Matemática: razonamiento y aplicaciones

DÉCIMA EDICIÓN



MILLER | HEEREN | HORNSBY

PEARSON
Addison Wesley

Matemática:
razonamiento y aplicaciones

Matemática:
razonamiento y aplicaciones

DÉCIMA EDICIÓN

Charles D. Miller

Vern E. Heeren
American River College

John Hornsby
University of New Orleans

Traducción:

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Escuela de Actuaría-Universidad Anáhuac
ESFM-IPN

Javier Enríquez Brito
Traductor profesional

Revisión técnica:

Carmen D. Peraza González
Catedrática Auxiliar
Sistema Universitario Ana G. Méndez
Universidad del Este de Puerto Rico

Luz Leida Echevarría Luciano
Catedrática
Universidad de Puerto Rico en Ponce
Puerto Rico



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

Miller, Charles D., Heeren, Vern E. y John Hornsby

Matemática: razonamiento y aplicaciones

Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
ISBN 970-26-0752-3
Área: Universidad

Formato: 20 × 25.5 cm. Páginas 944

Authorized translation from the English language edition, entitled Mathematical ideas, 10th ed., by Charles D. Miller, Vern E. Heeren, John Hornsby, published by Pearson Education, Inc., publishing as ADDISON-WESLEY, INC., Copyright©2004. All rights reserved. ISBN 0-321-16808-9

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada Mathematical ideas, 10/e de Charles D. Miller, Vern E. Heeren, John Hornsby, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como ADDISON-WESLEY, INC., Copyright©2004. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español

Editor: Enrique Quintanar Duarte
e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com
Editora de desarrollo: Astrid María Mues Zepeda
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández

Edición en inglés:
Publisher: Greg Tobin
Sponsoring Editor: Anne Kelly
Editorial Assistant: Cecilia Stashwick
Associate Project Editor: Joanne Ha
Senior Production Supervisor: Karen Wernholm
Production Coordination: Elm Street Publishing Services, Inc.
Marketing Manager: Becky Anderson
Marketing Coordinator: Julia Coen
Associate Producer: Sara Anderson
Software Development: Sharon Humbert and Marty Wright
Senior Manufacturing Buyer: Hugh Crawford
Rights and Permissions Advisor: Dana Weightman
Text Design: Elm Street Publishing Services, Inc.
Cover Design: Barbara T. Atkinson
Composition: Beacon Publishing Services
Illustrations: Precision Graphics
Cover Photo: © Richard Cummins/CORBIS /Foreground Sculpture: Alexander Liberman. The cover photo shows an orange-red painted steel sculpture, Alexander Liberman's Olympic Iliad. Liberman's piece was installed in the Sculpture Garden at the Seattle Center in 1984. The Seattle Space Needle, which opened in 1962, rises to the height of 605 feet in the background.

DÉCIMA EDICIÓN, 2006

D.R. © 2006 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco núm. 500-5o. piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Reg. Núm. 1031

Addison-Wesley es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorizacióna del editor o de sus representantes.

ISBN 970-26-0752-3

Impreso en México. *Printed in Mexico.* 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 08 07 06

Contenido

Prefacio xi

capítulo 1

El arte de resolver problemas 1

1.1 Resolución de problemas mediante el razonamiento inductivo *2*
1.2 Una aplicación del razonamiento inductivo: patrones de números *10*
1.3 Estrategias para resolver problemas *20*
1.4 Cálculo, estimación y lectura de gráficas *31*
Extensión: El uso de la escritura para aprender matemáticas *40*
Investigación en grupo: Descubrir las matemáticas en el triángulo de Pascal *46*
Examen del capítulo 1 *47*

capítulo 2

Conceptos básicos de la teoría de conjuntos 49

2.2 Símbolos y terminología *50*
2.2 Diagramas de Venn y subconjuntos *56*
2.3 Operaciones con conjuntos y productos cartesianos *63*
2.4 Números cardinales y encuestas *76*
2.5 Conjuntos infinitos y sus números cardinales *83*
Investigación en grupo: Una encuesta en su clase *90*
Examen del capítulo 2 *91*

capítulo 3

Introducción a la lógica 94

3.1 Proposiciones y cuantificadores *95*
3.2 Tablas de verdad y proposiciones equivalentes *102*
3.3 Condicional y circuitos *113*
3.4 Más sobre la condicional *123*
3.5 Análisis de argumentos mediante diagramas de Euler *129*
Extensión: Rompecabezas lógicos *133*
3.6 Análisis de argumentos mediante tablas de verdad *136*
Investigación en grupo: Revisión de los rompecabezas lógicos *148*
Examen del capítulo 3 *149*

capítulo 4 **Numeración y sistemas matemáticos 151**

4.1 Los sistemas de numeración a través de la historia *152*
4.2 Aritmética en el sistema indoarábigo *160*
4.3 Cómo convertir números a diferentes bases *169*
4.4 Sistemas matemáticos finitos *179*
4.5 Grupos *186*
Investigación en grupo: Algoritmo para un calendario perpetuo *193*
Examen del capítulo 4 *194*

capítulo 5 **Teoría de números 195**

5.1 Números primos y compuestos *196*
5.2 Temas selectos de la teoría de números *206*
5.3 Máximo factor común y mínimo común múltiplo *212*
5.4 Aritmética del reloj y sistemas modulares *220*
5.5 La sucesión de Fibonacci y la razón áurea *232*
Extensión: Cuadros mágicos *240*
Investigación en grupo: Investigación de una propiedad interesante de los números cuadrados *244*
Examen del capítulo 5 *245*

capítulo 6 **El sistema de los números reales 247**

6.1 Orden y valor absoluto en los números reales *248*
6.2 Operaciones, propiedades y aplicaciones de los números reales *257*
6.3 Números racionales y representación decimal *270*
6.4 Números irracionales y representación decimal *283*
6.5 Aplicaciones de decimales y porcentajes *293*
Extensión: Números complejos *306*
Investigación en grupo: Presupuesto para la compra de un automóvil *310*
Examen del capítulo 6 *311*

capítulo 7 **Los conceptos básicos del álgebra 314**

7.1 Ecuaciones lineales *315*
7.2 Aplicaciones de las ecuaciones lineales *325*
7.3 Razón, proporción y variación *339*
7.4 Desigualdades lineales *352*
7.5 Propiedades de los exponentes y notación científica *360*
7.6 Polinomios y factorización *372*

7.7 Ecuaciones cuadráticas y sus aplicaciones *381*
Investigación en grupo: ¿Cómo se compara su velocidad de caminata con la de los caminantes olímpicos? *390*
Examen del capítulo 7 *391*

capítulo 8

Gráficas, funciones y sistemas de ecuaciones y desigualdades 393

8.1 Sistema de coordenadas rectangulares y círculos *394*
8.2 Rectas y sus pendientes *402*
8.3 Ecuaciones de rectas y modelos lineales *412*
8.4 Introducción a funciones: funciones lineales, aplicaciones y modelos *422*
8.5 Funciones cuadráticas, aplicaciones y modelos *434*
8.6 Funciones exponenciales y logarítmicas, aplicaciones y modelos *444*
8.7 Sistemas de ecuaciones y sus aplicaciones *456*
Extensión: Uso de operaciones sobre las filas de una matriz, para resolver sistemas *476*
8.8 Desigualdades lineales y programación lineal *481*
Investigación en grupo: Vivir con sida *488*
Examen del capítulo 8 *489*

capítulo 9

Geometría 491

9.1 Puntos, líneas, planos y ángulos *492*
9.2 Curvas, polígonos y círculos *502*
Extensión: Construcciones geométricas *509*
9.3 Perímetro, área y circunferencia *512*
9.4 La geometría de los triángulos: congruencia, similitud y el teorema de Pitágoras *523*
9.5 Figuras en el espacio, volumen y área superficial *536*
9.6 Geometría transformacional *545*
9.7 Geometría no euclidiana, topología y redes *556*
9.8 Caos y geometría fractal *567*
Investigación en grupo: Generalización del concepto de suma de ángulos *573*
Examen del capítulo 9 *574*

capítulo 10

Trigonometría 576

10.1 Los ángulos y sus medidas *577*
10.2 Funciones trigonométricas de los ángulos *582*
10.3 Identidades trigonométricas *586*
10.4 Triángulos rectángulos y valores de funciones *591*

10.5 Aplicaciones de los triángulos rectángulos *600*
10.6 Leyes de senos y cosenos; fórmulas de área *608*
10.7 El círculo unitario y gráficas *620*
Investigación en grupo: Obtención de un *punto* sobre valores de funciones trigonométricas *626*
Examen del capítulo 10 *627*

capítulo 11 **Métodos de conteo 629**

11.1 Conteo mediante un listado sistemático *630*
11.2 Uso del principio fundamental de conteo *637*
11.3 Uso de permutaciones y combinaciones *646*
11.4 Uso del triángulo de Pascal y del teorema del binomio *658*
11.5 Problemas de conteo que incluyen "no" y "o" *664*
Investigación en grupo: Aproximación de factoriales mediante la fórmula de Stirling *671*
Examen del capítulo 11 *672*

capítulo 12 **Probabilidad 673**

12.1 Conceptos básicos *674*
12.2 Eventos que incluyen "no" y "o" *684*
12.3 Eventos que incluyen "y" *691*
12.4 Probabilidad binomial *701*
12.5 Valor esperado *707*
12.6 Estimación de probabilidades por medio de la simulación *716*
Investigación en grupo: Cómo aproximar π por medio de la probabilidad *720*
Examen del capítulo 12 *721*

capítulo 13 **Estadística 723**

13.1 Distribuciones de frecuencias y gráficas *725*
13.2 Medidas de tendencia central *735*
13.3 Medidas de dispersión *748*
13.4 Medidas de posición *756*
13.5 La distribución normal *763*
Extensión: Cómo mentir con la estadística *771*
13.6 Regresión y correlación *778*
Investigación en grupo: Cómo combinar conjuntos de datos *784*
Examen del capítulo 13 *785*

capítulo 14

Matemáticas del consumidor 788

14.1 El valor del dinero en el tiempo *789*
Extensión: Anualidades *802*
14.2 Crédito al consumidor *806*
14.3 La verdad sobre los préstamos *813*
14.4 Compra de una casa *822*
14.5 Inversión *832*
Investigación en grupo: ¿Comprar o rentar? *848*
Examen del capítulo 14 *849*

Apéndice El sistema métrico *A-1*
Respuestas a ejercicios seleccionados *A-9*
Créditos *A-53*
Índice *I-1*
Índice de aplicaciones *I-17*

Prefacio

En 1969, Chuck Miller y Vern Heeren crearon la primera edición de *Matemática: razonamiento y aplicaciones*, uno de los primeros libros de texto para el programa de estudios de matemáticas. Su meta entonces, como ahora, fue la de servir a estudiantes de ciencias no físicas mediante un tratamiento práctico que se conecte de una manera vívida con su mundo. Llegamos a la décima edición, la más completa de todas. Es flexible ya que evoluciona al ritmo de las tendencias cambiantes, pero mantiene sus objetivos originales. *Matemática: razonamiento y aplicaciones* permanece fiel a su pedagogía y a sus características. Presentamos la décima edición con un enfoque fresco y moderno, y deseamos que continúe inspirando tanto a estudiantes como a profesores.

Esta edición se ha diseñado teniendo en mente varios tipos de estudiantes. También es adecuada para diversos cursos e incluye a aquéllos orientados a artes y humanidades, así como los cursos de matemáticas, matemáticas finitas y cursos para maestros de enseñanza básica y secundaria. Comprende gran cantidad de temas para un periodo de dos semestres, además la variedad de sus temas y la flexibilidad de la secuencia también lo hacen conveniente para cursos cortos. Nuestros principales objetivos continúan siendo la presentación exhaustiva de los temas, la correcta organización, una exposición clara así como abundantes ejemplos y conjuntos de ejercicios bien planeados con numerosas aplicaciones.

Hemos trabajado diligentemente para incorporar las recomendaciones de los *Programas y Estándares de Evaluación de Matemáticas Escolares*, preparados por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) y los *Estándares para Matemáticas Introductorias Universitarias Previas al Cálculo*, presentados por la Asociación Matemática Estadounidense de Universidades de Dos Años (AMATYC, por sus siglas en inglés).

Semblanza de los capítulos

- **El capítulo 1 (El arte de resolver problemas)** presenta el razonamiento inductivo, el reconocimiento de patrones y las técnicas de resolución de problemas. Buena parte del material nuevo fue tomado del calendario mensual que se encuentra en la publicación del NCTM, *Mathematics Teacher*.
- **El capítulo 2 (Conceptos básicos de la teoría de conjuntos) y el capítulo 3 (Introducción a la lógica)** proporcionan breves panoramas de la teoría de conjuntos y la lógica elemental. Los maestros que deseen hacerlo, pueden trabajar el capítulo 3 antes que el 2.
- **En el capítulo 4 (Numeración y sistemas matemáticos)** se estudian varios tipos de sistemas de numeración y teoría de grupos.

- **El capítulo 5 (Teoría de números)** presenta una introducción a temas como números primos y números compuestos, la sucesión de Fibonacci y los cuadrados mágicos, e incluye información actualizada sobre nuevos adelantos en el campo de los números primos. Se ha ampliado el estudio de la aritmética del reloj a manera de introducción a los sistemas modulares.
- **El capítulo 6 (El sistema de los número reales)** presenta algunos de los conceptos básicos de los números reales, sus diferentes formas de representación y operaciones aritméticas en donde se utilizan.
- **Tanto el capítulo 7 (Los conceptos básicos del álgebra) y como el capítulo 8 (Gráficas funciones y sistemas de ecuaciones y desigualdades)** ofrecen numerosas aplicaciones nuevas que conforman la parte principal del álgebra del presente texto.
- **El capítulo 9 (Geometría)** fue sometido a una conveniente revisión, y ahora ofrece una nueva sección sobre geometría de las transformaciones y una nueva extensión sobre construcciones.
- **El capítulo 10 (Trigonometría)** es completamente nuevo. A petición de los revisores, los temas incluyen ángulos en posición estándar o normal, trigonometría del triángulo rectángulo, leyes de senos y cosenos, el círculo unitario y gráficas.
- **El capítulo 11 (Métodos de conteo)** se centra en las técnicas elementales de conteo, a manera de preparación para el siguiente capítulo.
- **El capítulo 12 (Probabilidad)** cubre los aspectos básicos de probabilidad, posibilidades y valor esperado.
- **El capítulo 13 (Estadística)** ha sido revisado para incluir información nueva en ejemplos y ejercicios.
- **En el capítulo 14 (Matemáticas del consumidor)** se proporcionan al estudiante los fundamentos de las matemáticas financieras y su aplicación a la inflación, deudas de consumidores y compra de una casa. Incluye una sección ampliada sobre inversión, en la que se hace énfasis en temas como acciones, bonos y fondos mutuos. Los ejemplos y ejercicios se han actualizado para reflejar las tasas de interés actuales y los rendimientos de inversiones.

Consideraciones generales sobre el curso

En su mayoría, los capítulos son independientes y pueden estudiarse en el orden que elija el maestro. Las excepciones son las siguientes: el capítulo 6 contiene un poco de material que depende de las ideas que aparecen en el capítulo 5; el capítulo 6 debe estudiarse antes que el capítulo 7, si los antecedentes del estudiante así lo requieren; los capítulos 7 y 8 forman un "paquete" algebraico y deben estudiarse en orden secuencial; la cobertura completa del capítulo 12 depende del conocimiento del material del capítulo 11, aunque la probabilidad puede estudiarse sin enseñar de manera completa los métodos de conteo, si se evitan los ejercicios más difíciles; y la última parte del capítulo 13 que trata de estadística inferencial depende de la comprensión de la probabilidad (capítulo 12).

Características de la décima edición

Mejora: Conjuntos de ejercicios con mayor variación Continuamos con la presentación de una variedad de ejercicios que integran habilidades, conceptos y problemas aplicados. Este libro contiene una riqueza de ejercicios que proporcionan al estudiante oportunidades de practicar, aplicar, conectar y ampliar las habilidades matemáticas que está aprendiendo. Se han actualizado los ejercicios con un enfoque hacia información práctica y hemos conservado los títulos para que sean fácilmente identificables. Se han enriquecido varios capítulos con nuevas aplicaciones, en particular los capítulos 7, 8, 10 y 14. Continuamos con el uso de gráficas, tablas y diagramas cuando es propicio. Muchos de ellos utilizan un estilo similar al que los estudiantes ven en los medios impresos y electrónicos de la vida cotidiana.

Mejora: Notas al margen Esta gustada característica es un sello distintivo de este libro; se ha conservado y se ha actualizado cuando fue necesario. Estas notas se encuentran intercaladas a lo largo de la obra, y tratan diferentes temas, como la vida de algunos matemáticos, viñetas históricas, reproducciones filatélicas y numismáticas, anécdotas sobre anteriores libros de texto de matemáticas, artículos de revistas y periódicos e investigaciones matemáticas actuales. Deseamos que los lectores continúen disfrutándolos tanto como nosotros disfrutamos durante su investigación y redacción.

Mejora: Investigaciones en grupo Se resalta la importancia del aprendizaje en grupo en esta sección al final de cada capítulo.

Solución de problemas Los párrafos especiales marcados como "Solución de problemas" relacionan el estudio de las estrategias de resolución de problemas con las técnicas aprendidas anteriormente.

Tecnología de graficación Continuamos proporcionando las pantallas de calculadoras gráficas (generadas por una calculadora TI-83 Plus) para mostrar cómo puede usarse la tecnología para apoyar los resultados encontrados de forma analítica. Sin embargo, no es esencial que un estudiante tenga una calculadora gráfica para estudiar este libro; *el componente tecnológico es opcional.*

Flexibilidad Algunos temas de los primeros seis capítulos requieren un conocimiento básico sobre resolución de ecuaciones. El maestro puede omitir algunos temas que requieran esta habilidad según las bases que tengan sus alumnos. Por otra parte, los dos capítulos de álgebra (capítulos 7 y 8) proporcionan un excelente panorama del álgebra y pueden estudiarse en casi cualquier momento debido a la flexibilidad de la presente obra.

Inicios de capítulo Cada capítulo comienza con la aplicación de uno de los temas. Estas aplicaciones diversas e inspiradoras ayudan a los estudiantes a ver la relevancia de las matemáticas en el mundo.

Diseño Se usan diversos diseños para dar énfasis a los análisis en grupo, ejemplos, gráficas y figuras. Se han incorporado nuevas y llamativas fotografías para resaltar las aplicaciones y provocar una atracción visual.

Ejemplos Numerosos ejemplos, cuidadosamente seleccionados, ilustran los conceptos y habilidades expuestas.

Para reflexionar Estas entradas piden al estudiante compartir con los demás sus procesos de razonamiento, con la finalidad de obtener una mayor comprensión de los conceptos matemáticos importantes.

Énfasis en datos reales en la forma de gráficas, diagramas y tablas Continuamos con el uso de información actualizada de revistas, periódicos e Internet para crear aplicaciones reales que sean relevantes y significativas.

Exámenes de capítulo Cada capítulo termina con un examen a fin de que los estudiantes puedan comprobar su dominio del material.

Suplementos

PARA EL MAESTRO

Manual de soluciones para el maestro ISBN 0-321-17027-X

Este manual (en inglés) contiene las soluciones a todos los ejercicios de las secciones Extensión, Examen del capítulo y Apéndice.

Manual para exámenes del profesor ISBN 0-321-17414-3

Este manual (en inglés) incluye formas de exámenes paralelos a los exámenes de cada capítulo.



www.mymathlab.com

Para más información, visite nuestro sitio en Internet www.mymathlab.com o póngase en contacto con nuestro representante de ventas para recibir una demostración en vivo.

Reconocimientos

Deseamos agradecer a los siguientes revisores por sus valiosos comentarios y sugerencias para ésta y las ediciones anteriores de la obra. (Los revisores de la décima edición se resaltan con un asterisco.)

H. Achepohl, *College of DuPage*
Shahrokh Ahmadi, *Northern Virginia Community College*
*Richard Andrews, *Florida A&M University*
Cindy Anfinson, *Palomar College*
Elaine Barber, *Germanna Community College*
Anna Baumgartner, *Carthage College*
*James E. Beamer, *Northeastern State University*
Elliot Benjamin, *Unity College*
Jaime Bestard, *Barry University*
Joyce Blair, *Belmont University*
Gus Brar, *Delaware County Community College*
Roger L. Brown, *Davenport College*
Douglas Burke, *Malcolm X College*
John Busovicki, *Indiana University of Pennsylvania*
Ann Cascarelle, *St. Petersburg Junior College*
Kenneth Chapman, *St. Petersburg Junior College*
Gordon M. Clarke, *University of the Incarnate Word*

M. Marsha Cupitt, *Durham Technical Community College*
James Curry, *American River College*
Ken Davis, *Mesa State College*
Nancy Davis, *Brunswick Community College*
George DeRise, *Thomas Nelson Community College*
Catherine Dermott, *Hudson Valley Community College*
Diana C. Dwan, *Yavapai College*
Laura Dyer, *Belleville Area College*
Jan Eardley, *Barat College*
Joe Eitel, *Folsom College*
Azin Enshai, *American River College*
Gayle Farmer, *Northeastern State University*
Michael Farndale, *Waldorf College*
Gordon Feathers, *Passaic County Community College*
Thomas Flohr, *New River Community College*
Bill Fulton, *Black Hawk College—East*
Anne Gardner, *Wenatchee Valley College*
Donald Goral, *Northern Virginia Community College*
Glen Granzow, *Idaho State University*
Larry Green, *Lake Tahoe Community College*
Arthur D. Grissinger, *Lock Haven University*
Don Hancock, *Pepperdine University*
Denis Hanson, *University of Regina*
Marilyn Hasty, *Southern Illinois University*
Shelby L. Hawthorne, *Thomas Nelson Community College*
Jeff Heiking, *St. Petersburg Junior College*
Emanuel Jinich, *Endicott College*
Karla Karstens, *University of Vermont*
Hilary Kight, *Wesleyan College*
Barbara J. Kniepkamp, *Southern Illinois University at Edwardsville*
Suda Kunyosying, *Shepherd College*
Pam Lamb, *J. Sargeant Reynolds Community College*
John W. Legge, *Pikeville College*
Leo Lusk, *Gulf Coast Community College*
Sherrie Lutsch, *Northwest Indian College*
Rhonda Macleod, *Florida State University*
Andrew Markoe, *Rider University*
Darlene Marnich, *Point Park College*
Victoria Martinez, *Okaloosa Walton Community College*
*Chris Mason, *Community College of Vermont*
Mark Maxwell, *Maryville University*
Carol McCarron, *Harrisburg Area Community College*

Delois McCormick, *Germanna Community College*
Daisy McCoy, *Lyndon State College*
*Cynthia McGinnis, *Okaloosa Walton Community College*
Vena McGrath, *Davenport College*
Robert Moyer, *Fort Valley State University*
Shai Neumann, *Brevard Community College*
Barbara Nienstedt, *Gloucester County College*
Chaitanya Nigarn, *Gateway Community-Technical College*
Jean Okurnura, *Windward Community College*
Bob Phillips, *Mesabi Range Community College*
Kathy Pinchback, *University of Memphis*
Priscilla Putman, *New Jersey City University*
Scott C. Radtke, *Davenport College*
John Reily, *Montclair State University*
Beth Reynolds, *Mater Dei College*
Shirley I. Robertson, *High Point University*
Andrew M. Rockett, *CW Post Campus of Long Island University*
*Kathleen Rodak, *St. Mary's College of Ave Maria University*
D. Schraeder, *McLennan Community College*
Wilfred Schulte, *Cosumnes River College*
Melinda Schulteis, *Concordia University*
Gary D. Shaffer, *Allegany College of Maryland*
Jane Sinibaldi, *York College of Pennsylvania*
Larry Smith, *Peninsula College*
Marguerite Smith, *Merced College*
Charlene D. Snow, *Lower Columbia College*
H. Jeannette Stephens, *Whatcom Community College*
Suzanne J. Stock, *Oakton Community College*
Dian Thom, *McKendree College*
Claude C. Thompson, *Hollins University*
Mark Tom, *College of the Sequoias*
Ida Umphers, *University of Arkansas at Little Rock*
Karen Villarreal, *University of New Orleans*
Wayne Wanamaker, *Central Florida Community College*
David Wasilewski, *Luzerne County Community College*
William Watkins, *California State University, Northridge*
Susan Williford, *Columbia State Community College*
Tom Witten, *Southwest Virginia Community College*
Fred Worth, *Henderson State University*
*Rob Wylie, *Carl Albert State College*
*Henry Wyzinski, *Indiana University Northwest*

No es posible llevar a cabo un proyecto de esta magnitud sin la ayuda de muchas personas dedicadas. Anne Kelly, la editora de esta edición; Amber Allen de Elm Street Publishing Services quien proporcionó una excelente supervisión de la producción; Jaime Bailey, Christine O'Brien, Greg Tobin, Karen Guardino, Barbara Atkinson, Becky Anderson, Karen Wernholm y Joanne Ha de Addison-Wesley quienes nos dieron apoyo incondicional; Terry McGinnis que proporcionó su apoyo tras bambalinas, lo que tuvo como consecuencia que esta edición incluyese un capítulo más que la edición anterior, pero ¡con menos páginas! Perian Herring, Deana Richmond y Tom Wegleitner, quienes hicieron un excelente trabajo de verificación de las respuestas y Becky Troutman que realizó el índice de aplicaciones. Por último, agradecemos a los fieles usuarios de los pasados 35 años por hacer de esta obra una de las más exitosas del mercado.

Vern E. Heeren
John Hornsby

capítulo

1 El arte de resolver problemas



Las supercomputadoras modernas pueden realizar miles de millones de cálculos en un solo segundo. Con todo este potencial de cálculo disponible, ¿por qué los científicos necesitan computadoras aún más rápidas para resolver algunos problemas?

Imagine que necesitamos evaluar qué posibilidades hay de que una viga de acero que soporta un puente se fracture bajo los efectos de una fuerte presión. Para abordar este problema, existe una nueva ciencia conocida como **dinámica molecular**, que sirve para modelar el movimiento de cada átomo en los distintos materiales, en este caso el metal. Modelar una plancha de metal de sólo 1000 átomos de ancho por 2000 de largo y 19 de grosor requiere más de 50 horas de cálculos de una supercomputadora. A fin de simular el movimiento de 100 millones de átomos en una viga de acero, se deben almacenar 7600 millones de números en la memoria de la computadora. Puesto que el movimiento de un átomo es tan rápido, los científicos deben calcular su velocidad y posición en cada milésima de una billonésima de segundo. Cada uno de estos movimientos en el tiempo requiere 90,000 millones de cálculos aritméticos. Hasta ahora, los científicos han logrado realizar el modelo de 600 millones de átomos en un momento determinado en el tiempo. Sin embargo, una sola partícula de polvo contiene más de 1000 millones de átomos, de modo que en la actualidad apenas pueden modelarse piezas metálicas extremadamente pequeñas. Hacer un modelo de las rupturas que puede sufrir una viga completa de acero a causa de la presión no está al alcance de las supercomputadoras actuales, simplemente porque son demasiado lentas para ello.

Cada vez son más importantes las aplicaciones reales que requieren cálculos a alta velocidad. Desde modelar el comportamiento del corazón por largos periodos hasta pronosticar el clima con 24 horas de anticipación, los problemas prácticos son en realidad muy complejos. Su comprensión requerirá no sólo de computadoras más rápidas, capaces de realizar billones en lugar de miles de millones de cálculos por segundo, sino también de nuevas estrategias para la resolución de problemas.

Fuente: SIAM News, vol. 28, núm. 5, 1995.

1.1 Resolución de problemas mediante el razonamiento inductivo

1.2 Una aplicación del razonamiento inductivo: patrones de números

1.3 Estrategias para resolver problemas

1.4 Cálculo, estimación y lectura de gráficas

Extensión: El uso de la escritura para aprender matemáticas

Investigación en grupo: Descubrir las matemáticas en el triángulo de Pascal

Examen del capítulo 1

1.1 Resolución de problemas mediante el razonamiento inductivo



El papiro de Moscú, el cual data de alrededor de 1850 a.C., proporciona un ejemplo del razonamiento inductivo empleado por los antiguos matemáticos egipcios. El problema 14 de este documento dice lo siguiente:

Usted tiene una pirámide truncada de 6 de altura por 4 en la base y 2 en la parte superior. Si eleva al cuadrado este 4, el resultado es 16. Si duplica el 4, el resultado es 8. Si eleva al cuadrado el 2, el resultado es 4. Si suma el 16, el 8 y el 4, el resultado es 28. Si toma un tercio de 6, el resultado es 2. Si toma dos veces 28, el resultado es 56. Observe, es 56. Encontrará que es correcto.

¿Qué significa todo esto? El *tronco* es la parte de la pirámide que queda cuando su parte superior es cortada por un plano paralelo a la base de la pirámide. La fórmula real para determinar el volumen del tronco de una pirámide de base cuadrada es

$$V = \frac{1}{3}h(b^2 + bB + B^2),$$

donde b es el área de la base superior, B es el área de la base inferior y h es la altura. Siguiendo el texto del problema, podemos ver que el escritor está dando un método para determinar el volumen del tronco de una pirámide con bases cuadradas en la parte superior e inferior, cuyos lados en la base inferior tienen 4 de longitud, en la base superior tienen 2 de longitud y cuya altura es igual a 6.



