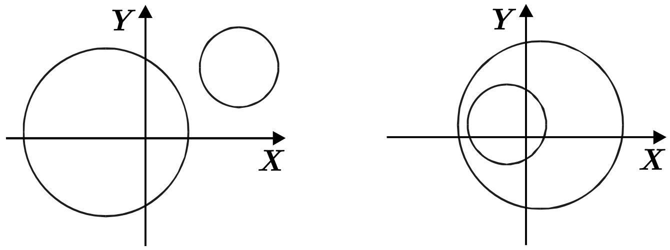


Figura 8-17

- Se corten en un solo punto (figura 8-18).

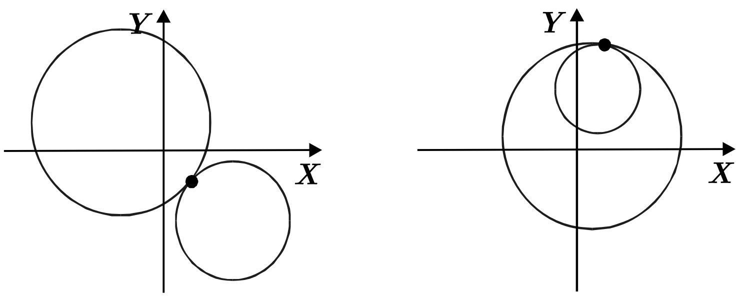


Figura 8-18

- Se corten en dos puntos (figura 8-19).

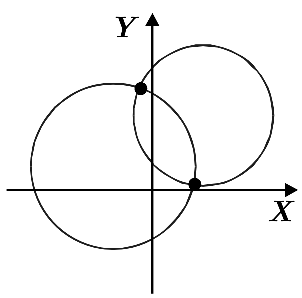


Figura 8-19

- Los círculos coincidan (figura 8-20).

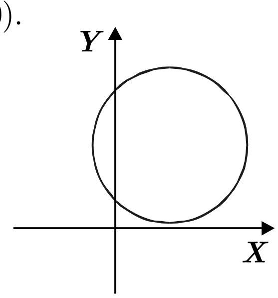


Figura 8-20

En términos algebraicos, estas situaciones se traducen de la siguiente manera. Si consideramos las ecuaciones de los dos círculos y las resolvemos simultáneamente, resulta que:

- No hay solución (no se cortan) (figura 8-17).
- Hay una sola solución (son tangentes en un punto) (figura 8-18).
- Hay dos soluciones (se cortan en dos puntos) (figura 8-19).
- Toda pareja (x, y) que es solución de una ecuación lo es de la otra (los círculos coinciden) (figura 8-20).

Supongamos que las ecuaciones de dos círculos no concéntricos son:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 &= 0 \\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 &= 0. \end{aligned}$$

Al restar la segunda ecuación de la primera, obtenemos

$$(D_1 - D_2)\,x + (E_1 - E_2)\,y + F_1 - F_2 = 0. \tag{8.7}$$

Como los círculos no son concéntricos, entonces $D_1 \neq D_2$ o $E_1 \neq E_2$, de donde tenemos que la ecuación (8.7) es una recta llamada *eje radical* de los dos círculos.

Propiedades del eje radical

- Si los dos círculos se cortan en dos puntos, entonces el eje radical pasa por estos dos puntos.
- Si los dos círculos son tangentes, entonces el eje radical es tangente a ambos círculos en su punto común.
- Si los dos círculos no se cortan, entonces el eje radical no tiene puntos en común con ninguno de los círculos.
- El eje radical es perpendicular a la recta que une los centros de los dos círculos.

Ejemplos

1. Encontrar los puntos de intersección de los círculos cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 21 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

Solución:

Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x^2+y^2+8x+6y+21 &= 0 \\ x^2+y^2-4x-2y-4 &= 0, \end{aligned}$$

restamos la segunda ecuación de la primera:

$$12x+8y+25=0.$$

Despejamos y:

$$y=-\frac{12}{8}x-\frac{25}{8}=-\frac{3}{2}x-\frac{25}{8},$$

sustituimos el valor de y en la ecuación del segundo círculo:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x-2y-4 &= 0 \\ x^2+\left(-\frac{3}{2}x-\frac{25}{8}\right)^2-4x-2\left(-\frac{3}{2}x-\frac{25}{8}\right)-4 &= 0 \\ \frac{13}{4}x^2+\frac{67}{8}x+\frac{769}{64} &= 0. \end{aligned}$$

Encontramos los valores de x:

$$x=\frac{-\frac{67}{8}\pm\sqrt{\left(\frac{67}{8}\right)^2-4\left(\frac{13}{4}\right)\left(\frac{769}{64}\right)}}{2\left(\frac{13}{4}\right)}=\frac{-\frac{67}{8}\pm\sqrt{-\frac{1377}{16}}}{2\left(\frac{13}{4}\right)}.$$

Como el discriminante es negativo, entonces no hay solución. Por tanto, los círculos no se cortan (figura 8-21) y el eje radical no corta a ninguno de los círculos.

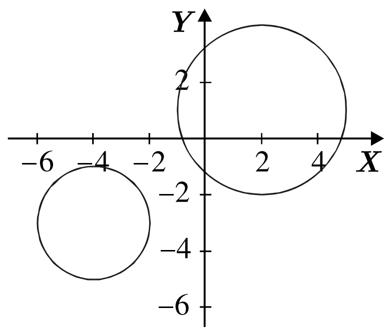


Figura 8-21

2. Encontrar la intersección de los círculos $x^2+y^2+6x-4y-23=0$ y $x^2+y^2-8x-2y+15=0$.

Solución:

Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x^2+y^2+6x-4y-23 &= 0 \\ x^2+y^2-8x-2y+15 &= 0. \end{aligned}$$

Para ello restamos la segunda ecuación de la primera, y obtenemos

$$14x - 2y - 38 = 0.$$

Que es la ecuación del eje radical. Ahora despejamos y de la recta

$$y = 7x - 19,$$

y la sustituimos en la ecuación de alguno de los círculos anteriores, luego despejamos x:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 &= 0 \\ x^2 + (7x - 19)^2 + 6x - 4(7x - 19) - 23 &= 0 \\ 50x^2 - 288x + 414 &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$x = \frac{288 \pm \sqrt{(288)^2 - 4(50)(414)}}{2(50)} = \frac{288 \pm \sqrt{82\,944 - 82\,800}}{100} = \frac{288 \pm \sqrt{144}}{100}.$$

Así, $x = 3$ o $x = \frac{69}{25}$. Para obtener los correspondientes valores de y, sustituimos estos valores de x en la ecuación de la recta.

Si $x = 3$, entonces

$$y = 7x - 19 = 7(3) - 19 = 2.$$

Si $x = \frac{69}{25} = 2.76$, entonces

$$y = 7x - 19 = 7(2.76) - 19 = 0.32.$$

Así, los círculos se cortan en los puntos $(3, 2)$ y $(2.76, 0.32)$ (figura 8-22).

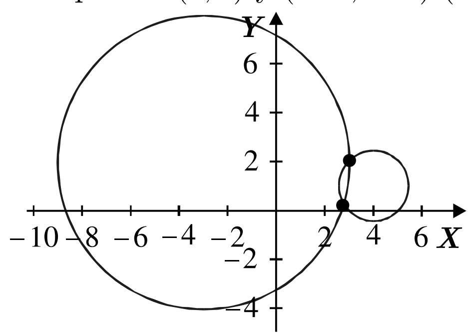


Figura 8-22

3. Encontrar la intersección de los círculos $x^2 + y^2 + 4x + 4y = 28$ y $x^2 + y^2 - 8x - 12y = -36$.

Solución:

Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x + 4y &= 28 \\ x^2 + y^2 - 8x - 12y &= -36. \end{aligned}$$

Para ello restamos la segunda ecuación de la primera, y obtenemos

$$12x + 16y - 64 = 0.$$

Ahora despejamos y de la recta

$$y = -\frac{3}{4}x + 4,$$

la sustituimos en la ecuación del primer círculo y despejamos x:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x + 4y &= 28 \\ x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 4\right)^2 + 4x + 4\left(-\frac{3}{4}x + 4\right) - 28 &= 0 \\ \frac{25}{16}x^2 - 5x + 4 &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\left(\frac{25}{16}\right)(4)}}{2\left(\frac{25}{16}\right)} = \frac{5 \pm \sqrt{0}}{\frac{25}{8}} = \frac{8}{5}.$$

Así, $x = \frac{8}{5}$. Para obtener el valor correspondiente de y sustituimos el valor de x en la ecuación de la recta.

$$y = -\frac{3}{4}x + 4 = -\frac{3}{4}\left(\frac{8}{5}\right) + 4 = \frac{14}{5}.$$

Así, los círculos se cortan en el punto $\left(\frac{8}{5}, \frac{14}{5}\right)$ (figura 8-23).

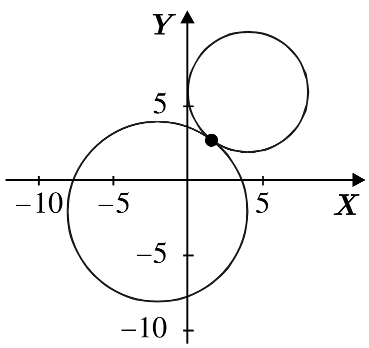


Figura 8-23

4. Encontrar el eje radical de los círculos $x^2+y^2-10x-16y+73=0$ y $x^2+y^2-2x-6y-15=0$ y demostrar que es perpendicular a la recta que une los centros de los círculos.

Solución:

En el sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x - 16y + 73 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 &= 0. \end{aligned}$$

Restamos la segunda ecuación de la primera y obtenemos

$$-8x - 10y + 88 = 0,$$

que es la ecuación del eje radical.

Para encontrar la pendiente del eje radical, escribimos la ecuación como

$$y = -\frac{8}{10}x + \frac{88}{10} = -\frac{4}{5}x + \frac{44}{5},$$

de donde la pendiente es igual a $-\frac{4}{5}$.

Encontramos los centros de los círculos escribiendo sus ecuaciones en la forma estándar. La ecuación estándar del círculo $x^2 + y^2 - 10x - 16y + 73 = 0$ es

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + y^2 - 16y &= -73 \\ \left(x^2 - 10x + 25\right) + \left(y^2 - 16y + 64\right) &= -73 + 25 + 64 \\ (x-5)^2 + (y-8)^2 &= 16. \end{aligned}$$

El centro del círculo $x^2 + y^2 - 10x - 16y + 73 = 0$ es $(5, 8)$.

La ecuación estándar del círculo $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ es

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 6y &= 15 \\ \left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) &= 15 + 1 + 9 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 &= 25. \end{aligned}$$

Así, su centro es $(1, 3)$. La recta que une los centros tiene por pendiente

$$\frac{3-8}{1-5} = \frac{5}{4}.$$

Como la pendiente de la recta que une los centros es el recíproco negativo de la pendiente del eje radical, estas dos rectas son perpendiculares (figura 8-24).

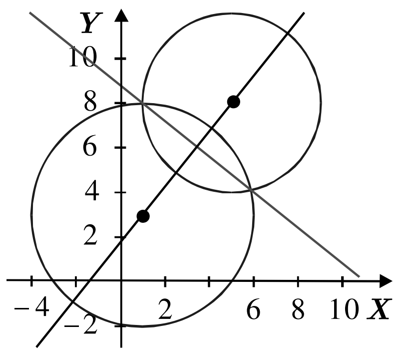


Figura 8-24

Ejercicios

En cada caso, encuentra la intersección de la recta y el círculo dados.

1. $x + y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$.

2. $2x - y + 14 = 0$, $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 25 = 0$.

3. $x + y = 0$, círculo con centro $C(-4, -2)$, $r = 4$.

4. $3x - y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 16x + 24 = 0$.

5. $y = 2x - 5$, $x^2 + y^2 + 8x + 12y + 3 = 0$.

6. $y - 7 = 0$, $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 27 = 0$.

Encuentra la ecuación de la recta tangente al círculo dado en el punto $P(x, y)$.

7. $P(3, 3)$ y el círculo con centro $C(-1, 1)$ y radio $\sqrt{20}$.

8. $P(0, -3)$ y el círculo $x^2 + y^2 - 10x - 2y - 3 = 0$.

9. $P(6, 1)$ y el círculo con centro en $C(12, 0)$ y radio $\sqrt{37}$.

10. $P\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ y el círculo $4x^2 + 4y^2 + 20x + 24y + 41 = 0$.

11. $P(13, 12)$ y el círculo con centro en $C(1, 7)$ y radio 13.

12. La recta $y = -x + 11$ es tangente a un círculo en el punto $P(4, 7)$. La recta $x = 3 - \sqrt{2}$ es tangente al mismo círculo en el punto $Q\left(3 - \sqrt{2}, 6\right)$.

- **a)** ¿Cuál es el centro del círculo?
- **b)** ¿Cuál es su ecuación?

Encuentra los puntos de intersección de los círculos dados.

13. $4x^2 + 4y^2 + 8x + 16y = 5$ y $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -\frac{19}{4}$.

14. $2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 3 = 0$ y $3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$.

15. $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 1 = 0$ y $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 13 = 0$.

16. $x^2 + y^2 - 14x + 6y = 42$ y $x^2 + y^2 - 8x - 2y = 8$.

17. $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 9 = 0$ y $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$.

18. $4x^2 + 4y^2 - 4x - 20y - 23 = 0$ y $16x^2 + 16y^2 - 16x - 80y + 23 = 0$.

19. $7x^2 + 7y^2 - 57x - 21y - 20 = 0$ y $4x^2 + 4y^2 - 36x - 16y + 12 = 0$.

20. $25x^2 + 25y^2 + 100x - 150y + 181 = 0$ y $50x^2 + 50y^2 - 50x + 250y + 37 = 0$.

El círculo que pasa por tres puntos

Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P(1, -1)$, $Q(5, 6)$ y $R(-2, 1)$.

Solución:

El centro $C(x, y)$ del círculo que buscamos equidista de los tres puntos dados; es decir,

$$d(P, C) = d(Q, C) = d(R, C).$$

Resolvemos la primera de las igualdades:

$$\begin{aligned} d(P,C) &= d(Q,C) \\ \sqrt{(x-1)^2+(y-(-1))^2} &= \sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}. \end{aligned}$$

Elevamos al cuadrado y simplificamos:

$$\begin{aligned} (x-1)^2+(y+1)^2 &= (x-5)^2+(y-6)^2 \\ x^2-2x+1+y^2+2y+1 &= x^2-10x+25+y^2-12y+36 \\ 8x+14y-59 &= 0. \end{aligned}$$

Ahora resolvemos la otra igualdad:

$$\begin{aligned} d(Q,C) &= d(R,C) \\ \sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2} &= \sqrt{(x-(-2))^2+(y-1)^2}. \end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado y simplificamos, tenemos

$$\begin{aligned} (x-5)^2+(y-6)^2 &= (x+2)^2+(y-1)^2 \\ x^2-10x+25+y^2-12y+36 &= x^2+4x+4+y^2-2y+1 \\ -14x-10y+56 &= 0 \\ -7x-5y+28 &= 0. \end{aligned}$$

Debemos resolver simultáneamente las dos ecuaciones obtenidas:

$$\begin{aligned} 8x+14y-59 &= 0 \\ -7x-5y+28 &= 0. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 7, la segunda por 8, y las sumamos:

$$\begin{array}{rcl} 56x+98y-413 &=& 0 \\ -56x-40y+224 &=& 0 \\ \hline 58y-189 &=& 0. \end{array}$$

de donde

$$y=\frac{189}{58}.$$

Sustituimos este valor de y en la primera ecuación de (8.8) para obtener el valor de x:

$$\begin{aligned} 8x+14y-59 &= 0 \\ 8x+14\left(\frac{189}{58}\right)-59 &= 0 \\ 8x &= \frac{388}{29} \\ x &= \frac{388}{(29)\,8}=\frac{97}{58}. \end{aligned}$$

Así, el centro del círculo es $C\left(\frac{97}{58},\frac{189}{58}\right)$.

Para encontrar el radio del círculo calculamos la distancia de C a cualquiera de los puntos dados; por ejemplo,

$$d(R,C)=\sqrt{\left(-2-\frac{97}{58}\right)^2+\left(1-\frac{189}{58}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{213}{58}\right)^2+\left(-\frac{131}{58}\right)^2}=\frac{13}{58}\sqrt{370}.$$

Por tanto, la ecuación del círculo es (figura 8-25):

$$\left(x-\frac{97}{58}\right)^2+\left(y-\frac{189}{58}\right)^2=\left(\frac{13}{58}\sqrt{370}\right)^2.$$

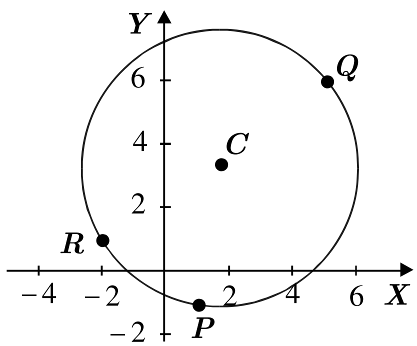


Figura 8-25

Un problema interesante es saber cuál es la cantidad mínima de puntos que determinan una curva. Por ejemplo, sabemos que por un punto pueden pasar una infinidad de rectas; en cambio, dados dos puntos, sólo hay una recta que pasa por ambos. En el caso del círculo, por uno y dos puntos puede pasar una infinidad de círculos. En cambio, por tres puntos no alineados sólo puede pasar un círculo. Los tres puntos determinan un triángulo y sabemos que el centro del *círculo circunscrito* a un triángulo es el punto donde se cortan sus *mediatrices*; este punto se llama *circuncentro*. Como las tres mediatrices se cortan en un punto, basta encontrar dos de ellas y determinar su punto de intersección para conocer el circuncentro

Ejemplo

- Encontrar el círculo que pasa por los puntos $A(2,1)$, $B(-4,3)$ y $C(-6,5)$.

  Solución:

  En el ejemplo 4 (página 305) vimos que el centro de un círculo está en la mediatriz de cualquiera de sus cuerdas. Con los tres puntos dados se forma un triángulo cuyos lados son cuerdas de cualquier círculo que pase por ellos. Por tanto, el centro de cualquiera de dichos círculos debe ser la intersección de las mediatrices de los lados del triángulo y se le denomina circuncentro. Así, cualquier círculo que pase por los tres puntos debe tener por centro al circuncentro, y el radio es la distancia de éste a cualquiera de los puntos. Esto prueba que sólo hay un círculo que pasa por tres puntos no alineados. Por lo anterior, basta encontrar la intersección de dos de las mediatrices del triángulo ABC para conocer el centro del círculo que pasa por esos tres puntos.

– Mediatriz de AB:
Encontramos el punto medio, P, del segmento AB:

$$P\left(\frac{2-4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = P\,(-1, 2)\,.$$

Encontramos la pendiente, m, del segmento AB:

$$m = \frac{3-1}{-4-2} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3},$$

entonces la mediatriz pasa por P y tiene pendiente igual a $-\frac{1}{m} = 3$; así, su ecuación es

$$\begin{aligned} y - 2 &= 3(x+1) \\ y &= 3x + 5. \end{aligned}$$

– Mediatriz de AC:
Encontramos el punto medio, Q, del segmento AC:

$$Q\left(\frac{2-6}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = Q\,(-2, 3)\,.$$

Encontramos la pendiente, m, del segmento AC:

$$m = \frac{5-1}{-6-2} = -\frac{1}{2},$$

entonces la mediatriz pasa por Q y tiene pendiente igual a $-\frac{1}{m} = 2$; así, su ecuación es

$$\begin{aligned} y - 3 &= 2(x+2) \\ y &= 2x + 7. \end{aligned}$$

Ya que tenemos dos mediatrices, las resolvemos simultáneamente para encontrar su intersección. Como en ambas tenemos despejada la y, lo más fácil es resolverlas por igualación:

$$3x + 5 = 2x + 7,$$

de donde obtenemos $x = 2$. Sustituyendo este valor en la ecuación de cualquiera de las dos mediatrices encontramos que $y = 11$, así que el circuncentro es $M(2, 11)$.

El radio del círculo es la distancia del circuncentro a cualquiera de los puntos A, B o C:

$$r = d(M, A) = \sqrt{(2-2)^2 + (11-1)^2} = 10;$$

así, la ecuación del círculo que pasa por A, B y C es el círculo con centro en M y radio r.

$$(x-2)^2 + (y-11)^2 = 100.$$

Escrita en la forma general es (figura 8-26):

$$x^2 + y^2 - 4x - 22y + 25 = 0.$$

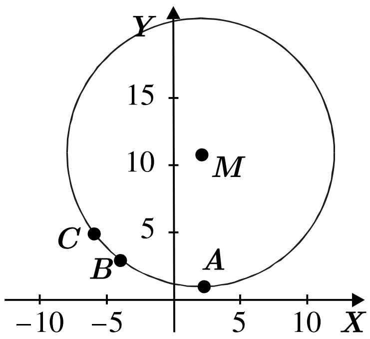


Figura 8-26

El círculo de los nueve puntos

Consideremos el triángulo con vértices $A\,(0,5)$, $B\,(-2,-3)$ y $C\,(4,1)$. Comprobar que el círculo que pasa por los puntos medios de los lados también pasa por los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro del triángulo.

Solución:

Encontramos los puntos medios de los lados:

$$\text{Lado } AB\text{:} \quad P\left(\frac{0-2}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = P\,(-1,1)\,.$$

$$\text{Lado } BC\text{:} \quad Q\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = Q\,(1,-1)\,.$$

$$\text{Lado } CA\text{:} \quad R\left(\frac{4+0}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = R\,(2,3)\,.$$

Buscamos la ecuación del círculo que pasa por los puntos P, Q y R. Llamamos $D\,(x,y)$ al centro del círculo; entonces

$$d\,(D,P) = d\,(D,Q) = d\,(D,R)\,.$$

De la primera igualdad tenemos

$$\begin{aligned}
d\,(D,P) &= d\,(D,Q)\\
\sqrt{(x-(-1))^2 + (y-1)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-(-1))^2}\\
(x+1)^2 + (y-1)^2 &= (x-1)^2 + (y+1)^2\\
x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1\\
4x - 4y &= 0.
\end{aligned}$$

De la segunda igualdad

$$\begin{aligned} d(D,Q) &= d(D,R) \\ \sqrt{(x-1)^2+(y-(-1))^2} &= \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \\ (x-1)^2+(y+1)^2 &= (x-2)^2+(y-3)^2 \\ x^2-2x+1+y^2+2y+1 &= x^2-4x+4+y^2-6y+9 \\ 2x+8y-11 &= 0. \end{aligned}$$

Ahora resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 4x-4y &= 0 \\ 2x+8y-11 &= 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación tenemos que

$$x = y.$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, y despejando x, tenemos

$$\begin{aligned} 2x+8x-11 &= 0 \\ 10x &= 11 \\ x &= \frac{11}{10}. \end{aligned}$$

De donde $D\left(\frac{11}{10},\frac{11}{10}\right)$. Para encontrar el radio del círculo, calculamos la distancia de D a P:

$$d(D,P) = \sqrt{\left(\frac{11}{10}-(-1)\right)^2+\left(\frac{11}{10}-1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{21}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{442}}{10}.$$

La ecuación del círculo es

$$\left(x-\frac{11}{10}\right)^2+\left(y-\frac{11}{10}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{442}}{10}\right)^2,$$

es decir,

$$\left(x-\frac{11}{10}\right)^2+\left(y-\frac{11}{10}\right)^2 = \frac{221}{50}. \tag{8.9}$$

Debemos encontrar los pies de las alturas. Para ello, calculamos primero las ecuaciones de las alturas. Como la altura es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto, entonces veremos cuáles son las pendientes de los lados del triángulo.

$$\text{Pendiente de } AB\text{:}\quad m_1 = \frac{-3-5}{-2-0} = 4.$$

$$\text{Pendiente de } BC\text{:}\quad m_2 = \frac{1-(-3)}{4-(-2)} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Pendiente de } CA\text{:}\quad m_3 = \frac{5-1}{0-4} = -1.$$

La pendiente de la altura que pasa por A y es perpendicular al lado BC es igual a $-\frac{3}{2}$, y la ecuación es

$$\begin{aligned} y-5 &= -\frac{3}{2}(x-0) \\ y &= -\frac{3}{2}x+5. \end{aligned}$$

La pendiente de la altura que pasa por B y es perpendicular al lado CA es igual a 1, y la ecuación es

$$\begin{aligned} y-(-3) &= 1(x-(-2)) \\ y &= x-1. \end{aligned}$$

La pendiente de la altura que pasa por C y es perpendicular al lado AB es igual a $-\frac{1}{4}$, y la ecuación es

$$\begin{aligned} y-1 &= -\frac{1}{4}(x-4) \\ y &= -\frac{1}{4}x+2. \end{aligned}$$

Para encontrar el ortocentro H, basta con resolver simultáneamente las ecuaciones de dos de las alturas:

$$\begin{aligned} y &= x-1 \\ y &= -\frac{1}{4}x+2. \end{aligned} \tag{8.10}$$

De donde

$$\begin{aligned} x-1 &= -\frac{1}{4}x+2 \\ x+\frac{1}{4}x &= 2+1 \\ \frac{5}{4}x &= 3 \\ x &= \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación de (8.10) para encontrar el valor de y:

$$y=\frac{12}{5}-1=\frac{7}{5}.$$

Así, $H\left(\frac{12}{5},\frac{7}{5}\right)$.

Las ecuaciones de los lados del triángulo son:

Lado AB

$$\begin{aligned} y-5 &= 4(x-0) \\ y &= 4x+5. \end{aligned}$$

Lado BC

$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{2}{3}(x-4) \\ y &= \frac{2}{3}x-\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Lado CA

$$\begin{aligned} y-5 &= -1(x-0) \\ y &= -x+5. \end{aligned}$$

Finalmente, para encontrar el pie E de la altura que pasa por A, debemos encontrar el punto donde se cortan ésta y el lado BC.

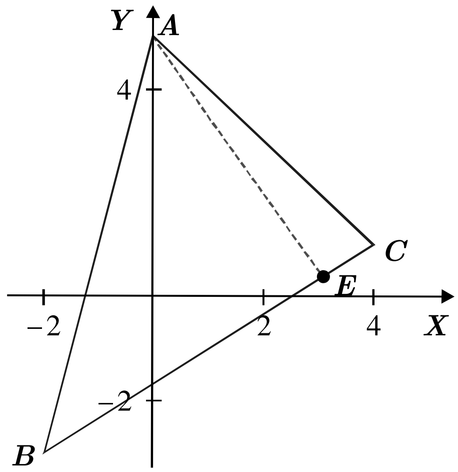


Figura 8-27

Para ello, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{2}x+5 \\ y &= \frac{2}{3}x-\frac{5}{3}, \end{aligned} \tag{8.11}$$

es decir,

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x+5 &= \frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \\ -\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}x &= -\frac{5}{3}-5 \\ -\frac{13}{6}x &= -\frac{20}{3} \\ x &= \frac{40}{13}. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la primera ecuación de (8.11) para obtener el valor de y:

$$y=-\frac{3}{2}\left(\frac{40}{13}\right)+5=\frac{5}{13}.$$

Así, $E\left(\frac{40}{13},\frac{5}{13}\right)$.

Para encontrar el pie F de la altura que pasa por B, debemos encontrar el punto donde se cortan ésta y el lado AC. Para ello, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} y &= x-1 \\ y &= -x+5, \end{aligned} \tag{8.12}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x-1 &= -x+5 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la primera ecuación de (8.12) para obtener el valor de y:

$$y = 3 - 1 = 2.$$

Así, $F\,(3,2)$.

Para encontrar el pie J de la altura que pasa por C, debemos encontrar el punto donde se cortan ésta y el lado AB. Para ello, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4}x+2 \\ y &= 4x+5, \end{aligned} \tag{8.13}$$

es decir,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x+2 &= 4x+5 \\ -\frac{1}{4}x-4x &= 5-2 \\ -\frac{17}{4}x &= 3 \\ x &= -\frac{12}{17}. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la segunda ecuación de (8.13) para obtener el valor de y:

$$y = 4\left(-\frac{12}{17}\right) + 5 = \frac{37}{17}.$$

Así, $J\left(-\frac{12}{17}, \frac{37}{17}\right)$.

Ahora debemos probar que los puntos E, F y J están en el círculo (8.9), o sea que satisfacen la ecuación de éste:

$$\left(x-\frac{11}{10}\right)^2 + \left(y-\frac{11}{10}\right)^2 = \frac{221}{50},$$

es decir,

$$E\left(\frac{40}{13},\frac{5}{13}\right):\quad \left(\frac{40}{13}-\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{5}{13}-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

$$F\,(3,2):\quad \left(3-\frac{11}{10}\right)^2+\left(2-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

$$J\left(-\frac{12}{17},\frac{37}{17}\right):\quad \left(-\frac{12}{17}-\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{37}{17}-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

Encontramos el punto medio entre cada vértice y el ortocentro.

$$\text{Punto medio de } AH:\quad K\left(\frac{\frac{12}{5}+0}{2},\frac{\frac{7}{5}+5}{2}\right)=K\left(\frac{6}{5},\frac{16}{5}\right).$$

$$\text{Punto medio de } BH:\quad L\left(\frac{\frac{12}{5}+(-2)}{2},\frac{\frac{7}{5}+(-3)}{2}\right)=L\left(\frac{1}{5},-\frac{4}{5}\right).$$

$$\text{Punto medio de } CH:\quad M\left(\frac{\frac{12}{5}+4}{2},\frac{\frac{7}{5}+1}{2}\right)=M\left(\frac{16}{5},\frac{6}{5}\right).$$

Veremos que los puntos K, L y M están en el círculo (8.9):

$$K\left(\frac{6}{5},\frac{16}{5}\right):\quad \left(\frac{6}{5}-\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{16}{5}-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

$$L\left(\frac{1}{5},-\frac{4}{5}\right):\quad \left(\frac{1}{5}-\frac{11}{10}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

$$M\left(\frac{16}{5},\frac{6}{5}\right):\quad \left(\frac{16}{5}-\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{6}{5}-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

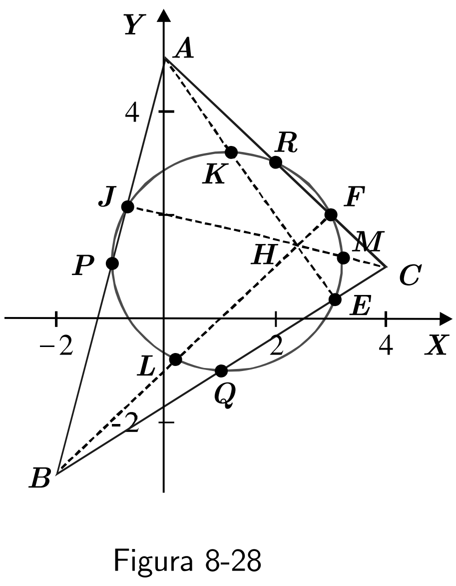


Figura 8-28

El círculo que pasa por los puntos medios de los lados, por los pies de las alturas, y por los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro de un triángulo cualquiera recibe el nombre de *círculo de los nueve puntos* del triángulo, o *círculo de Euler*.

Ejemplo

- Encontrar los nueve puntos del círculo de Euler y su ecuación a partir del triángulo rectángulo cuyos vértices son $A\,(1,9)$, $B\,(-3,-1)$ y $C\,(4,2)$.

  Solución:

  Encontramos los puntos medios de los lados:

$$\text{Lado } AB\text{:} \quad P\left(\frac{1-3}{2}, \frac{9-1}{2}\right) = P\,(-1,4)\,.$$

$$\text{Lado } BC\text{:} \quad Q\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{-1+2}{2}\right) = Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Lado } CA\text{:} \quad R\left(\frac{4+1}{2}, \frac{2+9}{2}\right) = R\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right).$$

  Debemos encontrar los pies de las alturas.

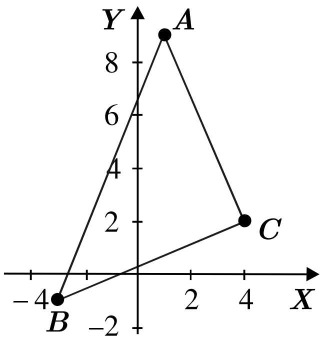


Figura 8-29

  Puesto que el triángulo es rectángulo, observamos en la figura que la recta que pasa por el vértice A y es perpendicular al lado BC es justamente el lado AC, es decir, el vértice C es el pie de una altura. Del mismo modo, C es el pie de la altura que pasa por B y es perpendicular al lado AC. Falta solamente encontrar el pie de la altura que pasa por C y es perpendicular al lado AB. Calculamos la pendiente del lado AB:

$$\text{Pendiente de } AB\text{:} \quad m_1 = \frac{-1-9}{-3-1} = \frac{5}{2}.$$

  La pendiente de la altura que pasa por C y es perpendicular al lado AB es igual a $-\frac{2}{5}$ y la ecuación es

$$\begin{aligned} y - 2 &= -\frac{2}{5}\,(x-4) \\ y &= -\frac{2}{5}x + \frac{18}{5}. \end{aligned}$$

Para encontrar el pie D de la altura que pasa por C, debemos encontrar el punto donde se cortan ésta y el lado AB. Para ello, encontramos la ecuación del lado AB:

$$\begin{aligned} y-9 &= \frac{5}{2}(x-1) \\ y &= \frac{5}{2}x+\frac{13}{2}, \end{aligned}$$

y resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{5}x+\frac{18}{5} \\ y &= \frac{5}{2}x+\frac{13}{2}. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} -\frac{2}{5}x+\frac{18}{5} &= \frac{5}{2}x+\frac{13}{2} \\ -\frac{2}{5}x-\frac{5}{2}x &= \frac{13}{2}-\frac{18}{5} \\ -\frac{29}{10}x &= \frac{29}{10} \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación de (8.14), obtenemos

$$y=-\frac{2}{5}(-1)+\frac{18}{5}=4.$$

Entonces el pie de la altura que pasa por C y es perpendicular a AB es $D(-1,4)$, el cual coincide con P, el punto medio de AB.

Como el ortocentro H es el punto de intersección de las alturas BC, CA y CD, entonces tenemos que $H=C$.

Los tres puntos que faltan son los puntos medios entre los vértices y el ortocentro. Como el ortocentro es C, los tres puntos restantes son C mismo, Q y R.

En resumen, en este caso los nueve puntos son P, Q, R, y C.

Ahora debemos encontrar la ecuación del círculo. Para ello podemos tomar cualesquiera tres de los puntos.

Tomaremos $C(4,2)$, $P(-1,4)$ y $Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Si llamamos $E(x,y)$ al centro del círculo, entonces

$$d(E,C)=d(E,P)=d(E,Q).$$

De la primera igualdad, tenemos

$$\begin{aligned} d(E,C) &= d(E,P) \\ \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} &= \sqrt{(x-(-1))^2+(y-4)^2} \\ (x-4)^2+(y-2)^2 &= (x+1)^2+(y-4)^2 \\ x^2-8x+y^2-4y+20 &= x^2+2x+y^2-8y+17 \\ 10x-4y-3 &= 0. \end{aligned}$$

De la segunda igualdad:

$$\begin{aligned} d(E,P) &= d(E,Q) \\ \sqrt{(x-(-1))^2+(y-4)^2} &= \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2} \\ (x+1)^2+(y-4)^2 &= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \\ x^2+2x+y^2-8y+17 &= x^2-x+y^2-y+\frac{1}{2} \\ 3x-7y+\frac{33}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Ahora resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 10x-4y-3 &= 0 \\ 3x-7y+\frac{33}{2} &= 0. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Multiplicando la primera ecuación por -3 y la segunda por 10, tenemos

$$\begin{aligned} -30x+12y+9 &= 0 \\ 30x-70y+165 &= 0. \end{aligned}$$

sumando:

$$-58y+174=0.$$

Despejando $y=3$, sustituimos este valor en la primera ecuación de (8.15):

$$x=\frac{2}{5}y+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}(3)+\frac{3}{10}=\frac{3}{2}.$$

De donde $E\left(\frac{3}{2},3\right)$. Para encontrar el radio del círculo, encontramos la distancia de E a P:

$$d(E,P)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-(-1)\right)^2+(3-4)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+1}=\frac{\sqrt{29}}{2}.$$

La ecuación del círculo es

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2=\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2,$$

es decir,

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{29}{4}.$$

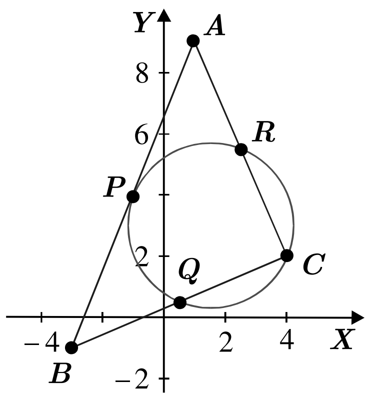


Figura 8-30

Ejercicios

Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los tres puntos dados.

1. $A(-4,7)$, $B(-1,2)$, $C(4,0)$.

2. $A(1,-3)$, $B(5,1)$, $C(9,-3)$.

3. $A(8,8)$, $B(-1,5)$, $C(1,9)$.

4. $A(-8,-2)$, $B(-1,-6)$, $C(-1,2)$.

5. $A\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$, $B(-4,0)$, $C(0,-4)$.

6. $A(1,4)$, $B(1,2)$, $C(3,4)$.

7. Encuentra el círculo de los nueve puntos del triángulo cuyos vértices son $A(5,8)$, $B(-4,8)$ y $C(5,-2)$, utiliza los puntos medios de los lados.

8. Encuentra el círculo de los nueve puntos del triángulo cuyos vértices son $A(5,8)$, $B(-9,0)$ y $C(-3,-6)$, utiliza los puntos medios de los lados.

9. Considera el triángulo cuyos vértices son $A(-1,0)$, $B(1,0)$ y $C(0,\sqrt{3})$. Encuentra los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por todos ellos.

10. Considera el triángulo cuyos vértices son $A(2,4)$, $B(5,1)$ y $C(6,5)$. Encuentra los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por todos ellos.

Resumen

- La ecuación del círculo con centro en el origen y radio r es $x^2 + y^2 = r^2$.
- La ecuación estándar o canónica del círculo con centro $C(h, k)$ y radio r es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.
- La ecuación general del círculo es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.
- La recta tangente a un círculo es perpendicular al radio que une al centro del círculo con el punto de tangencia.

Ejercicios de repaso

1. Considera el triángulo cuyos vértices son $A(-3, 1)$, $B(-1, 1)$ y $C\left(-2, 1 + \sqrt{3}\right)$. Demuestra que la distancia del punto $P\left(-2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ al vértice A es igual a la distancia del punto P al vértice B más la distancia del punto P al vértice C. Construye el circuncírculo y demuestra que P se encuentra en dicho círculo.

2. Dados los círculos $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 51 = 0$ y $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 49 = 0$, encuentra la ecuación de la recta que une sus centros.

3. Dados los círculos $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$ y $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$, encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta que une sus centros y pasa por el centro del primer círculo.

4. Dados los círculos $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 28 = 0$, $x^2 + y^2 - 14x + 12y + 76 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x - 20y + 84 = 0$:

a) Encuentra la ecuación de la recta que une los centros de los dos primeros.

b) ¿El centro del tercer círculo está en la recta que encontraste en **a)**?

5. Encuentra:

a) Los puntos de intersección de los círculos cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ y $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$.

b) La ecuación de la recta que une los puntos de intersección de los círculos.

c) La ecuación de la recta que une los centros de los círculos.

d) ¿Cómo son las dos rectas que encontraste?

e) Demuestra que la recta que pasa por los centros de los círculos es mediatriz del segmento que une los puntos donde se cortan los dos círculos.

6. Encuentra:

a) Los puntos de intersección de los círculos cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 41 = 0$ y $x^2 + y^2 - 40x - 8y + 247 = 0$.

b) La ecuación de la recta que une a los puntos de intersección de los círculos.

c) La ecuación de la recta que une a los centros de los círculos.

d) ¿Cómo son las dos rectas que encontraste?

e) Demuestra que la recta que pasa por los centros de los círculos es mediatriz del segmento que une a los puntos donde se cortan los dos círculos.

7. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P\,(x, y)$ tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos $A\,(1, 3)$ y $B\,(-2, 4)$ es igual a 20.

8. Dados los puntos $P\,(-3, 5)$, $Q\,(-1, 9)$ y $R\,(7, 5)$, encuentra el punto medio de PQ y de QR. Traza la perpendicular que pasa por el punto medio de cada segmento; después, encuentra el punto de intersección de las perpendiculares. Por último, encuentra la ecuación del círculo con centro en el punto de intersección de las perpendiculares cuyo radio es la distancia de dicho punto al punto R. ¿Los puntos P y Q están en ese círculo?

9. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P\,(1, -4)$, $Q\,(5, 4)$ y $R\,(10, -11)$.

10. Encuentra la ecuación del círculo que es tangente a la recta $x + 2y - 10 = 0$ en el punto $P\,(-4, 7)$, y cuyo centro está en la recta $x + 3y - 3 = 0$.

11. Di si la recta $7x - 9y + 25 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 + 18x - 6y + 25 = 0$ se cortan. De ser así, proporciona las coordenadas de los puntos de intersección.

12. Si los lados de un triángulo están sobre las rectas $x+3y-5 = 0$, $x+2y-4 = 0$ y $x+y+1 = 0$, encuentra la ecuación del círculo circunscrito en el triángulo.

13. Encuentra la ecuación de la recta tangente al círculo con centro en $C\,(2, -1)$ y radio 5 en el punto $P\,(6, -4)$.

14. Encuentra, si los hay, los puntos donde se cortan la recta $x + y - 1 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$.

15. Las rectas $x - 7y + 35 = 0$, $7x + y - 5 = 0$, $7x + y - 55 = 0$ y $x - 7y - 15 = 0$ determinan un cuadrado. Encuentra la ecuación del círculo circunscrito en el cuadrado.

16. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes al círculo $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 80 = 0$ en los puntos $P\,(4, -8)$ y $Q\,(2, 6)$. Después, encuentra el punto donde se cortan dichas tangentes.

Ejercicios con Geolab

Utiliza el Geolab para hacer los siguientes ejercicios.

Hay diversas maneras de dibujar un círculo con Geolab, veamos algunas.

1. **Círculo directo**. En la pantalla de datos analíticos, construye un círculo utilizando el constructor *Círculo directo*. Después de dar el nombre, oprime la tecla ENTER. Geolab construye el círculo con centro en $(0, 1)$ y radio 2. Una vez construido, cambia los valores de (a, b) y r en el panel superior.

También puedes construirlo en la pantalla gráfica. Si después de darle nombre haces clic en la pantalla blanca, en ese lugar queda el centro; luego, arrastra el ratón con el botón izquierdo oprimido para determinar el radio. Dale al centro las coordenadas $(0,0)$ y oprime el botón *Datos cartesianos* de la pantalla de datos analíticos para ver su ecuación. Mueve el centro a $(2,3)$ y ve cómo cambia la ecuación.

2. Círculo dado el centro y el radio. En la pantalla de datos analíticos, construye el punto $P\,(2,3)$ y el escalar $r=5$. Ahora utiliza el constructor *Centro y radio* del menú de círculos. Después de darle nombre, haz doble clic en el nombre P y después en el nombre r.

En lugar de doble clic en los nombres, puedes escribir P, r en el campo de datos que está a la derecha del nombre, en el panel superior.

Si construyes en la pantalla gráfica, después de dar el nombre del círculo escribe los nombres P, r en el campo de datos que está a la derecha.

3. Círculo dado su centro y uno de sus puntos. Construye los puntos $Q\,(2,-3)$ y $R\,(5,1)$. Ahora utiliza el constructor *Centro y punto* del menú de círculos para construir un círculo con centro en Q que pase por R.

4. Circuncírculo. Construye un triángulo ABC. Utiliza el constructor *Circuncírculo* para construir el circuncírculo de dicho triángulo.

Construye las mediatrices de los lados y comprueba que se cortan en el centro del circuncírculo (circuncentro).

5. Incírculo. Construye un triángulo ABC. Utiliza el constructor *Incírculo* para construir el incírculo de dicho triángulo.

Construye las bisectrices de los lados y comprueba que se cortan en el centro del incírculo (incentro).

6. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P\,(-3,4)$, $Q\,(0,-5)$ cuyo centro se encuentra sobre la recta $x-5y=0$.

Para ello, construye los puntos y la recta (l). Ahora construye la mediatriz, m, del segmento PQ y encuentra la intersección, C, de las rectas l y m.

Por último, construye el círculo con centro en C que pasa por P.

7. Ángulo que subtiende a un diámetro. Construye un círculo c y un punto, P, en él. Utiliza el constructor *Punto en Círculo*.

Construye el diámetro, d, del círculo trazando la recta que une a c y P.

Construye la otra intersección, Q, de d con el círculo. Utiliza el constructor *Intersección de recta y círculo* y elige la opción *Otro lado de un punto*.

Con el constructor *Punto en Círculo* construye otro punto R en el círculo.

Construye los segmentos $p=RP$ y $q=RP$.

Utiliza el constructor *Ángulo AOB* para construir el ángulo QRP. Ahora mueve el punto R y observa cuánto mide el ángulo QRP.

8. **Intersección de recta y círculo**. Construye la recta $m\colon\ 2x - y - 10 = 0$, y el círculo c con centro en $O\,(4,-2)$ y radio $r = \sqrt{20}$.

   La recta y el centro los puedes construir como *Recta directa* y *Punto directo.*

   Para construir el radio r utiliza el constructor *Escalar calculado* y escribe **@sqrt(20)** en el espacio para la fórmula.

   En la pantalla gráfica se ve que la recta es un diámetro del círculo, es decir, pasa por el centro y corta al círculo en dos puntos. Podemos encontrar las intersecciones por medio de las opciones *Por ratón*, *Del mismo lado de un punto* y *Del otro lado de un punto.*

   Construye una intersección, **P1**, usando el constructor *Por ratón.* Luego selecciona al punto en la lista de la derecha y arrastra el ratón. Observa cómo el punto **P1** persigue al cursor.

   Ahora construye un punto cualquiera, **A**, y otra intersección, **P2**, usando el constructor *Del mismo lado de un punto.*

9. **Recta tangente a un círculo**. Construye el círculo con centro en $O\,(3,12)$ y radio 10. Construye el punto $P(-5,6)$. Observa que el punto está sobre el círculo.

   Ahora construye la recta tangente, $t1$, al círculo que pasa por P. Utiliza el constructor *Recta tangente a círculo por ratón.* Como P pertenece al círculo, hay una sola tangente.

   Construye ahora el punto $Q\,(2,-2)$ y repite la construcción de la tangente. Llámala $t2$. Selecciónala en la columna de la derecha y arrastra el ratón, observa cómo la recta se pone del lado del cursor.

   También puedes construir una tangente utilizando los constructores *Recta tangente a círculo del mismo lado de un punto* o *Recta tangente a círculo del otro lado de un punto.* Utiliza como punto auxiliar al punto P que construiste antes. Ve cómo ahora esta tangente no aparece en la lista de la derecha y, por tanto, no la puedes mover.

   Mueve el punto Q al interior del círculo y observa que las rectas tangentes desaparecen.

10. **Intersección de círculos, eje radical**. Construye el círculo $c1$ con centro en $O1\,(-1,-1)$ y radio $r1 = 2$ y el círculo $c2$ con centro en $O2\,(2,1)$ y $r2 = 3$. Observa que estos círculos se cortan en dos puntos.

    Construye el eje radical, w, de tales círculos. Utiliza el constructor *Eje radical* del menú de rectas. Observa que esta recta pasa por los puntos de intersección.

    Selecciona el centro $O1$ y arrástralo para alejarlo del círculo $c2$. Mientras los círculos se corten, el eje radical pasará por los puntos de intersección. Cuando no se cortan, el eje radical existe a pesar de que los puntos de intersección no existan. Si esta recta la hubiéramos construido como la recta que pasa por los puntos de intersección, se hubiera perdido al alejar los círculos.

11. **Potencia de un punto a un círculo**. Utiliza la construcción del ejercicio anterior. Construye un punto R en la recta w.

    Construye una recta m que pase por R y corte al círculo $c1$.

    Construye las intersecciones $X1$ y $X2$ de la recta m con el círculo $c1$.

Construye las distancias $d1$ y $d2$ del punto R a los puntos $X1$ y $X2$, respectivamente.

Calcula el producto $p = d1 * d2$. Hazlo con el constructor *Escalar calculado*.

Ahora construye la potencia, q, de R a $c1$. Utiliza el constructor *Potencia de un punto a un círculo* del menú de escalares. Observa que $p = q$.

Por último, construye la potencia, s, de R a $c1$.

Gracias a que R está en el eje radical de $c1$ y $c2$, las dos potencias q y s son iguales, ya que el eje radical de dos círculos es el conjunto de puntos tales que sus potencias a los dos círculos son iguales.

12. Círculo de 9 puntos. Construye el triángulo cuyos vértices son $A\,(0,5)$, $B\,(-2,-3)$ y $C\,(4,1)$.

Construye las alturas ha, hb, hc y el ortocentro H, que es el punto de intersección de las alturas.

Construye los puntos D, E y F como las intersecciones de las alturas con los lados.

Construye el círculo, cir, que pasa por los puntos D, E y F.

Ahora construye los puntos medios de los lados del triángulo, llámalos L, M y N y observa que el círculo cir pasa por ellos.

Construye el punto medio entre H y A. Llámalo P. De igual manera, construye los puntos Q y R como puntos medios entre H y B, y entre H y C.

Comprueba que el círculo cir también pasa por estos tres puntos.

Es por esta razón que este círculo se llama *círculo de 9 puntos*.

Capítulo 9

La parábola

Con este capítulo iniciamos el estudio sistemático de las cónicas. Aquí presentamos a la parábola como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta y un punto fijos, donde el punto no pertenece a la recta. A esta recta se le conoce como la directriz y al punto como el foco.

La ecuación de este tipo de curva se obtiene por medio de las fórmulas de distancia de un punto a una recta y distancia entre dos puntos.

Gran parte de los ejemplos y ejercicios que presentamos en las primeras secciones de este capítulo tratan sobre la determinación de la ecuación de la parábola a partir de algunos de sus elementos característicos, o bien, a partir de algunos de ellos o de la propia ecuación de la parábola, encontrar todos esos elementos.

Mediante una regla y un compás podemos trazar parábolas; también podemos hacerlo con la ayuda de otros instrumentos como la escuadra, un hilo y un clavo; o inclusive con papel encerado. Estas técnicas se describen en este capítulo.

Al conocer las propiedades de la parábola podemos resolver problemas de aplicación. Una propiedad importante de la parábola es la de reflexión, la cual consiste en que cuando una onda viaja paralela al eje de la parábola y choca con ésta, se refleja hacia el foco y, de manera inversa, si del foco emana una onda, cuando ésta choca con la parábola, se refleja paralelamente al eje. Esta propiedad es demostrada una vez que se caracteriza cuál es la recta tangente a la parábola en un punto dado.

Gracias a esta propiedad es que se construyen faros, antenas y espejos con forma de paraboloide. Por ejemplo, estamos muy acostumbrados a escuchar que se mencionan las antenas parabólicas.

En otras secciones vemos que la trayectoria que describe un proyectil es una parábola; y mostramos que en un puente colgante hay cables tendidos entre dos puntos que toman la forma parabólica debido al peso que soportan. En caso de que este peso desapareciera, el cable tomaría la forma de una catenaria.

Definición de la parábola

Encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $F\left(0,1\right)$ y la recta ℓ cuya ecuación es $y=-1$.

Solución:

Llamemos $P\left(x,y\right)$ a un punto de dicho lugar geométrico.

Debemos igualar la distancia de P a F con la distancia de P a ℓ,

$$d\left(P,F\right)=d\left(P,\ell\right).$$

Utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos (4.1) y la de la distancia de un punto a una recta (5.15), es decir,

$$\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}=\frac{\left|Ax+By+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Al sustituir los valores proporcionados obtenemos

$$\sqrt{\left(x-0\right)^2+\left(y-1\right)^2}=\left|y+1\right|.$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(x-0\right)^2+\left(y-1\right)^2=\left(y+1\right)^2,$$

y simplificamos

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2y+1 &= y^2+2y+1 \\ x^2 &= 4y. \end{aligned}$$

El lugar geométrico buscado es el conjunto de puntos del plano que satisfacen la ecuación $x^2=4y$ (figura 9-1).

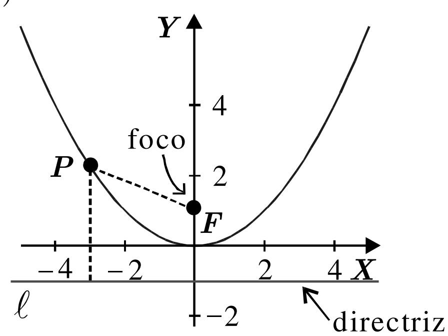


Figura 9-1

Una *parábola* es el conjunto de puntos del plano que equidistan de una recta fija y de un punto fijo que no está en dicha recta. La recta fija se llama la *directriz* de la parábola y el punto fijo se llama el *foco*. En el ejemplo anterior, la recta $y=-1$ es la directriz de la parábola y $F\left(0,1\right)$ es su foco.

Las parábolas con vértice en el origen

Parábolas verticales

De modo más general, consideremos una parábola que tiene su foco en el eje Y, digamos en el punto $F(0,p)$, donde $p>0$, cuya directriz es una recta horizontal ℓ con ecuación $y=-p$; ver la figura 9-2.

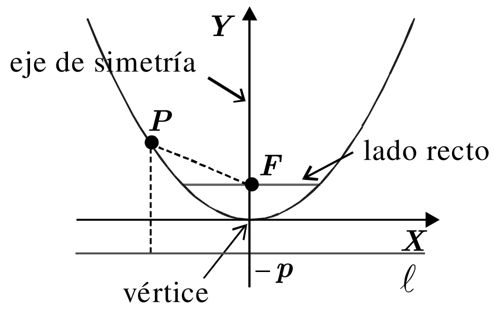


Figura 9-2

Para que un punto $P(x,y)$ pertenezca a esa parábola, debe satisfacer

$$d(P,F)=d(P,\ell). \tag{9.1}$$

Sustituyendo las coordenadas de P y F, así como la ecuación de ℓ en las fórmulas para calcular la distancia entre dos puntos (4.1) y la distancia entre un punto y una recta (5.15), obtenemos

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\frac{|y+p|}{\sqrt{1^2}}.$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

y simplificamos, obtenemos la ecuación de la parábola:

$$\boxed{x^2=4py.} \tag{9.2}$$

Ahora veamos algunos otros elementos característicos de la parábola. En la figura 9-2 observamos que la parábola pasa por el punto medio localizado entre el foco y el pie de la perpendicular que baja del foco a la directriz. Ese punto medio se llama el *vértice*, y dista p unidades tanto del foco como de la directriz. La recta que une al vértice y al foco, que en este caso es el eje Y, es llamada el *eje de simetría* de la parábola, ya que si $P(x,y)$ está en la parábola, entonces su simétrico respecto a dicho eje, que en este caso es $P(-x,y)$, también lo está, pues

$$(-x)^2=x^2=4py.$$

Un segmento de recta que une dos puntos de una parábola se conoce como *cuerda* de la parábola. La cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz, y por tanto es perpendicular al eje de simetría, se llama *lado recto* y su longitud $4p$ es el *ancho focal* de la parábola. Ver la figura 9-3.

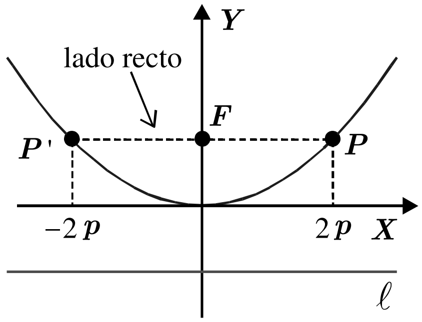


Figura 9-3

Comprobaremos que el ancho focal para la parábola $x^2 = 4py$ es $4p$.

Si P es el punto del semiplano derecho que está en la parábola y en el lado recto, entonces sus coordenadas son (x, p) y éstas satisfacen la ecuación (9.2).

Así,

$$x^2 = 4pp = 4p^2.$$

Simplificando la ecuación tenemos

$$x = 2p,$$

así que P tiene coordenadas $(2p, p)$. Por la simetría de la parábola, el punto P' tiene coordenadas $(-2p, p)$, de modo que el ancho focal es igual a la distancia entre P y P', es decir, $4p$.

La longitud del lado recto o ancho focal es igual a $4p$; *o sea,* 4 *veces la distancia del foco al vértice.*

Esta longitud nos dice qué tan abierta o cerrada es la parábola (figura 9-3).

En resumen, los elementos de la parábola son:

1. El vértice.

2. El foco.

3. La directriz.

4. La distancia p entre el foco y el vértice.

5. El eje de simetría.

6. El ancho focal $4p$.

Ahora veamos el caso en que el vértice de la parábola está en el origen, el foco se encuentra en la parte negativa del eje Y, y la directriz es paralela al eje X y corta al eje Y en su parte positiva (figura 9-4).

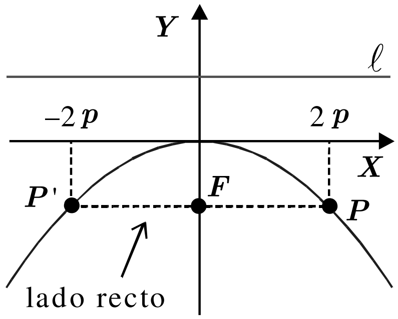


Figura 9-4

El foco es $F(0,-p)$ y la directriz es $y=p$. Si sustituimos estos valores en la ecuación de la parábola (9.1), ahora obtenemos

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+p)^2}=\frac{|y-p|}{\sqrt{1^2}};$$

si elevamos al cuadrado y simplificamos la expresión, llegamos a

$$\boxed{x^2=-4py.}$$

Observemos entonces que el signo del coeficiente de y nos dice hacia dónde abre la parábola; si es positivo, se abre hacia arriba, si es negativo abre hacia abajo.

Parábolas horizontales

Para continuar con el estudio de la parábola, consideremos las parábolas con vértice en el origen, pero ahora con el foco situado sobre el eje X.

Si el foco es $F(p,0)$ con $p>0$ y la directriz es $x=-p$, al sustituir estos valores en (9.1) obtenemos la ecuación

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\frac{|x+p|}{\sqrt{1^2}},$$

que al simplificarla se transforma en

$$\boxed{y^2=4px.} \tag{9.3}$$

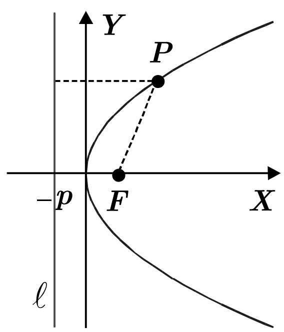


Figura 9-5

Por último, si el foco es $F(-p, 0)$ con $p > 0$ y la directriz es $x = p$, y seguimos el procedimiento anterior, obtenemos

$$\boxed{y^2 = -4px.}$$

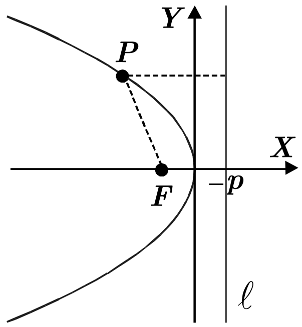


Figura 9-6

En la tabla siguiente resumimos los casos de la parábola con vértice en el origen y directriz paralela a uno de los ejes cartesianos.

En resumen:

Posición	**Abre hacia**	**Ecuación**	**Directriz**	**Vértice**	**Foco**
Vertical	arriba	$x^2 = 4py$	$y = -p$	$V(0,0)$	$F(0,p)$
Vertical	abajo	$x^2 = -4py$	$y = p$	$V(0,0)$	$F(0,-p)$
Horizontal	la derecha	$y^2 = 4px$	$x = -p$	$V(0,0)$	$F(p,0)$
Horizontal	la izquierda	$y^2 = -4px$	$x = p$	$V(0,0)$	$F(-p,0)$

Observa que la parábola abre en dirección contraria a la directriz.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuya directriz es la recta con ecuación $y = -\frac{5}{2}$.

   Solución:

   Para tener toda la información que necesitamos sobre la parábola debemos completar el siguiente cuadro:

p	**Directriz**	**Foco**	**Vértice**	**Eje de simetría**	**Horizontal o vertical**	**Abre hacia**
	$y = -\frac{5}{2}$		$(0,0)$			

Como la directriz es una recta horizontal y el vértice es $(0,0)$, entonces el eje de simetría es el eje Y y la parábola es vertical. Además, la directriz está por debajo del eje X; entonces la ecuación de la parábola es de la forma

$$x^2 = 4py.$$

Puesto que p es la distancia de la directriz al vértice, en este caso $p = \frac{5}{2}$, de donde la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4\left(\frac{5}{2}\right)y,$$

es decir,

$$\boxed{x^2 = 10y.}$$

p	**Directriz**	**Foco**	**Vértice**	**Eje de simetría**	**Horizontal o vertical**	**Abre hacia**
$\frac{5}{2}$	$y = -\frac{5}{2}$	$\left(0, \frac{5}{2}\right)$	$(0,0)$	$x = 0$	vertical	arriba

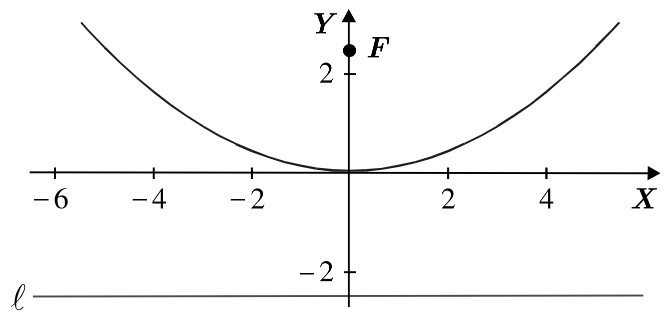


Figura 9-7

2. Encontra la ecuación de la parábola cuyo vértice se encuentra en el origen, su eje de simetría es paralelo a uno de los ejes, y que pasa por el punto $P(3,-2)$.

Solución:

De acuerdo con el enunciado, la parábola puede ser horizontal o vertical. Analizaremos los dos casos:

- Si la parábola es horizontal, como el vértice está en el origen y el punto $P(3,-2)$ tiene abscisa positiva, entonces abre a la derecha y su ecuación es de la forma

  $$y^2 = 4px.$$

  Como P está en la parábola debe satisfacer la ecuación anterior, por lo que al sustituir sus coordenadas podemos despejar p para encontrar su valor:

$$\begin{aligned}(-2)^2 &= 4p\,(3)\\ \frac{4}{12} &= p.\end{aligned}$$

La ecuación de la parábola es (figura 9-8)

$$y^2 = 4\left(\frac{1}{3}\right)x.$$

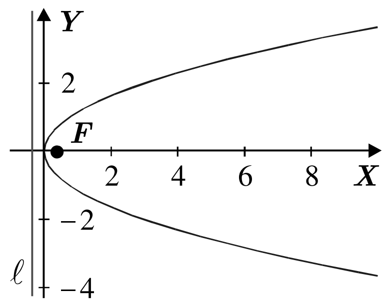


Figura 9-8

- Si la parábola es vertical, como el vértice está en el origen y el punto $P\,(3,-2)$ tiene ordenada negativa, entonces abre hacia abajo y su ecuación es de la forma $x^2 = -4py$. Como P está en la parábola debe satisfacer la ecuación anterior, por lo que al sustituir sus coordenadas podemos despejar p para encontrar su valor:

$$\begin{aligned}3^2 &= -4p\,(-2)\\ \frac{9}{8} &= p.\end{aligned}$$

La ecuación de la parábola es (figura 9-9)

$$x^2 = -4\left(\frac{9}{8}\right)y = -\frac{9}{2}y.$$

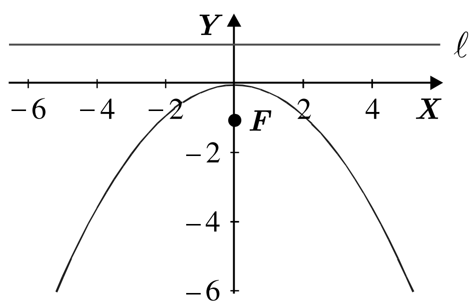


Figura 9-9

3. Encontrar la ecuación de la parábola horizontal con vértice en el origen, cuyo lado recto mide 7 unidades, y que abre hacia la izquierda.

Solución:

La parábola es de la forma

$$y^2 = -4px.$$

Como el lado recto mide 7 unidades, tenemos que

$$4p = 7;$$

sustituyendo el valor de p en la ecuación anterior, obtenemos (figura 9-10)

$$y^2 = -7x.$$

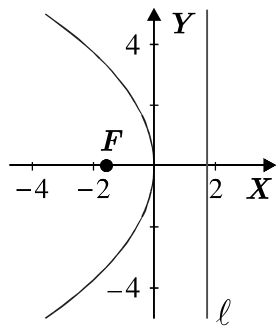


Figura 9-10

Ejercicios

Encuentra el foco y la directriz de las siguientes parábolas.

1. $y^2 = 8x$. **2.** $x^2 = -12y$. **3.** $x^2 = -y$.

4. $y^2 = 4x$. **5.** $y^2 + 2x = 0$. **6.** $3x^2 - 20y = 0$.

7. $y^2 - 24x = 0$. **8.** $x^2 + 6y = 0$. **9.** $x^2 = 7y$.

En cada caso, encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y con:

10. Directriz $x + \frac{2}{3} = 0$. **11.** Foco en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. **12.** Directriz $x = \frac{4}{5}$.

13. Foco en $(4, 0)$. **14.** Foco en $(0, -5)$. **15.** Directriz $x = 5$.

16. Directriz $y = 3$. **17.** Directriz $y = -2$. **18.** Foco en $(0, 2)$.

19. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen si el foco está sobre el eje Y y la parábola pasa por el punto $P(2, 3)$.

20. Encuentra la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen, que abre hacia abajo, y cuyo lado recto mide 12.

21. Utiliza los mismos ejes coordenados para dibujar las parábolas $y^2 = 4px$ con $p = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$.

22. Utiliza los mismos ejes coordenados para dibujar las parábolas $x^2 = -4py$ con $p = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$.

23. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen, cuyo eje es el eje X, y pasa por el punto $P\,(-6, 2)$.

24. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y que pasa por el punto $P\,(-3, 5)$.

25. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuyo lado recto es el diámetro vertical del círculo con ecuación $x^2 + y^2 - 5x - \frac{75}{4} = 0$.

26. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen que pasa por el punto de intersección de la recta $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5} - \frac{15}{2}$ y el círculo con centro en $C\,(-2, -3)$ y radio $r = 3$.

27. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por el punto $P\,(0, 2)$, por el vértice, y el foco de la parábola $y^2 = 6x$.

Construcción de la parábola

Podemos trazar parábolas mediante una regla y un compás; o bien, con la ayuda de otros instrumentos como la escuadra, un hilo y un clavo; y con papel encerado. Estas técnicas se describen a continuación.

Sugerencias para trazar una parábola conociendo su ecuación

- Localiza el vértice V. (Hasta este momento, únicamente hemos visto parábolas con vértice en el origen, pero más adelante veremos el caso general.)
- Determina el valor de p, es decir, la distancia del vértice al foco.
- Determina si la parábola es horizontal o vertical, de acuerdo con la variable que esté elevada al cuadrado.
- Determina hacia qué lado abre la parábola, de acuerdo con el coeficiente de $4p$.
- Localiza el foco F que se encuentra a p unidades hacia arriba, abajo, la derecha o la izquierda del vértice, de acuerdo con la dirección hacia donde abre la parábola.
- Traza el eje de la parábola, que es la recta que une al vértice y al foco.
- Traza la recta que contiene el lado recto, la cual es la recta que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría.
- Sobre esta recta, localiza los extremos del lado recto, los cuales se encuentran a $2p$ unidades del foco.
- Localiza algunos otros puntos de la parábola asignando valores a la variable que se encuentra elevada al cuadrado y encuentra los valores correspondientes de la otra variable.

Ejemplos

1. Trazar la parábola $x^2 = -24y$.

Solución:

- El vértice es el origen $(0, 0)$.
- Si factorizamos un 4 en el lado derecho de la ecuación, obtenemos $x^2 = -4\,(6)\,y$; así que $p = 6$.
- La parábola es vertical, debido a que la variable elevada al cuadrado es x.
- La parábola abre hacia abajo, ya que el signo que precede a $4p = 24$ es negativo. El ancho focal es 24.
- El foco, F, está 6 unidades abajo del vértice; por tanto, $F\,(0, -6)$.
- El eje Y es el eje de la parábola.
- La recta horizontal que pasa por F contiene el lado recto.
- Los extremos del lado recto son $(-12, -6)$ y $(12, -6)$.
- Localizamos algunos otros puntos de la parábola. Para ello, despejamos y y damos varios valores de x.

$$y = -\frac{x^2}{24}.$$

x	-10	-5	-1	0	1	5	10
y	-4.17	-1.04	-0.04	0	-0.04	-1.04	-4.17

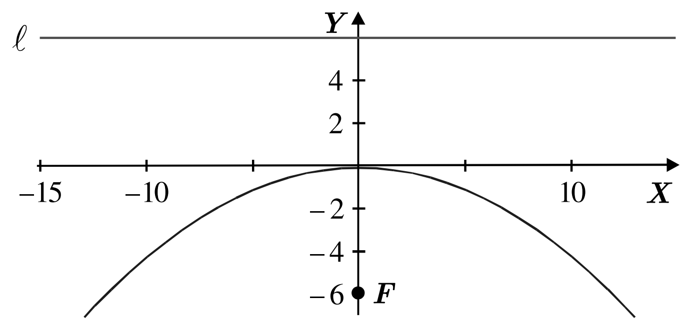


Figura 9-11

2. Encontrar la ecuación de la parábola cuyo foco es $F(-5, 0)$ y su directriz es $x = 5$.

Solución:

La parábola tiene el vértice en el origen (porque éste equidista del foco y de la directriz). La distancia del foco al vértice es $p = 5$. Como el foco está a la izquierda del vértice y la directriz está a la derecha, la parábola abre hacia la izquierda, así que su ecuación es (figura 9-12)

$$y^2 = -20x.$$

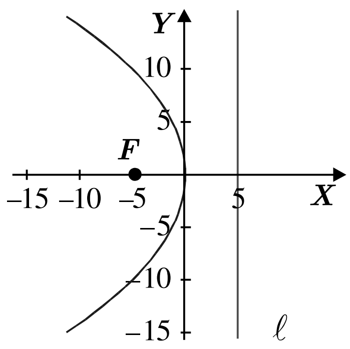


Figura 9-12

3. Encontrar la ecuación de la parábola horizontal con vértice en el origen, que abre hacia la derecha, y que pasa por el punto $Q\,(5, 8)$.

Solución:

Los datos del problema nos indican que la ecuación es de la forma

$$y^2 = 4px.$$

Sólo nos falta determinar el valor de p; para ello, sustituimos el punto $Q\,(5, 8)$ en la ecuación de la parábola y despejamos p.

$$\begin{aligned} 8^2 &= 4p\,(5) \\ p &= \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la parábola es (figura 9-13)

$$y^2 = \frac{64}{5}x.$$

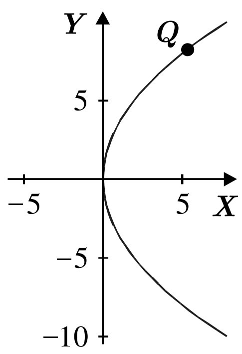


Figura 9-13

Construcción de la parábola con el uso de instrumentos

Aunque la parábola no se puede dibujar con un solo trazo por medio de una regla y un compás, estos instrumentos nos pueden ser útiles para localizar muchos de sus puntos.

Construcción con regla y compás

Supongamos que conocemos la directriz, ℓ, de la parábola y su foco F (figura 9-14).

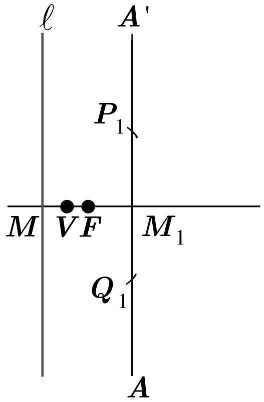


Figura 9-14

- Trazamos el eje $\overline{MF}$ de la parábola, el cual es la recta perpendicular a la directriz ℓ y que pasa por el foco F.
- Localizamos el vértice V de la parábola, que es el punto medio del segmento $\overline{MF}$.
- Para cualquier punto M_1 localizado a la derecha de V sobre el eje de la parábola, trazamos una recta $\overline{AA'}$ perpendicular al eje $\overline{MF}$. Todos los puntos de $\overline{AA'}$ distan $\overline{MM_1}$ de ℓ.
- Trazamos arcos con centro en F y radio $\overline{MM_1}$ que corten a $\overline{AA'}$ en P_1 y Q_1.
- Los puntos P_1, Q_1 pertenecen a la parábola, ya que las distancias de P_1 y Q_1 a la directriz son iguales a $\overline{MM_1}$ que, por construcción, es igual a las distancias de P_1 y Q_1 al foco F.
- De esta manera, al variar el punto M_1 podemos localizar tantos puntos de la parábola como deseemos y trazarla de modo tan preciso como queramos (figura 9-15).

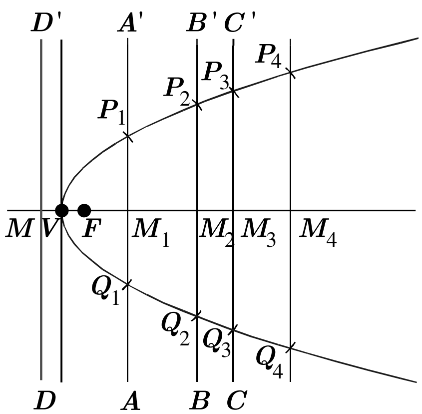


Figura 9-15

Construcción con hilo y escuadra

Supongamos que conocemos la directriz, ℓ, de la parábola y su foco F (figura 9-16).

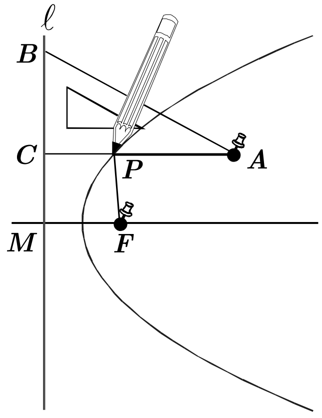


Figura 9-16

- Trazamos el eje $\overline{MF}$ de la parábola, el cual es la recta perpendicular a la directriz ℓ y que pasa por el foco F.
- Colocamos una escuadra con un cateto $\overline{CB}$ en la directriz.
- Sujetamos un extremo de un hilo de longitud $\overline{CA}$ en el extremo A de la escuadra y el otro extremo del hilo en F.
- Con un lápiz en P, mantenemos estirado el hilo y movemos la escuadra sobre la directriz. Entonces $FP = PC$ y, por tanto, P describe una parábola.

Construcción con papel doblado

Utilizamos una hoja rectangular de papel encerado (figura 9-17).

- Marcamos un punto F cerca de un lado, aproximadamente a la mitad de la hoja.
- Doblamos el papel de manera que un punto del lado inferior caiga sobre el punto F.
- Marcamos el doblez y desdoblamos.
- Seguimos haciendo dobleces de manera que los puntos del lado inferior caigan sobre F.

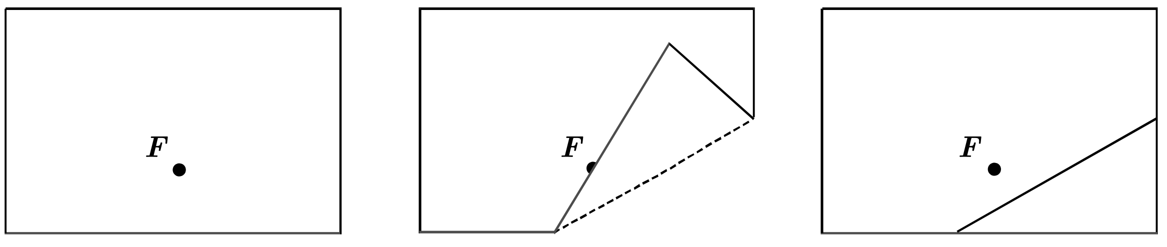


Figura 9-17

Si hacemos suficientes dobleces, nos daremos cuenta de que aparece una curva en forma de parábola. De hecho, cada doblez es tangente a la curva (figura 9-18).

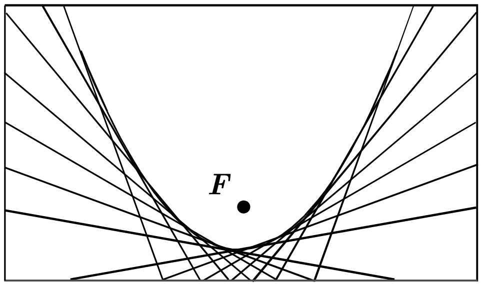


Figura 9-18

La figura 9-19 muestra que si doblamos la hoja de manera que el punto A del lado inferior coincida con F, la distancia de cada punto del doblez a F y a A es la misma, ya que el doblez determina la mediatriz del segmento $\overline{FA}$. En particular, el punto B, que es la intersección del doblez con la perpendicular al lado levantada en A, dista lo mismo de F y del lado, por lo que B está en la parábola que tiene por foco a F y directriz al lado inferior del rectángulo.

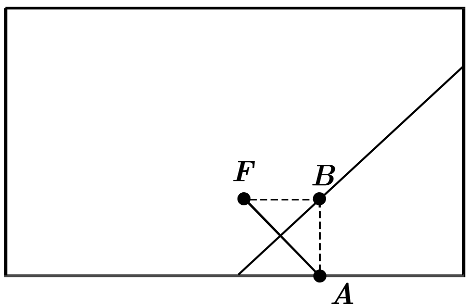


Figura 9-19

Con el Geolab, abre la construcción "parabolaenvuelve" y observa esta misma construcción.

Algunas aplicaciones de la parábola

Una propiedad importante de la parábola es la de reflexión, la cual consiste en que cuando una onda viaja paralela al eje de la parábola y choca con ésta, entonces se refleja hacia el foco y, de manera inversa, si del foco emana una onda, cuando ésta choca con la parábola, se refleja paralelamente al eje. Esta propiedad es demostrada una vez que se caracteriza cuál es la recta tangente a la parábola en un punto dado.

Gracias a esta propiedad es que se construyen faros, antenas y espejos con forma de paraboloide. Por ejemplo, estamos muy acostumbrados a escuchar sobre las antenas parabólicas.

La ecuación de la recta tangente a la parábola se obtiene mediante procedimientos de geometría analítica. En otras secciones, veremos sin demostración que la trayectoria que describe un proyectil es una parábola; asimismo, mostramos que en un puente colgante hay cables tendidos entre dos puntos, los cuales toman la forma parabólica debido al peso que soportan. En caso de que este peso desapareciera, el cable tomaría la forma de catenaria.

Antenas parabólicas

Al girar una parábola alrededor de su eje, obtenemos una superficie de revolución llamada *paraboloide.* Estas superficies tienen muchas aplicaciones, principalmente en óptica y electrónica, ya que si un rayo de luz paralelo al eje choca contra el paraboloide, entonces se refleja hacia su foco, e inversamente, si un rayo sale del foco y choca contra el paraboloide, entonces se refleja en la dirección de su eje (figura 9-20).

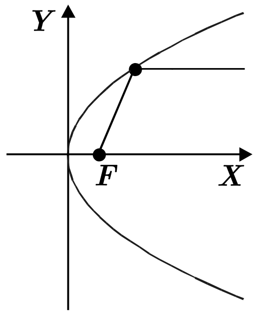


Figura 9-20

Esta propiedad, conocida como la *propiedad de reflexión* o *propiedad óptica* de la parábola, tiene muchas aplicaciones; por ejemplo, en los faros de los automóviles, las antenas parabólicas, los telescopios, los micrófonos direccionales, etc. (figura 9-21).

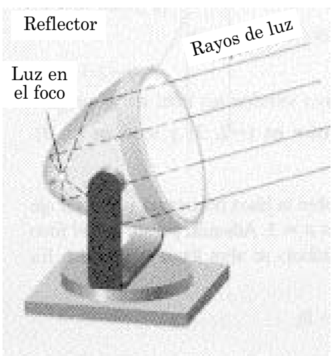


Figura 9-21

Ejemplo

- Una antena parabólica tiene diámetro de 1 metro. Si tiene una profundidad de 20 centímetros, ¿a qué altura debemos colocar el receptor?; es decir, ¿a qué distancia está el foco del vértice?

Solución:

Colocamos los ejes cartesianos de manera que el vértice de la parábola esté en el origen y su eje coincida con el eje Y. Entonces la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4py.$$

Debemos determinar el valor de p, que es la distancia del foco al vértice.

Como el diámetro de la antena es de un metro y ésta tiene una profundidad de 20 centímetros, los puntos $(0.5, 0.2)$ y $(-0.5, 0.2)$ están en la parábola. Sustituimos $(0.5, 0.2)$ en la ecuación de la parábola y despejamos p.

$$\begin{aligned} (0.5)^2 &= 4p\,(0.2) \\ 0.25 &= 0.8p \\ p &= 0.3125, \end{aligned}$$

por lo que las coordenadas del foco son $F\,(0, 0.3125)$, así que debemos colocar el receptor a una altura de 31.25 centímetros sobre el vértice (figura 9-22).

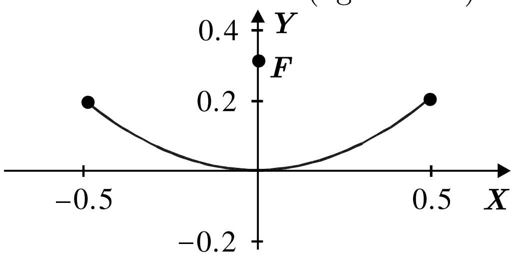


Figura 9-22

Puentes colgantes

Si un cable carga un peso homogéneo mucho mayor que el peso del propio cable, éste toma la forma de una parábola. Esta propiedad se utiliza en los puentes colgantes, como el Golden Gate de la bahía de San Francisco, en Estados Unidos (figura 9-23).

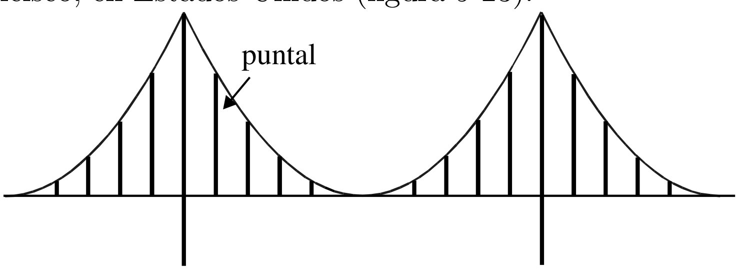


Figura 9-23

Ejemplo

- Si las torres de un puente colgante tienen una separación de 400 metros y los cables están atados a ellas a 200 metros por arriba del piso del puente, ¿qué longitud debe tener el puntal que está a 50 metros de la torre izquierda? Supongamos que el cable toca el piso en el punto medio ubicado entre las dos torres.

Solución:

Si escogemos el sistema de coordenadas con origen en V que sugiere la figura 9-24, tenemos que la ecuación de la parábola es $x^2 = 4py$. Debemos encontrar p. Como el punto $(200, 200)$ está en la parábola, resolvemos

$$200^2 = 4p\,(200)\,,$$

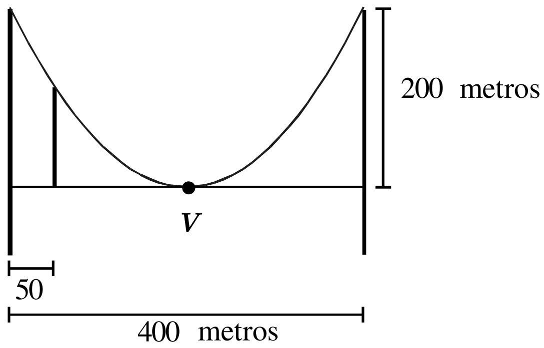


Figura 9-24

y obtenemos que $p = 50$. Así, la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 200y.$$

Ahora queremos encontrar la segunda coordenada del punto de la parábola cuya primera coordenada es $x = -150$.

Resolvemos

$$(-150)^2 = 200y$$

y obtenemos

$$y = \frac{225}{2} = 112.5.$$

Así, la altura del puntal que está a 50 metros de la torre es de 112.5 m.

Ejercicios

1. Un puente tiene una longitud de 160 metros. El cable que lo soporta tiene la forma de una parábola. Si el puntal ubicado en cada uno de los extremos tiene una altura de 25 metros, ¿cuál es la ecuación de la parábola?

2. En un puente colgante, la distancia entre sus torres es de 300 metros y la altura de las torres es de 100 metros. Describe la ecuación de la parábola formada por el cable que soporta al puente.

3. Con los datos del problema anterior, encuentra la altura del puntal que se encuentra a 50 metros del centro del puente.

4. El cable de un puente colgante está dado por la ecuación $x^2 = 400y$. Si los postes del puente tienen una altura de 50 metros, ¿cuál es la longitud del puente?

5. Con los datos del problema anterior, determina la longitud del puntal que se encuentra a 100 metros del centro del puente.

6. En un puente colgante, la distancia entre sus torres es de 200 metros y la altura de las torres es de 100 metros. Describe la ecuación de la parábola que describe el cable que soporta al puente.

7. Con los datos del problema anterior, encuentra a qué distancia del centro está un puntal de 50 metros de longitud.

8. Un diseñador de automóviles desea diseñar un faro que tenga 16 centímetros de diámetro. La bombilla que va a utilizar en él tiene el filamento a 2 centímetros del cuello. ¿Qué profundidad debe tener el faro para que el filamento quede en el foco del faro si el cuello de la bombilla se coloca a la altura del vértice del faro?

9. Como el faro del ejercicio anterior resulta demasiado profundo, el diseñador decide recortarlo 2 centímetros de manera que la profundidad sea de 6 centímetros. ¿Cuál será el diámetro del nuevo diseño de faro?

10. La antena de un radiotelescopio en forma de paraboloide tiene un diámetro de 8 metros. Si la profundidad de la antena es de 0.5 metros, ¿a qué distancia del vértice debe colocarse el receptor?

11. Una antena parabólica para televisión tiene un diámetro de 1 metro y su receptor está colocado 25 centímetros por arriba de su vértice. ¿Qué profundidad tiene la antena?

12. Con un receptor más potente, es posible reducir a la mitad el diámetro de la antena parabólica del problema anterior. Si se coloca el receptor igual que antes, ¿cuál será la profundidad de la nueva antena?

La forma estándar de la ecuación de la parábola

Encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(3,4)$ y su foco es $F(3,6)$.

Solución:

Como el vértice no está en el origen, no podemos utilizar directamente las fórmulas (9.1), pero veremos que sí las podremos usar si primero hacemos un cambio de coordenadas trasladando el origen del sistema al vértice de la parábola, como lo hicimos en el capítulo anterior. Utilizamos las fórmulas de traslación (7.3)

$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k, \end{aligned}$$

donde (h,k) son en este caso las coordenadas del vértice $V(3,4)$. Así,

$$\begin{aligned} x' &= x-3 \\ y' &= y-4. \end{aligned} \tag{9.4}$$

El vértice está en el origen O' del nuevo sistema de coordenadas, o sea, ahí sus coordenadas son $(0,0)$. Al sustituir las coordenadas de $F(3,6)$ en (9.4), obtenemos

$$\begin{aligned} x' &= 3-3=0 \\ y' &= 6-4=2, \end{aligned}$$

así que las nuevas coordenadas de F son $(0,2)$ y, por tanto, está en el nuevo eje Y'.

Como el foco $(0,2)$ se encuentra arriba del vértice $(0,0)$, la parábola abre hacia arriba. La distancia entre el vértice y el foco es $p=2$, así que la ecuación de la directriz es $y'=2$.

Ahora sí podemos utilizar las fórmulas de (9.1). Como la parábola abre hacia arriba, su ecuación es

$$\begin{aligned} (x')^2 &= 4py' \\ (x')^2 &= 8y'. \end{aligned}$$

Para expresar esta ecuación en términos de x y y, sustituimos x' y y' de acuerdo con (9.4) y obtenemos

$$(x-3)^2 = 8(y-4),$$

es decir (figura 9-25),

$$x^2-6x-8y+41=0.$$

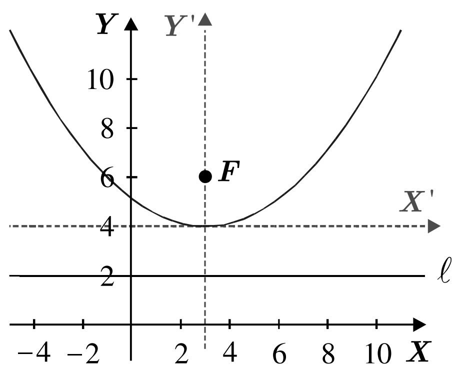


Figura 9-25

En general, cuando se sabe hacia dónde abre una parábola, horizontal o vertical, y se conocen la distancia p entre el vértice y el foco y las coordenadas (h,k) del vértice, entonces podemos concluir de manera similar al caso anterior que su ecuación es alguna de las siguientes:

- $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$, si la parábola es vertical y abre hacia arriba (figura 9-26).

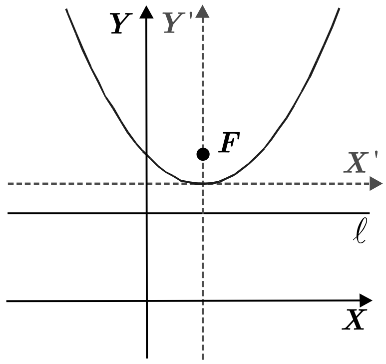


Figura 9-26

- $(x-h)^2 = -4p\,(y-k)$, si la parábola es vertical y abre hacia abajo (figura 9-27).

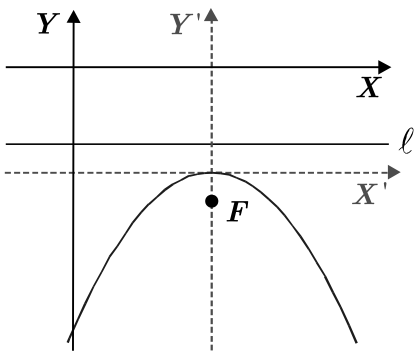


Figura 9-27

- $(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$, si la parábola es horizontal y abre hacia la derecha (figura 9-28).

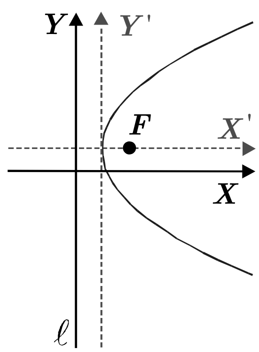


Figura 9-28

- $(y-k)^2 = -4p\,(x-h)$, si la parábola es horizontal y abre hacia la izquierda (figura 9-29).

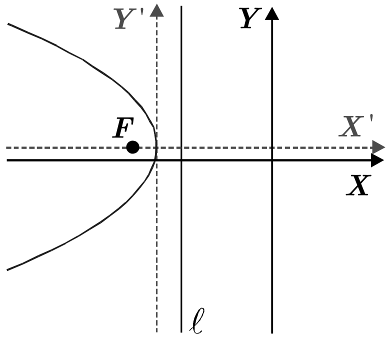


Figura 9-29

Cualquiera de estas ecuaciones se conoce como la *forma estándar* de la ecuación de la parábola.

Consideremos la forma correspondiente a una parábola horizontal que abre hacia la derecha,

$$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)\,, \quad \text{con } p > 0.$$

Al desarrollar tenemos

$$\begin{aligned} y^2 - 2yk + k^2 &= 4px - 4ph \\ y^2 - 2yk + k^2 - 4px + 4ph &= 0 \\ y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph &= 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación es de la forma

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Si la parábola abre hacia la izquierda, llegamos a una ecuación de la misma forma.

Si hacemos lo mismo con las parábolas verticales, obtenemos una ecuación de la forma

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Estas formas son casos particulares de la ecuación general de segundo grado que estudiaremos en el capítulo 12.

En resumen:

Posición	**Abre hacia**	**Ecuación**	**Directriz**	**Vértice**	**Foco**
Vertical	arriba	$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)^2$	$y = k - p$	$V\,(h,k)$	$F\,(h, k+p)$
Vertical	abajo	$(x-h)^2 = -4p\,(y-k)^2$	$y = k + p$	$V\,(h,k)$	$F\,(h, k-p)$
Horizontal	la derecha	$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$	$x = h - p$	$V\,(h,k)$	$F\,(h+p, k)$
Horizontal	la izquierda	$(y-k)^2 = -4px$	$x = h + p$	$V\,(h,k)$	$F\,(h-p, k)$

Ejemplos

1. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice está en $V(5,-2)$ y su foco está en $F(5,-4)$.

Solución:

Para tener toda la información que necesitamos sobre la parábola debemos completar el siguiente cuadro:

p	**Directriz**	**Foco**	**Vértice**	**Eje de simetría**	**Horizontal o vertical**	**Abre hacia**
		$F(5,-4)$	$V(5,-2)$			

La parábola es vertical pues su eje de simetría es la recta $x=5$. Como el foco está debajo del vértice, la parábola abre hacia abajo, la distancia del vértice al foco es $p=2$ y, por tanto, su ecuación es

$$(x-5)^2 = -4(2)\left(y-(-2)\right);$$

es decir,

$$(x-5)^2 = -8(y+2).$$

Si queremos obtener la forma general, efectuamos las operaciones y pasamos todos los términos a un lado de la ecuación:

$$\boxed{x^2-10x+8y+41=0.}$$

p	**Directriz**	**Foco**	**Vértice**	**Eje de simetría**	**Horizontal o vertical**	**Abre hacia**
2	$y=0$	$F(5,-4)$	$V(5,-2)$	$x=5$	vertical	abajo

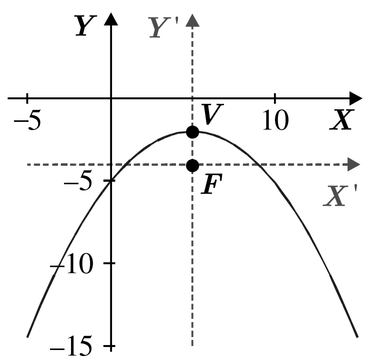


Figura 9-30

2. Encontrar los elementos de la parábola $12x - y^2 + 10y - 61 = 0$.

Solución:

Como la variable que está al cuadrado es y la parábola es horizontal, pasemos todos los términos en y a un lado de la ecuación y los demás al otro:

$$y^2 - 10y = 12x - 61.$$

En el primer miembro completamos el trinomio cuadrado perfecto, y sumamos el mismo término del otro lado de la ecuación para no alterar la igualdad:

$$\begin{aligned} y^2 - 10y + 25 &= 12x - 61 + 25 \\ (y-5)^2 &= 12(x-3). \end{aligned}$$

El vértice es $V(3,5)$. El ancho focal es

$$4p = 12,$$

y la distancia del vértice al foco es

$$p = \frac{12}{4} = 3.$$

La parábola abre hacia la derecha, así que el foco es

$$F(3+3,5) = F(6,5).$$

La directriz es la recta (figura 9-31)

$$x = 3 - 3 = 0.$$

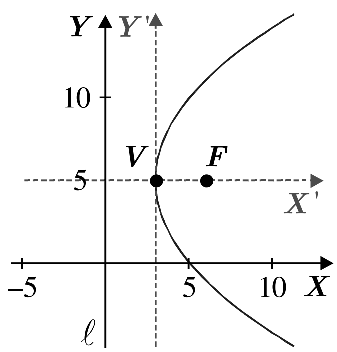


Figura 9-31

3. Encontrar los puntos de intersección de la parábola $x^2 - 4x - y + 1 = 0$ con la recta $x + y - 1 = 0$.

Solución:

Escribimos la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = -x + 1,$$

y despejamos y en la ecuación de la parábola:

$$y = x^2 - 4x + 1.$$

Al igualar las ecuaciones tenemos que

$$-x+1 = x^2 - 4x + 1.$$

Si resolvemos esta última ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0. \end{aligned}$$

Para que el producto de dos factores sea cero, alguno de ellos debe ser cero; de donde

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad x = 3.$$

Para encontrar las ordenadas correspondientes, sustituimos estos valores en la ecuación de la recta:

Si $x = 0$, entonces

$$y = -x + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Si $x = 3$, entonces

$$y = -x + 1 = -3 + 1 = -2.$$

La recta y la parábola se cortan en los puntos $(0, 1)$ y $(3, -2)$ (figura 9-32).

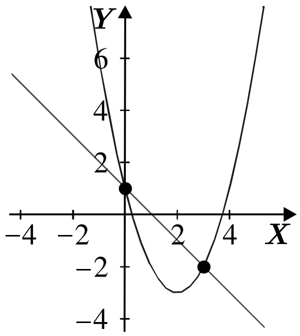


Figura 9-32

Tiro parabólico

La trayectoria de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo describe una parábola abierta hacia abajo (figura 9-33).

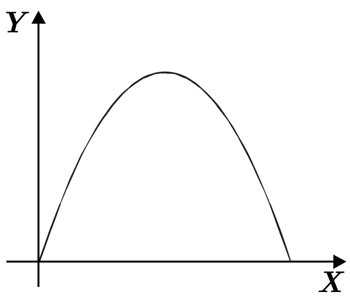


Figura 9-33

Esta propiedad fue descubierta por Galileo en el siglo XVI.
Ejemplo

- Desde el origen de coordenadas, un jugador de béisbol lanza una pelota que sigue la trayectoria descrita por la parábola $3x^2 - 240x + 160y = 0$. Considerando que las unidades son metros, ¿cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota y a qué distancia cae ésta del jugador?

  Solución:

  Llevamos la ecuación de la parábola a la forma estándar para conocer sus elementos principales.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 240x + 160y &= 0 \\ 3\left(x^2 - 80x\right) &= -160y \\ (x-40)^2 &= -\frac{160}{3}y + 1600 \\ (x-40)^2 &= -4\left(\frac{40}{3}\right)(y-30). \end{aligned}$$

  La parábola abre hacia abajo y tiene su vértice en $(40, 30)$, así que la altura máxima alcanzada es de 30 m. El origen $(0, 0)$ satisface la ecuación de la parábola. El punto en el que cae la pelota es el otro punto donde la parábola corta al eje X (figura 9-34).

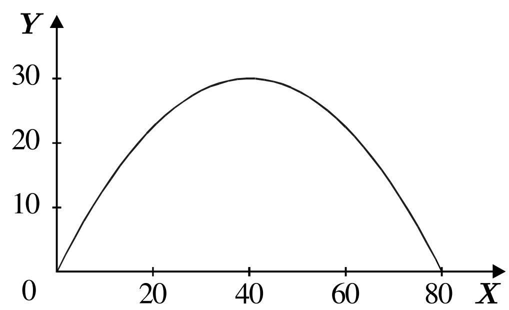


Figura 9-34

  Por la simetría de la figura, como la primera coordenada del vértice es 40, el punto donde cae la pelota es $(80, 0)$.

  También podríamos haber encontrado este dato sustituyendo $y = 0$ en la ecuación de la parábola y resolviendo la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 240x &= 0 \\ 3x(x-80) &= 0, \end{aligned}$$

  cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 80$.

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la parábola con los siguientes datos.

1. Foco $F(-3,-2)$; vértice $V(-3,-5)$.

2. Foco $F(4,-6)$; vértice $V(2,-6)$.

3. Foco $F(1,4)$; vértice $V(0,4)$.

4. Foco $F(-5,5)$; vértice $V(-5,8)$.

5. Foco $F(0,-2)$; directriz $x=5$.

6. Foco $F(5,1)$; directriz $y+7=0$.

7. Vértice $V\left(3,\frac{5}{3}\right)$; directriz $y=2$.

8. Vértice $V(3,0)$; directriz $x-10=0$.

9. Vértice $V(-4,-1)$; foco $F(-4,-3)$.

10. Vértice $V(1,6)$; foco $F(10,6)$.

11. Encuentra la ecuación de la parábola vertical con vértice en $V(-1,-1)$ y que pasa por el punto $P(1,6)$.

12. Encuentra la ecuación de la parábola horizontal con vértice en $V\left(-\frac{1}{2},1\right)$ y que pasa por el punto $P\left(\frac{7}{2},2\right)$.

13. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo foco es $F(-3,5)$, $p=\frac{5}{6}$ y eje paralelo al eje X.

14. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo foco es $F(2,7)$, ancho focal 6 y eje paralelo al eje Y.

Encuentra el foco, el vértice y la directriz de cada una de las siguientes parábolas.

15. $y^2-8y-8x+64=0$.

16. $x^2+10x+2y+29=0$.

17. $y^2+2y+20x-39=0$.

18. $x^2-y+7=0$.

19. $12x^2-72x+y+78=0$.

20. $4x^2+16x-3y+28=0$.

21. $y^2+10y-24x+49=0$.

22. $4x^2-48x-y+147=0$.

23. Encuentra la ecuación del círculo de radio 5 con centro en el vértice de la parábola cuyo foco es $F(1,-1)$, y cuya directriz es la recta $x=-3$.

24. Encuentra la ecuación general de la recta con pendiente $m=-3$ que pasa por el foco de la parábola con vértice $V(-2,2)$ y directriz $y-\frac{1}{2}=0$.

En cada caso, encuentra la intersección de la recta y la parábola.

25. Recta $6x-y-2=0$; parábola $x^2+4x-y-5=0$.

26. Recta $x-6y-15=0$; parábola $y^2-x+9y-25=0$.

27. Recta $11x-2y+7=0$; parábola $-x^2+10x-y+6=0$.

28. Recta $x-y-21=0$; parábola $-y^2-x+8y+21=0$.

29. Recta $x-2y+7=0$; parábola $x^2-10x-8y+41=0$.

30. Recta $x+2y+9=0$; parábola $x^2+6x+4y+13=0$.

31. Recta $4x-7y+38=0$; parábola $y^2-2x-4=0$.

32. Recta $x + 2y + 14 = 0$; parábola $y^2 + x + 16y + 63 = 0$.

33. Encuentra los puntos de intersección de la parábola $-y^2 + 6x + 18 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

34. Una parábola tiene ecuación $y^2 + 2x + Ey + F = 0$ y su vértice es $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, encuentra los valores de E y F y la ecuación estándar de la parábola.

35. Un niño acciona un juguete que dispara un proyectil. El proyectil describe en el aire una trayectoria parabólica con ecuación $h(t) = -4t^2 + 16t$, donde t es el tiempo en segundos y $h(t)$ es la altura que alcanza el proyectil, expresada en metros. ¿Cuántos segundos han pasado desde el lanzamiento hasta que el proyectil alcanza su altura máxima?¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?

36. Juan se encuentra en la cima de una colina y dispara un dardo con una pistola. La trayectoria que sigue el dardo está dada por la ecuación $h(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 10t + 8$, donde t es el tiempo en segundos y $h(t)$ es la altura que alcanza el dardo. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el dardo? ¿Cuántos segundos después del disparo el dardo toca el suelo?

37. Un proyectil es lanzado desde el nivel del suelo y sigue la trayectoria parabólica $(x-3)^2 = y - 9$; las unidades están dadas en kilómetros. ¿Cuál será la altura máxima del proyectil y a qué distancia del cañón caerá?

38. Una bala disparada desde el nivel del suelo sigue la trayectoria parabólica $x^2 - 100x + 25y = 0$. ¿Cuál será la altura máxima del proyectil y a qué distancia del tirador caerá si la distancia se expresa en metros?

39. Un artillero atina a un objetivo que está a 500 metros de su cañón. El cañón está en el origen de coordenadas. Encuentra la ecuación de la parábola que describió su disparo si éste alcanzó una altura máxima de 100 metros.

Las funciones cuadráticas y las parábolas

Un agricultor tiene 100 metros de alambrada. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo que puede formar con dicha alambrada para limitar la máxima área posible? (Figura 9-35)

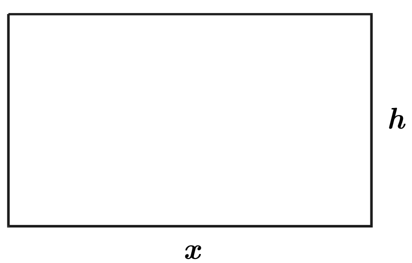


Figura 9-35

Solución:

Llamemos x a la base del rectángulo y h a su altura. El área del rectángulo es

$$A = xh.$$

El perímetro del rectángulo debe ser de 100 metros,

$$2x + 2h = 100.$$

Si despejamos h de esta última ecuación

$$h = 50 - x$$

y la sustituimos en la fórmula del área, obtenemos

$$A = x\,(50 - x) = 50x - x^2;$$

es decir, el área depende de x. Entonces podemos escribir

$$A\,(x) = 50x - x^2.$$

La gráfica de esta función es la curva

$$y = 50x - x^2.$$

Al completar el cuadrado del lado derecho, obtenemos

$$\begin{aligned} y - 25^2 &= -\,(x - 25)^2 \\ -\,(y - 625) &= (x - 25)^2\,, \end{aligned}$$

que es una parábola que abre hacia abajo con vértice en $(25, 625)$. Por lo que la función alcanza su máximo en el vértice de la parábola; es decir, cuando $x = 25$. Para este valor de la base, la altura mide

$$h = 50 - 25 = 25;$$

es decir, se trata de un cuadrado y su área es de 625 m^2 (figura 9-36).

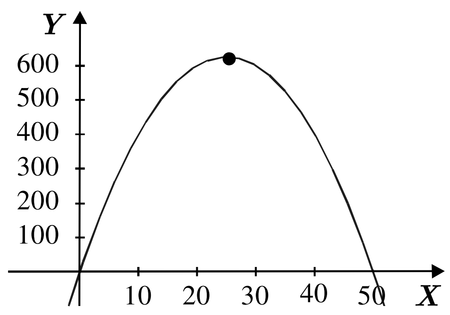


Figura 9-36

Una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad \text{con } a \neq 0,$$

se denomina *función cuadrática*. Su gráfica es la parábola vertical

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{9.5}$$

Cuando $b = c = 0$, se trata de la parábola

$$y = ax^2$$

que tiene su vértice en el origen. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y, si $a < 0$, abre hacia abajo.

Para encontrar el vértice de la parábola (9.5), escribimos la ecuación de la parábola en su forma estándar.

Completamos el cuadrado del lado derecho

$$\begin{aligned}
y - c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) \\
\frac{y-c}{a} &= x^2 + \frac{b}{a}x \\
\frac{y-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\frac{y-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \\
\frac{y}{a} + \frac{-4ac + b^2}{4a^2} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \\
\frac{1}{a}\left(y - \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)\right) &= \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

El coeficiente $\frac{1}{a}$ indica que la parábola abre hacia arriba cuando $a > 0$ y hacia abajo cuando $a < 0$.

El vértice de la parábola es

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right). \tag{9.6}$$

En la práctica, para encontrar la segunda coordenada del vértice, suele ser más fácil evaluar la ecuación (9.5) en $-\dfrac{b}{2a}$ que recordar la expresión (9.6).

Ejemplos

1. Dibujar la parábola $y = 2x^2 - 4x + 3$ y encontrar el vértice.

   Solución:

   La parábola tiene la forma de (9.5) con $a = 2$, $b = -4$, $c = 3$. De acuerdo con (9.6), la primera coordenada del vértice es

   $$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(2)} = 1;$$

para encontrar la segunda coordenada, sustituimos $x = 1$ en la ecuación de la parábola

$$y = 2(1)^2 - 4(1) + 3 = 1,$$

así que el vértice es $V(1, 1)$. O bien, podemos obtener las coordenadas del vértice de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4x + 3 \\ y - 3 &= 2\left(x^2 - 2x\right) \\ \frac{y-3}{2} + 1 &= x^2 - 2x + 1 \\ y - 1 &= 2(x-1)^2. \end{aligned}$$

Como $a = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba y el vértice es el punto más bajo de ella.

Para dibujarla conviene hacer una tabla con algunos de sus puntos.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	19	9	3	1	3	9	19

Observamos que como la parábola es simétrica con respecto a la vertical que pasa por el vértice, el valor de y para $x = 0$ y $x = 2$ es el mismo, ya que 0 y 2 distan lo mismo de 1. Pasa igual con -1 y 3 y con -2 y 4 (figura 9-37).

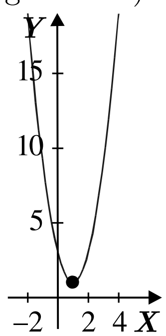


Figura 9-37

2. Un fabricante de juguetes vende cochecitos. Sabe que con un precio unitario de \$20 vendería 10 000 cochecitos en la temporada navideña, pero desea aumentar el precio. Por cada peso que aumente el precio, las ventas se reducirán en 400 cochecitos. ¿Qué precio les debe asignar para que sus ingresos sean máximos?

Solución:

Llamamos x al precio de un cochecito e I a la función ingreso. El ingreso es igual al producto de los cochecitos vendidos por su precio, es decir,

$$I(x) = xv(x),$$

donde $v(x)$ es el número de cochecitos que se venden al precio x.

Si el precio es de 21 pesos, entonces logran venderse

$$v(21) = 10\ 000 - 400.$$

Si el precio es de 22 pesos, el fabricante vende

$$v(22) = 10\ 000 - 400(2) = 10\,000 - 400(22 - 20),$$

en general,

$$v(x) = 10\,000 - 400(x - 20),$$

así que

$$I(x) = x(10\ 000 - 400(x - 20)) = -400x^2 + 18\ 000x.$$

La parábola

$$y = -400x^2 + 18\ 000x$$

abre hacia abajo y su punto más alto es su vértice.

Al completar los cuadrados

$$\begin{aligned} y &= -400x^2 + 18\ 000x \\ y &= -400\left(x^2 - 45x\right) \\ \frac{y}{-400} + \left(\frac{45}{2}\right)^2 &= x^2 - 45x + \left(\frac{45}{2}\right)^2 \\ y - 202\,500 &= -400\left(x - \frac{45}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

encontramos las coordenadas del vértice:

$$V(22.5, 202\ 500),$$

así que el precio con el que se alcanza un ingreso máximo es de \$22.50, con lo que obtenemos un ingreso de

$$-400(22.5)^2 + 18000(22.5) = \$202,500.$$

Ejercicios

1. Encuentra las dimensiones que debe tener un rectángulo para que su perímetro sea igual a 7 centímetros, y que su área sea máxima.

2. Encuentra un número positivo tal que el producto de dicho número por el número que resulta de restar dos unidades al número dado sea mínimo.

3. La suma del doble de un número, más otro, es igual a 8. Encuentra los números si el doble de su producto debe ser máximo.

4. Encuentra el número x que haga que la mitad de dicho número menos la cuarta parte de su cuadrado sea máxima.

5. Los catetos de un triángulo rectángulo suman 50. Encuentra las dimensiones del triángulo que hagan que el cuadrado de su hipotenusa sea mínima.

6. La ganancia obtenida por un comerciante al vender x cepillos está dada por $g(x) = -x^2 + 1000x - 242\ 000$. Encuentra el número de cepillos que debe vender el comerciante para obtener la mayor ganancia. ¿Cuál es la ganancia obtenida en ese caso?

7. Encuentra dos números cuya diferencia sea 5 y sean tales que el cuadrado del mayor menos el doble del cuadrado del menor sea máximo.

8. Encuentra las coordenadas del punto Q ubicado sobre la recta $y = \frac{3}{4}x - 6$ tal que el cuadrado de la distancia de Q al punto $P(-6, 2)$ sea mínimo.

La parábola que pasa por tres puntos

Vimos ya que tres puntos no alineados determinan un único círculo. Para el caso de la parábola, en general se necesitan más puntos; pero si tenemos como dato adicional que el eje de la parábola es paralelo a alguno de los ejes cartesianos, entonces sí bastan tres puntos no alineados para determinarla. Esto se debe a que la ecuación general de una parábola con eje horizontal es de la forma

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

y la ecuación de una parábola con eje vertical es de la forma

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Vemos que en ambos casos necesitamos determinar *tres* coeficientes (D, E, F). Si damos tres puntos no alineados y sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la parábola, obtenemos tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que podemos resolver y la solución es única.

Ejemplo

- Encontrar la ecuación de la parábola con eje paralelo al eje X y que pasa por $P\left(\frac{3}{4}, 9\right)$, $Q\left(-\frac{5}{4}, 1\right)$ y $R(0, 11)$.

  Solución:

  Como el eje de la parábola es paralelo al eje X, entonces la ecuación general de la parábola tiene la forma

  $$y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

  Como la parábola pasa por los tres puntos, entonces las coordenadas de dichos puntos satisfacen la ecuación anterior. Al sustituir estos valores, obtenemos

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 81 & + & \frac{3}{4}D & + & 9E & + & F & = & 0 \\ 1 & - & \frac{5}{4}D & + & E & + & F & = & 0 \\ 121 & & & + & 11E & + & F & = & 0, \end{array}$$

Ahora resolvemos el sistema. Primero pasamos el término independiente al otro lado de la igualdad

$$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{3}{4}D & + & 9E & + & F & = & -81 \\ -\frac{5}{4}D & + & E & + & F & = & -1 \\ & & 11E & + & F & = & -121, \end{array}$$

de la última ecuación despejamos F; así,

$$F = -121 - 11E \tag{9.7}$$

y sustituimos este valor en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}D + 9E + (-121 - 11E) &= -81 \\ -\frac{5}{4}D + E + (-121 - 11E) &= -1; \end{aligned}$$

simplificando, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}D - 2E &= 40 \\ -\frac{5}{4}D - 10E &= 120. \end{aligned}$$

Dividimos la última ecuación entre -5 y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}D - 2E &= 40 \\ \frac{1}{4}D + 2E &= -24, \end{aligned}$$

sumamos las ecuaciones y obtenemos

$$D = 16.$$

Sustituimos este valor en la última ecuación y despejamos E,

$$E = -14.$$

Sustituimos el valor de E en (9.7) para obtener el valor de F,

$$F = 33,$$

entonces la ecuación de la parábola es

$$y^2 + 16x - 14y + 33 = 0.$$

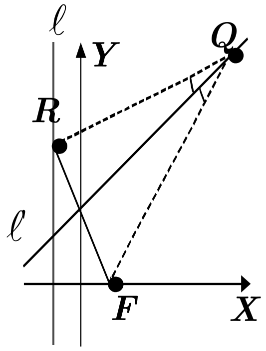


Figura 9-38

Ejercicios

1. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los puntos $P\,(6, 12)$, $Q\left(\frac{2}{3}, 8\right)$ y $R\left(\frac{1}{6}, 5\right)$.

2. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y y que pasa por los puntos $P\left(0, -\frac{7}{4}\right)$, $Q\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ y $R\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$.

3. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y y que pasa por los puntos $P\,(-1, 4)$, $Q\,(3, -38)$ y $R\,(-4, 4)$.

4. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y y que pasa por los puntos $P\,(-1, -9)$, $Q\,(4, -19)$ y $R\,(2, -3)$.

5. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X, que pasa por el centro del círculo $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ y por los puntos donde se corta dicho círculo con la parábola $(y-4)^2 = 4\,(x+4)$ y que no tienen abscisa 2.

6. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los puntos $P\,(0, 0)$, $Q\,(8, 8)$ y $R\,(6, 12)$.

7. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y, que pasa por el centro del círculo $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 25 = 0$, por el punto de intersección de las rectas $2x - y - 4 = 0$ y $x + 2y + 13 = 0$ y por el punto $P\,(1, -11)$.

8. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X, que pasa por el punto $P\,(-4, 7)$, por el punto de intersección de la recta $x - y - 1 = 0$ con la perpendicular a ella que pasa por el punto $T\,(0, -1)$ y por el vértice de la parábola $x^2 - 10x - 4y + 41 = 0$.

La recta tangente a la parábola

Recordemos que, en la sección de la tangente a un círculo, dijimos que una recta ℓ es *tangente* a una cónica en un punto P si corta a la cónica únicamente en P y todos los demás puntos de ℓ están en una misma de las regiones determinadas por la cónica.

En el primer caso de la figura 9-39, la recta corta a la parábola en dos puntos; en el segundo caso, corta a la parábola en un punto, pero tiene una parte dentro y otra fuera de la parábola. En cambio, en el tercero, la recta toca a la parábola en un solo punto y el resto de sus puntos siempre están fuera de la parábola. Así, únicamente en este tercer caso la recta es tangente a la parábola.

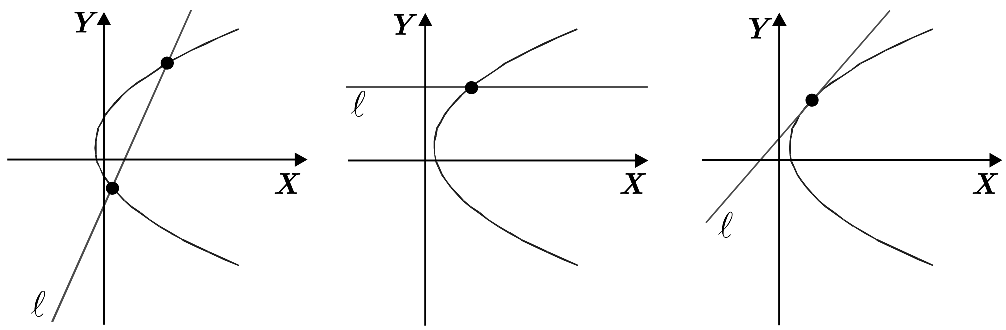


Figura 9-39

El teorema siguiente nos permitirá encontrar la ecuación de la recta tangente a una parábola en un punto.

Teorema 1 Dado un punto P en la parábola

$$y^2 = 4px, \tag{9.8}$$

la bisectriz del ángulo RPF formado por la recta FP, que une el foco F con P, y la recta horizontal RP (figura 9-40) es la recta tangente a la parábola en el punto P.

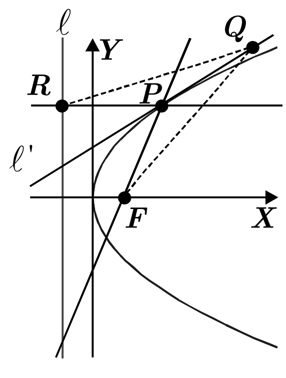


Figura 9-40

Demostración: En la figura 9-40, ℓ es la directriz de la parábola, ℓ' la bisectriz del ángulo RPF, R es el punto en donde la recta horizontal que pasa por P corta a la directriz, y puesto que

$$d(P,R) = d(P,F),$$

tenemos que el triángulo RPF es isósceles, y, por tanto, ℓ' es la mediatriz de RF.

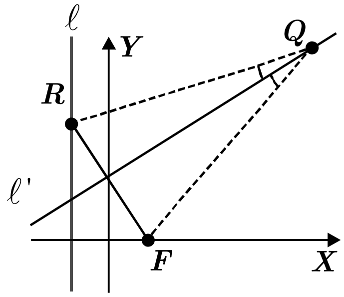


Figura 9-41

Así, para cualquier Q de ℓ' (figura 9-41), tenemos

$$d(Q,R) = d(Q,F),$$

pero si $Q \neq P$, entonces la distancia de Q a la directriz es menor que la distancia de Q a R, así que

$$d(Q,\ell) < d(Q,R),$$

luego

$$d(Q,\ell) < d(Q,F)$$

y, por tanto, Q está fuera de la parábola. Como esto pasa para todo punto $Q \neq P$ de la bisectriz ℓ', entonces ℓ' es la recta tangente a la parábola en P, con lo que el teorema queda demostrado. ∎

Entonces, para encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola

$$y^2 = 4px$$

en el punto P, lo que debemos hacer es encontrar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por la recta FP y la recta horizontal RP; donde R es el punto en el que la recta horizontal que pasa por P corta a la directriz.

Teorema 2 La ecuación de la recta tangente a la parábola

$$y^2 = 4px, \quad \text{con } p > 0,$$

en un punto $P(x_1, y_1)$ de la recta, distinto del vértice, es

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_1}{2x_1}(x - x_1).} \tag{9.9}$$

En el vértice, la recta tangente es el eje Y, el cual tiene por ecuación $x = 0$.

Ejemplo

- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 8x$ que pasa por el punto $Q(2,4)$ (figura 9-40).

Solución:

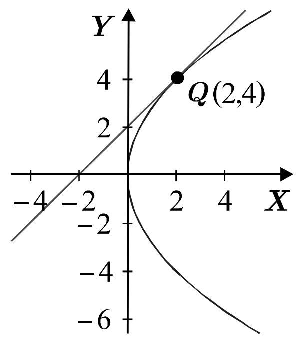


Figura 9-42

Si sustituimos las coordenadas de Q en la ecuación (9.9) y simplificamos, obtenemos

$$\begin{aligned} y-4 &= \frac{4}{2\,(2)}\,(x-2) \\ x-y+2 &= 0. \end{aligned}$$

La recta tangente a una parábola vertical con vértice en el origen en un punto $Q(x_1, y_1)$ es

$$\boxed{y - y_1 = \frac{2y_1}{x_1}\,(x - x_1)\,.} \tag{9.10}$$

Ejemplo

- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $3x^2 + y = 0$ en el punto $Q(1, -3)$.

  Solución:

  Como la variable que está elevada al cuadrado es x la parábola es vertical; la ecuación de la recta tangente tiene la forma (9.10), y si sustituimos las coordenadas de Q en esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} y-y_1 &= \frac{2y_1}{x_1}\,(x-x_1) \\ y-(-3) &= \frac{2\,(-3)}{1}\,(x-1) \\ y+3 &= -6\,(x-1)\,, \end{aligned}$$

  al simplificar, obtenemos

$$6x + y - 3 = 0.$$

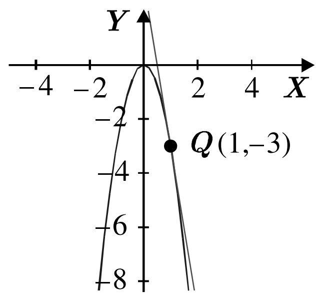


Figura 9-43

Ahora veamos cómo encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola horizontal con vértice en $V(h,k)$ y foco $F(h+p,k)$ en el punto $Q\left(x_1,y_1\right)$.

Trasladamos los ejes para que el origen quede en V mediante la sustitución

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k. \tag{9.11}$$

Las coordenadas de Q con respecto a los nuevos ejes son

$$x_1' = x_1 - h \quad \text{y} \quad y_1' = y_1 - k. \tag{9.12}$$

Como la parábola es horizontal, entonces por (9.9)

$$y' - y_1' = \frac{y_1'}{2x_1'}\left(x' - x_1'\right).$$

Al sustituir x', y', x_1', y_1' de acuerdo con (9.11) y (9.12), obtenemos que la recta tangente a la parábola en $Q(x_1,y_1)$ es

$$y - y_1 = \frac{y_1 - k}{2\left(x_1 - h\right)}\left(x - x_1\right),$$

donde $Q(x_1,y_1)$ es el punto de tangencia y $V(h,k)$ es el vértice de la parábola.

Ejemplo

- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 10y - 8x + 9 = 0$ en el punto $Q\left(-\frac{3}{2},7\right)$.

  Solución:

  Escribimos la ecuación de la parábola en la forma estándar

$$\begin{aligned} y^2 - 10y - 8x + 9 &= 0 \\ y^2 - 10y &= 8x - 9 \\ (y-5)^2 &= 8x - 9 + 25 \\ (y-5)^2 &= 8x + 16 \\ (y-5)^2 &= 8\left(x+2\right). \end{aligned}$$

  Observamos que la parábola es horizontal y su vértice es $V(-2,5)$, así que la ecuación de la recta tangente en $Q\left(-\frac{3}{2},7\right)$ es

$$y - 7 = \frac{7-5}{2\left(-\frac{3}{2}+2\right)}\left(x + \frac{3}{2}\right);$$

  después de simplificar, obtenemos (figura 9-44)

$$2x - y + 10 = 0.$$

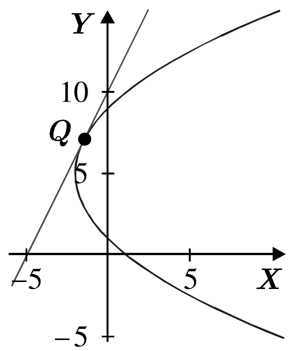


Figura 9-44

En resumen, la ecuación de la recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ es

Si la parábola es horizontal:	$y - y_1 = \dfrac{y_1 - k}{2(x_1 - h)}(x - x_1)$.
Si la parábola es vertical:	$y - y_1 = \dfrac{2(y_1 - k)}{x_1 - h}(x - x_1)$.

Ejercicios

En cada caso, encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto dado.

1. $3x^2 - y - 3 = 0$; $Q(4, 45)$.

2. $3y^2 + 2x = 0$; $Q\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$.

3. $x^2 - 3y = 0$; $Q\left(2, \frac{4}{3}\right)$.

4. $y^2 - 4y - 12x - 20 = 0$; $Q\left(-\frac{5}{4}, -1\right)$.

5. $3y^2 + 6y - 4x - 5 = 0$; $Q(10, 3)$.

6. $x^2 + 4x - 8y - 20 = 0$; $Q(-2, -3)$.

7. $y^2 + x = 0$; $Q(-4, 2)$.

8. $y^2 + 5x + 5 = 0$; $Q(-6, 5)$.

9. $x^2 - 3x - 4y - \frac{7}{4} = 0$; $Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

10. $2y^2 + 12y - x + 22 = 0$; $Q(36, 1)$.

11. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y^2 - 8x - 6y - 39 = 0$ en los extremos de su lado recto. Muestra que dichas rectas son perpendiculares.

12. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y^2 - 7x + 6y + 16 = 0$ en los puntos $Q\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y $Q'\left(\frac{11}{4}, -\frac{13}{2}\right)$. Encuentra las coordenadas del punto en el que se cortan las dos rectas, y muestra que dicho punto está sobre la directriz de la parábola.

13. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 12x - 20y + 116 = 0$ en el punto $Q\left(4, \frac{21}{5}\right)$. Encuentra las coordenadas del punto P en el que se cortan dicha recta tangente y la directriz. Encuentra las coordenadas del punto P' en el que se cortan la recta que contiene al lado recto y la recta tangente que encontraste. Muestra que si F es el foco de la parábola, entonces $d(P, F) = d(P', F)$.

Resumen

- Parábolas con vértice en el origen y directriz paralela a uno de los ejes cartesianos.

Posición	**Abre hacia**	**Ecuación**	**Directriz**	**Vértice**	**Foco**
Vertical	arriba	$x^2 = 4py$	$y = -p$	$V(0,0)$	$F(0,p)$
Vertical	abajo	$x^2 = -4py$	$y = p$	$V(0,0)$	$F(0,-p)$
Horizontal	la derecha	$y^2 = 4px$	$x = -p$	$V(0,0)$	$F(p,0)$
Horizontal	la izquierda	$y^2 = -4px$	$x = p$	$V(0,0)$	$F(-p,0)$

- Extremos del lado recto
  - Vertical:
    - Foco $F(0,p)$: $(2p,p)$ y $(-2p,p)$.
    - Foco $F(0,-p)$: $(2p,-p)$ y $(-2p,-p)$.
  - Horizontal:
    - Foco $F(p,0)$: $(p,2p)$ y $(p,-2p)$.
    - Foco $F(-p,0)$: $(-p,2p)$ y $(-p,-2p)$.
- Ecuación de la tangente de la parábola con vértice en $V(0,0)$ en un punto $Q(x_1,y_1)$:
  - Vertical: $y - y_1 = \dfrac{2y_1}{x_1}(x - x_1)$.
  - Horizotal: $y - y_1 = \dfrac{y_1}{2x_1}(x - x_1)$.
- Parábolas con vértice en $V(h,k)$ y directriz paralela a uno de los ejes cartesianos.

Posición	**Abre hacia**	**Ecuación**	**Directriz**	**Vértice**	**Foco**
Vertical	arriba	$(x-h)^2 = 4p(y-k)^2$	$y = k - p$	$V(h,k)$	$F(h,k+p)$
Vertical	abajo	$(x-h)^2 = -4p(y-k)^2$	$y = k + p$	$V(h,k)$	$F(h,k-p)$
Horizontal	la derecha	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$x = h - p$	$V(h,k)$	$F(h+p,k)$
Horizontal	la izquierda	$(y-k)^2 = -4px$	$x = h + p$	$V(h,k)$	$F(h-p,k)$

- Extremos del lado recto
  - Vertical:
    - Foco $F(h,k+p)$: $(h+2p,k+p)$ y $(h-2p,k+p)$.
    - Foco $F(h,k-p)$: $(h+2p,k-p)$ y $(h-2p,k-p)$.

- Horizontal:
  - Foco $F\,(h+p,k)$: $(h+p,k+2p)$ y $(h+p,k-2p)$.
  - Foco $F\,(h-p,k)$: $(h-p,k+2p)$ y $(h-p,k-2p)$.

- Ecuación de la recta tangente con vértice en $V\,(h,k)$ en un punto $Q(x_1,y_1)$:
  - Vertical: $y-y_1=\dfrac{2\,(y_1-k)}{x_1-h}\,(x-x_1)$.
  - Horizontal: $y-y_1=\dfrac{y_1-k}{2\,(x_1-h)}\,(x-x_1)$.

- Ecuación general de una parábola con eje:
  - Vertical: $x^2+Dx+Ey+F=0$.
  - Horizontal: $y^2+Dx+Ey+F=0$.

Ejercicios de repaso

1. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P\,(x,y)$ tales que equidisten del eje Y y del punto $Q\,(2,3)$.

2. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice es el centro del círculo $x^2+y^2-2x+2y=0$ y la directriz es $x=2$.

3. Encuentra el vértice, el foco y la directriz de la parábola $x^2-6x-4y+1=0$.

4. Encuentra la ecuación de la parábola vertical que abre hacia abajo, cuyo vértice es el centro del círculo $x^2+y^2-14y+40=0$, y la distancia del vértice a la directriz es 6.

5. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la directriz de la parábola $y^2+8x-10y+49=0$ en el punto $P\,(-1,7)$.

6. Considera la parábola $y^2-x=0$. Determina la ecuación de la recta tangente en el punto $P\,(1,1)$. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la tangente que pasa por P. Encuentra el punto donde se cortan ambas rectas con el eje X. Si A y B son los puntos obtenidos, demuestra que éstos equidistan del foco de la parábola.

7. Encuentra los puntos donde se cortan la parábola $y^2-x=0$ y el círculo $x^2+y^2-2x=0$.

8. Demuestra que las rectas tangentes a la parábola $x^2+6x+8y-7=0$ en los puntos $P\,(1,0)$ y $Q\,(-7,0)$ son perpendiculares entre sí.

9. Demuestra que el círculo con centro en $C\left(\frac{17}{32},\frac{3}{8}\right)$ y radio $r=\frac{25}{32}$ es tangente a la directriz de la parábola $y^2-x=0$.

10. Encuentra los puntos donde se cortan las parábolas $y^2+32x-256=0$ y $y^2-8x-16=0$.

11. Encuentra el punto de la parábola $y^2-4x+4y+16=0$ en el que la recta tangente tiene pendiente igual a $-\frac{1}{2}$.

12. Considera la parábola $x^2-y=0$.

a. Encuentra la ecuación del círculo que tiene como diámetro la cuerda de la parábola que pasa por el punto $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ y el foco de la parábola.

b. Encuentra la ecuación del círculo que tiene como diámetro la cuerda de la parábola que pasa por el punto $Q\,(1,1)$ y el foco de la parábola.

13. Considera la parábola $x^2+12x+12y+48=0$. Encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(-2,-\frac{7}{3}\right)$. Encuentra el punto en donde se cortan la recta tangente y el eje de la parábola, y llámalo Q. Encuentra las coordenadas del foco F de la parábola. Demuestra que el triángulo QFP es isósceles.

14. Considera la parábola $y^2-2x=0$. Encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto $P\,(2,2)$. Después encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta tangente en el punto P. Demuestra que el punto en donde se cortan la última recta y el eje X tiene coordenadas $(3,0)$.

15. Considera la parábola $x^2-6y\ =0$. Encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto $P\,(6,6)$. Encuentra las coordenadas del foco. Demuestra que el ángulo formado entre la recta tangente y la recta que une a P con el foco es igual al ángulo que forma la recta paralela al eje Y, que pasa por P, con la tangente.

16. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos en donde se cortan las parábolas $x^2-12x-4y+44=0$ y $y^2-5x+4y+34=0$.

17. Encuentra el ángulo de tiro del cañón del problema **37** de la página 370.

18. Encuentra el ángulo de tiro de la bala del problema **38** de la página 370.

19. Encuentra el ángulo de tiro del cañón del problema **39** de la página 370.

Ejercicios con Geolab

Utiliza el Geolab para hacer los siguientes ejercicios.

1. **Parábola dados foco y directriz.** Construye la parábola cuyo foco es $F(-5,0)$ y su directriz es $x=5$. Para ello construye primero el foco y la directriz, y después utiliza el constructor *Parábola: Foco Directriz* del menú de cónicas.

2. **Parábola dados foco y vértice.** Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice está en $V(5,-2)$ y su foco está en $F(5,-4)$.

Observa que Geolab no tiene un constructor para construir una parábola dados el foco y el vértice, así que con los datos que tienes debes construir la directriz para después utilizar la construcción de foco y directriz. La directriz es una recta perpendicular al eje de la parábola y está a la misma distancia del vértice que el foco, pero del lado opuesto.

Construye la recta, e, que pasa por V y F, y el círculo, c, con centro en V que pasa por F.

Construye la intersección del círculo y la recta que está del otro lado de F. Llámala D.

Construye la recta, d, perpendicular a e que pasa por D. Ésta es la directriz.

Por último, construye la parábola con foco F y directriz d.

3. **Parábola calculada.** Encuentra los elementos de la parábola cuya ecuación es $12x-y^2+10y-61=0$.

Para construir una parábola dada su ecuación, utiliza el constructor *Calculada* del menú de cónicas. Llama p a la parábola y asigna los siguientes valores a los coeficientes de la ecuación: $A = 0$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 12$, $E = 10$, $F = -61$.

En la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor en el renglón de la parábola y oprime el botón de **datos** para ver toda la información de pertinente.

4. **Intersección de recta y parábola.** Encuentra los puntos de intersección de la recta $x + y - 1 = 0$ con la parábola $x^2 - 4x - y + 1 = 0$.

   Construye la parábola p cuya ecuación es $x^2 - 4x - y + 1 = 0$ y la recta m cuya ecuación es $x + y - 1 = 0$, para ello utiliza el constructor *Calculada* del menú de cónicas y de rectas, respectivamente.

   Construye el punto $P1$ usando *Intersección de recta y cónica por ratón* del menú de puntos. Elige al punto en la lista de la derecha y arrastra el ratón en la pantalla. Observa que el punto persigue al cursor y se pone en la intersección más cercana al cursor. En la ventana de datos analíticos puedes ver sus coordenadas.

   Construye un punto auxiliar, A, cualquiera. Ahora construye el punto $P2$ utilizando *Intersección de recta y cónica del mismo lado de un punto.* Ahora mueve el punto A en la pantalla y observa cómo el punto $P2$ se pone en la intersección más cercana al punto A.

5. **Familia de parábolas.** Dibuja parábolas que tengan su foco en el eje X y cuya directriz sea el eje Y.

   Construye la recta d con ecuación $x = 0$ y un escalar $t = -10$.

   Construye el punto F cuyas coordenadas sean $(t, 0)$. Utiliza el constructor *Punto calculado.* Dale los valores $x = t$, $y = 0$.

   Construye la parábola p con foco F y directriz d.

   Ahora construye una animación. Anima el punto t entre -10 y 10. En la pantalla gráfica, ejecuta la animación para ver cómo varían las parábolas.

   Si quieres que se queden dibujadas todas las parábolas, en la pantalla de datos analíticos indica que la parábola deja traza y, en la pantalla gráfica, selecciona el botón que está en el margen izquierdo junto a la letra T. Ejecuta la animación nuevamente.

6. **Recta tangente a una parábola.** Dada la parábola cuyo foco es $F(2, 3)$ y cuya directriz es $x + y + 1 = 0$, encuentra la recta tangente a ella que pasa por el punto $P(-1, -1)$.Utiliza el constructor *Tangente a cónica por ratón.* Una vez construida la tangente, elígela en la tabla de la derecha de la pantalla y arrástrala con el ratón de uno a otro lado de la parábola.

   Construye otro punto Q cualquiera y ahora construye la tangente a la parábola desde P, usa el constructor *Tangente a cónica del mismo lado de un punto.* Mueve el punto Q y observa cómo lo persigue la tangente.

7. **Parábola tangente a cuatro rectas.** Dadas cuatro rectas, dos de ellas no paralelas, hay una única parábola que es tangente a ellas. Construye cuatro rectas y la parábola tangente a ellas. ¿Qué sucede cuando dos de las rectas son paralelas?

Capítulo 10

La elipse

En este capítulo, presentamos a la elipse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Con la ayuda de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos encontramos la ecuación de este lugar geométrico. También proporcionaremos métodos matemáticos y físicos para dibujar una elipse.

Explicaremos el concepto de excentricidad, el cual también aparecerá para la parábola y la hipérbola en capítulos posteriores, cuando demos una definición unificada de estas tres cónicas en términos de un foco y una directriz.

Enunciaremos y demostraremos la propiedad de reflexión de la elipse: una onda que emana de uno de sus focos se reflejará en su otro foco. A esta propiedad se le han dado usos ópticos, acústicos y de calentamiento. En el caso acústico, un ejemplo de esto es la Cámara del Secreto construida en el siglo XVIII por los frailes carmelitas y que está ubicada en San Ángel, al sur de la capilla de Chimalistac en la Ciudad de México. Así se le llama porque el sonido producido en susurro en un punto de ella se reproduce audiblemente en otro punto.

La primera ley de Kepler, la cual establece que los planetas se mueven en órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol, es quizás el resultado que más popularidad ha dado a esta curva.

Definición de la elipse

Encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a $F'(-3,0)$ y a $F(3,0)$ sea 10.

Solución:

Llamemos $P(x,y)$ a un punto de dicho lugar geométrico.

Debemos sumar la distancia de P a F' y la de P a F e igualar a 10.

$$d(P,F') + d(P,F) = 10. \tag{10.1}$$

Utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos (4.1)

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Sustituimos las coordenadas de F' y F en (10.1):

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-(-3))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} &= 10 \\
\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} + \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} &= 10.
\end{aligned}$$

Pasamos una de las raíces cuadradas al otro lado de la igualdad y elevamos todo al cuadrado:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} &= 10 - \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} \\
\left(\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2}\right)^2 &= \left(10 - \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2}\right)^2 \\
x^2 + 6x + 9 + y^2 &= 100 - 20\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} + x^2 - 6x + 9 + y^2.
\end{aligned}$$

En el lado derecho dejamos únicamente la raíz, simplificamos y de nuevo elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned}
x^2 + 6x + 9 + y^2 - \left(109 + x^2 - 6x + y^2\right) &= -20\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} \\
4(3x - 25) &= -20\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} \\
(3x - 25)^2 &= \left(-5\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2}\right)^2 \\
9x^2 - 150x + 625 &= 25x^2 - 150x + 225 + 25y^2.
\end{aligned}$$

Pasamos todo a un lado de la igualdad y obtenemos que el lugar geométrico deseado es el conjunto de puntos que satisface la ecuación

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0.$$

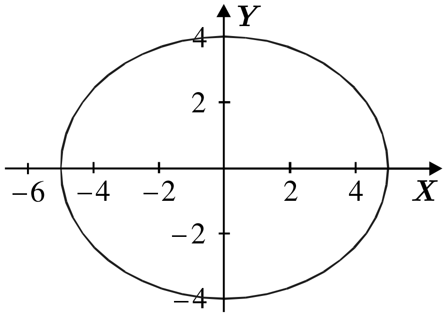


Figura 10-1

Una *elipse* es el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman *focos* de la elipse. El punto medio localizado entre los dos focos se llama *centro* de la elipse. En el ejemplo anterior, los focos son $F'(-3,0)$ y $F(3,0)$, y el centro es $C(0,0)$.

Elipse con centro en el origen

Elipse horizontal

Comencemos con el análisis de una elipse con centro en el origen y focos en el eje X. Supongamos que las coordenadas de los focos son $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$. Para que un punto $P(x,y)$ pertenezca a la elipse, debe satisfacer

$$d(P,F)+d(P,F')=k,$$

donde k es una constante positiva preestablecida (figura 10-2).

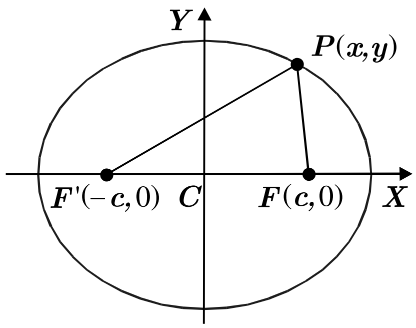


Figura 10-2

Sustituimos las coordenadas de P, F y F' en la fórmula de la distancia entre dos puntos (4.1) y obtenemos

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=k.$$

Para eliminar los radicales, pasamos uno de ellos al otro lado de la igualdad y elevamos al cuadrado

$$(x-c)^2+y^2=\left(k-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2,$$

simplificamos y obtenemos

$$4cx+k^2=2k\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Volvemos a elevar al cuadrado para eliminar el otro radical y simplificamos nuevamente

$$\left(4k^2-16c^2\right)x^2+4k^2y^2=k^4-4k^2c^2.$$

Para poder seguir simplificando, observemos la figura 10-3.

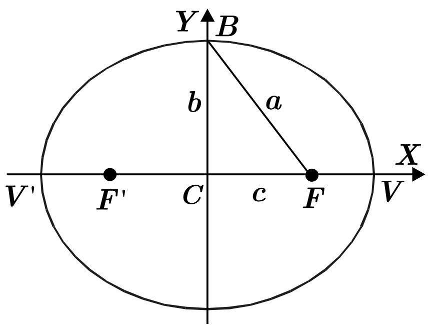


Figura 10-3

El triángulo rectángulo FBC tiene uno de sus catetos igual a c, que es la primera coordenada de F. Llamemos b al otro cateto y a a la hipotenusa. Como el punto B pertenece a la elipse, la suma de las distancias de B a F y a F' es igual a k, pero, por otro lado, es igual a $2a$, ya que el triángulo $F'FB$ es isósceles. Así que si sustituimos $k=2a$ en la ecuación anterior y simplificamos, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(4(2a)^2-16c^2\right)x^2+4(2a)^2y^2 &= (2a)^4-4(2a)^2c^2\\
\left(16a^2-16c^2\right)x^2+16a^2y^2 &= 16a^4-16a^2c^2\\
\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2 &= a^2\left(a^2-c^2\right),
\end{aligned}$$

luego dividimos toda la ecuación entre $a^2\left(a^2-c^2\right)$:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.} \tag{10.2}$$

Observación: Cuando estudiemos la hipérbola obtendremos el mismo tipo de ecuación, pero con diferente relación entre a y c.

Al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo BCF de la figura 10-3 obtenemos

$$\boxed{a^2=b^2+c^2,}$$

luego sustituimos $b^2 = a^2 - c^2$ en la ecuación (10.2) y obtenemos la *forma simétrica* de la ecuación de la elipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{10.3}$$

Así que (10.2) es la ecuación común de la hipérbola y la elipse. Será elipse cuando $a > c > 0$, e hipérbola cuando $a < c$.

Si multiplicamos la ecuación (10.3) por a^2b^2 y pasamos todos los términos al primer miembro, nos queda la ecuación de la elipse en la *forma general:*

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

Ahora veamos algunos de los elementos principales de la ecuación 10.3 (figura 10-4).

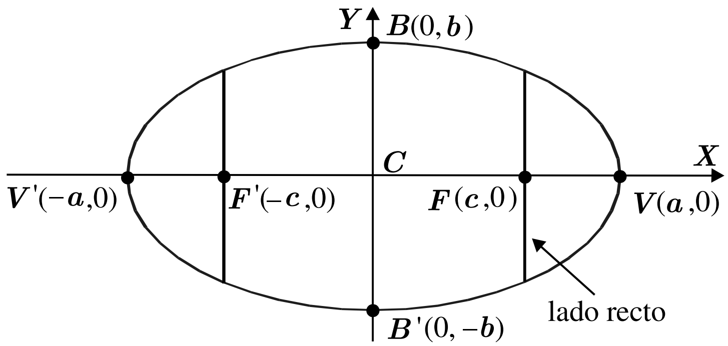


Figura 10-4

- Al sustituir $x = 0$ en la ecuación de la elipse (10.3), encontramos que $y = \pm b$, así que las coordenadas de B y B' son $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$; y, al sustituir $y = 0$, obtenemos que $x = \pm a$, así que las coordenadas de V y V' son $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$. Los puntos V y V' se llaman *vértices* de la elipse.
- Las rectas VV' y BB' son ejes de simetría de la curva y se llaman *ejes principales.*
- El segmento VV' también se llama *eje mayor* o *eje focal*; su longitud es el *diámetro mayor* y vale $2a$.
- El segmento BB' también se llama *eje menor* o *eje no focal*; su longitud se llama *diámetro menor* y vale $2b$.
- La distancia entre los dos focos, F y F', se llama *distancia focal* y vale $2c$.
- La distancia del centro a los vértices se llama *semieje mayor* y vale a; la distancia del centro a los extremos del diámetro menor se llama *semieje menor* y vale b.
- La cuerda que pasa por un foco y es perpendicular al eje mayor se llama *lado recto.*

Para encontrar la longitud del lado recto, en la ecuación (10.3) hacemos $x = c$, que es la abscisa de uno de los focos, y obtenemos

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

como $c^2 = a^2 - b^2$, obtenemos

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Simplificamos y despejamos y^2:

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}, \qquad \text{de donde} \qquad y = \pm\frac{b^2}{a}.$$

Por lo que los puntos

$$\left(c, \frac{b^2}{a}\right) \quad \text{y} \quad \left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

son los extremos del lado recto que pasa por el foco $F(c, 0)$, y la longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$.

De igual manera,

$$\left(-c, \frac{b^2}{a}\right) \quad \text{y} \quad \left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

son los extremos del lado recto que pasa por el foco $F'(-c, 0)$ y, por supuesto, la longitud del segmento que determinan es también $\dfrac{2b^2}{a}$.

Elipse vertical

Si la elipse tiene su centro en el origen y sus focos están en el eje Y, entonces las coordenadas de los focos son $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$. Si nuevamente llamamos $2a$ a la constante k que es la suma de las distancias de un punto $P(x, y)$ de la elipse a los focos y hacemos un análisis similar al anterior, o simplemente intercambiamos los papeles de x y y, llegamos a la ecuación

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \tag{10.4}$$

donde, como antes, $b^2 = a^2 - c^2$ (figura 10-5).