Una pirámide truncada, o tronco de una pirámide

El desarrollo de las matemáticas tiene sus raíces en las culturas egipcia y babilonia (3000 a.C. - 260 d.C.), donde surgieron por la necesidad de resolver problemas. El enfoque de estas culturas era un poco el método "haga primero A, luego B": a fin de resolver un problema o realizar una operación, se daba una especie de receta de cocina, y se ponía en práctica una vez y otra para resolver problemas similares. Durante el periodo griego clásico (600 a.C. - 450 d.C.) surgió un tipo más formal de matemáticas en el que los conceptos generales se aplicaban a problemas específicos, lo cual dio como resultado un desarrollo lógico y estructurado de esta ciencia.

Al observar que un método específico funcionaba para cierto tipo de problemas, los babilonios y los egipcios concluyeron que el mismo método funcionaría para cualquier tipo similar de problema. Tal conclusión recibe el nombre de *conjetura*. Una **conjetura** es una suposición fundamentada en observaciones repetidas de un patrón o proceso particular. El método de razonamiento que acabamos de describir se llama *razonamiento inductivo*.

Razonamiento inductivo

El razonamiento inductivo se caracteriza por permitir llegar a una conclusión general (mediante una conjetura) a partir de observaciones repetidas de ejemplos específicos. La conjetura puede ser verdadera o falsa.

Cuando se comprueba una conjetura obtenida por medio del razonamiento inductivo, basta con un solo ejemplo donde no funcione para demostrar que dicha conjetura es falsa. A esto se le llama **contraejemplo**. El razonamiento inductivo constituye un método eficaz para sacar conclusiones, pero también es importante notar que no se tiene la certeza de que la conjetura observada siempre sea verdadera. Por esta razón, los matemáticos no se inclinan a aceptar una conjetura como verdad absoluta, hasta que sea formalmente demostrada mediante métodos de *razonamiento deductivo*. El razonamiento deductivo caracterizó el desarrollo y enfoque de las matemáticas griegas, como se puede observar en los trabajos de Euclides, Pitágoras, Arquímedes y otros.

Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo se caracteriza por la aplicación de principios generales a ejemplos específicos.

Veamos ahora ejemplos de estos dos tipos de razonamiento. Con frecuencia, en este capítulo haremos referencia a los **números naturales**:

$$1, 2, 3, \ldots.$$

Los tres puntos indican que los números continúan indefinidamente en el patrón que se haya establecido. La regla más probable para continuar este patrón es "sumar uno al número anterior", y ésta es en realidad la regla que seguimos. Ahora, considere la lista siguiente de números naturales:

$$2, 9, 16, 23, 30.$$

¿Cuál es el siguiente número de esta lista? La mayoría de las personas diría que el siguiente número es 37. ¿Por qué? Probablemente porque razonan algo como esto: ¿qué tienen en común el 2, el 9 y el 16? ¿Cuál es el patrón de estos números?

Después de examinar los números por un momento, podríamos ver que $2 + 7 = 9$ y $9 + 7 = 16$. ¿Ocurre algo semejante con los otros números de la lista? ¿Se suman 16 y 7 para obtener 23? ¿Se suman 23 y 7 para obtener 30? Sí, cualquier número de la lista dada puede hallarse sumando 7 al que le precede. Por medio de este patrón, el siguiente número de la lista debe ser $30 + 7 = 37$.

Usted logró hallar el "número siguiente" haciendo un razonamiento a partir de su observación de los números de la lista. Quizá pasó de estas observaciones ($2 + 7 = 9, 9 + 7 = 16$, y así sucesivamente) al enunciado general de que cualquier número de la lista es 7 unidades mayor que el número que le precede. Éste es un ejemplo de *razonamiento inductivo.*

Junio

D	L	M	Mi	J	V	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Julio

D	L	M	Mi	J	V	S
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

FIGURA 1

Utilizando el razonamiento inductivo, concluimos que 37 era el número siguiente de la lista. Pero esto es incorrecto. Le tendimos una trampa, es decir, lo inducimos a sacar una conclusión incorrecta. No es que su lógica fuera errónea, sino que la persona que creó la lista tenía otra respuesta en mente. La lista de números

$$2, 9, 16, 23, 30$$

en realidad corresponde a cada lunes del mes de junio, si el 1 de junio cae en domingo. El lunes que sigue al 30 de junio es 7 de julio. Siguiendo este patrón, la lista sería como sigue:

$$2, 9, 16, 23, 30, 7, 14, 21, 28, \ldots.$$

Vea el calendario de la figura 1.

El proceso que usted ha utilizado para obtener la regla de "sumar 7" en la lista revela una falla importante en el razonamiento inductivo: nunca se puede estar seguro de que lo que es cierto en un caso específico será cierto en todos los casos. Incluso un número grande de casos puede no ser suficiente. El razonamiento inductivo no garantiza un resultado verdadero, sino que proporciona un medio para hacer una conjetura.

En el razonamiento deductivo, por otro lado, tomamos enunciados generales para aplicarlos a situaciones específicas. Por ejemplo, una de las reglas mejor conocidas en matemáticas es el teorema de Pitágoras: para cualquier triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos (los lados más cortos) es igual al cuadrado de la hipotenusa (el lado más largo). Por tanto, si sabemos que las longitudes de los lados más cortos son 3 y 4 pulgadas, respectivamente, podemos determinar la longitud del lado más largo. La h representa este último:

$$3^2 + 4^2 = h^2 \qquad \text{Teorema de Pitágoras.}$$

$$9 + 16 = h^2 \qquad \text{Se elevan al cuadrado los términos.}$$

$$25 = h^2 \qquad \text{Se suman.}$$

$$h = 5. \qquad \text{La raíz cuadrada positiva de 25 es 5.}$$

De modo que el lado más largo (la hipotenusa) mide 5 pulgadas. Utilizamos la regla general (el teorema de Pitágoras) y la aplicamos a una situación específica.

Para resolver un problema por lo regular se requieren ciertas *premisas.* Una **premisa** puede ser una suposición, una ley, una regla, una idea ampliamente aceptada o la pura observación. Luego, partiendo de las premisas se razona de manera inductiva o deductiva para llegar a una **conclusión**. Las premisas y la conclusión componen un **argumento lógico**.

EJEMPLO 1 Identifique cada premisa y la conclusión de cada uno de los argumentos siguientes. Luego diga si el argumento es un ejemplo de razonamiento inductivo o deductivo.

(a) Nuestra casa está hecha de madera tratada. Mis dos vecinos inmediatos tienen casas hechas de madera tratada. Por tanto, todas las casas de nuestro vecindario están hechas de madera tratada.

Las premisas son: "Nuestra casa está hecha de madera tratada" y "Mis dos vecinos inmediatos tienen casas hechas de madera tratada". La conclusión es: "Por tanto, todas las casas de nuestro vecindario están hechas de madera tratada". Como el razonamiento va de ejemplos específicos a un enunciado general, el argumento es un ejemplo de razonamiento inductivo (aunque es muy probable que su conclusión sea falsa).

(b) Todos los procesadores de palabras permiten imprimir el símbolo @. Yo tengo un procesador de palabras. Yo puedo imprimir el símbolo @.

Aquí las premisas son: "Todos los procesadores de palabras permiten imprimir el símbolo @" y "Yo tengo un procesador de palabras". La conclusión es: "Yo puedo imprimir el símbolo @". Este razonamiento va de lo general a lo específico, de modo que se utilizó un razonamiento deductivo.

(c) Hoy es viernes. Mañana será sábado.

En este caso sólo hay una premisa: "Hoy es viernes". La conclusión es: "Mañana será sábado". Aquí se utiliza el hecho de que el sábado sigue al viernes, aunque no se mencione de manera explícita. Puesto que la conclusión se deduce de hechos generales que se aplican a este caso en particular, se está utilizando el razonamiento deductivo. ■

El ejemplo que vimos antes en esta sección, concerniente a las fechas, mostró cómo el razonamiento inductivo puede conducir a conclusiones falsas. Sin embargo, si lo que buscamos es la respuesta más *probable,* en muchos casos el razonamiento inductivo proporciona resultados correctos.

EJEMPLO 2 Utilice el razonamiento inductivo para determinar qué número es el más *probable* que siga en cada lista.

(a) 3, 7, 11, 15, 19, 23

Cada número de lista se obtiene sumando 4 al número que le precede. El siguiente número probable es $23 + 4 = 27$.

(b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21

Comenzando con el tercer número de la lista, cada número se obtiene sumando los dos números que le preceden. Esto es, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, y así sucesivamente. El siguiente número probable en la lista es $13 + 21 = 34$. (Éstos son los primeros términos de la famosa *sucesión de Fibonacci,* que trataremos con más detalle en un capítulo posterior.)

(c) 1, 2, 4, 8, 16

Aquí parece que, a fin de obtener cada número después del primero, debemos duplicar el número anterior. Por lo tanto, el siguiente número probable es $16 \times 2 = 32$. ■

A menudo el razonamiento inductivo puede utilizarse para predecir una respuesta en una lista de ejercicios de cálculo construidos de manera similar, como se muestra en el ejemplo siguiente.

$37 \times 3 = 111$
$37 \times 6 = 222$
$37 \times 9 = 333$
$37 \times 12 = 444$

EJEMPLO 3 Observe la lista de igualdades en el margen. Utilice esa lista para predecir qué operación sería la siguiente.

En cada caso, el miembro izquierdo de la igualdad tiene dos factores, el primero es 37 y el segundo es un múltiplo de 3, empezando con 3. El producto (o respuesta) en cada caso consta de tres dígitos, todos iguales, empezando con 111 para 37×3. Para que este patrón continúe, la siguiente multiplicación sería $37 \times 15 = 555$, que es la respuesta correcta. (*Nota:* Tal vez le interese investigar qué sucede después de que el segundo factor llega a 30, y haga conjeturas con base en esos productos.) ■

PARA REFLEXIONAR

La siguiente anécdota, la cual tiene que ver con el razonamiento inductivo, aparece en el primer volumen de la serie *In Mathematical Circles* de Howard Eves (PWS-KENT Publishing Company).



Un científico tenía dos vasijas frente a él en la mesa de su laboratorio. La vasija de la izquierda contenía 100 pulgas; la de la derecha estaba vacía. Con todo cuidado, el científico sacó una pulga de la vasija de la izquierda, la colocó en la mesa entre ambos recipientes, retrocedió y con voz imperiosa le dijo: " Salta!". La pulga saltó, por lo que fue colocada en la vasija de la derecha. El científico sacó otra pulga de la vasija de la izquierda y la puso sobre la mesa entre los dos recipientes. Una vez más el hombre retrocedió y con voz fuerte exclamó: " Salta!". La pulga saltó y fue colocada en la vasija de la derecha. El científico repitió este procedimiento con cada una de las 100 pulgas que estaban en la vasija de la izquierda, y en cada caso las pulgas obedecieron la orden de saltar. Entonces las vasijas fueron cambiadas de lugar y el experimento se repitió, pero con una pequeña variante. Esta vez el científico sacó una pulga de la vasija izquierda, con mucho cuidado le desprendió las patas traseras y luego la colocó sobre la mesa entra las dos vasijas. Entonces se alejó y le ordenó con voz imperiosa: " Salta!". La pulga no saltó, de modo que fue colocada en la vasija de la derecha. El científico sacó otra pulga del recipiente de la izquierda, le desprendió las patas traseras y la colocó sobre la mesa, entre las dos vasijas. De nueva cuenta se alejó de la mesa y ordenó: " Salta!". La segunda pulga no saltó, y fue colocada en la vasija de la derecha. El científico hizo lo mismo con cada una de las pulgas de la vasija de la izquierda, pero esta vez ninguna de ellas obedeció la orden de saltar. Una vez terminado el experimento, el científico registró en su cuaderno la siguiente conclusión: "Cuando a una pulga se le desprenden las patas traseras, se queda sorda".

Para análisis en grupo

Durante la clase, analice ejemplos de anuncios en televisión, periódicos, revistas, etc., que induzcan a los consumidores a extraer conclusiones erróneas.

Un ejemplo clásico de cómo el razonamiento inductivo puede fallar es el del número de regiones que se forman al construir cuerdas en un círculo. Cuando dos puntos sobre una circunferencia se unen mediante un segmento de recta, se forma una *cuerda*. Elija un solo punto sobre una circunferencia. Ya que no se forma ninguna cuerda entonces en el círculo sólo hay una región interior. Vea la figura 2(a). Colo-

que otro punto y dibuje una cuerda entre ambos. Se forman dos regiones interiores, como se muestra en la figura 2(b). Continúe este patrón. Con tres puntos dibuje todas las cuerdas posibles. Se forman cuatro regiones interiores, lo que puede verse en la figura 2(c). Cuatro puntos producen ocho regiones y cinco puntos dan como resultado 16 regiones. Vea las figuras 2(d) y 2(e).

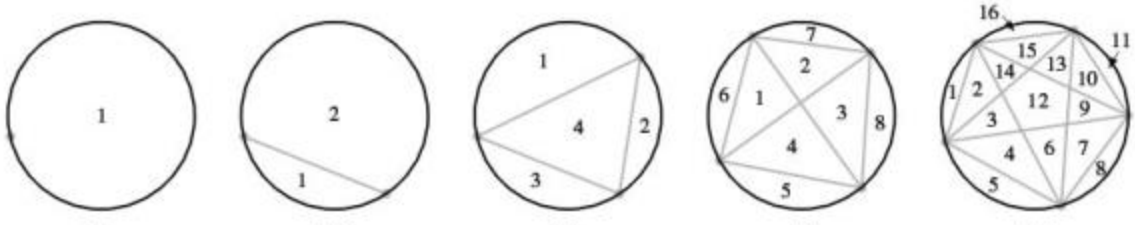


FIGURA 2

Número de puntos	Número de regiones
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

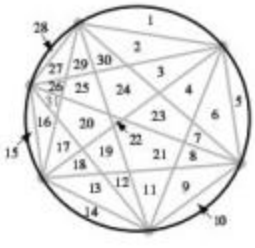


FIGURA 3

Los resultados de las observaciones anteriores se resumen en la tabla al margen. El patrón que aparece en la columna llamada "Números de regiones" es el mismo que vimos en el ejemplo 2(c), donde pronosticamos que el siguiente número de la lista sería 32. Aquí parece ocurrir lo mismo: por cada punto adicional sobre la circunferencia, el número de regiones se duplica. Una conjetura inductiva razonable sería que para seis puntos se formarían 32 regiones. Pero como indica la figura 3, ¡sólo hay 31 regiones!

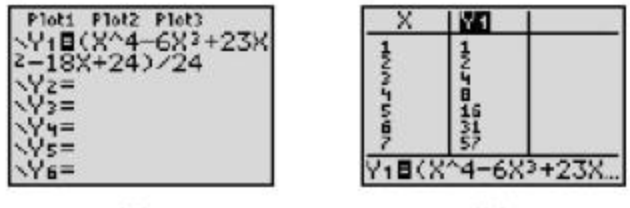
No, no es que "falte" una región. Sucede que el patrón de duplicación termina cuando se añade un sexto punto. Si agregáramos un séptimo punto obtendríamos 57 regiones. Los números que corresponden aquí son

$$1, 2, 4, 8, 16, 31, 57.$$

Para n puntos sobre una circunferencia, el número de regiones correspondiente se obtiene con la fórmula

$$\frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}.$$ *

Podemos utilizar una calculadora gráfica para construir una tabla de valores que indique el número de regiones para diferente número de puntos. Usando X en lugar de n, podemos definir Y_1 mediante la expresión anterior (vea la figura 4(a)). Luego, usando una tabla de valores como la de la figura 4(b), vemos cuántas regiones (indicadas por Y_1) hay para cualquier número de puntos (X).



(a) (b)

FIGURA 4

*Para mayor información sobre éste y otros patrones similares, consulte "Counting Pizza Pieces and Other Combinatorial Problems", de Eugene Maier, en el número de enero de 1988 de *Mathematical Teacher*, pp. 22-26.

Como se indicó antes, debido a que basta un solo contraejemplo para demostrar que una conjetura es falsa no se puede estar seguro de que una conjetura es correcta hasta que no se comprueba la existencia de una relación general.

1.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 al 12, diga si cada uno de los siguientes razonamientos es inductivo o deductivo.

1. Cuando un mecánico dice que tardará dos días en reparar un auto, en realidad tarda cuatro días. El mecánico le dice: "Creo que tardaré un par de días en reparar su auto". Entonces puede esperar que esté listo dentro de cuatro días.

2. Cuando uno toma su medicina, se siente mucho mejor. Usted toma su medicina. Por lo tanto, se sentirá mejor.

3. Ha llovido durante los últimos cinco días, y hoy también está lloviendo, así que mañana volverá a llover.

4. Los primeros tres hijos de Natalia fueron varones. Si tiene otro bebé, será varón.

5. José tiene 95 tarjetas de Pokémon. En su cumpleaños, Margarita le obsequió 20 más. Por lo tanto, ahora él tiene 115 tarjetas.

6. Si el mismo número se resta de ambos miembros de una igualdad verdadera, la nueva igualdad también será verdadera. Yo sé que $9 + 18 = 27$. Por lo tanto, $(9 + 18) - 12 = 27 - 12$.

7. Si tú lo construyes, ellos vendrán. Tú lo construyes, así que ellos vendrán.

8. Todos los hombres son mortales. Sócrates es mortal. Por lo tanto, Sócrates es mortal.

9. Es un hecho que todo estudiante que asistió a la Universidad de Brainchild fue aceptado en la facultad de medicina. Puesto que estudio en Brainchild, también puedo esperar ser aceptado en la facultad de medicina.

10. Durante los últimos 25 años, una rara planta que produce alternativamente flores amarillas y verdes cada verano ha florecido en Columbia. El verano pasado sus flores fueron verdes, por tanto, este verano su floración será amarilla.

11. En la sucesión 5, 10, 15, 20, . . . , lo más probable es que el siguiente número sea 25.

12. Los últimos cuatro sencillos de Britney Spears han alcanzado la lista de los Diez Mejores (Top Ten), así que su actual sencillo también llegará a los Diez Mejores.



13. Analice las diferencias entre el razonamiento inductivo y el deductivo. Dé un ejemplo de cada uno.

14. Dé un ejemplo de un razonamiento inductivo incorrecto.

Determine el siguiente término más probable en cada lista de números.

15. 6, 9, 12, 15, 18

16. 13, 18, 23, 28, 33

17. 3, 12, 48, 192, 768

18. 32, 16, 8, 4, 2

19. 3, 6, 9, 15, 24, 39

20. 1/3, 3/5, 5/7, 7/9, 9/11

21. 1/2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10

22. 1, 4, 9, 16, 25

23. 1, 8, 27, 64, 125

24. 2, 6, 12, 20, 30, 42

25. 4, 7, 12, 19, 28, 39

26. $-1, 2, -3, 4, -5, 6$

27. 5, 3, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5

28. 8, 2, 8, 2, 2, 8, 2, 2, 2, 8, 2, 2, 2, 2, 8, 2, 2, 2, 2

29. Elabore una lista de números semejante a la del ejercicio 15, de tal forma que el siguiente número más probable sea 60.

30. Elabore una lista de números semejante a la del ejercicio 26, de tal manera que el 9 sea el siguiente número más probable.

En cada ejercicio del 31 al 42 aparece una lista de igualdades. Utilice las listas y el razonamiento inductivo para predecir la igualdad que sigue en cada ejemplo y luego verifique su conjetura.

31.
$$(9 \times 9) + 7 = 88$$
$$(98 \times 9) + 6 = 888$$
$$(987 \times 9) + 5 = 8888$$
$$(9876 \times 9) + 4 = 88{,}888$$

32.
$$(1 \times 9) + 2 = 11$$
$$(12 \times 9) + 3 = 111$$
$$(123 \times 9) + 4 = 1111$$
$$(1234 \times 9) + 5 = 11{,}111$$

33.
$$3367 \times 3 = 10{,}101$$
$$3367 \times 6 = 20{,}202$$
$$3367 \times 9 = 30{,}303$$
$$3367 \times 12 = 40{,}404$$

34.
$$15873 \times 7 = 111{,}111$$
$$15873 \times 14 = 222{,}222$$
$$15873 \times 21 = 333{,}333$$
$$15873 \times 28 = 444{,}444$$

35.
$$34 \times 34 = 1156$$
$$334 \times 334 = 111{,}556$$
$$3334 \times 3334 = 11{,}115{,}556$$

36.
$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12{,}321$$
$$1111 \times 1111 = 1{,}234{,}321$$

37.
$$3 = \frac{3(2)}{2}$$
$$3 + 6 = \frac{6(3)}{2}$$
$$3 + 6 + 9 = \frac{9(4)}{2}$$
$$3 + 6 + 9 + 12 = \frac{12(5)}{2}$$

38.
$$2 = 4 - 2$$
$$2 + 4 = 8 - 2$$
$$2 + 4 + 8 = 16 - 2$$
$$2 + 4 + 8 + 16 = 32 - 2$$

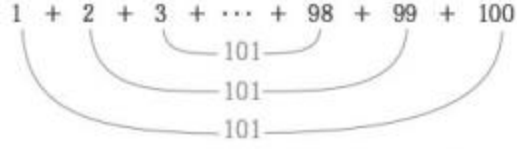
39.
$$5(6) = 6(6 - 1)$$
$$5(6) + 5(36) = 6(36 - 1)$$
$$5(6) + 5(36) + 5(216) = 6(216 - 1)$$
$$5(6) + 5(36) + 5(216) + 5(1296) = 6(1296 - 1)$$

40.
$$3 = \frac{3(3 - 1)}{2}$$
$$3 + 9 = \frac{3(9 - 1)}{2}$$
$$3 + 9 + 27 = \frac{3(27 - 1)}{2}$$
$$3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3(81 - 1)}{2}$$

41.
$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$$

42.
$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

A menudo se narra la siguiente anécdota del gran matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Cuando era muy joven, su profesor les pidió a los alumnos que encontraran la suma de los primeros 100 *números naturales. Mientras sus compañeros de clase se afanaban tratando de resolver el problema, él simplemente escribió un número y se lo entregó a su maestro. La respuesta era correcta. Al preguntársele cómo lo había hecho, el joven Carl explicó que se había dado cuenta de que había* 50 *pares de números cuya suma era* 101 *(vea a continuación). De modo que la suma de todos los números del 1 al 100 debía de ser* $50 \times 101 = 5050$.



50 sumas de $101 = 50 \times 101 = 5050$

Utilice el método de Gauss para determinar cada una de las sumas siguientes.

43. $1 + 2 + 3 + \cdots + 200$

44. $1 + 2 + 3 + \cdots + 400$

45. $1 + 2 + 3 + \cdots + 800$

46. $1 + 2 + 3 + \cdots + 2000$

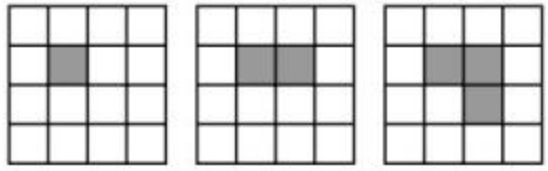
47. Modifique el procedimiento de Gauss para encontrar la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 175$.

48. Explique con sus propias palabras cómo puede modificarse el método de Gauss para encontrar la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, donde n es un número natural impar. (Todo número natural impar, cuando se divide entre 2, deja un residuo de 1.)

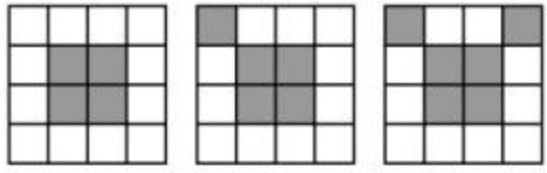
49. Modifique el procedimiento de Gauss para encontrar la suma $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$.

50. Utilice el resultado del ejercicio 49 para encontrar la suma $4 + 8 + 12 + \cdots + 200$.

51. Encuentre un patrón en la siguiente lista de figuras y utilice el razonamiento inductivo para predecir qué figura sigue.



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

52. Observe la siguiente tabla.

0	2	2	2	0	0	0	0	0
0	2	4	6	4	2	0	0	0
0	2	6	12	14	12	6	2	0
0	2	8	20	32	38	32	20	8

Determine un patrón y prediga la fila que sigue en la tabla.

53. ¿Cuál es el siguiente número más probable en esta lista? 12, 1, 1, 1, 2, 1, 3. (*Una pista:* Piense en un reloj.)

54. ¿Cuál es el término que sigue en la lista? U, D, T, C, C, S, S, O, N, D. (*Una pista:* Piense en palabras relacionadas con los números.)

55. **(a)** Elija un número cualquiera de tres dígitos que sean todos diferentes. Ahora invierta los dígitos y reste el menor del mayor. Registre su resultado. Elija otro número de tres dígitos y repita el proceso. Haga esto tantas veces como sea necesario para encontrar un patrón en los diferentes resultados que obtenga. (*Una pista:* ¿Cuál es el dígito del medio? ¿Cuál es la suma del primer dígito con el tercero?)

✎ **(b)** Escriba una explicación de este patrón. Podría utilizar este ejercicio como un "truco numérico" para sorprender a sus amigos.

56. Elija cualquier número y siga estos pasos:

(a) Multiplique por 2.
(b) Sume 6.
(c) Divida entre 2.
(d) Reste el número con el que empezó.
(e) Registre su resultado.

Repita el proceso, pero esta vez sume 8 en el paso (b). Registre este último resultado. Repita el proceso una vez más, pero ahora sume 10 en el paso (b). Registre su resultado final.

(f) Observe lo que ha hecho. Utilice el razonamiento inductivo para explicar cómo predecir el resultado final. Quizá le gustaría utilizar este ejercicio como un "truco numérico" para sorprender a sus amigos.

57. Complete lo siguiente.

$142{,}857 \times 1 =$ ____
$142{,}857 \times 2 =$ ____
$142{,}857 \times 3 =$ ____
$142{,}857 \times 4 =$ ____
$142{,}857 \times 5 =$ ____
$142{,}857 \times 6 =$ ____

¿Qué patrón existe en las respuestas sucesivas? Ahora multiplique 142,857 por 7, y obtendrá un resultado interesante.

58. Complete lo siguiente.

$12{,}345{,}679 \times 9 =$ ____
$12{,}345{,}679 \times 18 =$ ____
$12{,}345{,}679 \times 27 =$ ____

¿Qué número multiplicado por 12,345,679 dará como resultado 888,888,888?

59. Observe otra vez las figuras 2(b)-(e) y 3. En lugar de contar las regiones interiores del círculo, cuente el número de cuerdas formadas. Utilice el razonamiento inductivo para predecir el número de cuerdas que se formarían si se usaran siete puntos.

60. Haga el siguiente truco numérico a alguno de sus amigos. Nos fue proporcionado por el doctor George De Rise, del Thomas Nelson Community College.

(a) Pida a su amigo o amiga que escriba su edad (sólo se permiten números enteros).
(b) Multiplique ese número por 4.
(c) Sume 10.
(d) Multiplique por 25.
(e) Reste el número de días de un año no bisiesto.
(f) Sume la cantidad de menudo[1] que él o ella tenga en el bolsillo (menos de un dólar, en centavos).
(g) Pida a su amigo la respuesta final.

Si usted le suma 115 a la respuesta, los primeros dos dígitos son la edad de su amigo, y los últimos dos proporcionan la cantidad de menudo.

[1]N. del Ed.: *change*, también conocido como "*cambio*" en otros países.

✎ **61.** Explique cómo un niño pequeño, de dos o tres años, podría utilizar el razonamiento inductivo para determinar que algo podría ser benéfico para él.

✎ **62.** Analice un ejemplo de razonamiento inductivo que haya usado recientemente en su vida cotidiana. Ponga a prueba sus premisas y su conjetura. ¿La conclusión a la que llegó entonces, resultó verdadera o falsa?

1.2 Una aplicación del razonamiento inductivo: patrones numéricos

En la sección anterior vimos una introducción al razonamiento inductivo y cómo puede aplicarse para predecir "lo que viene después" en una lista de números o ecuaciones. En esta sección continuaremos con nuestro análisis de los patrones numéricos.

A cualquier lista ordenada de números, como

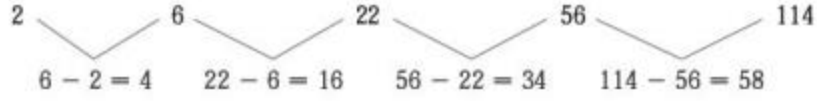
$$3, 9, 15, 21, 27, \ldots,$$

se le denomina una *sucesión*. Una **sucesión numérica** es una lista de números que tiene un primer número, un segundo número, un tercer número, y así sucesivamente, a los que se llama **términos** de la sucesión. Para indicar que los términos de una sucesión continúan después del último término escrito, utilizamos tres puntos (una elipsis). Las sucesiones en los ejemplos 2(a) y 2(c) de la sección anterior se denominan *sucesiones aritmética* y *geométrica*, respectivamente. En una sucesión aritmética existe una *diferencia* común entre los términos sucesivos, mientras que en una sucesión geométrica (o progresión geométrica) existe una *razón* común entre los términos sucesivos. La sucesión de Fibonacci del ejemplo 2(b) se estudia en un capítulo posterior.