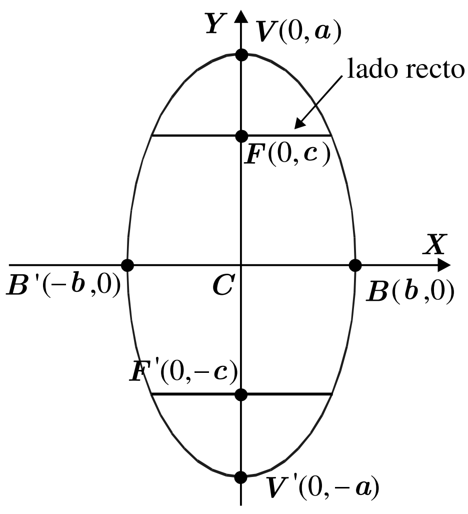


Figura 10-5

Los vértices son ahora $V(0,a)$ y $V'(0,-a)$.

Observa que etiquetamos como a a la distancia del centro a los vértices, independientemente de que la elipse sea horizontal o vertical.

En resumen:

Posición	**Ecuación**	**Centro**	**Vértices**	**Focos**	B **y** B'
Horizontal	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$C\,(0,0)$	$V\,(a,0)$, $V'\,(-a,0)$	$F\,(c,0)$, $F'\,(-c,0)$	$B\,(0,b)$, $B'\,(0,-b)$
Vertical	$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$	$C\,(0,0)$	$V\,(0,a)$, $V'\,(0,-a)$	$F\,(0,c)$, $F'\,(0,-c)$	$B\,(b,0)$, $B'\,(-b,0)$

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(5,0)$ y $F'(-5,0)$, tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos sea 12.

Solución:

Para obtener toda la información necesaria sobre la elipse debemos completar el siguiente cuadro:

a	b	c	**Centro**	**Focos**	**Vértices**	B **y** B'
6				$F(5,0)$, $F'(-5,0)$		

El punto medio ubicado entre los focos es $C(0,0)$ y los focos están sobre el eje X. Así, la elipse es horizontal y su ecuación es de la forma (10.3); la distancia entre los focos es $2c=10$ y la distancia entre los vértices es $2a=12$. Por tanto,

$$a=6 \qquad c=5,$$

entonces

$$b^2=a^2-c^2=6^2-5^2=11;$$

y la ecuación de la elipse es

$$\boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1.}$$

a	b	c	**Centro**	**Focos**	**Vértices**	B **y** B'
6	$\sqrt{11}$	5	$C\,(0,0)$	$F(5,0)$, $F'(-5,0)$	$V(6,0)$, $V'(-6,0)$	$B(0,\sqrt{11})$, $B'(0,-\sqrt{11})$

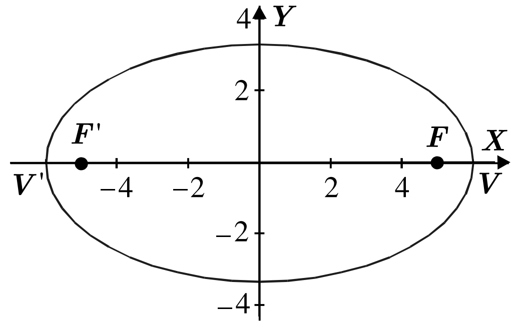


Figura 10-6

2. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos vértices son $V(0,10)$ y $V'(0,-10)$ y sus focos son $F(0,2)$ y $F'(0,-2)$.

Solución:

De nuevo el centro es $C(0,0)$ y los focos ahora están sobre el eje Y; así, la elipse es vertical y debemos usar la ecuación (10.4). La distancia focal es $2c=4$ y la distancia entre los vértices es $2a=20$; entonces

$$b^2 = 10^2 - 2^2 = 96;$$

y la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{96} + \frac{y^2}{100} = 1.$$

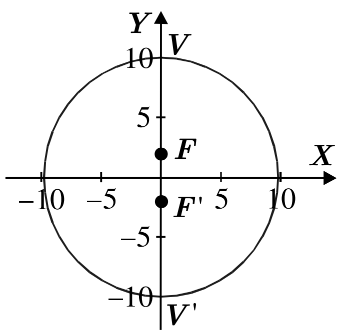


Figura 10-7

Ejercicios

1. Encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(6,0)$ y $F'(-6,0)$, tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos sea 16.

2. Encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos son $F\left(0,\frac{3}{2}\right)$ y $F'\left(0,-\frac{3}{2}\right)$, tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos sea 5.

3. Encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos son $F\left(0, \frac{1}{5}\right)$ y $F'\left(0, -\frac{1}{5}\right)$, tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos sea $\frac{8}{5}$.

En cada caso, encuentra la ecuación de la elipse.

4. Focos $F\left(\frac{1}{5}, 0\right)$, $F'\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$; vértices $V\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $V'\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$.
5. Focos $F(0, 25)$, $F'(0, -25)$; vértices $V(0, 30)$, $V'(0, -30)$.
6. Focos $F(0, 3)$, $F'(0, -3)$; vértices $V(0, 10)$, $V'(0, -10)$.
7. Focos $F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $F'\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; vértices $V\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, $V'\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$.

En cada caso, encuentra las ecuaciones de las elipses con centro en el origen y que satisfacen las siguientes condiciones:

8. Eje mayor 14; eje menor 10. **9.** Eje mayor 5; eje menor 3. **10.** Eje mayor 9; eje menor 5

11. Eje mayor 11; eje menor 8. **12.** Eje mayor 8; eje menor 3. **13.** Eje mayor 6; eje menor 4

En cada caso, encuentra las coordenadas de los vértices y de los focos de la elipse con la ecuación dada y dibújala.

14. $4x^2 + y^2 - 36 = 0.$

15. $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0.$

16. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

17. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 4.$

18. $2x^2 + 25y^2 = 50.$

19. $81x^2 + 49y^2 = 3969.$

20. $9x^2 + 8y^2 = 72.$

21. $x^2 + 64y^2 = 64.$

22. Encuentra la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(-1, 1)$ y cuyos vértices son $V(0, 2)$, $V'(0, -2)$.

23. Encuentra la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(-3, -2)$ y cuyos vértices son $V(5, 0)$, $V'(-5, 0)$.

24. Encuentra la ecuación de la elipse vertical con centro en el origen que pasa por los puntos $P(-4, 0)$ y $Q\left(2\sqrt{3}, 3\right)$.

25. Encuentra la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen que pasa por los puntos $P\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 1\right)$ y $Q\left(2, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

26. Una elipse vertical con centro en el origen tiene la ecuación $\dfrac{2x^2}{29} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$. Si la elipse pasa por el punto $P(1, 3)$, encuentra el valor de a^2 y escribe la ecuación en la forma general.

Construcción de la elipse

Podemos trazar elipses mediante regla y compás; o bien, con la ayuda de otros instrumentos como un hilo y dos clavos; y con papel encerado. Estas técnicas se describen a continuación.

Sugerencias para trazar una elipse

- Localiza el centro. (Hasta este momento, únicamente hemos visto elipses con centro en el origen, pero más adelante veremos el caso general.)
- Determina los valores de c (distancia del centro a los focos), a (semieje mayor) y b (semieje menor).
- Determina si la elipse es horizontal o vertical comparando los valores que dividen a x^2 y y^2 en la forma simétrica de la ecuación. Si el mayor afecta a x^2, entonces es horizontal, en otro caso es vertical.
- Localiza los vértices, V y V', los focos, F y F', y los extremos del eje menor, B y B'.
- Localiza los extremos de los lados rectos. En el caso de la elipse horizontal, se encuentran a $\dfrac{b^2}{a}$ unidades arriba y abajo de los focos. En el caso de la elipse vertical, se encuentran a $\dfrac{b^2}{a}$ unidades a la derecha y a la izquierda.
- Une con una curva los puntos que hayas localizado en la elipse.

Ejemplos

1. Dibujar la elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

Solución:

- Se trata de una elipse con centro en $C\,(0, 0)$.
- El denominador de y^2 es mayor que el de x^2, así que la elipse es vertical, $a^2 = 36$ y $b^2 = 16$, de donde
$$c^2 = 36 - 16 = 20$$
y, por tanto, $a = 6$, $b = 4$ y $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
- Entonces los focos son
$$F(0, 2\sqrt{5}) \approx F\,(0, 4.47) \quad \text{y} \quad F'(0, -2\sqrt{5}) \approx F'\,(0, -4.47)\,,$$
y los vértices son
$$V(0, 6) \quad \text{y} \quad V'(0, -6);$$
los extremos del eje menor son
$$B(4, 0) \quad \text{y} \quad B'(-4, 0).$$
Como
$$\frac{b^2}{a} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3},$$
los extremos de los lados rectos son $\left(-\frac{8}{3}, -2\sqrt{5}\right) \approx (-2.67, -4.47)$, $\left(-\frac{8}{3}, 2\sqrt{5}\right) \approx (-2.67, 4.47)$, $\left(\frac{8}{3}, -2\sqrt{5}\right) \approx (2.67, -4.47)$, $\left(\frac{8}{3}, 2\sqrt{5}\right) \approx (2.67, 4.47)$.
Marcamos estos puntos y trazamos una curva suave uniendo los vértices y los extremos del eje menor (figura 10-8).

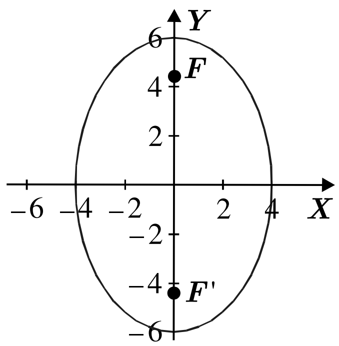


Figura 10-8

2. Dibujar la elipse cuya ecuación general es $3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$.

Solución:

- Escribimos la ecuación en la forma simétrica; para ello, pasamos el término independiente al otro lado de la ecuación

$$3x^2 + 4y^2 = 48,$$

  y al dividir entre 48, obtenemos

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

- Se trata de una elipse con centro en $C\,(0,0)$.
- Como $16 > 12$, la elipse es horizontal; $a^2 = 16$, $b^2 = 12$ y, por tanto,

$$c^2 = 16 - 12 = 4.$$

  Así que $a = 4$, $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ y $c = 2$.
- Los focos son

$$F(2,0) \text{ y } F'(-2,0);$$

  los vértices son

$$V(4,0) \text{ y } V'(-4,0);$$

  y los extremos del eje menor son

$$B\left(0, 2\sqrt{3}\right) \approx B\,(0, 3.46) \quad \text{y} \quad B'\left(0, -2\sqrt{3}\right) \approx B'\,(0, -3.46)\,.$$

- Como

$$\frac{b^2}{a} = \frac{12}{4} = 3,$$

  los extremos de los lados rectos son $(-2,-3)$, $(-2,3)$, $(2,-3)$, $(2,3)$.

- Ahora podemos marcar estos puntos y trazar la elipse que pasa por ellos (figura 10-9).

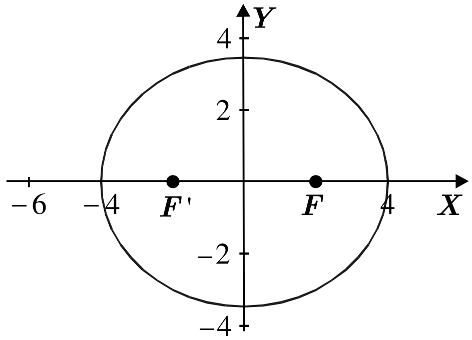


Figura 10-9

Construcción de la elipse con el uso de instrumentos

Veremos tres construcciones.

Construcción con regla y compás

Como sucede con la parábola, la elipse no se puede dibujar de un solo trazo con una regla y un compás; sin embargo, estos instrumentos son útiles para localizar suficientes puntos de ella.

Supongamos que a y b son conocidos y que sabemos que la elipse es horizontal; así, $a > b$ y su eje mayor está sobre el eje X y el menor sobre el eje Y.

- Con centro en O, dibujamos un círculo con radio a y otro círculo con radio b.
- Trazamos cualquier radio que corte al circulo interior en un punto R y al exterior en un punto Q.
- Trazamos una recta paralela al eje mayor y que pase por R.
- Trazamos una recta paralela al eje menor y que pase por Q (figura 10-10).

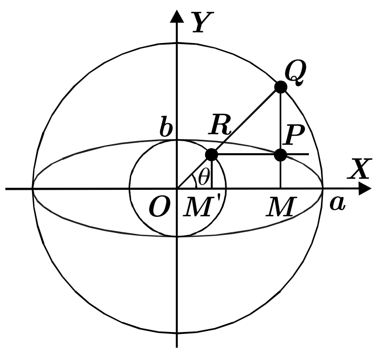


Figura 10-10

Veamos que el punto $P\,(x,y)$ donde se intersecan estas últimas rectas está en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Si consideramos el triángulo OMQ de la figura 10-10, tenemos que

$$\cos\theta=\frac{OM}{OQ}=\frac{x}{a},$$

de donde

$$x=a\cos\theta.$$

Por otra parte,

$$y=PM=RM',$$

y del triángulo ORM' tenemos que

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{RM'}{OR}=\frac{y}{b},$$

de donde

$$y=b\operatorname{sen}\theta.$$

Entonces las coordenadas de P son $(a\cos\theta, b\operatorname{sen}\theta)$. Ahora veamos que dichas coordenadas satisfacen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

en efecto,

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(b\operatorname{sen}\theta)^2}{b^2}=\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{b^2\operatorname{sen}^2\theta}{b^2}=1.$$

De esta manera podemos marcar tantos puntos de la elipse como queramos para dibujarla con la precisión deseada.

Construcción con hilo

En una tabla sujetamos un hilo de longitud $2a$ unidades con dos clavos que disten entre sí $2c$ unidades. Con un lápiz estiramos el hilo y recorremos el lápiz a lo largo del hilo, dibujando la curva resultante. Dicha curva es una elipse, pues la suma de las distancias del punto en donde está el lápiz a los clavos es siempre $2a$ (figura 10-11).

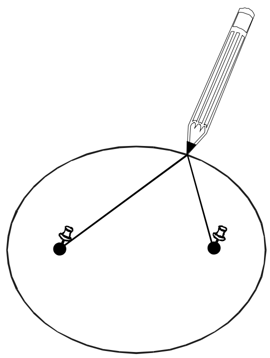


Figura 10-11

Construcción con papel doblado

Utilizamos una hoja rectangular de papel encerado (figura 10-12).

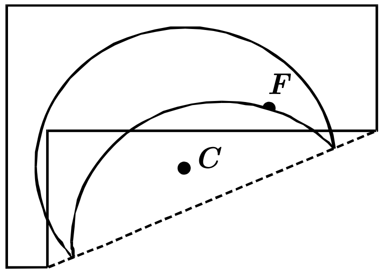


Figura 10-12

- Dibujamos un círculo con centro C y marcamos un punto F dentro del círculo.
- Doblamos el papel, de manera que un punto A del círculo caiga sobre el punto F.
- Marcamos el doblez y desdoblamos.
- Seguimos haciendo dobleces de manera que los puntos del círculo caigan sobre F.

Si hacemos suficientes dobleces, nos daremos cuenta de que aparece una curva en forma de elipse con focos en el punto F y en el centro del círculo C. De hecho, cada doblez es tangente a la elipse (figura 10-13).

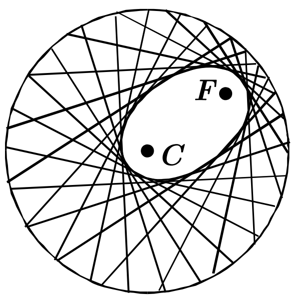


Figura 10-13

La figura 10-14 muestra que al doblar la hoja de manera que el punto A del círculo coincida con F, se forma un triángulo isósceles ADF. El punto D es el punto del doblez que pertenece a la elipse, ya que

$$DC + DF = DC + DA = r,$$

donde r es el radio del círculo original. Así que para cualquier doblez tenemos que el punto D, que es la intersección del radio AC con el doblez, pertenece a la elipse cuyos focos son F y C y en la que $2a = r$ (figura 10-14).

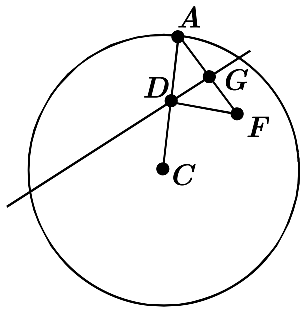


Figura 10-14

Ver el ejemplo "conicaenvuelve" de la lista de construcciones de Geolab.

La excentricidad de la elipse

Comparemos las gráficas de las elipses $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ y $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
Solución:

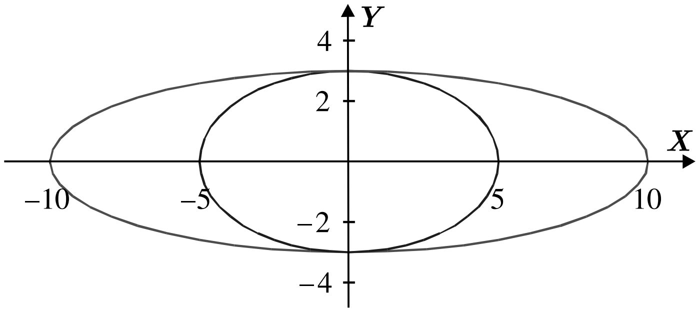


Figura 10-15

La segunda de elipse es mucho más alargada que la primera. Veamos cómo medir este alargamiento.

En la primera de elipse, $a = 5$, $b = 3$ y, por tanto, $c = \sqrt{25 - 9} = 4$, y el cociente

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

En la segunda, $a = 10$, $b = 3$ y, por tanto, $c = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91}$, y el cociente

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95.$$

En la elipse que es más alargada, este cociente es mayor.

La manera de medir el alargamiento de una elipse es por medio de su *excentricidad*, la cual se define como el cociente de la distancia focal entre el eje mayor.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Observa que como $c < a$, entonces $0 < e < 1$.

Cuanto más cerca de cero esté la excentricidad, la elipse será más parecida a un círculo, y cuanto más cerca esté de uno, más alargada será. Posteriormente, en el capítulo de la ecuación general de segundo grado, veremos que la excentricidad se puede definir para cualquier cónica y, de hecho, si conocemos la excentricidad de una cónica sabremos qué tipo de cónica es.

Cuando $e = 0$, se tiene que $c = 0$, y esto significa que los dos focos están en el mismo lugar, por tanto, tenemos un círculo.

Ejemplos

1. Encontrar la excentricidad de la elipse $3x^2 + 2y^2 - 18 = 0$.

Solución:

Escribimos la ecuación de la elipse en la forma simétrica:

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Entonces $b = \sqrt{6}$, $a = \sqrt{9}$; por tanto,

$$c = \sqrt{9-6} = \sqrt{3},$$

de donde

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58.$$

La excentricidad de la elipse es $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (figura 10-16).

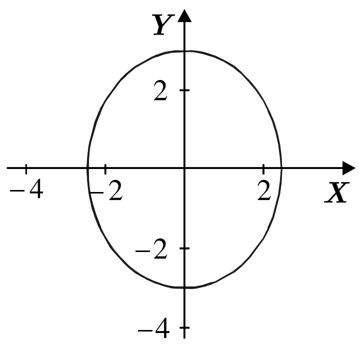


Figura 10-16

2. Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen, foco $F(3, 0)$ y excentricidad $e = 0.6$.

Solución:

La distancia del centro al foco es c; entonces

$$c = 3.$$

Como $e = \frac{c}{a}$, entonces

$$0.6 = \frac{3}{a},$$

de donde

$$a = \frac{3}{0.6} = 5.$$

Entonces

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16.$$

Así, la ecuación de la elipse es (figura 10-17)

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

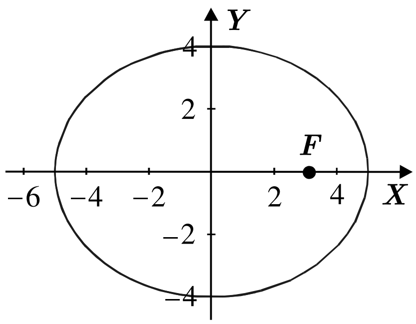


Figura 10-17

Ejercicios

En cada caso, encuentra la excentricidad de la elipse.

1. $4x^2 + y^2 - 64 = 0.$

2. $9x^2 + 16y^2 - 1296 = 0.$

3. $x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$

4. $8x^2 + 7y^2 - 392 = 0.$

5. Dibuja con los mismos ejes coordenados las elipses con centro en el origen, un foco en $F(-2, 0)$ y excentricidades $e = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$.

6. Encuentra la ecuación de la elipse con centro en $(0, 0)$, vértice $V\left(0, -\frac{25}{2}\right)$ y excentricidad $e = 0.7$.

7. Encuentra la ecuación de la elipse con focos $F'(-7, 0)$, $F(7, 0)$ y excentricidad $e = 0.8$.

Algunas aplicaciones de la elipse

Propiedad de reflexión de la elipse

La elipse tiene una propiedad de reflexión similar a la que tiene la parábola. Un rayo que emana de un foco de la elipse se refleja en ella hacia el otro foco (figura 10-18). En la última sección de este capítulo demostraremos esta propiedad.

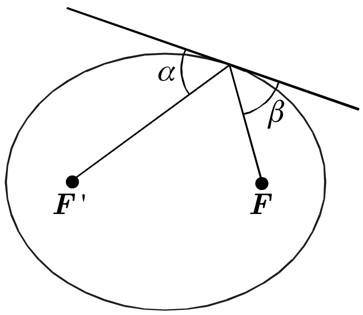


Figura 10-18

Esta propiedad se aplica en ciertos hornos de laboratorio para fabricar cristales. En un recipiente en forma de elipsoide de revolución, cuya pared interior sea de un material altamente reflejante, se coloca una fuente de calor en uno de los focos de la elipse y el objeto que se desea calentar en el otro foco. Como todos los rayos que emanan de un foco se reflejan hacia el otro foco, después de un tiempo, el segundo foco está extremadamente caliente.

Otro ejemplo de la aplicación de la propiedad de reflexión es el siguiente. En una habitación cuyo techo tiene la forma de un elipsoide, si dos personas están en ella y sus cabezas quedan en los focos del elipsoide, cuando una de ellas habla en voz baja la otra persona puede oírla, mientras que otra persona colocada en otro lado de la habitación no la oirá. Esta propiedad se utilizó tiempo atrás en algunos conventos para que los monjes pudieran confesarse mutuamente.

Astronomía

Una de las principales aplicaciones de la elipse se da en la astronomía. Cuando Johannes Kepler estudiaba los movimientos de Marte, vió que al aplicar el modelo de Copérnico de órbitas circulares alrededor del Sol los cálculos discrepaban ligeramente de la posición real del planeta en el firmamento. Por lo que intentó ajustar la órbita a otras curvas y, finalmente, encontró que la elipse se ajustaba en forma maravillosa. Así obtuvo su primera ley del movimiento de los planetas. En realidad, Kepler tuvo una suerte enorme ya que Marte es uno de los planetas con órbita de mayor excentricidad. Si en lugar de Marte hubiera decidido estudiar a Venus, cuya órbita es prácticamente circular, posiblemente nunca hubiera descubierto sus leyes del movimiento.

Las *tres leyes sobre el movimiento planetario* de Kepler son:

- Los planetas se mueven en órbitas elípticas, uno de cuyos focos es el Sol.
- Los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales. Es decir, en la figura 10-19, si el tiempo que tarda el planeta en ir de A a B es igual que el que tarda en ir de C a D, entonces el área OAB es igual al área OCD.

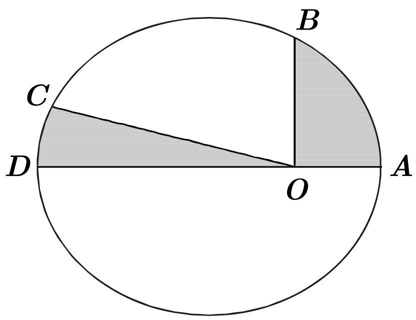


Figura 10-19

- El cuadrado del periodo de un planeta (el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol) es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.

Kepler encontró sus leyes empíricamente, pero fue Newton, mediante el cálculo diferencial que acababa de inventar y su modelo de gravitación universal, quien demostró dichas leyes.

En la tabla 10.1 aparece la excentricidad de las órbitas planetarias, así como la distancia media del planeta al Sol, medida en unidades astronómicas (U.A.). Una unidad astronómica es, por definición, la distancia media de la Tierra al Sol. La distancia media de un planeta al Sol es el semieje mayor de la elipse (a).

Planeta	**Excentricidad**	**Distancia media (U.A.)**
Mercurio	0.206	0.387
Venus	0.007	0.723
Tierra	0.017	1
Marte	0.093	1.52
Júpiter	0.048	5.2
Saturno	0.054	9.54
Urano	0.047	19.18
Neptuno	0.009	30.06

Tabla 10.1 Excentricidad de las órbitas y distancia media al Sol.

Hasta 2006 Plutón fue considerado el décimo planeta del sistema solar. Ese año, la Unión Astronómica Internacional lo reclasificó como planeta menor. La excentricidad de la órbita de Plutón es de 0.25 y su distancia media al Sol es de 39.44 U.A.

Si medimos en años terrestres el tiempo que tarda un planeta en dar la vuelta alrededor del Sol, la constante de proporcionalidad de la tercera ley de Kepler es 1, es decir, la fórmula de la tercera ley es

$$p^2 = a^3,$$

donde p es el periodo y a es el semieje mayor de la elipse.

Ejemplos

1. Encontrar la diferencia entre el semieje mayor y el semieje menor de la órbita de la Tierra si el semieje mayor es cercano a 149 600 000 kilómetros.

   Solución:

   En la tabla 10.1 vemos que la excentricidad de la órbita terrestre es
   $$e = \frac{c}{a} = 0.017,$$
   entonces
   $$c = 0.017a.$$
   De donde
   $$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2\left(1 - 0.017^2\right)} = a\sqrt{0.999711} = 0.999855a = 149\ 578\ 308 \text{ km},$$
   así que la diferencia entre el semieje mayor y el semieje menor es
   $$149\ 600\ 000 - 149\ 578\ 308 = 21\ 692 \text{ km},$$
   que es menos de dos veces el diámetro de la Tierra, es decir, es insignificante comparada con el tamaño de la órbita.

2. Encontrar el periodo de Urano.

   Solución:

   La distancia media de Urano al Sol es $a = 19.18$ U.A., así que su periodo, de acuerdo con la tercera ley de Kepler es
   $$p = \sqrt{19.18^3} = 84 \text{ años}.$$

   No sólo los planetas satisfacen las leyes de Kepler, sino también todos los cuerpos que giran alrededor de otros; por ejemplo, los cometas que giran alrededor del Sol, los satélites que giran alrededor de los planetas, y el Sistema Solar que gira alrededor de la Vía Láctea. La constante de proporcionalidad de la tercera ley depende básicamente de la masa del cuerpo central.

Ejercicios

1. Encuentra el radio menor (en unidades astronómicas) de las órbitas de

   a) Marte. **b)** Mercurio. **c)** Plutón.

2. Encuentra el periodo de

   a) Mercurio. **b)** Saturno. **c)** Neptuno.

3. El cometa Halley tarda 76 años en dar una vuelta alrededor del Sol, encuentra la distancia media de él al Sol.

4. Si la excentricidad de la órbita del cometa Halley es $e = 0.97$, encuentra la distancia máxima y mínima de él al Sol.

5. Dibuja, en el mismo sistema coordenado, las órbitas de Neptuno y de Plutón, colocando el Sol en el origen de coordenadas de tal manera que sea un foco de las elipses. Puedes usar Geolab para ello.

6. Una puerta tiene la forma de un arco elíptico, es decir, está formada por media elipse. En la base mide 2 metros de ancho y la altura en el centro es de 4 metros. A través de ella deseamos pasar una caja de 2 metros de altura. ¿Cuál es la anchura máxima que puede tener la caja?

7. Una galería tiene paredes verticales de 1.5 metros de altura y un techo abovedado en forma de medio elipsoide. Los focos, que están a una altura de 1.5 metros sobre el piso, están separados por 4 metros. Si la altura de la construcción en el centro de la bóveda es de 3.5 metros, ¿cuánto mide su eje mayor?

Elipses con eje focal paralelo a un eje cartesiano

Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F'(1,1)$ y $F(5,1)$ y cuyo diámetro mayor mide 6 unidades.

Solución:

Los focos están en la recta horizontal $y = 1$ y el centro $C(3,1)$ es el punto medio de los focos. Como el centro no está en el origen, no podemos utilizar directamente la fórmula (10.3). Primero debemos hacer un cambio de coordenadas para trasladar el origen al centro de la elipse. Utilizamos las fórmulas de traslación (7.3)

$$\begin{aligned} x' &= x - 3 \\ y' &= y - 1. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Para encontrar las coordenadas de los focos en el nuevo sistema de coordenadas, sustituimos sus coordenadas originales en (10.5), es decir, para $F'(1,1)$ tenemos

$$\begin{aligned} x' &= 1 - 3 = -2 \\ y' &= 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

y para $F(5,1)$

$$\begin{aligned} x' &= 5 - 3 = 2 \\ y' &= 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

así que las coordenadas de los focos en el nuevo sistema son $F(-2,0)$ y $F'(2,0)$. El eje mayor es $2a = 6$ y la distancia focal es $2c = 4$, por lo que

$$b^2 = 3^2 - 2^2 = 5.$$

Así, la ecuación de la elipse con respecto a las coordenadas $X'Y'$ es

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{5} = 1.$$

Ahora sustituimos x' y y' de acuerdo con (10.5) y obtenemos la ecuación en forma simétrica

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$$

Si efectuamos las operaciones y pasamos todo al primer miembro, obtenemos la ecuación en su forma general (figura 10-20)

$$5x^2 + 9y^2 - 30x - 18y + 9 = 0.$$

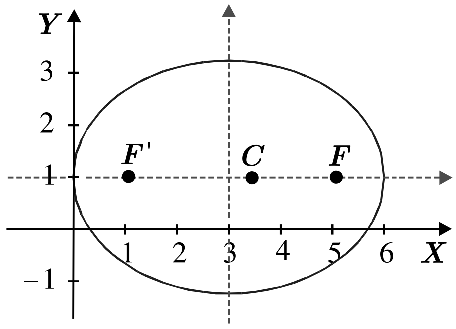


Figura 10-20

Ahora veamos el caso general.

Si el centro de la elipse es $C\,(h,k)$ y el eje focal es paralelo al eje X, llamamos $2c$ a la distancia focal y $2a$ al eje mayor. Las coordenadas de los focos son $F\,(h+c,k)$ y $F'\,(h-c,k)$.

Como en el ejemplo anterior, trasladamos los ejes de manera que el origen quede en C. Para lograrlo, hacemos la sustitución

$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k. \end{aligned} \tag{10.6}$$

En el nuevo sistema de coordenadas, la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$.

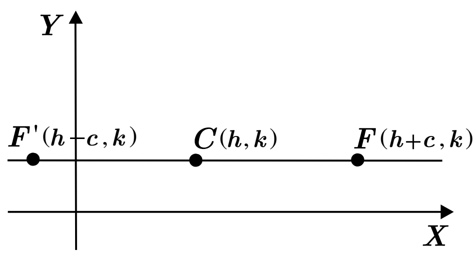


Figura 10-21

Si sustituimos x' y y' de acuerdo con (10.6), obtenemos la *forma simétrica de la ecuación de la elipse*, también conocida como *forma canónica* o *estándar*.

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.} \tag{10.7}$$

En el caso de que el eje focal sea vertical, los denominadores de $(x-h)^2$ y $(y-k)^2$ están cambiados:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.} \tag{10.8}$$

Si multiplicamos las ecuaciones (10.7) y (10.8) por a^2b^2, desarrollamos los cuadrados y simplificamos, obtenemos una ecuación de la forma

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0} \tag{10.9}$$

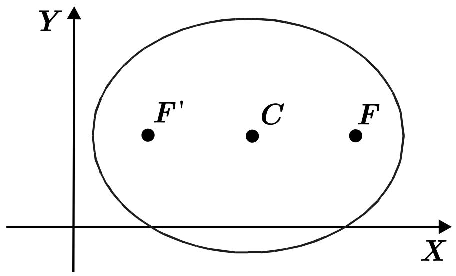


Figura 10-22

donde hay que notar que A y C son distintas de cero y tienen el **mismo signo**. Esta forma se conoce como *forma general de la ecuación de la elipse* y es un caso particular de la ecuación general de segundo grado que estudiaremos en el capítulo 12.

En resumen:

Posición	**Ecuación**	**Centro**	**Vértices**	**Focos**	B **y** B'
Horizontal	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$C(h,k)$	$V(h+a,k)$, $V'(h-a,k)$	$F(h+c,k)$, $F'(h-c,k)$	$B(h,k+b)$, $B'(h,k-b)$
Vertical	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$C(h,k)$	$V(h,k+a)$, $V'(h,k-a)$	$F(h,k+c)$, $F'(h,k-c)$	$B(h+b,k)$, $B'(h-b,k)$

Ejemplos

1. Escribir la ecuación $8x^2+4y^2-24x-4y-13=0$ en la forma simétrica y dibujar la elipse.

   Solución:

   Para tener toda la información que necesitamos sobre la elipse debemos completar el siguiente cuadro:

a	b	c	**Centro**	**Focos**	**Vértices**	B **y** B'

Agrupamos los términos en x y en y y pasamos el término independiente al otro lado de la ecuación:

$$\left(8x^2 - 24x\right) + \left(4y^2 - 4y\right) = 13;$$

factorizamos los coeficientes de x^2 y de y^2 para que sea más fácil completar los cuadrados perfectos

$$8\left(x^2 - 3x\right) + 4\left(y^2 - y\right) = 13.$$

En cada paréntesis completamos el trinomio cuadrado perfecto, recordando que debemos sumar la misma cantidad del otro lado de la ecuación para que la igualdad no se altere.

$$8\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 4\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = 13 + 18 + 1,$$

simplificamos

$$8\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 32,$$

dividimos entre el término independiente y obtenemos

$$\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{4} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{8} = 1.$$

Como 8 es mayor que 4, la elipse es vertical y su centro es $C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$$a^2 = 8, \qquad b^2 = 4 \qquad \text{y} \qquad c^2 = 8 - 4 = 4,$$

es decir,

$$a = 2\sqrt{2}, \qquad b = 2, \qquad c = 2.$$

Así que la distancia entre los vértices es $2a = 4\sqrt{2}$ y la distancia focal es $2c = 4$. Por tanto, los focos son

$$F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} + 2\right) = F\left(1.5, 2.5\right) \quad \text{y} \quad F'\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} - 2\right) = F'\left(1.5, -1.5\right),$$

los vértices son

$$V\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} + 2\sqrt{2}\right) \approx V\left(1.5, 3.33\right) \quad \text{y} \quad V'\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} - 2\sqrt{2}\right) \approx V'\left(1.5, -2.33\right),$$

y los extremos del eje menor son

$$B\left(\frac{3}{2} + 2, \frac{1}{2}\right) = B\left(3.5, 0.5\right) \quad \text{y} \quad B'\left(\frac{3}{2} - 2, \frac{1}{2}\right) = B'\left(-0.5, 0.5\right).$$

a	b	c	**Centro**	**Focos**	**Vértices**	B **y** B'
$2\sqrt{2}$	2	2	$C\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$	$F\,(1.5, 2.5)$, $F'\,(1.5, -1.5)$	$V(1.5, 3.33)$, $V'(1.5, -2.33)$	$B(3.5, 0.5)$, $B'(-0.5, 0.5)$

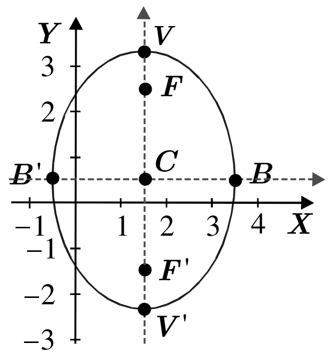


Figura 10-23

2. Encontrar la ecuación de la elipse con centro en $C\,(2,1)$, un foco en $F\,(4,1)$ y excentricidad $e = 0.8$.

Solución:

Como el centro y el foco están en la misma recta horizontal $y = 1$, la elipse es horizontal.

La distancia del centro al foco es $c = 4 - 2 = 2$.

Para encontrar el valor de a utilizamos el hecho de que la excentricidad es igual a $\frac{c}{a}$.

$$0.8 = \frac{2}{a},$$

entonces $a = 2.5$ y

$$b^2 = a^2 - c^2 = 2.5^2 - 2^2 = 2.25,$$

luego $b = \sqrt{2.25} = 1.5$. Así que la forma simétrica de la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-2)^2}{6.25} + \frac{(y-1)^2}{2.25} = 1.$$

Para dibujarla, determinamos los vértices, los extremos del eje menor y los extremos del lado recto.

Los vértices son

$$V\,(2 + 2.5, 1) = V\,(4.5, 1) \qquad \text{y} \qquad V'\,(2 - 2.5, 1) = V'\,(-0.5, 1)\,.$$

Los extremos del eje menor son

$$B\,(2, 1 + 1.5) = B\,(2, 2.5) \qquad \text{y} \qquad B'\,(2, 1 - 1.5) = B'\,(2, -0.5)\,.$$

Los focos son

$$F\,(2 + 2, 1) = F\,(4, 1) \qquad \text{y} \qquad F'\,(2 - 2, 1) = F'\,(0, 1)\,.$$

Los extremos de los lados rectos están arriba y abajo de los focos y se encuentran a una distancia de

$$\frac{b^2}{a} = \frac{2.25}{2.5} = 0.9$$

de ellos (figura 10-24):

$$(4,\ 1.9)\,, \quad (4,\ 0.1)\,, \quad (0,\ 1.9)\,, \quad (0,\ 0.1)\,.$$

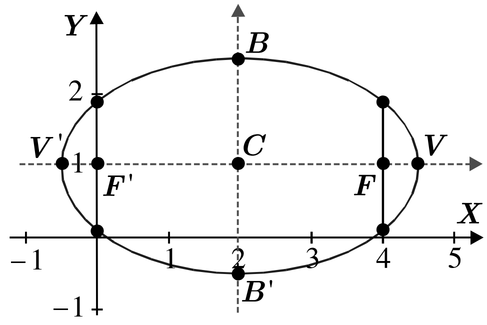


Figura 10-24

Ejercicios

En cada caso, escribe la ecuación en forma simétrica y encuentra las coordenadas de los focos, de los vértices y del centro. Dibuja la elipse.

1. $9x^2 + 4y^2 - 90x - 24y + 225 = 0.$

2. $9x^2 + 16y^2 + 72x - 224y + 784 = 0.$

3. $x^2 + 36y^2 + 4x - 432y + 1264 = 0.$

4. $x^2 + 2y^2 - 8x + 8y + 23 = 0.$

5. $2x^2 + y^2 - 24x - 2y + 72 = 0.$

6. $x^2 + 9y^2 - 10x + 36y - 20 = 0.$

7. $4x^2 + y^2 + 64x - 6y + 201 = 0.$

8. $27x^2 + y^2 + 108x - 10y + 52 = 0.$

9. $16x^2 + 9y^2 - 32x - 36y - 92 = 0.$

10. $4x^2 + 32y^2 + 4x + 128y + 65 = 0.$

11. $x^2 + y^2 + x + \frac{3}{2}y + \frac{13}{16} = 0.$

12. $4x^2 + 100y^2 - 20x + 280y + 121 = 0.$

Encuentra la ecuación de la elipse cuyo eje mayor es PQ y cuyo eje menor es RS.

13. $P\,(4,6)$, $Q\,(12,6)$, $R\,(8,3)$, $S\,(8,9)$.

14. $P\,(-1,-9)$, $Q\,(-1,5)$, $R\,(4,-2)$, $S\,(-6,-2)$.

Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la elipse con los siguientes datos.

15. Vértices $V\,(1,4)$, $V'\,(-5,4)$ y excentricidad $e = \frac{1}{4}$.

16. Vértice $V\left(3,-\frac{5}{2}\right)$, centro $C\,(3,-1)$ y excentricidad $e = \frac{1}{6}$.

17. Centro $C\,(1,4)$, foco $F\,(1,-10)$ y excentricidad $e = \frac{1}{5}$.

18. Focos $F\left(\frac{1}{2},3\right)$, $F'\left(\frac{1}{2},-1\right)$ y excentricidad $e = \frac{1}{2}$.

19. Vértices $V\,(4,0)$, $V'\,(-4,0)$ y pasa por el punto $P\,(0,-3)$.

20. Focos $F\,(10,2)$, $F'\,(2,2)$ y pasa por el punto $P\,(6,7)$.

21. Vértices $V\left(\frac{27}{2},3\right)$, $V'\left(\frac{9}{2},3\right)$, focos $F\,(11,3)$, $F'\,(7,3)$.

22. Vértice $V\,(-1,-3)$, centro $C\,(-5,-3)$ y pasa por el punto $P\left(-3,-3+\sqrt{3}\right)$.

23. Foco $F\left(2\sqrt{6},6\right)$, centro $C\,(0,6)$ y pasa por el punto $P\,(0,7)$.

24. Vértice $V\,(-1,4)$, centro $C\,(-1,9)$ y foco $F\,(-1,5)$.

25. Encuentra los puntos de intersección de las elipses $16x^2+25y^2-400=0$ y $16x^2+y^2-16=0$.

26. Encuentra los puntos de intersección de la elipse $5x^2+4y^2-2x+4y-24=0$ con la recta $x+4y-6=0$.

27. Encuentra los puntos de intersección de la elipse $x^2+8y^2+12x-64y+148=0$ y el círculo $x^2+y^2+12x-8y+43=0$.

28. Encuentra los puntos de intersección de las elipses $x^2+9y^2-9=0$ y $9x^2+y^2-9=0$.

29. Dada la elipse $4x^2+9y^2-32x+54y+109=0$, encuentra la ecuación del círculo que tiene el mismo centro que la elipse y su radio es el semieje menor de ella.

30. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el centro de la elipse $4x^2+y^2+8x+2y-31=0$ y por el punto $P(1,3)$.

31. Encuentra la ecuación de la parábola que tiene como vértice el centro de la elipse $3x^2+2y^2+24x-32y+170=0$, abre hacia abajo y pasa por el punto $P(-2,0)$.

32. Encuentra la ecuación de la elipse que tiene como uno de sus vértices el centro del círculo $x^2+y^2-6x-7=0$ y, además, la elipse tiene centro en $C\,(10,0)$ y excentricidad $e=\frac{1}{3}$.

Otra interpretación de la definición de la elipse

Observemos nuevamente las ecuaciones (10.7) y (10.8)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{y} \qquad \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.$$

Proporcionemos otra interpretación de estas ecuaciones. Si el centro de la elipse es $C(h,k)$, entonces el eje horizontal de la elipse es la recta $y=k$, y el eje vertical es la recta $x=h$. Luego, si $P(x,y)$ es un punto de la elipse, el término $(x-h)^2$ es el cuadrado de la distancia de P a la recta $x=h$, y $(y-k)^2$ es el cuadrado de la distancia de P a la recta $y=k$.

En general, si ℓ es la recta que contiene a los focos de la elipse, ℓ' es la recta perpendicular a ℓ que pasa por el centro de la elipse, $2a$ es la distancia entre los vértices, y $2c$ es la distancia entre los focos, la ecuación de la elipse es

$$\boxed{\frac{D\,(P,\ell')^2}{a^2}+\frac{D\,(P,\ell)^2}{b^2}=1}, \tag{10.10}$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$, o bien

$$\boxed{\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1}, \tag{10.11}$$

donde (x', y') son las coordenadas de P con respecto a los ejes ℓ, ℓ'.

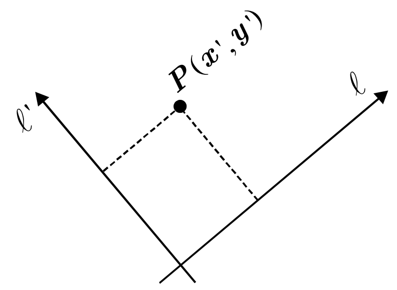


Figura 10-25

Esta manera de ver la ecuación de la elipse es particularmente útil cuando los ejes de la elipse no son paralelos a los ejes cartesianos.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(4, 5)$ y $F'(4, -1)$ y la distancia entre los vértices es 10.

Solución:

El centro de la elipse, $C(4, 2)$, es el punto medio de los focos, entonces el eje focal es $x = 4$ y el eje no focal es la recta $y = 2$; la distancia focal es $2c = 6$ y $2a = 10$, así que

$$b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

entonces la ecuación de la elipse es (figura 10-26)

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$$

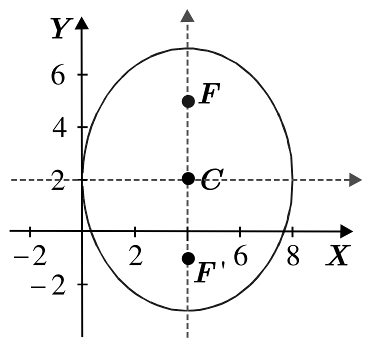


Figura 10-26

2. Encontrar la ecuación, en su forma general, de la elipse cuyos focos son $F'(0,0)$, $F(2,2)$ y su eje mayor mide 4.

Solución:

El eje mayor está contenido en la recta que contiene a los focos:

$$y = x.$$

El centro de la elipse es el punto medio entre los focos, $C(1,1)$, el eje menor está contenido en la recta perpendicular a la anterior que pasa por el centro de la elipse:

$$y = -x + 2.$$

Como el eje mayor es $2a = 4$, el valor de a es 2, entonces la distancia entre los focos es

$$2c = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

así que $c = \sqrt{2}$, y

$$b = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (10.10), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} + \frac{\left(\dfrac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} &= 1 \\ \frac{(x-y)^2}{4} + \frac{(x+y-2)^2}{8} &= 1. \end{aligned}$$

Desarrollamos los cuadrados y multiplicamos por 8 para eliminar los denominadores:

$$2\left(x^2 - 2xy + y^2\right) + x^2 + 2xy - 4x + y^2 - 4y + 4 = 8,$$

pasamos todos los términos al primer miembro de la ecuación y obtenemos (figura 10-27)

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 4 = 0.$$

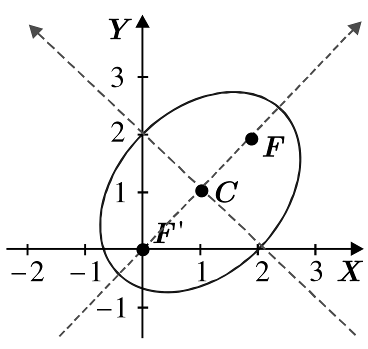


Figura 10-27

Es muy importante hacer notar que en la ecuación anterior aparece un término en xy. En el capítulo 12, “La ecuación general de segundo grado”, veremos que la presencia de este término indica que los ejes de la cónica no son paralelos a los ejes cartesianos.

Ejercicios

En cada caso, encuentra la ecuación de la elipse con los datos indicados. Utiliza la fórmula (10.10).

1. Focos $F'(1,1)$, $F(5,7)$ y eje mayor 10.

2. Focos $F'(-1,2)$, $F(-9,6)$ y eje mayor 12.

3. Focos $F'(-4,1)$, $F(4,-1)$ y eje mayor 14.

4. Focos $F'(3,6)$, $F(5,8)$ y eje mayor 6.

5. Focos $F'(-7,-3)$, $F(-5,-3)$ y eje mayor 6.

6. Focos $F'(27,5)$, $F(29,1)$ y eje mayor 16.

7. Focos $F'(-3,18)$, $F(1,22)$ y eje mayor 10.

8. Focos $F'(-3,-5)$, $F(3,5)$ y eje mayor 12.

La elipse que pasa por cuatro puntos dados

Encontrar la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados que pasa por los puntos $P(-7,1)$, $Q(-2,4)$, $R\left(2,\frac{14}{5}\right)$ y $S(-2,-2)$.

Solución:

Una manera de resolver este tipo de problemas consiste en plantear un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas.

Hemos visto que la ecuación general de una elipse con ejes paralelos a los ejes cartesianos es de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Dividiendo la ecuación entre A, y llamando nuevamente C, D, E y F a los coeficientes, obtenemos

$$x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Como queremos que los puntos dados estén en la elipse, estos deben satisfacer la ecuación anterior. Sustituyendo las coordenadas de los puntos en la ecuación de la elipse, obtenemos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
(-7)^2 & + & 1^2C & + & (-7)\,D & + & 1E & + & F & = & 0 \\
(-2)^2 & + & 4^2C & + & (-2)\,D & + & 4E & + & F & = & 0 \\
2^2 & + & \left(\frac{14}{5}\right)^2 C & + & 2D & + & \frac{14}{5}E & + & F & = & 0 \\
(-2)^2 & + & (-2)^2\,C & + & (-2)\,D & + & (-2)\,E & + & F & = & 0.
\end{array}$$

Para resolver el sistema, lo escribimos del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
C & - & 7D & + & E & + & F & = & -49 \\
16C & - & 2D & + & 4E & + & F & = & -4 \\
196C & + & 50D & + & 70E & + & 25F & = & -100 \\
4C & - & 2D & - & 2E & + & F & = & -4.
\end{array}$$

Sumamos múltiplos adecuados de la primera ecuación a las otras tres, y obtenemos ceros en la primera columna: multiplicamos la primera ecuación por 16 y la restamos a la segunda.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} C & - & 7D & + & E & + & F & = & -49 \\ 0 & + & 110D & - & 12E & - & 15F & = & 780; \end{array}$$

de manera similar, multiplicamos la primera ecuación por 196 y la restamos a la tercera, y multiplicamos la primera ecuación por 4 y la restamos a la cuarta.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} C & - & 7D & + & E & + & F & = & -49 \\ 0 & + & 110D & - & 12E & - & 15F & = & 780 \\ 0 & + & 1422D & - & 126E & - & 171F & = & 9504 \\ 0 & + & 26D & - & 6E & - & 3F & = & 192. \end{array}$$

Para obtener ceros en los dos últimos lugares de la segunda columna, multiplicamos la segunda ecuación por $\frac{1422}{110}$ y la restamos a la tercera, y ésta la multiplicamos por $\frac{26}{110}$ y la restamos a la cuarta:

$$\begin{array}{lclclclcl} C & - & 7D & + & E & + & F & = & -49 \\ 0 & + & 110D & - & 12E & - & 15F & = & 780 \\ 0 & + & 0 & + & \dfrac{1602}{55}E & + & \dfrac{252}{11}F & = & -\dfrac{6372}{11} \\ 0 & + & 0 & - & \dfrac{174}{55}E & + & \dfrac{6}{11}F & = & \dfrac{84}{11}; \end{array}$$

ahora podemos multiplicar los dos últimos renglones por 55 para eliminar los denominadores:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} C & - & 7D & + & E & + & F & = & -49 \\ 0 & + & 110D & - & 12E & - & 15F & = & 780 \\ 0 & + & 0 & + & 1602E & + & 1260F & = & -31860 \\ 0 & + & 0 & - & 174E & + & 30F & = & 420. \end{array}$$

Finalmente, para obtener un cero en la tercera columna del cuarto renglón, multiplicamos la tercera ecuación por $-\frac{174}{1602} = -\frac{29}{267}$ y la restamos a la cuarta:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} C & - & 7D & + & E & + & F & = & -49 \\ 0 & + & 110D & - & 12E & - & 15F & = & 780 \\ 0 & + & 0 & + & 1602E & + & 1260F & = & -31860 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dfrac{14850}{89}F & = & -\dfrac{270600}{89}. \end{array}$$

De la última ecuación obtenemos el valor de F,

$$F = -\frac{270600}{14850} = -\frac{164}{9}.$$

Sustituimos este valor de F en la tercera ecuación del sistema anterior y obtenemos el valor de E.

$$\begin{aligned} 1602E + 1260\left(-\frac{164}{9}\right) &= -31860 \\ 1602E - 22960 &= -31860 \\ E &= -\frac{50}{9}. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos los valores de E y de F en la segunda ecuación del sistema y obtenemos el valor de D.

$$\begin{aligned} 110D - 12\left(-\frac{50}{9}\right) - 15\left(-\frac{164}{9}\right) &= 780 \\ 110D + 340 &= 780 \\ D &= 4. \end{aligned}$$

Por último, sustituimos los valores de D, E, F en la primera ecuación del sistema y obtenemos C.

$$\begin{aligned} C - 7\,(4) - \frac{50}{9} - \frac{164}{9} &= -49 \\ C - \frac{466}{9} &= -49 \\ C &= \frac{25}{9}. \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la elipse buscada es

$$x^2 + \frac{25}{9}y^2 + 4x - \frac{50}{9}y - \frac{164}{9} = 0. \qquad (10.12)$$

Podemos multiplicar todo por 9 para eliminar los denominadores:

$$9x^2 + 25y^2 + 36x - 50y - 164 = 0.$$

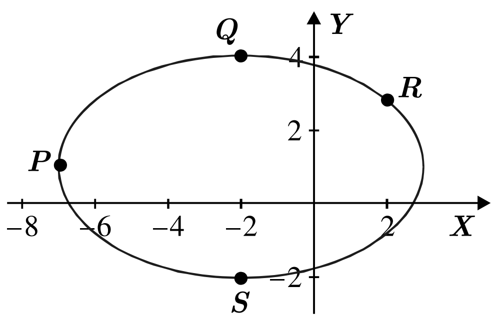


Figura 10-28

Observación:

Si se hace la eliminación de variables con números decimales, redondeando cada vez a dos decimales, en lugar de hacerlo de manera exacta con fracciones, se obtiene el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} C & - & 7D & + & E & + & F & = & -49 \\ & & 110D & - & 12E & - & 15F & = & 780 \\ & & & & 1.17E & + & 0.92F & = & -23.17 \\ & & & & & & 3.03F & = & -54.94, \end{array}$$

que da como resultado la ecuación

$$x^2 + 2.77y^2 + 4.01x - 5.55y - 18.13 = 0.$$

Si la multiplicamos por 9 para compararla con la ecuación (10.12),

$$9x^2 + 24.93y^2 + 36.09x - 49.95y - 163.17 = 0,$$

observamos que resultan casi iguales.

Ya hemos visto que tres puntos no alineados determinan un único círculo y también una única parábola con eje paralelo a algún eje cartesiano. Para el caso de la elipse, tres puntos ya no son suficientes para la unicidad; de hecho, recuerda que el círculo es un caso especial de la elipse, pero dados tres puntos no alineados, por ahí pueden pasar además del círculo una infinidad de elipses.

Por ejemplo, si consideramos los tres puntos $P(-1,0)$, $Q(0,-1)$, $R(1,0)$, es fácil ver que satisfacen la ecuación

$$x^2 + Cy^2 + (C-1)\,y - 1 = 0$$

para cualquier valor de C. Así, variando C, obtenemos diferentes elipses que pasan por los tres puntos dados.

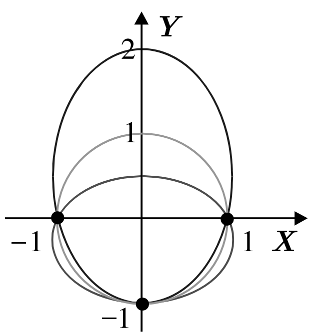


Figura 10-29

Para poder determinar una única elipse con ejes paralelos a los ejes cartesianos necesitamos un punto más, y esto se debe a que la ecuación general de la elipse con ejes paralelos a los ejes cartesianos es de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en donde A y C son distintos de cero; así, podemos dividir entre cualquiera de ellos (por ejemplo, entre A) y obtener una ecuación equivalente, con cuatro coeficientes desconocidos:

$$x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{10.13}$$

Al tener cuatro puntos y sustituir sus coordenadas en la ecuación anterior, obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas que puede tener una, varias o ninguna solución, y para que una solución sea la ecuación de una elipse, el valor de C debe ser positivo.

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados y que pasa por los puntos dados.

1. $P(5,2), Q(4,5), R(-2,5), S(-2,-1)$. **2.** $P(2,1), Q(-1,3), R(2,5), S(5,3)$.

3. $P(2,-4), Q(1,6), R(3,2), S(-2,-1)$. **4.** $P(-2,-3), Q(-4,1), R(-6,-3), S(-4,-7)$.

5. Encuentra la ecuación de la elipse cuyo eje es paralelo al eje X, que pasa por el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $x-2y=0$ y $5x+2y+24=0$, el centro del círculo $x^2+y^2+12x-6y+44=0$ y los puntos $P\left(-5, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33}\right)$ y $Q(-4,3)$.

6. Encuentra la ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados que pasa por los puntos $P(2,5)$, $Q(7,1)$, R y S, donde R es el punto que se encuentra sobre la recta $y=x-5$ y tiene ordenada -3, y S es el punto de intersección de las rectas $2x-y+7=0$ y $x+y+2=0$.

7. Encuentra la ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados que pasa por los puntos P y R que son los extremos del lado recto de la parábola cuya ecuación es $y^2-4x+8y+24=0$; el punto $Q(-1,-4)$ y el punto S, que es el centro del círculo, con ecuación $x^2+y^2-14x+8y+40=0$.

8. Encuentra la ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados que pasa por los puntos $P(2,1)$, Q que es el vértice de la parábola $x^2-8x+8y+56=0$, R que es el centro de la elipse $4x^2+49y^2-16x+1078y+5749=0$ y S que es el punto en el que el eje Y es la tangente al círculo $x^2+y^2+4x+10y+25=0$.

Recta tangente a una elipse

Recordemos que en la sección de la tangente al círculo vimos que una recta ℓ es *tangente* a una cónica en un punto P de la cónica, si la recta corta a la cónica únicamente en P y todos los demás puntos de ℓ están en una sola de las regiones determinadas por la cónica. En la figura 10-30 la primera recta corta la elipse en dos puntos, una parte de la recta está dentro de la elipse y otra parte está fuera de ella; en cambio, la segunda recta toca a la elipse en un solo punto y se queda fuera de ella.

La tangente a la elipse tiene una propiedad similar a la de la tangente a la parábola que veremos en el teorema siguiente (figura 10-30).

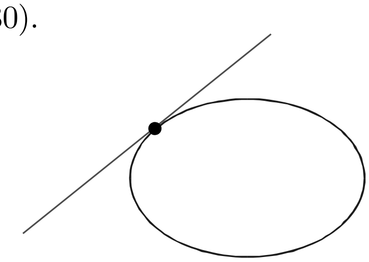


Figura 10-30

Teorema 1: Dado un punto P, en la elipse,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

la bisectriz del ángulo formado por la recta FP y la recta $F'P$ que, con excepción de P, contiene sólo puntos de afuera de la elipse, es la recta tangente a la elipse en el punto P.

Demostración: En la figura 10-31, ℓ'' es la bisectriz del ángulo formado por las rectas ℓ y ℓ', mientras que el punto simétrico de F', con respecto a ℓ'', es R. Para ver que ℓ'' es la recta tangente a la elipse, debemos ver que para cualquier punto $Q \neq P$ de ella, Q está fuera de la elipse (figura 10-31).

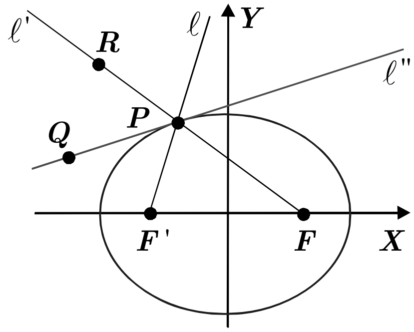


Figura 10-31

$$\begin{aligned} d(F,Q)+d(F',Q) &= d(F,Q)+d(Q,R) \\ &> d(F,R) \\ &= d(F,P)+d(P,R) \\ &= d(F,P)+d(P,F')=2a, \end{aligned}$$

así que

$$d(F,Q)+d(F',Q)>2a;$$

por tanto, Q está fuera de la elipse y el teorema queda demostrado. ∎

Entonces, para encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto P, lo que debemos hacer es encontrar la ecuación de la bisectriz arriba mencionada. Al hacerlo obtenemos:

- Caso de la elipse horizontal con centro en $C(0,0)$.

  Supongamos que la ecuación de la elipse es

  $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

  y $P(x_1,y_1)$ está en la elipse. Entonces la ecuación de la recta tangente que pasa por P es

  $$\boxed{\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.} \tag{10.14}$$

- Caso de la elipse vertical con centro en $C\,(0,0)$.

  Se intercambian los papeles de a y b y obtenemos

$$\boxed{\frac{x_1x}{b^2}+\frac{y_1y}{a^2}=1.} \tag{10.15}$$

En resumen, en ambas situaciones cambiamos x^2 por x_1x y y^2 por y_1y.
Ejemplo

- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ en el punto $P\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

  Solución:

  Sustituimos las coordenadas del punto P en la ecuación (10.14).

$$\frac{(1)\,x}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y=1.$$

  Simplificamos y obtenemos (figura 10-32)

$$x+2\sqrt{3}y-4=0.$$

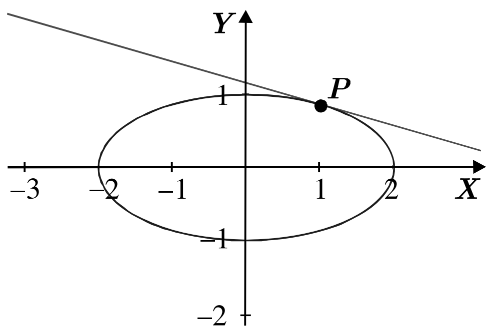


Figura 10-32

Veamos ahora cuál es la ecuación de la recta tangente en el punto $P\,(x_1,y_1)$ de la elipse vertical con centro en $C\,(h,k)$.

Trasladamos los ejes para que el origen quede en C, mediante la sustitución

$$x'=x-h \qquad \text{y} \qquad y'=y-k; \tag{10.16}$$

las coordenadas de P con respecto a los nuevos ejes son

$$x_1'=x_1-h \qquad \text{y} \qquad y_1'=y_1-k; \tag{10.17}$$

como la elipse es vertical, entonces, por (10.15)

$$\frac{x_1'x'}{b^2}+\frac{y_1'y'}{a^2}=1,$$

sustituimos x', y' de acuerdo con (10.16) y x_1', y_1' de acuerdo con (10.17) y obtenemos la ecuación de la recta tangente a la elipse vertical en $P\,(x_1, y_1)$

$$\boxed{\frac{(x_1-h)\,(x-h)}{b^2}+\frac{(y_1-k)\,(y-k)}{a^2}=1.} \tag{10.18}$$

De igual manera podemos encontrar la ecuación de la recta tangente a una elipse horizontal en un punto $P\,(x_1, y_1)$ dado.

$$\boxed{\frac{(x_1-h)\,(x-h)}{a^2}+\frac{(y_1-k)\,(y-k)}{b^2}=1.} \tag{10.19}$$

Ejemplo

- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2+y^2-8x+8y+16=0$ en el punto $P\,(2,-4)$.

  Solución:

  Escribimos la ecuación de la elipse en la forma simétrica

  $$\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+4)^2}{4}=1.$$

  Podemos comprobar que, en efecto, $P\,(2,-4)$ está en la elipse al sustituir sus coordenadas en la ecuación

  $$\frac{(2-1)^2}{1}+\frac{(-4+4)^2}{4}=1+0=1.$$

  Como la elipse es vertical, utilizamos la fórmula (10.18)

  $$\begin{aligned}\frac{(2-1)\,(x-1)}{1}+\frac{(-4-(-4))\,(y-(-4))}{4} &= 1\\ x-1 &= 1\\ x &= 2,\end{aligned}$$

  así que la recta tangente a la elipse en $P\,(2,-4)$ es la recta vertical $x=2$ (figura 10-33).

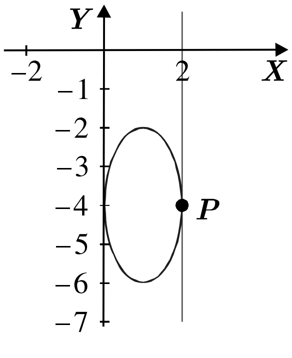


Figura 10-33

Directrices de la elipse

Si la elipse tiene centro en $C(h,k)$ y es horizontal, las ecuaciones de las *directrices* son

$$\boxed{x-h=\frac{a^2}{c}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{x-h=-\frac{a^2}{c}.}$$

Si la elipse es vertical, las ecuaciones de las *directrices* son

$$\boxed{y-k=\frac{a^2}{c}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{y-k=-\frac{a^2}{c}.}$$

Ejemplo

- Encontrar la ecuación de la recta que une al punto $P\left(12,\frac{9}{5}\right)$ con el centro de la elipse $9x^2+25y^2-108x+150y-351=0$, y la ecuación de la recta que pasa por el foco con abscisa positiva y es perpendicular a la recta tangente a la elipse en el punto P. ¿Qué coordenadas tiene el punto Q donde se cortan estas rectas? Demostrar que Q está en la directriz correspondiente a ese foco.

  Solución:

  Escribimos la ecuación de la elipse en la forma simétrica

$$\begin{aligned}
9x^2-108x+25y^2+150y &= 351\\
9\left(x^2-12x+36\right)+25\left(y^2+6y+9\right) &= 351+9(36)+25(9)\\
9(x-6)^2+25(y+3)^2 &= 900\\
\frac{(x-6)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36} &= 1,
\end{aligned}$$

  así la elipse es horizontal, con centro en $C(6,-3)$,

$$a^2=100, \qquad b^2=36, \qquad c^2=a^2-b^2=100-36=64,$$

  es decir,

$$a=10, \quad b=6, \quad c=8.$$

  Los focos son

$$F'(6-8,-3)=F'(-2,-3) \qquad \text{y} \qquad F(6+8,-3)=F(14,-3).$$

  La ecuación de la recta que une al punto $P\left(12,\frac{9}{5}\right)$ con $C(6,-3)$ es

$$\begin{aligned}
y+3 &= \left(\frac{\frac{9}{5}+3}{12-6}\right)(x-6)\\
y &= \frac{4}{5}x-\frac{39}{5}.
\end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $P\left(12,\frac{9}{5}\right)$ es

$$\begin{aligned}
\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2} &= 1\\
\frac{(12-6)(x-6)}{100}+\frac{\left(\frac{9}{5}+3\right)(y+3)}{36} &= 1\\
\frac{6(x-6)}{100}+\frac{2(y+3)}{15} &= 1\\
y &= -3+\frac{15}{2}\left(1-\frac{3(x-6)}{50}\right)\\
y &= -\frac{9}{20}x+\frac{36}{5}.
\end{aligned}$$

La pendiente de esta recta es $m=-\frac{9}{20}$, entonces la pendiente de una recta perpendicular a esta es $m_1=\frac{20}{9}$. De donde la ecuación de la recta que pasa por $F(14,-3)$ y es perpendicular a la recta anterior es

$$\begin{aligned}
y+3 &= \frac{20}{9}(x-14)\\
y &= \frac{20}{9}x-\frac{307}{9}.
\end{aligned}$$

Para encontrar el punto de intersección de estas rectas las igualamos

$$\begin{aligned}
\frac{4}{5}x-\frac{39}{5} &= \frac{20}{9}x-\frac{307}{9}\\
x &= \frac{37}{2}.
\end{aligned}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación

$$y=\frac{4}{5}\left(\frac{37}{2}\right)-\frac{39}{5}=7.$$

Así, $Q\left(\frac{37}{2},7\right)$. La ecuación de la directriz es

$$\begin{aligned}
x-6 &= \frac{a^2}{c}\\
x-6 &= \frac{100}{8}\\
x &= \frac{37}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $Q\left(\frac{37}{2},7\right)$ es un punto de la directriz.

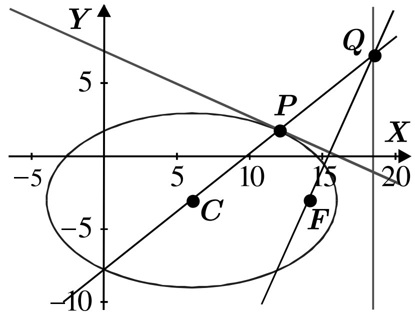


Figura 10-34

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto indicado.

1. $x^2 + 4y^2 - \ 48y + 80 = 0$, en el punto $P\,(0, 10)$.

2. $3x^2 + y^2 - 2y - 5 = 0$, en el punto $P\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 2\right)$.

3. $4x^2 + 7y^2 - 40x + 42y + 135 = 0$, en el punto $P\left(\frac{27}{4}, -\frac{3}{2}\right)$.

4. $8x^2 + 9y^2 - 32x + 54y + 41 = 0$, en el punto $P\left(1, -\frac{17}{3}\right)$.

5. $10x^2 + 3y^2 + 20x + 12y - 8 = 0$, en el punto $P\left(\frac{3}{\sqrt{5}} - 1, 0\right)$.

6. $x^2 + 5y^2 + 14x - 30y + 69 = 0$, en el punto $P\left(-7 - \sqrt{5}, 1\right)$.

7. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse cuya ecuación general es $81x^2 + 144y^2 - 972x - 576y - 1692 = 0$, en el punto $P\left(12, 2 + \frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$, y en el vértice cuya abscisa es 14. Encuentra el punto Q donde se cortan ambas tangentes. Calcula la pendiente de la recta que pasa por el otro vértice y el punto P, y la de la recta que pasa por el centro de la elipse y el punto Q. ¿Qué puedes decir de estas rectas?

8. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse cuya ecuación general es $16x^2 + 25y^2 - 32x + 200y + 16 = 0$, en los extremos del lado recto que pasa por el foco $F'\,(-2, -4)$. Demuestra que el punto en el que se cortan estas tangentes se encuentra en la recta que contiene al eje mayor de la elipse.

9. Encuentra las ecuaciones de las rectas con pendienteigual a $\frac{12}{5}$ que son tangentes a la elipse cuya ecuación general es $144x^2 + 25y^2 + 2304x - 250y + 6241 = 0$.

10. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse cuya ecuación general es $3x^2 + y^2 + 24x + 8y + 37 = 0$, y que son perpendiculares a la recta $x + y + 1 = 0$.

11. Dados una elipse y un punto Q fuera de ella, es posible encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto Q. Si Q estuviera dentro de la elipse no sería posible trazar una tangente a la elipse que pase por el punto, ya que cualquier recta que pase por Q corta a la elipse en dos puntos. Considera la elipse $2x^2 + y^2 - 28x + 4y + 98 = 0$ y los puntos $P(6,-1)$ y $Q\left(9+\sqrt{2},-4\right)$. Encuentra, si es posible, las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto correspondiente.

Resumen

- Ecuación de la elipse con centro en el origen y ejes paralelos a los ejes cartesianos

Posición	**Ecuación**	**Centro**	**Vértices**	**Focos**	B **y** B'
Horizontal	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$C(0,0)$	$V(a,0)$, $V'(-a,0)$	$F(c,0)$, $F'(-c,0)$	$B(0,b)$, $B'(0,-b)$
Vertical	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$C(0,0)$	$V(0,a)$, $V'(0,-a)$	$F(0,c)$, $F'(0,-c)$	$B(b,0)$, $B'(-b,0)$

- Extremos del lado recto de una elipse con centro en $C(0,0)$
  - Horizontal:
    - Foco $F(c,0)$: $\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$ y $\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$.
    - Foco $F'(-c,0)$: $\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$ y $\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$.
  - Vertical:
    - Foco $F(0,c)$: $\left(\frac{b^2}{a},c\right)$ y $\left(-\frac{b^2}{a},c\right)$.
    - Foco $F'(0,-c)$: $\left(\frac{b^2}{a},-c\right)$ y $\left(-\frac{b^2}{a},-c\right)$.
- Ecuación de la tangente a la elipse con centro en $C(0,0)$ en el punto $Q(x_1,y_1)$
  - Horizontal: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.
  - Vertical: $\frac{x_1x}{b^2}+\frac{y_1y}{a^2}=1$.
- Ecuaciones de la directrices de una elipse con centro en $C(0,0)$:
  - Horizontal: $x=\frac{a^2}{c}$ y $x=-\frac{a^2}{c}$.
  - Vertical: $y=\frac{a^2}{c}$ y $y=-\frac{a^2}{c}$.

- Ecuación de la elipse con centro en $C\,(h.k)$ y ejes paralelos a los ejes cartesianos

Posición	**Ecuación**	**Centro**	**Vértices**	**Focos**	B **y** B'
Horizontal	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$C\,(h,k)$	$V\,(h+a,k)$, $V'\,(h-a,k)$	$F\,(h+c,k)$, $F'\,(h-c,k)$	$B\,(h,k+b)$, $B'\,(h,k-b)$
Vertical	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$C\,(h,k)$	$V\,(h,k+a)$, $V'\,(h,k-a)$	$F\,(h,k+c)$, $F'\,(h,k-c)$	$B\,(h+b,k)$, $B'\,(h-b,k)$

- Extremos del lado recto de una elipse con centro en $C\,(h,k)$

  - Horizontal:
    - Foco $F\,(h+c,k)$: $\left(h+c,k+\dfrac{b^2}{a}\right)$ y $\left(h+c,k-\dfrac{b^2}{a}\right)$.
    - Foco $F'\,(h-c,k)$: $\left(h-c,k+\dfrac{b^2}{a}\right)$ y $\left(h-c,k-\dfrac{b^2}{a}\right)$.
  - Vertical
    - Foco $F\,(h,k+c)$: $\left(h+\dfrac{b^2}{a},k+c\right)$ y $\left(h-\dfrac{b^2}{a},k+c\right)$.
    - Foco $F'\,(h,k-c)$: $\left(h+\dfrac{b^2}{a},k-c\right)$ y $\left(h-\dfrac{b^2}{a},k-c\right)$.