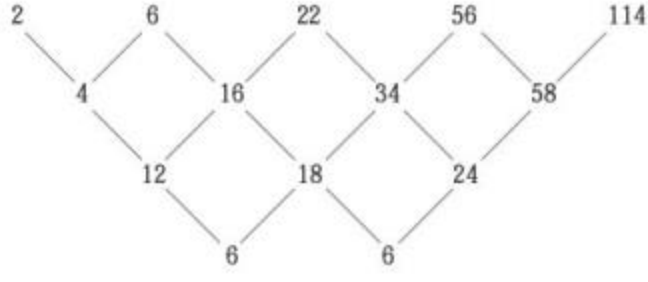
Diferencias sucesivas Las sucesiones que se vieron en la sección precedente eran lo suficientemente simples como para permitirnos hacer una conjetura obvia acerca del término que debía seguir. Sin embargo, algunas sucesiones ofrecen mayor dificultad para hacer tal conjetura, por lo que a menudo hay que aplicar el **método de diferencias sucesivas** para determinar el siguiente término si a primera vista éste no resulta evidente. Por ejemplo, considere la sucesión

$$2, 6, 22, 56, 114, \ldots.$$

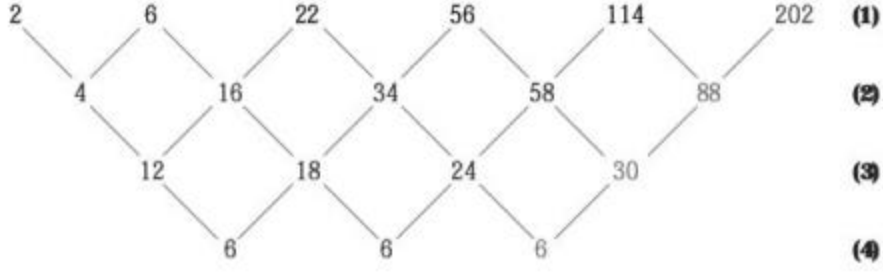
Puesto que el término que sigue no es evidente, al segundo término le restamos el primero, al tercero le restamos el segundo, al cuarto le restamos el tercero, y así sucesivamente.



Ahora repetimos el proceso con la sucesión 4, 16, 34, 58, y seguimos repitiendo hasta que la diferencia sea un valor constante, como se muestra en la línea (4):

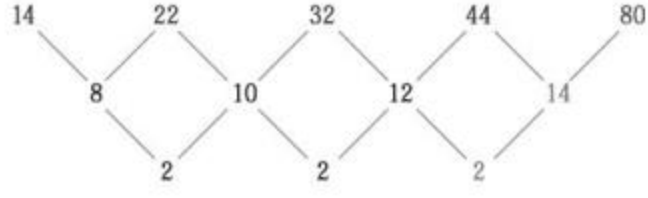


Una vez obtenida esta línea de valores constantes, simplemente se trabaja "hacia atrás": se va sumando hasta obtener el término que se busca de la sucesión dada. Así, para que este patrón continúe, en la línea (4) debe aparecer otro 6, lo cual significa que el término siguiente en la línea (3) tendría que ser $24 + 6 = 30$. El término siguiente en la línea (2) sería $58 + 30 = 88$. Por último, el término siguiente en esta sucesión sería $114 + 88 = 202$. El esquema final de los números se muestra a continuación:



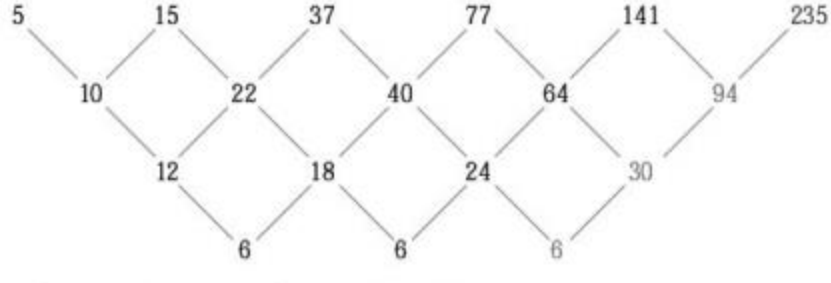
EJEMPLO 1 Utilice el método de las diferencias sucesivas para determinar el número siguiente de cada sucesión.

(a) 14, 22, 32, 44, . . .
Utilizando el esquema descrito anteriormente, obtenemos lo siguiente:



Una vez que llegamos al renglón de los 2 y lo extendimos, pudimos obtener $12 + 2 = 14$ y $44 + 14 = 58$, como se muestra arriba. El número siguiente en la sucesión es 58.

(b) 5, 15, 37, 77, 141, . . .
Procediendo como antes, obtenemos el diagrama siguiente:



El número siguiente en la sucesión es 235. ■

No vaya a pensar que el método de las diferencias sucesivas siempre funciona. Por ejemplo, fínteníelo con la sucesión de Fibonacci del ejemplo 2(b) de la sección 1.1 y vea qué sucede!

Patrones numéricos Uno de los aspectos más sorprendentes de las matemáticas es su variedad aparentemente infinita de patrones numéricos. Observe los patrones siguientes:

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2.$$

En cada caso, el lado izquierdo de la igualdad es la suma de los números naturales impares consecutivos, empezando con 1, y el lado derecho es el cuadrado del número de términos del lado izquierdo. Debe verificar esto en cada caso. El razonamiento inductivo sugiere que la siguiente línea en este patrón es

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2.$$

Si evaluamos cada miembro, veremos que cada uno es igual a 36.

A partir de estas observaciones, ¿se puede concluir que este patrón continuará indefinidamente? La respuesta es no, porque la observación de un número finito de ejemplos no garantiza que un patrón será infinito. Sin embargo, los matemáticos han demostrado que en realidad este patrón sí continúa indefinidamente utilizando un método de demostración llamado *inducción matemática*. (Vea cualquier libro de álgebra de nivel universitario.)

Cualquier número par puede escribirse en la forma $2k$, donde k es un número natural. Se deduce que el k-ésimo número natural impar se puede escribir de la forma $2k - 1$. Por ejemplo, el tercer número natural impar, 5, puede escribirse $2(3) - 1$. Siguiendo este razonamiento, podemos escribir el resultado del patrón anterior como sigue.

Suma de los primeros n números naturales impares

Si n es cualquier número natural,

$$\mathbf{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2}.$$

EJEMPLO 2 En cada uno de los ejemplos siguientes aparecen varias igualdades que muestran un supuesto patrón numérico. Determine cuál es la igualdad que sigue, y verifique si se trata de un enunciado verdadero.

(a)
$$1^2 = 1^3$$
$$(1 + 2)^2 = 1^3 + 2^3$$
$$(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$
$$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$

El lado izquierdo de cada ecuación es el cuadrado de la suma de los primeros n números naturales, mientras que el lado derecho es la suma de los cubos de cada uno. La siguiente igualdad en el patrón sería

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3.$$

Cada lado de la ecuación anterior se simplifica a 225, de modo que el patrón es verdadero para esta ecuación.

(b)

$$1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$$

El lado izquierdo de las igualdades contiene la suma de los números naturales impares, empezando con el primero (1) en la primera ecuación, el segundo y tercero (3 y 5) en la segunda ecuación, el cuarto, quinto y sexto (7, 9 y 11) en la tercera ecuación, y así sucesivamente. En cada caso, el lado derecho contiene el cubo (la tercera potencia) del número de términos que hay en el lado izquierdo. Siguiendo este patrón, la siguiente ecuación sería

$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 5^3,$$

que puede verificarse como verdadera efectuando las operaciones indicadas.

(c)

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$
$$1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$$
$$1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

El lado izquierdo de cada ecuación nos da la suma indicada de los primeros n números naturales, y el lado derecho siempre tiene la forma

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Para que el patrón continúe, la siguiente ecuación debería ser

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2}.$$

Como el resultado en cada lado es 15, el patrón es verdadero para esta ecuación. ■

Los patrones establecidos en los ejemplos 2(a) y 2(c) pueden escribirse en general como sigue.

Dos fórmulas especiales de la suma

Para cualquier número natural n,

$$\mathbf{(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}$$

y

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}.$$



Pitágoras El matemático griego Pitágoras vivió durante el siglo VI a.C. Él y sus colegas matemáticos formaron la fraternidad pitagórica, dedicada al estudio de las matemáticas y la música. Los pitagóricos investigaban los números figurados, que presentamos en esta sección. También descubrieron que los tonos musicales se relacionan con la longitud de las cuerdas tensadas en razones (cocientes) de números naturales. Usted puede comprobar esto con un violonchelo. Oprima cualquier cuerda a la mitad de su longitud, de modo que la razón de la cuerda entera con la parte sea de 2/1. Si pulsa un extremo libre de la cuerda, obtendrá la octava siguiente del tono fundamental de la cuerda entera. La razón 3/2 le da la quinta sobre la octava, y así sucesivamente. El descubrimiento de las razones en las cuerdas de un instrumento fue uno de los primeros conceptos de la física matemática.

La segunda fórmula es una generalización del método que se explicó como introducción al ejercicio 43 de la sección anterior, que relata la anécdota del joven Carl Gauss. Podemos proporcionar un argumento general deductivo para demostrar cómo se obtiene esta ecuación. Suponga que S representa la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Esta suma también puede escribirse como $S = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$. Ahora escribimos estas dos ecuaciones como sigue.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\ \hline 2S &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \end{aligned}$$

Que es la suma de los lados correspondientes.

Ya que el lado derecho de la ecuación contiene n términos, y cada uno es $(n + 1)$, podemos escribirlo como n veces $(n + 1)$.

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$ Dividimos ambos lados entre 2.

Ahora que esta fórmula ha sido verificada de una manera general, podemos aplicar el razonamiento deductivo para encontrar la suma de los primeros n números naturales para cualquier valor dado de n. (Vea los ejercicios 21 a 24.)

Números figurados El matemático griego Pitágoras (hacia 540 a.C.) fue el fundador de la fraternidad pitagórica. Este grupo estudiaba, entre otras cosas, números de disposiciones geométricas de puntos, tales como *números triangulares, números cuadrados* y *números pentagonales*. La figura 5 ilustra los primeros de cada uno de estos tipos de números.

Los *números figurados* poseen numerosos patrones interesantes. Cada número cuadrado mayor que 1 es la suma de dos números triangulares consecutivos. (Por ejemplo, $9 = 3 + 6$ y $25 = 10 + 15$.) Cada número pentagonal puede representarse como la suma de un número cuadrado y un número triangular. (Por ejemplo, $5 = 4 + 1$ y $12 = 9 + 3$.)

En la expresión T_n, n se conoce como subíndice. T_n se lee "te subíndice ene", y representa el número triangular en la posición n de la sucesión. Por ejemplo,

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 3, \quad T_3 = 6 \quad \text{y} \quad T_4 = 10.$$

S_n y P_n representan los números cuadrado y pentagonal en la posición n, respectivamente.

Fórmulas para números triangulares, cuadrados y pentagonales

Para cualquier número natural n,

el n-ésimo número triangular está dado por $\mathbf{T_n = \frac{n(n+1)}{2}}$,

el n-ésimo número cuadrado está dado por $\mathbf{S_n = n^2}$ y

el n-ésimo número pentagonal está dado por $\mathbf{P_n = \frac{n(3n-1)}{2}}$.

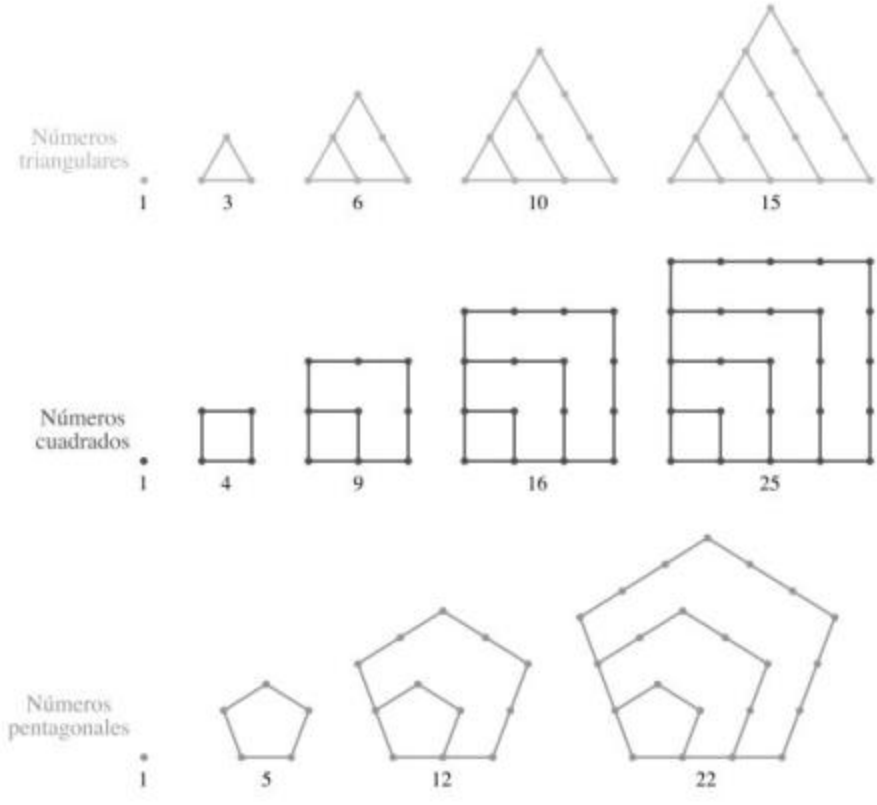


FIGURA 5

EJEMPLO 3 Utilice las fórmulas anteriores para encontrar los resultados en cada caso:

(a) El séptimo número triangular

$$T_7 = \frac{7(7+1)}{2} = \frac{7(8)}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

(b) El duodécimo número cuadrado

$$S_{12} = 12^2 = 144$$

(c) El sexto número pentagonal

$$P_6 = \frac{6[3(6)-1]}{2} = \frac{6(18-1)}{2} = \frac{6(17)}{2} = 51$$ ■

EJEMPLO 4 Demuestre que el sexto número pentagonal es igual a 3 veces el quinto número triangular, más 6.

Del ejemplo 3(c), $P_6 = 51$. El quinto número triangular es 15. De acuerdo con el problema,

$$51 = 3(15) + 6 = 45 + 6 = 51.$$ ■

La relación general mostrada en el ejemplo 4 puede escribirse como:

$$P_n = 3 \cdot T_{n-1} + n \qquad (n \geq 2).$$

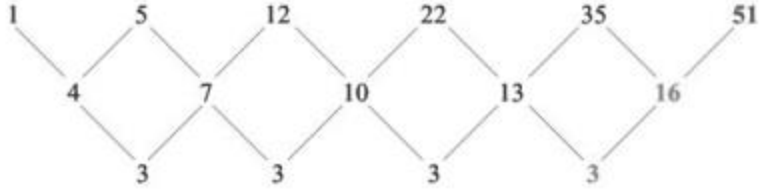
En los ejercicios de esta sección se examinan otras relaciones entre números figurados.

El método de las diferencias sucesivas presentado al inicio de esta sección puede usarse para predecir el siguiente número figurado en una sucesión de números figurados, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Los primeros cinco números pentagonales son

1, 5, 12, 22, 35.

Utilice el método de diferencias sucesivas para encontrar el sexto número pentagonal.



Después de la segunda línea de diferencias sucesivas, podemos ir de atrás hacia adelante para determinar que el sexto número pentagonal es 51, el cual ya habíamos encontrado en el ejemplo 3(c). ■

PARA REFLEXIONAR

Tome cualquier número de tres dígitos diferentes entre sí. Acomódelos en orden decreciente, y luego en orden creciente. Ahora reste el menor del mayor. Repita el proceso, utilizando un 0 si es necesario en caso de que la diferencia consista de sólo dos dígitos. Por ejemplo, supongamos que escogió los dígitos 1, 4 y 8.

$$\begin{array}{rrr} 841 & 963 & 954 \\ -148 & -369 & -459 \\ \hline 693 & 594 & 495 \end{array}$$

Observe que al final hemos obtenido el número 495, y el proceso conducirá a 495 de nuevo. El número 495 se llama número de Kaprekar, y siempre se llegará a él si este proceso se sigue para tales números de tres dígitos.

Para análisis en grupo

1. Pida a cada estudiante que aplique el proceso de Kaprekar a un número diferente de dos dígitos en el que ninguno se repita. (Si es necesario, interprete 9 como 09.) Comparen resultados. ¿Qué es lo que parece ocurrir en este caso?
2. Repita el proceso, pero ahora con números de cuatro dígitos. Que cada estudiante en el grupo compare los resultados después de varios pasos. ¿Qué conjetura puede hacer el grupo sobre esta situación?
3. Repita el proceso para un número de cinco dígitos. ¿Qué conjetura puede hacerse?

1.2 EJERCICIOS

Utilice el método de las diferencias sucesivas para determinar el número que sigue en cada una de las sucesiones.

1. 1, 4, 11, 22, 37, 56, . . .

2. 3, 14, 31, 54, 83, 118, . . .

3. 6, 20, 50, 102, 182, 296, . . .

4. 1, 11, 35, 79, 149, 251, . . .

5. 0, 12, 72, 240, 600, 1260, 2352, . . .

6. 2, 57, 220, 575, 1230, 2317, . . .

7. 5, 34, 243, 1022, 3121, 7770, 16,799, . . .

8. 3, 19, 165, 771, 2503, 6483, 14,409, . . .

9. Remítase a las figuras 2 y 3 de la sección anterior. El método de las diferencias sucesivas puede aplicarse a la sucesión de regiones interiores,

$$1, 2, 4, 8, 16, 31,$$

para encontrar el número de regiones que se generan con siete puntos sobre la circunferencia. ¿Cuál es el siguiente término en esta sucesión? ¿Cuántas regiones se producirían con ocho puntos? Verifique este ejercicio mediante la fórmula proporcionada al final de dicha sección.

10. Suponga que la expresión $n^2 + 3n + 1$ señala el n-ésimo término en una sucesión. Esto es, para hallar el primer término, se determina que $n = 1$; para hallar el segundo término, se determina que $n = 2$, y así sucesivamente.

(a) Encuentre los primeros cuatro términos de la sucesión.

(b) Utilice el método de las diferencias sucesivas para predecir el quinto término de la sucesión.

(c) Encuentre el quinto término de la sucesión cuando $n = 5$ en la expresión $n^2 + 3n + 1$. ¿Su resultado coincide con el que obtuvo en el inciso (b)?

En cada uno de los ejercicios siguientes, se dan varias ecuaciones que ilustran un supuesto patrón numérico. Determine cuál sería la siguiente ecuación, y verifique que este resultado es verdadero.

11.
$(1 \times 9) - 1 = 8$
$(21 \times 9) - 1 = 188$
$(321 \times 9) - 1 = 2888$

12.
$(1 \times 8) + 1 = 9$
$(12 \times 8) + 2 = 98$
$(123 \times 8) + 3 = 987$

13.
$999{,}999 \times 2 = 1{,}999{,}998$
$999{,}999 \times 3 = 2{,}999{,}997$

14.
$101 \times 101 = 10{,}201$
$10{,}101 \times 10{,}101 = 102{,}030{,}201$

15.
$3^2 - 1^2 = 2^3$
$6^2 - 3^2 = 3^3$
$10^2 - 6^2 = 4^3$
$15^2 - 10^2 = 5^3$

16.
$1 = 1^2$
$1 + 2 + 1 = 2^2$
$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$
$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$

17.
$2^2 - 1^2 = 2 + 1$
$3^2 - 2^2 = 3 + 2$
$4^2 - 3^2 = 4 + 3$

18.
$1^2 + 1 = 2^2 - 2$
$2^2 + 2 = 3^2 - 3$
$3^2 + 3 = 4^2 - 4$

19.
$1 = 1 \times 1$
$1 + 5 = 2 \times 3$
$1 + 5 + 9 = 3 \times 5$

20.
$1 + 2 = 3$
$4 + 5 + 6 = 7 + 8$
$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$

Utilice la fórmula $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$, *deducida en esta sección, para encontrar cada una de las siguientes sumas.*

21. $1 + 2 + 3 + \cdots + 300$

22. $1 + 2 + 3 + \cdots + 500$

23. $1 + 2 + 3 + \cdots + 675$

24. $1 + 2 + 3 + \cdots + 825$

Utilice la fórmula $S = n^2$, *explicada en esta sección, para hallar cada una de las siguientes sumas. (Una pista: Para hallar n, sume* 1 *al último término y divida entre* 2.*)*

25. $1 + 3 + 5 + \cdots + 101$

26. $1 + 3 + 5 + \cdots + 49$

27. $1 + 3 + 5 + \cdots + 999$

28. $1 + 3 + 5 + \cdots + 301$

29. Utilice la fórmula para hallar la suma

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

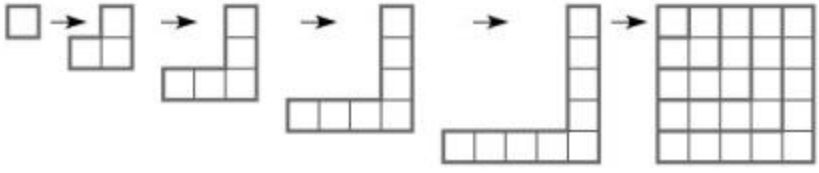
a fin de descubrir una fórmula para obtener la suma

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n.$$

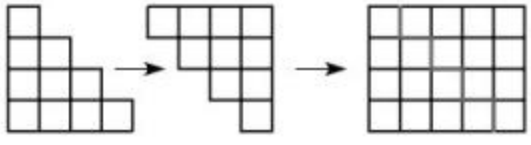
30. Exprese con sus propias palabras la fórmula siguiente, expuesta en esta sección:

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

31. Explique cómo el siguiente diagrama ilustra geométricamente la fórmula $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$.



32. Explique cómo el siguiente diagrama ilustra geométricamente la fórmula $1 + 2 + 3 + 4 = \dfrac{4 \times 5}{2}$.



33. Utilice patrones para completar la tabla siguiente.

Número figurado	1o.	2o.	3o.	4o.	5o.	6o.	7o.	8o.
Triangular	1	3	6	10	15	21		
Cuadrado	1	4	9	16	25			
Pentagonal	1	5	12	22				
Hexagonal	1	6	15					
Heptagonal	1	7						
Octagonal	1							

34. Los primeros cinco números triangulares, cuadrados y pentagonales pueden obtenerse utilizando sumas de términos de sucesiones, como se muestra a continuación.

Triangular	Cuadrado	Pentagonal
$1 = 1$	$1 = 1$	$1 = 1$
$3 = 1 + 2$	$4 = 1 + 3$	$5 = 1 + 4$
$6 = 1 + 2 + 3$	$9 = 1 + 3 + 5$	$12 = 1 + 4 + 7$
$10 = 1 + 2 + 3 + 4$	$16 = 1 + 3 + 5 + 7$	$22 = 1 + 4 + 7 + 10$
$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$	$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$	$35 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$

Observe las diferencias sucesivas de los términos sumados en el lado derecho de las ecuaciones. El siguiente tipo de número figurado es el número **hexagonal** (un hexágono tiene seis lados). Utilice los patrones anteriores para hallar los primeros cinco números hexagonales.

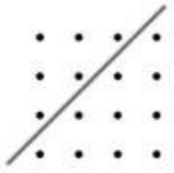
35. Cualquier número triangular multiplicado por ocho, más 1, es un número cuadrado. Demuestre que esto es cierto para los primeros cuatro número triangulares.

36. Divida el primer número triangular entre 3 y anote el residuo. Divida el segundo número triangular entre 3 y anote el residuo. Repita este procedimiento varias veces. ¿Observa algún patrón?

37. Repita el ejercicio 36, pero con números cuadrados y dividiendo entre 4. ¿Qué patrón aparece?

38. Los ejercicios 36 y 37 son casos específicos de lo siguiente: en general, cuando los números en una sucesión de números n-agonales se dividen entre n, la sucesión de residuos obtenida es una sucesión que se repite. Verifique esto para $n = 5$ y $n = 6$.

39. Cada número cuadrado puede escribirse como la suma de dos números triangulares. Por ejemplo, $16 = 6 + 10$. Esto puede representarse geométricamente dividiendo un conjunto cuadrado de puntos con una recta, como se ilustra a continuación.



El arreglo triangular que queda por encima de la recta representa el 6, el que queda debajo de representa el 10, y el arreglo completo representa el 16. Demuestre cómo los número cuadrados 25 y 36 pueden representarse geométricamente de una manera similar como la suma de dos números triangulares.

40. Una fracción está reducida a *su mínima expresión* cuando el máximo común divisor de su numerador y su denominador es 1. Por ejemplo, 3/8 está reducida a su mínima expresión, pero 4/12 no.

(a) Para $n = 2$ a $n = 8$, forme las fracciones

$$\frac{n\text{-ésimo número cuadrado}}{(n+1)\text{-ésimo número cuadrado}}.$$

(b) Repita el inciso (a), pero ahora utilice números triangulares.

(c) Utilice el razonamiento inductivo para hacer una conjetura con base en sus resultados de las partes (a) y (b), y observe si las fracciones están reducidas a su mínima expresión.

41. Complete la tabla siguiente.

n	2	3	4	5	6	7	8
A Cuadrado de *n*							
B (Cuadrado de *n*) + *n*							
C Un medio de los datos en la fila B							
D (Datos de la fila A) − *n*							
E Un medio de los datos en la fila D							

Utilice sus resultados para responder lo siguiente, usando el razonamiento inductivo.

(a) ¿Qué clase de número figurado obtiene al encontrar el promedio de n^2 y n? (Vea la fila C.)

(b) Si eleva n al cuadrado y luego al resultado le resta n, y luego divide entre 2, ¿qué clase de número figurado obtiene? (Vea la fila E.)

42. Determine el menor entero N mayor que 1 tal que existan dos números figurados diferentes para N. ¿Cuáles son?

Además de las fórmulas para T_n, S_n *y* P_n *mostradas en el texto, las fórmulas siguientes corresponden a los números* ***hexagonales*** (H), *números* ***heptagonales*** (Hp) *y números* ***octagonales*** (O):

$$H_n = \frac{n(4n-2)}{2} \qquad Hp_n = \frac{n(5n-3)}{2}$$

$$O_n = \frac{n(6n-4)}{2}.$$

Utilice las fórmulas para encontrar lo siguiente.

43. El decimosexto número cuadrado.

44. El undécimo número triangular.

45. El noveno número pentagonal.

46. El séptimo número hexagonal.

47. El décimo número heptagonal.

48. El duodécimo número octagonal.

49. Observe las fórmulas dadas para H_n, Hp_n y O_n y use patrones y el razonamiento inductivo para predecir la fórmula para N_n, un número **nonagonal** n (un nonágono tiene 9 lados). Luego confirme su hipótesis tomando en cuenta el hecho de que el sexto número nonagonal es 111.

50. Utilice el resultado del ejercicio 49 para encontrar el décimo número nonagonal.

Utilice el razonamiento inductivo para responder cada pregunta de los ejercicios 51 a 54.

51. Si suma dos números triangulares consecutivos, ¿qué clase de número figurado obtiene?

52. Si suma los cuadrados de dos números triangulares consecutivos, ¿qué clase de número figurado obtiene?

53. Eleve al cuadrado un número triangular. Eleve al cuadrado el siguiente número triangular. Reste el resultado menor del mayor. ¿Qué clase de número obtiene?

54. Escoja un valor para n mayor o igual a 2. Encuentre T_{n-1}, multiplíquelo por 3 y súmele n. ¿Qué clase de número figurado obtiene?

1.3 Estrategias para resolver problemas



George Polya, autor del clásico *How to Solve it*, murió a la edad de 97 años, el 7 de septiembre de 1985. Originario de Budapest, Hungría, en cierta ocasión le preguntaron cuál era la razón, según él, por la que a finales del siglo surgieron en ese país tantos buenos matemáticos. Respondió que fue porque las matemáticas son la ciencia más barata: no requieren de equipo costoso, solamente papel y lápiz. Fue autor o coautor de más de 250 artículos en muchos idiomas, además de un gran número de libros; también fue un brillante conferencista y profesor. A pesar de su capacidad, es curioso que Polya nunca aprendiera a conducir un auto.

En las primeras dos secciones de este capítulo enfatizamos la importancia de reconocer patrones y utilizar el razonamiento inductivo para resolver problemas. No obstante, existen otros enfoques útiles. Estas ideas serán usadas a lo largo del texto. (¡La resolución de problemas no es un tema que se estudie un día para olvidarlo al siguiente!)

Probablemente el estudio más famoso en técnicas para la resolución de problemas fue desarrollado por George Polya (1888-1985), entre cuyas múltiples publicaciones cabe mencionar la obra clásica moderna *How to Solve It.* En este libro, Polya propuso un proceso de cuatro pasos para resolver problemas.