- Ecuación de la recta tangente a la elipse con centro en $C\,(h,k)$ en el punto $Q\,(x_1,y_1)$

  - Horizontal : $\dfrac{(x_1-h)\,(x-h)}{a^2}+\dfrac{(y_1-k)\,(y-k)}{b^2}=1.$
  - Vertical: $\dfrac{(x_1-h)\,(x-h)}{b^2}+\dfrac{(y_1-k)\,(y-k)}{a^2}=1.$

- Ecuaciones de la directrices de una elipse con centro en $C\,(h,k)$

  - Horizontal: $x-h=\dfrac{a^2}{c}$ y $x-h=-\dfrac{a^2}{c}$.
  - Vertical: $y-k=\dfrac{a^2}{c}$ y $y-k=-\dfrac{a^2}{c}$.

- Forma general de la ecuación de la elipse $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde $A\neq 0$, $C\neq 0$ y A y C tienen el mismo signo.

Ejercicios de repaso

1. Dos rectas tangentes a la elipse $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ se cortan en el punto $P\left(0, \frac{6}{\sqrt{3}}\right)$. Encuentra los puntos de tangencia y las ecuaciones de las rectas tangentes.

2. Encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos donde se cortan la recta $x-3=0$ y el círculo $x^2+y^2=25$, y la distancia entre sus vértices es 12.

3. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $x^2+25y^2-12x-100y+111=0$ que son paralelas a la recta $3x-20y+20=0$.

4. Demuestra que las rectas tangentes a la elipse $49x^2+36y^2-490x-504y+1225=0$, en los puntos $P(5,14)$ y $Q(11,7)$, son perpendiculares.

5. Demuestra que la ecuación $9x^2+16y^2-16=0$ representa una elipse horizontal con centro en el origen y calcula su excentricidad.

6. Repite el problema anterior para las siguientes ecuaciones:

a) $9x^2+16y^2-25=0$.

b) $9x^2+16y^2-k^2=0$, donde k es un número real.

7. Considera la elipse $9x^2+25y^2-225=0$. Encuentra los puntos de intersección de la elipse con el eje Y, y llámalos P_1 y P_2. Encuentra las coordenadas de los focos F' y F. Demuestra que el eje mayor es $d(P_1,F)+d(F,P_2)=d(P_1,F')+d(F',P_2)$.

8. Encuentra los focos de la elipse $4x^2+\ y^2+40x-14y+145=0$. Prueba que el producto de las distancias de los focos a la recta tangente a la elipse en el punto $P(-5,9)$ es igual a 1.

9. Dibuja la elipse $4x^2+\ y^2-16x+8y+16=0$. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse en el vértice $V(2,0)$ y en el punto $P(4,-4)$. Encuentra la intersección de estas dos rectas, y llama Q a dicho punto. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por P y el vértice V' de la elipse. Muestra que esta recta es paralela a la recta que une a Q con el centro de la elipse.

10. Considera la parábola $y^2=4x$ y encuentra la ecuación de la recta que pasa por su foco y es paralela al eje Y. Encuentra los puntos donde se cortan esta recta y la parábola. Por último, encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos que encontraste y que tiene excentricidad de $\frac{1}{2}$.

11. Demuestra que las elipses $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{26}=1$, $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{27}=1$ y $\dfrac{x^2}{19}+\dfrac{y^2}{28}=1$ tienen los mismos focos. Escribe la ecuación de otra elipse con los mismos focos.

12. Encuentra cuatro puntos por los que pasa la elipse $9x^2+16y^2+54x-64y-111=0$.

13. Se desea construir un puente de piedra sobre un río de manera que el claro debajo de él sea media elipse. El claro debe medir en la base 20 metros y es necesario que pueda pasar debajo del puente una barcaza de 6 metros de ancho y 3 metros de altura sobre el agua. ¿Cuál es la altura mínima sobre el nivel del agua desde el centro del puente?

14. Encuentra los puntos donde se cortan la elipse $2x^2 + y^2 - 4x - 4y - 21 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 13 = 0$.

15. Encuentra las cuatro ecuaciones de las rectas que pasan por un vértice y un extremo del eje menor de la elipse $2x^2 + y^2 - 28x + 8y + 108 = 0$.

16. Considera el círculo con centro en el origen y radio 6. Encuentra el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que $x \in (-6, 6)$ y $y = \frac{1}{2}y_1$, donde $Q(x, y_1)$ está en el círculo.

17. Considera la elipse $25x^2 + 16y^2 - 300x + 128y - 444 = 0$. Encuentra sus focos y la tangente en el punto $P\left(6 + \frac{16}{5}\sqrt{6}, -2\right)$. Demuestra que el producto de las distancias de los focos a la recta tangente es igual a 64.

18. Encuentra la longitud del lado recto de la elipse $25x^2 + 16y^2 + 300x - 32y - 2684 = 0$ y las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse en los extremos de los lados rectos.

Ejercicios con Geolab

Utiliza el Geolab para hacer los siguientes ejercicios.

1. **Elipse dados los focos y el semieje mayor.** Encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos son $F1(5, 0)$ y $F2(-5, 0)$ tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos sea 12. Para ello, construye los puntos y el escalar $a = 6$, luego utiliza el constructor *Focos y a* del menú de cónicas. ¿Qué pasa si haces $a = 3$? En la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor sobre el renglón de la elipse y oprime el botón *Datos* para ver todos los elementos de la elipse.

2. **Elipse dados los focos y un punto.** Encuentra la elipse cuyos focos son $F1(1, 1)$ y $F2(-3, -1)$ y que pasa por el punto $P(2, 3)$. Utiliza el constructor *Elipse, focos y punto* del menú de cónicas.

3. **Elipse dados el centro y los semiejes.** Encuentra la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen y que satisface que el eje mayor mida 5 y el menor mida 3. **Sugerencia:** Utiliza el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de c y con él encontrar los focos. Los focos puedes construirlos como *Puntos calculados*, poniendo c o $-c$ en la coordenada x y 0 en la coordenada y de ellos. Luego, utiliza la construcción *Focos y a* del menú de cónicas.

4. **Elipse dada la ecuación.** Dibuja la elipse $4x^2 + y^2 - 36 = 0$. Para ello, utiliza el constructor *Cónica calculada* y asigna a los coeficientes $A...F$ los valores adecuados.

5. **Elipse dada la ecuación.** Dibuja la elipse $9x^2 + 4y^2 - 90x - 24y + 225 = 0$ y encuentra las coordenadas de los focos, del centro, y de los vértices.

6. **Familias de elipses.** Encuentra las elipses con focos en $F1\,(-5, 0)$ y $F2\,(5, 0)$ variando la excentricidad $0 < e < 1$. Geolab no tiene constructor para focos y excentricidad, pero sí tiene para *Focos y a*. Si $c = 5$, tenemos que $a = 5/e$.

   Construye dos números directos $c = 5$ y $e = 0.5$.

   Construye los focos como puntos calculados $F1\,(-c, 0)$ y $F2\,(c, 0)$.

   Construye el número calculado $a = c/e$.

   Construye la cónica con estos focos y el valor de a.

   Anima el número e entre 0.01 y 0.99.

   Ejecuta la animación, indicando que la cónica tiene traza.

7. **Construcción con regla y compás.** Realiza la construcción que aparece en la figura 10-10.

   Anima el punto Q de 0 a 1.

   Indica que P deje traza y ejecuta la animación.

   Ve el ejemplo elipse compás en la lista de construcciones de Geolab.

8. **Intersección de elipses.** Encuentra el círculo que pasa por los puntos en donde se cortan las elipses $25x^2 + 9y^2 = 1$ y $9x^2 + 16y^2 = 1$.

   Construye las elipses como cónicas calculadas.

   Construye las cuatro intersecciones de las cónicas.

   Construye el círculo que pasa por tres de ellas (circuncírculo) y observa que pasa por el cuarto punto.

9. **Elipse por 5 puntos.** Construye la elipse que pasa por $A\,(1, 0)$, $B\,(3, 2)$, $C\,(-1, 3)$, $D\,(3, 3)$, $E\,(-2, -1)$. Utiliza el constructor *Cónica por 5 puntos*.

10. **Tangente a la elipse.** Utiliza la elipse del ejercicio anterior. Construye la tangente a la elipse desde el punto $P\,(0, -3)$ que está del mismo lado que el punto A. También construye la tangente que está del otro lado de A.

11. **Elementos de la elipse.** Utiliza la elipse del ejercicio 8. Encuentra las intersecciones de las tangentes construidas en el ejercicio 9 con el eje focal de la cónica. Para ello:

    Construye el eje focal de la cónica. Utiliza el constructor *Rectas de una Cónica->Eje Focal*, del menú de rectas. Una vez construida esta recta, construye sus intersecciones con las tangentes dadas. Observa que a través de los menús *Puntos de una Cónica*, *Rectas de una Cónica*, *Escalares de una Cónica* tienes posibilidad de acceder a todos los elementos importantes de la cónica.

Capítulo 11

La hipérbola

Con este capítulo concluye el estudio individual de las cónicas. A partir de la definición de la hipérbola como un lugar geométrico, y con la ayuda de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, encontramos la ecuación tanto en su forma simétrica como en la general.

Sólo trataremos los casos de hipérbolas horizontales y verticales cuando su centro se encuentra en el origen y en un punto arbitrario del plano. En el siguiente capítulo consideraremos situaciones más generales, no sólo para las hipérbolas sino para el resto de las cónicas.

La hipérbola, a diferencia de las otras cónicas, está formada por dos partes separadas llamadas ramas de la hipérbola. De un punto de una de las ramas no puede llegarse a un punto de la otra rama sin separar el lápiz del papel.

La propiedad que sirve para definir a la hipérbola (el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos [focos] es constante) se usa en el sistema de radionavegación LORAN (Long range navegation) para dirigir embarcaciones marítimas. Explicaremos cómo funciona este sistema, a través de un ejemplo y ejercicios.

Definición de la hipérbola

Encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de sus distancias a $F(5,0)$ y a $F'(-5,0)$ es 4.

Solución:

El procedimiento que usaremos es muy similar al utilizado en el capítulo anterior para las elipses.

Llamemos $P(x,y)$ a un punto de dicho lugar geométrico.

Debemos restar la distancia de P a F' a la distancia de P a F e igualar a 4.

$$d(P,F) - d(P,F') = 4 \tag{11.1}$$

Utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos (4.1)

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Sustituimos las coordenadas de $F(5,0)$ y $F'(-5,0)$ en (11.1)

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-(-5))^2 + (y-0)^2} &= 4 \\
\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} - \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} &= 4.
\end{aligned}$$

Pasamos una de las raíces cuadradas al otro lado de la igualdad y elevamos ambos lados al cuadrado.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} &= 4 + \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} \\
\left(\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}\right)^2 &= \left(4 + \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}\right)^2 \\
x^2 - 10x + 25 + y^2 &= 16 + 8\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} + x^2 + 10x + 25 + y^2
\end{aligned}$$

En el lado derecho dejamos únicamente la raíz y de nuevo elevamos al cuadrado.

$$\begin{aligned}
x^2 - 10x + 25 + y^2 - \left(x^2 + 10x + 41 + y^2\right) &= 8\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} \\
4(-5x - 4) &= 8\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} \\
(-5x - 4)^2 &= \left(2\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}\right)^2 \\
25x^2 + 40x + 16 &= 4x^2 + 40x + 100 + 4y^2
\end{aligned}$$

Pasamos todo a un lado de la igualdad y obtenemos que el lugar geométrico deseado es el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación (figura 11-1)

$$21x^2 - 4y^2 - 84 = 0.$$

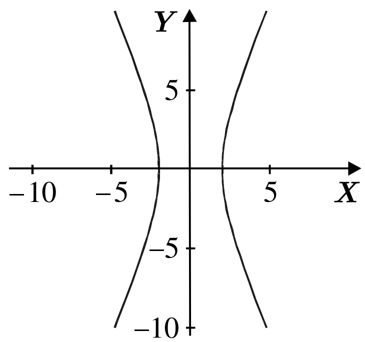


Figura 11-1

Observación:
Si en lugar de considerar la diferencia (11.1) consideramos

$$d\,(P, F') - d\,(P, F) = 4, \tag{11.2}$$

también llegamos a la misma ecuación. De hecho, el conjunto de puntos que satisface (11.1) es la curva de la izquierda en la figura 11-1, y los puntos que satisfacen (11.2) forman la curva de la derecha.

Una *hipérbola* es el conjunto de puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos tienen una diferencia constante. Con esto queremos decir que tomamos la diferencia de la distancia mayor menos la distancia menor. Los dos puntos fijos se llaman *focos* de la hipérbola. El punto medio entre los dos focos se llama *centro* de la hipérbola.

La hipérbola con centro en el origen

Hipérbola horizontal

Comencemos con el análisis de una hipérbola con centro en el origen y focos en el eje X. Supongamos que las coordenadas de los focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. Para que un punto $P(x, y)$ pertenezca a la hipérbola, debe satisfacer

$$d(P, F) - d(P, F') = k \tag{11.3}$$

o

$$d(P, F') - d(P, F) = k, \tag{11.4}$$

donde k es una constante (figura 11-2).

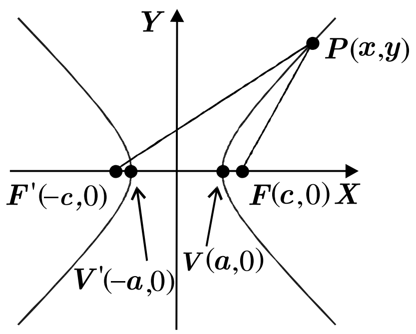


Figura 11-2

Si hacemos $a = \frac{k}{2}$, podemos ver que los puntos $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ pertenecen a la hipérbola, ya que

$$d(V, F') - d(V, F) = \sqrt{(a+c)^2} - \sqrt{(a-c)^2} = a + c - (c - a) = 2a = k,$$

y similarmente para V' (figura 11-2).

En general, sustituimos las coordenadas de P, F y F' en la fórmula de la distancia entre dos puntos (4.1) y la expresión (11.3) queda como sigue:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = k.$$

Para eliminar los radicales, pasamos uno de ellos al otro lado de la igualdad y elevamos al cuadrado,

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(k + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2.$$

Simplificando, obtenemos

$$-4cx - k^2 = 2k\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Volvemos a elevar al cuadrado para eliminar el otro radical y simplificamos de nuevo

$$4\left(4c^2 - k^2\right)x^2 - 4k^2y^2 = k^2\left(4c^2 - k^2\right). \tag{11.5}$$

Recordamos que $k = 2a$; al sustituir en la fórmula (11.5), tenemos

$$\begin{aligned} 4\left(4c^2 - 4a^2\right)x^2 - 16a^2y^2 &= 4a^2\left(4c^2 - 4a^2\right) \\ \left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 &= a^2\left(c^2 - a^2\right). \end{aligned}$$

Luego dividimos toda la ecuación entre $a^2\left(c^2 - a^2\right)$:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1}.$$

Observa que obtenemos la misma ecuación (10.2) que para la elipse. que la ecuación anterior represente una elipse o una hipérbola depende de la relación entre a y c: será elipse cuando $a > c$ e hipérbola cuando $a < c$.

Como $c > a > 0$, podemos definir $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, así $b^2 = c^2 - a^2$ y llegamos a la ecuación *simétrica* de la hipérbola

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}. \tag{11.6}$$

Si en lugar de trabajar con (11.3) trabajamos con (11.4), llegamos a la misma ecuación.

En la ecuación (11.6) pasamos todos los términos al primer miembro y multiplicamos por a^2b^2 y nos queda la ecuación de la hipérbola horizontal en la *forma general*,

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

la cual es del tipo

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + F = 0,}$$

donde A y C tienen signos distintos.

Ahora centrémonos en algunos de los elementos principales de la hipérbola (figura 11-3).

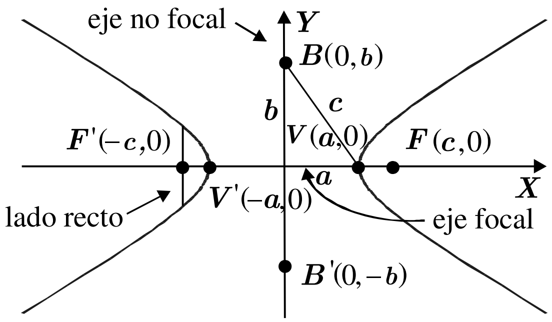


Figura 11-3

- Los puntos $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ se conocen como los *vértices* de la hipérbola.
- La recta que contiene a los vértices V y V' y a los focos F y F' se conoce como *eje focal.*
- A la distancia entre los dos focos F y F' se le llama *distancia focal* y vale $2c$.
- El segmento que une a los vértices V y V' se llama *eje transversal* y mide $2a$, y éste es el valor de la diferencia de las distancias de cualquiera de los puntos de la hipérbola a los focos.
- El punto medio del segmento $\overline{FF'}$ coincide con el del segmento $\overline{VV'}$ y se conoce como *centro* de la hipérbola; en este caso, dicho centro es el origen. La distancia del centro a cualquiera de los focos es c, y a cualquiera de los vértices es a.
- La recta que pasa por el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje focal se llama *eje no focal.*
- Observa que tanto el eje focal como el eje no focal de la hipérbola son *ejes de simetría* de la hipérbola.
- Notemos que a diferencia del caso de la elipse, ahora $c > a$, es decir, los focos están más lejos entre sí de lo que están los vértices, y la relación entre a, b y c es

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2.} \tag{11.7}$$

- Al segmento que une los puntos $B'(0,-b)$ y $B(0,b)$ se le llama *eje conjugado*.
- Cualquiera de las cuerdas que pasan por un foco y son perpendiculares al eje focal se conoce como *lado recto*.

Para encontrar la longitud del lado recto, en la ecuación (11.6) hacemos $x = c$, que es la abscisa de uno de los focos.

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, obtenemos

$$\frac{a^2+b^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si simplificamos y despejamos y^2, tenemos que

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}, \qquad \text{de donde} \qquad y = \pm\frac{b^2}{a},$$

por lo que los puntos

$$\left(c, \frac{b^2}{a}\right) \quad \text{y} \quad \left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

son los extremos del lado recto que pasa por el foco $F(c,0)$. Por lo tanto, la longitud del lado recto es la distancia entre estos dos puntos:

$$\frac{2b^2}{a}.$$

De manera similar, los puntos

$$\left(-c, \frac{b^2}{a}\right) \quad \text{y} \quad \left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

son los extremos del lado recto que pasa por el foco $F'(-c,0)$.

Observa que la longitud del lado recto se calcula en la hipérbola con la misma fórmula que en la elipse.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(5,0)$ y $F'(-5,0)$ y tal que la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos es 8.

   Solución:

   Para tener toda la información que necesitamos sobre la hipérbola debemos completar el siguiente cuadro:

a	b	c	**Centro**	**Focos**	**Vértices**	B **y** B'
4				$F(5,0)$ y $F'(-5,0)$		

El punto medio entre los focos es $C(0,0)$ y los focos están sobre el eje X, así que su ecuación es de la forma (11.6).

La distancia entre los focos es $2c = 10$ y la distancia entre los vértices es $2a = 8$. Entonces tenemos

$$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9,$$

y la ecuación de la hipérbola es (figura 11-4)

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

a	b	c	**Centro**	**Focos**	**Vértices**	B **y** B'
4	3	5	$C\,(0,0)$	$F(5,0)$, $F'(-5,0)$	$V(4,0)$, $V'(-4,0)$	$B(0,3)$, $B'(0,-3)$

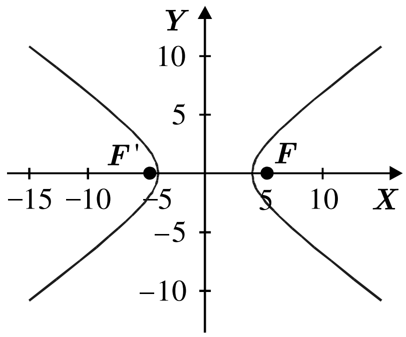


Figura 11-4

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F\,(8,0)$ y $F'\,(-8,0)$ y cuyos vértices son $V\,(4,0)$ y $V'\,(-4,0)$.

Solución:

Los focos están sobre el eje X, así que la hipérbola es horizontal. El punto medio de los focos es $C\,(0,0)$, que es el centro de la hipérbola.

La distancia del centro a los focos es $c = 8$, y la distancia del centro a los vértices es $a = 4$. Por la relación (11.7), tenemos

$$b^2 = c^2 - a^2 = 48.$$

Sustituimos estos valores en la ecuación (11.6) y obtenemos (figura 11-5)

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1.$$

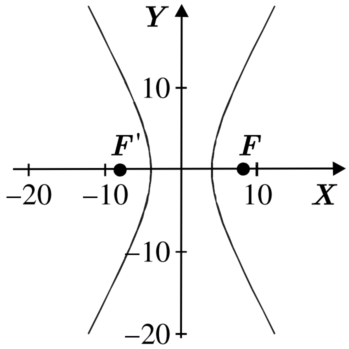


Figura 11-5

Hipérbola vertical

Si la hipérbola tiene centro en el origen y sus focos están en el eje Y, las coordenadas de los focos son $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$. Si de nuevo llamamos $2a$ a la diferencia de las distancias de un punto $P(x, y)$ de la hipérbola a los focos y hacemos un análisis similar al anterior, o simplemente intercambiamos los papeles de x y y, llegamos ahora a la ecuación siguiente (figura 11-6):

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}. \tag{11.8}$$

Donde, como antes, $b^2 = c^2 - a^2$.

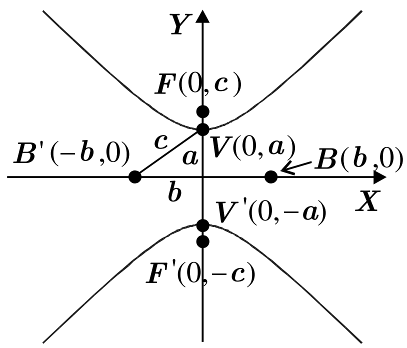


Figura 11-6

De nuevo, la distancia del centro a cualquiera de los focos es c y a cualquiera de los vértices es a.

Los vértices son ahora $V(0, a)$ y $V'(0, -a)$.

Observación: Cuando la hipérbola es vertical el coeficiente de x^2 es negativo en la ecuación en su forma simétrica; cuando la hipérbola es horizontal el coeficiente de x^2 es positivo.

En resumen:

Posición	**Ecuación**	**Centro**	**Vértices**	**Focos**	B **y** B'
Horizontal	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$C\,(0,0)$	$V\,(a,0)$, $V'\,(-a,0)$	$F\,(c,0)$, $F'\,(-c,0)$	$B\,(0,b)$, $B'\,(0,-b)$
Vertical	$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$	$C\,(0,0)$	$V\,(0,a)$, $V'\,(0,-a)$	$F\,(0,c)$, $F'\,(0,-c)$	$B\,(b,0)$, $B'\,(-b,0)$

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(0,5)$ y $F'(0,-5)$ y tal que la diferencia de las distancias de sus puntos a los focos es 2.

Solución:

Los focos están sobre el eje Y, así que la hipérbola es vertical. Su centro es el punto medio de los focos, $C\,(0,0)$. La distancia del centro a los focos es $c = 5$. La diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos es $2a = 2$, así que $a = 1$, por lo que los vértices son $V'\,(0,-1)$ y $V\,(0,1)$. Utilizando (11.7), obtenemos

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 1 = 24.$$

Sustituimos estos valores en la ecuación (11.8) (figura 11-7),

$$y^2 - \frac{x^2}{24} = 1.$$

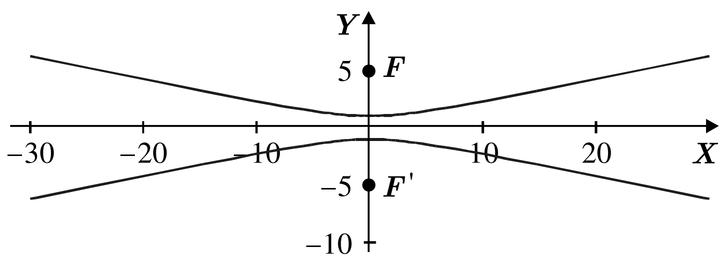


Figura 11-7

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $V(0,2)$ y $V'(0,-2)$ y sus focos son $F(0,10)$ y $F'(0,-10)$.

Solución:

De nuevo, el centro es $C(0,0)$, los focos están sobre el eje Y, la distancia focal es $2c = 20$ y la distancia entre los vértices es $2a = 4$. Entonces

$$b^2 = 10^2 - 2^2 = 96,$$

y la ecuación de la hipérbola es (figura 11-8)

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{96} = 1.$$

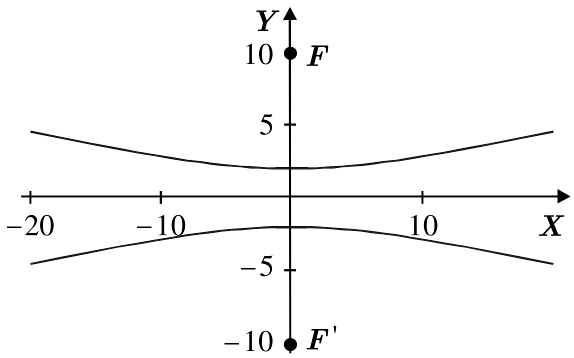


Figura 11-8

Ejercicios

Encuentra las coordenadas de los vértices y de los focos de las siguientes hipérbolas.

1. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{36} = 1$ **2.** $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} = 1$ **3.** $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{121} = 1$

4. $25x^2 - 49y^2 - 1225 = 0$ **5.** $2x^2 - 3y^2 = 12$ **6.** $5x^2 - 4y^2 = 100$

7. $-4x^2 + 5y^2 - 80 = 0$ **8.** $y^2 - 9x^2 - 81 = 0$ **9.** $x^2 - 9y^2 - 81 = 0$

10. $25x^2 - 9y^2 - 225 = 0$ **11.** $-9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ **12.** $-4x^2 + y^2 = 16$

En cada caso, encuentra la ecuación de la hipérbola con los datos indicados.

13. Focos $F'(-5, 0)$, $F(5, 0)$; la distancia entre sus vértices es 4.

14. Vértices $V'(0, -3)$, $V(0, 3)$; distancia focal 7.

15. Vértices $V'(-4, 0)$, $V(4, 0)$; distancia focal 10.

16. Focos $F'\left(-\frac{3}{2}\ , 0\right)$, $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$; la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos es 2.

17. Focos $F'(0, -6)$, $F(0, 6)$; vértices $V'(0, -3)$, $V(0, 3)$.

18. Distancia focal 14; $C\,(0, 0)$; longitud del lado recto 20.

19. Encuentra las ecuaciones de los círculos con centro en cada foco de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 - 9 = 0$ y cuyo radio mide la distancia entre los vértices de la hipérbola.

20. Encuentra las ecuaciones de los lados del triángulo formado por los focos de la hipérbola $5y^2 - 4x^2 - 20 = 0$ y el punto $P(-5, -1)$.

21. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los focos de las hipérbolas cuyas ecuaciones son $9x^2 - 16y^2 = 144$ y $16y^2 - 9x^2 = 144$.

22. Una hipérbola es *equilátera* si $a = b$. Considera las hipérbolas $x^2 - y^2 = 16$ y $y^2 - x^2 = 16$. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los cuatro focos y la ecuación del círculo que pasa por los cuatro vértices.

23. Considera las hipérbolas $x^2 - y^2 = a^2$ y $y^2 - x^2 = a^2$. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los cuatro focos y la del círculo que pasa por los cuatro vértices.

24. Las hipérbolas
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$
se llaman *hipérbolas conjugadas*.

Encuentra la hipérbola conjugada de $-49x^2 + 81y^2 - 3969 = 0$. Dibuja las hipérbolas en el mismo sistema coordenado.

Las asíntotas de la hipérbola

Consideremos una hipérbola horizontal dada por la ecuación (11.6)
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
Si despejamos y, obtenemos
$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$
Observamos que si $|x|$ es muy grande, $x^2 - a^2$ es "casi igual" a x^2 y, por tanto, $\sqrt{x^2 - a^2}$ es casi igual a $|x|$, es decir, para x grande (ya sea positiva o negativa), y es "casi igual" a $\pm\frac{b}{a}x$, o sea que las ramas de la hipérbola se aproximan a las rectas
$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{b}{a}x, \tag{11.9}$$
cuando $|x|$ es muy grande (figura 11-9).

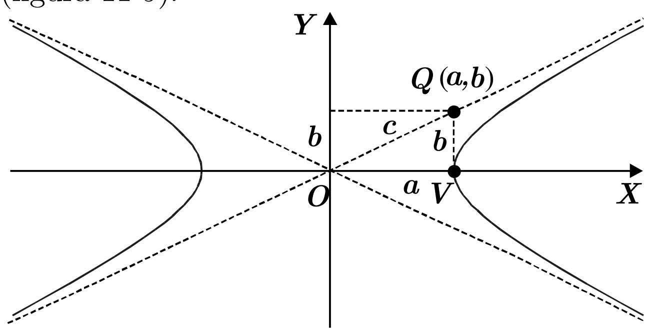


Figura 11-9

Este par de rectas se conocen como las *asíntotas* de la hipérbola.

Observa que el triángulo OVQ es rectángulo y que sus catetos miden a y b, por tanto, la hipotenusa de ese triángulo mide c. Además, Q está en una asíntota de la hipérbola; esta observación es importante para trazar una hipérbola, como puede verse en las figuras de los siguientes ejemplos.

Cuando la hipérbola es vertical, al despejar y de su ecuación (11.8)

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

obtenemos

$$y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{x^2 + b^2},$$

y al hacer un análisis similar al anterior, encontramos que sus asíntotas son (figura 11-10)

$$y = \frac{a}{b}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{a}{b}x. \tag{11.10}$$

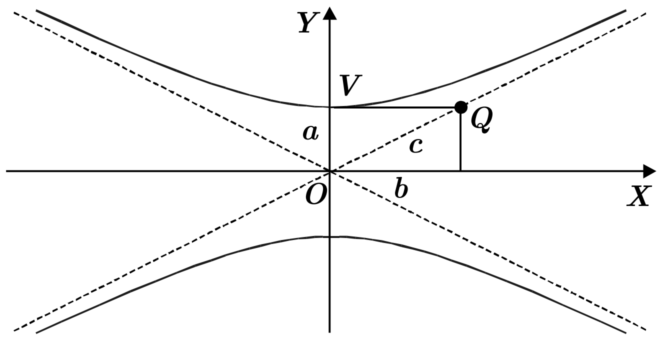


Figura 11-10

Ejemplos

1. Encontrar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{36} = 1$.

Solución:

Como el coeficiente de x^2 es negativo, entonces la hipérbola es vertical; $a^2 = 16$ y $b^2 = 36$, por tanto,

$$a = 4 \qquad \text{y} \qquad b = 6.$$

Utilizamos las ecuaciones (11.10) y simplificamos, de modo que tenemos que las ecuaciones de las asíntotas son (figura 11-11)

$$y = \frac{2}{3}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{2}{3}x.$$

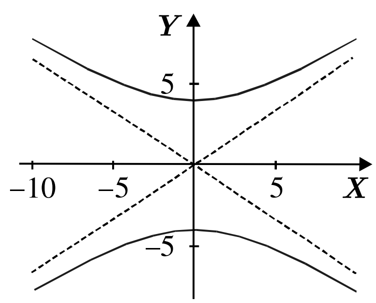


Figura 11-11

2. Encontrar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

Solución:

Escribimos la ecuación en la forma simétrica

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Como el coeficiente de x^2 es positivo, entonces la hipérbola es horizontal; $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, por tanto,

$$a = 4 \qquad \text{y} \qquad b = 3.$$

Utilizamos las ecuaciones (11.9) y tenemos que las ecuaciones de las asíntotas son (figura 11-12)

$$y = \frac{3}{4}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{3}{4}x.$$

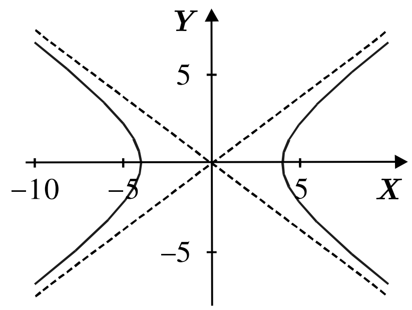


Figura 11-12

3. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $V(0,7)$, $V'(0,-7)$ y la pendiente de una de las asíntotas es igual a $\frac{7}{2}$.

Solución:

Como el centro de la hipérbola es el punto medio de los vértices, entonces

$$C\left(0, \frac{7-7}{2}\right) = C(0,0).$$

Además, $a = 7$, ya que a es la distancia del centro a cualquier vértice. La hipérbola es vertical, de modo que la pendiente de la asíntota es

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{2};$$

o sea,

$$\frac{7}{b} = \frac{7}{2},$$

de donde $b = 2$. Por ser vertical, la ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1;$$

entonces la ecuación buscada es (figura 11-13)

$$\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{4} = 1.$$

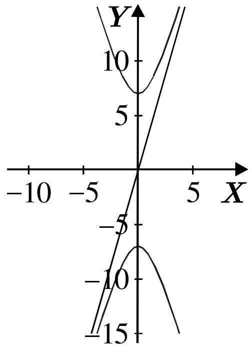


Figura 11-13

Para determinar la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y vértices en uno de los ejes cartesianos, basta con conocer la ecuación de una de las asíntotas y las coordenadas de uno de los vértices, ya que con la ecuación de la asíntota podemos determinar b.

Ejemplo

- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son $y = -\frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x$, y uno de los vértices es $V(-5, 0)$.

  Solución:

  Como ambas asíntotas pasan por el origen, entonces el centro de la hipérbola es $C(0, 0)$. Puesto que el vértice conocido está sobre el eje X, entonces la hipérbola es horizontal y su ecuación es de la forma

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

  La distancia del centro al vértice es $a = 5$ y la pendiente de la asíntota $y = \frac{1}{2}x$ es

  $$\frac{b}{a} = \frac{1}{2},$$

  entonces $b = \frac{5}{2}$. Así, la ecuación de la hipérbola es (figura 11-14)

  $$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1.$$

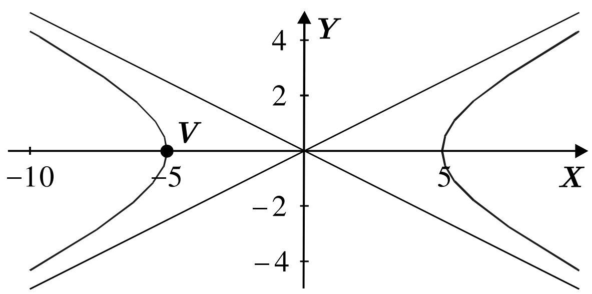


Figura 11-14

Teorema 1: Los ejes de simetría de la hipérbola, en este caso los ejes cartesianos, son las bisectrices de los ángulos formados por las asíntotas.

La excentricidad de la hipérbola

Comparemos las gráficas de las hipérbolas $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ y $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$ (figura 11-15).
Solución:

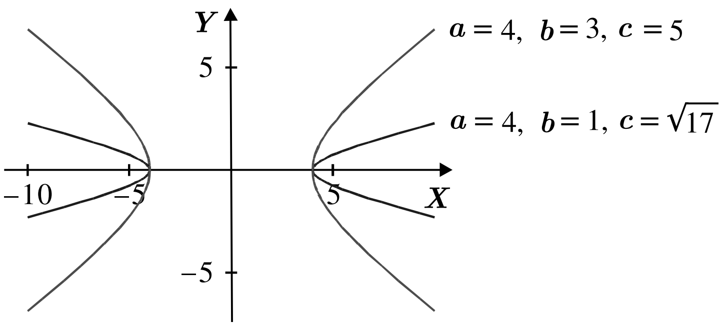


Figura 11-15

En ambas hipérbolas el valor de a es 4. Para la primera de ellas, la distancia del centro a los focos es

$$c = \sqrt{16 + 9} = 5,$$

mientras que para la segunda,

$$c = \sqrt{16 + 1} \approx 4.12.$$

La relación entre los valores de a y c es lo que determina qué tan abierta o cerrada es la hipérbola.

Para medir qué tan abierta es una hipérbola, se utiliza el concepto de *excentricidad*, que se define, igual que en el caso de la elipse, como el cociente de la distancia focal entre la distancia entre los vértices.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

observa que como $c > a$, entonces $e > 1$.

La excentricidad mide qué tan *abierta o cerrada* es la hipérbola; en cambio, en el caso de las elipses, mide qué tan alargadas son éstas.

En el ejemplo anterior, la primera hipérbola tiene excentricidad

$$e = \frac{5}{4} = 1.25,$$

y la segunda tiene

$$e = \frac{4.12}{4} = 1.03.$$

En la figura 11-16 observa el triángulo rectángulo de catetos a, b y de hipotenusa c. Cuanto más cercana está la excentricidad a uno ($c \approx a$), el cateto b (recuerda que $b^2 = c^2 - a^2$) es más pequeño y, por tanto, la hipérbola está más cerrada; y, cuanto más grande es la excentricidad (c es grande con respecto a a), b es mayor y la hipérbola está más abierta.

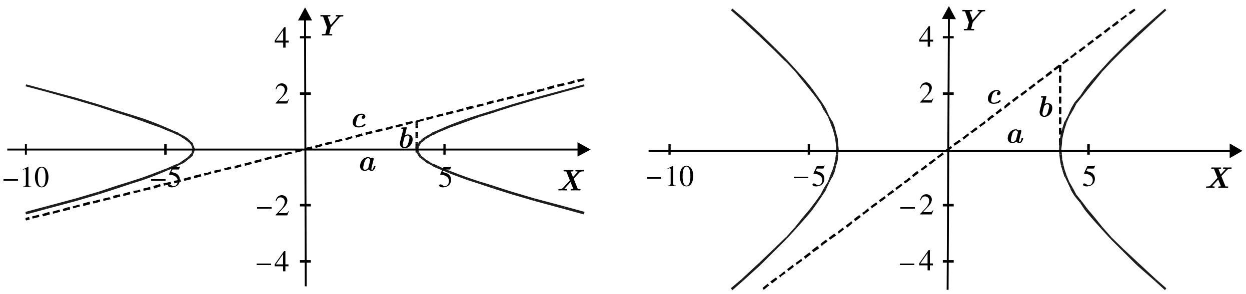


Figura 11-16

Ejercicios

En cada caso, encuentra la ecuación de la hipérbola con los datos señalados.

1. Vértices $V'(-4,0)$, $V(4,0)$; excentricidad igual a 3.

2. Vértices $V'(-3,0)$, $V(3,0)$; una asíntota tiene pendiente igual a $\frac{5}{3}$.

3. Vértices $V'(-\frac{5}{4},0)$, $V(\frac{5}{4},0)$; una asíntota tiene pendiente igual a 4.

4. Vértice $V(0,-1)$, centro $C(0,0)$; excentricidad igual a $\frac{5}{2}$.

5. Focos $F'(0,-\frac{1}{2})$, $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$; excentricidad igual a $\frac{6}{5}$.

6. Encuentra la excentricidad de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

7. Encuentra la excentricidad de la hipérbola con ecuación $-81x^2 + 25y^2 - 2025 = 0$.

8. Encuentra la excentricidad de la hipérbola equilátera $5y^2 - 5x^2 = 8$ (revisa su definición en el ejercicio 22 de la página 443).

9. Calcula las excentricidades de las hipérbolas con ecuaciones $9x^2 - 9y^2 = 144$ y $9y^2 - 9x^2 = 144$. ¿Qué relación hay entre dichas excentricidades?

10. Encuentra la hipérbola conjugada de $x^2 - 100y^2 - 100 = 0$ (revisa su definición en el ejercicio 24 de la página 443), y encuentra las asíntotas de ambas hipérbolas. ¿Cómo son dichas asíntotas?

Construcción de la hipérbola

Sugerencias para trazar una hipérbola

- Localiza el centro. (Hasta este momento, únicamente hemos visto hipérbolas con centro en el origen, pero más adelante veremos el caso más general.)
- Determina el valor de la distancia c del centro a los focos, la distancia a del centro a los vértices, y el valor de b $\left(b = \sqrt{c^2 - a^2}\right)$.
- Determina si la hipérbola es horizontal o vertical, de acuerdo con el signo que antecede a x^2 en la ecuación simétrica.
- Localiza los vértices, V y V', y los focos, F y F'.
- Construye el triángulo de lados abc y traza las asíntotas.
- Localiza los extremos de los lados rectos. En el caso de la hipérbola horizontal, éstos están a $\dfrac{b^2}{a}$ unidades arriba y abajo de los focos. En el caso de la hipérbola vertical, están a $\dfrac{b^2}{a}$ unidades a la derecha e izquierda.
- Une con una curva suave los puntos que están en la hipérbola, ésta debe aproximarse a las asíntotas.

Ejemplos

1. Dibujar la hipérbola cuya ecuación es $-\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Solución:

El coeficiente de x^2 es negativo; entonces la hipérbola es vertical: $a^2 = 16$ y $b^2 = 36$. Por tanto,

$$c^2 = 16 + 36 = 52,$$

de donde

$$a = 4, \qquad b = 6 \qquad \text{y} \qquad c = \sqrt{52} \approx 7.21.$$

Entonces tenemos que los focos son

$$F(0, \sqrt{52}) \approx F(0, 7.21) \qquad \text{y} \qquad F'(0, -\sqrt{52}) \approx F'(0, -7.21);$$

los vértices son

$$V(0, 4) \qquad \text{y} \qquad V'(0, -4).$$

Las asíntotas son las rectas

$$y = \frac{a}{b}x = \frac{4}{6}x = \frac{2}{3}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{a}{b}x = -\frac{4}{6}x = -\frac{2}{3}x.$$

Marcamos los vértices y dibujamos los triángulos con catetos a y b como ayuda para trazar las asíntotas.

Encontramos los extremos de los lados rectos. Como

$$\frac{b^2}{a} = \frac{36}{4} = 9,$$

entonces estos extremos están 9 unidades a la derecha y 9 unidades a la izquierda de los focos, así que son los puntos

$$\left(-9, -\sqrt{52}\right), \quad \left(-9, \sqrt{52}\right), \quad \left(9, -\sqrt{52}\right), \quad \left(9, \sqrt{52}\right).$$

Ahora trazamos las ramas de la hipérbola como curvas suaves que salen de los vértices, pasan por los extremos de los lados rectos, y se aproximan a las asíntotas (figura 11-17).

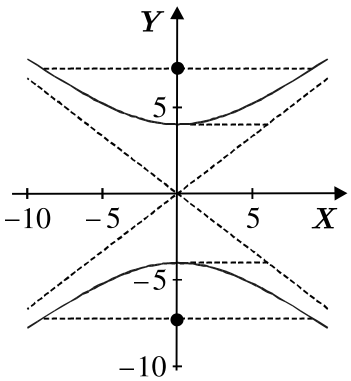


Figura 11-17

2. Dibujar la hipérbola cuya ecuación en su forma general es $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

Solución:

Escribimos la ecuación en la forma simétrica. Para ello, pasamos al otro lado de la ecuación el término independiente

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

y dividimos entre él toda la ecuación:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Como el coeficiente de x^2 es positivo, la hipérbola es horizontal; $a^2 = 16$, $b^2 = 9$ y, por tanto,

$$c^2 = 16 + 9 = 25.$$

Así que

$$a = 4, \qquad b = 3 \qquad \text{y} \qquad c = 5.$$

Los focos son

$$F(5, 0) \qquad \text{y} \qquad F'(-5, 0).$$

Los vértices son

$$V(4, 0) \qquad \text{y} \qquad V'(-4, 0).$$

Podemos ahora marcar estos puntos. Dibujamos los 4 triángulos de lados a, b y c, y marcamos los vértices $(4,3)$, $(4,-3)$, $(-4,3)$ y $(-4,-3)$ de dichos triángulos; por ahí pasan las asíntotas. Dibujamos éstas últimas.

1. Los extremos de los lados rectos están a

$$\frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}$$

unidades arriba y abajo de los focos, así que sus coordenadas son

$$\left(5, -\frac{9}{4}\right), \quad \left(5, \frac{9}{4}\right), \quad \left(-5, -\frac{9}{4}\right), \quad \left(-5, \frac{9}{4}\right),$$

y ahora trazamos la hipérbola a partir de los vértices, acercándonos a las asíntotas, y pasando por los extremos de los lados rectos (figura 11-18).

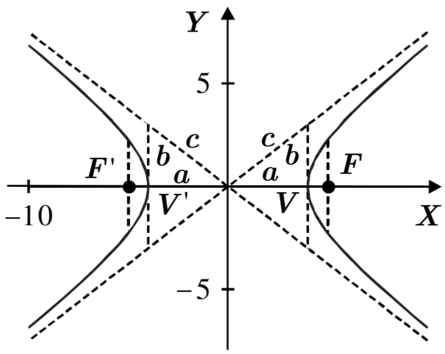


Figura 11-18

Construcción con regla y compás

Al igual que con la parábola y la elipse, no es posible dibujar una hipérbola de un solo trazo utilizando regla y compás; sin embargo, es posible utilizar estos instrumentos para localizar suficientes puntos de ella y poder trazarla de una manera bastante precisa.

Conocemos un foco (F), su centro (C) y la excentricidad (e) de la hipérbola.

- Trazamos el eje de la hipérbola (ℓ), que es la recta que pasa por F y C.
- Por el centro C, trazamos una recta d perpendicular a ℓ.
- Consideremos que los ejes cartesianos coinciden con ℓ y d; de manera que C es el origen de ese sistema y tiene a ℓ como eje X.
- Construimos las rectas ℓ' y ℓ'' que pasan por el origen, con pendientes e y $-e$.
- Por un punto M del eje X, que se encuentre a la derecha de F, trazamos una vertical que corte a la recta ℓ' en un punto N.
- Con el compás apoyado en F, marcamos los puntos P y P' en la recta MN, de manera que $FP = MN = FP'$.

- Los puntos P y P' pertenecen a una hipérbola con las características establecidas al inicio de esta construcción (figura 11-19).

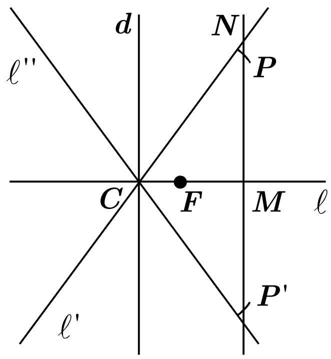


Figura 11-19

Repetimos el procedimiento con tantos puntos sobre el eje X como deseemos, y trazamos una curva suave que pase por ellos (figura 11-20).

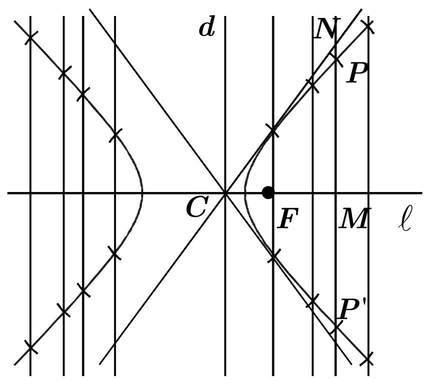


Figura 11-20

Los puntos P así construidos satisfacen las siguientes condiciones:

Su distancia a F es

$$d\,(P, F) = MN.$$

Su distancia a la recta d es

$$d\,(P, d) = MC.$$

Como la recta ℓ' tiene pendiente e, entonces

$$e = \frac{MN}{MC},$$

así,

$$d\,(P, F) = e \cdot d\,(P, d)\,.$$

En la primera sección del capítulo 12 veremos que esta condición caracteriza a la hipérbola con foco F y excentricidad e.

Construcción con hilo

Conocemos la distancia $2a$ que hay entre los vértices y conocemos los focos F y F'.

- Colocamos unos alfileres para marcar los focos, F y F', de la hipérbola.
- Amarramos un lápiz a la mitad de un hilo.
- Pasamos una de las mitades del hilo bajo ambos alfileres, y la otra mitad sobre el alfiler puesto en F'.
- Ajustamos el hilo de manera que $PF' - PF = 2a$.
- Sujetamos firmemente los extremos del hilo en Q y tiramos de él de manera que, en cada momento, jalemos la misma cantidad de hilo de cada uno de los segmentos.
- El punto P describe la hipérbola (figura 11-21).

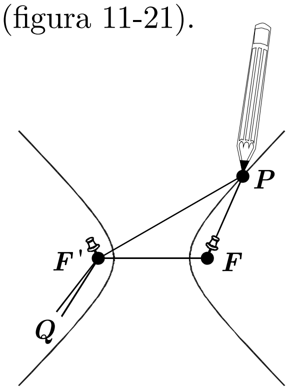


Figura 11-21

Construcción con papel doblado

Utilizamos una hoja rectangular de papel encerado (figura 11-22).

- Dibujamos un círculo con centro C y radio r, y marcamos un punto F fuera de él.
- Doblamos el papel de manera que el punto F caiga sobre un punto del círculo.
- Marcamos el doblez y desdoblamos.

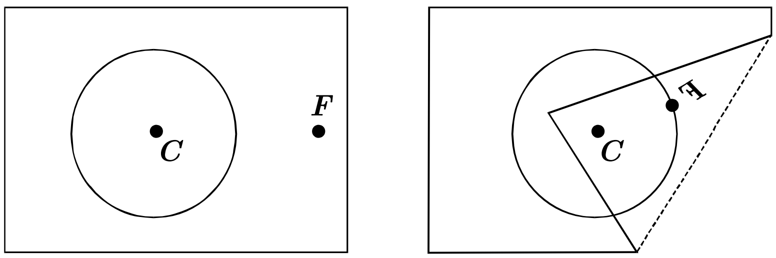


Figura 11-22

- Continuamos doblando de manera que el punto F caiga sobre diferentes puntos del círculo (figura 11-23).

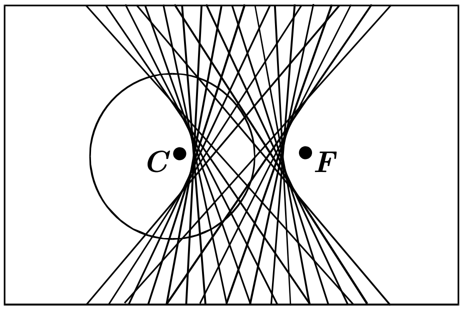


Figura 11-23

Si hacemos suficientes dobleces, nos daremos cuenta de que aparece una curva en forma de hipérbola. De hecho, cada doblez es tangente a ella.

La figura 11-24 muestra que al doblar la hoja a lo largo de la recta ℓ, de manera que el punto F coincida con el punto A del círculo, y al prolongar el radio CA, se forma un triángulo isósceles ADF, ya que ℓ es la mediatriz de AF. El punto D es el punto del doblez que pertenece a la hipérbola, ya que

$$DC - DF = DC - DA = r,$$

donde r es el radio del círculo original. Así, para cualquier doblez, tenemos que el punto D, que es la intersección del radio AC con el doblez, pertenece a la hipérbola cuyos focos son F y C y en la que $2a = r$ (figura 11-24).

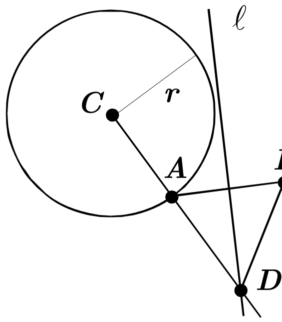


Figura 11-24

Puedes ver el ejemplo "conicaenvuelve" de la lista de construcciones de Geolab.

Aplicaciones de la hipérbola

Propiedad de reflexión de la hipérbola

Imaginemos que una sola rama de la hipérbola es un espejo y quitemos la otra rama. Un rayo que emana del foco de la rama que quitamos se refleja en la otra rama y se dirige en dirección opuesta al otro foco (figura 11-25).

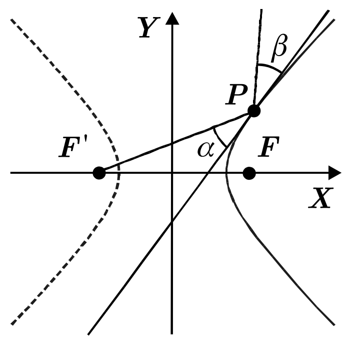


Figura 11-25

Dicho de otra manera, cuando un rayo dirigido hacia el foco F choca en la rama de la derecha, se refleja hacia el foco F'.

La propiedad de reflexión de la hipérbola se utiliza para construir telescopios parabólico-hiperbólicos en los que se combinan un espejo parabólico y otro hiperbólico (figura 11-26).

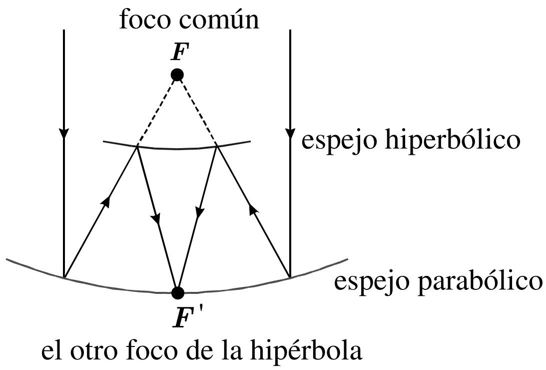


Figura 11-26

Sistema de navegación LORAN

Supongamos que en una costa recta se encuentran dos radiofaros, a 100 kilómetros de distancia uno del otro, que emiten simultáneamente una señal de radio. Un barco que se encuentra frente a ellos recibe estas señales; si el barco está más cerca de un radiofaro que del otro, puede con gran precisión determinar el tiempo que pasa entre el momento en que recibe la señal del faro cercano y la del lejano. Supongamos que este tiempo transcurrido es de 0.000083 segundos; si el barco avanza hacia la costa en una trayectoria en la que mantiene constante esta diferencia, ¿a qué lugar de la costa llegará?

Solución:

Denotemos por d_1 y d_2 las distancias del barco a los faros y por t_1 y t_2 los tiempos en que fueron recibidas las señales.

Las señales de radio viajan, como la luz, a 300 000 km/s, así que 0.000083 segundos corresponden a la distancia

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 &= (t_1 - t_2) \times 300\ 000 \\ &= 0.000083 \times 300\ 000 = 24.9 \text{ km}. \end{aligned}$$

Esto es, la diferencia entre las distancias del barco a los radiofaros es de 24.9 km.

Si el barco avanza a la costa en una trayectoria en la que mantiene constante esta diferencia, se está moviendo sobre una hipérbola cuyos focos son los radiofaros y

$$2a = 24.\,9.$$

Cuando llegue a la costa, el barco estará en uno de los vértices de la hipérbola, a 12.45 kilómetros del centro de ella, por lo que estará a

$$50 - 12.45 = 37.55 \text{ km}$$

del radiofaro que estaba más cercano a él (figura 11-27).

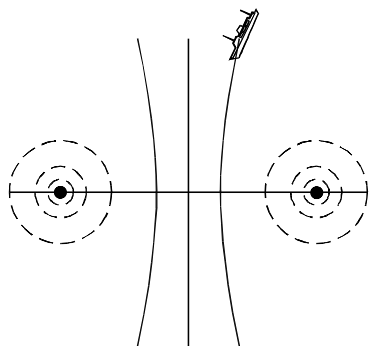


Figura 11-27

El sistema de navegación descrito en el ejemplo anterior se llama LORAN (*LOng RAnge Navigation*). Actualmente hay radiofaros LORAN en gran parte de las costas de todo el mundo, en especial en Estados Unidos y Europa, y los equipos para recibir sus señales son cada vez más accesibles, aun para embarcaciones pequeñas.

Ejercicios

1. Si en un telescopio como el de la figura 11-26 la ecuación de la hipérbola es $16y^2 - 9x^2 - 144 = 0$, ¿cuál es la ecuación de la parábola?

2. Un barco se encuentra frente a una costa donde hay dos faros LORAN, a una distancia de 200 kilómetros entre ellos. El barco recibe la señal de los faros con una diferencia de 0.0001 segundos. ¿En qué punto tocará la costa si mantiene esta diferencia de tiempos?

3. Si el barco del ejercicio anterior desea entrar a un puerto que se encuentra entre los dos faros, a 50 kilómetros del faro más cercano a él, ¿qué diferencia de tiempos en las señales LORAN debe buscar para seguir esa trayectoria?

4. Dos faros LORAN están en una costa recta, separados por 100 kilómetros. Un barco navega en una trayectoria recta paralela a la costa, a una distancia de 50 kilómetros de ella. Si recibe las señales de los faros con una diferencia de 0.0002 segundos, ¿cuál es la posición del barco?

5. Dos personas, A y B, se encuentran en el campo en las coordenadas $A(0,0)$, $B\left(\frac{25}{3},0\right)$; las unidades usadas son kilómetros. Durante una tormenta cae un rayo. La persona A tarda 5 segundos más en oírlo que la persona B. Si la abscisa del lugar donde cayó el rayo es 6, ¿en qué lugar cayó el rayo? Dada la cercanía de los puntos, puedes considerar que los dos sujetos ven el rayo simultáneamente y que la velocidad del sonido es de $\frac{1}{3}$ km/s.

6. Dos observadores están en los puntos $A(-5,0)$ y $B(5,0)$, respectivamente. Un cañón se encuentra en un lugar $Q(x,6)$. El observador en A oye un disparo 18 segundos después del momento en el que lo oye el observador B. Encuentra la posición del cañón. Considera que el sonido viaja a $\frac{1}{3}$ km/s.

7. En un telescopio con espejos parabólico e hiperbólico, la distancia entre los focos es 8 y la excentricidad de la hipérbola es 2. Encuentra la ecuación de la hipérbola y de la parábola que generan los espejos. Coloca el origen del sistema de coordenadas en el punto medio entre los focos.

8. Dos faros LORAN están en una costa recta a 300 kilómetros de distancia. ¿Qué diferencia en las lecturas de las señales debe buscar un barco para tocar tierra entre ellos a 50 kilómetros de uno de los faros?

Hipérbolas con eje focal paralelo a un eje cartesiano

Ahora estudiemos las hipérbolas que tienen su centro en cualquier punto del plano y sus ejes de simetría son paralelos a los ejes. De nuevo utilizaremos la traslación de ejes vista en el capítulo 4.

Comenzaremos con hipérbolas que tienen su eje focal paralelo al eje X.

Ejemplo

- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F'(1,1)$ y $F(5,1)$ tal que la distancia entre los vértices sea 2.

  Solución:

  Los focos están en una recta horizontal, el centro es el punto medio de los focos, $C(3,1)$. Como el centro no está en el origen, no podemos utilizar directamente la fórmula (11.6). Primero, tenemos que hacer un cambio de coordenadas para trasladar los ejes de manera que el nuevo origen coincida con el centro de la hipérbola. Para ello sustituimos

$$\begin{aligned} x' &= x-3 \\ y' &= y-1. \end{aligned} \tag{11.11}$$

Para encontrar las coordenadas de los focos en el nuevo sistema, sustituimos sus coordenadas originales en (11.11).

$$\begin{aligned} x' &= 1 - 3 = -2 \\ y' &= 1 - 1 = 0 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x' &= 5 - 3 = 2 \\ y' &= 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

así que las nuevas coordenadas de los focos son $F(-2, 0)$ y $F'(2, 0)$. La distancia entre los vértices es $2a = 2$ y la distancia focal es $2c = 4$, por lo que

$$b^2 = 2^2 - 1^2 = 3.$$

Así, la ecuación de la hipérbola, con respecto a las coordenadas $X'Y'$, es

$$\frac{(x')^2}{1} - \frac{(y')^2}{3} = 1.$$

Ahora sustituimos x' y y', de acuerdo con (11.11), y obtenemos la ecuación en forma simétrica

$$\frac{(x-3)^2}{1} - \frac{(y-1)^2}{3} = 1;$$

si efectuamos las operaciones y pasamos todo al primer término, obtenemos la ecuación en su forma general (figura 11-28)

$$3x^2 - y^2 - 18x + 2y + 23 = 0.$$

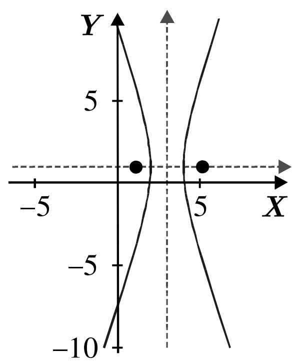


Figura 11-28

Si el centro de la hipérbola es $C(h, k)$, el eje focal es paralelo al eje X, y si llamamos $2c$ a la distancia focal y $2a$ a la distancia entre los vértices, las coordenadas de los focos son $F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$.

Como en el ejemplo anterior, trasladamos los ejes de manera que el centro quede en C. Para lograrlo, hacemos la sustitución

$$x' = x - h, \quad y' = y - k. \tag{11.12}$$

En el nuevo sistema de coordenadas, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$.

Sus asíntotas son las rectas

$$y' = \frac{b}{a}x' \qquad \text{y} \qquad y' = -\frac{b}{a}x'.$$

Si en las tres ecuaciones anteriores sustituimos x' y y' de acuerdo con (11.12), obtenemos la *forma simétrica de la ecuación de la hipérbola* también conocida como *forma canónica* o *estándar*.

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \tag{11.13}$$

y las ecuaciones de las asíntotas

$$(y-k) = \frac{b}{a}(x-h) \qquad \text{y} \qquad (y-k) = -\frac{b}{a}(x-h).$$

En el caso de que el eje focal sea vertical, los denominadores de $(x-h)^2$ y $(y-k)^2$ en la ecuación de la hipérbola están cambiados y el signo $(-)$ afecta al término en x; así, tenemos

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1} \tag{11.14}$$

y las ecuaciones de las asíntotas son

$$y-k = \frac{a}{b}(x-h) \qquad \text{y} \qquad y-k = -\frac{a}{b}(x-h).$$

Si en las ecuaciones (11.13) y (11.14) desarrollamos los cuadrados y simplificamos, obtenemos una ecuación de la forma

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \tag{11.15}$$

en la que sólo hay que notar que A y C son distintos de cero y de **signo contrario**. Esta forma se conoce como la *forma general de la ecuación de la hipérbola*, y es un caso particular de la ecuación general de segundo grado.

En resumen:

Posición	**Ecuación**	**Centro**	**Vértices**	**Focos**	B **y** B'
Horizontal	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$C(h,k)$	$V(h+a,k)$, $V'(h-a,k)$	$F(h+c,k)$, $F'(h-c,k)$	$B(h,k+b)$, $B'(h,k-b)$
Vertical	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$C(h,k)$	$V(h,k+a)$, $V'(h,k-a)$	$F(h,k+c)$, $F'(h,k-c)$	$B(h+b,k)$, $B'(h-b,k)$

Ejemplos

1. Escribir la ecuación $8x^2-4y^2-24x-4y-15=0$ en la forma simétrica y dibujar la hipérbola.

Solución:

Agrupamos los términos en x y en y, y pasamos el término independiente al otro lado de la ecuación.

$$\left(8x^2-24x\right)-\left(4y^2+4y\right)=15.$$

Factorizamos los coeficientes de x^2 y de y^2 para que sea más sencillo completar los cuadrados perfectos.

$$8\left(x^2-3x\right)-4\left(y^2+y\right)=15.$$

En cada paréntesis completamos el trinomio cuadrado perfecto, recordando que debemos sumar la misma cantidad en el otro lado de la ecuación para que la igualdad no se altere.

$$8\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-4\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)=15+18-1,$$

simplificamos

$$8\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=32,$$

dividimos entre el término independiente y obtenemos

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{4}-\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{8}=1.$$

Como el coeficiente del paréntesis en x es positivo, la hipérbola es horizontal. El centro es $C\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$,

$$a^2=4,\quad b^2=8\quad \text{y}\quad c^2=4+8=12.$$

Así que la longitud del eje transversal es $2a=4$ y la distancia focal es $2c=4\sqrt{3}$.

Por tanto, los focos son

$$F\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)\approx F\left(4.96,-0.5\right)\quad \text{y}\quad F'\left(\frac{3}{2}-2\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)\approx F'\left(-1.96,-0.5\right),$$

y los vértices son

$$V\left(\frac{3}{2}+2,-\frac{1}{2}\right)\approx V\left(3.5,-0.5\right)\quad \text{y}\quad V'\left(\frac{3}{2}-2,-\frac{1}{2}\right)\approx V'\left(-0.5,-0.5\right).$$

Las asíntotas son

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)\qquad \text{y}\qquad \left(y+\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{2}\left(x-\frac{3}{2}\right).$$

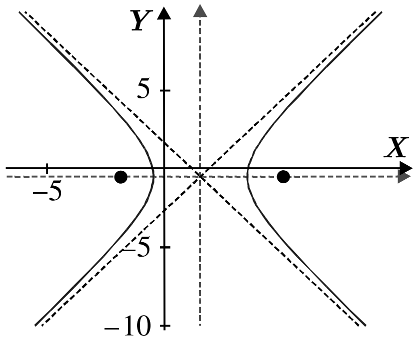


Figura 11-29

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola vertical cuyas asíntotas son

$$x - 2y + 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x + 2y - 3 = 0,$$

y la longitud del eje transversal es 2.

Solución:

Resolvemos simultáneamente las ecuaciones de las asíntotas

$$\begin{aligned} x - 2y + 1 &= 0 \\ x + 2y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Si sumamos las ecuaciones y despejamos x, tenemos que $x = 1$. Sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones y obtenemos que $y = 1$.

Así, el centro es $C\,(1, 1)$.

La longitud del eje transversal es $2a = 2$; entonces $a = 1$.

Como la hipérbola es vertical y conocemos las pendientes de las asíntotas, tenemos

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad -\frac{1}{b} = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{2},$$

de donde $b = 2$; y la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(y-1)^2}{1} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1,$$

que en la forma general es $-x^2 + 4y^2 + 2x - 8y - 1 = 0$ (figura 11-30).

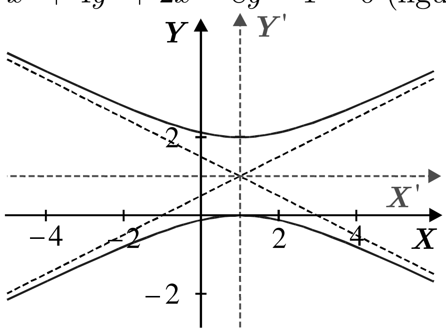


Figura 11-30

Directrices de la hipérbola

Si la hipérbola tiene centro en $C(h,k)$ y es horizontal, las ecuaciones de las *directrices* son

$$\boxed{x-h=\frac{a^2}{c}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{x-h=-\frac{a^2}{c}.}$$

Si la hipérbola es vertical, las ecuaciones de las *directrices* correspondientes son

$$\boxed{y-k=\frac{a^2}{c}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{y-k=-\frac{a^2}{c}.}$$

Ejemplo

- Considerar la ecuación de la hipérbola $9x^2-16y^2-36x+160y-940=0$. Encontrar la ecuación de la asíntota con pendiente negativa, la ecuación de la recta ℓ perpendicular a la asíntota que pasa por el foco que tiene abscisa negativa, y la ecuación de la directriz correspondiente a ese foco. Demostrar que las tres rectas concurren, o sea se cortan en un punto.

  Solución:

  Escribimos la ecuación de la hipérbola en la forma simétrica:

$$\begin{aligned}
9x^2-36x-16y^2+160y &= 940\\
9\left(x^2-4x+4\right)-16\left(y^2-10y+25\right) &= 940+9(4)-16(25)\\
9(x-2)^2-16(y-5)^2 &= 576\\
\frac{(x-2)^2}{64}-\frac{(y-5)^2}{36} &= 1.
\end{aligned}$$

  La hipérbola es horizontal, y su centro es $C(2,5)$

$$a^2=64, \qquad b^2=36, \qquad c^2=64+36=100,$$

  entonces

$$a=8, \qquad b=6, \qquad c=10.$$

  Los focos son

$$F'(2-10,5)=F'(-8,5) \qquad \text{y} \qquad F(2+10,5)=F(12,5).$$

Las ecuaciones de las asíntotas son

$$\begin{aligned} y-5 &= \frac{6}{8}(x-2) \\ y &= \frac{3}{4}x+\frac{7}{2} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} y-5 &= -\frac{6}{8}(x-2) \\ y &= -\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de las directrices son

$$\begin{aligned} x-2 &= \frac{64}{10} \\ x &= \frac{42}{5} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x-2 &= -\frac{64}{10} \\ x &= -\frac{22}{5}. \end{aligned}$$

La asíntota con pendiente negativa es

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}. \tag{11.16}$$

La recta perpendicular a esta asíntota y que pasa por el foco $F'(-8,5)$ tiene pendiente igual a $\frac{4}{3}$ y su ecuación es

$$y-5=\frac{4}{3}(x+8),$$

es decir,

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{47}{3}.$$

Para encontrar el punto donde se corta esta recta con la asíntota anterior resolvemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}x+\frac{13}{2} &= \frac{4}{3}x+\frac{47}{3} \\ x &= -\frac{22}{5}, \end{aligned}$$

que es la abscisa de cualquier punto que está en la directriz; por tanto, las dos rectas se cortan sobre la asíntota. Sustituyendo este valor en la ecuación (11.16) tenemos

$$y=-\frac{3}{4}\left(-\frac{22}{5}\right)+\frac{13}{2}=\frac{49}{5}.$$

El punto donde se cortan las tres rectas es $P\left(-\frac{22}{5},\frac{49}{5}\right)$.

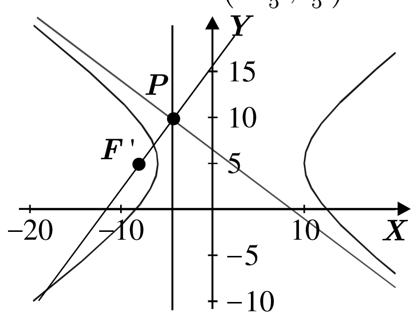


Figura 11-31

Ejercicios

En cada caso, encuentra las coordenadas de los focos, los vértices y el centro de las siguientes hipérbolas.

1. $\dfrac{(y-7)^2}{25} - \dfrac{(x+3)^2}{16} = 1.$

2. $\dfrac{(x+4)^2}{9} - \dfrac{(y+6)^2}{4} = 1.$

3. $\dfrac{(x+9)^2}{81} - \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1.$

4. $\dfrac{(y+3)^2}{25} - \dfrac{(x-3)^2}{36} = 1.$

Escribe cada ecuación en su forma simétrica, da las coordenadas de los focos y los vértices, así como las ecuaciones de las asíntotas.

5. $x^2 - y^2 - 4x - 4y - 400 = 0.$

6. $-25x^2 + 4y^2 + 32y - 36 = 0.$

7. $4x^2 - 9y^2 + 8x - 54y - 113 = 0.$

8. $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y - 48 = 0.$

9. $-4x^2 + 49y^2 - 48x + 98y - 291 = 0.$

10. $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y - 59 = 0.$

11. $-x^2 + y^2 + 10x - 8y - 18 = 0.$

12. $-3x^2 + 2y^2 + 18x - 20y + 17 = 0.$

13. $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 68 = 0.$

14. $3x^2 - 2y^2 + 12x + 2y - 14 = 0.$

15. $x^2 - 2y^2 + 4x + 20y - 50 = 0.$

16. $-3x^2 + 25y^2 - 18x + 150y + 798 = 0.$

17. $-8x^2 + 3y^2 + 128x - 6y - 557 = 0.$

18. $x^2 - 12y^2 - 14x + 168y - 551 = 0.$

19. Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en $V(7,1)$, $V'(-3,1)$ y con focos $F(9,1)$, $F'(-5,1)$.

20. Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en $V(4,-2)$, $V'(0,-2)$ y que pasa por el punto $P\left(6, 3\sqrt{3}-2\right)$.

21. Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en $V(2,7)$, $V'(2,-7)$ y que pasa por el punto $P\left(4, 7\sqrt{2}\right)$.

En cada caso, encuentra la ecuación simétrica de la hipérbola que tiene los siguientes datos.

22. Centro $C\,(-5,3)$, vértice $V\,(-9,3)$ y $x + 2y - 1 = 0$ como una asíntota.

23. Centro $C\,(1,4)$, vértice $V\left(1, 4+\sqrt{14}\right)$ y $x + y - 5 = 0$ como una asíntota.

24. Vértices $V'\,(-11,-7)$, $V\,(5,-7)$ y $x - 2y - 11 = 0$ como una asíntota.

25. Vértices $V'\,(-2,-3)$, $V\,(-2,7)$ y $x + 5y - 8 = 0$ como una asíntota.

26. Vértice $V\,(-4,3)$, centro $C\,(-4,5)$ y excentricidad de $\frac{5}{4}$.

27. Vértice $V\left(\frac{15}{2}, 1\right)$, centro $C\,(8,1)$ y excentricidad de $\frac{7}{5}$.

28. Encuentra la ecuación del círculo cuyo centro coincide con el de la hipérbola $x^2 - 2y^2 - 8x + 24y - 60 = 0$ y cuyo radio es la mitad del eje transversal de la hipérbola.

29. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice se encuentra en el vértice inferior de la hipérbola $16y^2 - 25x^2 - 192y - 250x - 449 = 0$ y cuyo foco está en el centro de la hipérbola.

30. Encuentra la ecuación de la elipse horizontal cuyo centro se encuentra en el centro de la hipérbola $y^2 - 4x^2 + 48x + 10y - 47 = 0$, con eje mayor igual a la distancia entre los vértices de la hipérbola, y el eje menor está determinado por la longitud del segmento que une al centro de la hipérbola con el punto de intersección de ésta con la recta $2x + y + 5 = 0$.

31. Encuentra la ecuación de la hipérbola horizontal que tiene el mismo centro que la hipérbola $x^2 - 3y^2 + 16x + 36y - 53 = 0$, la misma longitud de eje focal y la misma distancia entre sus vértices.

32. Encuentra la ecuación de la hipérbola conjugada de la hipérbola cuyo centro es $C\left(-5,-2\right)$, $a = 7$ y $b = 9$. Revisa la definición de hipérbola conjugada en el ejercicio 24 de la sección Hipérbola vertical.