El proceso de cuatro pasos de Polya para resolver problemas

1. **Entienda el problema.** Usted no puede resolver un problema si no entiende lo que se le está pidiendo. El problema debe ser leído y analizado cuidadosamente. Quizá necesite leerlo varias veces. Una vez hecho esto, pregúntese: "¿Qué debo encontrar?"
2. **Formule un plan.** Hay muchas formas de abordar un problema y determinar qué plan es el más apropiado. Revise la lista titulada "Estrategias para resolver problemas", para conocer varios enfoques posibles.
3. **Ponga en práctica el plan.** Una vez decidido cómo enfocar el problema, ponga en práctica su plan. Quizá se meta en algún "callejón sin salida" o le salgan al paso obstáculos imprevistos, pero sea persistente. Si un problema se puede resolver fácilmente, entonces en realidad no era tanto problema, ¿o sí?
4. **Revise y compruebe.** Revise su respuesta para comprobar que sea razonable. ¿Satisface las condiciones del problema? ¿Ha resuelto todas las cuestiones implicadas en el problema? ¿Puede abordar el problema de manera diferente y aún así llegar a la misma respuesta?

El paso 2 del proceso de Polya para resolver problemas consiste en formular un plan. Aquí hay algunas estrategias que pueden resultarle útiles.

Estrategias para resolver problemas

Elabore una tabla o un diagrama.
Busque un patrón.
Resuelva un problema similar, pero más sencillo.
Haga un bosquejo.
Use el razonamiento inductivo.
Redúzcalo a una ecuación y resuélvala.
Si una fórmula es aplicable, úsela.
Trabaje de atrás hacia delante.
Aventure suposiciones y verifíquelas.
Utilice el método de prueba y error.
Use el sentido común.
Si una respuesta parece bastante obvia o imposible, vea si no hay alguna trampa.

La solución para un problema en particular bien puede involucrar una o más de las estrategias mostradas aquí, por lo que debe procurar ser creativo en sus técnicas de resolución de problemas. Los ejemplos siguientes ilustran algunas de estas estrategias. Conforme los lea, tenga presente que una cosa es leer la solución de un problema u observar a un profesor resolverlo, y otra muy distinta es ser capaz de resolverlo uno mismo. ¿Acaso no le ha ocurrido que cuando observa a su profesor resolver un problema

piensa, "Parece fácil cuando lo hace, pero cuando lo hago yo solo las cosas se me dificultan mucho"? Esto es así porque su profesor ha pasado años estudiando y poniendo en práctica técnicas de resolución de problemas. Como cualquier otra aptitud, la destreza para resolver problemas requiere perseverancia y trabajo duro.

PARA REFLEXIONAR

Desde hace tiempo se conocen diversas versiones del siguiente problema.

En su testamento, Jack, el granjero, legó la mitad de sus caballos a su hijo Johnny, la tercera parte a su hija Linda y la novena parte a su hijo Jeff. Jack tenía 17 caballos, de modo que, ¿cómo podrían cumplirse los términos del testamento? Por supuesto, los caballos no pueden dividirse en fracciones. Su abogado, Schwab, llegó al rescate y fue capaz de cumplir con las condiciones del testamento a satisfacción de todos. ¿Cómo lo logró?

Aquí está la solución:

Schwab agregó uno de sus caballos a los 17, dando un total de 18. Johnny recibió 1/2 de 18, o sea 9, Linda recibió 1/3 de 18, o sea 6 y Jeff recibió 1/9 de 18, o sea 2. Esto hizo un total de $9 + 6 + 2 = 17$ caballos. Entonces Schwab tomó de vuelta el caballo que había agregado y todos quedaron contentos.

Para análisis en grupo

Examine si los términos del testamento realmente se cumplieron al pie de la letra.



Fibonacci (1170-1250) descubrió la sucesión que más tarde llevaría su nombre, en un problema relacionado con conejos. Fibonacci (hijo de Bonaccio) es sólo uno de los diferentes nombres con que se conocía a Leonardo Pisano. Su padre administraba un almacén en la ciudad que en la actualidad se llama Béjaia (o Bougie), en Argelia. Por esa razón Leonardo Pisano estudió con un maestro árabe y aprendió la numeración hindú que los moros y otros musulmanes habían traído consigo en su paso por occidente.

Fibonacci escribió libros sobre álgebra, geometría y trigonometría.

EJEMPLO 1 ***Resolver un problema utilizando una tabla o un diagrama***

Un hombre puso una pareja de conejos en una jaula. Durante el primer mes, los conejos no tuvieron descendencia, pero a partir del segundo mes empezaron a producir una pareja de conejos por mes. Si cada nueva pareja se reproduce de la misma manera, ¿cuántas parejas de conejos habrá al final de un año?

Éste es un problema famoso en la historia de las matemáticas, y apareció por vez primera en el libro *Liber Abaci,* escrito por el matemático italiano Leonardo Pisano (también conocido como Fibonacci) en el año 1202. Apliquemos el proceso de Polya para resolverlo.

1. **Entienda el problema.** Después de varias lecturas, podemos reformular el problema como sigue: ¿cuántos pares de conejos tendrá el hombre al final de un año, si inicia con una pareja que se reproduce de esta forma: durante el primer mes de vida, ninguna pareja produce nuevos conejos, pero cada mes posterior cada pareja produce un nuevo par?
2. **Formule un plan.** Ya que hay un patrón definido de cómo se reproducirán los conejos, podemos elaborar una tabla como la siguiente. Una vez llenada la tabla, el registro final en la última columna es la respuesta al problema.

Mes	Número de parejas al inicio	Número de nuevas parejas producidas	Número de parejas al final del mes
1o.			
2o.			
3o.			
4o.			
5o.			
6o.			
7o.			
8o.			
9o.			
10o.			
11o.			
12o.			

La solución de problemas debe ser el objetivo central del programa de matemáticas. Como tal, es una meta principal de toda instrucción matemática y parte integral de toda actividad matemática. La solución de problemas no es un tema individual, sino que se trata de un proceso que debe permear a todo el programa y proporcionar el contexto en el que deben aprenderse los distintos conceptos y habilidades.

Tomado de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, 1989 (National Council of Teachers of Mathematics).

3. **Ponga en práctica el plan.** Al inicio del primer mes hay solamente un par de conejos. Durante el primer mes no se produce ningún conejo, así que hay $1 + 0 = 1$ par presente al final del primer mes. Este patrón continúa a lo largo de toda la tabla. Hay que sumar el número de la primera columna con el número de la segunda para obtener el número de la tercera. Continuamos de esta forma hasta el duodécimo mes.

Mes	Número de pares al inicio	+	Número de nuevos pares producidos	=	Número de pares al final del mes	
1o.	1		0		1	$1 + 0 = 1$
2o.	1		1		2	$1 + 1 = 2$
3o.	2		1		3	$2 + 1 = 3$
4o.	3		2		5	.
5o.	5		3		8	.
6o.	8		5		13	.
7o.	13		8		21	.
8o.	21		13		34	.
9o.	34		21		55	.
10o.	55		34		89	.
11o.	89		55		144	.
12o.	144		89		233	$144 + 89 = 233$

Al finalizar el año habrá 233 parejas de conejos.

4. **Revise y compruebe.** Este problema puede verificarse volviendo atrás para asegurarnos de que lo hemos interpretado correctamente, y así ha sido, en efecto. Verifique dos veces la aritmética. Hemos contestado la pregunta planteada en el problema, así que el problema está resuelto. ■

La sucesión mostrada en negritas en la tabla del ejemplo 1 es la sucesión de Fibonacci, muchas de cuyas interesantes propiedades serán investigadas en un capítulo posterior. En los ejemplos restantes de esta sección usaremos el proceso de Polya, pero no mencionaremos cada uno de los pasos, como lo hicimos en el ejemplo 1.



EJEMPLO 2 ***Resolver un problema de atrás hacia delante*** Cada semana, Rob Zwettler acostumbra ir a las carreras con sus amigos. La primera semana triplicó su dinero, pero luego perdió $12. A la semana siguiente llevó el dinero que le sobraba, lo duplicó, pero después perdió $40. Habiendo guardado el dinero que le quedó, la semana siguiente lo intentó una vez más y cuadruplicó su dinero, con tanta suerte que no perdió nada y pudo regresar a casa con el total, que ascendía a $224. ¿Con cuánto dinero comenzó en la primera semana?

En este problema se nos pide encontrar la cantidad que Rob tenía cuando empezó a apostar, teniendo como antecedente la información sobre sus ganancias y sus pérdidas. También conocemos el monto que obtuvo al final. Aun cuando podríamos escribir una ecuación algebraica para solucionar este problema, el método de ir hacia atrás puede aplicarse fácilmente. Puesto que la cantidad final fue de $224 y representa cuatro veces la cantidad con la que inició la tercera semana, *dividimos* $224 entre 4 para ver que inició la tercera semana con $56. Antes de perder los $40 la segunda semana, tenía estos $56 más los $40 que perdió, lo cual da un total de $96. Esto representa el doble de lo que tuvo al principio, de modo que inició la segunda semana con $96 *divididos entre* 2, o sea $48. Si repetimos este proceso una vez más para la primera semana, antes de perder los $12 tenía $48 + $12 = $60, que es el triple de la cantidad con la que inició. Por lo tanto, Rob inició con $60 ÷ 3, es decir, $20.



Augustus De Morgan (Vea el ejemplo 3) fue un filósofo y matemático inglés que prestó sus servicios como profesor en la Universidad de Londres. Escribió muchos libros, uno de los cuales fue *A Budget of Paradoxes*. Sus trabajos sobre teoría de conjuntos y sobre lógica condujeron a la creación de leyes que ahora llevan su nombre y se estudian en otros capítulos de este libro. Murió el mismo año que Charles Babbage.

Para verificar que \$20 es la respuesta correcta, observe las ecuaciones siguientes, que muestran las ganancias y pérdidas:

$$\text{Primera semana: } (3 \times \$20) - \$12 = \$60 - \$12 = \$48$$
$$\text{Segunda semana: } (2 \times \$48) - \$40 = \$96 - \$40 = \$56$$
$$\text{Tercera semana: } (4 \times \$56) = \$224. \quad \text{La cantidad final.}$$

EJEMPLO 3 ***Resolver un problema mediante ensayo y error*** El matemático Augustus De Morgan vivió en el siglo XIX. En cierta ocasión, afirmó: "Yo tenía x años en el año x^2". ¿En qué año nació De Morgan?

Debemos encontrar el año del nacimiento de De Morgan. El problema nos dice que vivió en el siglo XIX, lo cual es otra forma de decir que vivió entre 1800 y 1900. De acuerdo con el planteamiento, uno de los años en que él vivió fue un cuadrado perfecto; entonces, debemos buscar un número entre 1800 y 1900 que sea un cuadrado perfecto. Utilice el ensayo y error.

$$42^2 = 1764$$
$$43^2 = 1849 \quad \text{1849 está entre 1800 y 1900.}$$
$$44^2 = 1936$$

El único número natural cuyo cuadrado está entre 1800 y 1900 es 43, ya que $43^2 = 1849$. Por lo tanto, en 1849 De Morgan tenía 43 años. El paso final para resolver el problema es restar 43 de 1849 para encontrar el año en que nació: $1849 - 43 = 1806$. De Morgan nació en 1806.

Si bien la siguiente sugerencia para verificar el resultado puede parecer poco ortodoxa, funciona: busque la fecha de nacimiento de Morgan en un libro sobre historia de las matemáticas, tal como *An Introduction to the History of Mathematics*, sexta edición, de Howard W. Eves. ■

El problema que sigue data de las matemáticas hindú, hacia 850.



EJEMPLO 4 ***Resolver un problema por tanteo*** Un cuarto de manada de camellos fue visto en el bosque; el doble de la raíz cuadrada de la manada se fue a las laderas de una montaña, y 3 veces 5 camellos permanecieron en la orilla del río. ¿Cuántos camellos tiene la manada?

Si bien es posible resolver este problema usando un método algebraico para resolver ecuaciones, le mostraremos un método alternativo. Estamos buscando el valor numérico de una manada de camellos, de modo que el número debe ser un número natural. Dado que el problema menciona "un cuarto de manada" y "la raíz cuadrada de la manada", el número de camellos debe ser al mismo tiempo un múltiplo de 4 y también un cuadrado perfecto, por lo que no se tratará con fracciones. El número natural más pequeño que satisface ambas condiciones es el 4. Escribamos una ecuación donde x represente la cantidad de camellos en la manada y sustituyamos 4 por x, para ver si ésta es la solución.

"un cuarto de manada"	+	"el doble de la raíz cuadrada de la manada"	+	"3 veces 5 camellos"	=	"número de camellos en la manada"
$\frac{1}{4}x$	+	$2\sqrt{x}$	+	$3 \cdot 5$	=	x

$$\frac{1}{4}(4) + 2\sqrt{4} + 3 \cdot 5 = 4 \quad \text{Sea } x = 4.$$
$$1 + 4 + 15 = 4 \quad ?$$
$$20 \neq 4$$

Ya que 4 no es la solución, tratemos con 16, por ser el siguiente cuadrado perfecto que es múltiplo de 4.

$$\frac{1}{4}(16) + 2\sqrt{16} + 3 \cdot 5 = 16 \qquad \text{Sea } x = 16.$$
$$4 + 8 + 15 = 16 \qquad ?$$
$$27 \neq 16$$

Debido a que 16 tampoco es la solución, intentemos con 36.

$$\frac{1}{4}(36) + 2\sqrt{36} + 3 \cdot 5 = 36 \qquad \text{Sea } x = 36.$$
$$9 + 12 + 15 = 36 \qquad ?$$
$$36 = 36$$

En la última ecuación vemos que 36 es el número correcto de camellos en la manada. Vuelva a enunciar el problema, haciendo esta sustitución: "Un cuarto de 36, más dos veces la raíz cuadrada de 36, más tres veces 5" nos da 9 más 12 más 15, lo cual es igual a 36. ■

EJEMPLO 5 ***Resolver un problema considerando un problema similar más sencillo y buscando un patrón*** El primer dígito de la derecha en un número natural se denomina dígito de las *unidades*, ya que nos dice cuántas unidades están contenidas en el número cuando éste se considera agrupado y expresado en base diez. ¿Cuál es el dígito de las unidades en 2^{4000}?

Recordemos que 2^{4000} significa que el 2 es usado como factor 4000 veces:

$$2^{4000} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{\text{4000 factores}}.$$

Por supuesto, no se supone que debamos resolver esta operación. Para responder la pregunta podemos examinar algunas de las potencias de 2 más pequeñas y entonces buscar un patrón. Comencemos con el exponente 1 y observemos las primeras doce potencias de 2.

$2^1 = 2$	$2^5 = 32$	$2^9 = 512$
$2^2 = 4$	$2^6 = 64$	$2^{10} = 1024$
$2^3 = 8$	$2^7 = 128$	$2^{11} = 2048$
$2^4 = 16$	$2^8 = 256$	$2^{12} = 4096$

Note que en cada uno de los cuatro renglones anteriores, el dígito de las unidades es el mismo. En el último renglón, que contiene los exponentes 4, 8 y 12, el dígito de las unidades siempre es 6. Cada uno de estos exponentes es divisible entre 4, y como 4000 también es divisible entre 4, podemos utilizar el razonamiento inductivo para predecir que el dígito de las unidades en 2^{4000} es 6. (*Nota:* Para encontrar el dígito de las unidades de cualquier otra potencia basta con dividir el exponente entre 4 y utilizar el residuo. Luego se compara el resultado con la lista anterior de potencias. Por ejemplo, para encontrar el dígito de las unidades de 2^{543}, divida 543 entre 4, para obtener un cociente de 135 y un residuo de 3. El dígito de las unidades es el mismo que el de 2^3, es decir, 8.) ■

EJEMPLO 6 ***Resolver un problema dibujando un diagrama*** Distribuya un grupo de nueve puntos en un cuadrado de 3×3, como se muestra en la figura 6. ¿Es posible unir los puntos mediante cuatro líneas rectas sin despegar el lápiz de la hoja ni trazar dos veces ninguna línea? Si es así, muestre cómo.

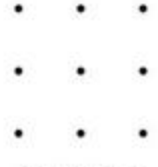


FIGURA 6

En la figura 7 aparecen tres intentos. En cada uno de los casos algo estuvo mal. En el primer dibujo, un punto quedó fuera. En el segundo, tenemos una figura que no puede dibujarse sin separar el lápiz del papel o sin trazar una línea ya existente.

En la tercera figura, todos los puntos han quedado unidos, pero hay cinco líneas y alguna de ellas se trazó dos veces.

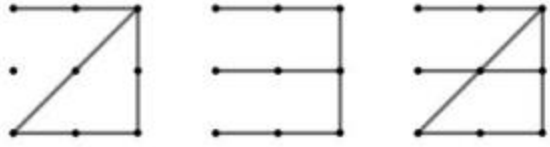


FIGURA 7

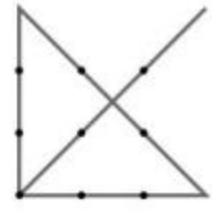


FIGURA 8

Sin embargo, es posible cumplir con las condiciones del problema, como lo muestra la figura 8. Observe que en ella nos "salimos del diagrama", lo cual no estaba prohibido por las condiciones del problema. Éste es un ejemplo de pensamiento creativo: usamos una estrategia que en un principio no se tomó en cuenta porque en nuestros intentos iniciales quisimos "permanecer dentro de los límites" de la figura. ■

El ejemplo final cae dentro de una categoría de problemas que contienen una "trampa" en la redacción. A menudo, a primera vista estos problemas parecen no tener solución porque nos hacemos una idea preconcebida sobre el asunto que se trata. A veces estos problemas nos parecen demasiado fáciles o quizá imposibles al principio, porque tendemos a pasar por alto algún elemento obvio. Debemos observar cuidadosamente el uso del lenguaje en tales problemas y, claro, nunca dejar de usar el sentido común.



EJEMPLO 7 ***Resolver un problema usando el sentido común*** Dos monedas de curso legal en Estados Unidos tienen un valor, en conjunto, de $1.05. Una de ellas no es una moneda de 1 dólar. ¿Cuáles son estas dos monedas?

Tal vez nuestra primera reacción sea algo como esto: "La única manera de tener dos monedas así que sumen $1.05 es que una de ellas sea de 1 dólar y la otra de 5 centavos. Pero, según el problema, una de ellas no es 1 dólar". Esta proposición es cierta. Lo que debemos entender aquí es que la moneda que no es de 1 dólar es la de 5 centavos, ¡y la *otra* es de 1 dólar! Así que las dos monedas son una de 1 dólar y otra de 5 centavos. ■

1.3 EJERCICIOS



Una de las secciones más populares de la revista Mathematics Teacher, *publicada por el National Council of Teachers of Mathematics (Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas), es su calendario mensual, que proporciona un problema interesante, raro o desafiante para cada día del mes. Los problemas son contribuciones de los editores de la revista, los maestros y los estudiantes, y en cada número se menciona a los colaboradores. Los ejercicios 1 al 25 son problemas tomados de los calendarios de los últimos años, en cada uno de los cuales se indica el día, mes y año en que apareció. Los autores agradecen a todos los colaboradores el permiso para utilizar estos problemas.*

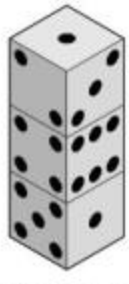
Utilice las estrategias de resolución de problemas para resolver los ejercicios siguientes. En muchos casos hay más de un enfoque posible, así que sea creativo.

1. ***Rotular cajas*** Usted trabaja en un almacén que no ha puesto mucho cuidado en el inventario. Tres cajas de calcetines están rotuladas de manera incorrecta: indican *calcetines rojos, calcetines verdes* y *calcetines rojos y verdes*. ¿Cómo puede rotular otra vez las cajas de manera correcta tomando sólo un calcetín de una caja, sin revisar el interior de las demás? (22 de octubre de 2001.)

2. ***Simetría vertical en los nombres de los estados de Estados Unidos*** (Cuando se dibuja una línea vertical por el centro de una figura y cada uno de sus lados es reflejo del otro, se dice que la figura tiene simetría vertical). Si se escribe con letras mayúsculas, cada letra de HAWAII tiene simetría vertical. Encuentre el nombre de un estado de Estados Unidos cuyas letras, todas, tengan simetría vertical y horizontal. (11 de septiembre de 2001.)

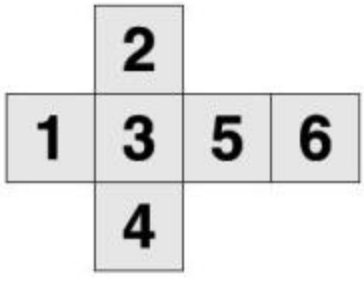
3. ***Suma de los puntos ocultos en los dados*** Tres dados con caras numeradas del 1 al 6 están agrupados como se muestra en el dibujo. Siete de los 18 lados son visibles, dejando 11 lados en la parte inferior, trasera y entre un dado y otro. El número total de puntos no visibles en el dibujo es _____.

A. 21
B. 22
C. 31
D. 41
E. 53
(17 de septiembre de 2001.)

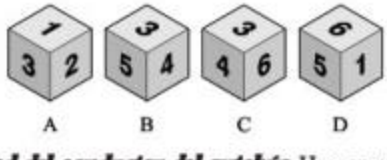


4. ***La edad del señor Green*** En su fiesta de cumpleaños, el señor Green no dijo directamente cuántos años cumplía. Sólo dijo: "Si sumo el año de mi nacimiento a este año, le resto el año de mi décimo cumpleaños y el año de mi decimoquinto cumpleaños, y luego le sumo mi edad actual, el resultado es 80". ¿Qué edad tiene el señor Green? (14 de diciembre de 1997.)

5. ***Doblar y desdoblar una caja*** A continuación se muestra una caja desdoblada:

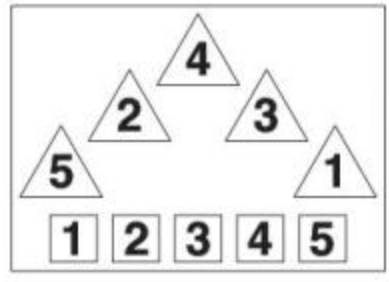


¿Cuál de las figuras muestra la caja una vez doblada? (7 de noviembre de 2001.)

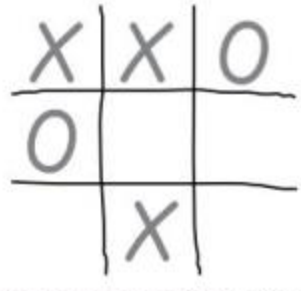


6. ***Edad del conductor del autobús*** Hoy es su primer día como conductor de un autobús. Cuando sale del centro de la ciudad, lleva 23 pasajeros. En la primera parada bajan tres personas y suben cinco al autobús. En la segunda parada bajan 11 pasajeros y suben ocho. En la tercera parada bajan cinco pasajeros y suben 10. ¿Cuál es la edad del conductor del autobús? (1 de abril de 2002.)

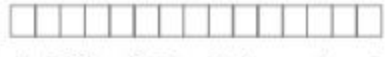
7. ***Relacionar triángulos y cuadrados*** ¿Cómo puede conectar cada cuadrado con el triángulo que lleva su mismo número? Las líneas no deben cruzarse, atravesar por ningún cuadrado o triángulo ni salirse del diagrama. (15 de octubre de 1999.)



8. ***Estrategia en tres en línea*** Usted y un amigo juegan a tres en línea, pero en este caso el que coloque tres en línea pierde. Usted juega con la O. Si quiere ganar, ¿cuál debe ser su siguiente movimiento? (21 de octubre de 2001.)



9. ***Sumas de cuadrados perfectos*** ¿Cómo debe colocar los enteros del 1 al 15 en los espacios siguientes de tal manera que ningún número se repita y la suma de dos números consecutivos cualesquiera sea un cuadrado perfecto? (11 de noviembre de 2001.)



10. ***¿Qué edad tiene?*** Pat y Chris cumplen años el mismo día. Pat tiene el doble de años que Chris tenía cuando Pat tenía la edad que tiene Chris hoy. Si ahora Pat tiene 24 años, ¿cuál es la edad de Chris? (3 de diciembre de 2001.)

11. ***Triángulos de diferencias*** Un grupo de bolas numeradas del 1 al 6 se acomodan en un *triángulo de diferencias*, como se muestra en la página siguiente. Note que en cualquier fila, la diferencia entre el número mayor y el menor de dos bolas sucesivas es el número de la bola que aparece debajo de ellas.



Acomode bolas numeradas del 1 al 10 en un *triángulo de diferencias*. (6 de mayo de 1998.)

12. ***Carátula de un reloj*** Por medio de tres rectas, divida la carátula de un reloj en tres regiones tales que los números en cada región sumen lo mismo que los de las otras. (28 de octubre de 1998.)



13. ***Alfamétrica*** Si a, b y c son dígitos para los cuales

$$\begin{array}{r} 7\ a\ 2 \\ -4\ 8\ b \\ \hline c\ 7\ 3, \end{array}$$

entonces, $a + b + c =$

A. 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17 **E.** 18. (22 de septiembre de 1999.)

14. ***Cuadrado perfecto*** Sólo uno de estos números es un cuadrado perfecto. ¿Cuál de ellos es? (8 de octubre de 1997.)

329476 389372 964328
326047 724203

15. ***Durmiendo en el trayecto a casa de la abuela*** Mientras iba a casa de su abuela para Navidad, George se quedó dormido a la mitad del trayecto. Cuando despertó, aún tenía que recorrer la mitad de la distancia que había recorrido mientras dormía. ¿Cuánto del recorrido total estuvo dormido? (25 de diciembre de 1998.)

16. ***Conteo en un rompecabezas (rectángulos)*** ¿Cuántos rectángulos, de cualquier tamaño, hay en la figura siguiente? (10 de septiembre de 2001.)



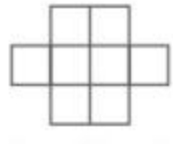
17. ***Baldes de agua*** Lo han enviado por agua al río con dos baldes sin marca alguna, cuya capacidad es de 7 y 3 galones, respectivamente. ¿Cómo puede llevar exactamente 5 galones de agua a casa? (19 de octubre de 1997.)

18. ***Recolección de bellotas*** 
El lunes, Chip y Dale recolectaron 32 bellotas y las guardaron con la provisión de bellotas que ya tenían almacenadas. Cuando Chip se durmió, Dale se comió la mitad de las provisiones totales. Este patrón continuó hasta el viernes por la noche, es decir, se recolectaban 32 bellotas, pero alguien se comía la mitad de las existencias. El sábado por la mañana Chip contó las bellotas y vio que sólo había 35. ¿Con cuántas bellotas iniciaron la semana el lunes por la mañana? (12 de marzo de 1997.)

19. ***Conteo en un rompecabezas (rectángulos)*** ¿Cuántos rectángulos hay en la figura? (27 de marzo de 1997.)



20. ***Rompecabezas numérico*** Coloque los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en cada cuadro de modo que los cuadros que compartan esquinas no contengan dígitos sucesivos. (29 de noviembre de 1997.)



21. ***Número palíndromo*** (*Nota:* Un número *palíndromo* es aquel cuyos dígitos se leen igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo 383, 12321 y 9876789 son palíndromos). Cuando una mujer que va en su auto observa que el odómetro marca 15951, se da cuenta de que el número es un palíndromo. "Curioso", se dice a sí misma. "Pero pasará mucho tiempo antes de que vuelva a ocurrir." No obstante, al cabo de dos horas el odómetro muestra otro número palíndromo. (*Nota del autor:* Suponga que fue el siguiente palíndromo posible.) ¿A qué velocidad viajó el automóvil en esas dos horas? (26 de diciembre de 1998.)

22. ***Tasa de cambio*** Cierta isla carece de moneda, pero maneja la siguiente tasa de cambio:

50 plátanos = 20 cocos
30 cocos = 12 pescados
100 pescados = 1 hamaca

¿Cuántos plátanos equivalen a una hamaca? (16 de abril de 1998.)

23. ***Dígitos finales de una potencia de 7*** ¿Cuáles son los dos dígitos finales de 7^{1997}? (29 de noviembre de 1997.)

24. ***Brillo de la pantalla de un reloj*** Si un reloj digital es la única luz en una habitación que de otra manera estaría totalmente oscura, ¿cuándo estará más oscura la habitación? ¿Y cuándo más iluminada? (1 de mayo de 1996.)

25. ***Valor de las monedas*** ¿Qué vale más, un kilo de monedas de oro de $10 o medio kilo de monedas de oro de $20? (20 de marzo de 1995.)

26. ***Dígito de las unidades de una potencia de 3*** Si usted eleva 3 a la potencia 324, ¿cuál es el dígito de las unidades en el resultado?

27. ***Dígito de las unidades de una potencia de 7*** ¿Cuál es el dígito de las unidades en 7^{491}?

28. ***Gasto en un bazar*** Alison Romike compró un libro de $10 y después gastó en un pasaje de tren la mitad del dinero que le había quedado. Luego, compró alimentos por $4 y gastó en un bazar la mitad del dinero que le quedó. Salió del bazar con $8. ¿Cuánto dinero tenía al iniciar sus compras?

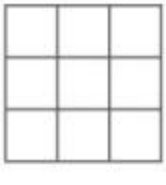
29. ***Número desconocido*** Estoy pensando en un número positivo. Si lo elevo al cuadrado, luego duplico el resultado, le quito la mitad y después le sumo 12, me quedan 37. ¿En qué número pensé?

30. ***Una rana que sube por un pozo*** Una rana está en el fondo de un pozo de 20 pies de profundidad; cada día trepa 4 pies, pero cada noche se resbala de regreso 3 pies. ¿Después de cuántos días alcanzará la rana la boca del pozo?

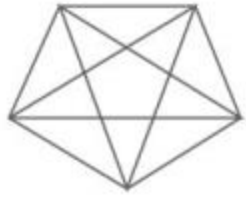


31. ***Formando pares de calcetines*** Un cajón contiene 20 calcetines negros y 20 calcetines blancos. Si se apaga la luz y usted mete la mano al cajón para sacar sus calcetines, ¿cuál es el número mínimo de calcetines que debe sacar para estar seguro de que tiene un par del mismo color?

32. ***Conteo en un rompecabezas (cuadrados)*** ¿Cuántos cuadrados hay en la siguiente figura?



33. ***Conteo en un rompecabezas (triángulos)*** ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



34. ***Niños en un círculo*** Varios niños forman un círculo. Están separados a la misma distancia uno del otro y marcados en orden numérico. El cuarto niño se encuentra parado exactamente enfrente del duodécimo niño. ¿Cuántos niños hay en el círculo?

35. ***Número perfecto*** Un *número perfecto* es un número natural que es igual a la suma de todos sus divisores excepto él mismo. Por ejemplo, 28 es un número perfecto debido a que sus otros divisores, aparte de él, son 1, 2, 4, 7 y 14 y $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. ¿Cuál es el número perfecto más pequeño?

36. ***Los nombres de las hijas*** La madre de Becky tiene tres hijas. A la primera le puso Abril, a la segunda Mayo. ¿Qué nombre le puso a su tercera hija?

Abril

L	M	Mi	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

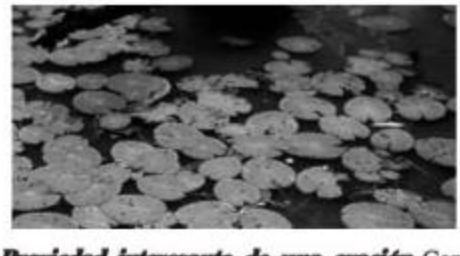
Mayo

L	M	Mi	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Junio

L	M	Mi	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

37. ***Crecimiento del lirio acuático*** Una planta de lirio acuático crece de tal modo que cada día duplica su tamaño. A los 20 días de vida, cubre completamente un estanque. ¿En qué día cubrió la mitad del estanque?



38. ***Propiedad interesante de una oración*** Comente sobre una propiedad interesante de esta oración: "Amo la pacífica paloma". (*Una pista:* Vea el ejercicio 21.)

39. ***Rompecabezas*** Dibuje un diagrama que satisfaga la descripción siguiente, usando el número mínimo de aves: "Dos aves arriba de un ave; dos aves debajo de un ave, y un ave entre dos aves".

40. ***El año de nacimiento de Hornsby*** Suponiendo que viva lo suficiente, uno de los autores de este libro tendría 76 años en el año x^2, donde x es un número natural. ¿En qué año nació?

41. ***El año en que Hornsby se graduó de preparatoria*** El mismo autor mencionado en el ejercicio 40 se graduó de la preparatoria en el año que satisface estas condiciones: (1) la suma de los dígitos es 23; (2) el dígito de las centenas es el dígito de las decenas más 3; (3) ningún dígito es 8. ¿En qué año se graduó?

42. ***Alturas relativas*** Dona es más alta que David, pero más baja que Bill. Dan es más bajo que Bob. ¿Cuál es la primera letra del nombre de la persona más alta?

43. ***La fortuna de Adán y Eva*** Eva le dijo a Adán: "Si me dieras 1 dólar, tendríamos la misma cantidad de dinero". Adán contestó: "Eva, si tú me dieras 1 dólar, yo tendría el doble del dinero que te quedaría". ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

44. ***Dígitos perdidos*** En el problema de suma mostrado a continuación faltan algunos dígitos, como se indica por los espacios en blanco. Si el problema se hace correctamente, ¿cuál es la suma de los dígitos que faltan?

$$\begin{array}{rrrr} & _ & 3 & 5 \\ & 8 & _ & 6 \\ + & 1 & 4 & _ \\ \hline & _ & 4 & 0 & 8 \end{array}$$

45. ***Dígitos perdidos*** Complete los espacios en blanco, de tal manera que el problema de multiplicación use cada uno de los dígitos 0, 1, 2, 3, . . . , 9 sólo una vez y que el producto sea correcto.

$$\begin{array}{rrrr} & _ & 0 & 2 \\ \times & & 3 & _ \\ \hline & _ & 5, & _ & _ & _ \end{array}$$

46. ***Cuadrado mágico*** Un *cuadrado mágico* es una serie de números en forma de cuadrado con la propiedad de que los números en cada renglón, columna y diagonal suman siempre lo mismo. Complete el cuadrado que aparece abajo, de tal modo que se convierta en un cuadrado mágico y cada dígito, 1, 2, 3, . . . , 9 se use sólo una vez.

6		8
	5	
		4

47. ***Cuadrado mágico*** Remítase al ejercicio 46. Complete el cuadrado mágico siguiente, de tal manera que cada dígito, 1, 2, 3, . . . , 16, se use sólo una vez y la suma en cada renglón, columna y diagonal sea 34.

6			9
	15		14
11		10	
16		13	

48. ***Pago por un dulce*** Brian Altobello tiene infinidad de monedas de 1, 5 y 10 centavos. ¿De cuántas maneras puede pagar 15 centavos por una menta de chocolate? (Por ejemplo, una forma es con una moneda de 10 y otra de 5.)

49. ***Lanzamientos en un juego de béisbol*** ¿Cuál es el número mínimo de lanzamientos que puede hacer en un juego regular de nueve entradas un lanzador de béisbol que lanza un juego completo?

50. ***En orden alfabético*** ¿Cuál es el número natural más pequeño cuyo nombre en inglés tiene sus letras en orden alfabético?

51. ***Cruce de un río*** Varios soldados deben cruzar un río profundo en un punto donde no hay puente. Los soldados descubren a dos niños que juegan en un pequeño bote de remos. El bote sólo puede llevar a dos niños o un soldado. Todos los soldados cruzaron el río. ¿Cómo lo lograron?

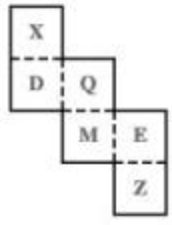
52. ***Pesar monedas*** Usted tiene ocho monedas. De éstas, siete son auténticas y una es falsa, por ello pesa un poco menos que las demás. Tiene también una balanza de platillos que puede usar solamente tres veces. Diga cómo descubrir la moneda falsa en tres pesajes. Luego muestre cómo detectar la moneda falsa con únicamente *dos* pesajes.

53. ***Cruce de un río*** Una persona debe llevar un lobo, una cabra y algunas coles a través de un río. El bote de remos que va a utilizar tiene espacio únicamente para la persona y una sola cosa más, ya sea el lobo, la cabra o las coles. Si la persona se llevara las coles, el lobo se comería a la cabra; si se llevara al lobo, la cabra se comería las coles. La cabra y las coles están a salvo sólo cuando la persona está presente. Aun así, la persona pudo pasar todo por el río. Explique cómo lo logró. (Este problema data de alrededor del año 750.)

54. ***¿Quién dice la verdad?*** Tres mujeres, las señoras Thompson, Johnson y Andersen, están sentadas una al lado de la otra en una junta del grupo de mejoramiento de la colonia. La señora Thompson siempre dice la verdad, la señora Johnson algunas veces dice

la verdad y la señora Andersen nunca dice la verdad. La mujer de la izquierda dice: "La señora Thompson está en medio". La mujer de en medio dice: "Yo soy la señora Jonhson". Mientras que la mujer de la derecha dice: "La señora Andersen está en medio". ¿En qué lugar está sentada cada mujer?

55. ***Rompecabezas geométrico*** Cuando el modelo mostrado aquí se dobla para formar un cubo, ¿cuál de las letras queda opuesta a la cara marcada con la letra Z?



56. ***Rompecabezas gráfico*** Dibuje un cuadrado en la siguiente figura, de manera que ninguno de los gatos comparta con otro la misma región.



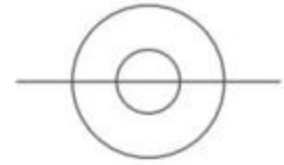
57. ***Número desconocido*** (Éste es un antiguo problema hindú). Bella doncella de ojos refulgentes, dime, ¿cuál es el número que cuando se multiplica por 3, se le suman 3/4 del producto, se divide entre 7, se disminuye en 1/3 del cociente, se multiplica por sí mismo, se disminuye en 52, se le saca la raíz cuadrada, se le suman 8 y finalmente se divide entre 10, da como resultado 2?

58. ***Compra en una ferretería*** En una ferretería, puedo comprar 1 por $0.75 y también puedo comprar 68,356 por $3.75. ¿Qué estoy comprando?

59. ***Rompecabezas geométrico*** Dibuje la siguiente figura sin despegar el lápiz de la hoja y trazar dos veces una misma línea.



60. ***Rompecabezas geométrico*** Repita el ejercicio 59 con la figura siguiente.



61. ***Dígitos decimales*** ¿Cuál es el centésimo dígito en la representación decimal de 1/7?

62. ***Libros en un estante*** Los volúmenes 1 y 2 de *Las obras completas de Wally Smart* están colocados verticalmente y en orden numérico de izquierda a derecha en su estante. El volumen 1 contiene 450 páginas y el volumen 2 contiene 475 páginas. Excluyendo las cubiertas, ¿cuántas páginas hay entre las páginas 1 del volumen 1 y la página 475 del volumen 2?

63. ***¡Oh, hermandad!*** El hermano de la persona que ocupa la dirección general de una importante empresa industrial falleció. Pero el hombre que falleció no tenía ningún hermano. ¿Cómo puede ser esto posible?

64. ***La edad de la adolescencia*** La edad de una adolescente incrementada en dos da un cuadrado perfecto. Su edad disminuida en 10 da la raíz cuadrada de dicho cuadrado perfecto. Ella es cinco años mayor que su hermano. ¿Cuántos años tiene su hermano?

65. ***Otras edades*** James, Dan, Jessica y Cathy forman un par de matrimonios. Sus edades son 36, 31, 30 y 29. Jessica está casada con la persona de mayor edad del grupo. James es mayor que Jessica, pero más joven que Cathy. ¿Quién está casado con quién, y cuáles son sus respectivas edades?

66. ***Cómo dar cambio*** ¿De cuántas maneras diferentes puede usted cambiar medio dólar usando monedas estadounidenses, si no se le permite usar centavos?

67. ***Días en un mes*** Algunos meses tienen 30 días y algunos tienen 31 días. ¿Cuántos meses tienen 28 días?

68. ***Rompecabezas en un calendario*** Si en un año dos meses consecutivos tienen un viernes 13, ¿cuáles son esos meses?

69. ***Polvo en un hoyo*** ¿Cuánto polvo hay dentro de un hoyo cúbico de 6 pies por lado?

70. ***Propiedad de Fibonacci*** Revise otra vez el ejemplo 1 y observe la sucesión de números en negritas, que corresponde a la sucesión de Fibonacci. Escoja cualesquiera cuatro términos consecutivos de la secuencia. Multiplique el primero y el cuarto términos elegidos y después multiplique los dos términos intermedios. Repita este proceso algunas veces más. ¿Qué observa usted cuando se comparan ambos productos?

71. ***Saludo de tipo palíndromo*** El primer hombre se presentó a la primera mujer con un breve saludo en forma de palíndromo. ¿Cuál fue este saludo? (*Una pista:* Vea los ejercicios 21, 38 y 43.)

72. ***El número telefónico de Heeren*** Revise otra vez los ejercicios 21 y 40. Otro autor de este libro (que se espera sea un poco mayor de 76 años en el año x^2) tiene un número telefónico que es un palíndromo de 7 dígitos, digamos *abc-defg*, que se ajusta a las condiciones siguientes:

$b = 2 \times a$

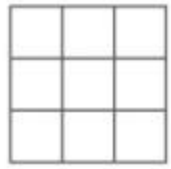
$e = f$

a, b y c son todos múltiplos de 4

$a + b + c + d + e + f + g = 47.$

Diga cuál es su número telefónico.

73. ***Rompecabezas geométrico*** ¿Cuál es el número máximo de cuadros donde podemos marcar una cruz ($\times$) sin que quede algún renglón, columna o diagonal completamente llena de cruces? Ilustre su respuesta.



74. ***Determinación de operaciones*** Coloque uno de los signos aritméticos $+$, $-$, $\times$ o $\div$ entre cada par de números sucesivos del lado izquierdo de la igualdad para que sea verdadera. Cualquier operación puede ser usada más de una vez, o quizá no usarse en absoluto.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

1.4 Cálculo, estimación y lectura de gráficas



La fotografía muestra la TI-1795 SV de Texas Instruments, una calculadora típica de cuatro funciones.

Con la introducción de las calculadoras portátiles a principios de la década de 1970, los métodos de la aritmética cotidiana sufrieron una drástica transformación. Uno de los primeros modelos para el público en general, la SR-10 de Texas Instruments, tenía un precio de 150 dólares en 1973; realizaba las cuatro operaciones aritméticas y extraía raíces cuadradas, pero no podía hacer mucho más que eso.

La búsqueda de métodos más sencillos de hacer cálculos y operaciones fue lo que generó el desarrollo de las calculadoras portátiles y las computadoras. Los autores de este libro suponemos que todos los estudiantes tienen acceso a calculadoras, lo que les permitiría dedicar más tiempo a los conceptos matemáticos y menos al cálculo con papel y lápiz. Con que el alumno cuente con una calculadora capaz de realizar las operaciones aritméticas básicas y unas cuantas funciones es más que suficiente. Tal herramienta se conoce como **calculadora de cuatro funciones**. Los estudiantes de los cursos de matemáticas avanzadas (por ejemplo, los ingenieros) por lo regular necesitan la mayor capacidad que ofrecen las **calculadoras científicas**. También existen las **calculadoras gráficas**, que generan gráficas en pantallas pequeñas. Como las calculadoras difieren de un fabricante a otro, tome en cuenta lo siguiente.

> Siempre que necesite ayuda para la realización de una operación con su calculadora, consulte su manual del usuario. Si necesita más ayuda, pregunte a su instructor u otro estudiante que posea el mismo modelo de calculadora que usted.

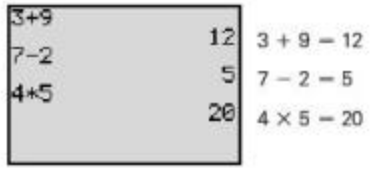
Cálculo Las calculadoras gráficas se han convertido en el estándar en el mundo de las calculadoras manuales. Una de sus mayores ventajas es que tanto la información que ingresa el usuario en la calculadora como el resultado generado por ésta pueden visualizarse en la misma pantalla. De esta manera, el usuario puede verificar que la información que ingresó en la calculadora es correcta. Aunque para estudiar el material



Cualquier calculadora (en particular una moderna calculadora gráfica) consta de dos componentes: la "caja" electrónica y el manual de instrucciones del usuario, que explica cómo usarla.

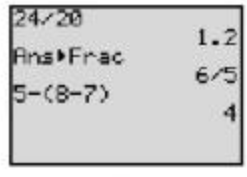
presentado en este texto no es necesaria una calculadora gráfica, ocasionalmente incluiremos pantallas de calculadoras graficas para apoyar los resultados obtenidos o para proporcionar información adicional.*

Las siguientes pantallas muestran algunos de los tipos más comunes de datos y operaciones.



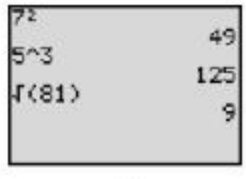
$3 + 9 = 12$
$7 - 2 = 5$
$4 \times 5 = 20$

A



$\frac{24}{20} = 12$
$1.2 = \frac{6}{5}$
$5 - (8 - 7) = 4$

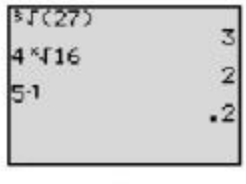
B



$7^2 = 49$
$5^3 = 125$
$\sqrt{81} = 9$

C

La pantalla A ilustra cómo se suman, restan o multiplican dos números. La pantalla B muestra cómo pueden dividirse dos números, cómo se convierte el cociente decimal (que está almacenado en la celda Ans) en una fracción y cómo hay que usar los paréntesis en un cálculo. La pantalla C muestra cómo sacar el cuadrado de un número, cómo elevarlo al cubo y cómo hallar su raíz cuadrada.



$\sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[4]{16} = 2$
5^{-1} (o $\frac{1}{5}$) $= .2$

D



$\pi \approx 3.141592654$
5! (o $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) = 120$
$6{,}265{,}804 \times 8{,}980{,}591 \approx 5.627062301 \times 10^{13}$

≈ significa que "es aproximadamente igual a"

E

La pantalla D muestra cómo hallar una raíz de índice superior (raíz cúbica y raíz cuarta) y cómo puede obtenerse el recíproco de un número utilizando −1 como exponente. La pantalla E muestra cómo se puede acceder al valor de π mediante su propia tecla especial, cómo encontrar un *factorial* (representado por !) y cómo puede mostrarse un resultado en *notación científica*. (La expresión "E13" después de 5.627062301

*Debido a que la calculadora TI-83 Plus de Texas Instruments es uno de los modelos más populares, aquí incluimos pantallas generadas por el software TI-Graph Link™ de ésta.

significa que este número es multiplicado por 10^{13}. Esta respuesta sólo es una aproximación, ya que el producto de $6{,}265{,}804 \times 8{,}980{,}591$ contiene más dígitos de los que la calculadora es capaz de mostrar.)

Estimación Aunque las calculadoras pueden hacer la vida más fácil cuando se usan para hacer cálculos, no debemos perder de vista el hecho de que muchas veces sólo necesitamos una estimación de la respuesta de un problema, y en estos casos puede no ser necesaria o incluso apropiada una calculadora.



EJEMPLO 1 Una pajarera para golondrinas puede albergar en total ocho nidos. ¿Cuántas pajareras serán necesarias para albergar 58 nidos?

Si dividimos 58 entre 8, ya sea a mano o con calculadora, la respuesta que obtenemos es 7.25. ¿Es éste el número deseado? Por supuesto que no, ya que no podemos considerar fracciones de pajareras. ¿Cuántas pajareras requerimos, siete u ocho? Para dar cabida a los nidos que faltan en las siete pajareras (como se indica por la fracción decimal), debemos pensar en utilizar 8 pajareras. Observe que, en este problema, la respuesta debe redondearse hacia el *siguiente* número natural. ■



EJEMPLO 2 En 2001, David Boston, de los Cardenales de Arizona, atrapó 98 pases para un total de 1598 yardas. ¿Cuál es el número promedio aproximado de yardas por pase atrapado?

Puesto que sólo se nos pide determinar el promedio aproximado de David, podemos considerar que atrapó 100 pases para un total de alrededor de 1600 yardas; así, su promedio fue de aproximadamente $1600/100 = 16$ yardas por pase atrapado. (La calculadora nos permite calcular su promedio al décimo más cercano: 16.3 yardas. Verifíquelo.) ■



EJEMPLO 3 En un año reciente, aproximadamente 127,000 hombres entre 25 y 29 años trabajaban en granjas. Esto representaba parte del total de los 238,000 trabajadores en ese grupo de edades. De los 331,000 granjeros entre 40 y 44 años de edad, 160,000 eran hombres. Sin utilizar una calculadora, determine cuál grupo de edades contiene una mayor proporción de hombres.

En este caso resulta mejor calcular en términos de miles que tratar de manejar todos esos ceros. Primero analizamos el grupo de 25 a 29 años. Como había un total de 238,000 trabajadores, de los cuales 127,000 eran hombres, había $238 - 127 = 111{,}000$ trabajadoras. Es decir, más de la mitad de los trabajadores eran hombres. En el grupo de 40 a 44 años, de los 331,000 trabajadores que había, 160,000 eran hombres; esto arroja un total de $331 - 160 = 171{,}000$ mujeres, lo que significa que menos de la mitad eran hombres. Al final basta comparar ambos grupos para determinar que el grupo de 25 a 29 años contenía la mayor proporción de hombres. ■

Lectura de gráficas El uso de gráficas se ha convertido en un medio eficiente para transmitir información de manera concisa. Con hojear casi cualquier ejemplar de un periódico podemos verificar lo anterior. Hay muchas maneras de representar información utilizando gráficas y diagramas. Las más comunes son los diagramas de sectores, las gráficas de barras y las de líneas.

EJEMPLO 4 Utilice las gráficas de las figuras 9 a 11 para hacer interpretaciones.

La gráfica circular o de sectores de la figura 9 muestra cómo el precio de un galón de gasolina en California se divide entre los diferentes fabricantes y dependencias. Las porciones (que semejan una rebanada de pastel) tienen el tamaño proporcional del monto que les corresponde, una vez dividido. Por ejemplo, la mayor parte del precio (32%) se va a la refinería, mientras que la porción menor (8%) corresponde al impuesto estatal al ingreso. Como es de esperarse, el porcentaje total es 100%. Si por ejemplo, el precio de 1 galón de gasolina es \$1.50, la ganancia para el distribuidor sería 12%, o $\$1.50 \times 0.12 = \$0.18$.

La gráfica de barras de la figura 10 muestra la relación entre el tamaño de una habitación, en pies cuadrados, y el tamaño sugerido del aire acondicionado, en BTU (unidades térmicas británicas). Por ejemplo, si queremos determinar la capacidad que debe tener un aparato de aire acondicionado para una habitación de 850 pies cuadrados, hay que buscar 850 en la parte inferior de la gráfica. La barra que corresponde a 850 pies cuadrados tiene una altura que equivale a 16,000 en la escala vertical de la izquierda. Esto significa que debemos utilizar un aire acondicionado de 16,000 BTU.

La gráfica de líneas de la figura 11 muestra las utilidades que obtuvo la CNBC de 1994 a 1999. Se interpreta de manera similar a la gráfica de barras. Por ejemplo, en 1996 las utilidades fueron de 80 millones de dólares, mientras que en 1997 fueron de 130 millones de dólares. El hecho de que los segmentos de línea siempre asciendan de izquierda a derecha indica que las utilidades aumentaron cada año en ese periodo.



Fuente: Comisión de Energía de California, 1999.

FIGURA 9



Fuente: Carey, Morris y James, *Home Improvement for Dummies,* IDG Books.

FIGURA 10



Fuente: Fortune, 24 de mayo de 1999, p. 142.

FIGURA 11

PARA REFLEXIONAR

La enseñanza de los números

Letra es a *número* como *conocimiento de las letras* es a *conocimiento de los números.* En años recientes se ha escrito mucho acerca de cuán importante es que la población en general conozca de números. El ensayo titulado "Quantity", de James T. Fey, en *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*, contiene la descripción siguiente de una aproximación al conocimiento de los números.

> Dado el papel fundamental del razonamiento cuantitativo en la aplicación de las matemáticas, así como la atracción innata que sienten los humanos por los números, no es sorprendente que los conceptos y las habilidades numéricas constituyan el núcleo de las matemáticas escolares. Desde los primeros grados, los niños comienzan a seguir una educación matemática diseñada para desarrollar procedimientos destinados a realizar cálculos aritméticos, junto con la consiguiente comprensión conceptual necesaria para resolver problemas cuantitativos y tomar decisiones bien informadas. Los niños aprenden muchas formas de describir datos y relaciones cuantitativas mediante representaciones numéricas, gráficas y simbólicas; de planear operaciones aritméticas y algebraicas y de ejecutar esos planes mediante procedimientos eficaces; y de interpretar la información cuantitativa, sacar inferencias y verificar si las conclusiones son razonables.

Para análisis en grupo

Con una calculadora, cada estudiante en la clase debe colocar en los cuadros los dígitos 3, 4, 5, 6, 7 u 8, pero cada dígito debe ser usado sólo una vez. Luego, haga un sondeo para ver quién fue capaz de obtener el número más cercano al resultado que se pide. Cada ronda debe hacerse en un minuto.

Buena suerte!

Ronda I $\square \times \square\square\square\square = 30{,}000$

Ronda II $\square \times \square\square\square\square = 40{,}000$

Ronda III $\square \times \square\square\square\square = 50{,}000$

Ronda IV $\square\square \times \square\square\square\square = 30{,}000$

Ronda V $\square\square \times \square\square\square\square = 60{,}000$

1.4 EJERCICIOS

Los ejercicios del 1 al 18 están diseñados para que usted adquiera práctica en el manejo de algunas operaciones básicas de su calculadora. Realice las operaciones indicadas y ofrezca en su respuesta tantos dígitos como aparezcan en la pantalla de su calculadora. (El número de dígitos en la pantalla varía dependiendo del modelo de calculadora que se utilice.)

1. $39.7 + (8.2 - 4.1)$

2. $2.8 \times (3.2 - 1.1)$

3. $\sqrt{5.56440921}$

4. $\sqrt{37.38711025}$

5. $\sqrt[3]{418.508992}$

6. $\sqrt[3]{700.227072}$

7. 2.67^2

8. 3.49^3

9. 5.76^5

10. 1.48^6

11. $\dfrac{14.32 - 8.1}{2 \times 3.11}$

12. $\dfrac{12.3 + 18.276}{3 \times 1.04}$

13. $\sqrt[5]{1.35}$

14. $\sqrt[6]{3.21}$

15. $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

16. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$

17. $\sqrt[4]{\dfrac{2143}{22}}$

18. $\dfrac{12{,}345{,}679 \times 72}{\sqrt[3]{27}}$

19. Elija cualquier número de cinco dígitos. Multiplíquelo por 9 en su calculadora. Ahora sume los dígitos de la respuesta. Si la suma es mayor que 9, sume los dígitos nuevamente y repita hasta que la suma sea menor que 10. Su respuesta siempre será 9. Repita el ejercicio con un número de seis dígitos. ¿El resultado sigue siendo el mismo?

20. Utilice su calculadora para elevar al *cuadrado* los siguientes números de dos dígitos que terminan en 5: 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85. Escriba sus resultados, y examine el patrón que éstos siguen. Luego utilice el razonamiento inductivo para predecir el valor de 95^2. Escriba una explicación de cómo puede elevar mentalmente al cuadrado cualquier número de dos dígitos que termine en 5.

En matemáticas, es posible sacar conjeturas acerca de ciertas reglas, leyes, propiedades y definiciones mediante el razonamiento inductivo luego de examinar varios problemas similares de cálculo y sus respuestas en una calculadora. Realice los siguientes cálculos y analice las respuestas. Luego ponga la respuesta que considere apropiada en los espacios en blanco. (La justificación de estos resultados será analizada posteriormente en este libro.)

21. $(-3) \times (-8)$; $(-5) \times (-4)$; $(-2.7) \times (-4.3)$

La multiplicación de dos números negativos nos da un producto _____.
(negativo/positivo)

22. $5 \times (-4)$; -3×8; $2.7 \times (-4.3)$

La multiplicación de un número negativo y un número positivo da un producto _____.
(negativo/positivo)

23. 5.6^0; π^0; 2^0; 120^0; 0.5^0

Al elevar un número diferente de cero a la potencia 0, el resultado es _____.

24. 1^2; 1^3; 1^{-3}; 1^0; 1^{13}

Cuando se eleva 1 a cualquier potencia, el resultado es _____.

25. $1/7$; $1/(-9)$; $1/3$; $1/(-8)$

El signo del recíproco de un número es _____ el signo de dicho
(igual que/diferente de)
número.

26. $5/0$; $9/0$; $\pi/0$; $-3/0$; $0/0$

Dividir un número entre cero en una calculadora da como resultado _____.

27. $0/8$; $0/2$; $0/(-3)$; $0/\pi$

Cero dividido entre un número diferente de cero nos da un cociente de _____.

28. $(-3) \times (-4) \times (-5)$; $(-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) \times (-7)$; $(-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) \times (-7) \times (-8) \times (-9)$

La multiplicación de un número *impar* de números negativos da un producto _____.
(positivo/negativo)

29. $(-3) \times (-4)$; $(-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6)$; $(-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) \times (-7) \times (-8)$

La multiplicación de un número *par* de números negativos da un producto _____.
(positivo/negativo)

30. $\sqrt{-3}$; $\sqrt{-5}$; $\sqrt{-6}$; $\sqrt{-10}$

Sacar la raíz cuadrada de un número negativo en una calculadora da como resultado _____.

31. En su calculadora, encuentre la fracción decimal para 1/6. Después del punto decimal aparece un 1 seguido de una cadena de 6. Si su calculadora da el resultado con un *redondeo*, el último dígito será un 7, pero si da el resultado *sin redondear*, el último dígito será un 6. ¿Qué clase de calculadora tiene usted?

32. Escoja cualquier número de tres dígitos e introdúzcalo en una calculadora. Repita los tres dígitos para obtener un número de seis dígitos. Divida este número de seis dígitos entre 7. El resultado divídalo entre 13. El resultado divídalo entre 11. ¿Cuál es la respuesta? Explique por qué ocurre esto.

33. Escoja cualquier dígito, excepto 0. Multiplíquelo por 429. Ahora multiplique el resultado por 259. ¿Cuál es la respuesta? Explique por qué ocurre esto.

34. Elija dos números naturales. Sume 1 al segundo y divídalo entre el primero para obtener un tercer número. Sume 1 al tercer número y divídalo entre el segundo para obtener un cuarto número. Sume 1 al cuarto y divídalo entre el tercero para obtener un quinto número. Continúe este proceso hasta que descubra un patrón. ¿Cuál es éste?