33. Encuentra la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en $C\left(4,-3\right)$, $a = 12$ y que pasa por el punto $P\left(-12, -3 + 3\sqrt{7}\right)$.

34. Demuestra que si las asíntotas de una hipérbola con centro en $C\left(h,k\right)$ son perpendiculares, entonces la hipérbola es equilátera. Recuerda que una hipérbola es equilátera si $a = b$.

35. Considera la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 54x - 8y + 113 = 0$. Encuentra las ecuaciones de las asíntotas y la distancia del foco que tiene ordenada negativa a cada una de ellas. Compara esta distancia con el valor de b.

36. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\left(10,0\right)$ y es paralela a la asíntota de la hipérbola $25x^2 - 144y^2 - 50x - 1728y - 8759 = 0$ que tiene pendiente positiva. ¿En cuántos puntos corta esta recta a la hipérbola?

37. Los vértices de una hipérbola son $V'\left(-3,5\right)$ y $V\left(1,5\right)$. Si tiene excentricidad de $\frac{7}{4}$, encuentra la longitud de cada lado recto, las ecuaciones de las asíntotas y las ecuaciones de las directrices.

Otra interpretación de la definición de la hipérbola

Hagamos un análisis similar al que hicimos en el caso de la elipse. Observemos nuevamente la ecuación simétrica de una hipérbola horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Veamos otra interpretación de esta ecuación.

Si el centro de la hipérbola es $C(h,k)$, entonces el eje focal de la hipérbola es la recta

$$y = k,$$

y el eje no focal es la recta

$$x = h.$$

De donde para un punto $P(x, y)$ cualquiera, el término $(x-h)^2$ es el cuadrado de la distancia de P a la recta $x = h$, y $(y-k)^2$ es el cuadrado de la distancia de P a la recta $y = k$.

Así, si ℓ es la recta que contiene a los focos de la hipérbola y ℓ' es la recta perpendicular a ℓ que pasa por el centro de la hipérbola, $2a$ es la distancia entre los vértices y $2c$ es la distancia entre los focos, entonces la ecuación de dicha hipérbola horizontal es

$$\boxed{\frac{D(P,\ell')^2}{a^2} - \frac{D(P,\ell)^2}{b^2} = 1}, \tag{11.17}$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$, es decir,

$$\boxed{\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1}, \tag{11.18}$$

donde (x', y') son las coordenadas de P con respecto a los ejes ℓ, ℓ'.

Esta manera de ver la ecuación de la hipérbola es particularmente útil cuando sus ejes no son paralelos a los ejes cartesianos.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(3, 6)$ y $F'(3, -4)$ y la distancia entre los vértices es 6.

   Solución:

   El centro de la hipérbola es el punto medio de los focos:

   $$C\left(\frac{3+3}{2}, \frac{6-4}{2}\right) = C(3, 1),$$

   entonces el eje focal es $x = 3$ y, por tanto, la hipérbola es vertical. La recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro es $y = 1$, la distancia focal es

   $$2c = \sqrt{(3-3)^2 + (6+4)^2} = 10$$

   y la longitud del eje transversal es $2a = 6$, así que $a = 3$ y, por tanto, los vértices son

   $$V'(3, -2) \qquad \text{y} \qquad V(3, 4).$$

   Por último,

   $$b^2 = 5^2 - 3^2 = 16.$$

   Así, la ecuación de la hipérbola es (figura 11-32)

   $$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1.$$

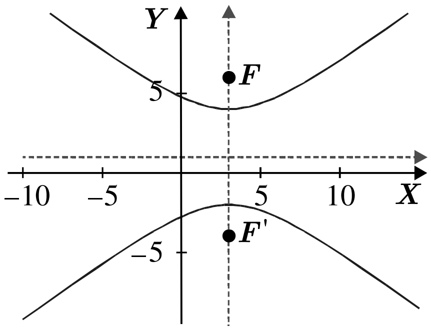


Figura 11-32

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(0,0)$, $F(4,4)$ y la distancia entre sus vértices mide 2.

Solución:

El centro de la hipérbola es el punto medio entre los focos:

$$C\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = C(2,2).$$

El eje focal de la hipérbola es la recta que contiene a los focos:

$$\ell: \quad y = x,$$

la recta ℓ' perpendicular a la anterior que pasa por el centro de la hipérbola tiene pendiente -1 y su ecuación es

$$\begin{aligned} y-2 &= -(x-2) \\ y &= -x+4. \end{aligned}$$

La distancia de un punto (x,y) a ℓ es

$$\left|\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right|,$$

y a ℓ' es

$$\left|\frac{x+y-4}{\sqrt{2}}\right|.$$

Como la longitud del eje transversal es $2a = 2$, el valor de a es 1.

La distancia entre los focos es

$$2c = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 2\sqrt{8},$$

así que $c = \sqrt{8}$, y

$$b = \sqrt{8-1} = \sqrt{7}.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (11.17), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{x+y-4}{\sqrt{2}}\right)^2}{1}-\frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{7} &= 1\\ \frac{(x+y-4)^2}{2}-\frac{(x-y)^2}{14} &= 1,\end{aligned}$$

desarrollamos los cuadrados y multiplicamos por 14 para eliminar los denominadores

$$7\left(x^2+2xy-8x+y^2-8y+16\right)-\left(x^2-2xy+y^2\right)=14,$$

a continuación, pasamos todos los términos al primer miembro de la ecuación y dividimos entre 3 para obtener

$$3x^2+3y^2+8xy-28x-28y+49=0.$$

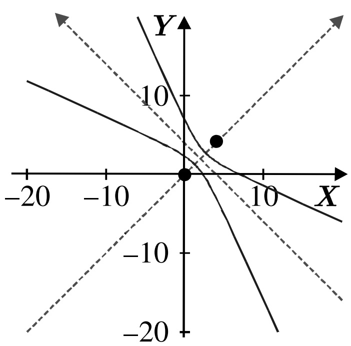


Figura 11-33

Es muy importante hacer notar que en la ecuación anterior aparece un término en xy. Como veremos en el capítulo de la ecuación general de segundo grado, este término indica que los ejes de la cónica no son paralelos a los ejes cartesianos.

Ejercicios

En cada caso, encuentra la ecuación de la hipérbola con los datos indicados.

1. Focos $F'(-1,-8)$, $F(1,0)$ y la distancia entre sus vértices es 2.

2. Focos $F'(-5,6)$, $F(3,2)$ y la distancia entre sus vértices es 6.

3. Focos $F'(-5,-2)$, $F(7,0)$ y la distancia entre sus vértices es 12.

4. Focos $F'(3,4)$, $F(-1,-2)$ y la distancia entre sus vértices es 2.

5. Focos $F'(3,3)$, $F(11,3)$ y la distancia entre sus vértices es 4.

6. Focos $F'(0,0)$, $F(12,-2)$ y la distancia entre sus vértices es 10.

7. Focos $F'(-8,-1)$, $F(-2,-7)$ y la distancia entre sus vértices es 6.

8. Focos $F'(-1,11)$, $F(13,1)$ y la distancia entre sus vértices es 14.

9. Focos $F'\left(\frac{1}{2},8\right)$, $F\left(\frac{5}{2},-2\right)$ y la distancia entre sus vértices es 8.

10. Focos $F'(-9,-11)$, $F(11,5)$ y la distancia entre sus vértices es 4.

11. Focos $F'(5,5)$, $F(-7,-7)$ y la distancia entre sus vértices es 8.

12. Focos $F'(0,10)$, $F(16,8)$ y la distancia entre sus vértices es 8.

La hipérbola que pasa por cuatro puntos dados

Encontrar la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes coordenados y que pasa por los puntos $P(3,1)$, $Q\left(4,\frac{5}{2}\right)$, $R\left(-6,-\frac{1}{2}\right)$ y $S\left(4,-\frac{1}{2}\right)$.

Solución:

Una manera de resolver este problema es planteando un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas.

Hemos visto en la página 459 que la forma general de la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes cartesianos es de la forma

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

en donde A y C son distintas de cero y de signo contrario. Como en el caso de la elipse, podemos dividir toda la ecuación entre A y renombrar los nuevos coeficientes obteniendo la ecuación

$$x^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{11.19}$$

donde $C<0$.

Sustituimos las coordenadas de los puntos en la ecuación (11.19)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
9 & + & C & + & 3D & + & E & + & F & = & 0\\
16 & + & \frac{25}{4}C & + & 4D & + & \frac{5}{2}E & + & F & = & 0\\
36 & + & \frac{1}{4}C & - & 6D & - & \frac{1}{2}E & + & F & = & 0\\
16 & + & \frac{1}{4}C & + & 4D & - & \frac{1}{2}E & + & F & = & 0.
\end{array}$$

Este sistema puede o no tener solución, y en caso de tenerla, va a dar origen a una hipérbola sólo cuando el valor de C sea negativo.

Para resolver este sistema de ecuaciones, podemos multiplicar por constantes adecuadas las tres últimas ecuaciones para eliminar las fracciones; y obtenemos

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
C & + & 3D & + & E & + & F & = & -9\\
25C & + & 16D & + & 10E & + & 4F & = & -64\\
C & - & 24D & - & 2E & + & 4F & = & -144\\
C & + & 16D & - & 2E & + & 4F & = & -64.
\end{array} \tag{11.20}$$

En (11.20) restamos la última ecuación de la tercera y obtenemos

$$\begin{aligned} -40D &= -80 \\ D &= 2. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en todas las ecuaciones y simplificando tenemos

$$\begin{array}{rcrcrcr} C & + & E & + & F & = & -15 \\ 25C & + & 10E & + & 4F & = & -96 \\ C & - & 2E & + & 4F & = & -96 \\ C & - & 2E & + & 4F & = & -96. \end{array}$$

Observa que en las ecuaciones anteriores la tercera y la última son iguales; entonces sólo trabajaremos con

$$\begin{array}{rcrcrcr} C & + & E & + & F & = & -15 \\ 25C & + & 10E & + & 4F & = & -96 \\ C & - & 2E & + & 4F & = & -96. \end{array}$$

Sumando múltiplos de la primera ecuación a las otras dos obtenemos ceros en la primera columna, como a continuación se hace.

Multiplicamos la primera ecuación por -25 y la sumamos a la segunda:

$$\begin{array}{rcrcrcr} C & + & E & + & F & = & -15 \\ 0 & - & 15E & - & 21F & = & 279. \end{array}$$

Restamos la primera ecuación a la tercera:

$$\begin{array}{rcrcrcr} C & + & E & + & F & = & -15 \\ 0 & - & 15E & - & 21F & = & 279 \\ 0 & - & 3E & + & 3F & = & -81. \end{array}$$

Intercambiamos las dos últimas ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} C & + & E & + & F & = & -15 \\ 0 & - & 3E & + & 3F & = & -81 \\ 0 & - & 15E & - & 21F & = & 279. \end{array}$$

Multiplicamos la segunda por 5 y la restamos a la tercera:

$$\begin{array}{rcrcrcr} C & + & E & + & F & = & -15 \\ 0 & - & 3E & + & 3F & = & -81 \\ 0 & + & 0 & - & 36F & = & 684. \end{array}$$

Obtenemos

$$F = -19.$$

Sustituyendo hacia atrás, encontramos

$$E = 8, \quad C = -4.$$

Resumiendo,

$$C = -4 \qquad D = 2 \qquad E = 8 \qquad F = -19;$$

entonces la ecuación de la hipérbola buscada es

$$x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 19 = 0.$$

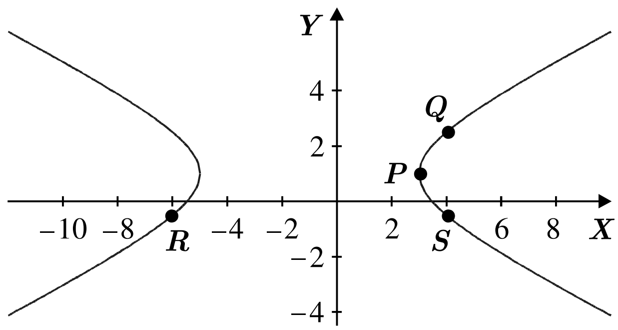


Figura 11-34

Ya hemos visto que tres puntos no alineados determinan un único círculo y también una única parábola con eje paralelo a algún eje cartesiano, y en el capítulo anterior vimos que tres puntos ya no son suficientes para determinar una elipse única con ejes paralelos a los ejes cartesianos. Tampoco son suficientes para determinar una única hipérbola.

Por ejemplo, si consideramos los mismos tres puntos $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ que en el ejemplo de la página 419, es fácil ver que estos tres puntos satisfacen la ecuación

$$x^2 + Cy^2 + (C - 1)\, y - 1 = 0;$$

para cualquier valor de C, por cada valor negativo de C obtenemos una hipérbola que pasa por estos puntos, excepto para $C = -1$, en el que obtenemos dos rectas: $x = y$ y $x = -y$.

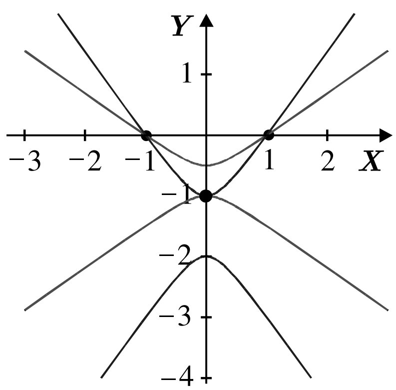


Figura 11-35

Para poder determinar una hipérbola con ejes paralelos a los ejes cartesianos necesitamos un punto más, y esto se debe a que la ecuación general de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes cartesianos es de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en donde A y C son distintos de cero y de signo contrario; así, podemos dividir entre cualquiera de ellos (por ejemplo, entre A) y obtener una ecuación equivalente con cuatro coeficientes desconocidos:

$$x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{11.21}$$

Al tener cuatro puntos y sustituir sus coordenadas en la ecuación anterior, obtenemos cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas que pueden tener una, varias o ninguna solución, y para que una solución determine la ecuación de una hipérbola, el valor de C debe ser negativo.

Ejercicios

Encuentra, en cada caso, la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes coordenados y que pasa por los cuatro puntos dados.

1. $P\left(6, \frac{3}{4}\right)$, $Q\left(-4, \frac{21}{4}\right)$, $R(-3, 3)$ y $S(5, 3)$.
2. $P(-2, -3)$, $Q(0, -7)$, $R(-10, 1)$ y $S(0, 1)$.
3. $P(-5, 2)$, $Q(9, -6)$, $R(11, 10)$ y $S(7, 2)$.
4. $P\left(3, -\frac{13}{3}\right)$, $Q\left(-13, -\frac{23}{3}\right)$, $R(-5, -5)$ y $S(-5, -7)$.
5. $P(5, 6)$, $Q(4, 0)$, $R(-5, -6)$ y $S(-4, 0)$.
6. Encuentra la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $P(-2, 5)$, el centro Q del círculo $x^2 + y^2 + 4x + 26y + 167 = 0$, el foco R de la parábola $x^2 + 36x + 8y + 220 = 0$ y el vértice derecho S de la elipse $64x^2 + 1296y^2 + 256x - 18792y + 63193 = 0$.
7. Encuentra la ecuación de la hipérbola que pasa por los vértices de la elipse cuya ecuación es $4x^2 + 9y^2 - 64x - 54y + 301 = 0$, el punto de intersección de las rectas $6x + 3y - 91 = 0$ y $3x - 6y - 13 = 0$, y el centro de la elipse cuya ecuación es $63x^2 + 18y^2 - 378x - 60y + 491 = 0$.

Recta tangente a una hipérbola

De nuevo recordemos que en la sección de la tangente al círculo vimos que una recta ℓ es *tangente* a una cónica en un punto P si corta a la cónica únicamente en P y todos los demás puntos de ℓ están en una sola de las regiones determinadas por la cónica. En la figura 11-36, la primera recta corta a la hipérbola en dos puntos, la segunda recta corta a la hipérbola en un punto, y hay puntos de la recta en más de una de las regiones determinadas por la hipérbola; por último, la tercera recta toca a la hipérbola en un solo punto y se queda fuera de ella; esa es la tangente en dicho punto.

En el teorema siguiente veremos que la tangente a la hipérbola tiene la propiedad de ser bisectriz de cierto ángulo.

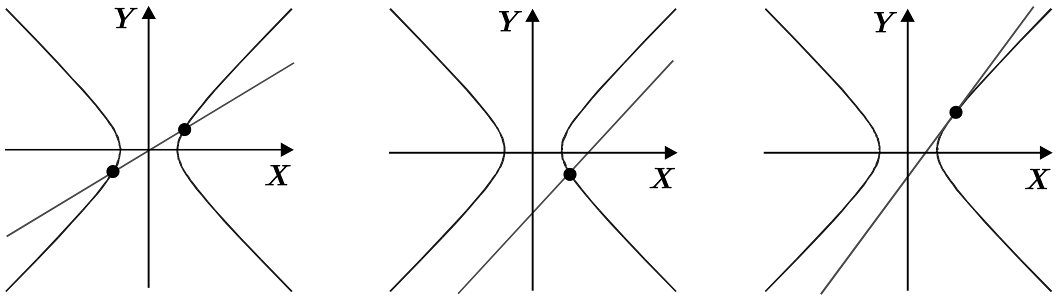


Figura 11-36

Teorema 2: La tangente en el punto P de la hipérbola,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11.22}$$

es la bisectriz del ángulo formado por las rectas FP y $F'P$ que, con excepción de P, está formada por puntos ubicados fuera de la hipérbola.

Demostración: En la figura 11-37, R es el punto simétrico de F' con respecto a ℓ, por tanto,

$$d\left(F', Q\right) = d\left(Q, R\right) \qquad \text{y} \qquad d\left(F', P\right) = d\left(P, R\right)$$

ya que ℓ es la mediatriz del segmento $F'R$.

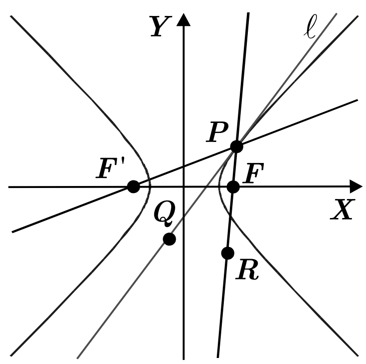


Figura 11-37

Por la desigualdad del triángulo aplicada en el triángulo QFR, tenemos

$$d\left(F, Q\right) - d\left(Q, R\right) < d\left(F, R\right).$$

Por todos estos hechos, para cualquier punto Q de ℓ distinto de P, tenemos

$$d(F,Q) - d(F',Q) = d(F,Q) - d(Q,R) < d(F,R)$$

y

$$d(F,R) = -d(F,P) + d(P,R) = d(F',P) - d(P,F) = 2a;$$

así,

$$d(F,Q) - d(F',Q) < 2a$$

y, por tanto, Q está fuera de la hipérbola. Como esto pasa para todo punto $Q \neq P$ de la bisectriz ℓ, entonces ℓ es la recta tangente en P a la hipérbola. ∎

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en el punto $P(x_1, y_1)$, lo que debemos hacer es encontrar la ecuación de la bisectriz. Dicha ecuación es

$$\boxed{\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.} \tag{11.23}$$

Es decir, sustituimos x^2 por $x_1 x$ y y^2 por $y_1 y$.

Para el caso de la hipérbola vertical, se intercambian los papeles de las x y las y, y obtenemos

$$\boxed{\frac{y_1 y}{a^2} - \frac{x_1 x}{b^2} = 1.} \tag{11.24}$$

Ejemplo

- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ en el punto $P\left(5, \dfrac{8}{3}\right)$.

  Solución:

  Sustituimos las coordenadas de P en la ecuación (11.23)

  $$\frac{5x}{9} - \left(\frac{8}{3}\right)\frac{y}{4} = 1,$$

  simplificamos y obtenemos

  $$5x - 6y - 9 = 0.$$

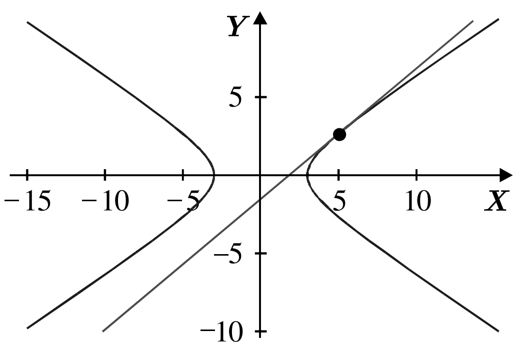


Figura 11-38

Ahora veamos cómo encontrar la ecuación de la recta tangente a una hipérbola vertical con centro $C(h, k)$ en el punto $P(x_1, y_1)$.

La ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Trasladamos los ejes para que el origen quede en C mediante la sustitución

$$x' = x - h \qquad \text{y} \qquad y' = y - k, \tag{11.25}$$

las coordenadas de P con respecto a los nuevos ejes son

$$x_1' = x_1 - h \qquad \text{y} \qquad y_1' = y_1 - k; \tag{11.26}$$

como la hipérbola es vertical, entonces, por (11.24),

$$\frac{y_1' y'}{a^2} - \frac{x_1' x'}{b^2} = 1,$$

sustituimos x', y' de acuerdo con (11.25) y x_1', y_1' de acuerdo con (11.26) y obtenemos la ecuación de la recta tangente a la hipérbola vertical en $P(x_1, y_1)$.

$$\boxed{\frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2} - \frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2} = 1.} \tag{11.27}$$

Análogamente podemos encontrar la ecuación de la recta tangente a una hipérbola horizontal en un punto $P(x_1, y_1)$ dado.

$$\boxed{\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2} - \frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2} = 1.} \tag{11.28}$$

Ejemplo

- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y^2 - 6y - 56 - x^2 - 16x = 0$ en el punto $P(-8, 4)$.

  Solución:

  Escribimos la ecuación de la hipérbola en la forma simétrica

  $$\frac{(y-3)^2}{1} - \frac{(x+8)^2}{1} = 1.$$

  El punto P está en la hipérbola, como podemos comprobar al sustituir sus coordenadas en la ecuación anterior.

  $$\frac{(4-3)^2}{1} - \frac{(-8+8)^2}{1} = 1$$

Como la hipérbola es vertical, utilizamos la ecuación (11.27),

$$\begin{aligned}\frac{(4-3)(y-3)}{1}-\frac{(-8+8)(x+8)}{1} &= 1\\ y-3 &= 1\\ y &= 4.\end{aligned}$$

Así, la recta tangente a P es la recta horizontal $y=4$. Observa que P es un vértice de la hipérbola (figura 11-39).

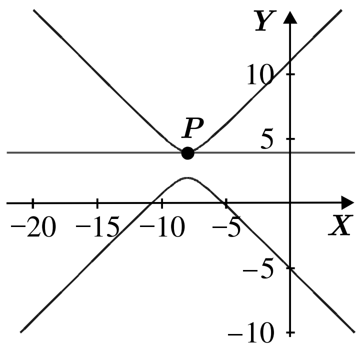


Figura 11-39

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en el punto dado.

1. $-x^2+y^2-6x-14y+39=0$ en el punto $P(-3,6)$.

2. $2x^2-y^2-20x-6y+37=0$ en el punto $P(7,-1)$.

3. $-3x^2+y^2+144x-32y-1481=0$ en el punto $P(27,22)$.

4. $x^2-4y^2+22x-64y-151=0$ en el punto $P\left(-17,\sqrt{5}-8\right)$.

5. $2x^2-3y^2-6=0$ en el punto $P(-3,-2)$.

6. $x^2-9y^2-18x-54y-81=0$ en el punto $P(24,1)$.

7. $-x^2+2y^2-20y+48=0$ en el punto $P(4,8)$.

8. $-9x^2+4y^2+54x+32y-161=0$ en el punto $P\left(6,\frac{7}{2}\right)$.

9. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola cuya ecuación general es $16x^2-9y^2-192x-54y-81=0$ en los extremos del lado recto que pasa por el foco $F(16,-3)$. Encuentra el punto de intersección de estas dos rectas tangentes y demuestra que se encuentra sobre el eje focal.

Resumen

- Si la hipérbola tiene centro en el origen y sus ejes son paralelos a los ejes cartesianos:

Posición	**Ecuación**	**Centro**	**Vértices**	**Focos**	B **y** B'
Horizontal	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$C(0,0)$	$V(a,0)$, $V'(-a,0)$	$F(c,0)$, $F'(-c,0)$	$B(0,b)$, $B'(0,-b)$
Vertical	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$C(0,0)$	$V(0,a)$, $V'(0,-a)$	$F(0,c)$, $F'(0,-c)$	$B(b,0)$, $B'(-b,0)$

  - Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}$.
  - Hipérbola horizontal: las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$.
  - Hipérbola vertical: las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{a}{b}x$, $y = -\frac{a}{b}x$.
  - Hipérbola horizontal: las ecuaciones de las directrices son $x = \frac{a^2}{c}$, $x = -\frac{a^2}{c}$.
  - Hipérbola vertical: las ecuaciones de las directrices son $y = \frac{a^2}{c}$, $y = -\frac{a^2}{c}$.
  - Hipérbola horizontal: la ecuación de la recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ es $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$.
  - Hipérbola vertical: la ecuación de la recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ es $\frac{y_1 y}{a^2} - \frac{x_1 x}{b^2} = 1$.

- Si la hipérbola tiene centro en $C(h,k)$ y sus ejes son paralelos a los ejes cartesianos:

Posición	**Ecuación**	**Centro**	**Vértices**	**Focos**	B **y** B'
Horizontal	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$C(h,k)$	$V(h+a,k)$, $V'(h-a,k)$	$F(h+c,k)$, $F'(h-c,k)$	$B(h,k+b)$, $B'(h,k-b)$
Vertical	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$C(h,k)$	$V(h,k+a)$, $V'(h,k-a)$	$F(h,k+c)$, $F'(h,k-c)$	$B(h+b,k)$, $B'(h-b,k)$

  - Hipérbola horizontal: las ecuaciones de las asíntotas son $y - k = \frac{b}{a}(x-h)$, $y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$.

- Hipérbola vertical: las ecuaciones de las asíntotas son $y-k=\frac{a}{b}(x-h)$, $y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$.
- Hipérbola horizontal: las ecuaciones de las directrices son $x-h=\frac{a^2}{c}$, $x-h=-\frac{a^2}{c}$.
- Hipérbola vertical: las ecuaciones de las directrices son $y-k=\frac{a^2}{c}$, $y-k=-\frac{a^2}{c}$.
- Hipérbola horizontal: la ecuación de la recta tangente en el punto $P(x_1,y_1)$ es $\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}-\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1$.
- Hipérbola vertical: la ecuación de la recta tangente en el punto $P(x_1,y_1)$ es $\frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2}-\frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2}=1$.

- Forma general de la ecuación de la hipérbola: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde $A\neq 0$, $C\neq 0$, y A y C tienen signo contrario.

Ejercicios de repaso

1. Escribe la ecuación de la hipérbola que describe un punto que se mueve de tal manera que el producto de sus distancias a las rectas $2x-y=0$ y $2x+y=0$ es 4. Demuestra que las dos rectas son las asíntotas de la hipérbola.

2. Encuentra los puntos de tangencia a la hipérbola $4x^2-25y^2-100=0$ para que las tangentes corten al eje Y en el punto $P(0,4)$.

3. Demuestra que las hipérbolas $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$ y $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{5}=1$ tienen las mismas asíntotas.

4. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $x^2-y^2-1=0$ en el punto $P\left(\sqrt{2},1\right)$ y escribe las coordenadas de los puntos en los que esta recta corta a las asíntotas.

5. Encuentra la excentricidad de las siguientes hipérbolas.

   a) $y^2-x^2-16=0$. **b)** $y^2-x^2-49=0$. **c)** $x^2-y^2-25=0$.

   d) $x^2-y^2-2=0$. **e)** $x^2-y^2-a^2=0$. **f)** $x^2-y^2-10x-14y-105=0$.

6. Prueba que la recta $3x+2y-19=0$ corta a la hipérbola $-36x^2+16y^2-108x-160y-257=0$ en un único punto. Escribe las coordenadas del punto.

7. Encuentra el área del triángulo formado por las asíntotas de la hipérbola $2x^2-y^2-4x-12y-38=0$, y la tangente a esa hipérbola en el punto $P\left(1+\sqrt{2},-6\right)$.

8. ¿Por qué no es posible encontrar una hipérbola cuyos focos sean $F'(-3,-6)$ y $F(-3,2)$ y tal que la distancia entre sus vértices sea 10?

9. Demuestra que las asíntotas de la hipérbola $x^2-y^2-81=0$ son perpendiculares.

10. Dos rectas tangentes a la hipérbola $2x^2-3y^2-6=0$ se cortan en el punto $P(0,1)$. Encuentra los puntos de tangencia.

11. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $P(1,0)$ y es tangente a la hipérbola $8x^2 - 3y^2 - 48 = 0$.

12. Demuestra que las hipérbolas $\dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y^2}{15} = 1$, $\dfrac{x^2}{11} - \dfrac{y^2}{14} = 1$ y $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{13} = 1$ tienen los mismos focos. Escribe la ecuación de otra hipérbola con los mismos focos.

13. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los focos de las hipérbolas $16x^2 - 9y^2 - 1 = 0$ y $9y^2 - 16x^2 - 1 = 0$.

14. Encuentra la excentricidad de la hipérbola $5x^2 - 4y^2 - 1 = 0$ y llámala e_1. Después, encuentra la excentricidad de la hipérbola $4y^2 - 5x^2 - 1 = 0$ y llámala e_2. Demuestra que $e_1^2 e_2^2 = e_1^2 + e_2^2$.

15. Demuestra que la elipse $25x^2 + 16y^2 - 1 = 0$ y la hipérbola $100y^2 - 80x^2 - 1 = 0$ tienen los mismos focos.

16. Dos faros LORAN están en una costa recta a 200 kilómetros de distancia. ¿Qué diferencia en las lecturas de las señales debe buscar un barco para tocar tierra entre ellos a 50 kilómetros de uno de los faros?

17. Un cañón se encuentra en un lugar $Q(10, y)$. Dos observadores están en los puntos $A(-10,0)$ y $B(10,0)$, respectivamente. El observador en A oye un disparo 24 segundos después del momento en el que lo oye el observador B. Encuentra la posición del cañón. Considera que el sonido viaja a $\frac{1}{3}$ km/s.

18. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a los vértices de las hipérbolas $16x^2 - 9y^2 + 128x + 108y - 644 = 0$ y $-16x^2 + 9y^2 - 128x - 108y - 508 = 0$. Encuentra las coordenadas de los cuatro puntos de intersección de dichas rectas y da la ecuación del círculo cuyo centro es el centro de ambas hipérbolas y pasa por los puntos que encontraste. Demuestra que los cuatro focos están sobre este círculo.

19. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes de la hipérbola $-3x^2+2y^2+60x-24y-264=0$ que tiene pendiente igual a $\frac{3}{4}$.

Ejercicios con Geolab

Utiliza el Geolab para hacer los siguientes ejercicios.

1. **Hipérbola dados los focos y el semieje mayor.** Encuentra la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F1(5,0)$ y $F2(-5,0)$ tal que la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos sea 4. Para ello, construye los puntos y el escalar $a = 2$; luego, utiliza el constructor *Focos y a* del menú de cónicas. ¿Qué pasa si haces $a = 3$? En la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor sobre el renglón de la hipérbola y oprime el botón *Datos* para ver todos los elementos de la hipérbola.

2. **Hipérbola dados los focos y un punto.** Encuentra la hipérbola cuyos focos son $F1(1,1)$ y $F2(-3,-1)$ y que pasa por el punto $P(2,3)$. Utiliza el constructor *Hipérbola, focos y punto* del menú de cónicas.

También construye la elipse con los mismos focos y que pase por P. ¿Cómo son las dos cónicas en los puntos de intersección?

3. **Hipérbola dados el centro y los semiejes.** Encuentra la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen y que satisface que el semieje transversal mide 5 y el semieje no focal mide 3. *Sugerencia:* Usa el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de c y con él encuentra los focos. Puedes construir los focos como *Puntos calculados*, poniendo c o $-c$ en la coordenada x y 0 en la coordenada y. Luego, utiliza la construcción *Focos y a* del menú de cónicas.

4. **Hipérbola dada la ecuación.** Dibuja la hipérbola cuya ecuación es $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$. Para ello, utiliza el constructor *Cónica calculada* con los valores adecuados para los coeficientes $A...F$.

5. **Hipérbola dada la ecuación.** Encuentra las coordenadas de los focos, el centro y los vértices de la hipérbola cuya ecuación es $3x^2 - y^2 - 18x + 2y + 23 = 0$ y dibújala.

6. **Familias de hipérbolas.** Encuentra las hipérbolas con focos en $F1\,(-5, 0)$ y $F2\,(5, 0)$, variando la excentricidad en $1 < e \leq 5$. Geolab no tiene constructor para *Focos y excentricidad*, pero sí tiene para *Focos y a*. Si $c = 5$, tenemos que $a = 5/e$.

   Construye dos números directos $c = 5$ y $e = 2$.

   Construye los focos como puntos calculados $F1\,(-c, 0)$ y $F2\,(c, 0)$.

   Construye el número calculado $a = c/e$.

   Construye la cónica con estos focos y el valor de a.

   Anima el número e entre 1.01 y 5.

   Ejecuta la animación, indicando que la cónica tiene traza.

7. **Hipérbola por 5 puntos.** Construye la hipérbola que pasa por $A\,(-6, 7)$, $B\,(-2, 6)$, $C\,(0, 1)$, $D\,(0, 7)$, $E\,(4, 6)$. Utiliza el constructor *Cónica por 5 puntos*.

8. **Tangente a hipérbola.** Utiliza la hipérbola del ejercicio anterior. Construye la tangente a la hipérbola desde el punto $F\,(0, -3)$, la cual se encuentra del mismo lado que el punto A. También construye la tangente que está del otro lado de A. ¿Puedes construir una tangente desde $Q\,(-1, 0)$?

9. **Elementos de la hipérbola.** Utiliza la hipérbola del ejercicio 7. Encuentra las intersecciones de las tangentes construidas en el ejercicio 8 con el eje focal de la cónica. Para ello, construye el eje transversal de la cónica. Utiliza el constructor *Rectas de una Cónica->Eje Focal* del menú de rectas. Una vez construida esta recta, construye sus intersecciones con las tangentes dadas. Observa que usando los menús *Puntos de una Cónica*, *Rectas de una Cónica*, *Escalares de una Cónica* tienes posibilidad de acceder a todos los elementos importantes de la cónica.

Capítulo 12

La ecuación general de segundo grado

En los capítulos anteriores, con la ayuda de la traslación de los ejes coordenados pudimos obtener las ecuaciones de las cónicas horizontales y verticales que tienen sus centros (elipses e hipérbolas) o sus vértices (parábolas) fuera del origen del sistema cartesiano.

Ahora consideraremos cónicas con ejes no paralelos a los ejes del sistema, cuyas ecuaciones se caracterizan porque contienen un término en xy. Mediante la rotación de los ejes coordenados estableceremos nuevos sistemas y, con respecto a estos ejes, obtendremos se obtienen las ecuaciones estándar de dichas cónicas.

Estudiaremos la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y, con ayuda de la expresión B^2-4AC, tendremos un criterio para determinar la clase de cónica que representa una ecuación de tal tipo. No trataremos los casos en que la ecuación anterior representa a alguna de las llamadas cónicas degeneradas (dos rectas, un punto y el vacío). El criterio anterior no sirve para reconocer estas situaciones excepcionales, sin embargo, consideramos que lo que exponemos en este capítulo resulta suficiente para este nivel de estudio.

A lo largo del libro hemos trabajado con ecuaciones estándar de cónicas. En este capítulo utilizaremos la ecuación general de segundo grado para desarrollar todo lo antes visto.

La excentricidad de las cónicas

Encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que su distancia al punto $Q(8,0)$ sea el doble de su distancia a la recta $x=-4$.

Solución:

Llamamos $P(x,y)$ a un punto localizado en dicho lugar geométrico y ℓ a la recta cuya ecuación es $x=-4$.

La distancia de $P(x,y)$ a $Q(8,0)$ es

$$d(P,Q)=d((x,y),(8,0)),$$

es decir,

$$\sqrt{(x-8)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-16x+64+y^2}. \tag{12.1}$$

La distancia de P a ℓ es

$$d(P,\ell)=|x+4|. \tag{12.2}$$

El lugar geométrico buscado debe satisfacer

$$d(P,Q)=2d(P,\ell).$$

Sustituimos las ecuaciones (12.1) y (12.2) en la ecuación anterior y tenemos

$$\sqrt{x^2-16x+64+y^2}=2|x+4|.$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros

$$x^2-16x+64+y^2=4(x+4)^2.$$

Simplificamos y obtenemos la ecuación del lugar geométrico deseado:

$$3x^2+48x-y^2=0.$$

Para ver qué cónica representa dicha ecuación y encontrar sus elementos principales, la llevamos a su forma simétrica.

$$\begin{aligned}
3\left(x^2+16x\right)-y^2 &= 0\\
3\left(x^2+16x+64\right)-y^2 &= 192\\
3(x+8)^2-y^2 &= 192\\
\frac{(x+8)^2}{64}-\frac{y^2}{192} &= 1\\
\frac{(x+8)^2}{8^2}-\frac{y^2}{\left(8\sqrt{3}\right)^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Así, nos damos cuenta de que es una hipérbola horizontal cuyo centro es $C(-8,0)$, la distancia del centro a los vértices es $a=8$, $b=8\sqrt{3}$ y la distancia entre el centro y los focos es

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{64+192}=\sqrt{256}=16;$$

luego los vértices son

$$V'(-16,0) \quad \text{y} \quad V(0,0),$$

y los focos son (figura 12-1)

$$F'(-24,0) \quad \text{y} \quad F(8,0).$$

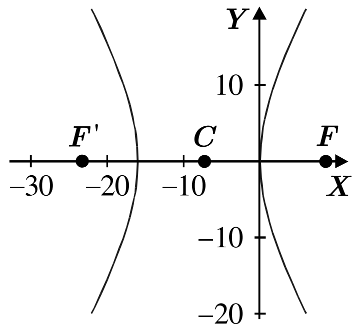


Figura 12-1

El ejemplo anterior nos recuerda la definición de parábola, pues las distancias se relacionan con un punto fijo (foco) y una recta (directriz).

Todas las cónicas pueden definirse en esos términos, pero a diferencia de la parábola, en que la condición es que esas distancias coincidan, para las otras cónicas la distancia al foco será un múltiplo de la distancia a la recta.

Observación:

Para estudiar esta situación resultará útil tener presente lo siguiente:

Dados dos puntos distintos F y D, en una recta X y un número real $r > 0$, distinto de 1, siempre es posible escoger un sistema de coordenadas que tenga a X como el eje de las X y tal que si las coordenadas de F son $(c, 0)$, entonces las de D son $(rc, 0)$; en particular, F y D están del mismo lado con respecto al origen escogido.

Demostración: Escojamos a la recta X como el eje de las X, por el punto F levantemos una perpendicular a X y marquemos un segmento de longitud 1 llamando U al punto obtenido; por D hagamos lo mismo, pero ahora que el segmento sea de longitud r, y llamamos R al extremo de dicho segmento (ambos segmentos deben caer del mismo lado con respecto a X). Tracemos la recta que pasa por U y R y escojamos como origen del sistema al punto O en donde interseca a X. Los triángulos OFU y ODR son semejantes, por tanto:

$$\frac{OD}{OF} = \frac{OR}{OU} = \frac{r}{1} = r. \tag{12.3}$$

En la figura 12-2 presentamos los casos en que $r > 1$ y $r < 1$.

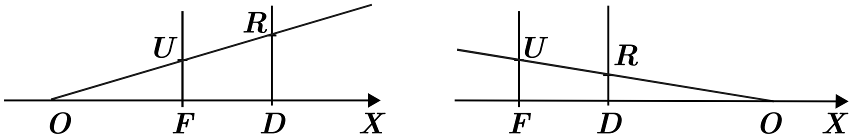


Figura 12-2

Tomamos como eje Y a la recta perpendicular a X que pasa por O. Si las coordenadas de F son $(c, 0)$, entonces por (12.3) las de D son $(rc, 0)$. Observamos que el signo de c, y por tanto de rc, puede variarse si cambiamos la orientación de X. ∎

Ahora estamos listos para definir las cónicas en términos de un foco y una directriz.

Consideremos una recta ℓ, a la que llamaremos *directriz*, y un punto F, al que llamaremos *foco*.

Busquemos el lugar geométrico de los puntos $P\,(x, y)$ cuya distancia al foco es $e > 0$ veces su distancia a la directriz, es decir,

$$d(P, F) = e\ d(P, \ell), \tag{12.4}$$

donde e es un número positivo.

Una vez que analicemos las distintas posibilidades, según se compare el valor de e con respecto a 1, escogeremos un sistema cartesiano que nos convenga.

- Caso $e = 1$.

Escojamos como eje X a la recta que pasa por F y es perpendicular a ℓ. Supongamos que estas rectas se cortan en D. Tomemos como origen O al punto medio del segmento FD (figura 12-3). Si las coordenadas de F son $(c, 0)$, entonces la ecuación de la directriz es $x = -c$. Llamamos $P\,(x, y)$ a un punto del lugar geométrico buscado.

De acuerdo con las fórmulas de distancia entre dos puntos (4.1) y distancia de un punto a una recta (5.15), la ecuación (12.4) toma la forma

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\,|x+c| = |x+c|\,.$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación,

$$(x-c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2.$$

Simplificamos

$$(-2c - 2c)\,x + y^2 = c^2 - c^2. \tag{12.5}$$

En este caso, la ecuación (12.5) se reduce a

$$y^2 = 4cx,$$

que tiene la forma de la ecuación de una parábola, como era de esperarse (figura 12-3).

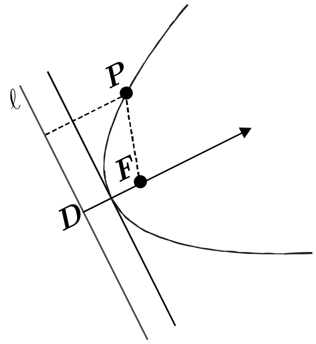


Figura 12-3

- Veamos ahora el caso $e \neq 1$.

  Tomemos la recta X que pasa por F y es perpendicular a ℓ. Supongamos que estas rectas se cortan en D. De acuerdo con la observación que hicimos arriba, hay un sistema cartesiano que tiene a X como el eje del mismo nombre (de las X) y tal que si las coordenadas de F son $(c, 0)$, entonces las de D son $\left(\frac{c}{e^2}, 0\right)$; en particular, F y D están en X del mismo lado con respecto al origen. Así, la ecuación de la directriz es $x = \frac{c}{e^2}$. Orientamos a X de manera que $c > 0$ (figura 12-4).

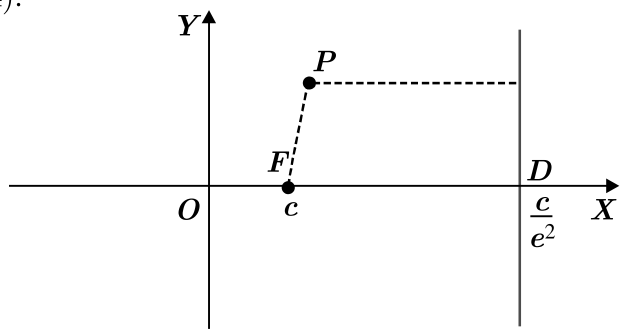


Figura 12-4

Al aplicar nuevamente las fórmulas de distancia entre dos puntos (4.1) y distancia de un punto a una recta (5.15), la ecuación (12.4) toma la forma

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\left|x - \frac{c}{e^2}\right|.$$

Al elevar al cuadrado y agrupar obtenemos

$$\left(1-e^2\right)x^2 + \left(-2c + 2\left(\frac{c}{e^2}\right)e^2\right)x + y^2 = e^2\left(\frac{c^2}{e^4}\right) - c^2, \tag{12.6}$$

o sea,

$$\left(1-e^2\right)x^2 + y^2 = \frac{c^2}{e^2}\left(1-e^2\right),$$

luego dividimos entre el término independiente

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}\left(1-e^2\right)} = 1. \tag{12.7}$$

Aquí tenemos dos casos:

– Si $e < 1$, el denominador de y^2 es positivo, por lo que tenemos una elipse en la que el semieje mayor es

$$a = \frac{c}{e}$$

y el semieje menor es

$$b = \frac{c\sqrt{1-e^2}}{e}.$$

Podemos comprobar que $b^2 + c^2 = a^2$, como sucede con las elipses (figura 12-5):

$$b^2 + c^2 = \frac{c^2\left(1-e^2\right)}{e^2} + c^2 = \frac{c^2 - c^2e^2 + c^2e^2}{e^2} = \frac{c^2}{e^2} = a^2.$$

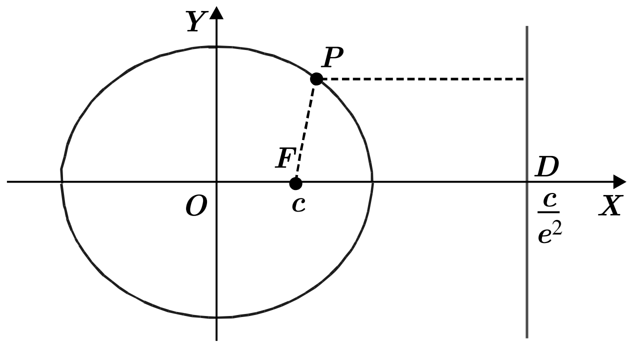


Figura 12-5

Notamos que $F(c,0)$ es el foco más cercano a la recta $x = \frac{c}{e^2}$, ya que F y D están del mismo lado, con respecto al origen.

– Si $e > 1$, podemos reescribir (12.7) para que el denominador de y^2 sea positivo:

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}} - \frac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}\left(e^2-1\right)} = 1, \tag{12.8}$$

y ahora obtenemos la ecuación de una hipérbola, en la que

$$a = \frac{c}{e}$$

y

$$b = \frac{c\sqrt{e^2-1}}{e}.$$

Podemos comprobar que $a^2 + b^2 = c^2$, como sucede con las hipérbolas (figura 12-6):

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{e^2} + \frac{c^2}{e^2}\left(e^2 - 1\right) = \frac{c^2 + c^2e^2 - c^2}{e^2} = c^2.$$

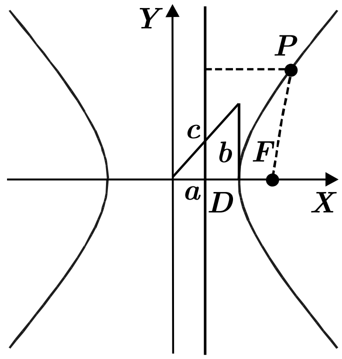


Figura 12-6

Como en el caso precedente, $F\,(c, 0)$ es el foco más cercano a la directriz $x = \dfrac{c}{e^2}$.

Observemos que en la explicación anterior obtuvimos que

$$e = \frac{c}{a},$$

lo que coincide con la definición de excentricidad que vimos en los capítulos de la elipse y de la hipérbola. Es decir, el coeficiente de $d\,(\ell, P)$ en la fórmula (12.4) es la *excentricidad* de la cónica y su valor determina qué tipo de cónica es.

- Si $e = 1$, es una parábola.
- Si $e < 1$, es una elipse. La excentricidad de la elipse mide qué tan "alargada" es. Cuanto más cercana esté la excentricidad a cero, la elipse será más parecida a un círculo, y cuanto más cercana esté a uno, será más alargada.
- Si $e > 1$, es una hipérbola. La excentricidad mide qué tan "abiertas o cerradas" son las ramas de la hipérbola. En la figura 12-6 observa que se forma un triángulo de catetos a, b y de hipotenusa c. Como en el caso anterior, $F\,(c, 0)$ es el foco más cercano a la directriz $x = \dfrac{c}{e^2}$. Cuanto más cercana esté la excentricidad a 1, el cateto b será más pequeño y, por tanto, la hipérbola será más cerrada. Cuanto más alejada esté la excentricidad de 1, mayor será b y la hipérbola será más abierta.

Ejemplo

- Encontrar la cónica que tiene excentricidad de $\frac{1}{3}$; uno de sus focos es $F\,(1, 0)$ y la recta directriz ℓ está dada por la ecuación $x = 9$.

  Solución:

  Llamamos $P\,(x, y)$ a un punto de la cónica; los datos del problema significan que

$$d\,(P, F) = \frac{1}{3} d\,(P, \ell)\,.$$

Sustituimos las coordenadas de los puntos y de la recta y obtenemos

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=\frac{1}{3}\left|x-9\right|.$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros

$$x^2-2x+1+y^2=\frac{1}{9}\left(x^2-18x+81\right),$$

y simplificamos

$$8x^2+9y^2=72.$$

Dividimos entre el término independiente,

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1,$$

y obtenemos la ecuación simétrica de una elipse con centro en $C(0,0)$. La distancia del centro a los vértices es

$$a=\sqrt{9}=3,$$

y su distancia a cada foco es (figura 12-7)

$$c=\sqrt{9-8}=1.$$

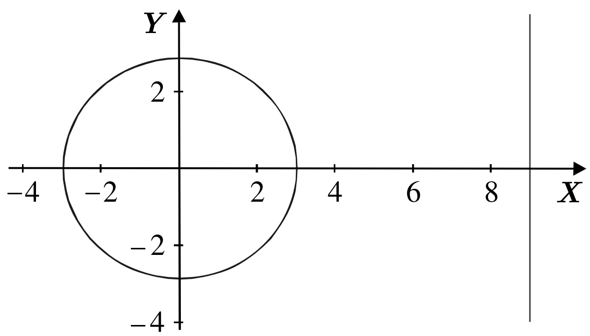


Figura 12-7

Transformación de la ecuación general por traslación de los ejes

Consideremos la ecuación

$$4x^2-40x+9y^2-144y+532=0 \tag{12.9}$$

y hagamos el cambio de coordenadas que resulta al trasladar los ejes, de modo que el punto $Q(5,8)$ sea el nuevo origen. ¿Cuál será la forma de la ecuación en el nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$?

Solución:

En el capítulo 4 vimos que para encontrar las coordenadas de un punto P cualquiera en el nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$, por traslación de XY, debemos restar a las coordenadas de P las del punto Q, donde se colocó el origen del sistema $X'Y'$, esto es,

$$\begin{aligned} x' &= x-5 \\ y' &= y-8. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Al sustituir las coordenadas de Q en las ecuaciones (12.10) obtenemos

$$\begin{aligned} x' &= 5-5=0 \\ y' &= 8-8=0, \end{aligned}$$

con lo que comprobamos que Q es el origen del sistema de coordenadas $X'Y'$.

Para escribir la ecuación (12.9) en términos de x' y y', debemos despejar x y y de las ecuaciones (12.10)

$$\begin{aligned} x &= x'+5 \\ y &= y'+8 \end{aligned}$$

y sustituir estos valores en la ecuación original, con lo que obtenemos

$$4\left(x'+5\right)^2-40\left(x'+5\right)+9\left(y'+8\right)^2-144\left(y'+8\right)+532=0.$$

Al simplificar,

$$4(x')^2+9(y')^2=144, \tag{12.11}$$

lo que reconocemos inmediatamente como la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas $X'Y'$. Al dividir entre el término independiente, obtenemos

$$\frac{(x')^2}{36}+\frac{(y')^2}{16}=1;$$

por lo que su semieje mayor es $a=\sqrt{36}=6$, el menor es $b=\sqrt{16}=4$ y la distancia del centro a cada foco es

$$c=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}\approx 4.4721.$$

Si queremos obtener la forma simétrica de la ecuación en términos de los ejes originales XY, sustituimos x' y y' por sus valores en términos de x y y:

$$\frac{(x-5)^2}{36}+\frac{(y-8)^2}{16}=1,$$

que es la *forma canónica o estándar* de la ecuación (12.9) (figura 12-8).

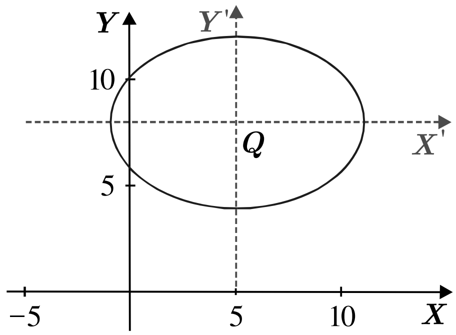


Figura 12-8

Consideremos nuevamente la ecuación

$$4x^2 - 40x + 9y^2 - 144y + 532 = 0$$

del ejemplo anterior. Ya vimos que las fórmulas de traslación

$$\begin{aligned} x' &= x - 5 \\ y' &= y - 8 \end{aligned}$$

trasladan los ejes de manera que el nuevo origen de coordenadas queda en el punto $Q\,(5,8)$, lo que nos permite escribir la ecuación de una forma mucho más simple.

¿Cómo podemos encontrar dicha traslación de los ejes de coordenadas de tal manera que nos permita simplificar la ecuación si no nos la dan de antemano?

En la ecuación, completamos dos trinomios cuadrados perfectos: uno con los términos que contienen x y el segundo con los términos que contienen y; así, escribimos

$$\begin{aligned} \left(4x^2 - 40x \qquad\right) + \left(9y^2 - 144y \qquad\right) &= -532 \\ 4\left(x^2 - 10x + 25\right) + 9\left(y^2 - 16y + 64\right) &= -532 + 100 + 576 \\ 4\,(x-5)^2 + 9\,(y-8)^2 &= 144. \end{aligned}$$

Si nos fijamos en los términos que están al cuadrado, nos daremos cuenta de que debemos sustituir

$$\begin{aligned} x' &= x - 5 \\ y' &= y - 8 \end{aligned} \tag{12.12}$$

para obtener

$$4(x')^2 + 9(y')^2 = 144,$$

que es la misma ecuación que (12.11). Observamos que las fórmulas (12.12) son las mismas que (12.10).

En general, si queremos encontrar la forma estándar de una ecuación del tipo

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde al menos uno de los dos coeficientes A o C es distinto de cero, debemos trasladar los ejes coordenados de modo tal que su centro, o el vértice (en el caso de la parábola), coincida con el nuevo origen de coordenadas; en la práctica, esto significa proceder de la siguiente manera:

- Si tanto A como C son distintas de cero, completamos trinomios cuadrados perfectos para llevar la ecuación a la forma

$$A\left(x-h\right)^2+C\left(y-k\right)^2=F'. \tag{12.13}$$

Ahora efectuamos la traslación de los ejes dada por

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x-h \\ y' &= y-k. \end{aligned}} \tag{12.14}$$

Esta traslación de los ejes coloca al nuevo origen en el centro de la cónica, ya que si sustituimos las coordenadas de (h,k) en las ecuaciones (12.14), obtenemos

$$\begin{aligned} x' &= h-h=0 \\ y' &= k-k=0. \end{aligned}$$

Al sustituir (12.14) en la ecuación (12.13), obtenemos

$$A\left(x'\right)^2+C\left(y'\right)^2=F',$$

a la cual identificamos como una elipse o una hipérbola, dependiendo de los signos de A, C y F'.

- Si $C=0$, completamos el trinomio cuadrado perfecto con los términos que tienen x, y obtenemos

$$A\left(x-h\right)^2=-Ey+F'.$$

Ahora factorizamos el coeficiente de y en el término de la derecha

$$A\left(x-h\right)^2=-E\left(y-\frac{F'}{E}\right)$$

y hacemos la traslación de ejes dada por

$$\begin{aligned} x' &= x-h \\ y' &= y-\frac{F'}{E}; \end{aligned}$$

y obtenemos

$$A\left(x'\right)^2=-Ey',$$

que es una parábola vertical en la que $4p=\dfrac{-E}{A}$.

- Si $A = 0$, completamos el trinomio cuadrado perfecto con los términos que tienen y, de manera similar al caso anterior, y obtenemos la parábola horizontal cuya ecuación es
$$C\left(y'\right)^2 = -Dx',$$
que es una parábola horizontal tal que $4p = \dfrac{-D}{C}$.

Ejemplos

1. ¿Cuál es la ecuación de la recta $y = 3x - 5$ respecto al sistema trasladado que tiene su origen en el punto $P(3, 2)$?

Solución:

La traslación de ejes
$$\begin{aligned} x' &= x - 3 \\ y' &= y - 2 \end{aligned}$$
consiste en restar a cada punto de coordenadas (x, y) las del punto $P(3, 2)$, que será el nuevo origen de coordenadas. Para encontrar la nueva ecuación en términos de x' y y', debemos despejar x y y de las ecuaciones anteriores
$$\begin{aligned} x &= x' + 3 \\ y &= y' + 2 \end{aligned}$$
y sustituir estos valores de x y y en la ecuación original de la recta, con lo que obtenemos
$$\begin{aligned} y' + 2 &= 3\left(x' + 3\right) - 5 \\ y' &= 3x' + 2. \end{aligned}$$

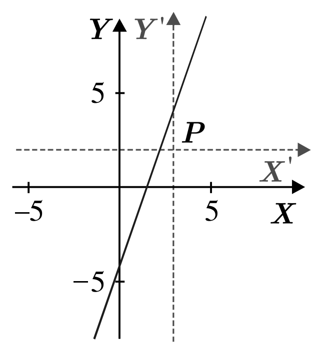


Figura 12-9

Observamos que no cambia la pendiente de la recta, sino únicamente la ordenada al origen.

2. Encontrar la forma estándar de la ecuación $x^2 - 8x + y^2 + 14y + 25 = 0$ y la traslación de ejes que hace que su centro esté en el origen del nuevo sistema.

Solución:

Por un lado, debemos completar un trinomio cuadrado perfecto con los términos que contienen x y, por otro, un trinomio cuadrado perfecto con los términos que contienen y.

$$\begin{aligned}\left(x^2-8x\qquad\right)+\left(y^2+14y\qquad\right) &= -25\\ \left(x^2-8x+16\right)+\left(y^2+14y+49\right) &= -25+16+49\\ (x-4)^2+(y+7)^2 &= 40.\end{aligned}$$

Ésta es la forma estándar.

Si vemos los términos entre paréntesis, nos daremos cuenta de que la traslación buscada es

$$x' = x-4 \qquad\qquad y' = y+7.$$

Sustituimos estos valores en la ecuación anterior y obtenemos

$$(x')^2+(y')^2 = 40,$$

que es el círculo con centro en el origen O' (el nuevo origen) y radio $\sqrt{40}\approx 6.33$ (figura 12-10).

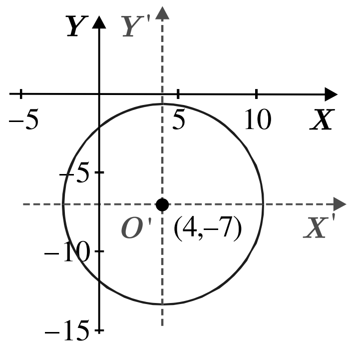


Figura 12-10

3. Encontrar la ecuación estándar de la parábola $2x^2+20x+59-3y=0$ y la traslación de ejes que tiene por origen al vértice de dicha parábola.

Solución:

Para ello, completamos el cuadrado con los términos en x:

$$\begin{aligned}2\left(x^2+10\qquad\right) &= 3y-59\\ 2\left(x^2+10x+25\right) &= 3y-59+50\\ 2\left(x+5\right)^2 &= 3\left(y-3\right).\end{aligned}$$

La ecuación estándar es

$$(x+5)^2 = \frac{3}{2}\left(y-3\right).$$

La traslación buscada es

$$x' = x+5, \qquad y' = y-3.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación anterior, obtenemos

$$(x')^2 = \frac{3}{2}y',$$

que reconocemos como una parábola vertical, con vértice en el origen O' del sistema de coordenadas $X'Y'$, en la que (figura 12-11)

$$4p = \frac{3}{2}, \quad \text{es decir,} \quad p = \frac{3}{8}.$$

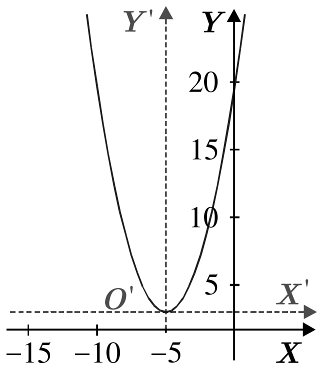


Figura 12-11

4. Identificar, mediante una traslación de ejes, la cónica $4x^2 - 16x + y^2 - 8y - 40 = 0$.

Solución:

Buscamos la traslación de ejes que coloca el origen de coordenadas en el centro de la cónica. Para ello, completamos los cuadrados:

$$\begin{aligned}
4x^2 - 16x + y^2 - 8y - 40 &= 0 \\
4\left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(y^2 - 8y + 16\right) &= 40 + 16 + 16 \\
4\,(x-2)^2 + (y-4)^2 &= 72 \\
\frac{(x-2)^2}{18} + \frac{(y-4)^2}{72} &= 1 \\
\frac{(x-2)^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2} + \frac{(y-4)^2}{\left(6\sqrt{2}\right)^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Se trata de una elipse con centro en el punto $C\,(2,4)$ y semiejes $a = 6\sqrt{2}$ y $b = 3\sqrt{2}$. La traslación de ejes que coloca el origen de coordenadas en el centro de la elipse es

$$x' = x - 2 \qquad\qquad y' = y - 4.$$

Sustituimos estos valores en la ecuación de la elipse y obtenemos

$$\frac{(x')^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2} + \frac{(y')^2}{\left(6\sqrt{2}\right)^2} = 1,$$

que es la elipse con centro en el origen y semiejes $a = 6\sqrt{2}$ y $b = 3\sqrt{2}$ (figura 12-12).

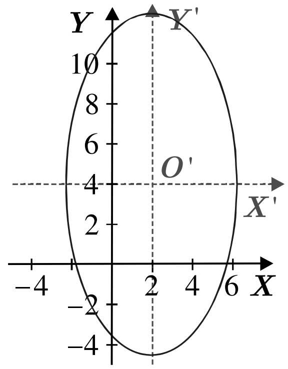


Figura 12-12

Ejercicios

1. Encuentra la cónica que tiene excentricidad 4, uno de sus focos es $F(0,5)$, y la recta directriz ℓ está dada por la ecuación $y = -1$.

2. Encuentra la cónica que tiene excentricidad 1, uno de sus focos es $F(-6,0)$, y la recta directriz ℓ está dada por la ecuación $x = 3$.

3. Traslada los ejes de coordenadas para que la cónica $7y^2 + 12x - 112y + 508 = 0$ quede colocada de manera que su foco sea el origen del nuevo sistema de coordenadas, y encuentra la ecuación correspondiente en dicho sistema.

4. Traslada los ejes de coordenadas para que la cónica $2x^2 + y^2 + 24x + 4y + 64 = 0$ quede colocada de manera que su vértice superior sea el origen del nuevo sistema de coordenadas, y encuentra la ecuación correspondiente en dicho sistema.

5. Traslada los ejes de coordenadas para que la cónica $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 8 = 0$ quede colocada de manera que su centro sea el origen del nuevo sistema de coordenadas, y encuentra la ecuación correspondiente en dicho sistema.

6. Traslada los ejes de coordenadas para que la cónica $5x^2 - 4y^2 + 30x + 56y - 251 = 0$ quede colocada de manera que su centro sea el origen del nuevo sistema de coordenadas; encuentra la ecuación correspondiente en dicho sistema.

Transformación de la ecuación general por rotación de los ejes

Proporcionar las coordenadas de los puntos $A(3,1)$, $B(4,-1)$ y $C(-9,4)$ con respecto al sistema de coordenadas $X'Y'$ que se obtiene al girar los ejes cartesianos 90° en sentido positivo, es decir, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Solución:

Dibujamos los ejes cartesianos XY y marcamos los puntos A, B y C (figura 12-13(a)).

Ahora, dibujemos un nuevo par de ejes $X'Y'$ con la misma escala que la original, girando los ejes originales $90°$ en sentido positivo. De esta manera, el semieje positivo X' queda colocado donde estaba el semieje positivo Y, y el semieje positivo Y' queda colocado donde estaba el semieje negativo X.

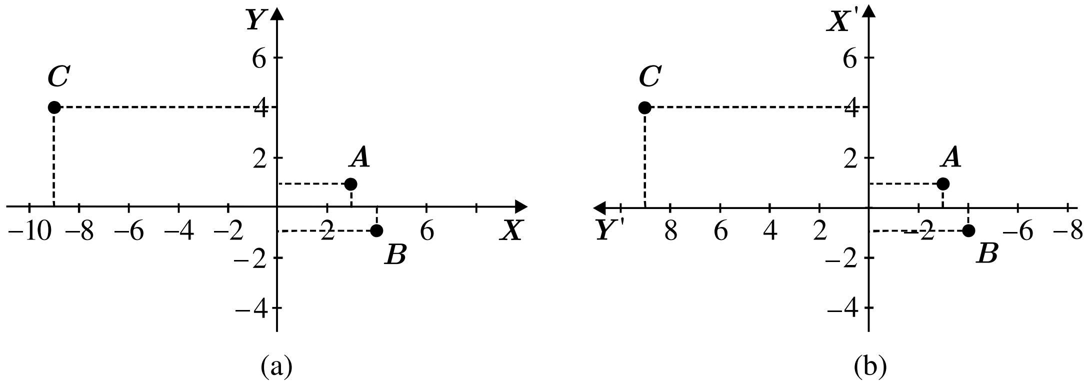


Figura 12-13

Ahora vemos que las coordenadas de los puntos A, B y C, con respecto al nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$, son $A(1,-3)$, $B(-1,-4)$ y $C(4,9)$.

¿Observas algún patrón para obtener esas coordenadas a partir de las originales $(3,1)$, $(4,-1)$ y $(-9,4)$?

¿Podrías dar las nuevas coordenadas del punto $D(7,8)$ sin necesidad de dibujarlo?

Ahora veamos el caso general.

Tomemos un punto $P(x,y)$ del plano XY. Giremos los ejes cartesianos un ángulo θ, en sentido positivo, para obtener los ejes $X'Y'$ (figura 12-14).

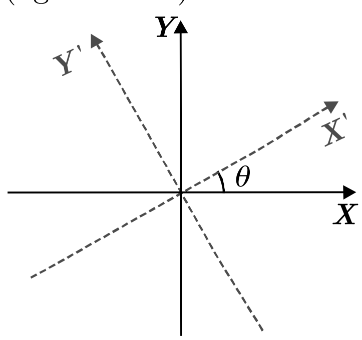


Figura 12-14

Llamemos (x',y') a las coordenadas que deseamos determinar de los ejes $X'Y'$; ambas parejas de coordenadas están relacionadas de la siguiente manera (figura 12-15).

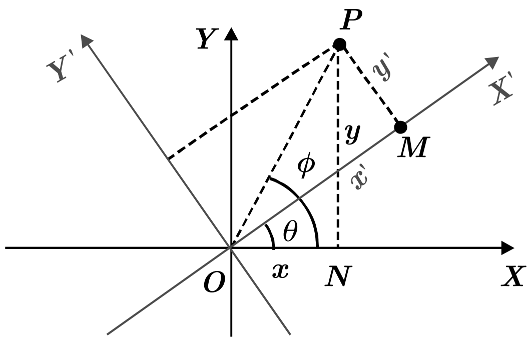


Figura 12-15

Tracemos el segmento OP, llamemos ϕ al ángulo formado por el segmento OP y el semieje positivo X, y sea r la distancia del punto P al origen O. A partir del triángulo OPM, sabemos que

$$OM = x' = r\cos(\phi - \theta).$$

Si aplicamos la fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos, obtenemos

$$x' = r(\cos\phi\cos\theta + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta) = (r\cos\phi)\cos\theta + (r\operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\theta.$$

Por otro lado, en el triángulo OPN vemos que

$$ON = x = r\cos\phi \qquad \text{y} \qquad PN = y = r\operatorname{sen}\phi,$$

así que

$$x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta.$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} y' &= r\operatorname{sen}(\phi-\theta) = r(\operatorname{sen}\phi\cos\theta - \cos\phi\operatorname{sen}\theta) \\ &= -(r\cos\phi)\operatorname{sen}\theta + (r\operatorname{sen}\phi)\cos\theta = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta. \end{aligned}$$

Las fórmulas

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ y' &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned}} \tag{12.15}$$

se conocen como *fórmulas de rotación* de ejes y relacionan las coordenadas de P, con respecto al sistema original de coordenadas XY, con sus coordenadas respectivas en el nuevo sistema $X'Y'$.

Ejemplos

1. Proporcionar las coordenadas de los puntos $A(3,1)$, $B(4,-1)$ y $C(-9,4)$ con respecto al sistema de coordenadas que se obtiene al girar los ejes cartesianos un ángulo de $90°$ en sentido positivo.

Solución:

Éste es el ejemplo introductorio; resolvámoslo ahora por medio de las fórmulas de rotación.

Como conocemos las coordenadas (x, y) de los puntos A, B y C y buscamos sus coordenadas (x', y'), utilizamos las fórmulas (12.15). Recordemos que

$$\operatorname{sen} 90^\circ = 1 \qquad \text{y} \qquad \cos 90^\circ = 0,$$

así que las nuevas coordenadas de los puntos son:

Para el punto A:

$$\begin{aligned} x' &= 3\cos 90^\circ + 1 \operatorname{sen} 90^\circ = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1. \\ y' &= -3 \operatorname{sen} 90^\circ + 1 \cos 90^\circ = -3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -3. \end{aligned}$$

Para el punto B:

$$\begin{aligned} x' &= 4\cos 90^\circ + (-1) \operatorname{sen} 90^\circ = 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1. \\ y' &= -4 \operatorname{sen} 90^\circ + (-1) \cos 90^\circ = -4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = -4. \end{aligned}$$

Para el punto C:

$$\begin{aligned} x' &= (-9)\cos 90^\circ + 4 \operatorname{sen} 90^\circ = (-9) \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4. \\ y' &= -(-9) \operatorname{sen} 90^\circ + 4 \cos 90^\circ = -(-9) \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 9. \end{aligned}$$

Así, las nuevas coordenadas de los puntos son $A\,(1, -3)$, $B\,(-1, -4)$, $C\,(4, 9)$, que son las mismas coordenadas que obtuvimos anteriormente.

2. Proporcionar las coordenadas de los puntos $A(1, 0)$, $B(4, 4)$ y $C(0, 1)$ con respecto al sistema de coordenadas que se obtiene al girar los ejes cartesianos 45° en sentido positivo.

Solución:

- Primera solución:

  Tracemos los ejes cartesianos y marquemos los puntos A, B y C. Ahora tracemos los nuevos ejes $X'Y'$ girando 45° los ejes originales (figura 12-16).

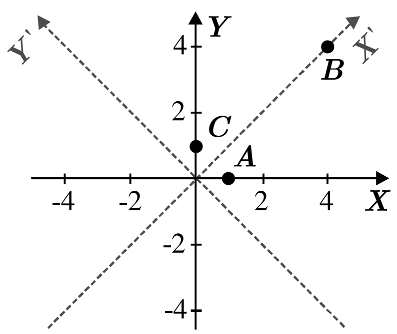


Figura 12-16

Desde A, tracemos paralelas a los nuevos ejes; como en la figura 12-17, observemos que se forman dos triángulos rectángulos isósceles cuya hipotenusa es OA que mide 1. Así, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, los catetos valen $\frac{1}{\sqrt{2}}$, de modo que las nuevas coordenadas de A son $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

El punto B se encuentra sobre la parte positiva del eje X', así que su primera coordenada es su distancia al origen, que por el teorema de Pitágoras es $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, y su segunda coordenada es cero; así, las nuevas coordenadas de B son $B\left(4\sqrt{2}, 0\right)$.

Por último, para encontrar las coordenadas de C, desde C trazamos paralelas a los nuevos ejes y observamos nuevamente que se forman dos triángulos rectángulos isósceles, cuya hipotenusa es OC y mide 1, de modo que las nuevas coordenadas de C son $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (figura 12-17).

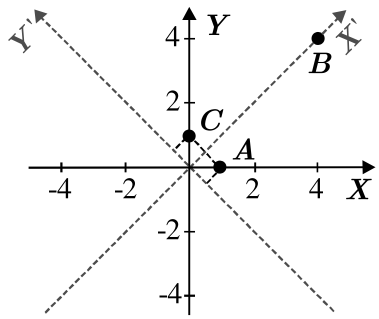


Figura 12-17

- Segunda solución:

Ahora resolvamos este problema de la manera sistemática que nos proporciona la fórmula (12.15), y recordemos que

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Las nuevas coordenadas de los puntos son:

Para el punto A:

$$\begin{aligned} x' &= 1\cos 45^\circ + 0 \operatorname{sen} 45^\circ = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ y' &= -1 \operatorname{sen} 45^\circ + 0\cos 45^\circ = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Para el punto B:

$$\begin{aligned} x' &= 4\cos 45^\circ + 4 \operatorname{sen} 45^\circ = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}. \\ y' &= -4 \operatorname{sen} 45^\circ + 4\cos 45^\circ = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0. \end{aligned}$$

Para el punto C:

$$\begin{aligned} x' &= 0\cos 45^\circ + 1\operatorname{sen} 45^\circ = 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ y' &= -0\operatorname{sen} 45^\circ + 1\cos 45^\circ = -0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Así, las nuevas coordenadas de los puntos son $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(4\sqrt{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, que son las mismas que encontramos en la primera solución.

Ahora veamos cómo se transforman las ecuaciones de algunos lugares geométricos al girar los ejes cartesianos.

Supongamos que la recta ℓ tiene la ecuación

$$x - \sqrt{3}y + 3 = 0.$$

Queremos obtener la ecuación de la recta con respecto a los ejes $X'Y'$ que se obtienen al girar los ejes XY un ángulo de 30° en sentido positivo.