Cuando una calculadora científica o de cuatro funciones (no una calculadora gráfica) se gira de modo que la pantalla quede invertida, los dígitos en la pantalla parecen letras del alfabeto español, como puede verse a continuación:

$0 \leftrightarrow$ O	$3 \leftrightarrow$ E	$7 \leftrightarrow$ L
$1 \leftrightarrow$ I	$4 \leftrightarrow$ h	$8 \leftrightarrow$ B
$2 \leftrightarrow$ Z	$5 \leftrightarrow$ S	$9 \leftrightarrow$ G

En los siguientes ejercicios, realice el cálculo que se indica en una calculadora de cuatro funciones o una calculadora científica. Luego gire la calculadora para leer la palabra que debe escribirse en el espacio que aparece en la oración.

35. $[(100 \times 19) + 19] \times 2$

Leticia y Víctor están muy contentos porque tienen un nuevo _____.

36. $(\sqrt{2809} \times 13) + 20$

En su partido de despedida, el Rey Pelé no pudo anotar un _____.

37. $225^2 - \frac{348}{4}$

Por ser su cumpleaños, Carolina recibió muchos _____ de chocolate.

38. $225^2 + \sqrt{33489}$

¿Usted y un amigo han estado en alguna situación en que se sientan como _____?

39. Idee un ejercicio semejante a los ejercicios 35 al 38.

40. Los dígitos que aparecen en las pantallas de la mayoría de las calculadoras muestran algunos o todos los segmentos del símbolo que aparece en la figura. En los dígitos del 0 al 9:
(a) ¿Cuál es el segmento que más se utiliza?
(b) ¿Cuál es el que menos se utiliza?
(c) ¿Cuál dígito utiliza más segmentos?
(d) ¿Cuál dígito utiliza menos segmentos?

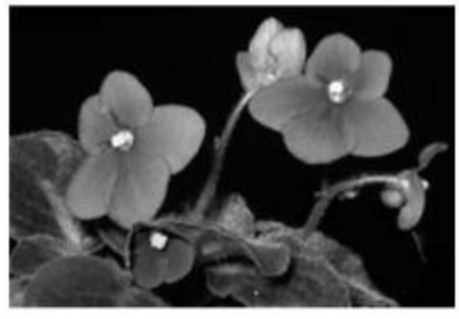


En los ejercicios 41 al 44 exprese la respuesta en el número natural que más se ajuste para cada pregunta. (Indique el menor número natural que funcionará.)

41. ***Páginas para conservar estampas*** Una página de plástico para guardar estampas puede contener 9 estampas. ¿Cuántas páginas se necesitarán para guardar 431 estampas?

42. ***Cajones para videocasetes*** Un cajón diseñado para contener videocasetes tiene 18 compartimentos; si Chris tiene en su casa una colección de 204 películas de Disney, ¿cuántos de tales cajones necesitará?

43. ***Fertilizante para violetas africanas*** Un jardinero tiene 400 violetas africanas que necesitan fertilizante. Cada envase de fertilizante sirve para surtir hasta 30 plantas. ¿Cuántos envases necesitará para realizar este trabajo?



44. ***Necesidad de maestros para quinto grado*** La Escuela de Lake Harbor tiene 155 estudiantes de quinto grado. La directora, Cheryl Arabie, ha decidido que cada maestro de quinto grado no tenga más de 24 estudiantes. ¿Cuántos maestros de quinto grado necesitará?

En los ejercicios 45 al 50, utilice la estimación para determinar la opción más cercana a la respuesta correcta.

45. ***Precio de un acre de tierra*** Con el fin de construir el "reloj del milenio" en el Monte Washington, en Nevada, el cual hará tic-tac cada año, repicará cada siglo y durará al menos 10,000 años, la fundación sin fines de lucro Long Now compró 80 acres de tierra en $140,000. ¿Cuál de las opciones siguientes es la estimación más cercana al precio por acre?
A. $1000 **B.** $2000 **C.** $4000 **D.** $11,200

46. ***Duración de un viaje redondo*** La distancia de Seattle, Washington a Springfield, Missouri, es de 2009 millas. ¿Alrededor de cuántas horas durará un viaje de ida y vuelta de Seattle a Springfield en un autobús que promedia 50 millas por hora durante todo el viaje?
A. 60 **B.** 70 **C.** 80 **D.** 90

47. ***Habitantes por milla cuadrada*** El condado de Hale, en Texas, tiene una población de 34,671 habitantes y posee una extensión de 1005 millas cuadradas. ¿Aproximadamente cuántas personas por milla cuadrada hay en este condado?
A. 35 **B.** 350 **C.** 3500 **D.** 35,000

48. ***Revoluciones de Mercurio*** El planeta Mercurio tarda 88.0 días terrestres en dar una vuelta alrededor del Sol. Plutón tarda 90,824.2 días en hacer lo mismo. Cuando Plutón ha dado una sola vuelta alrededor del Sol, ¿aproximadamente cuántas veces habrá dado Mercurio la vuelta al Sol?
A. 100,000 **B.** 10,000 **C.** 1000 **D.** 100

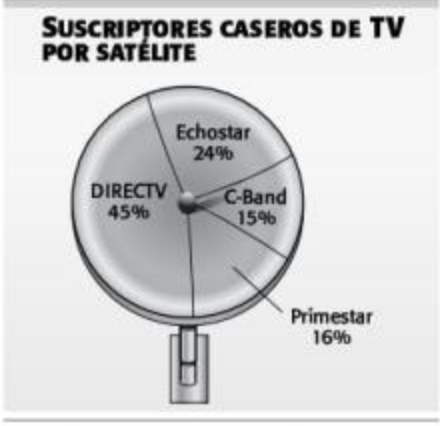
49. ***Promedio de carrera*** En 1998, Terrell Davis, de los Broncos de Denver, corrió 2008 yardas en 392 intentos de carrera. El número de yardas aproximadas que ganó por cada intento fue de _____ .
A. 1/5 **B.** 50 **C.** 4 **D.** 5

50. ***Área de la Capilla Sixtina*** La Capilla Sixtina, en el Vaticano, mide 40.5 por 13.5 metros.



¿Cuál de las siguientes respuestas es la mejor aproximación a su área?
A. 110 metros **B.** 55 metros
C. 110 metros cuadrados **D.** 600 metros cuadrados

Participación de mercado de la televisión por satélite *En la gráfica siguiente se muestra la participación de mercado por suscriptores de la televisión por satélite en 1999.*



Fuente: Skyreport.com; *USA Today.*

En agosto de 1999, el número total de usuarios alcanzó los 12 millones. *Utilice esta información y la gráfica circular para resolver los ejercicios 51 a 54.*

51. ¿Cuál proveedor tenía la participación más grande de este mercado en agosto de 1999? ¿Qué porcentaje fue?

52. Determine el número de suscriptores de Primestar en agosto de 1999.

53. A C-Band se le asocia con las antenas grandes, mientras que los demás suscriptores tienen antenas pequeñas. ¿Cuántos suscriptores tenían antenas pequeñas?

54. ¿Cuántos suscriptores más que C-Band tenía Primestar?

Crecimiento del correo electrónico *La segunda mitad de los años noventa se caracterizó por el asombroso crecimiento de un nuevo método de comunicación: el correo electrónico (o "e-mail"). La gráfica siguiente muestra el número de buzones de correo electrónico en Estados Unidos durante los años 1995 a 2001. Utilice la gráfica para responder las preguntas de los ejercicios 55 a 58.*



Fuente: Investigación de IDC.

55. ¿Cuántos buzones de correo electrónico había en 1998?

56. ¿En qué cantidad creció el número de buzones de correo electrónico de 1995 a 2001?

57. ¿En qué año el número de buzones de correo electrónico alcanzó los 150 millones?

58. Suponga que en 2002 el número de buzones aumenta la misma cantidad que aumentó en 2001 con respecto al año anterior. ¿Cuántos buzones habría en 2002?

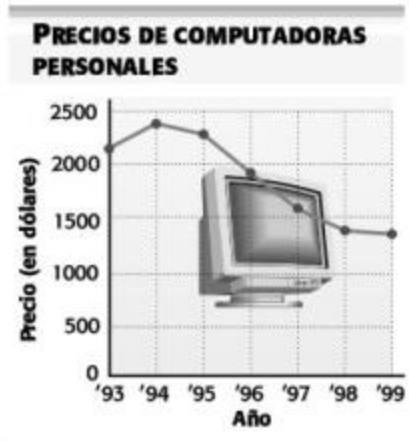
Precios de computadoras personales *La gráfica de líneas que aparece aquí muestra los precios promedio de las computadoras personales (PC) durante los años 1993 a 1999. Utilice esta información para responder las preguntas de los ejercicios 59 a 62.*

59. ¿Entre qué año y qué año aumentó el precio promedio de una PC?

60. Desde 1994, ¿cuál ha sido la tendencia en los precios promedio de las PC?

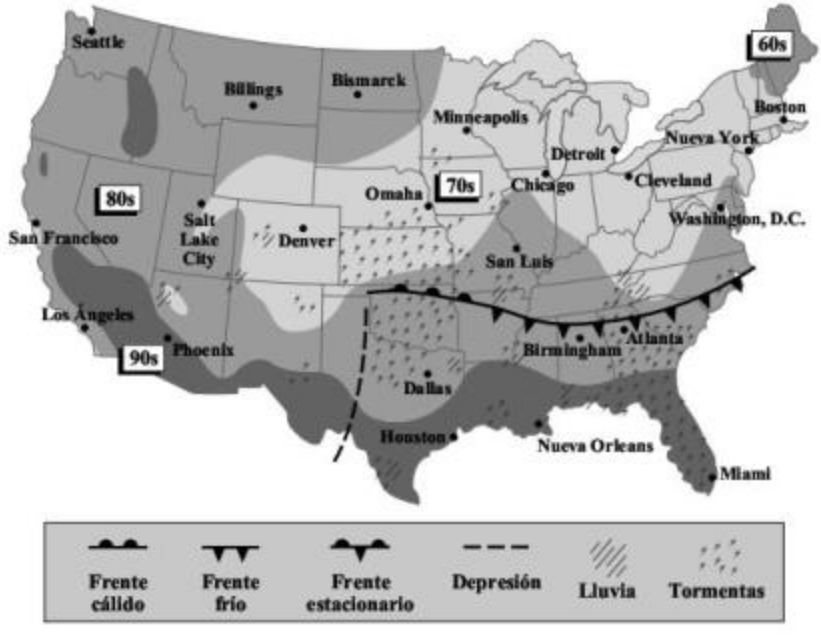
61. ¿Cuáles fueron los precios promedio de las PC en 1996 y 1999?

62. ¿Cuánto disminuyó el precio promedio de las PC entre 1994 y 1999?



Fuente: CNW Mercadeo/Investigación; *USA Today.*

Pronóstico del clima *El mapa muestra la información del pronóstico del clima para un día de verano en julio. Utilice el mapa y las leyendas que lo acompañan para responder las preguntas de los ejercicios 63 a 68.*



63. ¿Qué intervalo de temperatura (es decir, 60, 70, 80 o 90 grados Fahrenheit) se esperaría para Detroit?

64. ¿Qué tipo de frente se está moviendo hacia Atlanta?

65. Suponiendo que para usted cualquier temperatura por arriba de 80° F equivale a un día caluroso, ¿cómo describiría el clima para Miami? Utilice al menos dos palabras descriptivas.

66. Augusta es la capital de un estado del noreste. ¿En qué rango de temperatura estará dicha ciudad?

67. ¿En qué estado se presenta una depresión?

68. ¿Habrá probabilidades de que se suspenda por lluvia un juego de béisbol entre los Yankees y los Indios, que se jugará en el campo Jacobs de Cleveland?

EXTENSIÓN

El uso de la escritura para aprender matemáticas

La escritura en matemáticas adopta muchas formas. Uno de los más famosos autores/matemáticos fue Charles Dodgson (1832-1898), quien utilizaba el seudónimo de Lewis Carrol.



Dodgson enseñaba matemáticas en la Universidad de Oxford, en Inglaterra. La reina Victoria le comentó alguna vez que el cuento de *Alicia en el País de las Maravillas* le había resultado muy divertido, y que le gustaría mucho leer su siguiente obra. Se dice que Dodgson le envió a la reina el libro *Symbolic Logic* ("Lógica simbólica"), su trabajo más famoso sobre matemáticas.

Los libros de Alicia hicieron famoso a Carroll. Sin embargo, al final de su vida, Dodgson eludía todo comentario al respecto y negaba que él y Carroll fueran la misma persona, aunque repartió cientos de copias firmadas de esas obras a niños y hospitales infantiles.

Recientemente, el uso de la escritura en el programa de estudios de matemáticas ha recibido una mayor atención, debido en gran parte a las recomendaciones del National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M.). Las investigaciones indican que la capacidad para expresar observaciones matemáticas por escrito puede servir como una fuerza positiva en el desarrollo ininterrumpido de los estudiantes de matemáticas. Implementar la redacción en la clase de matemáticas puede aprovechar diversos enfoques.

Diarios Una manera de utilizar la redacción como ayuda para aprender matemáticas consiste en llevar un diario en el que el alumno dedique unos cuantos minutos a explicar lo que sucedió en la clase del día. Las anotaciones del diario pueden ser generales o específicas dependiendo del tema de que se trate, de cuánto entendió el alumno el tema, de su nivel de interés en ese momento, etc. Por lo general, las anotaciones del diario se escriben en un lenguaje informal, y suelen ser un medio eficaz de comunicación tanto con uno mismo como con los compañeros de clase y el profesor, acerca de los sentimientos, opiniones y puntos de interés que se tengan en ese momento.

Bitácoras de aprendizaje Mientras que las anotaciones de un diario son en su mayoría textos no estructurados en los que las ideas del estudiante fluyen libremente, las anotaciones en las bitácoras de aprendizaje son, por lo regular, más estructuradas. Un profesor puede proponer una pregunta específica para que el estudiante la responda en su bitácora. En este libro, dentro de cada conjunto de ejercicios intercalamos algunos que pueden responderse en la bitácora. Por ejemplo, considere el ejercicio 13 en el conjunto de ejercicios de la primera sección de este capítulo:

> Analice las diferencias entre razonamiento inductivo y deductivo. Dé un ejemplo de cada uno.

A continuación se muestra una posible respuesta a este ejercicio.

El razonamiento deductivo consiste en ir de ideas generales a ideas específicas. Por ejemplo, sé que al multiplicar ambos lados de (1/2) x = 6 por 2 obtengo x = 12, ya que es posible multiplicar ambos lados de cualquier ecuación por cualquier valor (excepto 0). El razonamiento inductivo va en el otro sentido. Cuando saco una conclusión general a partir de observaciones específicas, eso es el razonamiento inductivo. Por ejemplo, al ver los números 4, 8, 12, 16, puedo concluir que el siguiente número es 20, ya que siempre sumo 4 para obtener el número que sigue.

Informes sobre artículos de publicaciones matemáticas El lema "publicar o morir", muy utilizado desde hace tiempo, se refiere a que si un alumno desea obtener un puesto académico, debe publicar en una revista de su área. Existen numerosas revistas que publican artículos relacionados con la investigación matemática y/o la enseñanza de las matemáticas. En la actividad 3 al final de esta sección recomendamos algunos artículos que han aparecido en los últimos años. Hacer un re-

porte sobre uno de estos artículos quizá le ayude a entender qué es lo que hacen los matemáticos y de qué procedimientos se valen los profesores de matemáticas para transmitir estos conceptos a sus estudiantes.

Redacción de ensayos ¿Quién pide un ensayo para una clase de matemáticas? En la actualidad, es cada vez mayor el número de profesores de los cursos de introducción a las matemáticas que les encargan a sus estudiantes la redacción de ensayos. De esta manera, buscan hacerlos conscientes de la gran cantidad de libros y artículos sobre matemáticas y sobre matemáticos, muchos de los cuales han sido escritos específicamente para el lego en la materia. En las actividades 5 y 6 al final de esta sección, proporcionamos una lista de posibles temas para ensayos.

EXTENSIÓN ACTIVIDADES

En lugar de incluir un conjunto típico de ejercicios, a continuación le sugerimos algunas actividades en las que puede echar mano de la escritura para mejorar su aprendizaje y sus conocimientos sobre las matemáticas.

Actividad 1 Lleve un diario. Después de cada clase, tómese unos minutos y escriba sus impresiones sobre la clase, los temas tratados o cualquier cosa que considere relevante. Si esto le sirve, podría considerar las siguientes pautas:

Cómo redactar un diario*

1. *¿QUIÉN debe escribir en su diario?* Usted debe hacerlo.
2. *¿QUÉ debe escribir en su diario?* Palabras, ideas, fórmulas o conceptos que le resulten novedosos o desconocidos; pensamientos profundos, reflexiones, cuestionamientos o problemas que hay que resolver; juicios sobre la clase; preguntas que le brinquen a la cabeza (no importa que no tengan una respuesta); ideas que vale la pena desarrollar por escrito.
3. *¿CUÁNDO debe escribir en su diario?* Después de cada clase; mientras se prepara, lee o estudia para la clase; en cualquier momento en que una idea o pregunta le venga a la mente.
4. *¿QUÉ lugar es adecuado para escribir en su diario?* Cualquier sitio es apropiado (de modo que téngalo con usted cuando sea posible).
5. *¿POR QUÉ debe escribir en su diario?* Porque así podrá registrar ideas que de otra forma seguramente olvidaría. Su valor radica, sobre todo, en que al leerlo luego de algún tiempo usted podrá observar cómo se incrementaron sus conocimientos. También le facilitará el aprendizaje, la resolución de problemas, la redacción, la lectura y mejorará sus habilidades para discutir en clase.
6. *¿CÓMO debe escribir en su diario?* Con frases largas y fluidas, bien redactadas, con una puntuación y ortografía impecables y una caligrafía perfectamente legible; o bien con palabras sencillas que expresen sus ideas, con frases breves acompañadas de esquemas, resúmenes, números, mapas, diagramas o aforismos. (Quizá prefiera organizar en su computadora, ya sea portátil o de escritorio, o incluso en su computadora de bolsillo, los elementos que vaya guardando para su diario.)

(continúa)

*"Journal Writing" ("Cómo redactar un diario"), tomado de "No Time for Writing in Your Class?", por Margaret E. McIntosh, en *Mathematics Teacher*, septiembre de 1991, p. 431. Reimpreso con autorización.

Actividad 2 Lleve una bitácora y responda al menos uno de los ejercicios de redacción de cada conjunto de ejercicios contenidos en el programa de estudios de su clase. Pídale a su maestro que le sugiera otros tipos específicos de tareas de redacción. También podría elegir un ejemplo específico de alguna sección de este libro y escribir su propia solución del problema, o comentar sobre el método que los autores usaron para resolver dicho problema. No tema emitir juicios críticos acerca del método utilizado en este texto.

Actividad 3 El National Council of Teachers of Mathematics publica las revistas de enseñanza de las matemáticas; *Teaching Children Mathematics* (anteriormente llamada *Arithmetic Teacher*) y *Mathematics Teacher* son dos de ellas. Estas revistas pueden encontrarse en la sección de publicaciones periódicas de la mayoría de las bibliotecas de colegios y universidades de Estados Unidos. Hemos seleccionado varios artículos recientes de cada una de estas revistas, pero hay miles de otros artículos de dónde elegir. Escriba un breve informe sobre alguno de ellos, siguiendo los lineamientos señalados por su profesor.

De *Mathematics Teacher*

1998

Andreason, Corey, "Fibonacci and Pascal Together Again: Pattern Exploration in the Fibonacci Sequence", vol. 91, núm. 3, marzo de 1998, p. 250.

Grassl, Richard M. y Tabitha T. Y. Mingus, "Keep Counting Those Boxes—There's More", vol. 91, núm. 2, febrero de 1998, p. 122.

Iovanelli, Robert, "Using Spreadsheets to Analyze the Historical Perspectives of Apportionment", vol. 91, núm. 2, febrero de 1998, p. 176.

Rothbart, Andrea, "Learning to Reason from Lewis Carroll", vol. 91, núm. 1, enero de 1998, p. 6.

Rulf, Benjamin, "A Geometric Puzzle That Leads to Fibonacci Sequences", vol. 91, núm. 1, enero de 1998, p. 21.

1999

Kahan, Jeremy, "Ten Lessons from the Proof of Fermat's Last Theorem", vol. 92, núm. 6, septiembre de 1999, p. 530.

Silver, Jennifer Williams, "A Survey on the Use of Writing-to-Learn in Mathematics Classes", vol. 92, núm. 5, mayo de 1999, p. 388.

Smith, John P. III, "Preparing Students for Modern Work: Lessons from Automobile Manufacturing", vol. 92, núm. 3, marzo de 1999, p. 254.

2000

Kelley, Loretta, "A Mathematical History Tour", vol. 93, núm. 1, enero de 2000, p. 14.

Lesser, Lawrence Mark, "Sum of Songs: Making Mathematics Less Monotone!", vol. 93, núm. 5, mayo de 2000, p. 372.

Lightner, James E., "Mathematicians Are Human Too", vol. 93, núm. 8, noviembre de 2000, p. 696.

Natsoulas, Anthula, "Group Symmetries Connect Art and History with Mathematics", vol. 93, núm. 5, mayo de 2000, p. 364.

Simon, Marilyn K., "The Evolving Role of Women in Mathematics", vol. 93, núm. 9, diciembre de 2000, p. 782.

2001

Johnson, Craig M., "Functions of Number Theory in Music", vol. 94, núm. 8, noviembre de 2001, p. 700.

Lightner, James E., "Mathematics Didn't Just Happen", vol. 94, núm. 9, diciembre de 2001, p. 780.

McNeill, Sheila A., "The Mayan Zeros", vol. 94, núm. 7, octubre de 2001, p. 590.

Socha, Susan, "Less Is Sometimes More", vol. 94, núm. 6, septiembre de 2001, p. 450.

2002

Houser, Don, "Roots in Music", vol. 95, núm. 1, enero de 2002, p. 16.

Howe, Roger, "Hermione Granger's Solution", vol. 95, núm. 2, febrero de 2002, p. 86.

Kolpas, Sidney J., "Let Your Fingers Do the Multiplying", vol. 95, núm. 4, abril de 2002, p. 246.

Van Dresar, Vickie J., "Opening Young Minds to Closure Properties", vol. 95, núm. 5, mayo de 2002, p. 326.

De *Teaching Children Mathematics*

1998

Boucher, Alfred C., "Critical Thinking Through Estimation", vol. 4, núm. 7, marzo de 1998, p. 452.

Carey, Linda M., "Parents as Math Partners: A Successful Urban Story", vol. 4, núm. 6, febrero de 1998, p. 314.

Fennell, Francis (Skip), "Mathematics at the Mall", vol. 4, núm. 5, enero de 1998, p. 268.

Olson, Melfried, Lynae Sakshag y Judith Olson, "How Many Sandwiches?", vol. 4, núm. 7, marzo de 1998, p. 402.

Zaslavsky, Claudia, "Ethnomathematics and Multicultural Mathematics Education", vol. 4, núm. 9, mayo de 1998, p. 502.

1999

Angerame, Shirlee S., "Math-o'-Lanterns", vol. 5, núm. 11, octubre de 1999, p. 72.

Basile, Carol G., "Collecting Data Outdoors: Making Connections to the Real World", vol. 5, núm. 10, septiembre de 1999, p. 8.

Brahier, Daniel J. y Melfried Olsen, "The World's Largest Math Event: Promoting Mathematical Thinking", vol. 5, núm. 7, marzo de 1999, p. 430.

Sawada, Daiyo, "Mathematics as Problem Solving: A Japanese Way", vol. 5, núm. 7, septiembre de 1999, p. 54.

2000

Glasgow, Robert *et. al.*, "The Decimal Dilemma", vol. 7, núm. 2, octubre de 2000, p. 89.

Hellwing, Stacey J., Eula Ewing Monroe y James S. Jacobs, "Making Informed Choices: Selecting Children's Trade Books for Mathematics Instruction", vol. 7, núm. 3, noviembre de 2000, p. 138.

(*continúa*)

Lemme, Barbara, "Integrating Measurement Projects: Sand Timers", vol. 7, núm. 3, noviembre de 2000, p. 132.

Riddle, Margaret y Bette Rodzwell, "Fractions: What Happens Between Kindergarten and the Army?", vol. 7, núm. 4, diciembre de 2000, p. 202.

2001

Karp, Karen S. y E. Todd Brown, "Geo-Dolls: Traveling in a Mathematical World", vol. 8, núm. 3, noviembre de 2001, p. 132.

Randolph, Tamela D. y Helene J. Sherman, "Alternative Algorithms: Increasing Options, Reducing Errors", vol. 7, núm. 8, abril de 2001, p. 480.

Sun, Wei y Joanne Y. Zhang, "Teaching Addition and Subtraction Facts: A Chinese Perspective", vol. 8, núm. 1, septiembre de 2001, p. 28.

Whitenack, Joy W. *et. al.*, "Second Graders Circumvent Addition and Subtraction Difficulties", vol. 8, núm. 4, diciembre de 2001, p. 228.

2002

Agosto, Melinda, "Cool Mathematics for Kids", vol. 8, núm. 7, marzo de 2002, p. 397.

Huniker, DeAnn, "Calculators as Learning Tools for Young Children's Explorations of Number", vol. 8, núm. 6, febrero de 2002, p. 316.

Strutchens, Marilyn E., "Multicultural Literature as a Context for Problem Solving: Children and Parents Learning Together", vol. 8, núm. 8, abril de 2002, p. 448.

Whitin, David J., "The Potentials and Pitfalls of Integrating Literature into the Mathematics Program", vol. 8, núm. 9, mayo de 2002, p. 503.

Actividad 4 Una de las películas sobre matemáticas más famosas es *Donald en el País de las Matemáticas* (*Donald in Mathmagicland*), producida por Disney en 1959. Después de casi 40 años, aún conserva su belleza y es considerada un verdadero clásico. Está disponible en video, y puede rentarse en muchas tiendas especializadas o adquirirse en centros comerciales. Disfrute de la media hora de entretenimiento que ofrece esta película, y escriba un informe sobre ella siguiendo las indicaciones de su profesor.

Actividad 5 Escriba un artículo, siguiendo los lineamientos que le indique su profesor, sobre uno de los siguientes matemáticos, filósofos y científicos.

Abel, N.	Cardano, G.	Gauss, C.	Noether, E.
Agnesi, M. G.	Copérnico, N.	Hilbert, D.	Pascal, B.
Agnesi, M. T.	De Morgan, A.	Kepler, J.	Platón
Al-Jwarizmi	Descartes, R.	Kronecker, L.	Polya, G.
Apolonio	Euler, L.	Lagrange, J.	Pitágoras
Arquímedes	Fermat, P.	Leibniz, G.	Ramanujan, S.
Aristóteles	Fibonacci (Leonardo Pisano)	L'Hospital, G.	Riemann, G.
Babbage, C.		Lobachevsky, N.	Russell, B.
Bernoulli, Jakob		Mandelbrot, B.	Somerville, M.
Bernoulli, Johann	Galileo (Galileo Galilei)	Napier, J.	Tartaglia, N.
		Nash, J.	Whitehead, A.
Cantor, G.	Galois, E.	Newton, I.	Wiles, A.

Actividad 6 Escriba un trabajo de investigación sobre uno de los siguientes temas de matemáticas, siguiendo las indicaciones de su profesor.

- Matemáticas babilónicas
- Matemáticas egipcias
- El origen del cero
- Plimpton 322
- El papiro de Rhind
- Orígenes del teorema de Pitágoras
- Los sólidos regulares (platónicos)
- La fraternidad pitagórica
- La razón áurea (sección áurea)
- Los tres famosos problemas de construcción de los griegos
- La historia de las aproximaciones de π
- Euclides y sus *Elementos*
- Matemáticas chinas antiguas
- Matemáticas hindúes antiguas
- Origen de la palabra *álgebra*
- Cuadrados mágicos
- Números figurados
- La sucesión de Fibonacci
- La controversia Cardano/Tartaglia
- Métodos históricos de cálculo (logaritmos, el ábaco, los rodillos de Napier, la regla de cálculo, etcétera)
- El triángulo de Pascal
- Los orígenes de la teoría de la probabilidad
- Mujeres en las matemáticas
- Paradojas matemáticas
- Problemas no resueltos en matemáticas
- El teorema de los cuatro colores
- La demostración del último teorema de Fermat
- La búsqueda de números primos grandes
- Geometría fractal
- Los co-inventores del cálculo
- El papel de la computadora en el estudio de las matemáticas
- Matemáticas y música
- Matemáticas policiacas
- El origen de los números complejos
- La conjetura de Goldbach
- El uso de Internet en la enseñanza de las matemáticas
- El desarrollo de las calculadoras gráficas
- El movimiento de reforma de la enseñanza de las matemáticas
- Matemáticas multiculturales

Actividad 7 Investigue un programa de cómputo enfocado a la enseñanza de las matemáticas elementales para los niños y escriba una revisión crítica sobre el mismo, como si lo hiciera para una revista que publique revisiones de *software* didáctico. No se limite a los ejercicios y la práctica, también comente sobre las habilidades relacionadas con el pensamiento superior.

Actividad 8 Los siguientes sitios *web* (en inglés) proporcionan una variedad de temas fascinantes relacionados con las matemáticas. Consúltelos, elija un tema que le interese y haga un reporte sobre él siguiendo las indicaciones de su profesor.

http://mathworld.wolfram.com/

http://world.std.com/~reinhold/mathmovies.html

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/

http://dir.yahoo.com/Science/Mathematics/

http://www.cut-the-knot.com/

http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/women.htm

http://www.ics.uci.edu/~eppstein/recmath.html

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

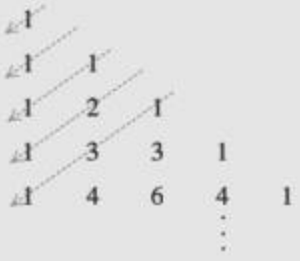
Descubrir las matemáticas en el triángulo de Pascal

El *triángulo de Pascal* es un conjunto fascinante de números colocados en renglones, cada uno de los cuales contiene un dígito más que el anterior. Los primeros cinco renglones se muestran a continuación.

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
```

Para descubrir algunos de sus patrones, divida la clase en grupos de cuatro estudiantes cada uno. En cada grupo asigne a un estudiante la letra A, a otro la B, a otro la C y al último la D. Luego realice las siguientes actividades en orden:

1. Que cada grupo analice algunas de las propiedades del triángulo que salten a la vista con la sola observación de los primeros cinco renglones mostrados antes.
2. Lo más evidente es que cada renglón inicia y termina con 1. Discurra un método por medio del cual los números en un renglón puedan determinarse a partir de los números del renglón inmediato superior. (*Una pista:* En el quinto renglón, $6 = 3 + 3$.) Luego, junto con su grupo, encuentre los siguientes cuatro renglones del triángulo, y que cada miembro guarde una copia de los primeros nueve renglones completos, para referencia posterior.
3. Ahora, cada estudiante en el grupo deberá investigar una propiedad particular del triángulo. En algunos casos será conveniente el uso de una calculadora. Todos los estudiantes deben empezar a trabajar al mismo tiempo. (Habrá un análisis del ejercicio.)
   Estudiante A: Encuentre la suma de los números de cada renglón. Observe el patrón que se configura. Ahora escriba el décimo renglón del triángulo.
   Estudiante B: Investigue las diferencias sucesivas en las diagonales que van de la parte superior izquierda a la parte inferior derecha. Por ejemplo, en la diagonal que empieza 1, 2, 3, 4,..., todas las diferencias sucesivas son 1; en la diagonal que empieza 1, 3, 6,..., las diferencias sucesivas son 2, 3, 4, y así sucesivamente. Haga esto hasta la diagonal que empieza 1, 6, 21,....
   Estudiante C: Encuentre los valores de las primeras cinco potencias del número 11, empezando con 11^0 (recuerde que $11^0 = 1$).
   Estudiante D: Coloque los nueve renglones del triángulo alineados a la izquierda y luego dibuje flechas con líneas discontinuas como se muestra a continuación:



   y así sucesivamente. Luego sume los números de cada diagonal. Escriba estas sumas en orden de izquierda a derecha.
4. Después de que todos los estudiantes hayan terminado de trabajar individualmente en el inciso 3, vuelva a la discusión en grupo.
   (a) Pida al estudiante A que informe sobre el resultado que obtuvo en el inciso 3, y luego que pronostique cuál será el resultado de sumar los números del décimo renglón.
   (b) Pida al estudiante B que informe sobre las diferencias sucesivas que haya descubierto en las diagonales. Luego pídale al resto de los estudiantes que investiguen las diferencias sucesivas en la diagonal que empieza 1, 7, 28,.... (Podrían necesitarse varios renglones más del triángulo.)
   (c) Pida al estudiante C que informe sobre la relación que haya descubierto entre las potencias del 11, y que luego determine el valor del 11^5. ¿Por qué el patrón no continúa?
   (d) Pida al estudiante D que muestre la sucesión de números que haya encontrado. Luego, en grupo, predigan cuál será la suma siguiente con sólo observar el patrón de la sucesión. Confirme su predicción haciendo los cálculos reales.
5. Elija un representante de cada grupo para informar a toda la clase de las observaciones hechas a lo largo de la investigación.
6. Mediante un motor de búsqueda en Internet encuentre alguna referencia al triángulo de Pascal; luego prepare un informe sobre dicha referencia.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 1

Determine si los ejercicios 1 y 2 son un ejemplo de razonamiento inductivo o deductivo.

1. Otis Taylor es vendedor de una editorial. En cada uno de los últimos 14 años ha superado su meta anual de ventas, principalmente por la venta de libros de matemáticas. Por lo tanto, este año también superará su meta anual de ventas.
2. Para todos los números naturales n, n^2 también es un número natural. 101 es un número natural, por lo tanto, 101^2 es un número natural.
3. ¿Cuáles son los números cuarto y quinto en esta sucesión?

   1, 4, 27, _____, _____, 46,656, . . .

   (Tomado del calendario mensual de *Mathematics Teacher*, 25 de abril de 1994.)
4. Utilice la lista de igualdades y el razonamiento inductivo para predecir la igualdad que debe seguir, y luego verifique su conjetura.

$$65{,}359{,}477{,}124{,}183 \times 17 = 1{,}111{,}111{,}111{,}111{,}111$$

$$65{,}359{,}477{,}124{,}183 \times 34 = 2{,}222{,}222{,}222{,}222{,}222$$

$$65{,}359{,}477{,}124{,}183 \times 51 = 3{,}333{,}333{,}333{,}333{,}333$$

5. Utilice el método de las diferencias sucesivas para encontrar el término que sigue en la sucesión

   3, 11, 31, 69, 131, 223, ...
6. Encuentre la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 250$.
7. Revise las ecuaciones siguientes, en las cuales el lado izquierdo de cada una es un número octagonal.

$$1 = 1$$

$$8 = 1 + 7$$

$$21 = 1 + 7 + 13$$

$$40 = 1 + 7 + 13 + 19$$

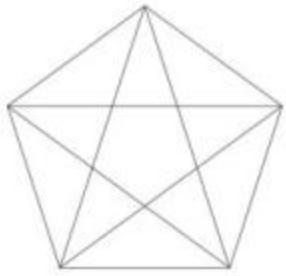
   Utilice el patrón establecido en el lado derecho para predecir el siguiente número octagonal. ¿Cuál es la igualdad que sigue en la lista?
8. Utilice el resultado del ejercicio 7 y el método de las diferencias sucesivas para encontrar los primeros ocho números octagonales. Luego divida cada uno entre 4 y escriba el residuo. ¿Cuál es el patrón obtenido?
9. Explique el patrón usado para obtener los términos de la sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Utilice las estrategias para resolver problemas que sean necesarias para resolver cada uno de los problemas siguientes, que fueron tomados del ejemplar del calendario mensual de Mathematics Teacher *que se indica en la fecha de cada uno.*

10. ***Velas encendidas*** Con los cuatro cabos que quedan en un candelabro luego de que las velas se consumen, se puede formar una vela completa. Si cada vela se consume y deja un cabo después de una noche y si usted ha comprado 16 velas, ¿durante cuántas noches seguirá teniendo velas? (17 de octubre de 2001.)



11. ***Dígito de las unidades en una potencia de 9*** ¿Cuál es el dígito de las unidades en la representación decimal de 9^{1997}? (27 de enero de 1997.)
12. ***Rompecabezas numérico (triángulos)*** ¿Cuántos triángulos hay en esta figura? (6 de enero de 2000.)



13. ***Idear un problema de suma correcta*** ¿Puede colocar los dígitos del 1 al 9, usando cada uno sólo una vez, en los cuadros siguientes para conformar un problema de suma que sea correcto? Si es posible hacerlo, escriba la solución. Si no, explique por qué no existe tal solución. (10 de abril de 2002.)

$$\square\square\square + \square\square\square = \square\square\square$$

14. ***Páginas perdidas en un periódico*** En un periódico de 60 páginas, el cual sólo tiene una sección, falta la página 7. ¿Qué otras páginas están perdidas? (6 de febrero de 1998.)

15. ***Dígito de las unidades en una suma*** Encuentre el dígito de las unidades en la representación decimal del número $11^{11} + 14^{14} + 16^{16}$. (14 de febrero de 1994.)

16. Con base en su conocimiento de aritmética elemental, describa el patrón que puede observarse cuando se realizan las operaciones siguientes: $9 \times 1, 9 \times 2, 9 \times 3, \ldots, 9 \times 9$. (*Sugerencia:* Sume entre sí los dígitos de cada respuesta. ¿Qué observa?)

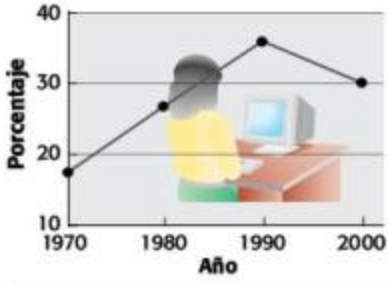
Utilice su calculadora para evaluar los siguientes dos ejercicios. Proporcione tantos decimales como muestre su calculadora.

17. $\sqrt{98.16}$ **18.** 3.25^3

19. ***Resultados en baloncesto*** Durante la temporada 1998-1999 de baloncesto de la NCAA, Shawnta Rogers, de la Universidad George Washington, anotó 195 de 503 intentos de sus tiros. Esto significa que de cada 5 intentos, anotó alrededor de ____ de ellos.
A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

20. ***Las mujeres en las matemáticas*** La gráfica siguiente muestra el número de mujeres en profesiones relacionadas con las matemáticas o con ciencias de la computación durante las pasadas tres décadas.

MUJERES EN PROFESIONES MATEMÁTICAS O DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN



Fuente: Oficina del Censo de Estados Unidos y Oficina de Estadísticas Laborales.

(a) ¿En qué década el porcentaje de mujeres en profesiones relacionadas con las matemáticas o la computación disminuyó?

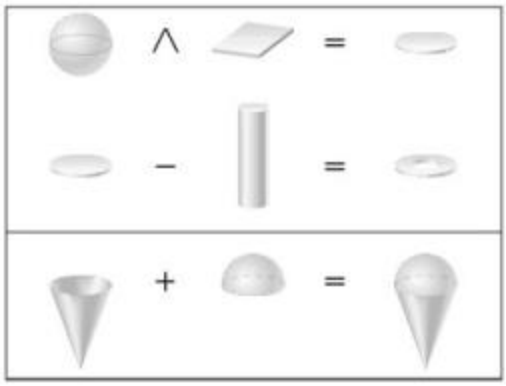
(b) ¿En qué momento el porcentaje de mujeres en estas profesiones alcanzó su punto máximo?

(c) ¿En qué año el porcentaje de mujeres en profesiones relacionadas con las matemáticas o con ciencias de la computación fue de alrededor de 27%?

capítulo

2 Conceptos básicos de la teoría de conjuntos

Las gráficas tridimensionales por computadora son muy usadas en las aplicaciones industriales que requieren el diseño asistido por computadora de partes mecánicas. Muchas de éstas son diseñadas mediante un método conocido como **geometría constructiva de sólidos**. Este método utiliza objetos elementales sencillos, llamados primitivos geométricos, para construir formas más complejas. Las esferas, los cubos, los conos, los cilindros y las placas rectangulares son ejemplos de elementos geométricos primitivos (o primarios). Se conceptualizan como conjuntos de puntos con una forma determinada. Para diseñar gráficamente objetos complejos se combinan estos conjuntos primitivos por medio de operaciones tales como unión (+), diferencia (−) e intersección (∧). Por ejemplo, una arandela de acero puede crearse gráficamente por medio de la intersección de una esfera con una placa rectangular a la que luego se le resta un cilindro. Un cono de helado es la unión de una semiesfera con un cono.



Es posible crear un enorme número de formas manufacturadas utilizando está técnica de graficación. Éste es sólo un ejemplo de cómo la noción de conjunto, un concepto fundamental en matemáticas, se aplica ampliamente tanto en los negocios como en la ciencia.

Fuente: Watt, A., *3D Computer Graphics*, Addison Wesley Publishing Company, 1993.

2.1 **Símbolos y terminología**

2.2 **Diagramas de Venn y subconjuntos**

2.3 **Operaciones con conjuntos y productos cartesianos**

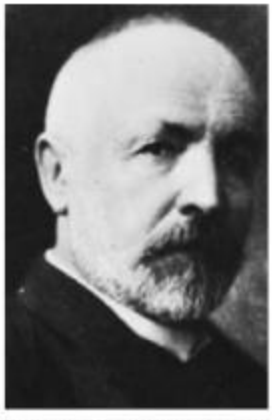
2.4 **Números cardinales y encuestas**

2.5 **Conjuntos infinitos y sus números cardinales**

Investigación en grupo: Una encuesta en su clase

Examen del capítulo 2

2.1 Símbolos y terminología



Los conceptos básicos de la teoría de conjuntos fueron desarrollados hacia 1875 por el matemático alemán **Georg Cantor** (1845-1918). Algunas de las cosas que él demostró se contrapusieron a los cánones matemáticos aceptados en su época. Cantor creó un nuevo campo teórico y al mismo tiempo continuó el largo debate que sobre el infinito se había iniciado en tiempos antiguos. Él desarrolló el conteo por medio de la correspondencia de uno a uno para determinar cuántos objetos están contenidos en un conjunto. Los conjuntos infinitos se diferencian de los conjuntos finitos en que no cumplen la conocida ley de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes.

La mente humana posee una inclinación natural a reunir o agrupar. Cuando vemos en el cielo cinco estrellas reunidas, en lugar de considerarlas como cinco elementos separados, las personas tendemos a verlas como un grupo de estrellas. Así pues, nuestra mente trata de encontrar orden y patrones. En matemáticas, esta tendencia a agrupar es representada mediante el concepto de *conjunto*. Un **conjunto** es un grupo o colección de objetos. Cada objeto que pertenece al conjunto se denomina **elemento** o **miembro** de ese conjunto.

Los conjuntos pueden expresarse por lo menos de tres maneras: mediante (1) la *descripción verbal*, (2) la *enumeración* o *listado* y (3) la *notación de construcción de conjuntos*. Un conjunto determinado puede denotarse de forma más conveniente mediante un método que mediante otro, pero la mayoría de los conjuntos puede describirse mediante cualquiera de las tres formas mencionadas. Por ejemplo, la descripción verbal

el conjunto de los números pares naturales menores que diez

puede expresarse por enumeración,

$$\{2, 4, 6, 8\}$$

o mediante la notación de construcción de conjuntos,

$$\{x \mid x \text{ es un número natural par menor que } 10\}.$$

En las notaciones de enumeración y de construcción de conjuntos, los corchetes que abren y cierran indican un conjunto. Además, en el método de enumeración, las comas son esenciales. La notación de construcción de conjuntos utiliza la idea de variable. (Se puede utilizar cualquier símbolo, pero como ocurre con otras aplicaciones algebraicas, por lo general se elige la letra x.) Antes de la línea vertical damos la variable, que representa al elemento general, y después de la línea vertical establecemos los criterios que determinan a los miembros del conjunto. Cuando reunimos *todos* los objetos que cumplen dichos criterios generamos (o construimos) el conjunto completo.

Por lo general a los conjuntos se les dan nombres (usualmente letras mayúsculas) para facilitar su mención en análisis posteriores. Si elegimos E como nombre para el conjunto de las letras de nuestro alfabeto, entonces podemos escribir

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}.$$

En muchos casos, la notación por enumeración puede abreviarse si se establece con claridad el patrón de los elementos del conjunto, utilizando una elipsis (tres puntos) para indicar que el patrón continúa. Así, por ejemplo,

$$E = \{a, b, c, d, \ldots, x, y, z\} \quad \text{o} \quad E = \{a, b, c, d, e, \ldots, z\}.$$

EJEMPLO 1 Haga una enumeración completa de los elementos de cada uno de los conjuntos siguientes.

(a) el conjunto de los números naturales entre 6 y 13

Este conjunto puede denotarse {7, 8, 9, 10, 11, 12}. (Observe que la palabra *entre* excluye los valores de los extremos.)

(b) $\{5, 6, 7, \ldots, 13\}$

Este conjunto comienza con el elemento 5, luego el 6, luego el 7, y así sucesivamente, es decir, cada elemento se obtiene sumando 1 al elemento que le precede en la lista. Este patrón termina en 13, de modo que la lista completa es $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

(c) $\{x \mid x \text{ es un número natural entre 6 y 7}\}$

Después de un momento de reflexión, nos damos cuenta de que no hay número natural entre 6 y 7, de modo que la lista para este conjunto no tendrá elementos. Podemos escribir el conjunto como $\{\ \}$ o $\emptyset$. ■

Un conjunto que no contiene elementos, tal como el conjunto del ejemplo 1(c), se conoce como **conjunto vacío** o **conjunto nulo**. El símbolo $\emptyset$ suele utilizarse para denotar al conjunto vacío, así que $\emptyset$ y $\{\ \}$ tienen el mismo significado. Es un *error* denotar el conjunto vacío con el símbolo $\{\emptyset\}$, ya que esta notación representa un conjunto que cuenta con un elemento (el cual es precisamente el conjunto vacío).

El ejemplo 1 anterior hace referencia a los números que utilizamos para contar (o números naturales), que fueron presentados en la sección 1.1. Otras categorías importantes de números, que serán utilizadas a lo largo del texto, se resumen a continuación.

Conjuntos de números

Números naturales o para contar $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Números enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Números racionales $\{p/q \mid p \text{ y } q \text{ enteros y } q \neq 0\}$
(Algunos ejemplos de números racionales son $3/5$, $-7/9$, 5 y 0. Cualquier número racional puede escribirse como un número decimal determinado, como 0.25, o como números decimales que se repiten, como $0.666\ldots$.)

Números reales $\{x \mid x \text{ es un número que puede escribirse como decimal}\}$

Números irracionales $\{x \mid x \text{ es un número real y } x \text{ no puede escribirse como un cociente de dos enteros}\}$
(Algunos ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ y π. Las representaciones decimales de los números irracionales nunca terminan y nunca se repiten.)

El número de elementos de un conjunto se llama **número cardinal** o **cardinalidad** del conjunto. El símbolo $n(A)$, que se lee "n de A", representa el número cardinal del conjunto A.

Cuando un elemento se repite en la lista de un conjunto, no se debe contar más de una vez al momento de determinar el número cardinal de dicho conjunto. Por ejemplo, el conjunto $B = \{1, 1, 2, 2, 3\}$ sólo tiene tres elementos distintos, por lo tanto $n(B) = 3$.

EJEMPLO 2 Encuentre el número cardinal de cada uno de los conjuntos siguientes.

(a) $K = \{2, 4, 8, 16\}$

El conjunto K contiene cuatro elementos, de modo que el número cardinal del conjunto K es 4, y $n(K) = 4$.

(b) $M = \{0\}$

El conjunto M tiene sólo un elemento, el cero, así $n(M) = 1$.

(c) $R = \{4, 5, \ldots, 12, 13\}$

Sólo hay cuatro elementos en la lista, pero los puntos suspensivos indican que hay otros elementos en el conjunto. Si los contamos también, encontramos que hay 10 elementos; así, $n(R) = 10$.

(d) El conjunto vacío, $\emptyset$, no tiene elementos y $n(\emptyset) = 0$. ■

Si el número cardinal de un conjunto es un número entero determinado (0 o un número natural), como en cada segmento del ejemplo 2 anterior, a ese conjunto se le denomina **conjunto finito**. Se supone que, teniendo el tiempo suficiente, sería posi-



Infinito La lente de acercamiento (close-up) de una cámara muestra el símbolo de infinito, ∞, definido como cualquier distancia mayor que 1000 veces la longitud local de una lente.

El signo fue inventado por el matemático John Wallis en 1655. Wallis usó $1/\infty$ para representar una cantidad infinitamente pequeña. El filósofo Voltaire describió el ∞ como un nudo de amor, y veía con escepticismo que el signo hiciera la idea de infinito más clara.

ble contar todos los elementos de cualquier conjunto finito y así llegar a su número cardinal. Sin embargo, algunos conjuntos son tan grandes que el proceso de contar todos sus elementos nunca terminaría. Los números naturales son un ejemplo de tales conjuntos. Cuando un conjunto es tan grande que su número cardinal no se encuentra entre los números enteros, le llamamos **conjunto infinito**. En una sección posterior analizaremos los números cardinales de conjuntos infinitos. Los conjuntos infinitos también pueden designarse usando los tres métodos ya mencionados.

EJEMPLO 3 Designe todos los números naturales impares por medio de los tres métodos comunes de notación de conjuntos.

El conjunto de todos los números naturales impares — Descripción verbal

$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ — Método de enumeración

Los puntos suspensivos indican que no hay un elemento final. La lista continúa indefinidamente.

$\{x \mid x \text{ es un número natural impar}\}$ — Notación de construcción de conjuntos ■

Para que un conjunto sea útil, debe estar *bien definido*. Esto significa que dados un conjunto particular y un elemento particular, debe ser posible determinar si el elemento pertenece o no al conjunto. Por ejemplo, el conjunto E anterior, de las letras del alfabeto, está bien definido. Si alguien nos da la letra q, sabemos que q es un elemento de E. Si alguien nos da la letra griega θ (theta), sabemos que no es un elemento de E.

Sin embargo, dados un conjunto C, que contiene a todos los pollos gordos, y un pollo en particular, Herman, no es posible decir si

Herman es un elemento de C o Herman *no* es un elemento de C.

El problema es la palabra "gordo". ¿Qué tan gordo debe estar para considerarlo gordo? Puesto que es difícil determinar si un pollo específico pertenece o no al conjunto C, dicho conjunto no está bien definido.

La letra q es un elemento del conjunto E, donde E es el conjunto de todas las letras del alfabeto español. El símbolo para mostrar lo anterior es $\in$, que significa "es un elemento de", o

$$\text{q} \in E,$$

que se lee "q es un elemento del conjunto E". La letra θ no es un elemento de E; escribimos esto con el símbolo $\in$ cruzado por una diagonal:

$$\theta \notin E.$$

Esto se lee "θ no es un elemento del conjunto E".

EJEMPLO 4 Diga si cada enunciado es *verdadero* o *falso*.

(a) $3 \in \{-3, -1, 5, 9, 13\}$

El enunciado afirma que el número 3 es un elemento del conjunto $\{-3, -1, 5, 9, 13\}$, lo cual es falso.

(b) $0 \in \{-3, -2, 0, 1, 2, 3\}$

Como 0 realmente pertenece al conjunto $\{-3, -2, 0, 1, 2, 3\}$, el enunciado es verdadero.

(c) $1/5 \notin \{1/3, 1/4, 1/6\}$

Este enunciado indica que $1/5$ no es un elemento del conjunto $\{1/3, 1/4, 1/6\}$, lo cual es verdadero. ■

Veamos ahora el concepto de igualdad de conjuntos.

Igualdad de conjuntos

El conjunto A será **igual** al conjunto B siempre que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1. todo elemento de A es un elemento de B, y
2. todo elemento de B es un elemento de A.

Dicho de otro modo, dos conjuntos son iguales si contienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden de éstos. Por ejemplo,

$$\{a,b,c,d\} = \{a,c,d,b\}$$

ya que ambos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos.

Dado que la repetición de elementos en la lista de un conjunto no añade elementos nuevos, podemos decir que

$$\{1,0,1,2,3,3\} = \{0,1,2,3\}$$

pues los dos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos.

EJEMPLO 5 ¿Los conjuntos $\{-4, 3, 2, 5\}$ y $\{-4, 0, 3, 2, 5\}$ son iguales?

Cada elemento del primer conjunto es un elemento del segundo; sin embargo, 0 es un elemento del segundo conjunto pero no del primero. En otras palabras, los conjuntos no contienen exactamente los mismos elementos, de modo que no son iguales:

$$\{-4,3,2,5\} \neq \{-4,0,3,2,5\}. \quad \blacksquare$$

Si bien cualquiera de las tres notaciones sirve para designar cualquier conjunto dado, algunas veces una resulta más clara que otra. Por ejemplo,

$$\{x \mid x \text{ es un número natural impar entre 2 y 810}\}$$

es preferible que

$$\{3,5,7,9,\ldots,809\}$$

ya que establece claramente la propiedad común que identifica a todos los elementos del conjunto. Cuando se trabaja con conjuntos, es necesario ser capaz de traducir de una notación a otra.

EJEMPLO 6 Decida si cada uno de los siguientes enunciados es *verdadero* o *falso*.

(a) $\{3\} = \{x \mid x \text{ es un número natural entre 1 y 5}\}$

El conjunto del lado derecho contiene a *todos* los números naturales entre 1 y 5, a saber, 2, 3 y 4, mientras que el conjunto de la izquierda *sólo* contiene al número 3. Como los conjuntos no contienen exactamente los mismos elementos, no son iguales. El enunciado es falso.

(b) $\{x \mid x \text{ es un número natural negativo}\} = \{y \mid y \text{ es un número que al mismo tiempo es racional e irracional}\}$

Todos los números naturales son positivos, por lo que el primer conjunto es $\emptyset$. Por definición, si un número es racional no puede ser irracional, así que el conjunto de la derecha también es $\emptyset$. Como cada conjunto es el conjunto vacío, ambos conjuntos son iguales. El enunciado es verdadero. $\blacksquare$

2.1 EJERCICIOS

Relacione cada conjunto de la columna I con la descripción que le corresponda de la columna II.

I	II
1. $\{2,4,6,8\}$	**A.** el conjuntos de todos los enteros pares
2. $\{x \mid x$ es un entero par mayor que 4 y menor que $6\}$	**B.** el conjunto de las cinco menores potencias enteras positivas de 2
3. $\{\ldots,-4,-3,-2,-1\}$	**C.** el conjunto de los enteros positivos pares menores que 10
4. $\{\ldots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\}$	**D.** el conjunto de todos los enteros impares
5. $\{2,4,8,16,32\}$	**E.** el conjunto de todos los enteros negativos
6. $\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$	**F.** el conjunto de los enteros impares positivos menores que 10
7. $\{2,4,6,8,10\}$	**G.** $\emptyset$
8. $\{1,3,5,7,9\}$	**H.** el conjunto de los cinco menores múltiplos enteros positivos de 2

Enumere todos los elementos de cada conjunto. Utilice la notación de conjuntos para describir cada uno.

9. el conjunto de todos los números menores o iguales que 6

10. el conjunto de todos los números enteros mayores que 8 y menores que 18

11. el conjunto de todos los números enteros no mayores que 4

12. el conjunto de todos los números naturales entre 4 y 14

13. $\{6,7,8,\ldots,14\}$

14. $\{3,6,9,12,\ldots,30\}$

15. $\{-15,-13,-11,\ldots,-1\}$

16. $\{-4,-3,-2,\ldots,4\}$

17. $\{2,4,8,\ldots,256\}$

18. $\{90,87,84,\ldots,69\}$

19. $\{x \mid x$ es un entero par menor que $11\}$

20. $\{x \mid x$ es un entero impar entre -8 y $7\}$

Denote cada conjunto por el método de enumeración. Puede haber más de una respuesta correcta.

21. el conjunto de todos los números naturales mayores que 20

22. el conjunto de todos los enteros entre -200 y 500

23. el conjunto de los Grandes Lagos

24. el conjunto de los presidentes de Estados Unidos electos después de Lyndon Johnson y antes que William Clinton. (Vea la fotografía.)



25. $\{x \mid x$ es un múltiplo positivo de $5\}$

26. $\{x \mid x$ es un múltiplo negativo de $6\}$

27. $\{x \mid x$ es el recíproco de un número natural$\}$

28. $\{x \mid x$ es una potencia entera positiva de $4\}$

Designe cada conjunto mediante la notación de construcción de conjuntos, usando x como la variable. Puede haber más de una respuesta correcta.

29. el conjunto de todos los números racionales

30. el conjunto de todos los números naturales pares

31. $\{1,3,5,\ldots,75\}$

32. $\{35,40,45,\ldots,95\}$

Diga si cada conjunto es finito *o* infinito.

33. $\{2, 4, 6, \ldots, 32\}$

34. $\{6, 12, 18\}$

35. $\{1/2, 2/3, 3/4, \ldots\}$

36. $\{-10, -8, -6, \ldots\}$

37. $\{x \mid x$ es un número natural mayor que $50\}$

38. $\{x \mid x$ es un número natural menor que $50\}$