Solución:

De acuerdo con las fórmulas (12.15), la rotación de los ejes cartesianos mediante un ángulo de 30° está dada por

$$\begin{aligned} x' &= x\cos 30^\circ + y\operatorname{sen} 30^\circ \\ y' &= -x\operatorname{sen} 30^\circ + y\cos 30^\circ. \end{aligned} \tag{12.16}$$

Recordemos que

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad\qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

por lo que obtenemos

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \qquad\qquad y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

Lo que necesitamos ahora es escribir x y y en términos de x' y y'. Para ello, resolvemos el sistema (12.16) de dos ecuaciones con dos incógnitas, x y y.

Multiplicamos la segunda ecuación por $\sqrt{3}$ y la sumamos a la primera:

$$x' + \sqrt{3}y' = 2y,$$

despejamos y

$$y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'.$$

En la primera ecuación sustituimos el valor de y

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right),$$

despejamos x

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'.$$

Así, las ecuaciones que expresan x y y, en términos de x' y y', son

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y &= \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'. \end{aligned}$$

Sustituimos estos valores en la ecuación de la recta,

$$\begin{aligned} x - \sqrt{3}y + 3 &= 0 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right) - \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 3 &= 0 \\ -2y' + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Observa que no hay término en x', lo cual significa que la recta es paralela al eje X', lo cual era de esperarse ya que la recta forma un ángulo de $30°$ con el eje X (figura 12-18).

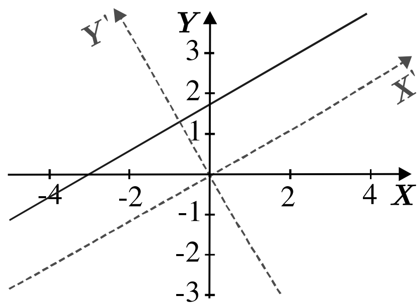


Figura 12-18

Veamos el caso general.

Si tenemos la ecuación de un lugar geométrico en términos de x y y, y queremos escribirla en términos de x' y y', lo que debemos hacer es despejar x y y de las fórmulas de rotación (12.15). Para ello, podemos proceder como lo hicimos en el ejemplo anterior y resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y, o pensar en la rotación de ejes que manda a los ejes cartesianos $X'Y'$ en XY. Si los ejes $X'Y'$ se obtuvieron mediante una rotación de un ángulo θ en sentido positivo, la rotación de ejes que manda $X'Y'$ en XY es una rotación de un ángulo θ *en sentido negativo*, es decir, una rotación girando un ángulo $-\theta$. Intercambiando los papeles de x, y con los de x', y' en las fórmulas de rotación (12.15) obtenemos

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(-\theta) + y' \operatorname{sen}(-\theta) \\ y &= -x' \operatorname{sen}(-\theta) + y' \cos(-\theta), \end{aligned}$$

y recordemos que

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta,$$

de modo que obtenemos

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x &=& x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y &=& x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{array}}, \qquad (12.17)$$

que son las fórmulas que nos permiten encontrar la ecuación de un lugar geométrico, en términos de x' y y', cuando se giran los ejes cartesianos un ángulo θ en sentido positivo.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación del círculo dado por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ cuando se giran los ejes un ángulo de $45°$.

Solución:

Utilizaremos las fórmulas (12.17)

$$\begin{array}{rcl} x &=& x'\cos 45° - y'\operatorname{sen} 45° \\ y &=& x'\operatorname{sen} 45° + y'\cos 45°, \end{array}$$

recordemos que

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sustituimos en la ecuación del círculo,

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 &=& 25 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 &=& 25 \\ \frac{1}{2}(x')^2 - x'y' + \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2}(x')^2 + x'y' + \frac{1}{2}(y')^2 &=& 25 \\ (x')^2 + (y')^2 &=& 25. \end{array}$$

Observamos que obtenemos la misma ecuación, lo cual era de esperarse ya que el círculo se ve igual desde cualquiera de los dos sistemas de coordenadas (figura 12-19).

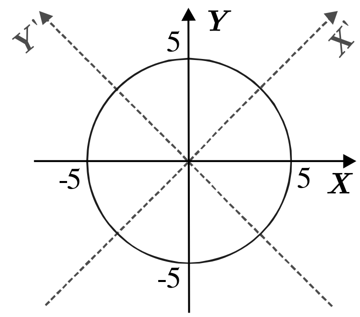


Figura 12-19

2. Encontrar la ecuación del lugar geométrico dado por la ecuación

$$\frac{43}{4}x^2 - \frac{7}{2}\sqrt{3}xy + \frac{57}{4}y^2 = 144$$

con respecto a los ejes $X'Y'$ obtenidos al girar los ejes cartesianos un ángulo de 30°, e identificar dicho lugar geométrico.

Solución:

Utilizaremos las fórmulas (12.17)

$$\begin{aligned} x &= x' \cos 30^\circ - y' \operatorname{sen} 30^\circ \\ y &= x' \operatorname{sen} 30^\circ + y' \cos 30^\circ, \end{aligned}$$

recordemos que

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Entonces debemos sustituir

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \qquad y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$$

en la ecuación original

$$\frac{43}{4}x^2 - \frac{7}{2}\sqrt{3}xy + \frac{57}{4}y^2 = 144,$$

con lo que obtenemos

$$\frac{43}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 - \frac{7}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + \frac{57}{4}\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 = 144,$$

que después de simplificar queda como

$$9(x')^2 + 16(y')^2 = 144.$$

Al escribir esta ecuación en la forma simétrica

$$\frac{(x')^2}{4^2} + \frac{(y')^2}{3^2} = 1,$$

la reconocemos como una elipse en la que $a = 4$ y $b = 3$, con eje mayor sobre el eje X' y eje menor sobre el eje Y'.

Como estos ejes están girados 30° con respecto a los ejes XY, entonces la elipse está girada 30° con respecto a estos ejes (figura 12-20).

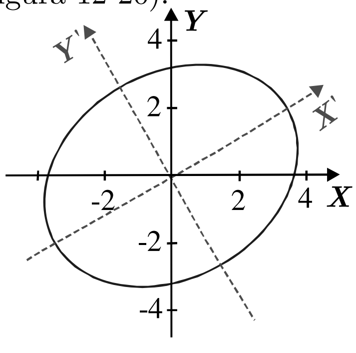


Figura 12-20

Ejercicios

Encuentra las coordenadas de los puntos dados con respecto al sistema de coordenadas que se obtiene al girar los ejes cartesianos, en sentido positivo, los grados indicados.

1. $A\,(1,-2)$, $B\,(-8,-4)$, $C\,(4,7)$; $30°$.

2. $A\,(0,-3)$, $B\,(-1,1)$, $C\,(-4,-5)$; $135°$.

3. $A\,(2,6)$, $B\,(9,-1)$, $C\,(-10,8)$; $45°$.

4. $A\,(-3,-3)$, $B\,(2,0)$, $C\,(7,-2)$; $90°$.

5. $A\,(-1,0)$, $B\,(2,-3)$, $C\,(5,7)$; $180°$.

6. $A\,(-7,2)$, $B\,(2,5)$, $C\,(4,3)$; $45°$.

7. $A\,(0,-2)$, $B\,(-3,2)$, $C\,(7,5)$; $120°$.

8. $A\,(8,-2)$, $B\,(1,-4)$, $C\,(6,-1)$; $90°$.

9. $A\,(2,7)$, $B\,(1,8)$, $C\,(-3,-1)$; $60°$.

10. $A\,(0,0)$, $B\,(3,4)$, $C\,(0,-1)$; $135°$.

11. $A\,(7,1)$, $B\,(8,-8)$, $C\,(35,2)$; $360°$.

12. $A\,(-4,-3)$, $B\,(5,-1)$, $C\,(4,17)$; $30°$.

Encuentra la ecuación de la recta dada con respecto a los ejes $X'Y'$ que se obtienen al girar los ejes XY un ángulo θ, en sentido positivo.

13. $\sqrt{2}x + y - 5 = 0; \quad \theta = 90°.$

14. $x + \sqrt{3}y + 4 = 0; \quad \theta = 60°.$

15. $2\sqrt{3}x + 2y + 9 = 0; \quad \theta = 30°.$

16. $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 13 = 0; \quad \theta = 45°.$

17. $5x - 4y - 7 = 0; \quad \theta = 90°.$

18. $x + y - 1 = 0; \quad \theta = 60°.$

19. $2x - y + 7 = 0; \quad \theta = 90°.$

20. $x + 3y - 4 = 0; \quad \theta = 45°.$

21. $5x - 8y + 5 = 0; \quad \theta = 30°.$

22. $9x - 6 = 0; \quad \theta = 360°.$

23. $x - y = 0; \quad \theta = 120°.$

24. $3x + y - 1 = 0; \quad \theta = 120°.$

Encuentra la ecuación de la cónica dada con respecto a los ejes $X'Y'$ obtenidos al girar los ejes XY el ángulo θ, en sentido positivo.

25. $y^2 - x^2 = 1; \quad \theta = 90°.$

26. $2xy = 1; \quad \theta = 45°.$

27. $x^2 + xy + y^2 = 6; \quad \theta = 45°.$

28. $x^2 + y^2 = 9; \quad \theta = 30°.$

29. $x^2 - y^2 = 2; \quad \theta = 90°.$

30. $3x^2 - 7xy + 3y^2 = 10; \quad \theta = 45°.$

31. $y^2 - 5x - 2y - 5 = 0; \quad \theta = 90°.$

32. $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 - 4 = 0; \quad \theta = 60°.$

33. $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1; \quad \theta = 30°.$

34. $5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 1; \quad \theta = -60°.$

35. $x^2+2xy+y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y = 0; \theta = 45°.$

36. $x^2+2xy+y^2-\frac{3}{2}\sqrt{2}x+\frac{3}{2}\sqrt{2}y-5 = 0; \theta = 45°.$

37. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 14\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 118 = 0; \quad \theta = 45°.$

38. $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + 4\left(1 + 5\sqrt{3}\right)x + 4\left(\sqrt{3} - 5\right)y + 116 = 0; \quad \theta = 60°.$

39. $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 4\sqrt{3}x - 4y - 24 = 0; \quad \theta = -60°.$

40. Considera los puntos $P\,(6,2)$ y $Q\,(-5,4)$. Encuentra la distancia entre ellos. Aplica una rotación de ejes de $45°$ en sentido positivo. Encuentra las coordenadas de P y Q, con respecto a los nuevos ejes. Calcula la distancia usando dichas coordenadas. Compara esta distancia con la primera.

41. Demuestra que las rectas $3x + y - 7 = 0$ y $x - 3y - 27 = 0$ son perpendiculares. Aplica una rotación de ejes de $60°$ en sentido positivo y encuentra las ecuaciones de esas rectas con respecto al nuevo sistema, ¿a partir de ellas se puede concluir que las rectas son perpendiculares?

42. Encuentra la ecuación de la directriz de la parábola $y^2 - 5x - 8y - 19 = 0$ con respecto al sistema obtenido al girar los ejes un ángulo de $30°$ en sentido positivo.

43. Aplica una rotación de ejes de $45°$ en el sentido positivo y encuentra las coordenadas de los vértices de la elipse $41x^2 - 18xy + 41y^2 - 800 = 0$ en el nuevo sistema de coordenadas.

44. Gira los ejes $60°$ en el sentido positivo y encuentra la ecuación con respecto al nuevo sistema de la hipérbola $1679x^2 - 1250\sqrt{3}xy + 429y^2 + 12\left(960\sqrt{3} - 49\right)x - 12\left(960 + 49\sqrt{3}\right)y - 57\,060 = 0$. ¿Cuáles son las coordenadas de sus focos en el nuevo sistema de coordenadas?

Ecuación general de las cónicas

Ahora veamos cómo reconocer el lugar geométrico determinado por una ecuación de segundo grado en su forma general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{12.18}$$

A lo largo del libro hemos trabajado básicamente con ecuaciones que no tienen término en xy, es decir, $B = 0$. Esta condición caracteriza a las cónicas que tienen sus ejes paralelos a los ejes cartesianos; y en este caso, para saber de qué cónica se trata y cuáles son sus elementos, lo que se hace es agrupar los términos en x por un lado, los términos en y por otro, y completar los trinomios cuadrados perfectos que hagan falta para escribir la ecuación en la forma estándar. Esto se hizo en la sección de "Transformación de la ecuación general por traslación de los ejes". Con los siguientes ejemplos recordaremos lo que se hizo en dicha sección.

Ejemplos

1. Identificar la cónica $4x^2 - 16x + y^2 - 8y + 8 = 0$ y proporcionar sus elementos principales.

Solución:

Agrupamos los términos en x y en y; factorizamos el coeficiente de x^2 para que sea más fácil completar el cuadrado

$$4\left(x^2 - 4x\right) + \left(y^2 - 8y\right) = -8.$$

Completamos los cuadrados, recordando que debemos sumar la misma cantidad en el otro lado de la ecuación para no afectar la igualdad:

$$4\left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(y^2 - 8y + 16\right) = -8 + 16 + 16.$$

Factorizamos los cuadrados y dividimos entre el término independiente

$$\frac{(x-2)^2}{6}+\frac{(y-4)^2}{24}=1.$$

Con esta forma de la ecuación, reconocemos que se trata de una elipse vertical con centro en $C(2,4)$,

$$a=\sqrt{24}, \qquad b=\sqrt{6}, \qquad c=\sqrt{24-6}=\sqrt{18}.$$

Entonces los focos son

$$F\left(2,4+\sqrt{18}\right)\approx F(2,8.24) \qquad \text{y} \qquad F'\left(2,4-\sqrt{18}\right)\approx F'(2,-0.24),$$

y sus vértices

$$V\left(2,4+\sqrt{24}\right)\approx V(2,8.9) \qquad \text{y} \qquad V'\left(2,4-\sqrt{24}\right)\approx V'(2,-0.9).$$

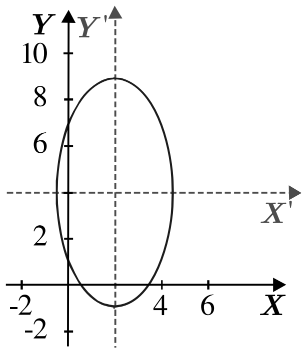


Figura 12-21

Si queremos encontrar la ecuación de la elipse con respecto a los ejes $X'Y'$, que son los trasladados de los ejes XY en el nuevo sistema con origen en $(2,4)$, aplicamos las fórmulas de traslación

$$\begin{aligned} x' &= x-2 \\ y' &= y-4, \end{aligned}$$

y sustituimos estos valores en la ecuación de la elipse para obtener

$$\frac{(x')^2}{6}+\frac{(y')^2}{24}=1.$$

2. Identificar la cónica $3x^2-9x+y-6=0$.

Solución:

Agrupamos los términos en x y factorizamos el coeficiente de x^2:

$$3\left(x^2-3x\right)+y=\ 6.$$

Completamos el cuadrado y sumamos la misma cantidad del otro lado de la ecuación

$$\begin{aligned} 3\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+y &= 6+\frac{27}{4} \\ 3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y &= 6+\frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Como sólo aparecen términos al cuadrado en x, reconocemos que la cónica es una parábola vertical y la escribimos en la forma estándar:

$$\begin{aligned} \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{1}{3}\left(-y+\frac{51}{4}\right) \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 &= -4\left(\frac{1}{12}\right)\left(y-\frac{51}{4}\right). \end{aligned}$$

De esta forma, nos damos cuenta de que la parábola abre hacia abajo, tiene su vértice en

$$V\left(\frac{3}{2},\ \frac{51}{4}\right),$$

y la distancia del vértice al foco es de $\frac{1}{12}$, así que su foco es (figura 12-22)

$$F\left(\frac{3}{2},\ \frac{51}{4}-\frac{1}{12}\right)=F\left(\frac{3}{2},\ \frac{38}{3}\right).$$

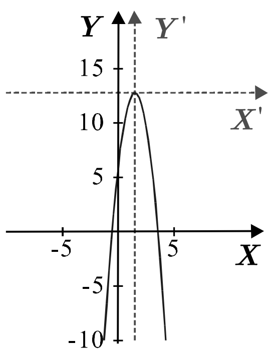


Figura 12-22

Si queremos encontrar la ecuación de la parábola con respecto al sistema trasladado cuyo origen se encuentra en su vértice $\left(\frac{3}{2}, \frac{51}{4}\right)$ y ejes sus $X'Y'$, aplicamos las fórmulas de traslación

$$\begin{aligned} x' &= x-\frac{3}{2} \\ y' &= y-\frac{51}{4} \end{aligned}$$

y sustituimos estos valores en la ecuación de la parábola, de modo que obtenemos

$$(x')^2=-4\left(\frac{1}{12}\right)(y').$$

Eliminación del término xy

Cuando en la ecuación de la cónica hay término en xy, lo que hay que hacer es girar los ejes cartesianos XY un ángulo θ adecuado para escribir la cónica con respecto a un nuevo sistema cartesiano $X'Y'$, de manera que la nueva ecuación ya no tenga término en xy.

Consideremos el lugar geométrico determinado por la ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{12.19}$$

Si giramos los ejes un ángulo θ en sentido positivo y sustituimos los valores de x y y en la ecuación (12.19), de acuerdo con las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{aligned} \tag{12.20}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} &A\left(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta\right)^2 + B\left(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta\right)\left(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta\right) + \\ &+C\left(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta\right)^2 + D\left(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta\right) + E\left(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta\right) + F = 0. \end{aligned} \tag{12.21}$$

Desarrollamos estos productos y agrupamos, y obtenemos una ecuación de la forma

$$A'\left(x'\right)^2 + B'x'y' + C'\left(y'\right)^2 + D'x' + E'y' + F = 0, \tag{12.22}$$

donde A', B', C', D', E' y F' son números que dependen de θ y de los coeficientes originales.

De momento, el único valor que nos interesa es el de B'. Los términos en $x'y'$ aparecen en los tres primeros términos del lado izquierdo de la ecuación (12.21). Al hacer las operaciones, llegamos a

$$\begin{aligned} B' &= -2A \operatorname{sen}\theta\cos\theta + B\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) + 2C \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &= B\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) - (A - C)\, 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &= B\cos 2\theta - (A - C)\operatorname{sen} 2\theta. \end{aligned} \tag{12.23}$$

Lo que deseamos es que no haya término en $x'y'$ en la nueva ecuación (12.22); entonces necesitamos que $B' = 0$, así que debemos tener

$$B\cos 2\theta - (A - C)\operatorname{sen} 2\theta = 0.$$

Para encontrar el valor de θ que resuelve la ecuación anterior, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} B\cos 2\theta - (A - C)\operatorname{sen} 2\theta &= 0 \\ B\cos 2\theta &= (A - C)\operatorname{sen} 2\theta \\ \frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} &= \frac{A - C}{B}, \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\boxed{\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}.} \tag{12.24}$$

Con ayuda de una calculadora podemos encontrar el valor de $0° < \theta < 90°$ que satisface la ecuación anterior, y luego el de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$. Finalmente sustituimos estos valores en (12.21), o lo que es lo mismo, determinamos x, y en (12.20) y sustituimos sus valores en (12.19).

Ejemplos

1. Eliminar, mediante una rotación de ejes, el término xy en la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 4$.

Solución:

Sustituimos los valores de $A = 1$, $B = -1$ y $C = 1$ en la ecuación (12.24),

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{0}{-1} = 0.$$

La cotangente de $90°$ es 0, así que $2\theta = 90°$; por tanto, $\theta = 45°$.

Como

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

sustituimos estos valores en (12.20) y obtenemos

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y', \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación original se tiene

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 = 4.$$

Efectuamos las operaciones y simplificamos

$$\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{3}{2}(y')^2 = 4,$$

dividimos entre el término independiente para escribir la ecuación en la forma simétrica:

$$\frac{(x')^2}{8} + \frac{(y')^2}{\frac{8}{3}} = 1.$$

Reconocemos que es una elipse horizontal con centro en el origen, semieje mayor igual a $\sqrt{8}$ y semieje menor igual a $\sqrt{\frac{8}{3}}$ (figura 12-23).

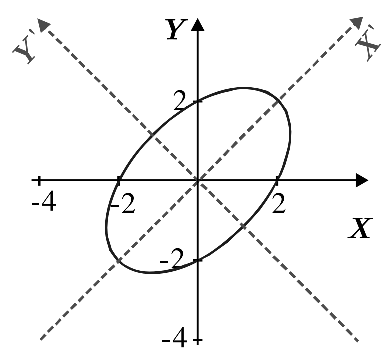


Figura 12-23

2. Identificar la cónica $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 20x - 15y - 150 = 0$ y proporcionar sus elementos principales.

Solución:

Sustituimos los valores $A = 16$, $B = 24$ y $C = 9$ en la ecuación (12.24)

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{16-9}{24} = \frac{7}{24}.$$

En lugar de usar la calculadora, observemos que esto significa que 2θ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 7 y 24. Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa vale 25 (figura 12-24).

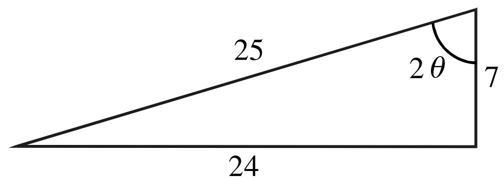


Figura 12-24

Así que

$$\cos 2\theta = \frac{7}{25}.$$

Utilizamos las fórmulas del coseno y del seno del medio ángulo

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}, \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

y llegamos a

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5} \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Sustituimos estos valores en (12.20)

$$x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \qquad y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'$$

y, haciendo los cambios en la ecuación original,

$$16\left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'\right)^2 + 24\left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'\right)\left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right) + 9\left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right)^2$$

$$-20\left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'\right) - 15\left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right) - 150 = 0.$$

Después de simplificar, obtenemos

$$(x')^2 - x' - 6 = 0.$$

Con esto hemos eliminado el término xy; ahora completamos el cuadrado de los términos en x para trasladar el origen:

$$\begin{aligned}
(x')^2 - x' &= 6 \\
(x')^2 - x' + \frac{1}{4} &= 6 + \frac{1}{4} \\
\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} \\
\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} &= 0 \\
\left(\left(x' - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2}\right)\left(\left(x' - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Esta ecuación no representa a una cónica, pues no tiene término en y'. Despejamos x' y obtenemos

$$x' - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = 0 \qquad \text{o} \qquad x' - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 0,$$

es decir,

$$x' = 3 \qquad \text{o} \qquad x' = -2,$$

que son las ecuaciones de dos rectas verticales en el plano $X'Y'$. Como los ejes $X'Y'$ se obtuvieron al hacer girar los ejes XY el ángulo θ, cuyo coseno es de $\frac{4}{5}$ ($\approx 37°$), estas rectas tienen el mismo ángulo de inclinación con respecto a los ejes XY (figura 12-25).

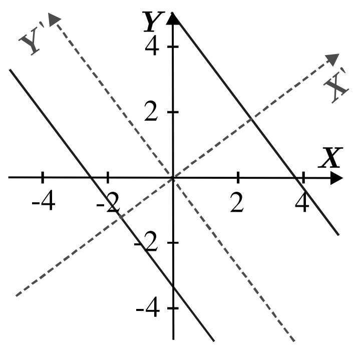


Figura 12-25

Discriminante de la ecuación general

Hemos visto que si a una ecuación general de segundo grado,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{12.25}$$

le aplicamos las fórmulas de rotación de los ejes (12.17),

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta, \end{aligned}$$

obtenemos

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0;$$

y que, para un ángulo $0° < \theta < 90°$ adecuado, podemos lograr que el coeficiente de $x'y'$ valga cero. Una vez hecho esto, podemos identificar de qué cónica se trata y cuáles son sus elementos.

Ahora queremos ver si es posible identificar la cónica dada por la ecuación (12.25), aun antes de girar los ejes cartesianos y obtener la ecuación estándar. Para ello definiremos dos números asociados con la ecuación general de segundo grado.

El número

$$\boxed{B^2 - 4AC}$$

se conoce como el *discriminante* de la ecuación (12.25) y

$$\boxed{A + C}$$

se conoce como su *traza*.

Ahora veamos que el discriminante y la traza no cambian con las rotaciones, esto es,

Teorema 1: Si

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una ecuación general de segundo grado, y

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

es la ecuación resultante después de aplicar la rotación de ejes

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta; \end{aligned}$$

entonces

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC \qquad \text{y} \qquad A' + C' = A + C.$$

Demostración: En la sección anterior (página 508) calculamos

$$B' = B\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) - 2(A - C)\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

y ahora necesitamos calcular A' y C' a partir de (12.21).

Para calcular A' nos fijamos en los términos de la ecuación (12.21) que multiplican a $(x')^2$:

$$A' = A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta,$$

de modo similar, para C' nos fijamos en los términos que multiplican a $(y')^2$:

$$C' = A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta.$$

Ahora calculemos $(B')^2 - 4A'C'$.

$$\begin{aligned}(B')^2 &= B^2(\cos^4\theta - 2\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta) + 4AB(\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos^3\theta) + \\ &\quad +4BC(\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta) + 4A^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta - 8AC\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + \\ &\quad +4C^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}4A'C' &= 4(A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta)(A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta) \\ &= 4A^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + 4AB(\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos^3\theta) + 4AC(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta) + \\ &\quad -4B^2(\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta) + 4BC(\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta) + 4C^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta,\end{aligned}$$

de donde $(B')^2 - 4A'C'$ es igual a

$$\begin{aligned}&= B^2(\cos^4\theta + 2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta) - 4AC(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta) \\ &= (B^2 - 4AC)(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)^2 = B^2 - 4AC;\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado que

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC.$$

Para demostrar la igualdad de las trazas, sumamos

$$\begin{aligned}A' + C' &= (A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta) + (A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta) \\ &= (A + C)(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = A + C,\end{aligned}$$

y queda demostrado el teorema. ∎

El discriminante nos sirve para saber qué tipo de cónica representa la ecuación (12.25).

En la sección anterior vimos que podemos elegir θ de manera que desaparezca el término en xy, es decir, podemos lograr que $B' = 0$; entonces tenemos que el discriminante de la cónica vale

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' = -4A'C',$$

y sabemos que la ecuación

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

es una elipse cuando A' y C' tienen el mismo signo, es decir, $-4A'C' < 0$; es una hipérbola cuando A' y C' tienen signo contrario, es decir, $-4A'C' > 0$; y es una parábola si alguno de los dos coeficientes A' o C' vale cero, así que, en este caso, $-4A'C' = 0$.

Hemos probado que si

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es la ecuación de una cónica, entonces:

- Cuando $B^2 - 4AC < 0$, la cónica es una elipse.
- Cuando $B^2 - 4AC > 0$, la cónica es una hipérbola.
- Cuando $B^2 - 4AC = 0$, la cónica es una parábola.

Ejercicios

En cada caso, determina la rotación de ejes que debe aplicarse para eliminar el término en xy.

1. $xy = 3.$

2. $9x^2+24xy+2y^2+75x-40y-194=0.$

3. $8x^2+8xy+2y^2-3x-7y-5=0.$

4. $2x^2-5xy+2y^2+8x+6y-10=0.$

5. $4xy+3x^2=5.$

6. $25x^2-120xy+144y^2-156x-65y=0.$

Analiza el discriminante y determina si la ecuación dada representa una parábola, una elipse o una hipérbola.

7. $3x^2+2xy+3y^2-8x-8y=0.$

8. $-x^2+2xy+y^2-6x-14y+39=0.$

9. $5x^2+4y^2-2x+4y-24=0.$

10. $x^2-2xy+8y^2-12x-64y+148=0.$

11. $3xy-2x+y-1=0.$

12. $8x^2-24xy+15y^2+4y-4=0.$

13. $xy-20=0.$

14. $x^2+4xy+4y^2-6x+10y-1=0.$

En cada caso, aplica la rotación de ejes adecuada para eliminar el término xy, determina el tipo de cónica de que se trata y dibújala.

15. $3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2+8\left(1-2\sqrt{3}\right)x+8\left(\sqrt{3}+2\right)y+64=0.$

16. $11x^2+122xy+11y^2+366\sqrt{2}x+66\sqrt{2}y-1602=0.$

17. $13x^2-10xy+13y^2-114\sqrt{2}x+66\sqrt{2}y+450=0.$

18. $27x^2-18\sqrt{3}xy+9y^2+12\left(2-9\sqrt{3}\right)x+12\left(9+2\sqrt{3}\right)y+244=0.$

19. Encuentra en el sistema XY la ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$ a la cónica $5x^2-26xy+5y^2-46\sqrt{2}x+62\sqrt{2}y+226=0$. **Sugerencia:** Aplica una rotación de ejes adecuada para que desaparezca el término xy. Determina las nuevas coordenadas de P y encuentra la ecuación de la recta tangente en el sistema $X'Y'$; posteriormente, deberás tomar la rotación de ejes inversa, es decir, la que regresa al sistema original, y cambiar la ecuación de la recta tangente a este sistema.

La recta tangente a una cónica

- La ecuación estándar de una parábola horizontal es

$$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)\,,$$

y la ecuación de la recta tangente a esta parábola en el punto $P\,(x_1, y_1)$ en su forma punto-pendiente es

$$y - y_1 = \frac{y_1 - k}{2\,(x_1 - h)}\,(x - x_1)\,.$$

Veremos cómo obtener la ecuación de la recta tangente a partir de escribir la ecuación de la parábola en su forma general.

Escribimos la ecuación de la parábola horizontal en la forma general:

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0,$$

y la ecuación de la tangente es

$$y_1 y - 2p(x + x_1) - k(y + y_1) + k^2 + 4ph = 0. \tag{12.26}$$

Como el punto $P(x_1, y_1)$ está en la parábola, tenemos

$$(y_1 - k)^2 = 4p(x_1 - h),$$

de donde

$$\frac{y_1 - k}{2(x_1 - h)} = \frac{2p}{y_1 - k}.$$

Al sustituir este valor en la ecuación punto-pendiente de la recta tangente, obtenemos

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1 - k}(x - x_1).$$

Al despejar se llega a la ecuación

$$y_1 y - ky - y_1^2 + ky_1 - 2px + 2px_1 = 0,$$

y agrupando

$$y_1 y - 2p(x - x_1) - k(y - y_1) - y_1^2 = 0. \tag{12.27}$$

Como

$$\begin{aligned} y_1^2 &= ((y_1 - k) + k)^2 \\ &= (y_1 - k)^2 + 2k(y_1 - k) + k^2 \end{aligned}$$

y

$$(y_1 - k)^2 = 4p(x_1 - h),$$

se tiene

$$\begin{aligned} y_1^2 &= 4p(x_1 - h) + 2k(y_1 - k) + k^2 \\ &= 4px_1 - 4ph + 2ky_1 - k^2. \end{aligned}$$

Sustituimos en (12.27)

$$\begin{aligned} y_1 y - 2p(x - x_1) - k(y - y_1) - 4px_1 + 4ph - 2ky_1 + k^2 &= 0 \\ y_1 y - 2p(x + x_1) - k(y + y_1) + k^2 + 4ph &= 0. \end{aligned}$$

De manera similar obtenemos las expresiones de las rectas tangentes en los siguientes dos casos.

- La ecuación simétrica de una elipse horizontal es
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$
y la ecuación de la recta tangente en $P(x_1,y_1)$ es
$$\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1.$$
Escribimos ambas ecuaciones en la forma general y tenemos la ecuación de la elipse:
$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0,$$
y la ecuación de la tangente en $P(x_1,y_1)$:
$$b^2x_1x+a^2y_1y-b^2h(x+x_1)-a^2k(y_1+y)+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0. \tag{12.28}$$
- La ecuación simétrica de una hipérbola horizontal es
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$
y la ecuación de la recta tangente en $P(x_1,y_1)$ es
$$\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}-\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1.$$
Escribimos ambas ecuaciones en la forma general y tenemos la ecuación de la hipérbola:
$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2hx+2a^2ky+b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2=0,$$
y la ecuación de la recta tangente en $P(x_1,y_1)$ es
$$b^2x_1x-a^2y_1y-b^2h(x+x_1)+a^2k(y_1+y)+b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2=0. \tag{12.29}$$

Ahora analicemos cómo obtener la ecuación de la tangente, en $P(x_1,y_1)$, a una cónica a partir de la ecuación general de ésta:
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$
La escribimos como
$$Axx+B\left(\frac{xy+yx}{2}\right)+Cyy+D\left(\frac{x+x}{2}\right)+E\left(\frac{y+y}{2}\right)+F=0$$
y sustituimos una de las x por x_1 y una de las y por y_1, de la siguiente manera:
$$Ax_1x+B\left(\frac{x_1y+y_1x}{2}\right)+Cy_1y+D\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+E\left(\frac{y+y_1}{2}\right)+F=0.$$
Esta ecuación fue la que se obtuvo en (12.26), (12.28) y (12.29) y, en cada caso, es la ecuación de la recta tangente a la cónica correspondiente en el punto considerado.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la cónica $x^2-y^2+16x+6y+56=0$ en el punto $P(-8,4)$.

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la cónica en el punto $P(x_1, y_1)$ es

$$xx_1 - yy_1 + 16\left(\frac{x + x_1}{2}\right) + 6\left(\frac{y + y_1}{2}\right) + 56 = 0$$

entonces, la recta tangente a la cónica en el punto $P(-8, 4)$ es

$$\begin{aligned} x(-8) - y(4) + 8(x - 8) + 3(y + 4) + 56 &= 0 \\ -y + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y - 4 = 0$. Compara este resultado con el de la página 476 (capítulo 11).

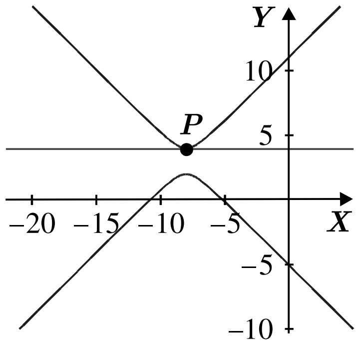


Figura 12-26

2. La ecuación de una cónica es $2x^2 + 6xy + 8y^2 - 2x + y - 1 = 0$; encontrar la ecuación de la recta tangente a ella en el punto $P(1, -1)$.

Solución:

La ecuación de la cónica en el punto $P(x_1, y_1)$ es

$$2x_1x + 6\left(\frac{x_1y + y_1x}{2}\right) + 8y_1y - 2\left(\frac{x + x_1}{2}\right) + \left(\frac{y + y_1}{2}\right) - 1 = 0;$$

por tanto, la ecuación de la recta tangente en el punto $P(1, -1)$ es (figura 12-27)

$$\begin{aligned} 2x_1x + 3(x_1y + y_1x) + 8y_1y - x - x_1 + \left(\frac{y + y_1}{2}\right) - 1 &= 0 \\ 2(1)x + 3((1)y + (-1)x) + 8(-1)y - x - 1 + \left(\frac{y - 1}{2}\right) - 1 &= 0 \\ -2x - \frac{9}{2}y - \frac{5}{2} &= 0 \\ 4x + 9y + 5 &= 0. \end{aligned}$$

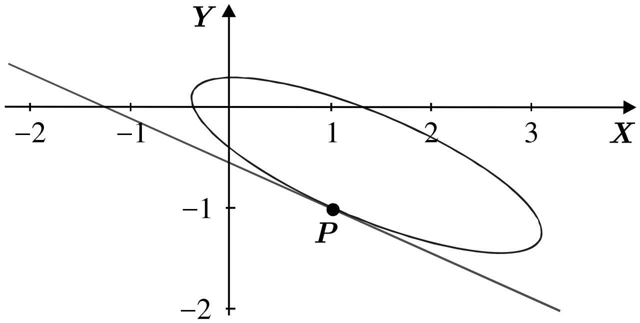


Figura 12-27

Ejercicios

1. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la cónica $xy = 6$ en el punto $P\left(5, \frac{6}{5}\right)$. Identifica la curva, aplica la rotación de ejes que haga que el término xy desaparezca. Dibuja la cónica.

2. Encuentra la ecuación de la recta tangente a $4x^2 - 12xy - 9y^2 + 6x - 3y + 8 = 0$ en el punto $P\,(2, -4)$. Usa el discriminante para determinar de qué tipo de cónica se trata.

3. Encuentra la ecuación de la recta tangente a $4x^2 + 12xy - y^2 - x - 10y - 6 = 0$ en el punto $P\,(3, -1)$. Usa el discriminante para determinar de qué tipo de cónica se trata y encuentra la rotación de ejes que elimina el término xy de la ecuación.

Resumen

- Si e es la excentricidad de una cónica:

  - Si $e = 1$, es una parábola.
  - Si $e < 1$, es una elipse.
  - Si $e > 1$, es una hipérbola.

- Si $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es la ecuación de una cónica, entonces

  - Cuando $B^2 - 4AC < 0$, se trata de una elipse.
  - Cuando $B^2 - 4AC > 0$, se trata de una hipérbola.
  - Cuando $B^2 - 4AC = 0$, se trata de una parábola.

- La ecuación de la recta tangente a la cónica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en el punto $P\,(x_1, y_1)$ es $Axx_1 + B\left(\dfrac{xy_1 + x_1y}{2}\right) + Cyy_1 + D\left(\dfrac{x + x_1}{2}\right) + E\left(\dfrac{y + y_1}{2}\right) + F = 0.$

Ejercicios de repaso

En cada caso, aplica la rotación de ejes adecuada para eliminar el término xy, y determina el tipo de cónica.

1. $109x^2 + 70\sqrt{3}xy + 39y^2 + 24\left(1 - 18\sqrt{3}\right)x - 24\left(\sqrt{3} + 18\right)y + 1296 = 0.$
2. $3x^2 - 5xy - 9y^2 + 32x - 161 = 0.$
3. De acuerdo con k, determina qué tipo de cónica representa la ecuación $kx^2 + 5xy + 3y^2 - 6x + 3y - 15 = 0.$
4. Encuentra la ecuación de la recta tangente a $-3x^2 + 4xy - 6y^2 + 16x + 24y - 18 = 0$ en el punto $P(0, 3)$. Identifica la cónica, aplica la rotación de ejes que haga que el término xy desaparezca, encuentra los elementos y dibuja la cónica.
5. Traslada los ejes de coordenadas para que el punto de intersección de las rectas $6x+4y+2 = 0$ y $-x+5y-23 = 0$ sea el origen del nuevo sistema de coordenadas, y encuentra las ecuaciones de las dos rectas correspondientes en dicho sistema.
6. Encuentra la ecuación de la cónica en la que se encuentran los puntos que satisfacen la ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$ y di qué tipo de cónica es. **Sugerencia:** Eleva dos veces al cuadrado.
7. Encuentra las XY coordenadas de los vértices de la elipse $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0.$
8. Encuentra las XY coordenadas de los focos de la hipérbola $x^2+24xy-6y^2+4x+48y+34 = 0.$

Ejercicios con Geolab

Geolab permite construir transformaciones rígidas (reflexiones con respecto a una recta, traslaciones y rotaciones) que pueden aplicarse a uno o varios objetos.

Aplicar una traslación a una cónica en Geolab corresponde a trasladar los ejes en sentido contrario.

Aplicar una rotación con centro en el origen a una cónica en Geolab corresponde a girar los ejes el mismo ángulo pero en sentido contrario.

1. **Traslaciones**. Construye la cónica W cuya ecuación es $16x^2 + 25y^2 - 32x + 150y - 159 = 0.$ Para ello, utiliza la construcción de *Cónica calculada*. En la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor sobre el renglón donde están los datos de la cónica y oprime el botón **Datos**. Observa que la pantalla indica que el centro de la cónica está en $(1, -3)$.

   Construye una traslación que manda el punto $(1, -3)$ al origen, para ello define los puntos $C(1, -3)$ y $O(0, 0)$ y después define la traslación T que manda el punto C al punto O.

   Construye la cónica trasladada S, e indica que es la imagen de W bajo la transformación T.

   ¿Qué ecuación tiene S? Comprueba que esta ecuación es la misma que obtienes si haces el cambio de variables $x = x' - 1$, $y = y' + 3$ en la ecuación original.

2. **Traslaciones.** Haz un ejercicio similar al anterior, pero con la ecuación $y^2 - 8y - 4x + 8 = 0$ que corresponde a una parábola. Construye la traslación que manda el vértice de la parábola al origen.

3. **Rotaciones**. Construye la cónica Q cuya ecuación es $\frac{43}{4}x^2 - \frac{7}{2}\sqrt{3}xy + \frac{57}{4}y^2 - 144 = 0$. Para ello, utiliza la construcción de *Cónica calculada*. En la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor sobre el renglón donde están los datos de la cónica y oprime el botón **Datos**. Observa que la pantalla indica que el centro de la cónica está en el origen y el ángulo que tiene, con respecto al eje X, es de 0.523599 radianes.

   Construye una rotación R con centro en el origen y ángulo igual a -0.523599 radianes. Para ello, define el punto $O\,(0, 0)$ y el ángulo $a = -0.523599$ radianes y luego construye la rotación.

   Construye la cónica girada U, e indica que es la imagen de Q bajo la transformación R.

   ¿Qué ecuación tiene U ?, ¿la ecuación tiene término xy?, ¿qué ángulo tiene con respecto al eje X ?

   El ángulo 0.523599 radianes es igual a 30°. Comprueba que obtienes la misma ecuación si haces el cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= x' \cos 30^\circ - y' \operatorname{sen} 30^\circ \\ y &= x' \operatorname{sen} 30^\circ + y' \cos 30^\circ. \end{aligned}$$

4. **Rotaciones y traslaciones**. Construye la cónica $5x - 2y + xy - 11 = 0$.

   Con las ideas del ejercicio 3, gira la cónica para que sus ejes queden paralelos a los ejes cartesianos y, después, trasládala para que su centro quede en el origen de coordenadas.

5. **Rotaciones y traslaciones**. Usa la misma cónica que en el ejercicio anterior, pero ahora traslada primero el centro de la cónica al origen y después gírala para que sus ejes coincidan con los ejes de coordenadas.

   ¿Utilizaste las mismas rotaciones y traslaciones que en el ejercicio 4?

Apéndice A

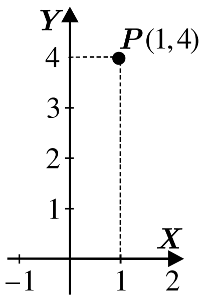
Respuestas a los ejercicios impares

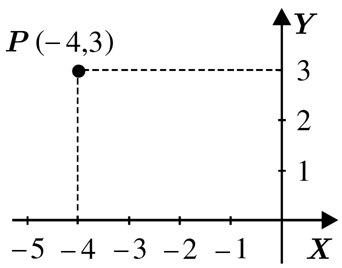
Capítulo 1 Relaciones y funciones

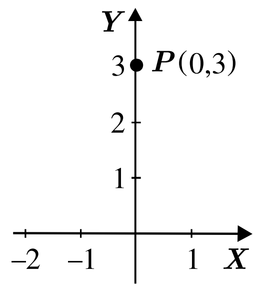
Ejercicios de la página 3

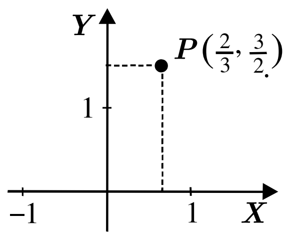
1. $A \times B = \{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(1,1),(1,2),(1,3),(0,1),(0,2),(0,3)\}$.
3. $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(1,1)\}$. **5.** $A \times B = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c)\}$.
7. $B \times A = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,a),(c,b)\}$.
9. $A \times (B \cup C) = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c)\}$.
11. $A \times (B \cup C) = \{(-2,a),(-2,b),(-2,3),(a,a),(a,b),(a,3),(z,a),(z,b),(z,3)\}$.
13. $B \times A = \{(1,-1),(1,-2),(1,-3),(2,-1),(2,-2),(2,-3),(3,-1),(3,-2),(3,-3)\}$.
15. $B \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$. **17.** $A = B$.

Ejercicios de la página 8

1. 

3. 

5. 

7. 

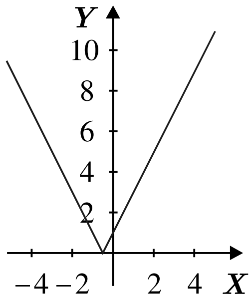
Ejercicios de la página 24

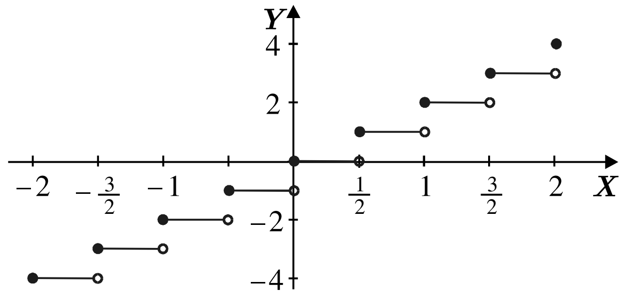
1. No es la gráfica de una función. **3.** Sí es la gráfica de una función. **5.** No es la gráfica de una función. **7.** No es la gráfica de una función. **9.** $f(-3) = 64$. **11.** $h(0) = 1$. **13.** $f(-2) = 1$. **15.** $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{13}$. **17.** $h(-6) = \frac{35}{19}$. **19.** $f(x-1) = 4x^2 - 9x - 16$. **21.** $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{9}{x^2} - \frac{19}{x} + 29$. **23.** $g(x^2) = \frac{2x^4 - 11x^2 + 25}{x^2}$. **25.** $h\left(\frac{1}{x+3}\right) = \sqrt{25 - \left(\frac{1}{x+3}\right)^2}$. **27.** $g(x^2+1) = \frac{x^4 - 7x^2 + 28}{\sqrt{5 - (x^2+1)^2}}$. **29.** $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x+1}{9x+8}$. **31.** $f(-8) = -16$, $f(-4) = -12$, $f(0) = -1$, $f(10) = 22$, $f(-7.5) = -15.5$. **33.** $h(-4) = 0$, $h(1) = 14$, $h\left(\frac{5}{3}\right) = 14$, $h(-6) = 20$, $h(0) = -16$. **35.** $f(-12) = \sqrt{147}$, $f(-2) = 28$, $f(4) = -8$, $f(9) = 0$, $f(6)$ no está definido.

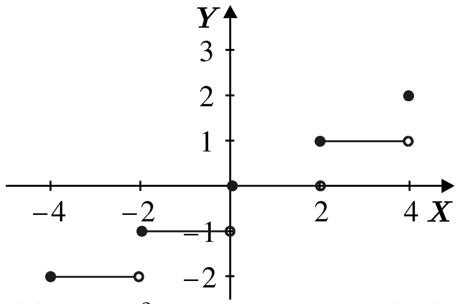
Ejercicios de la página 28

1.$Dom f = \mathbb{R}$. **3.** $Dom f = \mathbb{R}$. **5.** $Dom f = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$. **7.** $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{-4,4\}$. **9.** $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. **11.** $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{-6,1\}$. **13.** $Dom f = (-\infty,-5] \cup [2,\infty)$. **15.** $Dom f = (-\infty,6) \cup (8,\infty)$. **17.** $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{-12,12\}$. **19.** No son iguales. **21.** Sí son iguales.

Ejercicios de la página 39

1. 

3. 

5. 

7. $(f+g)(x) = 15x+2$, $Dom\ (f+g) = \mathbb{R}$; $(fg)(x) = 56x^2+13x-3$, $Dom\ (fg) = \mathbb{R}$. **9.** $(f+g)(x) = x^3-4x-8$, $Dom\ (f+g) = \mathbb{R}$; $(fg)(x) = 2x^5-8x^4+20x^3-64x^2+80x-240$, $Dom\ (fg) = \mathbb{R}$. **11.** $(f+g)(x) = \sqrt{x+5}+\frac{x}{x^2-4}$. $Dom\ (f+g) = [-5,\infty)\setminus\{-2,2\}$; $(fg)(x) = \frac{x\sqrt{x+5}}{x^2-4}$. $Dom\ (fg) = [-5,\infty)\setminus\{-2,2\}$. **13.** $(f+g)(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}+\frac{x-9}{\sqrt{16-x^2}}$. $Dom\ (f+g) = (-4,-3)\cup(3,4)$; $(fg)(x) = \frac{x^2-8x-9}{\sqrt{(x^2-9)(16-x^2)}}$. $Dom\ (fg) = (-4,-3)\cup(3,4)$. **15.** $(f+g)(x) = \begin{cases} 6x-2 & \text{si } x\in(-10,-5) \\ 17x-1 & \text{si } x\in[6,15] \end{cases}$. $Dom\ (f+g) = (-10,-5)\cup[6,15]$; $(fg)(x) = \begin{cases} 8x^2+6x-35 & \text{si } x\in(-10,-5) \\ 72x^2-11x-6 & \text{si } x\in[6,15] \end{cases}$. $Dom\ (fg) = (-10,-5)\cup[6,15]$. **17.** $(f+g)(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x\in\left[-2,-\frac{3}{2}\right) \\ -5 & \text{si } x\in\left[-\frac{3}{2},-1\right) \\ -3 & \text{si } x\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right) \\ -2 & \text{si } x\in\left[-\frac{1}{2},0\right) \end{cases}$, $Dom\ (f+g) = [-2,0)$; $(fg)(x) = \begin{cases} 8 & \text{si } x\in\left[-2,-\frac{3}{2}\right) \\ 6 & \text{si } x\in\left[-\frac{3}{2},-1\right) \\ 2 & \text{si } x\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right) \\ 1 & \text{si } x\in\left[-\frac{1}{2},0\right) \end{cases}$, $Dom\ (fg) = [-2,0)$. **19.** $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{7x+15}$, $Dom\ \frac{1}{f} = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{15}{7}\right\}$. **21.** $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2+7x-8}$, $Dom\ \frac{1}{f} = \mathbb{R}\setminus\{-8,1\}$. **23.** $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}$, $Dom\ \frac{1}{f} = (-10,10)$. **25.** $\frac{1}{f(x)} = \frac{x+2}{x^2-9x+18}$, $Dom\ \frac{1}{f} = \mathbb{R}\setminus\{-2,3,6\}$. **27.** $\frac{1}{f(x)} = \frac{3x^2-19x+28}{2x^2+23x-12}$, $Dom\ \frac{1}{f} = \mathbb{R}\setminus\left\{-12,\frac{1}{2},\frac{7}{3},4\right\}$. **29.** $\frac{1}{f(x)} = \sqrt{\frac{x^2+3x-28}{x^2+3}}$, $Dom\ \frac{1}{f} = (-\infty,-7)\cup(4,\infty)$. **31.** $(f-g)(x) = 5x^2-x+8$, $Dom\ (f-g) = \mathbb{R}$;

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{5x^2-1}{x-9}$, $Dom\ \left(\frac{f}{g}\right)=\mathbb{R}\diagdown\{9\}$. **33.** $(f-g)(x)=\frac{8x-8}{x^2-16}$, $Dom\ (f-g)=\mathbb{R}\diagdown\{-4,4\}$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{3x-2}{x}$, $Dom\ \left(\frac{f}{g}\right)=\mathbb{R}\diagdown\{-4,0,4\}$. **35.** $(f-g)(x)=\left(\frac{x^2+15x+50}{\sqrt{x^2-10x-11}}\right)-\left(\frac{x^2+5x-50}{\sqrt{14-x}}\right)$, $Dom\ (f-g)=(-\infty,-1)\cup(11,14)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{(x+5)\sqrt{14-x}}{(x-5)\sqrt{x^2-10x-11}}$, $Dom\ \left(\frac{f}{g}\right)=(-\infty,-10)\cup(-10,-1)\cup(11,14)$.

Ejercicios de la página 52

1. $(f\circ g)(x)=-30x+9$, $Dom\ (f\circ g)=\mathbb{R}$. $(g\circ f)(x)=-30x-23$, $Dom\ (g\circ f)=\mathbb{R}$. **3.** $(f\circ g)(x)=16x^4+112x^3+196x^2+7$, $Dom\ (f\circ g)=\mathbb{R}$. $(g\circ f)(x)=4x^4+70x^2+294$, $Dom\ (g\circ f)=\mathbb{R}$. **5.** $(f\circ g)(x)=\frac{x+2}{-7x+2}$, $Dom\ (f\circ g)=\mathbb{R}\diagdown\left\{0,\frac{2}{7}\right\}$.$(g\circ f)(x)=\frac{3x-16}{x}$, $Dom\ (g\circ f)=\mathbb{R}\diagdown\{0,8\}$. **7.** $(f\circ g)(x)=x+10$, $Dom\ (f\circ g)=[-9,\infty)$. $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2+10}$, $Dom\ (g\circ f)=\mathbb{R}$. **9.** $(f\circ g)(x)=\frac{5x^2-3x}{\sqrt{5x^2-3x-1}}$, $Dom\ (f\circ g)=\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{29}}{10}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{29}}{10},\infty\right)$. $(g\circ f)(x)=\frac{5x^2}{x-1}-\frac{3x}{\sqrt{x-1}}$, $Dom\ (g\circ f)=(1,\infty)$. **11.** $(f\circ g)(x)=\frac{\left(\frac{6x}{\sqrt{x-6}}\right)+8}{\sqrt{\left(\frac{6x}{\sqrt{x-6}}\right)+14}}$, $Dom\ (f\circ g)=(6,\infty)$. $(g\circ f)(x)=\frac{6\left(\frac{x+8}{\sqrt{x+14}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x+8}{\sqrt{x+14}}\right)-6}}$, $Dom\ (g\circ f)=\left(10+6\sqrt{15},\infty\right)$. **13.** $(f\circ g)(x)=x+14$ si $x\in[-1,0]$; $(g\circ f)(x)=x-9$ si $x\in(2,4]$. **15.** $(f\circ g)(x)=\begin{cases}\frac{1}{6x-9} & \text{si } x\in\left[\frac{5}{3},2\right)\\ 36x^2-108x+81 & \text{si } x\in\left(-\frac{1}{6},\frac{5}{3}\right)\\ \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x\in\left[2,\sqrt{11}\right]\end{cases}$.
$(g\circ f)(x)=\begin{cases}\frac{6-9x}{x} & \text{si } x\in[1,12]\\ 6x^2-9 & \text{si } x\in\left(-\sqrt{2},1\right)\\ x^4+1 & \text{si } x\in\left[-\sqrt{15},-\sqrt{2}\right]\end{cases}$. **17.** $g(y)=\frac{y-7}{6}$, $Dom\ g=\mathbb{R}$. **19.** $g(y)=-y+\frac{7}{5}$, $Dom\ g=\mathbb{R}$. **21.** $g(y)=y^2-4$, $Dom\ g=[0,\infty)$.

Capítulo 2 La trigonometría

Ejercicios de la página 58

1. $5^\circ\ 25'\ 36''$. **3.** $106^\circ\ 33'\ 36''$. **5.** $327^\circ\ 8'\ 52''$. **7.** 56.4855°. **9.** 204.2921°. **11.** 73.2324°. **13.** 2110 minutos. **15.** $277^\circ\ 46'\ 48''$. **17.** 1 radián $\approx$ 206 244 segundos. **19.** 60°. **21.** 36°. **23.** 25.714°. **25.** $\frac{\pi}{12}$ radianes. **27.** $\frac{\pi}{5}$ radianes. **29.** $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Ejercicios de la página 63

1. El cateto mayor es $\sqrt{3}$ veces el cateto menor.

Ejercicios de la página 71

1. $a=2$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{7}$; $A\approx 49.11^\circ$, $B\approx 40.89^\circ$, $C=90^\circ$. **3.** $a=6$, $b=6\sqrt{3}$, $c=12$; $A=30^\circ$, $B=60^\circ$, $C=90^\circ$. **5.** $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{6}$; $A=45^\circ$, $B=45^\circ$, $C=90^\circ$. **7.** $a\approx 2.07$, $b\approx 2.59$, $c=\sqrt{11}$; $A=\frac{3\pi}{14}$, $B=\frac{2\pi}{7}$, $C=\frac{\pi}{2}$. **9.** No se puede construir un triángulo con estos datos. **11.** Hipotenusa ≈ 20.23, cateto opuesto ≈ 19.24. **13.** **a)** $\angle OAB=45^\circ$.

b) Perímetro $= 16\sqrt{2}$ cm. **15.** Tirante ≈ 7.31 m. **17.** Ángulo $\approx 71.57°$. **19.** El área del heptágono es mayor. **21.** Ancho ≈ 11 m. **23.** Muralla ≈ 16.49 m. **25.** Radio ≈ 5 cm. **27.** La resbaladilla no cabe en el jardín.

Ejercicios de la página 78

1.

Radianes	Grados	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	■	1	■
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	■	0	■	1
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
π	180°	0	-1	0	■	-1	■
$\frac{7\pi}{6}$	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2
$\frac{5\pi}{4}$	225°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	■	0	■	-1
$\frac{5\pi}{3}$	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{7\pi}{4}$	315°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2
2π	360°	0	1	0	■	1	■

3. 1. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ejercicios de la página 86

21. $\frac{7}{6}\pi$ **23.** $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, $\alpha = \frac{7\pi}{4}$. **25.** $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

Ejercicios de la página 91

1. $-\cos\alpha$. **3.** $\operatorname{sen}\alpha$. **5.** $\cos\alpha$. **7.** $\operatorname{sen}\alpha$. **9.** $\cos\alpha$. **11.** $\frac{1}{2}$. **13.** $\frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$. **15.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ejercicios de la página 97

1. $A = 54°$, $B \approx 30°$, $C \approx 96°$, $a = 8$, $b = 5$, $c \approx 9.83$. **3.** $A \approx 56.1°$, $B = 12°$, $C \approx 111.9°$, $a = 12$, $b = 3$, $c \approx 13.39$, o bien, $A \approx 123.9°$, $B = 12°$, $C \approx 44.1°$, $a = 12$, $b = 3$, $c \approx 10$. **5.** No es posible construir un triángulo con estos datos. **7.** Base ≈ 231.49 m, altura ≈ 148.15 m. **9.** Radio ≈ 3.66 m. **11.** Distancia ≈ 263.07 km. **13.** El rayo recorrió ≈ 199.48 cm.

Ejercicios de la página 103

1. $A \approx 36.87°$, $B \approx 53.13°$, $C = 90°$. **3.** $A \approx 30°$, $B \approx 20°$, $C = 130°$, $a = 15$, $b = 10$, $c \approx 22.76$. **5.** $A = 120°$, $B = 30°$, $C = 30°$, $a \approx 12.12$, $b = 7$, $c = 7$. **7.** No es posible construir un triángulo con estos datos. **9.** $A \approx 34.75°$, $B = 85°$, $C \approx 60.25°$, $a = 12.20$, $b \approx 21.46$, $c = 18.75$. **11.** Altura ≈ 66.22 m. **13.** Área ≈ 61.60 cm^2. **15.** Largo de la ventana ≈ 128.20 cm. **17.** Ancho del cráter ≈ 23.76 m. **19. a)** Longitud de $DC \approx 4.54$. **b)** Longitud de $AB \approx 8.01$. **c)** Perímetro $ABC \approx 20.09$. **d)** Área $ABC \approx 11.84$. **21.** El comprador deberá pagar \$129 000.00. **23.** Es un triángulo isósceles o un triángulo rectángulo.

Ejercicios de la página 108

1. Área $= 12\sqrt{5}$. **3.** Área ≈ 92.35. **5.** Área ≈ 423. **7.** Área ≈ 0.62. **9.** Área ≈ 1.48.

Ejercicios de repaso de la página 122

3. $\alpha = 30°$, $\alpha \approx -19.47°$. **5.** La sombra mide 9 m y es $\frac{3}{4}$ de la altura del poste. **7.** Perímetro $= 5n\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{360°}{n}\right)\right)}$. **9.** Área ≈ 56.68 cm^2. **11.** Área $\approx 0.74r^2$. **13.** Distancia ≈ 6.24 cm. El ángulo formado por el tomo I y el II es 12°. **15.** Triángulo ABC: $AB = BC = 2$ cm, $CA \approx 3.24$ cm; triángulo ACD: $AC = AD \approx 3.24$ cm, $CD = 2$ cm; triángulo ADE: $AE = ED = 2$ cm, $AD \approx 3.24$ cm; área del pentágono ≈ 6.88 cm^2.

Capítulo 3 Logaritmos y exponenciales

Ejercicios de la página 139

1. $\sqrt[6]{18432}$. **3.** $\sqrt[6]{16464}$. **5.** $\sqrt[12]{186624}$. **7.** $\sqrt{3}$. **9.** $\sqrt[10]{3}$.

Ejercicios de la página 148

1. 6. **3.** 1. **5.** 4. **7.** 0. **9.** 2. **11.** 3. **13.** -2. **15.** -6. **17.** 7. **19.** 10. **21.** 2^8. **23.** 5^{-3}. **25.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$. **27.** $Dom f = (-10, \infty)$. **29.** $Dom f = (0, \infty)$. **31.** $Dom f = (-\infty, 1) \cup (8, \infty)$. **33.** $Dom f = (-8, \infty)$. **35.** $Dom f = (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$. **37.** $\frac{\ln(6)+\ln(5)}{\ln(6)+\ln(2)}$. **39.** $-\frac{\ln(13)}{\ln(5)} - 1$. **41.** $\frac{\ln(\pi)+\ln(2)}{\ln(\pi)-\ln(2)}$.

Ejercicios de la página 150

1. $x = \frac{8}{25}$. **3.** $x = -5$, $x = 9$. **5.** $x = -3$, $x = 3$. **7.** $x = -1 - 2\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)$. **9.** $x = 5$. **11.** $x = 3$. **13.** $x = 331$. **15.** $x = 0$. **17.** $x = \frac{1}{2}$. **19.** No tiene solución. **21.** $x = 0$. **23.** $x = 4$. **25.** $x = 3$. **27.** $x = 3$. **29.** $x = \frac{3}{2}$.

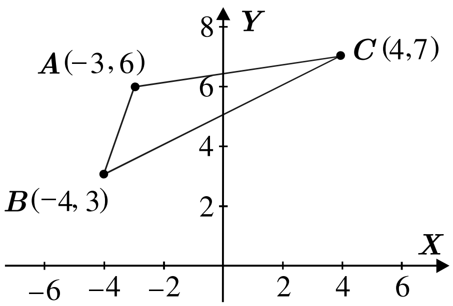
Ejercicios de la página 155

1. Habrá que invertir durante 24 años para garantizar que la inversión se duplique. No importa cuál sea el monto que se invierta, para duplicarlo habrá que invertirlo 24 años. **3.** Es mejor invertir con la tasa señalada en el inciso **a)**. **5.** El interés era de aproximadamente el 7.18%. **7.** Deben pasar 64×10^{-5} segundos para que queden 512 gramos de polonio 214. **9.** Una semana después habrá aproximadamente 5.7×10^{23} bacterias. **11.** Después de 205 800 años quedarán aproximadamente 1.56 gramos de protactinio 231. **13.** El tiempo que debe pasar es aproximadamente de 128 días. **15.** En el cuerpo del bebé quedan aproximadamente 1.56 microgramos después de 24 horas.

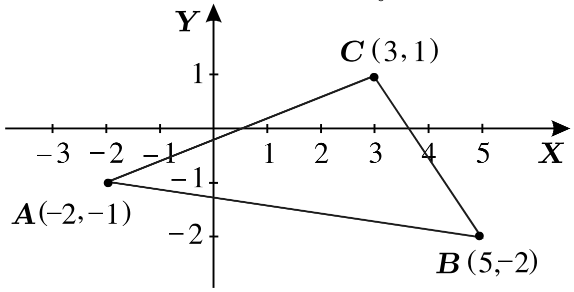
Capítulo 4 Segmentos dirigidos

Ejercicios de la página 166

1. $\sqrt{29}$. **3.** $\sqrt{117}$. **5.** $\sqrt{90}$. **7.** $\sqrt{13}$. **9.** 3. **11.** $\sqrt{72}$. **13.** El punto del eje Y que equidista de $A\,(5,5)$ y de $B\,(4,2)$ es $C\,(0,5)$. Es un triángulo isósceles. **15.** La ordenada del punto de abscisa -1 que equidista de los puntos $A\,(6,8)$ y $B\,(-3,4)$ es $\frac{93}{8}$. **17.** La longitud del lado AB es $\sqrt{10}$, la del lado BC es $\sqrt{80}$ y la del lado CA es $\sqrt{50}$.



19.



La longitud del lado AB es $\sqrt{50}$, la longitud del lado BC es $\sqrt{13}$ y la longitud del lado CA es $\sqrt{29}$. **21.** El lado AB es igual al lado BC y su longitud es $\sqrt{40}$. **23.** La longitud de la diagonal DB es igual a la de la diagonal CA y ambas miden 10.

Ejercicios de la página 182

1. $\left(\frac{1}{2},0\right)$. **3.** $\left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right)$. **5.** $(-1,4)$. **7.** $\left(-\frac{11}{12},\frac{15}{8}\right)$. **9.** $\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{48}\right)$. **11.** Las coordenadas del otro extremo son $Q\,(-7,2)$. **13.** Las coordenadas de R son $\left(\frac{14}{11},\frac{37}{11}\right)$. **15.** $R\,(-4,0)$, $S\,(-3,2)$ y $T\,(-2,4)$. **17.** $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$, la longitud del segmento que une a A con M es $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **19.** Los vértices del triángulo nuevo son $A'\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B'\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y $C'\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; el triángulo $A'B'C'$ es equilátero y sus lados miden $\frac{1}{2}$ cada uno. Los lados del triángulo original miden 1 cada uno. **21.** El punto de apoyo debe colocarse a $\frac{45}{4}=11.25$ centímetros del extremo izquierdo.

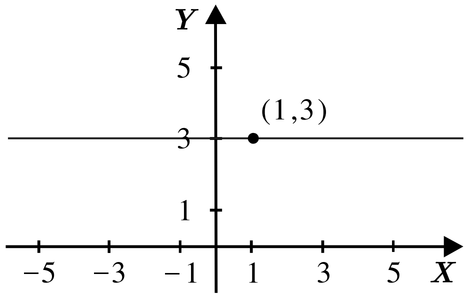
Ejercicios de repaso de la página 183

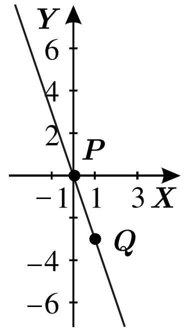
1. Hay dos puntos que cumplen con las condiciones dadas, $Q_1\,(5,-4)$ y $Q_2\,(5,20)$. **3.** El punto buscado es $P\,(3,4)$. **5.** $E\,(1,1)$, $D\,(4,3)$, la longitud de ED es $\sqrt{13}$ y la longitud de ED es la mitad de la longitud de BC que es $2\sqrt{13}$. **7.** Las coordenadas de R son $\left(4,\frac{143}{14}\right)$. **9. a)** $R\left(\frac{7}{3},1\right)$. **b)** El punto medio de un segmento divide a éste en la razón $\frac{1}{2}$. Con la definición que teníamos antes el punto medio de un segmento divide a éste en la razón 1.

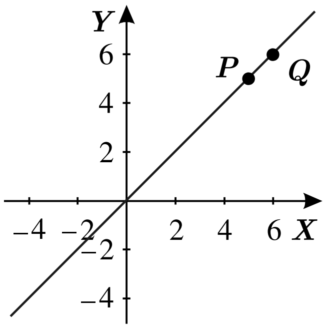
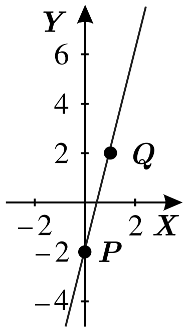
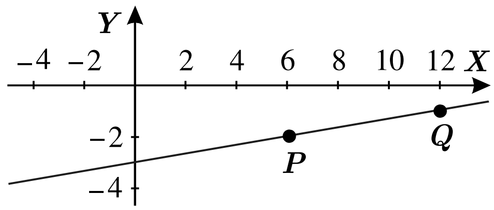
Capítulo 5 La línea recta

Ejercicios de la página 198

1. $\frac{1}{3}$. **3.** $\frac{1}{2}$. **5.** 8. **7.** $\frac{8}{11}$. **9.** 3. **11.** $\frac{3}{11\pi}$. **13.** 0. **15.** $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{2}$.

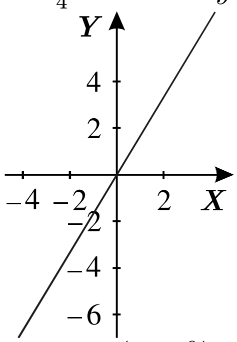
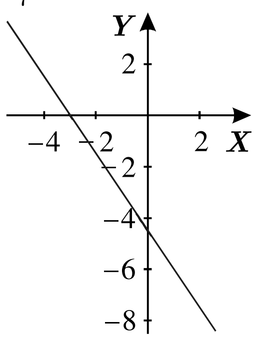
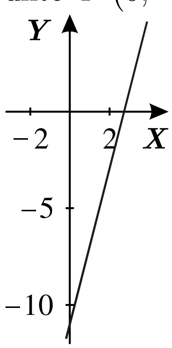
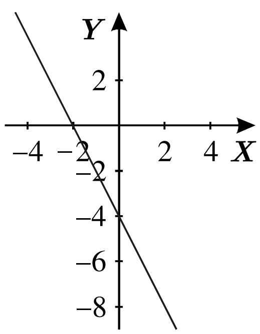
17. Las respuestas pueden variar. **19.** 

21. 

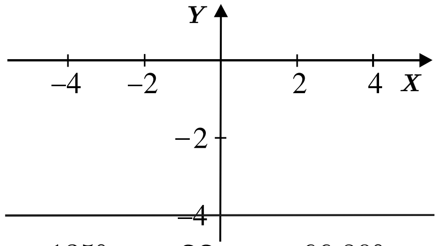
23. 
25. 
27. 

29. La pendiente del lado AB es $\frac{1}{2}$, la del lado CA es $-\frac{11}{3}$ y la del lado BC es $-\frac{7}{11}$.

Ejercicios de la página 205

1. $y-3=-(x-2)$. **3.** $y+5=0$. **5.** $y+3=-10\,(x+9)$. **7.** $y=3x+\pi$. **9.** $y=11x$. **11.** $y=-12x-\frac{3}{4}$. **13.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{6}{7}$. **15.** La recta tiene pendiente $m=\frac{5}{3}$ y pasa por el origen. 
17. 
La recta tiene pendiente $m=-\frac{3}{2}$ y pasa por el punto $P\left(0,-\frac{9}{2}\right)$. **19.** La recta tiene pendiente $m=4$ y pasa por el punto $P\,(0,-11)$. 
21. 
La recta tiene pendiente $m=-2$ y

pasa por el punto $P\,(0,-4)$. **23.** $y=-4$.

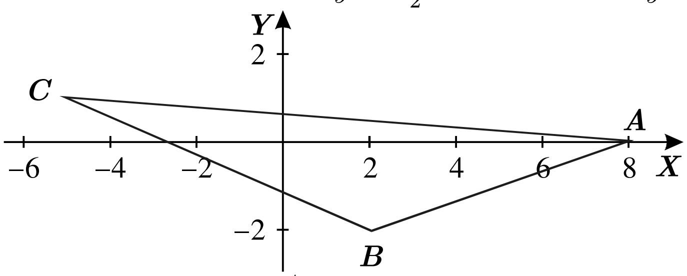


25. $Q\left(3,\frac{13}{11}\right)$.

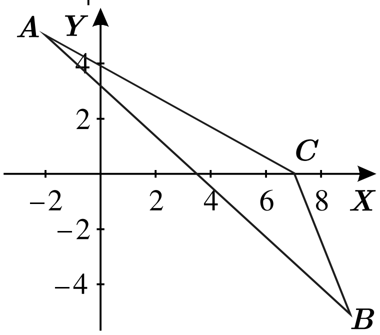
27. $y=mx-ma$. **29.** $\alpha\approx 40.89°$. **31.** $\alpha=135°$. **33.** $\alpha\approx 66.80°$.

Ejercicios de la página 209

1. $y=-6x+14$. **3.** $y=-x+2$. **5.** $y=-\frac{5}{6}x+\frac{3}{4}$. **7.** $y=-x+9$. **9.** $y=3x+30$. **11.** Los tres puntos son colineales. La ecuación de la recta es $y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$. **13.** Los tres puntos son colineales. La ecuación de la recta es $y=\frac{2}{5}x-5$. **15.** Los tres puntos son colineales. La ecuación de la recta es $y=\frac{3}{2}x-8$. **17.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$, $y=-\frac{3}{7}x-\frac{8}{7}$, $y=-\frac{1}{13}x+\frac{8}{13}$.



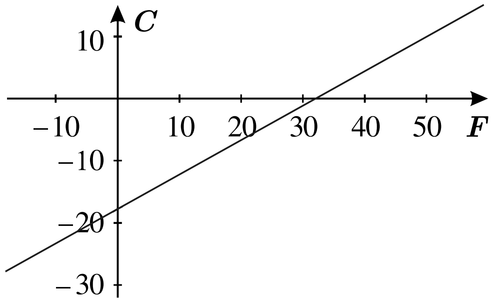
19. $y=-\frac{10}{11}x+\frac{35}{11}$, $y=-\frac{5}{2}x+\frac{35}{2}$, $y=-\frac{5}{9}x+\frac{35}{9}$.



21. Cualquier punto de la recta $y=\frac{13}{8}x+\frac{29}{16}$ equidista de los puntos $A\,(-7,5)$ y $B\,(6,-3)$. **23.** Los puntos medios son $M\left(-\frac{5}{2},-3\right)$, $N\,(0,4)$. La ecuación de la recta es $y=\frac{14}{5}x+4$. **25. a)** El costo total con x noches adicionales es $C\,(x)=450x+5500$. **b)** El costo del viaje sin noches adicionales es de \$5500. **c)** Cada noche adicional cuesta \$450. **27. a)** Los puntos medios son $M\left(-\frac{9}{2},-2\right)$, $N\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$. La ecuación de la recta es $y=\frac{5}{14}x-\frac{11}{28}$. **b)** Los puntos medios son $P\left(-\frac{3}{2},2\right)$, $Q\left(-\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)$. La ecuación de la recta es $-\frac{11}{2}x-\frac{25}{4}$. **c)** Las rectas se cortan en $R\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$. **d)** Los puntos medios de las diagonales son $S\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$, $T\,(0,-1)$. La ecuación de la recta que los une es $y=-\frac{1}{4}x-1$.

Ejercicios de la página 214

1. $3x-2y+15=0$. **3.** $x+y-9=0$. **5.** $x+6y-5\sqrt{2}=0$. **7.** $x-2y-8=0$. **9.** $2x+y-4=0$. **11.** $12x-5y+\pi=0$. **13. a)** $32°F=0°C$, $100°F\approx 37.7°C$, $410°F=210°C$. **b)** $36.5°C=97.7°F$, $100°C=212°F$, $-10°C=14°F$. **c)** Las dos escalas coinciden en $-40°$.

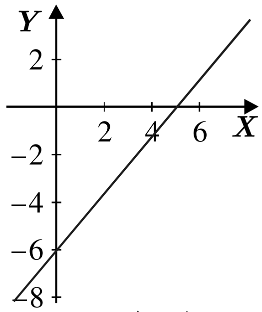


15. $\left(2+\sqrt{3}\right)x-y-1-3\sqrt{3}=0$.

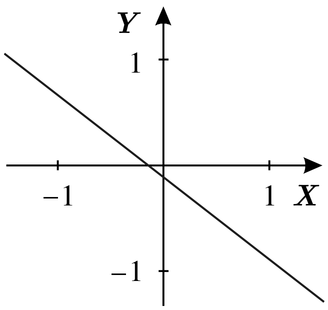
17. $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}-5=0$. **19.** $x-y-8=0$. **21.** $8x-y-3=0$. **23.** $x+6y+60=0$. **25.** $5x+5y+12=0$.

Ejercicios de la página 217

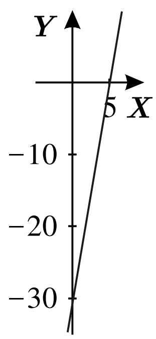
1. La recta tiene una pendiente $m=\frac{3}{5}$ y pasa por el punto $P\,(0,8)$. **3.** Es una recta y no pasa por el origen. **5.** Es una recta que pasa por el punto $P\,(3,-1)$ y tiene pendiente $m=\frac{9}{8}$. **7.** La recta es horizontal y pasa por el punto $P\,(0,-9)$. **9.** Es una recta que pasa por los puntos $P\,(-4,0)$ y $Q\,(0,7)$. **11.** Es una recta y no pasa por el origen. **13.** La recta tiene pendiente $m=-4$ y pasa por el punto $P\left(-7,-\frac{4}{5}\right)$. **15.** La recta tiene una pendiente $m=-\frac{5}{11}$ y pasa por el punto $P\,(0,4)$. **17.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{-6}=1$.



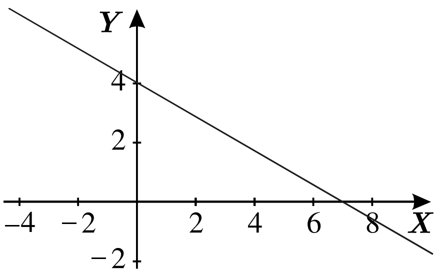
19. $\dfrac{x}{-\frac{1}{7}}+\dfrac{y}{-\frac{1}{9}}=1$.



21. $\dfrac{x}{\frac{31}{6}}+\dfrac{y}{-31}=1$.



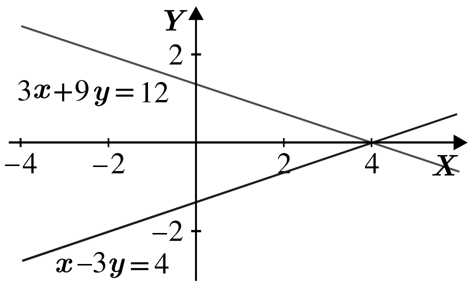
23. $\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{4}=1$



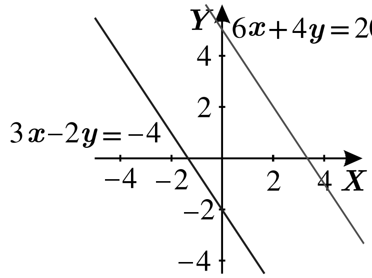
. **25.** $8x-5y+40=0$. **27.** $8x+y+4=0$.

Ejercicios de la página 221

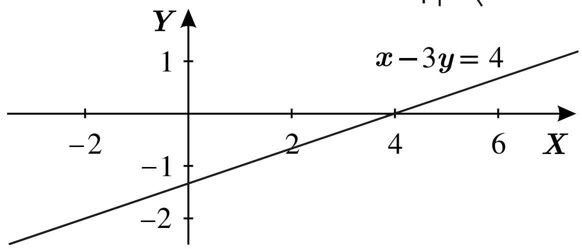
1. $P\,(4,0)$.



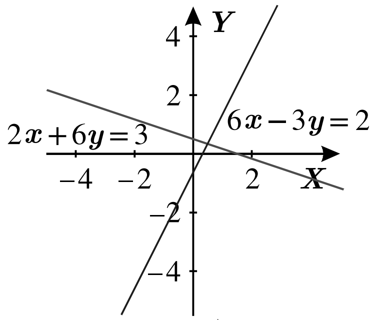
3.



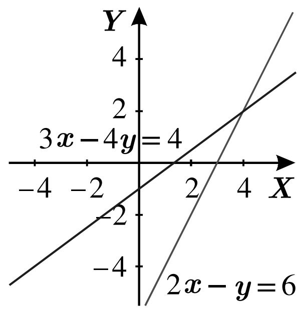
Las rectas son paralelas. **5.** Una sola recta.



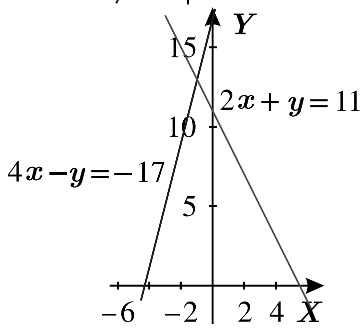
7. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.



9. $P\,(4,2)$.



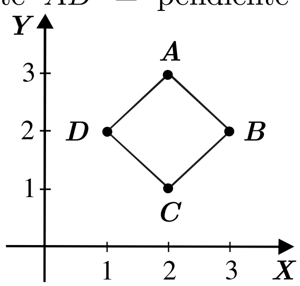
11. $P\,(-1,13)$.



13. Las tres rectas forman un triángulo, los vértices son $A\left(\frac{102}{7}, \frac{85}{7}\right)$, $B\,(0,0)$ y $C\left(\frac{119}{11}, \frac{51}{11}\right)$. **15.** $y = \frac{4}{9}x + \frac{2}{3}$. **17.** La recta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$ biseca al segmento que tiene como extremos a los puntos A y B. **19.** Las tres rectas pasan por el punto $P\,(5,3)$. **21.** $a = -2$, $b = 2$.

Ejercicios de la página 227

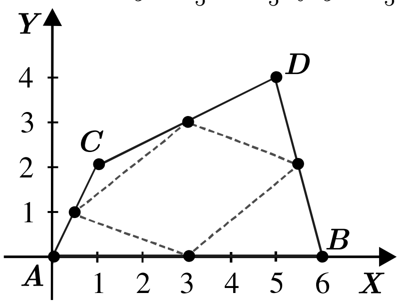
1. $\theta \approx 63.43°$. **3.** $\theta \approx 18.43°$. **5.** Pendiente AB = pendiente $CD = -1$, pendiente AD = pendiente $CB = 1$; cada ángulo mide $90°$.



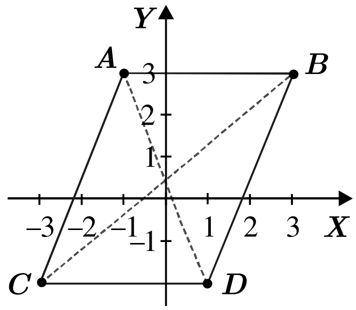
7. La pendiente de la recta ℓ_2 es igual a 7. **9.** Los ángulos son $\alpha_1 = 63.43°$, $\alpha_2 = 90°$ y $\alpha_3 = 26.57°$. El triángulo es rectángulo.

Ejercicios de la página 231

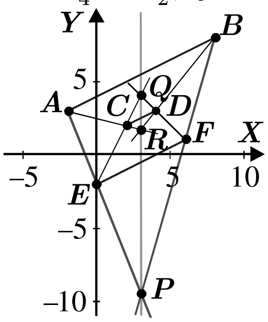
1. $y = \frac{6}{5}x + \frac{23}{5}$. **3.** $y = -\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}$. **5.** $y = -5$. **7.** $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$. **9.** $y = 4$. **11.** $y = x - \left(\sqrt{2} + 1\right)$. **13.** $P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. No son perpendiculares. **15.** Son paralelas. **17.** $P(-1, 2)$.No son perpendiculares. **19.** $y = \frac{4}{5}x - \frac{12}{5}$ y $y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$ son paralelas. $y = -\frac{2}{5}x + \frac{21}{5}$ y $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$ son paralelas.



21.



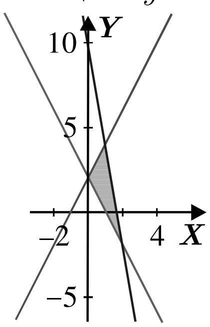
$5x - 6y + 3 = 0$, $5x + 2y - 1 = 0$. $P\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. **23. a)** $y = \frac{1}{2}x + 4$, $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = \frac{1}{2}x - 2$. **b)** Son paralelas. **c)** $y = -\frac{5}{2}x - 2$, $y = \frac{7}{2}x - 20$, $P\left(3, -\frac{19}{2}\right)$. **d)** $y = 2x - 2$, $y = -x + 7$, $Q(3, 4)$. **e)** $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$, $y = \frac{5}{4}x - 2$, $R\left(3, \frac{7}{4}\right)$. **f)** Los tres puntos están en la recta vertical $x = 3$. **g)**



Ejercicios de la página 242

1. $y < 2x + 7$. $y > 2x + 7$. **3.** $y < 5$. $y > 5$. **5.** $y < \frac{16}{9}x + \frac{4}{3}$. $y > \frac{16}{9}x + \frac{4}{3}$. **7.** $x < \frac{3}{2}$.

9.



11. a) $C(x) = 19x + 16$. **b)** 2 pasteles diarios **c)** Debe vender al menos 11 pasteles diarios. **13. a)** 1$^{\text{er}}$ caso: 3400 artículos. 2^{o} caso: Aproximadamente 3530 artículos. **b)** Le conviene adquirir el nuevo equipo. **15. a)** $y = -100x + 500$. **b)** $y = 400x - 950$. **c)** \$2.90 cada tamal. **17. a)** $C(x) = \begin{cases} 16x + 5\,500 & \text{si } 0 \le x \le 25\,000 \\ 16.22x & \text{si } 25\,000 \le x \le 40\,000. \end{cases}$ **b)** 1834 artículos.

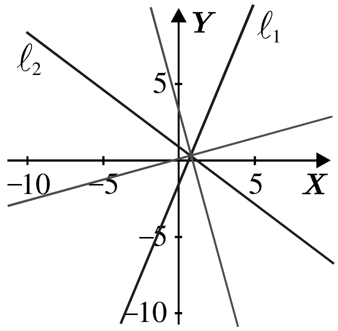
c) En cualquier caso, la ganancia por unidad es de \$2.78.

Ejercicios de la página 247

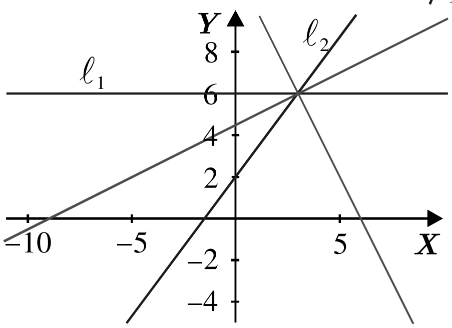
1. $\sqrt{5}$. **3.** $\frac{35}{\sqrt{41}}$. **5.** $\frac{20}{\sqrt{34}}$. **7.** 5. **9.** $\frac{11}{2\sqrt{13}}$. **11.** $\frac{10}{\sqrt{13}}$. **13.** $\frac{2}{\sqrt{74}}$. **15.** $\frac{7}{2\sqrt{5}}$. **17.** $\frac{5}{\sqrt{61}}$. **19.** Hay dos soluciones $y = -\sqrt{3}x + 10$ o $y = -\sqrt{3}x - 10$. **21.** La distancia de cualquiera de los puntos a $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ es $\frac{7}{5}$ y la distancia de cualquiera de los puntos a $9x - 12y - 5 = 0$ es $\frac{29}{15}$. La recta que pasa por A y B es paralela a las otras dos. **23.** Hay cuatro posibilidades: $A\left(-\frac{7}{3}, 4\right)$ y $B\,(5, 6)$; $A\left(-\frac{7}{3}, 4\right)$ y $B\left(5, \frac{26}{11}\right)$; $A\,(11, 4)$ y $B\,(5, 6)$; $A\,(11, 4)$ y $B\left(5, \frac{26}{11}\right)$.

Ejercicios de la página 251

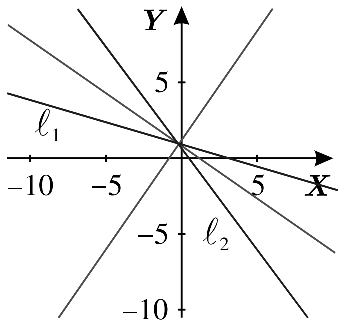
1. $42x - 154y + 11 = 0$, $198x + 54y - 171 = 0$.



3. $4x - 8y + 36 = 0$, $4x + 2y - 24 = 0$.



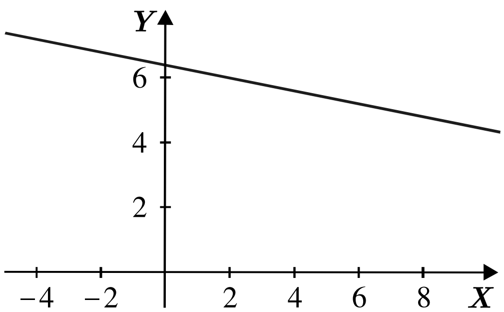
5.



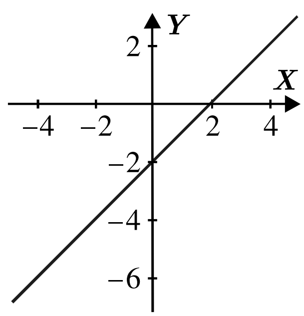
$39x - 27y + 33 = 0$, $81x + 117y - 93 = 0$.

Ejercicios de repaso de la página 252

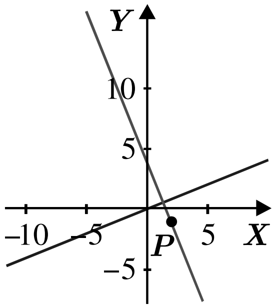
1. $y = -\frac{1}{5}x + \frac{32}{5}$.



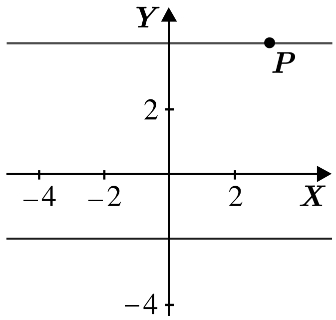
3. $y = x - 2$.



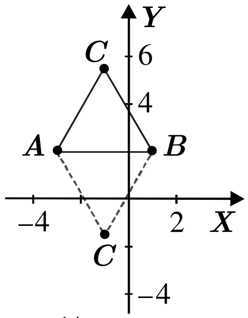
5. $y = -\frac{5}{2}x + 4$.



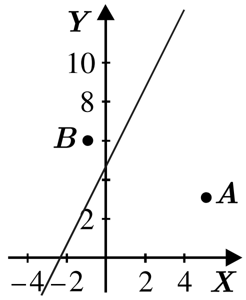
7. $y = 4$.



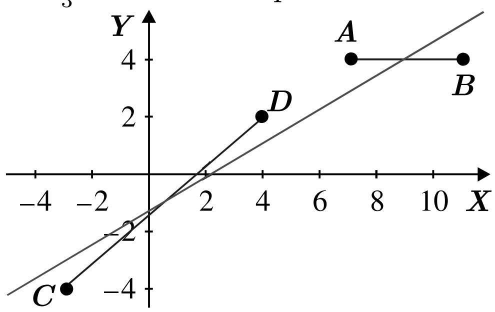
9. Hay dos casos: $C\left(-1, 2+2\sqrt{3}\right)$ o $C\left(-1, 2-2\sqrt{3}\right)$.



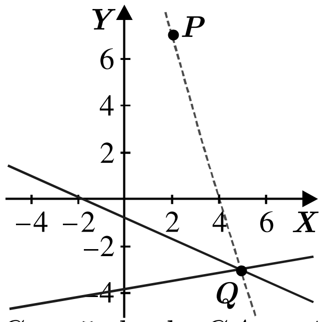
11.



El lugar geométrico es la recta con ecuación $y = 2x + \frac{14}{3}$. **13.** Los puntos medios son $(9,4)$, $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y la ecuación de la recta es $y = \frac{10}{17}x - \frac{22}{17}$.



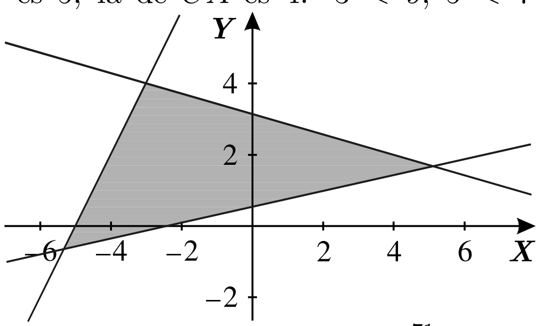
15. Los vértices del triángulo son $A(-1,-4)$, $B(-5,3)$, $C\left(\frac{20}{9}, \frac{211}{27}\right)$. La longitud del lado AB es $\sqrt{65}$, la del lado BC es $\frac{65}{27}\sqrt{13}$ y la del lado AC es $\frac{29}{27}\sqrt{130}$. **17.**



$Q(5,-3)$. $y = -\frac{10}{3}x + \frac{41}{3}$.

19. La longitud del lado AB es 3, la de BC es 5, la de CA es 4. $3 < 9$, $5 < 7$ y $4 < 8$.

21. $y > \frac{2}{9}x + \frac{5}{9}$, $y < 2x + 10$, $y < -\frac{2}{7}x + \frac{22}{7}$.



23. $\frac{30}{\sqrt{34}}$

25. La distancia de A al lado BC es $\frac{71}{\sqrt{85}}$, la distancia de B al lado AC es $\frac{71}{\sqrt{106}}$, la distancia de

C al lado AB es $\frac{71}{\sqrt{65}}$. **27.** $\frac{19}{\sqrt{20}}$. **29.** El punto $P\,(-3,2)$ está en la recta $y = x + 5$ pero la suma de las distancias de $P\,(-3,2)$ a los lados del triángulo es mayor que la distancia de $C\,(-2,3)$ a la recta AB. Para que la suma de las distancias de P a los lados del triángulo sea igual a la distancia de C a la recta AB, el punto P debe estar en la recta BC y además entre C y B. **31.** $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} = 1$. **33.** Hay dos soluciones $4x + 3y + 96 = 0$ y $x + 5y - 10 = 0$. **35.** El pago por 25 m^3 sería de \$32.98. **37.** Hay dos soluciones $x - 1 = 0$ y $4x + 3y + 5 = 0$.

Capítulo 6 Los triángulos

Ejercicios de la página 277

1. Los vértices del triángulo son $A\,(-2,3)$, $B\,(-5,-1)$ y $C\,(5,1)$. **3.** Las rectas $y = -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$ y $y = -\frac{2}{5}x - \frac{14}{5}$ tienen pendiente $m = -\frac{2}{5}$, entonces son paralelas. **5.** $G\,(3,1)$, $O\left(3, \frac{5}{3}\right)$, $H\left(3, -\frac{1}{3}\right)$, la ecuación de la recta de Euler es $x = 3$. **7.** $G\left(-\frac{11}{3}, -\frac{5}{3}\right)$, $O\left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $H\,(-4,-4)$, la ecuación de la recta de Euler es $7x - y + 24 = 0$. **9.** El área del triángulo es de 24 unidades cuadradas. **11.** El área del triángulo es de $\frac{15}{\sqrt{2}}$ unidades cuadradas. **13.** El área del triángulo es de $\frac{103}{2}$ unidades cuadradas. **15.** El área del triángulo es de 12 unidades cuadradas. **17.** El área del polígono es de $\frac{61}{2}$ unidades cuadradas. **19.** El área del polígono es de 52 unidades cuadradas. **21.** Las ecuaciones de las bisectrices son $44x - 8y + 19 = 0$, $x - 7y - 5 = 0$, $39x + 27y + 44 = 0$ y el incentro es $I\left(-\frac{173}{300}, -\frac{239}{300}\right)$. **23.** Las ecuaciones de las bisectrices son $8x - y + 1 = 0$, $4x + 7y + 14 = 0$, $7x + 4y - 4 = 0$ y el incentro es $I\left(\frac{21}{44}, -\frac{61}{44}\right)$. **25.** $y = 2x + \frac{14}{3}$. **27.** Hay dos soluciones: el triángulo con vértices $A\,(8,2)$, $B\,(2,8)$, $C\left(5 + 3\sqrt{3}, 5 + 3\sqrt{3}\right)$. El lado AB tiene ecuación $y = -x + 10$, el lado BC tiene ecuación $y = \frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x + \frac{10+6\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ y el lado CA tiene ecuación $y = \frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}x + \frac{-10-6\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}$. El triángulo con vértices $A\,(8,2)$, $B\,(2,8)$, $C\left(5 - 3\sqrt{3}, 5 - 3\sqrt{3}\right)$. El lado AB tiene ecuación $y = -x + 10$, el lado BC tiene ecuación $y = \frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}x + \frac{-10+6\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}$ y el lado CA tiene ecuación $y = \frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x + \frac{10-6\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

Capítulo 7 Las cónicas

Ejercicios de la página 299

1. $x^2 + y^2 = 3$. **3.** $-y^2 + 8x + 32 = 0$. **5.** $4x^2 - 5y^2 + 5 = 0$. **7.** $A\,(-9,8)$, $B\,(-1,10)$, $C\,(0,5)$. **9.** $A\,(-5,-2)$, $B\,(3,0)$, $C\,(4,-5)$. **11.** $A\,(1,1)$, $B\,(9,3)$, $C\,(10,-2)$. **13.** $y' = -3x' + \frac{9}{2}$. **15.** $y' = 3x' + \frac{11}{2}$. **17.** $y' = x' - \frac{41}{6}$. **19.** $y' = 2x' - \frac{31}{6}$. **21.** $x' = \frac{25}{3}$. **23.** $y' = -\frac{5}{2}x' - \frac{7}{6}$ **25.** El lugar geométrico buscado lo forman las rectas $y = -3x + 8$ y $y = -3x + 22$.

Capítulo 8 El círculo

Ejercicios de la página 306

1. $x^2 + y^2 = 64$. **3.** $x^2 + y^2 = 49$. **5.** $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$. **7.** $x^2 + y^2 = \frac{9}{49}$. **9.** El radio del círculo es $\sqrt{7}$. **11.** El radio del círculo es 11. **13.** El radio del círculo es 13. **15.** El radio del círculo es $\sqrt{15}$. **17.** El radio del círculo es $\frac{8}{5}$. **19.** $x^2+y^2=5$. **21.** $x^2+y^2=\frac{9}{8}$. **23.** La ecuación del círculo es $x^2+y^2=25$. **25.** No existe ningún círculo que pase por los puntos $P\left(-2,\frac{16}{3}\right)$, $Q\,(3,2)$ y cuyo centro se encuentre sobre la recta $3x-2y+1=0$. **27.** La recta que contiene a la cuerda es $y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$ y la longitud de la cuerda es $2\sqrt{10}$.

Ejercicios de la página 309

1. $x^2+y^2-2x-4y-11=0$. **3.** $x^2+y^2-10x+2y-55=0$. **5.** $x^2+y^2+14x-8y+4=0$. **7.** $x^2+y^2+10x+4y+4=0$. **9.** $x^2+y^2-6x+2y-15=0$. **11.** $x^2+y^2-4x-2y-13=0$. **13.** $x^2+y^2+4x-10y+9=0$. **15.** Círculo inscrito: $(x+5)^2+y^2=4$. Círculo circunscrito: $(x+5)^2+y^2=8$. **17.** Es un círculo con centro en $(-2,1)$ y radio $\sqrt{3}$. **19.** Es un círculo con centro en $(1,0)$ y radio 4. **21.** Es un círculo con centro en el origen y radio 2. **23.** Es un círculo con centro en $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ y radio 1. **25.** Es un círculo con centro en $(-1,2)$ y radio $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **27.** Es un círculo con centro en $\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$ y radio $\sqrt{\frac{47}{10}}$. **29.** La ecuación de la cuerda es $y=3x+11$ y su longitud es $2\sqrt{10}$. **31.** $(x+3)^2+(y-5)^2=25$.

Ejercicios de la página 324

1. La recta y el círculo no se cortan. **3.** La recta y el círculo no se cortan. **5.** La recta y el círculo se cortan en dos puntos, $(-4,-13)$ y $\left(\frac{8}{5},-\frac{9}{5}\right)$. **7.** $2x+y-9=0$. **9.** $6x-y-35=0$. **11.** $12x+5y-216=0$. **13.** Los círculos se cortan en los puntos $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{37}{41},-\frac{31}{82}\right)$. **15.** Los círculos se cortan en los puntos $\left(\frac{19+2\sqrt{89}}{10},\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{89}}{10}\right)$ y $\left(\frac{19-2\sqrt{89}}{10},\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{89}}{10}\right)$. **17.** Los círculos se cortan en el punto $(-3,0)$. **19.** Los círculos se cortan en los puntos $(8,-1)$ y $(1,5)$.

Ejercicios de la página 337

1. $\left(x-\frac{175}{38}\right)^2+\left(y-\frac{333}{38}\right)^2=\frac{55\,709}{722}$. **3.** $(x-4)^2+(y-5)^2=25$. **5.** $x^2+y^2=16$. **7.** $\left(x-\frac{11}{4}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{117}{16}$. **9.** El punto medio del lado AB es $P\,(0,0)$; el punto medio del lado BC es $Q\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; el punto medio del lado CA es $R\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. El pie $E\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ de la altura que pasa por $A\,(-1,0)$; el pie $F\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ de la altura que pasa por $B\,(1,0)$; el pie $J\,(0,0)$ de la altura que pasa por $C\left(0,\sqrt{3}\right)$. El ortocentro es $H\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. El punto medio de AH es $K\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$; el punto medio de BH es $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$; el punto medio de CH es $M\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. La ecuación del círculo que pasa por todos ellos es $x^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$.

Ejercicios de repaso de la página 338

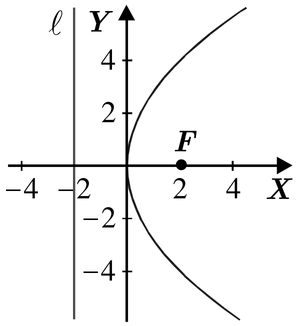
1. La ecuación del circuncírculo es $(x+2)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)^2=\frac{4}{3}$. **3.** $3x+y-13=0$. **5.** **a)** Los dos círculos se cortan en dos puntos, $A\left(\frac{1}{5},-\frac{7}{5}\right)$ y $B\,(-3,5)$. **b)** $y=-2x-1$. **c)** $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$. **d)** Las rectas son perpendiculares. **e)** La rectas son perpendiculares y se cortan en el punto $\left(-\frac{7}{5},\frac{9}{5}\right)$ que es el punto medio del segmento AB, la mediatriz. **7.** El lugar geométrico buscado es el círculo con centro en $\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$ y radio $\sqrt{\frac{15}{2}}$. **9.** $(x-9)^2+(y+3)^2=65$.

11. La recta y el círculo se cortan en los puntos $P\,(-1,2)$ y $Q\,(-10,-5)$. **13.** $y=\frac{4}{3}x-12$.
15. $(x-4)^2+(y-2)^2=25$.

Capítulo 9 La parábola

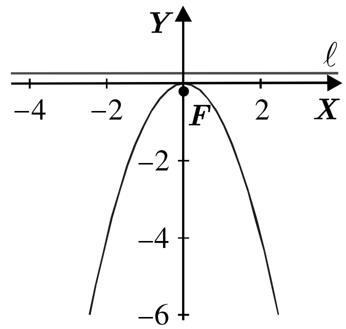
Ejercicios de la página 351

1.



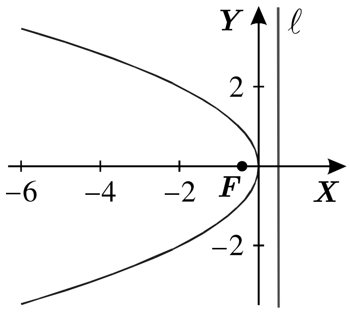
$F\,(2,0)$, ℓ con ecuación $x=-2$.

3.



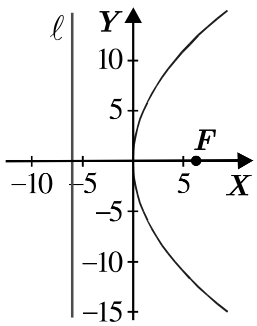
$F\left(0,-\frac{1}{4}\right)$, ℓ con ecuación $y=\frac{1}{4}$.

5.



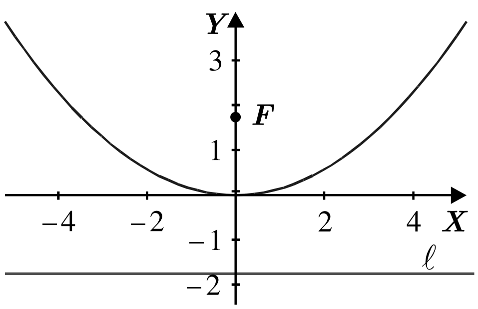
$F\left(-\frac{1}{2},0\right)$, ℓ con ecuación es $x=\frac{1}{2}$.

7.

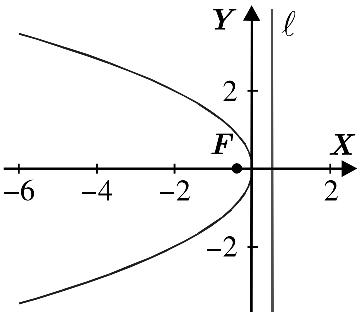


$F\,(6,0)$, ℓ con ecuación es $x=-6$.

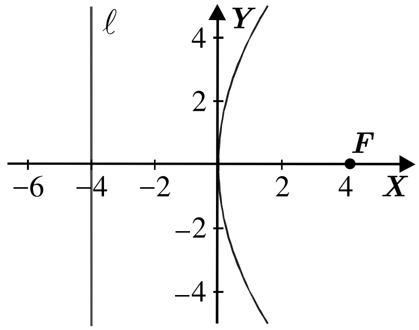
9.



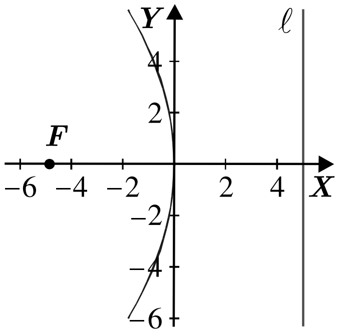
$F\left(0,\frac{7}{4}\right)$, ℓ con ecuación es $y=-\frac{7}{4}$.

11. 

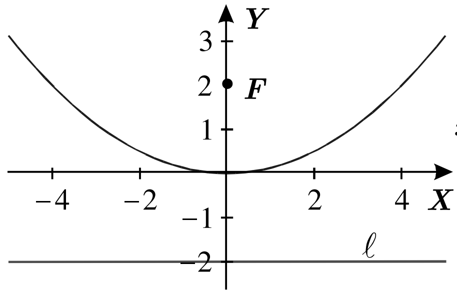
$y^2 = -2x$.

13. 

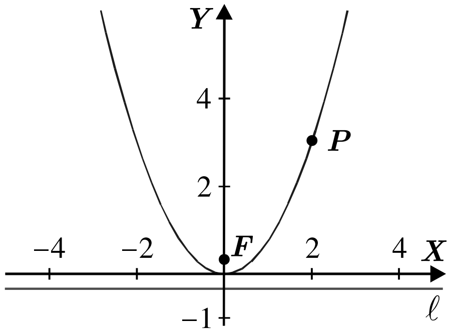
$y^2 = 16x$.

15. 

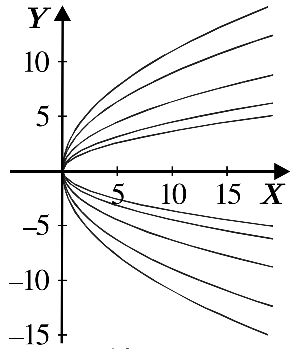
$y^2 = -20x$.

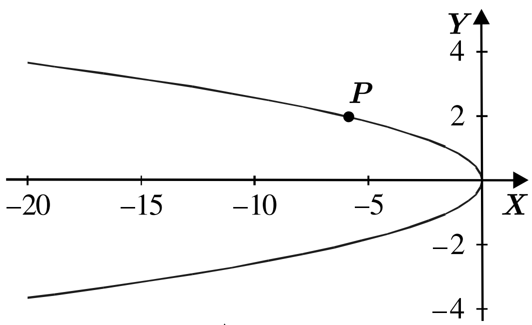
17. 

$x^2 = 8y$.

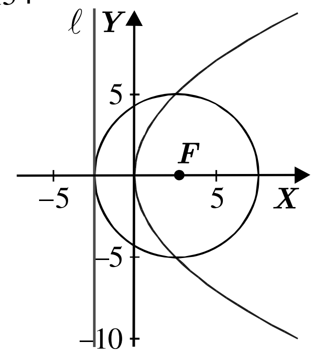
19. 

$x^2 = \frac{4}{3}y$.

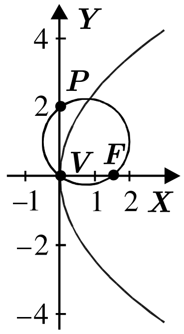
21. 

23. 

$y^2 = -\frac{2}{3}x$.

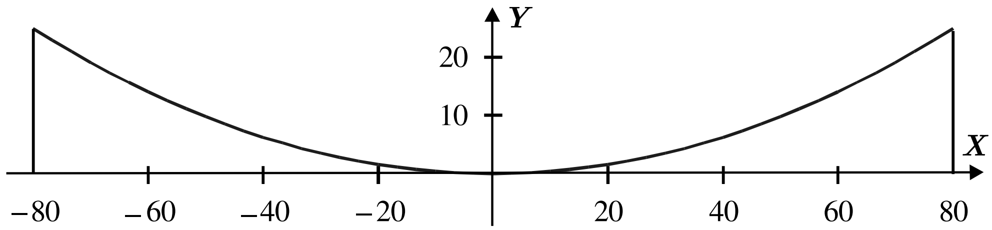
25. 

$y^2 = 10x$.

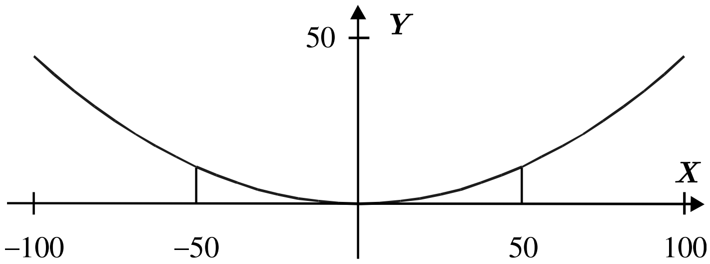
27. 

La ecuación del círculo es $2x^2 + 2y^2 - 3x - 4y = 0$.

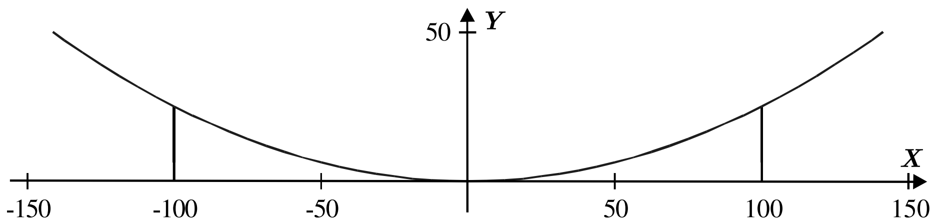
Ejercicios de la página 360

1. 

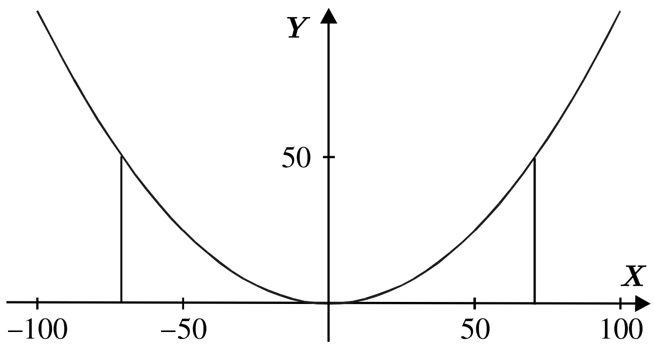
$x^2 = 256y$.

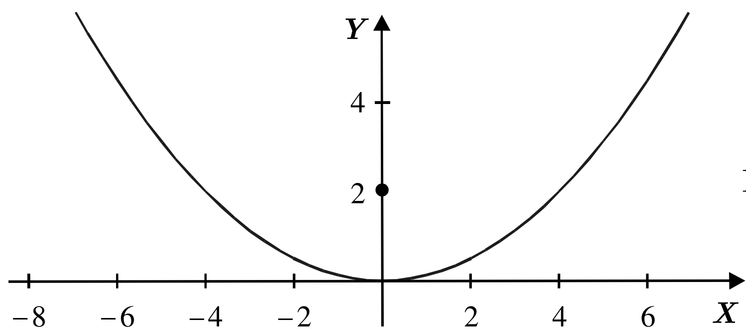
3. 

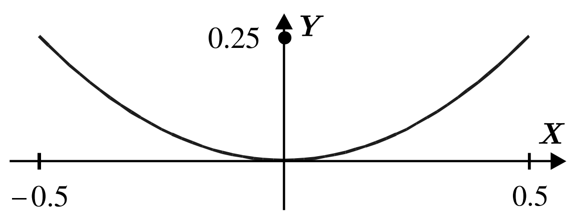
El puntal mide 11.111 m.

5. 

El puntal mide 25 m.

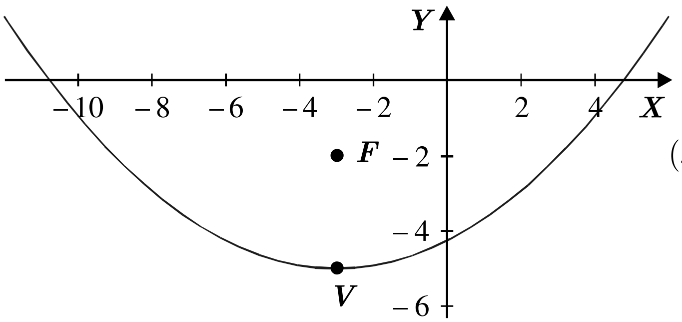
7. 

El puntal está a una distancia de $\pm\sqrt{5000} \approx \pm 70.711$ m del centro. **9.** 

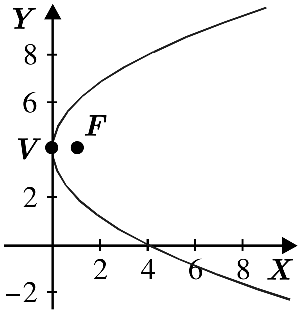
El diámetro del nuevo faro es $2\sqrt{48} \approx 13.9$ cm. **11.** 

La profundidad de la antena es de 25 cm.

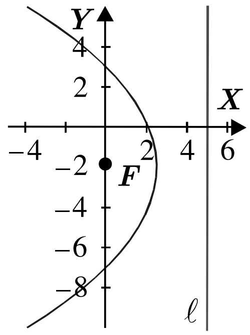
Ejercicios de la página 369

1. 

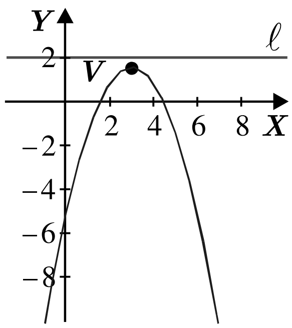
$(x+3)^2 = 12\,(y+5)$. **3.** $(y-4)^2 = 4x$.

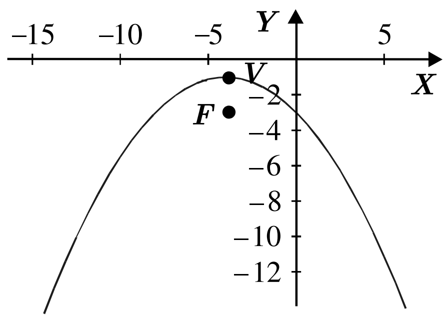


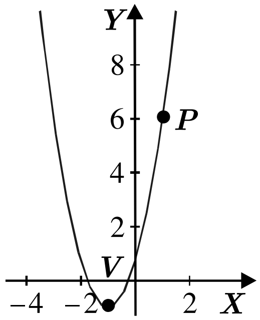
5. $(y+2)^2 = -10\left(x-\frac{5}{2}\right)$.



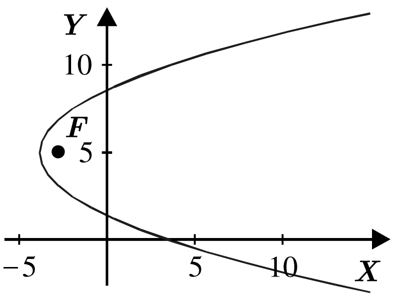
7. $(x-3)^2 = -\frac{4}{3}\left(y-\frac{5}{3}\right)$.



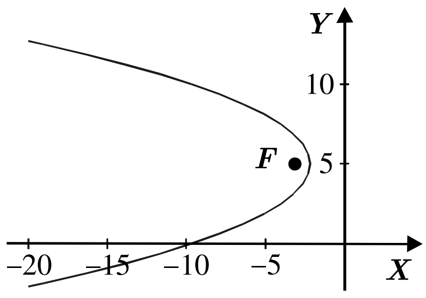
9. 

$(x+4)^2 = -8\,(y+1)$. **11.** 

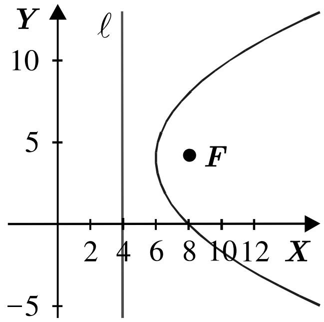
$(x+1)^2 = \frac{4}{7}\,(y+1)$. **13.** Hay dos soluciones:



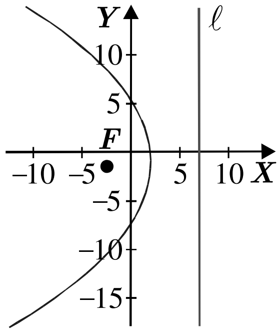
$(y-5)^2 = \frac{10}{3}\left(x+\frac{23}{6}\right)$.



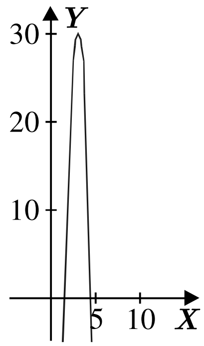
$(y-5)^2 = -\frac{10}{3}\left(x+\frac{13}{6}\right)$. **15.**



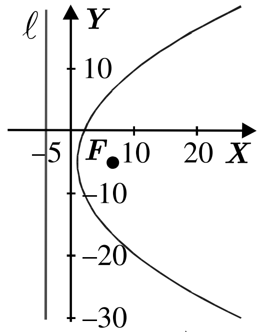
$V(6,4)$, $F(8,4)$, $x=4$. **17.** $V(2,-1)$, $F(-3,-1)$, $x = 7$.



19.

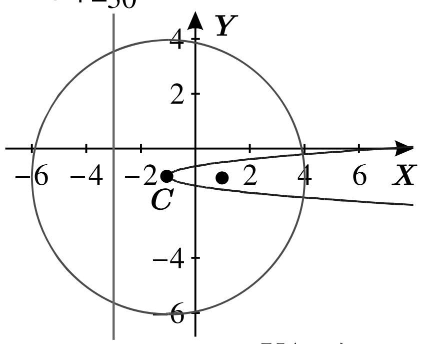


$V(3,30)$, $F\left(3, 30-\frac{1}{48}\right)$, $y = 30 + \frac{1}{48}$. **21.**

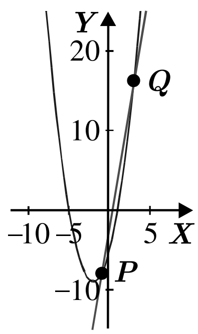


$V(1,-5)$, $F(7,-5)$, $x = -5$.

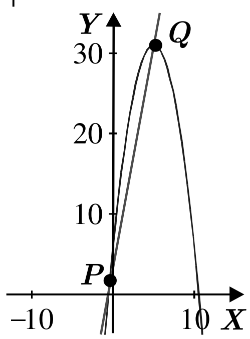
23. $(x+1)^2+(y+1)^2 = 25$.



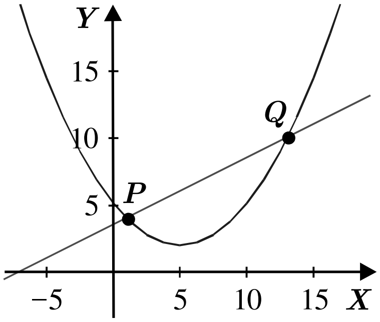
25.



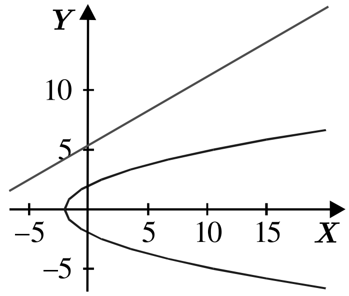
$P(-1,-8)$, $Q(3,16)$ **27.** $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $Q(5,31)$.



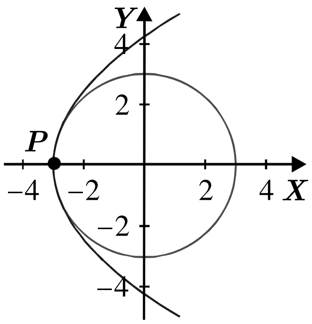
29. $P(1,4)$, $Q(13,10)$.



31. No hay intersección.

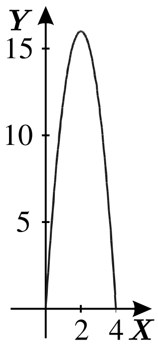


33.



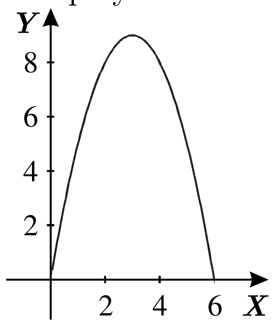
$P\,(-3,0)$.

35.



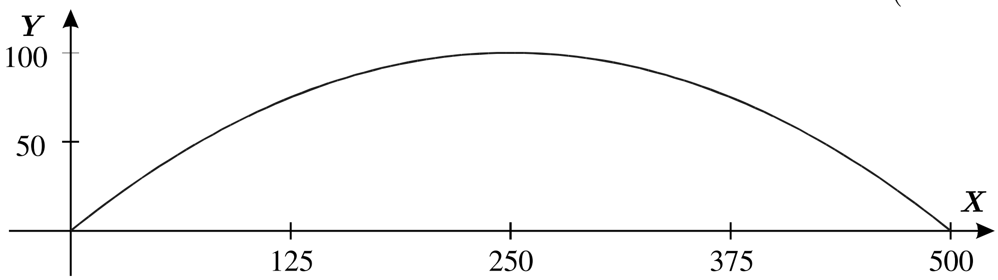
La altura máxima que alcanza el proyectil es de 16 metros y la alcanza 2 segundos después de ser lanzado.

37.



La altura máxima que alcanza el proyectil es de 9 km y caerá a una distancia de 6 km del cañón.

39. $(x-250)^2 = -625\,(y-100)$.

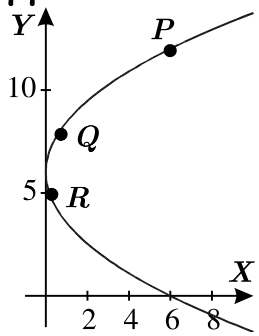


Ejercicios de la página 374

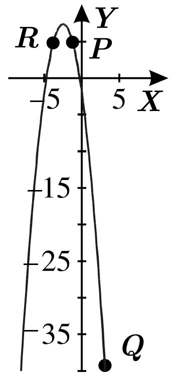
1. El área máxima se obtiene cuando el rectángulo es un cuadrado de lado $a = \frac{7}{4}$ cm. **3.** Los números buscados son 2 y 4. **5.** El cuadrado de la hipotenusa es mínimo cuando el triángulo rectángulo es isósceles y los catetos miden 25. **7.** Los números son 10 y 5.

Ejercicios de la página 377

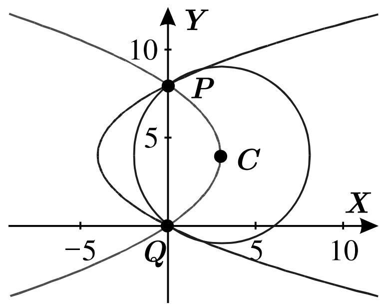
1. $y^2 - 6x - 12y + 36 = 0.$



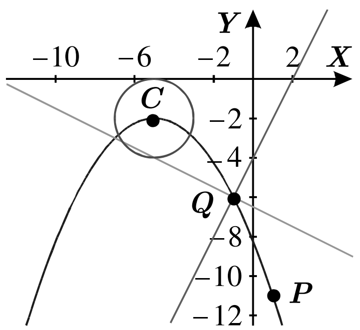
3. $x^2 + 5x + \frac{2}{3}y + \frac{4}{3} = 0.$



5. $(y-4)^2 = -4\left(\frac{4}{3}\right)(x-3).$

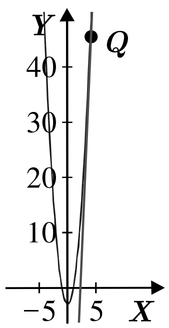


7. $x^2 + 10x + 4y + 33 = 0.$

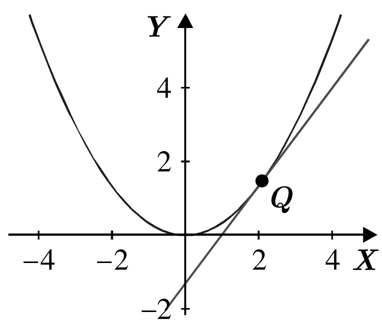


Ejercicios de la página 382

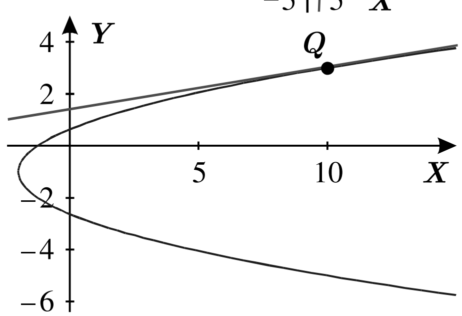
1. $y = 24x - 51.$



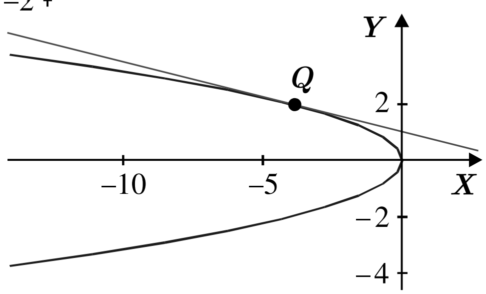
3. $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}.$



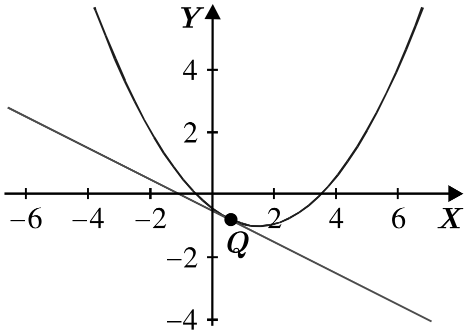
5. $y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}.$



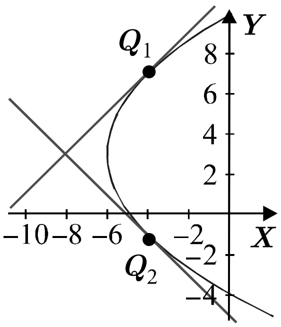
7. $y = -\frac{1}{4}x + 1.$



9. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

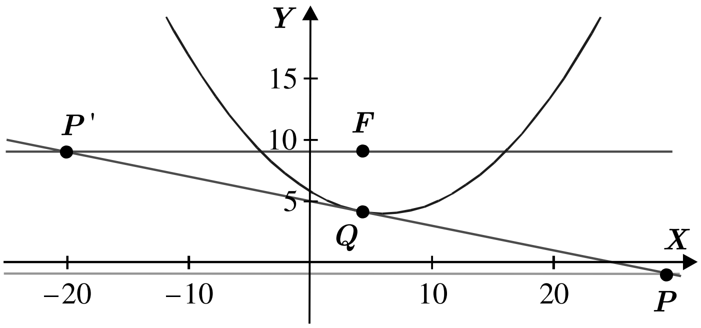


11. Los extremos del lado recto son $Q_1\,(-4,7)$ y $Q_2\,(-4,-1)$, las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos son $y = x + 11$ y $y = -x - 5$.



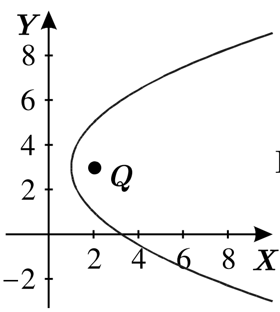
13. La ecuación de la recta tangente en el punto $Q\left(4, \frac{21}{5}\right)$ es $y = -\frac{1}{5}x + 5$. El punto de intersección de la recta tangente y la directriz es $P\,(30,-1)$. El punto en el que se cortan la recta $y = -\frac{1}{5}x + 5$ y la recta que contiene al lado recto es $P'\,(-20,9)$.

$d\,(P,F) = d\,(P',F) = 26$.



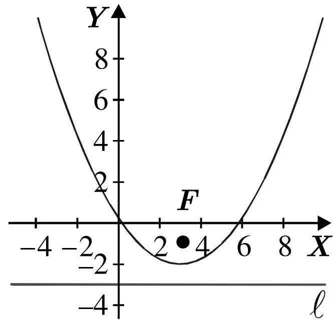
Ejercicios de repaso de la página 384

1.

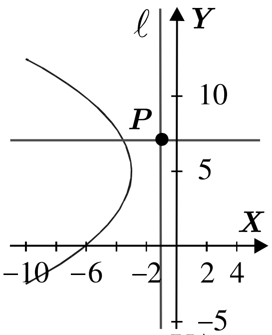


Parábola horizontal que abre hacia la derecha, tiene vértice $V\,(1,3)$ y

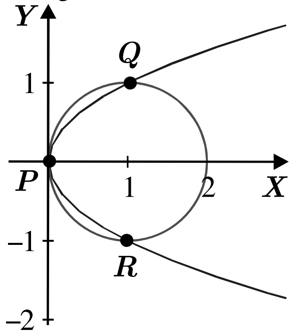
$p = 1$. **3.** $F(3,-1)$, $V(3,-2)$, directriz $y=-3$.



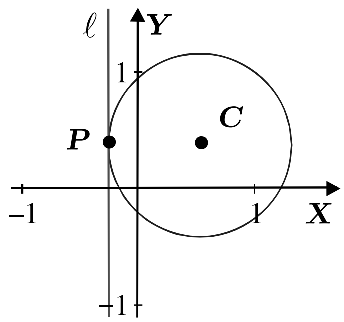
5. $y = 7$.



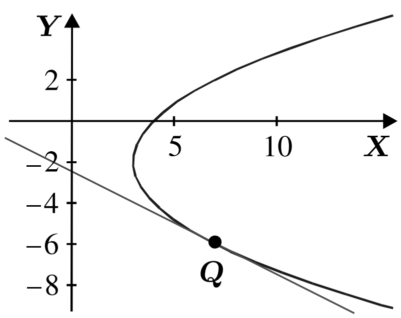
7. La parábola y el círculo se cortan en los puntos $P(0,0)$, $Q(1,1)$ y $R(1,-1)$.



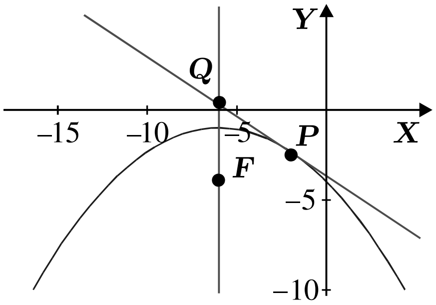
9. La ecuación de la recta que une P con el centro del círculo es $y=\frac{3}{8}$, que es perpendicular a la directriz que tiene ecuación $x=-\frac{1}{4}$.



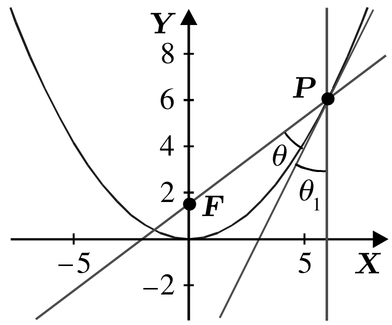
11.



$Q(7,-6)$. **13.** La ecuación de la recta tangente es $y=-\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$. El punto donde se cortan el eje de la parábola y la recta tangente es $Q\left(-6,\frac{1}{3}\right)$. El foco es $F(-6,-4)$. Los lados PF y FQ son iguales y miden $\frac{13}{3}$, el triángulo PFQ es isósceles.

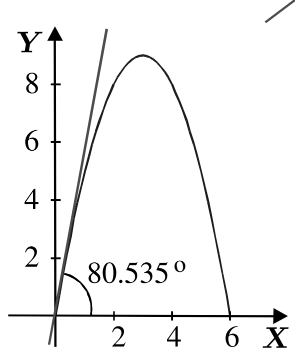


15. La ecuación de la recta tangente en el punto P es

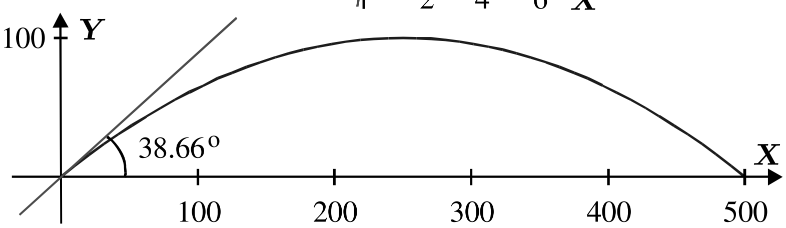


$y = 2x - 6$. El foco es $F\left(0, \frac{3}{2}\right)$. Los ángulos θ y θ_1 son iguales

17. El ángulo de tiro del cañón es de $80.535°$.



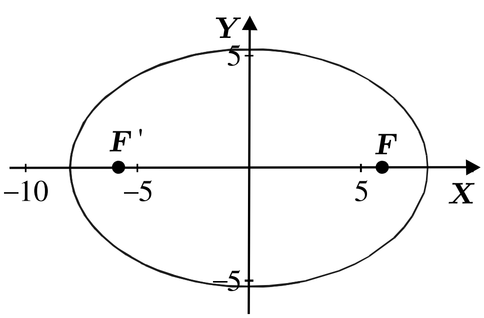
19. El ángulo de tiro del cañón es de $38.66°$.



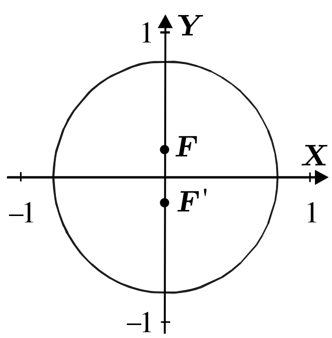
Capítulo 10 La elipse

Ejercicios de la página 394

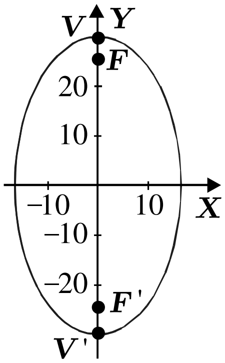
1. $7x^2 + 16y^2 - 448 = 0$.



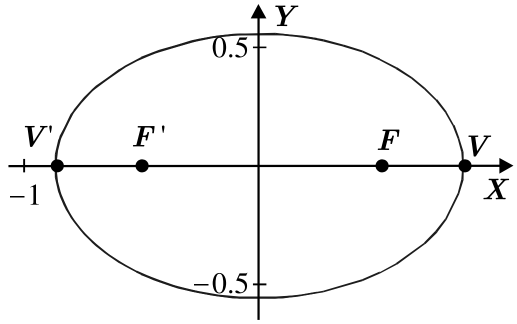
3.



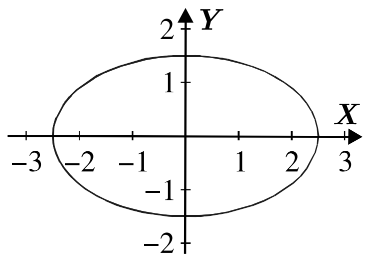
$80x^2 + 75y^2 - 48 = 0.$ **5.** $\frac{x^2}{275} + \frac{y^2}{900} = 1.$

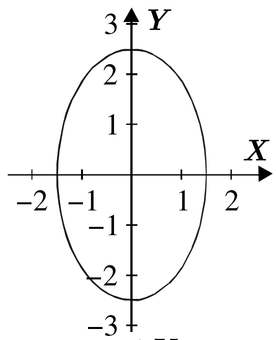


7.

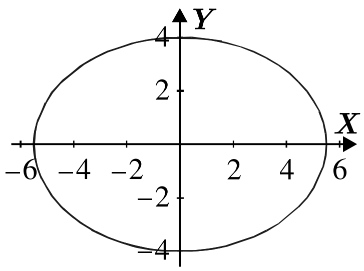


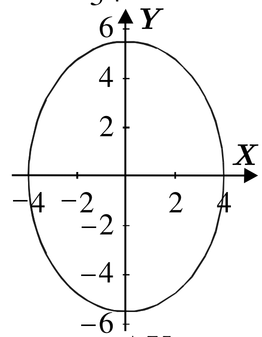
$\frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{y^2}{\frac{5}{16}} = 1.$ **9.** $\frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1,\ \frac{x^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1.$



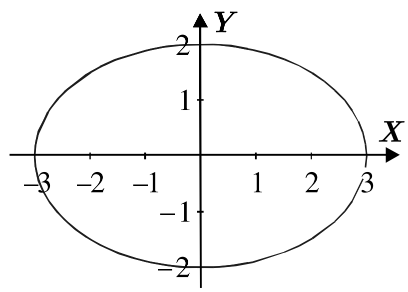


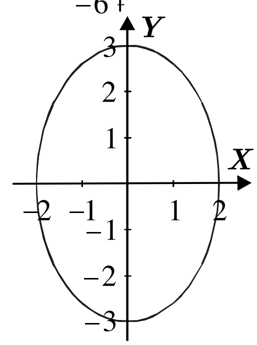
11. $\frac{x^2}{\frac{121}{4}} + \frac{y^2}{16} = 1,\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{121}{4}} = 1.$



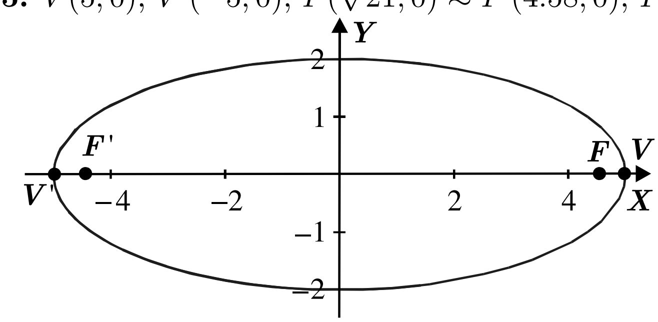


13. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$



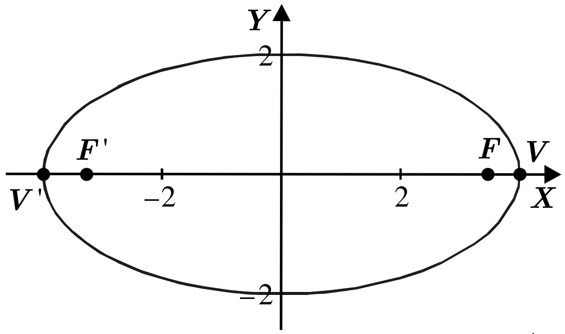


15. $V(5,0),\ V'(-5,0),\ F(\sqrt{21},0) \approx F\,(4.58,0),\ F'(-\sqrt{21},0) \approx F'\,(-4.58,0).$

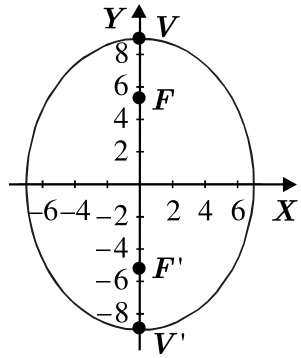


17. $V(4,0),\ V'(-4,0),\ F(2\sqrt{3},0) \approx F\,(3.46,0),$

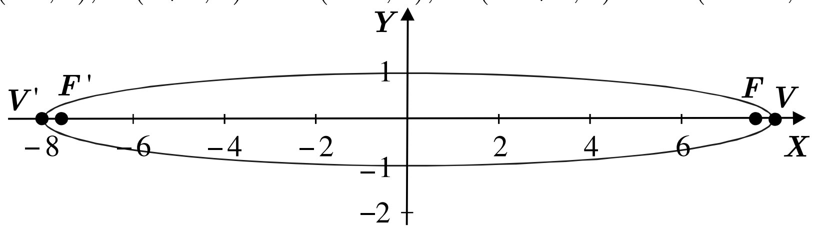
$F'(-2\sqrt{3},0) \approx F'\,(-3.46,0)$.



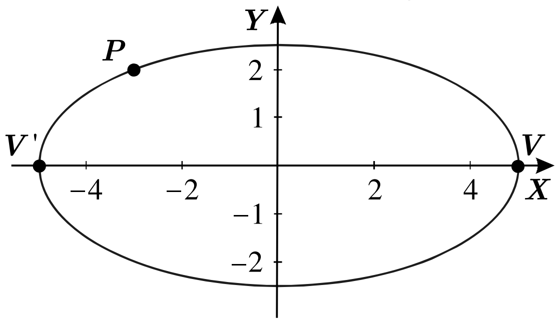
19. $V(0,9), V'(0,-9)$, $F(0,4\sqrt{2}) \approx F\,(0,5.66)$, $F'(0,-4\sqrt{2}) \approx F'\,(0,-5.66)$.



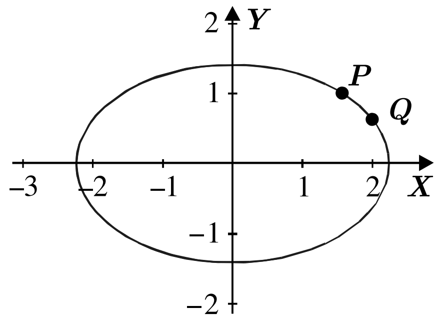
21. $V(8,0)$, $V'(-8,0)$, $F(3\sqrt{7},0) \approx F\,(7.94,0)$, $F'(-3\sqrt{7},0) \approx F'\,(-7.94,0)$.



23. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1.$

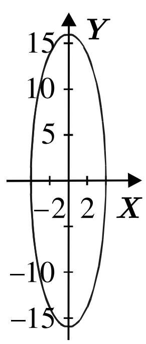


25. $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{2} = 1.$

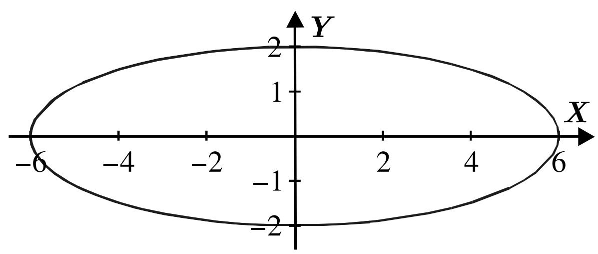


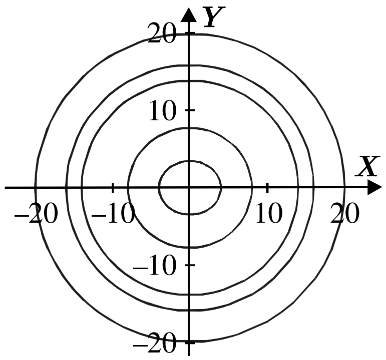
Ejercicios de la página 403

1. $e = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$.

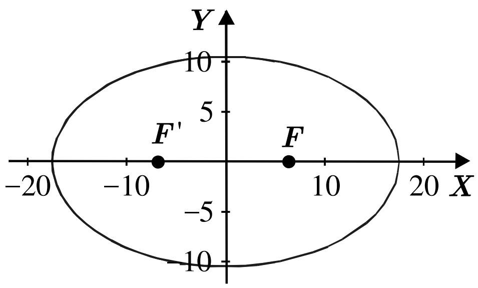


3. $e = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.94$.



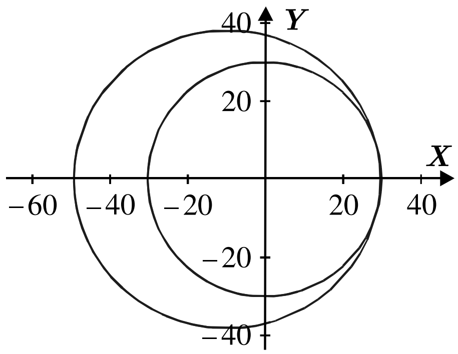
5. 

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\ \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{60}=1,\ \frac{x^2}{196}+\frac{y^2}{192}=1,\ \frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{252}=1,$ $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{396}=1.$ **7.** $\frac{x^2}{\frac{1225}{4}}+\frac{y^2}{\frac{441}{4}}=1.$



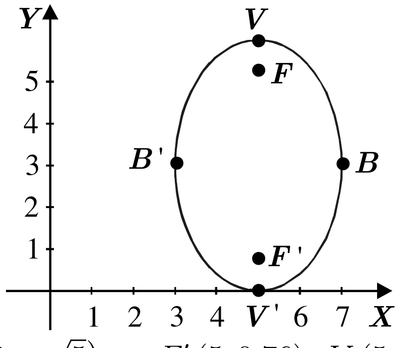
Ejercicios de la página 406

1. a) $b\approx 1.51$ U.A. **b)** $b\approx 0.38$ U.A **c)** $b\approx 38.19$ U.A **3.** La distancia media del cometa Halley al Sol es de aproximadamente 17.94 U.A. **5.** Neptuno: $\frac{(x+0.27)^2}{(30.06)^2}+\frac{y^2}{903.53}=1$, Plutón: $\frac{(x+9.86)^2}{(39.44)^2}+\frac{y^2}{1458.29}=1.$



7. El eje mayor mide $2\sqrt{8}\approx 5.66$ m.

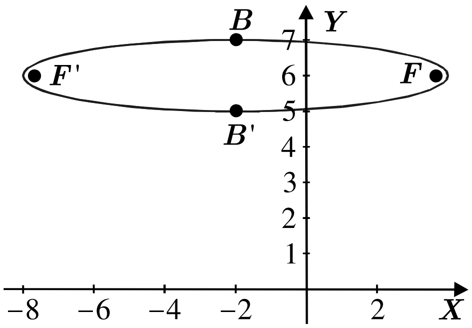
Ejercicios de la página 412

1. 

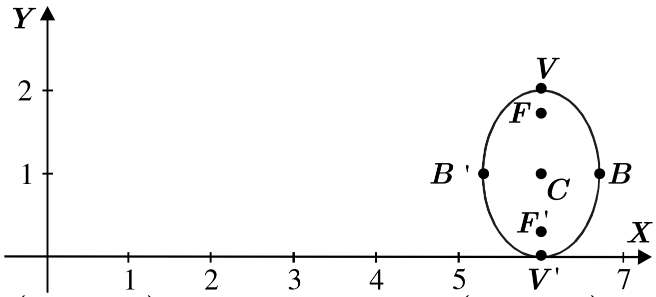
$\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1,\ C\,(5,3),\ F\left(5,3+\sqrt{5}\right)\approx F\,(5,5.24),$ $F'\left(5,3-\sqrt{5}\right)\approx F'\,(5,0.76),\ V\,(5,6),\ V'\,(5,0),\ B\,(7,3),\ B'\,(3,3).$ **3.** $\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-6)^2}{1}=1,$

$C\,(-2,6),\ F\left(-2+\sqrt{35},6\right) \approx F\,(3.92,6),\ F'\left(-2-\sqrt{35},6\right) \approx F'\,(-7.92,6),\ V\,(4,6),\ V'\,(-8,6),$

$B\,(-2,7),\ B'\,(-2,5).$



5. $\dfrac{(x-6)^2}{\frac{1}{2}} + \dfrac{(y-1)^2}{1} = 1,\ C\,(6,1),$

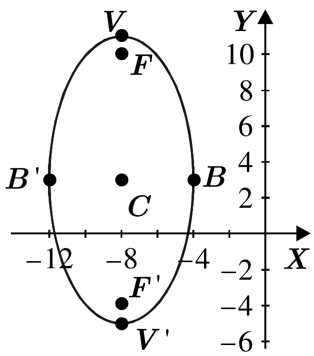


$V\,(6,2),\, V'\,(6,0),\, F\left(6, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx F\,(6,1.71),$

$F'\left(6,1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx F'\,(6,0.29),\ B\left(6+\frac{1}{\sqrt{2}},1\right) \approx B\,(6.71,1),\ B'\left(6-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right) \approx B'\,(5.\,29,1).$

7. $\frac{(x+8)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{64} = 1,\, C\,(-8,3), F\left(-8,3+4\sqrt{3}\right) \approx F\,(-8,9.93),\, F'\left(-8,3-4\sqrt{3}\right) \approx F'\,(-8,-3.93),$

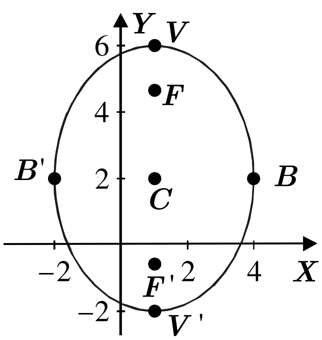
$V\,(-8,11),\ \ V'\,(-8,-5),\ B\,(-4,3),\ B'\,(-12,3).$



9. $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1,$

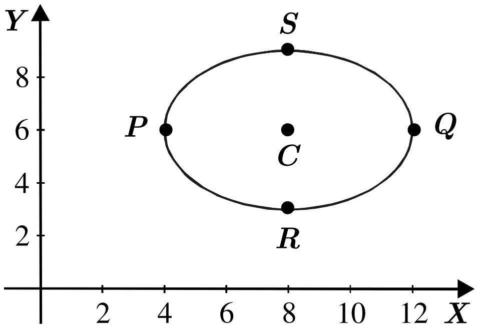
$C\,(1,2),\ F\left(1,2+\sqrt{7}\right) \approx F\,(1,4.65),\ F'\left(1,2-\sqrt{7}\right) \approx F'\,(1,-0.65),\ V\,(1,6),\ V'\,(1,-2),\ B\,(4,2),$

$B'\,(-2,2).$

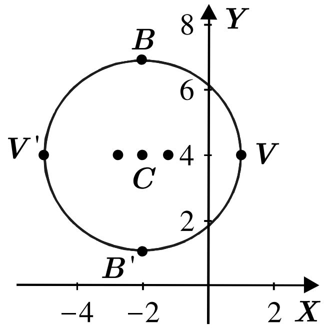


11. No es una elipse, es el punto $\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right).$

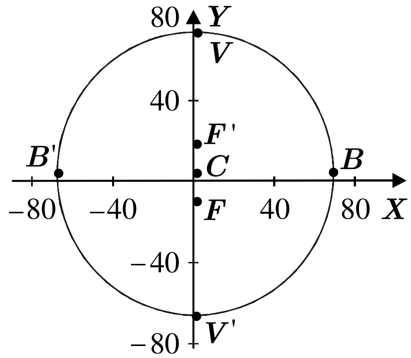
13. $\frac{(x-8)^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1.$



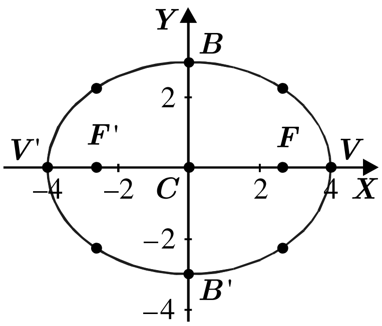
15.



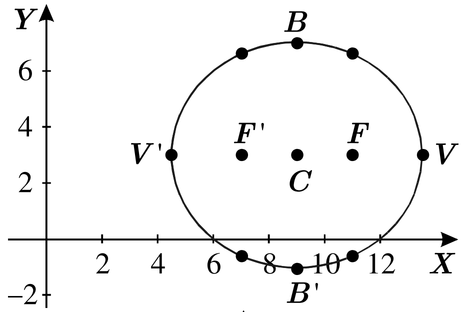
$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{\frac{135}{16}} = 1.$ **17.** $\frac{(x-1)^2}{\left(28\sqrt{6}\right)^2} + \frac{(y-4)^2}{(70)^2} = 1.$



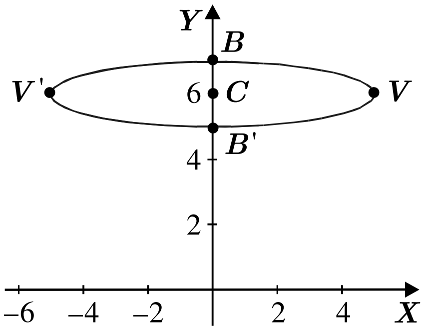
19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$



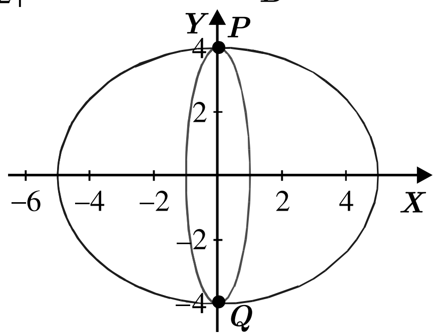
21. $\frac{(x-9)^2}{\frac{81}{4}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{65}{4}} = 1.$



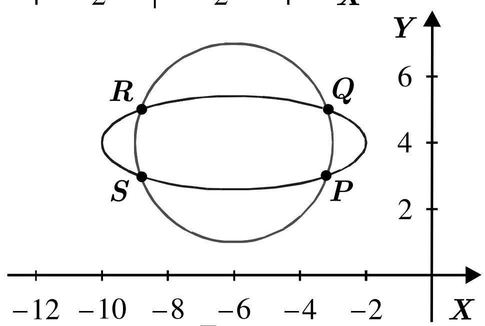
23. $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-6)^2}{1} = 1.$



25.

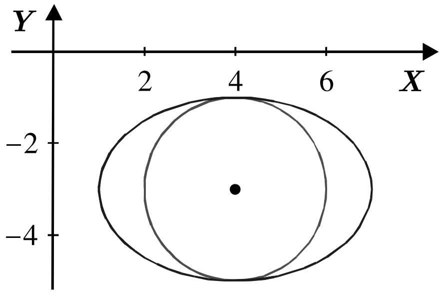


$P\,(0,4)$ y $Q\,(0,-4)$. **27.**

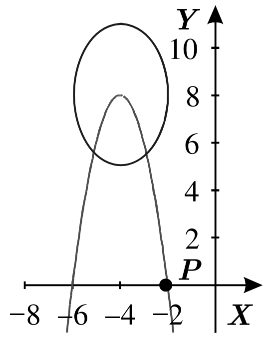


$P\left(-6+2\sqrt{2},3\right) \approx P\,(3.17,3)$, $Q\left(-6+2\sqrt{2},5\right) \approx Q\,(3.17,5)$, $R\left(-6-2\sqrt{2},5\right) \approx R\,(-8.82,5)$, $S\left(-6-2\sqrt{2},3\right) \approx S\,(-8.82,3)$.

29. La ecuación del círculo es $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$.

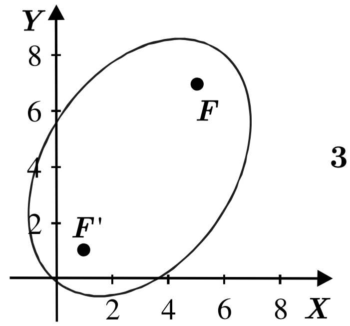


31. $(x+4)^2 = -4\left(\frac{1}{8}\right)(y-8)$.

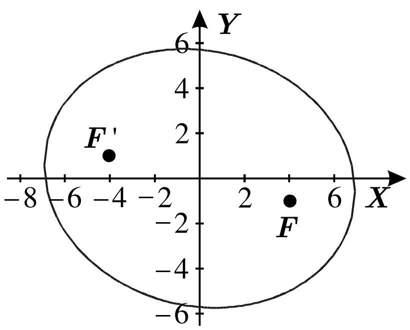


Ejercicios de la página 416

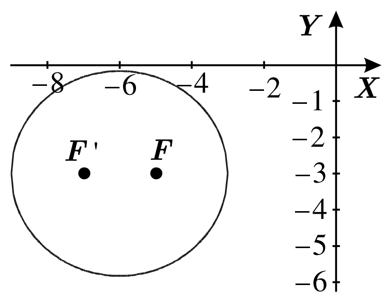
1. $21x^2 - 12xy + 16y^2 - 78x - 92y + 1 = 0$.



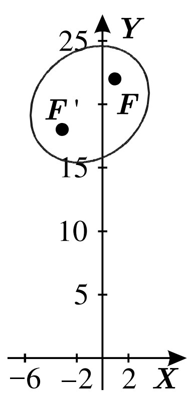
3. $33x^2 + 8xy + 48y^2 - 1568 = 0$.



5. $8x^2 + 9y^2 + 96x + 54y + 297 = 0$.

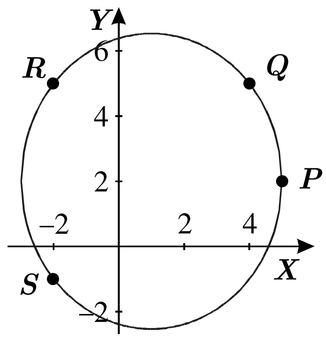


7. $21x^2 - 8xy + 21y^2 + 202x - 848y + 8156 = 0$.

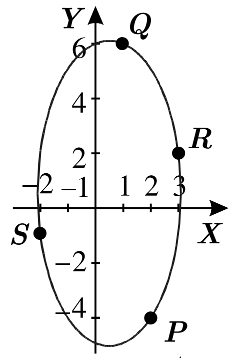


Ejercicios de la página 420

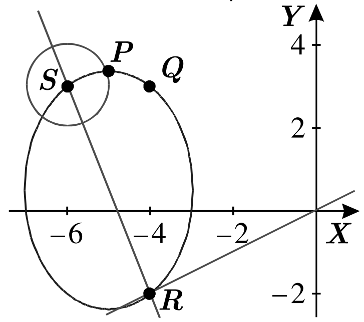
1. $9x^2 + 7y^2 - 18x - 28y - 107 = 0.$



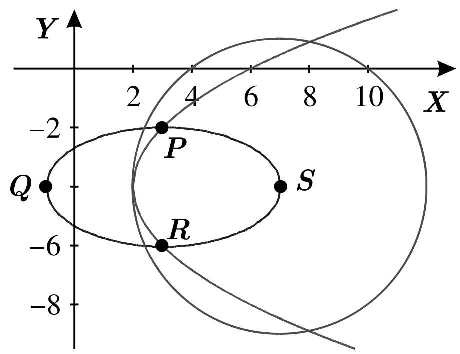
3.



$612x^2+133y^2-606x-143y-3936 = 0.$ **5.** $2x^2+y^2+20x-y+42 = 0.$

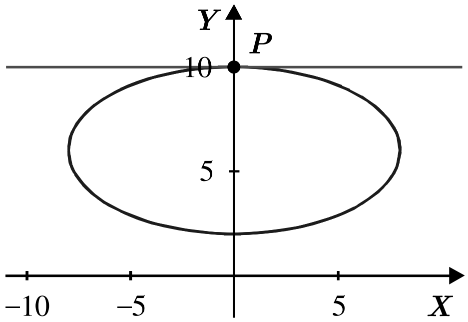


7. $x^2 + 4y^2 - 6x + 32y + 57 = 0.$

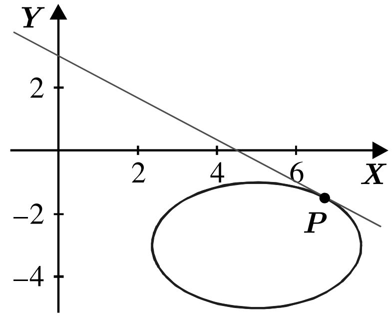


Ejercicios de la página 426

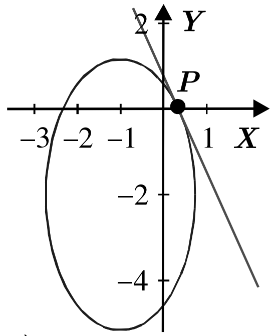
1. $y = 10.$



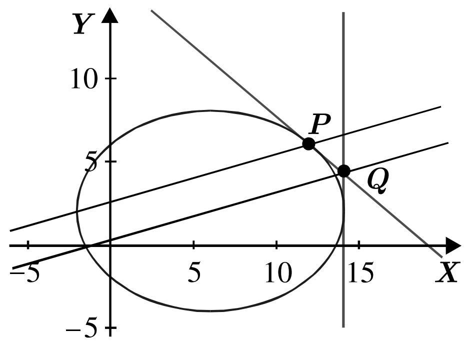
3. $y = -\frac{2}{3}x + 3.$



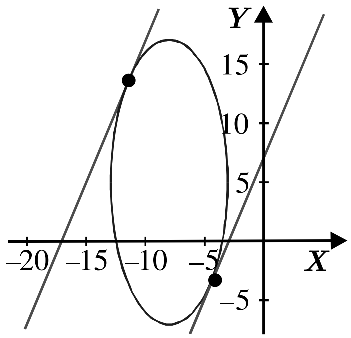
5. $y = -\sqrt{5}x - \sqrt{5} + 3.$



7. Rectas tangentes: $y = -\frac{9}{4\sqrt{7}}x + \frac{75}{2\sqrt{7}} + 2$, $x = 14$, se cortan en $Q\left(14, 2 + \frac{6}{\sqrt{7}}\right)$. Pendiente de la recta que pasa por V' y P es $\frac{3}{28}\sqrt{7}$, pendiente de la recta que pasa C y Q es $\frac{3}{28}\sqrt{7}$, estas dos rectas son paralelas.

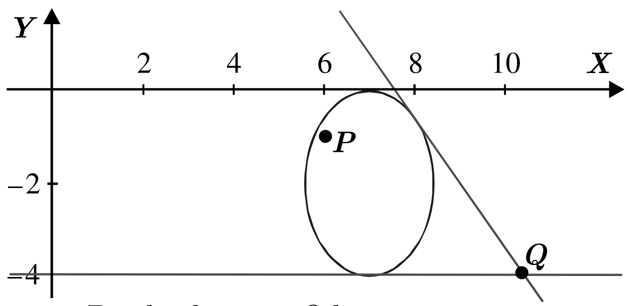


9.



Rectas tangentes: $12x - 5y + 121 - 60\sqrt{2} = 0$ y $12x - 5y + 121 + 60\sqrt{2} = 0$.

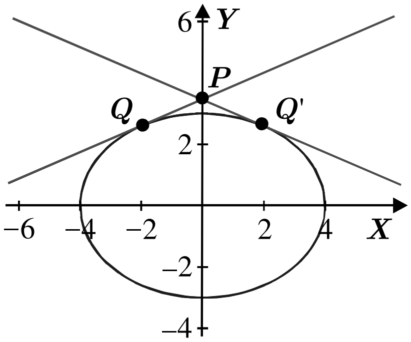
11.



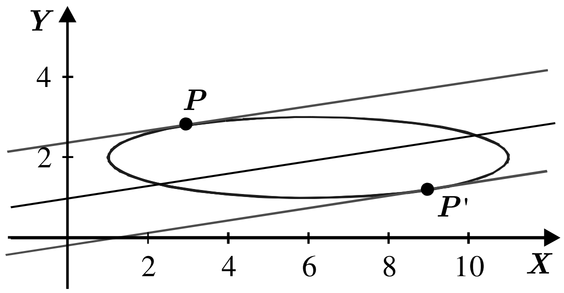
El punto P está dentro de la elipse y no hay tangentes. Desde el punto Q las rectas tangentes son $2x + \sqrt{2}y - 18 + 2\sqrt{2} = 0$ y $y + 4 = 0$.

Ejercicios de repaso de la página 429

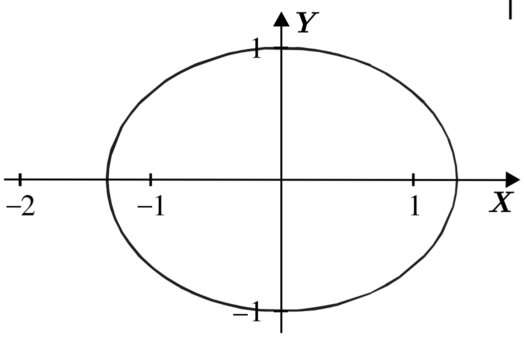
1. $y = -\frac{3}{4\sqrt{3}}x + \frac{6}{\sqrt{3}}$, $Q\left(2, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$; $y = \frac{3}{4\sqrt{3}}x + \frac{6}{\sqrt{3}}$, $Q'\left(-2, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$.



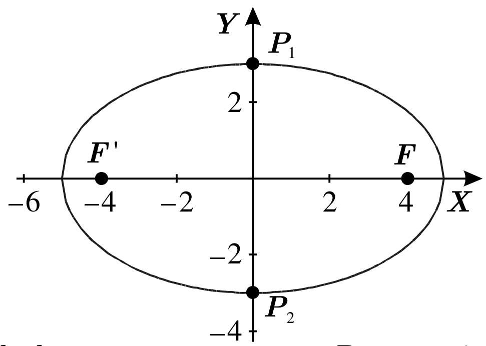
3. $y = \frac{3}{20}x + \frac{47}{20}$, $y = \frac{3}{20}x - \frac{3}{20}$.



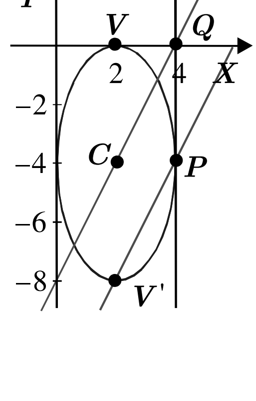
5. $e = \frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0.66$.



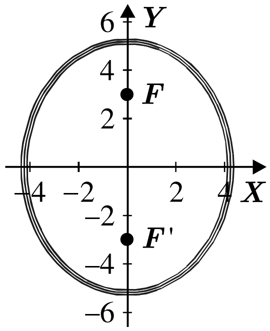
7. $P_1\,(0,3)$, $P_2\,(0,-3)$, $F'\,(-4,0)$, $F\,(4,0)$, $d\,(P_1,F) + d\,(F,P_2) = d\,(P_1,F') + d\,(F',P_2) = 10$.



9. Ecuación de la recta tangente en V: $y = 0$. Ecuación de la recta tangente en P: $x = 4$, $Q\,(4,0)$. Ecuación de la recta que pasa por P y $V'\,(2,-8)$: $y = 2x - 12$. Ecuación de la recta que pasa por $C\,(2,-4)$ y Q: $y = 2x - 8$, estas rectas son paralelas.

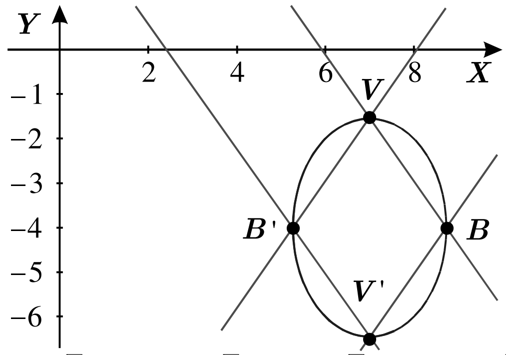


11. $F\,(0,3),\; F'\,(0,-3)\,.$



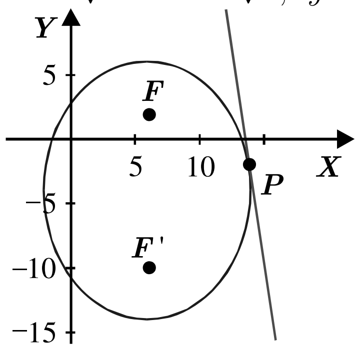
13. La altura del centro del puente debe medir más de 3.15 m para que pase la barcaza.

15.



$y = -\sqrt{2}x + 7\sqrt{2} - 4 - \sqrt{6},\; y = \sqrt{2}x - 7\sqrt{2} - 4 - \sqrt{6},\; y = \sqrt{2}x - 7\sqrt{2} - 4 + \sqrt{6},$ $y = -\sqrt{2}x + 7\sqrt{2} - 4 + \sqrt{6}.$

17.

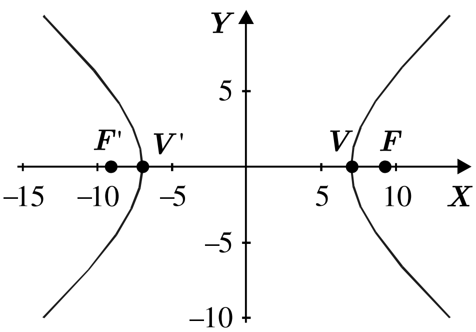


$F'\,(6,-10),\; F\,(6,2),$ $\frac{5}{2}\sqrt{6}x + y - 15\sqrt{6} - 46 = 0.$

Capítulo 11 La hipérbola

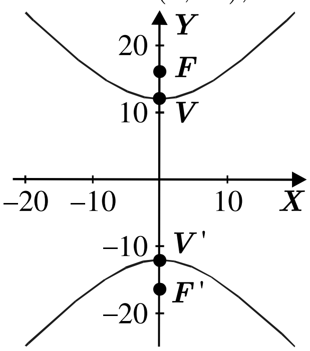
Ejercicios de la página 442

1.



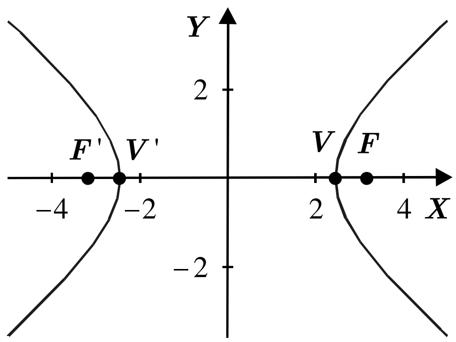
$V\,(7,0),\quad V'\,(-7,0),\quad F\left(\sqrt{85},0\right) \approx F\,(9.22,0),$

$F'\left(-\sqrt{85},0\right) \approx F'(-9.22,0)$. **3.** $V(0,12)$, $V'(0,-12)$, $F\left(0,\sqrt{265}\right) \approx F(0,16.28)$,

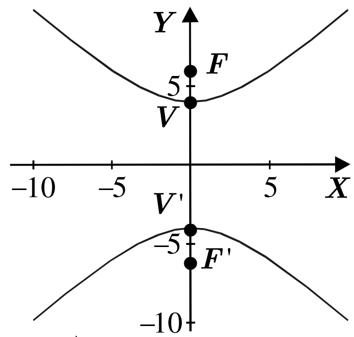


$F'\left(0,-\sqrt{265}\right) \approx F'(0,-16.28)$. **5.** $V\left(\sqrt{6},0\right) \approx V(2.45,0)$,

$V'\left(-\sqrt{6},0\right) \approx V'(-2.45,0)$, $F\left(\sqrt{10},0\right) \approx F(3.16,0)$, $F'\left(-\sqrt{10},0\right) \approx F'(-3.16,0)$.

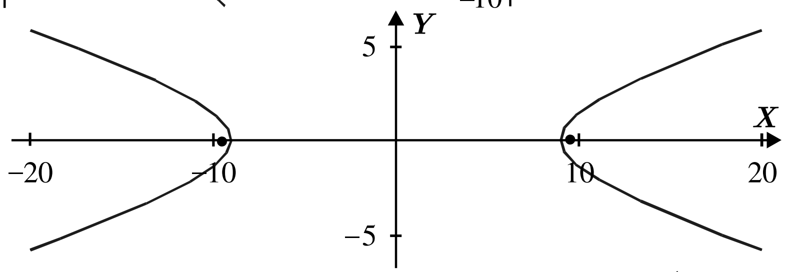


7.



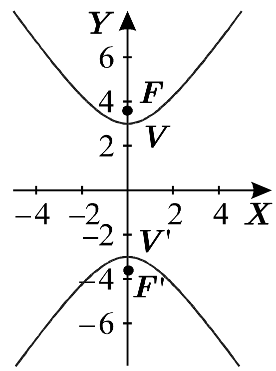
$V(0,4)$, $V'(0,-4)$, $F(0,6)$,

$F'(0,-6)$ **9.**



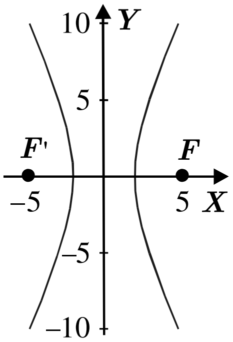
$V(9,0)$, $V'(-9.0)$,

$F\left(3\sqrt{10},0\right) \approx F(9.49,0)$, $F'\left(-3\sqrt{10},0\right) \approx F'(-9.49,0)$ **11.**

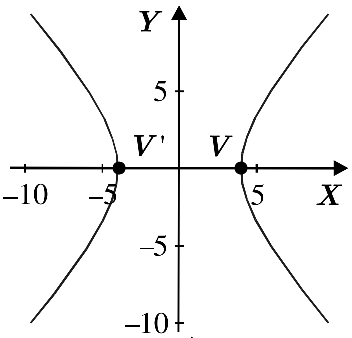


$V(0,3)$,

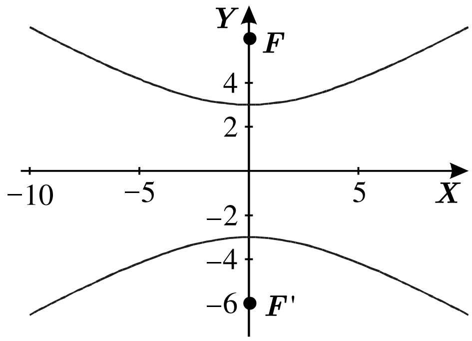
$V'(0,-3)$, $F\left(0,\sqrt{13}\right) \approx F(0,3.61)$, $F'\left(0,-\sqrt{13}\right) \approx F'(0,-3.61)$. **13.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$.



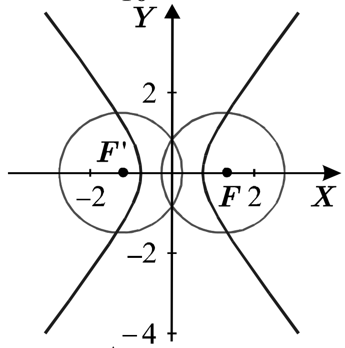
15. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$



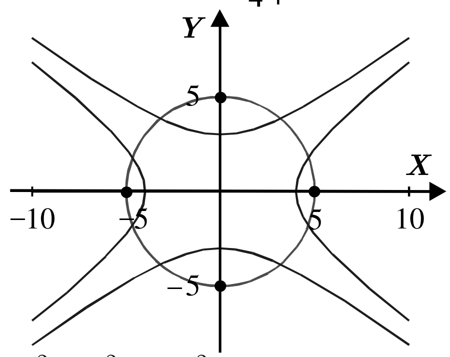
17. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1.$



19.



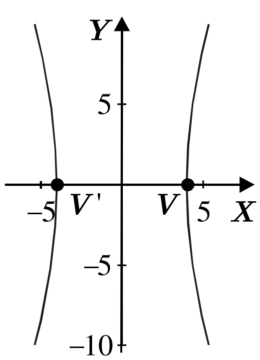
$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$, $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$. **21.** $x^2 + y^2 = 25.$



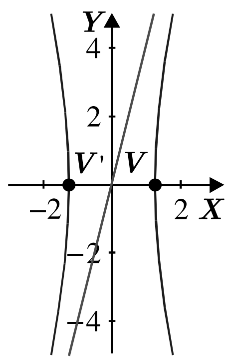
23. La ecuación del círculo que pasa por los cuatro focos es $x^2 + y^2 = 2a^2$. La ecuación del círculo que pasa por los cuatro vértices es $x^2 + y^2 = a^2$.

Ejercicios de la página 448

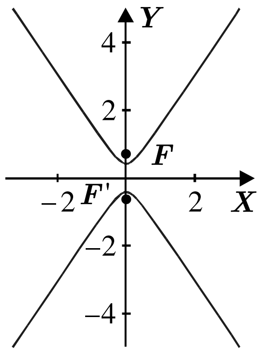
1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{128} = 1.$



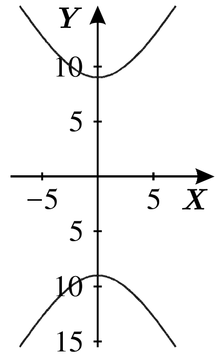
3. $\frac{x^2}{\frac{25}{16}} - \frac{y^2}{25} = 1.$



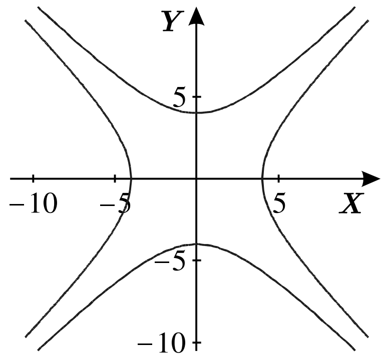
5. $\frac{y^2}{\frac{25}{144}} - \frac{x^2}{\frac{11}{144}} = 1.$



7. $e = \frac{\sqrt{106}}{9} \approx 1.14.$

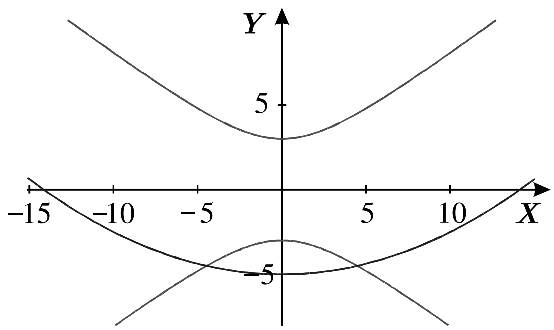


9. Las excentricidades son iguales y valen $\sqrt{2}$.

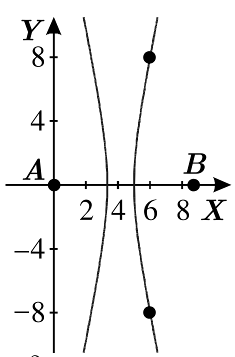


Ejercicios de la página 456

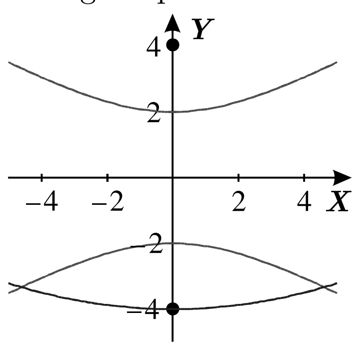
1. $x^2 = 40\,(y+5)$.



3. La diferencia que se debe buscar es de 0.000 5 segundos. **5.** Los dos lugares posibles donde pudo caer el rayo son $(6, 8)$ y $(6, -8)$.

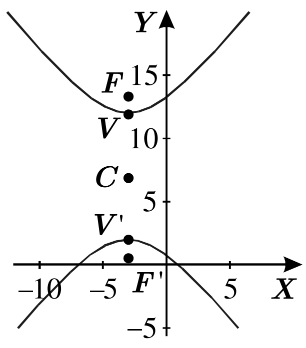


7.

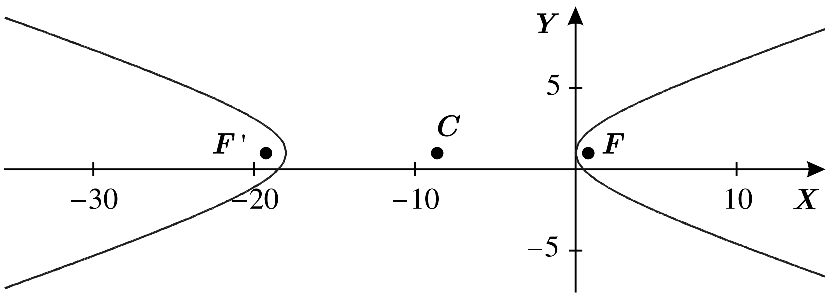


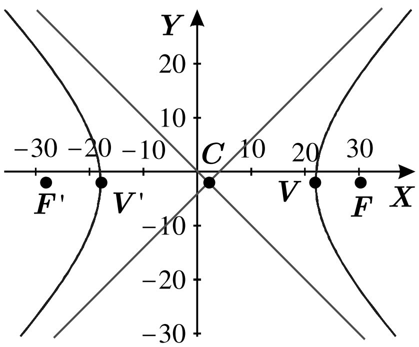
Hipérbola: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1.$ Parábola: $x^2 = 32\,(y+4)\,.$

Ejercicios de la página 464

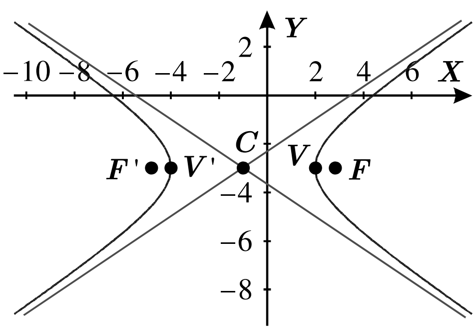
1. 

$C\,(-3,7),\ V\,(-3,12),\ V'\,(-3,2),\ F\left(-3,7+\sqrt{41}\right)\ \approx\ F\,(-3,13.4)$, $F'\left(-3,7-\sqrt{41}\right)\approx F'\,(-3,0.6)$. **3.** $C\,(-9,1), V\,(0,1), V'\,(-18,1), F\left(-9+3\sqrt{10},1\right)\approx F\,(-0.5,1)$, $F'\left(-9-3\sqrt{10},1\right)\approx F'\,(-18.5,1)$.



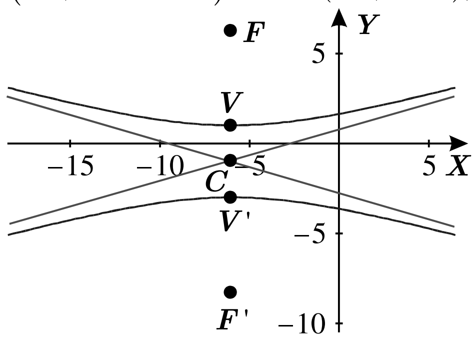
5. 

$\frac{(x-2)^2}{400}-\frac{(y+2)^2}{400}=1,\ F\left(2+20\sqrt{2},-2\right)\ \approx\ F\,(30.3,-2)$, $F'\left(2-20\sqrt{2},-2\right)\ \approx\ F'\,(-26.3,-2),\ \ V\,(22,-2),\ \ V'\,(-18,-2),\ \ y = x-4,\ \ y=-x$.

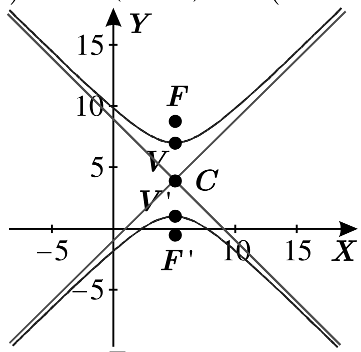
7. 

$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1,\ F\left(-1+\sqrt{13},-3\right)\approx F\,(2.61,-3)$, $F'\left(-1-\sqrt{13},-3\right)\ \approx\ F'\,(-4.61,-3),\ V\,(2,-3),\ V'\,(-4,-3),\ y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3},\ y=-\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$.

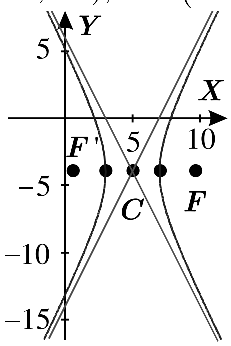
9. $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x+6)^2}{49} = 1$, $F\left(-6,-1+\sqrt{53}\right) \approx F(-6,6.3)$, $F'\left(-6,-1-\sqrt{53}\right) \approx F'(-6,-8.3)$, $V(-6,1)$, $V'(-6,-3)$, $y = \frac{2}{7}x + \frac{5}{7}$, $y = -\frac{2}{7}x - \frac{19}{7}$.



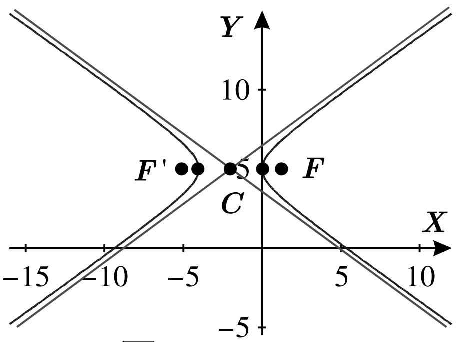
11. $\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{9} = 1$, $F\left(5,4+3\sqrt{2}\right) \approx F(5,8.2)$, $F'\left(5,4-3\sqrt{2}\right) \approx F'(5,-0.2)$, $V(5,7)$, $V'(5,1)$, $y = x-1$, $y = -x+9$.



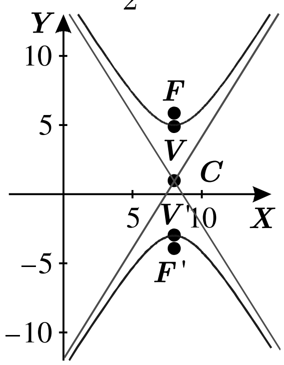
13. $\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{16} = 1$, $F\left(5+2\sqrt{5},-4\right) \approx F(9.5,-4)$, $F'\left(5-2\sqrt{5},-4\right) \approx F'(0.5,-4)$, $V(7,-4)$, $V'(3,-4)$, $y = 2x-14$, $y = -2x+6$.



15. $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{2} = 1$, $F\left(-2+\sqrt{6},5\right) \approx F(0.4,5)$, $F'\left(-2-\sqrt{6},5\right) \approx F'(-4.4,5)$, $V(0,5)$, $V'(-4,5)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} + 5$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2} + 5$.

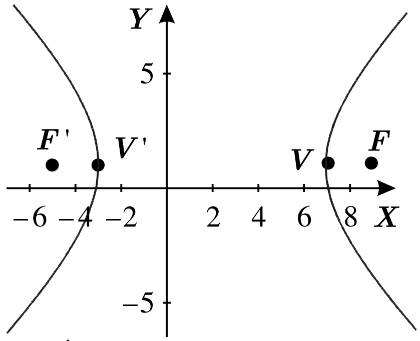


17. $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-8)^2}{6} = 1$,

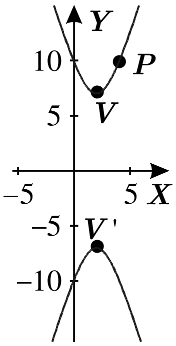


$F\left(8,1+\sqrt{22}\right) \approx F(8,5.7)$, $F'\left(8,1-\sqrt{22}\right) \approx F'(8,-3.7)$, $V(8,5)$, $V'(8,-3)$, $y = \frac{4}{\sqrt{6}}x - \frac{32}{\sqrt{6}} + 1$,

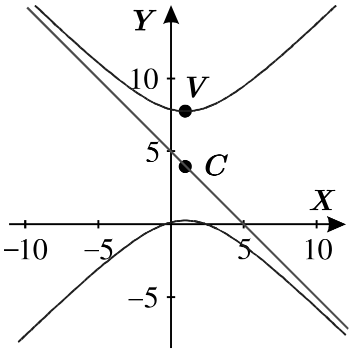
$y=-\frac{4}{\sqrt{6}}x+\frac{32}{\sqrt{6}}+1.$ **19.** $\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{24}=1.$



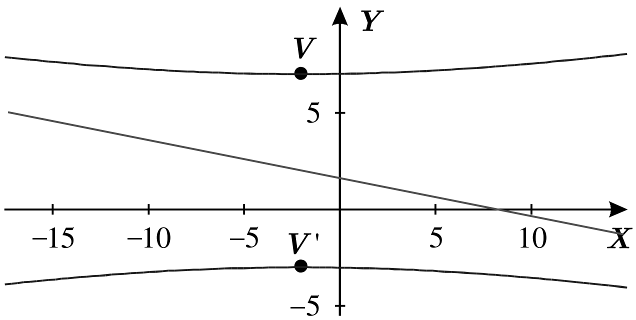
21. $\frac{y^2}{49}-\frac{(x-2)^2}{4}=1.$



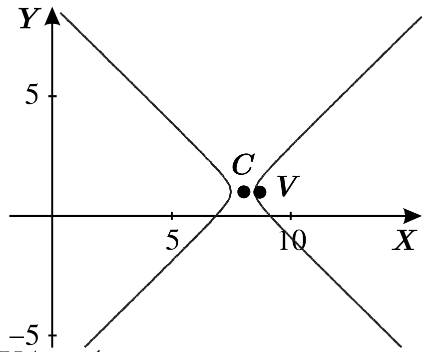
23.



$\frac{(y-4)^2}{14}-\frac{(x-1)^2}{14}=1.$ **25.** $\frac{(y-2)^2}{25}-\frac{(x+2)^2}{625}=1.$

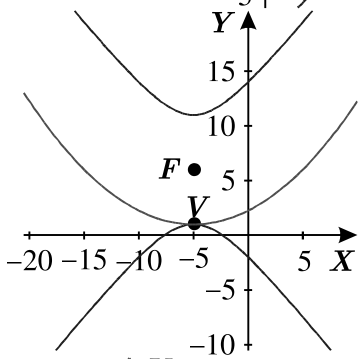


27.



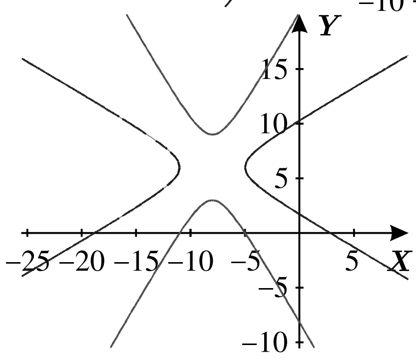
$$\frac{(x-8)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(y-1)^2}{\frac{6}{25}}=1.$$

29.

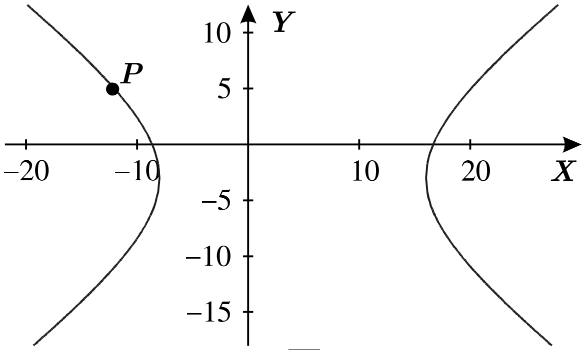


$$(x+5)^2=20\,(y-1).$$

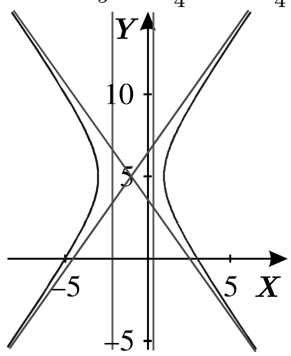
31. $\frac{(y-6)^2}{9}-\frac{(x+8)^2}{3}=1.$



33. $\frac{(x-4)^2}{144}-\frac{(y+3)^2}{81}=1.$

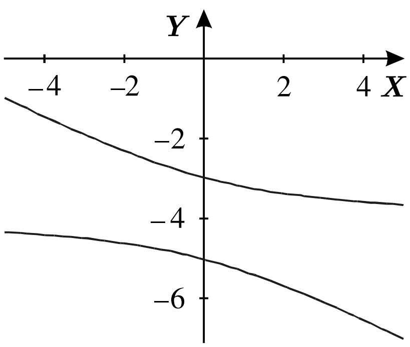


35. $3x - 2y - 11 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$, la distancia de $F'\left(3, -1 - \sqrt{13}\right) \approx F'(3, -4.61)$ a cada una de las asíntotas es $2 = b$. **37.** El lado recto mide $\frac{33}{4}$. Ecuaciones de las asíntotas: $y = \frac{\sqrt{33}}{4}x + \frac{\sqrt{33}}{4} + 5$, $y = -\frac{\sqrt{33}}{4}x - \frac{\sqrt{33}}{4} + 5$. Ecuaciones de las directrices: $x = \frac{1}{7}$, $x = -\frac{15}{7}$.



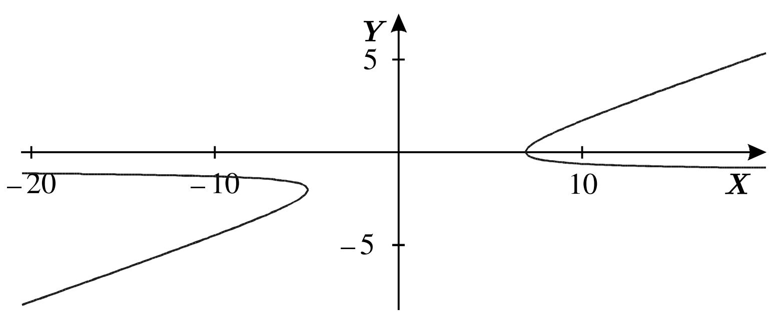
Ejercicios de la página 468

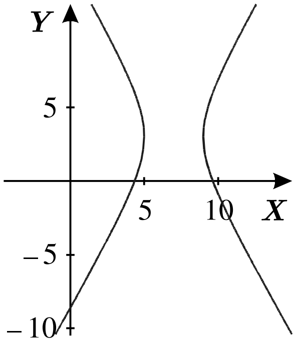
1.

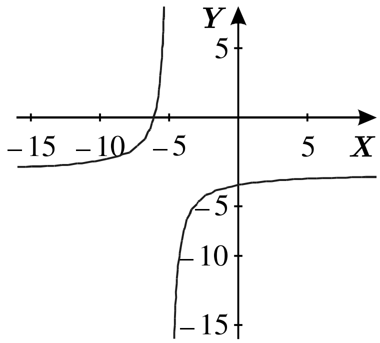


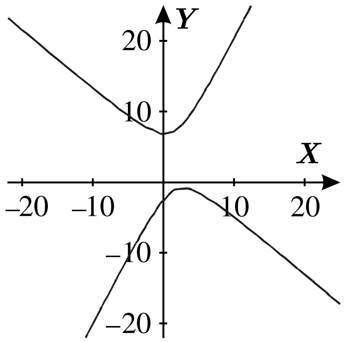
$8xy + 15y^2 + 32x + 120y + 224 = 0$.

3. $12xy - 35y^2 + 12x - 82y - 83 = 0$.

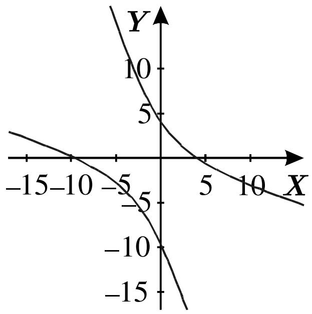


5. 

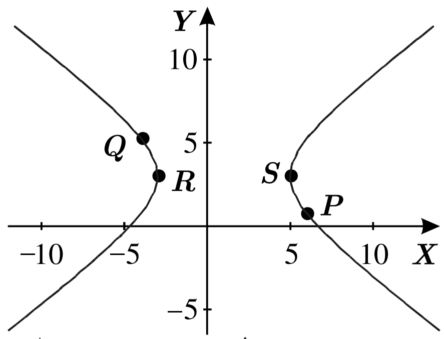
$3x^2 - y^2 - 42x + 6y + 126 = 0.$ **7.** 

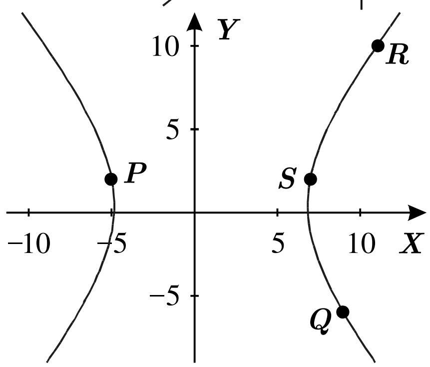
$2xy+8x+10y+49 = 0.$ **9.** 

$-60x^2-40xy+36y^2+300x-156y-631 = 0.$

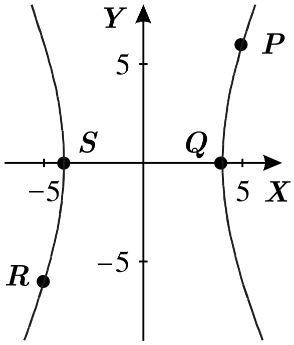
11. $5x^2 + 18xy + 5y^2 + 28x + 28y - 196 = 0.$ 

Ejercicios de la página 472

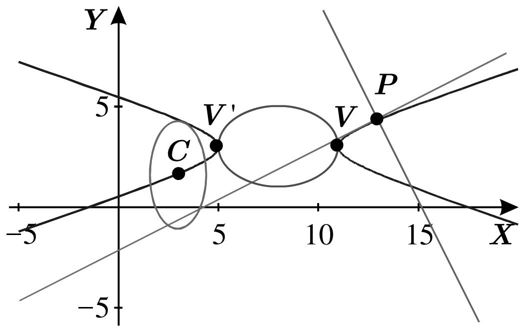
1. $9x^2 - 16y^2 - 18x + 96y - 279 = 0.$ 

3. $32x^2 - 23y^2 - 64x + 20y - 1068 = 0.$ 

5. $4x^2 - y^2 - 64 = 0.$

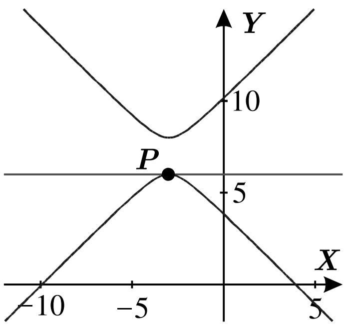


7. Los puntos son: $V'(5,3)$, $V(11,3)$, $P\left(13,\frac{13}{3}\right)$, $C\left(3,\frac{5}{3}\right)$. La ecuación de la hipérbola es $x^2-9y^2-16x+54y-26=0$.

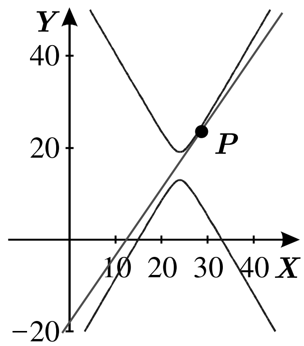


Ejercicios de la página 476

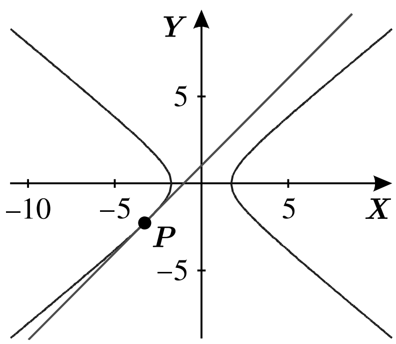
1.



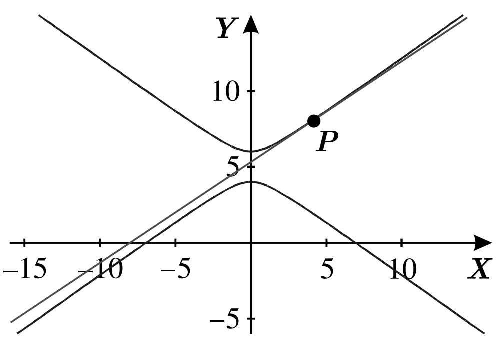
$y=6$. **3.** $y=\frac{3}{2}x-\frac{37}{2}$.



5. $y=x+1$.

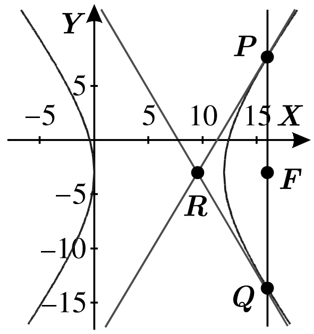


7.



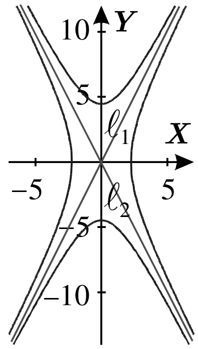
$y=\frac{2}{3}x+\frac{16}{3}$.

9. Recta tangente en $P\left(16,\frac{23}{3}\right)$: $y=\frac{5}{3}x-19$. Recta tangente en $Q\left(16,-\frac{41}{3}\right)$: $y=-\frac{5}{3}x+13$. El punto de intersección de las dos rectas tangentes es $R\left(\frac{48}{5}, -3\right)$.

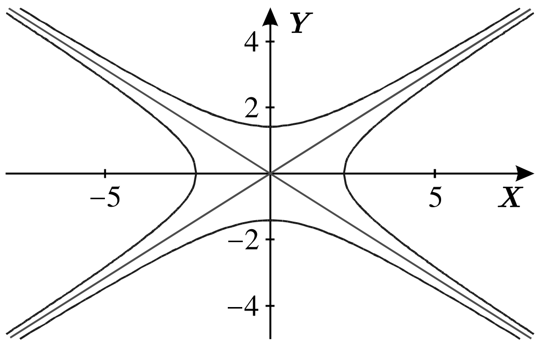


Ejercicios de repaso de la página 478

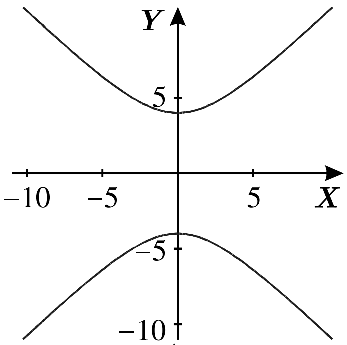
1. Hipérbolas: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$, $\frac{y^2}{20} - \frac{x^2}{5} = 1$. Asíntotas: $y = 2x$, $y = -2x$.



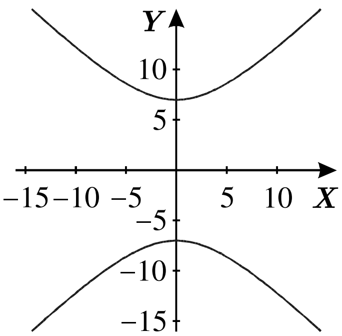
3. $y = \sqrt{\frac{2}{5}}x$, $y = -\sqrt{\frac{2}{5}}x$.



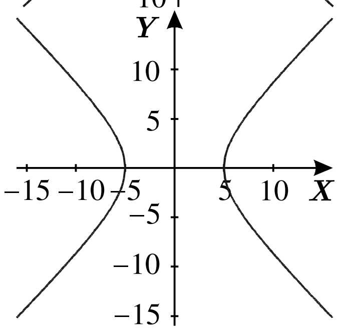
5. **a)** $e = \sqrt{2}$



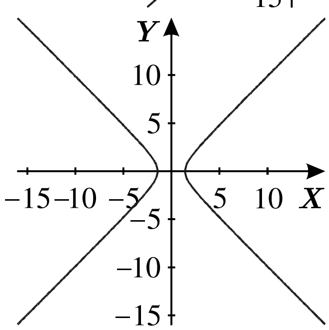
b) $e = \sqrt{2}$.



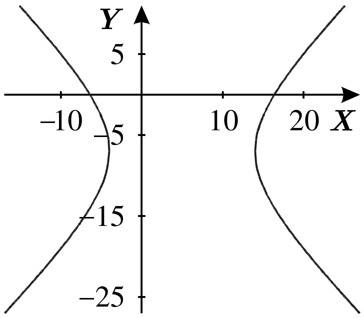
c) $e = \sqrt{2}$.



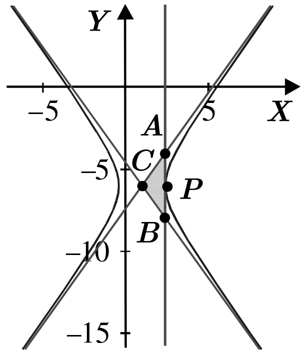
d) $e = \sqrt{2}$.



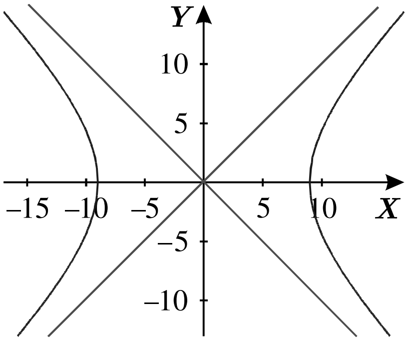
e) $e = \sqrt{2}$. **f)** $e = \sqrt{2}$.



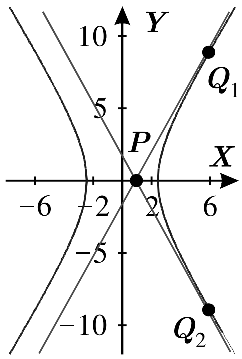
7. El área del triángulo ABC es $\frac{4}{\sqrt{2}}$.



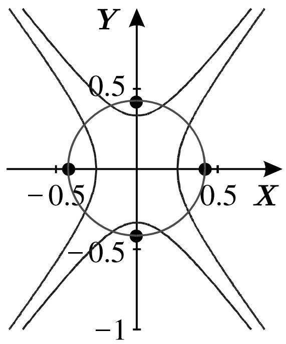
9.



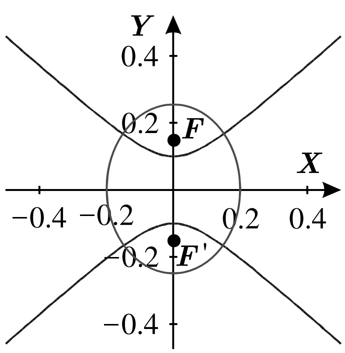
El producto de las pendientes de las asíntotas es igual a -1, por tanto, son perpendiculares. **11.** Hay dos rectas tangentes que pasan por P: $y = \frac{4}{\sqrt{5}}x - \frac{4}{\sqrt{5}}$ y $y = -\frac{4}{\sqrt{5}}x + \frac{4}{\sqrt{5}}$.



13. $x^2 + y^2 = \frac{25}{144}$.

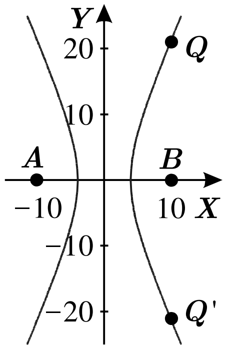


15. $F\left(0, \frac{3}{20}\right)$, $F'\left(0, -\frac{3}{20}\right)$.

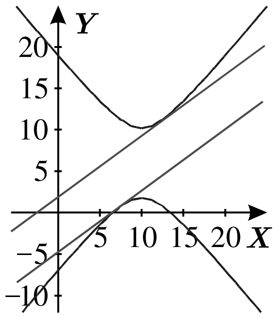


17. El cañón se encuentra en el punto

$Q\,(10,21)$, o bien en el punto $Q'\,(10,-21)$.



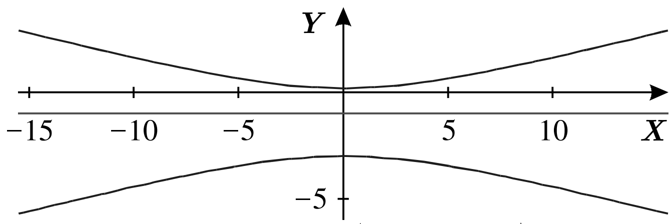
19. $3x - 4y - 6 + 6\sqrt{5} = 0$, $3x - 4y - 6 - 6\sqrt{5} = 0$.



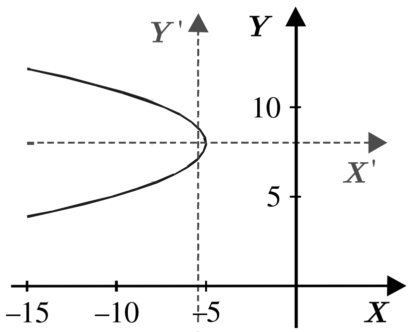
Capítulo 12 La ecuación general de segundo grado

Ejercicios de la página 495

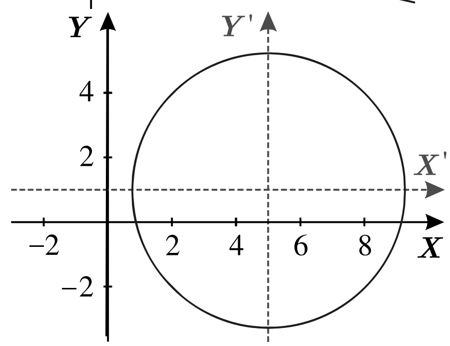
1. $x^2 - 15y^2 - 42y + 9 = 0$.



3. $(y')^2 = -\frac{12}{7}\left(x' - \frac{3}{7}\right)$.



5. $(x')^2 + (y')^2 = 18$.



Ejercicios de la página 504

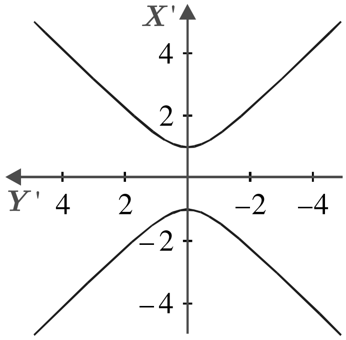
1. $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)$, $B\left(-4\sqrt{3} - 2, 4 - 2\sqrt{3}\right)$, $C\left(2\sqrt{3} + \frac{7}{2}, -2 + \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)$. **3.** $A\left(\frac{8}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(\frac{8}{\sqrt{2}}, -\frac{10}{\sqrt{2}}\right)$, $C\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{18}{\sqrt{2}}\right)$. **5.** $A\,(1,0)$, $B\,(-2,3)$, $C\,(-5,-7)$. **7.** $B\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)$, $A\left(-\sqrt{3}, 1\right)$, $C\left(-\frac{7}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}, -\frac{7}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{2}\right)$. **9.** $A\left(1 + \frac{7\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} + \frac{7}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2} + 4\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\right)$,

$C\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$. **11.** $A\,(7,1)$, $B\,(8,-8)$, $C\,(35,2)$. **13.** $x' - \sqrt{2}y' - 5 = 0$.

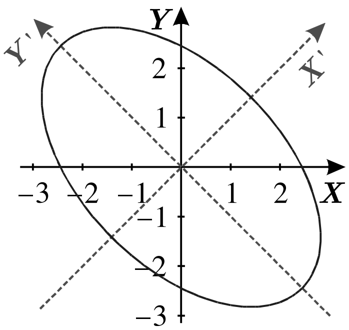
15. $4x' + 9 = 0$. **17.** $4x' + 5y' + 7 = 0$. **19.** $x' + 2y' - 7 = 0$.

21. $\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}-4\right)x' - \left(\frac{5}{2}+4\sqrt{3}\right)y' + 5 = 0$. **23.** $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)x' - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)y' = 0$.

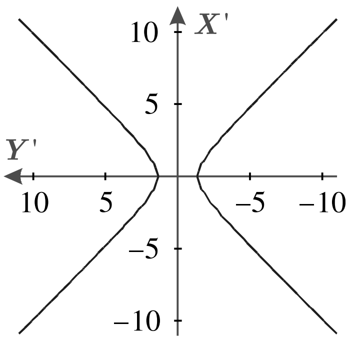
25. $(x')^2 - (y')^2 = 1$.



27. $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{12} = 1$.

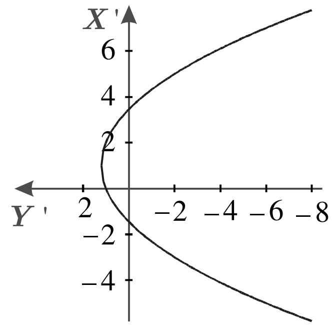


29.



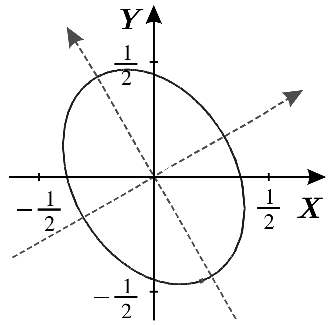
$\frac{(y')^2}{2} - \frac{(x')^2}{2} = 1$.

31.



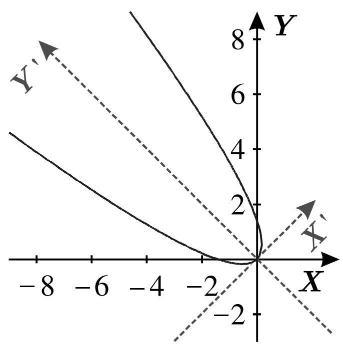
$(x'-1)^2 = -4\left(\frac{5}{4}\right)\left(y'-\frac{6}{5}\right)$.

33.

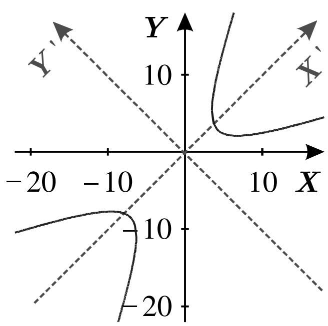


$\frac{(x')^2}{\frac{1}{8}} + \frac{(y')^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

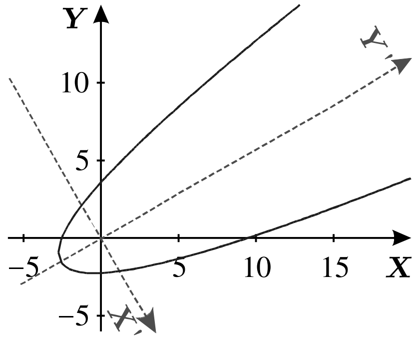
35. $(x')^2 = y'$.



37.

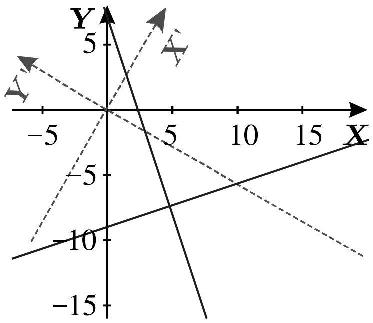


$\frac{(x'+3)^2}{64} - \frac{(y'+1)^2}{16} = 1.$

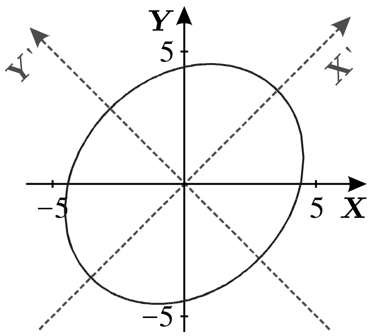
39. 

$(x')^2 = 2\,(y'+3).$

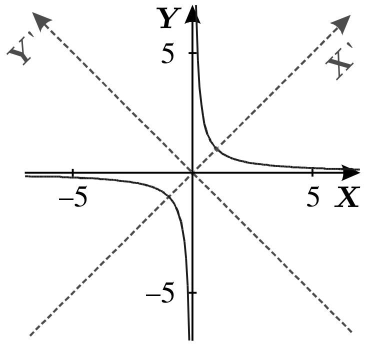
41. $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) x' + \left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right) y' - 7 = 0,\ \left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right) x' - \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) y' - 27 = 0.$



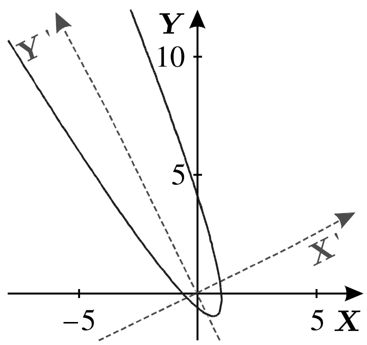
43. $\frac{(x')^2}{25} + \frac{(y')^2}{16} = 1.$



Ejercicios de la página 514

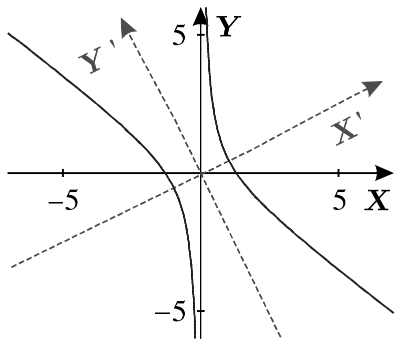
1. 

Hay que aplicar una rotación de 45°. **3.** Hay que aplicar una rotación de aproximadamente 26.6 °

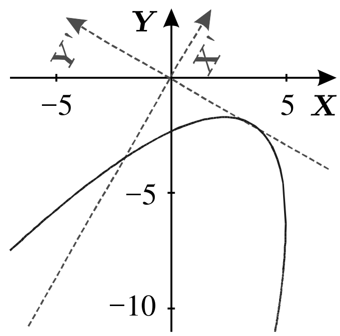


5. Hay que aplicar una

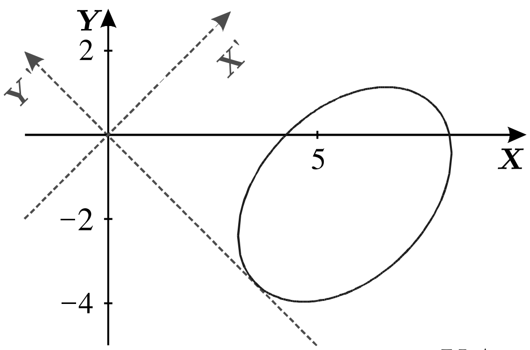
rotación de aproximadamente $26.6\,°$.



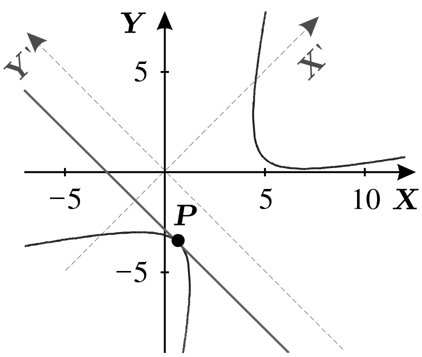
7. Elipse. **9.** Elipse.



11. Hipérbola. **13.** Hipérbola. **15.** Parábola. $(y'+4)^2 = -4x'$.

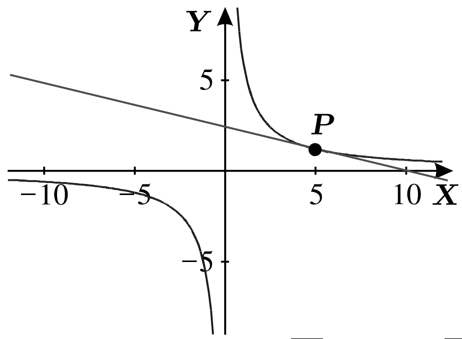


17. Elipse. $\frac{(x'-3)^2}{9} + \frac{(y'+5)^2}{4} = 1$. **19.** Recta tangente a la cónica en el punto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$: $x + y + 2\sqrt{2} = 0$.

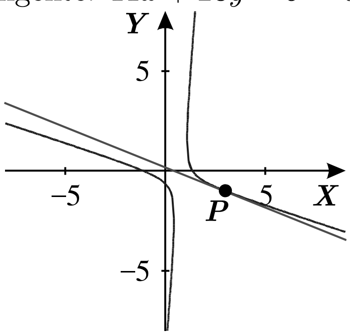


Ejercicios de la página 518

1. Hipérbola. Recta tangente $6x + 25y - 60 = 0$.

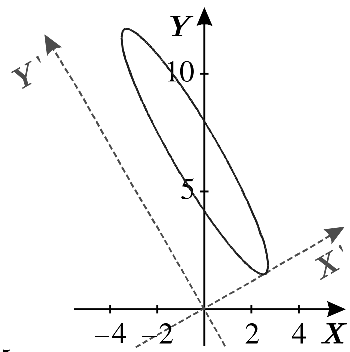


3. Recta tangente: $11x + 28y - 5 = 0$. Es la hipérbola: $104(x')^2 - 65(y')^2 - 23\sqrt{13}x' - 28\sqrt{13}y' - 78 = 0$.

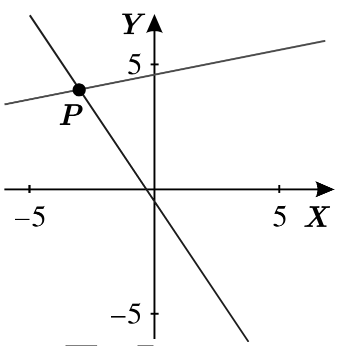


Ejercicios de repaso de la página 519

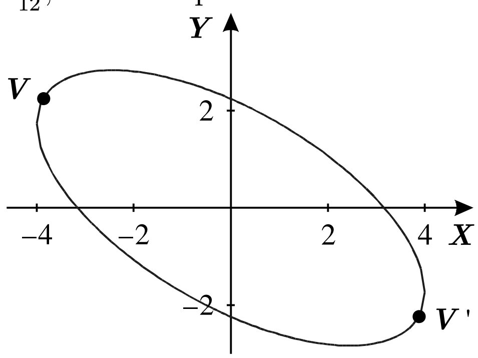
1. Es la elipse: $(x' - 3)^2 + \dfrac{(y' - 6)^2}{36} = 1$.



3. Si $k = \frac{25}{12}$, es una parábola. Si $k > \frac{25}{12}$, es una elipse. Si $k < \frac{25}{12}$, es una hipérbola. **5.** $x' = x + 3$, $y' = y - 4$.



7.



$V'\left(\sqrt{15}, -\sqrt{5}\right)$, $V\left(-\sqrt{15}, \sqrt{5}\right)$.

Índice de materias