39. $\{x \mid x$ es un número racional$\}$

40. $\{x \mid x$ es un número racional entre 0 y 1$\}$

Encuentre n(A) para cada conjunto.

41. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

42. $A = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

43. $A = \{2, 4, 6, \ldots, 1000\}$

44. $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 3000\}$

45. $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$

46. $A = \{x \mid x$ es una vocal del alfabeto español$\}$

47. $A =$ el conjunto de los enteros entre -20 y 20

48. $A =$ el conjunto de los actuales senadores de Estados Unidos

49. $A = \{1/3, 2/4, 3/5, 4/6, \ldots, 27/29, 28/30\}$

50. $A = \{1/2, -1/2, 1/3, -1/3, \ldots, 1/10, -1/10\}$

51. Explique por qué es aceptable escribir el enunciado "x es una vocal del alfabeto español" en el conjunto del ejercicio 46, a pesar de que x es una consonante.

52. Explique cómo puede responderse el ejercicio 49 sin necesidad de mostrar cada uno de los elementos para luego contarlos.

Determine si cada conjunto está *o* no está bien definido.

53. $\{x \mid x$ es un número real$\}$

54. $\{x \mid x$ es un número negativo$\}$

55. $\{x \mid x$ es un buen atleta$\}$

56. $\{x \mid x$ es una mecanógrafa hábil$\}$

57. $\{x \mid x$ es una clase difícil$\}$

58. $\{x \mid x$ es un número natural menor que 2$\}$

Escriba $\in$ *o* $\notin$ *según corresponda en cada caso para hacer verdaderos los enunciados siguientes.*

59. 5 ____ $\{2, 4, 5, 7\}$

60. 8 ____ $\{3, -2, 5, 7, 8\}$

61. -4 ____ $\{4, 7, 8, 12\}$

62. -12 ____ $\{3, 8, 12, 18\}$

63. 0 ____ $\{-2, 0, 5, 9\}$

64. 0 ____ $\{3, 4, 6, 8, 10\}$

65. $\{3\}$ ____ $\{2, 3, 4, 6\}$

66. $\{6\}$ ____ $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

Diga si cada uno de los enunciados siguientes es verdadero *o* falso.

67. $3 \in \{2, 5, 6, 8\}$

68. $6 \in \{-2, 5, 8, 9\}$

69. $b \in \{h, c, d, a, b\}$

70. $m \in \{1, m, n, o, p\}$

71. $9 \notin \{6, 3, 4, 8\}$

72. $2 \notin \{7, 6, 5, 4\}$

73. $\{k, c, r, a\} = \{k, c, a, r\}$

74. $\{e, h, a, n\} = \{a, h, e, n\}$

75. $\{5, 8, 9\} = \{5, 8, 9, 0\}$

76. $\{3, 7, 12, 14\} = \{3, 7, 12, 14, 0\}$

77. $\{x \mid x$ es un número natural menor que $3\} = \{1, 2\}$

78. $\{x \mid x$ es un número natural mayor que $10\} = \{11, 12, 13, \ldots\}$

Diga si cada uno de los enunciados siguientes es verdadero *o* falso.

Sean $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{2, 4, 8, 10\}$ *y* $C = \{4, 10, 12\}$.

79. $4 \in A$

80. $8 \in B$

81. $4 \notin C$

82. $8 \notin B$

83. Todo elemento de C es también elemento de A.

84. Todo elemento de C es también elemento de B.

85. Esta sección inició con el enunciado: "La mente humana posee una inclinación natural a reunir o agrupar". ¿Por qué cree usted que esto sea así? En la explicación de su razonamiento, utilice una o más "colecciones", ya sean matemáticas o de otro tipo.

86. Explique la diferencia entre un conjunto bien definido y un conjunto que no está bien definido. Dé ejemplos y utilice los términos presentados en esta sección.

Recuerde que dos conjuntos son iguales *si ambos contienen elementos idénticos. Por otra parte, dos conjuntos se denominan* equivalentes *si contienen el mismo número de elementos (pero no necesariamente los mismos). Para cada una de las condiciones siguientes, dé un ejemplo o explique por qué es imposible.*

87. dos conjuntos que no son iguales ni equivalentes

88. dos conjuntos que son iguales pero no equivalentes

89. dos conjuntos que son equivalentes pero no iguales

90. dos conjuntos que son iguales y equivalentes

91. ***Volumen de acciones*** Esta tabla muestra las acciones más activas de la bolsa de valores de Estados Unidos en un año reciente, con los volúmenes de las mismas (en millones).

Emisión	Volumen de acciones (millones)
1. Viacom (clase B)	223.1
2. Trans World Airlines	222.8
3. Harken Energy	214.5
4. Echo Bay Mines	188.7
5. JTS	177.0
6. Industrias Nabor	172.9
7. Hasbro	159.1
8. Minas Royal Oak	140.6
9. Industrias Grey Wolf	132.9
10. IVAX	132.5

(*Fuente:* Bolsa de Valores de Estados Unidos.)

(a) Enumere el conjunto de acciones que tienen un volumen de por lo menos 188.7 millones.

(b) Enumere el conjunto de acciones que tienen un volumen máximo de 188.7 millones.

92. ***Quemar calorías*** Jaime Bailey cuida mucho su salud, aunque también le gusta cierto tipo de chocolate en barra, cada una de las cuales contiene 220 calorías. A fin de quemar las calorías superfluas, Jaime participa en sus actividades favoritas, que se muestran a continuación, por periodos de una hora y nunca repite una actividad en un mismo día.

Actividad	Símbolo	Calorías quemadas en una hora
Voleibol	v	160
Golf	g	260
Canotaje	c	340
Nado	n	410
Carreras	r	680

(a) Los lunes Jaime sólo tiene tiempo para dos horas de actividades. Haga una lista de todos los conjuntos posibles de actividades con las que quemaría al menos el número de calorías correspondiente a tres barras de chocolate.

(b) Suponga que Jaime tiene tiempo para hasta tres horas de actividades el sábado. Haga una lista de todos los conjuntos de actividades con las que quemaría al menos el número de calorías de cinco barras de chocolates.

2.2 Diagramas de Venn y subconjuntos

En cada problema existe, ya sea de forma explícita o implícita, un **universo del discurso**. Dicho universo incluye todos los objetos en consideración en un momento dado. Por ejemplo, si se pretendiera estudiar las reacciones a la propuesta de que en cierto campus se aumente la edad mínima necesaria para comprar cerveza, el universo del discurso podría ser el de todos los estudiantes del campus, los residentes cercanos al campus, la junta directiva, o quizá todos estos grupos de personas.

Dentro de la teoría matemática de conjuntos, el universo del discurso se conoce como **conjunto universal** (o **conjunto universo**). Por lo general al conjunto universal se le representa con la letra U. El conjunto universal podrá cambiar de forma de un problema a otro.

En la mayoría de las ramas de las matemáticas, diversos tipos de dibujos y diagramas nos resultan de mucha utilidad para exponer o esclarecer nuestros razonamientos. En la teoría de conjuntos comúnmente utilizamos los **diagramas de Venn**, desarrollados por el lógico John Venn (1834-1923). En estos diagramas, el conjunto universal es representado por un rectángulo, y los demás conjuntos relevantes dentro de este universo se representan mediante regiones ovaladas o bien con círculos u otras formas geométricas. En el diagrama de Venn de la figura 1, toda la región encerrada en el rectángulo representa el conjunto universal U, mientras que la parte encerrada en el óvalo representa al conjunto A (el tamaño del óvalo que representa al conjunto A es irrelevante). El área sombreada dentro de U y fuera del óvalo se representa con A' (se lee "A prima"). Este conjunto, llamado *complemento* de A, contiene todos los elementos de U que no están contenidos en A.

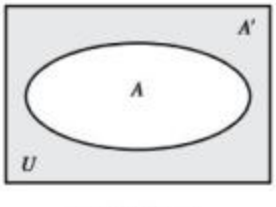


FIGURA 1

El complemento de un conjunto

Para cualquier conjunto A dentro del conjunto universal U, el **complemento** de A, designado como A', es el conjunto de elementos de U que no son elementos de A. Esto es:

$$A' = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$

EJEMPLO 1 Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
$M = \{a, b, e, f\}$,
$N = \{b, d, e, g, h\}$.

Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) M'

El conjunto M' contiene todos los elementos de U que no están en el conjunto M. Puesto que el conjunto M contiene a los elementos a, b, e y f, dichos elementos no podrán pertenecer al conjunto M', por lo que el conjunto M' estará compuesto por los elementos c, d, g y h; esto es, $M' = \{c, d, g, h\}$.

(b) N'

El conjunto N' contiene todos los elementos de U que no están contenidos en el conjunto N, por lo tanto $N' = \{a, c, f\}$. ■

Considere el complemento del conjunto universal, o U'. Para encontrar dicho conjunto hay que seleccionar todos los elementos de U que no pertenecen a U. Tales elementos no existen, por lo que no puede haber elementos en el conjunto U'. Esto significa que para todo conjunto universal U, $U' = \emptyset$.

Ahora consideremos el complemento del conjunto vacío, es decir, $\emptyset'$. Dado que $\emptyset' = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin \emptyset\}$, y que el conjunto vacío carece de elementos, entonces todo elemento del conjunto universal U cumple con la definición anterior. Por lo tanto, para cualquier conjunto universal U, $\emptyset' = U$.

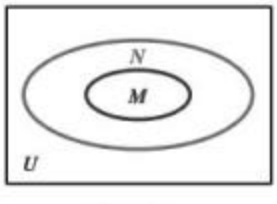


FIGURA 2

Suponga que tenemos el conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, mientras que $A = \{1, 2, 3\}$. Cada elemento de A también es elemento de U. Por esta razón, el conjunto A se considera *subconjunto* del conjunto U, lo cual se escribe

$$A \subseteq U.$$

(La expresión "A no es subconjunto U" se escribiría $A \not\subseteq U$.) La figura 2 muestra un diagrama de Venn en el cual el conjunto M es subconjunto del conjunto N.

Subconjunto de un conjunto

Un conjunto A es **subconjunto** del conjunto B cuando cada elemento de A también es elemento de B. Esto se expresa como

$$A \subseteq B.$$

EJEMPLO 2 Escriba $\subseteq$ o $\not\subseteq$ en el espacio en blanco, según corresponda, para hacer cierta la proposición.

(a) $\{3, 4, 5, 6\}$ _____ $\{3, 4, 5, 6, 8\}$

Como cada elemento de $\{3, 4, 5, 6\}$ es también elemento de $\{3, 4, 5, 6, 8\}$ el primer conjunto es subconjunto del segundo, por lo tanto el símbolo correcto es $\subseteq$.

(b) $\{1,2,3\}$ ____ $\{2,4,6,8\}$

El elemento 1 pertenece a $\{1, 2, 3\}$ pero no a $\{2, 4, 6, 8\}$. El símbolo correcto es $\not\subseteq$.

(c) $\{5,6,7,8\}$ ____ $\{5,6,7,8\}$

Cada elemento de $\{5, 6, 7, 8\}$ es también un elemento de $\{5, 6, 7, 8\}$. El símbolo correcto es $\subseteq$. ■

Como sugiere el ejemplo 2(c), todo conjunto es subconjunto de sí mismo:

$$B \subseteq B \quad \text{para todo conjunto } B.$$

El enunciado de la igualdad de conjuntos de la sección 2.1 puede presentarse de manera formal por medio de la terminología de conjuntos.

Igualdad de conjuntos (una definición alterna)

Si A y B son conjuntos, entonces $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Cuando se estudian los subconjuntos de un conjunto B, es común tratar de hallar subconjuntos que sean distintos de B. Suponga que $B = \{5, 6, 7, 8\}$ y $A = \{6, 7\}$. A es subconjunto de B, pero A no es todo B; existe por lo menos un elemento en B que no es elemento de A (de hecho, aquí son dos los elementos, 5 y 8). En este caso, al conjunto A se le conoce como *subconjunto propio* de B. Para indicar que A es subconjunto propio de B, escribimos $A \subset B$.

Subconjunto propio de un conjunto

El conjunto A es **subconjunto propio** del conjunto B si $A \subseteq B$ y $A \neq B$. Esto se expresa como

$$\boldsymbol{A \subset B}.$$

(Observe la semejanza que guardan los símbolos de los subconjuntos, $\subset$ y $\subseteq$, con los símbolos algebraicos de las desigualdades, $<$ y $\leq$.)

EJEMPLO 3 Determine si $\subset$, $\subseteq$ o ambos símbolos pueden entrar en el espacio en blanco para hacer cierta la proposición.

(a) $\{5,6,7\}$ ____ $\{5,6,7,8\}$

Cada elemento de $\{5, 6, 7\}$ está contenido en $\{5, 6, 7, 8\}$; por lo tanto, puede colocarse $\subseteq$ en el espacio. Por otra parte, el 8 pertenece a $\{5, 6, 7, 8\}$, pero no pertenece a $\{5, 6, 7\}$, por lo cual $\{5, 6, 7\}$ es subconjunto propio de $\{5, 6, 7, 8\}$. Esto significa que $\subset$ también podría colocarse en el espacio.

(b) $\{a,b,c\}$ ____ $\{a,b,c\}$

El conjunto $\{a, b, c\}$ es subconjunto de $\{a, b, c\}$. Puesto que ambos conjuntos son iguales, $\{a, b, c\}$ no es subconjunto propio de $\{a, b, c\}$. Por lo tanto, sólo $\subseteq$ puede colocarse en el espacio. ■

El conjunto A es subconjunto del conjunto B si cada elemento del conjunto A es también elemento del conjunto B. Si parafraseamos, el conjunto A es subconjunto del conjunto B si no existen elementos de A que tampoco lo sean de B. Esta segunda for-

ma de definir un subconjunto muestra que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, esto es:

$$\emptyset \subseteq B \quad \text{para cualquier conjunto } B.$$

Esto es cierto porque no es posible encontrar elemento alguno en $\emptyset$ que tampoco se encuentre en B (no hay un solo elemento en $\emptyset$). El conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto propio de cualquier conjunto, excepto de sí mismo:

$$\emptyset \subset B \quad \text{si } B \text{ es cualquier conjunto distinto de } \emptyset.$$

Cualquier conjunto (excepto $\emptyset$) tiene por lo menos dos subconjuntos, $\emptyset$ y él mismo.

EJEMPLO 4 De cada conjunto, encuentre todos sus posibles subconjuntos.

(a) $\{7, 8\}$

Por ensayo y error, el conjunto $\{7, 8\}$ tiene cuatro subconjuntos:

$$\emptyset, \{7\}, \{8\}, \{7, 8\}.$$

(b) $\{a, b, c\}$

En este caso, el método de ensayo y error nos conduce a 8 subconjuntos de $\{a, b, c\}$:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$ ■

En el ejemplo 4, los subconjuntos de $\{7, 8\}$ y los subconjuntos de $\{a, b, c\}$ se encontraron mediante ensayo y error. Un método alterno implica dibujar un **diagrama de árbol**, que es una forma sistemática de enumerar todos los subconjuntos de un conjunto dado. Las figuras 3(a) y 3(b) muestran los diagramas de árbol para $\{7, 8\}$ y $\{a, b, c\}$.

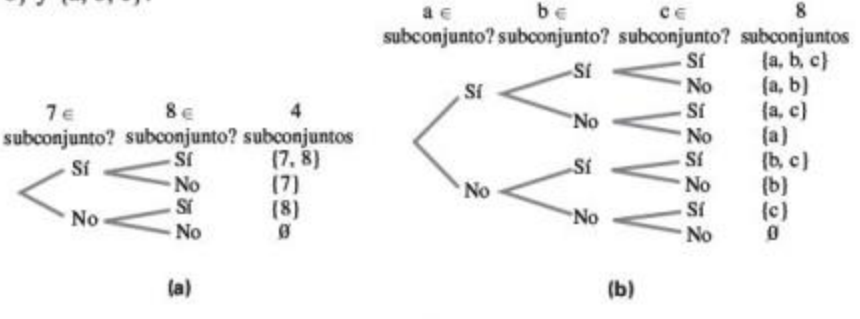


FIGURA 3

En el ejemplo 4, para determinar el número de subconjuntos de un conjunto dado primero mostramos una lista de dichos subconjuntos y posteriormente procedimos a contarlos. El método del diagrama de árbol también produjo una lista de todos los posibles subconjuntos. En muchas aplicaciones no es necesario desplegar todos los subconjuntos; basta con determinar el número de subconjuntos existentes. Además, cuando el conjunto original contiene un gran número de elementos los métodos de ensayo y error y del diagrama de árbol implican demasiado trabajo. Por estas razones, es deseable tener una fórmula que nos permita determinar el número de subconjuntos. Para obtener dicha fórmula, podemos utilizar la técnica del razonamiento inductivo; esto es, observaremos casos particulares para tratar de descubrir un patrón general.

Empezaremos con el conjunto que contiene el menor número de elementos posibles: el conjunto vacío. Este conjunto, $\emptyset$, tiene sólo un subconjunto, $\emptyset$, es decir, él

mismo. Ahora bien, un conjunto de un elemento tiene sólo dos subconjuntos: él mismo y $\emptyset$. Estos hechos, junto con los resultados obtenidos anteriormente para los conjuntos de dos y tres elementos, se resumen a continuación:

Número de elementos	0	1	2	3
Número de subconjuntos	1	2	4	8

Potencias de 2

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 2 \times 2 = 4$
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$
$2^{11} = 2048$
$2^{12} = 4096$
$2^{15} = 32{,}768$
$2^{20} = 1{,}048{,}576$
$2^{25} = 33{,}554{,}432$
$2^{30} = 1{,}073{,}741{,}824$

Los números pequeños de la parte superior derecha se denominan *exponentes*. En este caso, la base es 2. Observe con qué velocidad se incrementan los valores; éste es el origen del término *crecimiento exponencial*.

Esta tabla sugiere que, conforme se incrementa en uno el número de elementos del conjunto, el número de subconjuntos se duplica. Esto sugiere que el número de subconjuntos en cada caso podría ser una potencia de 2. Cada número del segundo renglón de la tabla es, de hecho, una potencia de 2. Ahora agregamos esta información a la tabla.

Número de elementos	0	1	2	3
Número de subconjuntos	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$

Esta tabla muestra que el número de elementos en cada caso es igual al exponente del 2. El razonamiento inductivo nos brinda la siguiente generalización.

Número de subconjuntos

El número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es $\mathbf{2^n}$.

Como el valor 2^n incluye al conjunto mismo, debemos restar 1 a este valor para obtener el número de subconjuntos propios de un conjunto con n elementos. He aquí otra generalización.

Número de subconjuntos propios

El número de subconjuntos propios de un conjunto con n elementos es $\mathbf{2^n - 1}$.

Como se mostró en el capítulo sobre la solución de problemas, aunque el método del razonamiento inductivo es una buena forma de *descubrir* principios o llegar a una *conjetura*, no demuestra que dicha conjetura sea correcta en todos los casos. La demostración debe realizarse mediante otros métodos. Basándonos en la observación, podemos decir que las dos fórmulas anteriores son ciertas puesto que $n = 0$, 1, 2 o 3. (Para una demostración general, vea el ejercicio 71 al final de esta sección.)

EJEMPLO 5 Encuentre el número de subconjuntos y el número de subconjuntos propios de cada conjunto.

(a) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

Este conjunto tiene 5 elementos y $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ subconjuntos, de los cuales $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$ son subconjuntos propios.

(b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 14\}$

Este conjunto tiene 8 elementos. Hay $2^8 = 256$ subconjuntos y 255 subconjuntos propios. ■

2.2 EJERCICIOS

Relacione cada conjunto o conjuntos en la columna I con la descripción que le corresponda de la columna II.

I	II
1. $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \emptyset$	**A.** el complemento de $\emptyset$
2. $\{p\}, \{q\}, \emptyset$	**B.** los subconjuntos propios de $\{p, q\}$
3. $\{a, b\}$	**C.** el complemento de $\{c, d\}$, si $U = \{a, b, c, d\}$
4. $\emptyset$	**D.** el complemento de U
5. U	**E.** el complemento de $\{b\}$, si $U = \{a, b\}$
6. $\{a\}$	**F.** los subconjuntos propios de $\{p, q\}$

Escriba $\subseteq$ o $\not\subseteq$ en los espacios en blanco de tal forma que las proposiciones sean verdaderas.

7. $\{-2, 0, 2\}$ _____ $\{-2, -1, 1, 2\}$

8. $\{M, W, F\}$ _____ $\{S, M, T, W, Th\}$

9. $\{2, 5\}$ _____ $\{0, 1, 5, 3, 4, 2\}$

10. $\{a, n, d\}$ _____ $\{r, a, n, d, y\}$

11. $\emptyset$ _____ $\{a, b, c, d, e\}$

12. $\emptyset$ _____ $\emptyset$

13. $\{-7, 4, 9\}$ _____ $\{x | x$ es un entero impar$\}$

14. $\{2, 1/3, 5/9\}$ _____ el conjunto de números racionales

Determine si $\subset$, $\subseteq$, ambos *o* ninguno, *deben colocarse en el espacio en blanco para hacer que la proposición sea verdadera.*

15. $\{B, C, D\}$ _____ $\{B, C, D, F\}$

16. {rojo, azul, amarillo} _____ {amarillo, azul, rojo}

17. $\{9, 1, 7, 3, 5\}$ _____ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

18. $\{S, M, T, W, Th\}$ _____ $\{M, W, Th, S\}$

19. $\emptyset$ _____ $\{0\}$

20. $\emptyset$ _____ $\emptyset$

21. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ _____ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

22. $\{5/6, 9/8\}$ _____ $\{6/5, 8/9\}$

En los ejercicios 23 a 42, explique si la proposición es verdadera *o* falsa.

Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, e\}$, $B = \{a, b, e, f, g\}$, $C = \{b, f, g\}$, $D = \{d, e\}$.

23. $A \subset U$

24. $C \subset U$

25. $D \subseteq B$

26. $D \subseteq A$

27. $A \subset B$

28. $B \subseteq C$

29. $\emptyset \subset A$

30. $\emptyset \subseteq D$

31. $\emptyset \subseteq \emptyset$

32. $D \subset B$

33. $D \not\subseteq B$

34. $A \not\subseteq B$

35. Hay exactamente 6 subconjuntos de C.

36. Hay exactamente 31 subconjuntos de B.

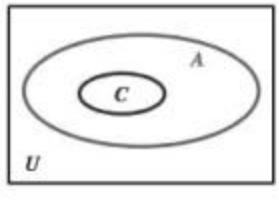
37. Hay exactamente 3 subconjuntos de A.

38. Hay exactamente 4 subconjuntos de D.

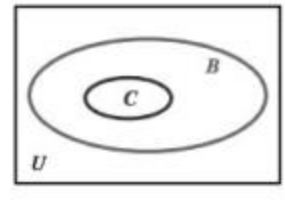
39. Hay exactamente 1 subconjunto de $\emptyset$.

40. Hay exactamente 127 subconjuntos propios de U.

41. El diagrama de Venn siguiente muestra de forma correcta la relación que existe entre los conjuntos A, C y U.



42. El diagrama de Venn siguiente muestra de forma correcta la relación que existe entre los conjuntos B, C y U.



Encuentre el número de subconjuntos y subconjuntos propios de cada uno de los siguientes conjuntos.

43. $\{1, 5, 10\}$

44. $\{8, 6, 4, 2\}$

45. $\{a, b, c, d, e, f\}$

46. el conjunto de los días de la semana

47. $\{x | x$ es un entero impar entre -6 y $4\}$

48. $\{x | x$ es un entero impar menor que $4\}$

Dado $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *encuentre el complemento de cada uno de los siguientes conjuntos.*

49. $\{1, 4, 6, 8\}$

50. $\{2, 5, 7, 9, 10\}$

51. $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

52. $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

53. $\emptyset$

54. U

Vacaciones en Washington, D.C. *Terry McGinnis planea llevar a sus dos hijos a Washington, D.C., durante las vacaciones de Acción de Gracias. Al evaluar las ventajas de volar o conducir hasta allá desde su casa en Iowa, enumeró las características siguientes.*

Volar a D.C.	Conducir a D.C.
Costo alto	Costo bajo
Educativo	Educativo
Más tiempo para pasear	Menos tiempo para pasear
No poder visitar a parientes en el trayecto	Poder visitar a parientes en el trayecto

Tome en cuenta estas características en los ejercicios 55 a 60.

55. Encuentre el conjunto universal, U, más pequeño que contenga todas las características de ambas opciones.

Represente con V *al conjunto de características de la opción volar y con* C *al conjunto de las características de la opción conducir. Use el conjunto universal del ejercicio 55.*

56. Proporcione el conjunto V'.

57. Proporcione el conjunto C'.

En los ejercicio 58 a 60, encuentre el conjunto de elementos que sea común a ambos conjuntos.

58. V y C

59. V' y C'

60. V y C'

Reunión en la sala de juntas *Alison Romike, Bill Leonard, Charlie Dawkins, Dierdre Lynch y Ed Moura planean reunirse en la sala de juntas de la convención de ventas, después de que el director ejecutivo de la compañía pronuncie su discurso en la reunión de ventas de enero de su compañía. Asigne a estas 5 personas las letras A, B, C, D y E, respectivamente, y haga una lista de todas las formas posibles en que este número de personas se puede reunir en la habitación.*

61. 5 personas

62. 4 personas

63. 3 personas

64. 2 personas

65. 1 persona

66. ninguna persona

67. Encuentre el número total de formas posibles en que los miembros de este grupo se pueden reunir en la habitación. (*Una pista:* Encuentre el total de conjuntos en las respuestas de los ejercicios 61 a 66.)

68. ¿Qué diferencia existe entre su respuesta al ejercicio 67 con el número de subconjuntos en un conjunto de 5 elementos? ¿Cómo puede interpretar la respuesta del ejercicio 67 en términos de subconjuntos?

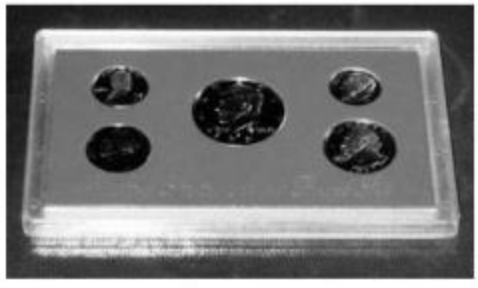
69. ***Elegir billetes de la billetera*** Suponga que su billetera contiene los billetes que se muestran a continuación.



(a) Si debe seleccionar por lo menos un billete, y puede elegir hasta un total de 4 billetes, ¿cuántas cantidades diferentes de dinero podría formar?

(b) En el inciso (a), quite la condición "debe seleccionar por lo menos un billete". Ahora, ¿cuántas cantidades de dinero son posibles?

70. ***Elegir monedas*** La fotografía presenta una muestra de las monedas de Estados Unidos para 1996, la cual contiene una moneda de 5 centavos, una de 10, una de 25 y una de 50 centavos. Repita el ejercicio 69, pero esta vez reemplace "billetes" por "monedas".



71. Al descubrir la expresión (2^n) para determinar el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos, observamos que para los primeros valores de n, al aumentar en uno el número de elementos se duplicaba el número de subconjuntos. En este ejercicio puede comprobar la fórmula general mostrando que lo mismo es cierto para cualquier valor de n. Suponga que A tiene n elementos y s subconjuntos. Ahora agregue un elemento, digamos, e, al conjunto A. (Ahora tenemos un nuevo conjunto, digamos, B, con $n + 1$ elementos.) Divida los subconjuntos de B en aquellos que contienen el elemento e y los que no lo contienen.

(a) ¿Cuántos subconjuntos de B no contienen a e? (*Una pista:* Cada uno de éstos es un subconjunto del conjunto original A.)

(b) ¿Cuántos subconjuntos de B sí contienen a e? (*Una pista:* Cada uno de éstos sería un subconjunto del conjunto original A, más el elemento e.)

(c) ¿Cuál es el número total de subconjuntos de B?

(d) ¿Qué puede concluir usted de lo anterior?

72. Explique por qué $\{\emptyset\}$ tiene a $\emptyset$ como un subconjunto y también tiene a $\emptyset$ como un elemento.

2.3 Operaciones con conjuntos y productos cartesianos

Intersección de conjuntos Dos candidatos, Adelaide Boettner y David Berman, contienden por un escaño en el Ayuntamiento de la ciudad. Una electora que está decidiendo por quien votar recordó las siguientes promesas hechas por los candidatos. Cada promesa está representada por una letra.

La honrada Adelaide Boettner	El decidido David Berman
Menor gasto, m	Menor gasto, m
Énfasis en el cumplimiento de las leyes de transporte, t	Acabar con políticos corruptos, p
Aumento en los servicios en áreas suburbanas, s	Aumento en los servicios de la ciudad, c

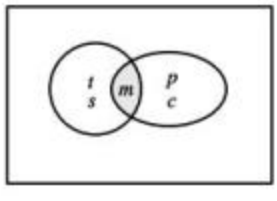


FIGURA 4

La única promesa en que coinciden ambos candidatos es la m, menor gasto. Suponga que tomamos las promesas de cada candidato como un conjunto. Las promesas de Boettner forman el conjunto $\{m, t, s\}$, mientras que las de Berman forman el conjunto $\{m, p, c\}$. El único elemento común a los dos conjuntos es m; este elemento pertenece a la *intersección* de los dos conjuntos, $\{m, t, s\}$ y $\{m, p, c\}$, como se muestra en la zona sombreada del diagrama de Venn de la figura 4. En símbolos,

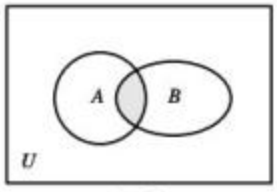
$$\{m, t, s\} \cap \{m, p, c\} = \{m\},$$

donde el símbolo $\cap$ representa la intersección. Observe que la intersección entre dos conjuntos es en sí mismo un conjunto.

Intersección de conjuntos

La **intersección** de los conjuntos A y B, que se escribe $A \cap B$, es el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos A y B, esto es:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



$A \cap B$

FIGURA 5

Forme la intersección de los conjuntos A y B tomando todos los elementos que se encuentran en ambos conjuntos, como lo muestra la zona sombreada de la figura 5.

EJEMPLO 1 Encuentre la intersección de los siguientes conjuntos.

(a) $\{3,4,5,6,7\}$ y $\{4,6,8,10\}$

Puesto que los elementos comunes a los dos conjuntos son 4 y 6,

$$\{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{4, 6, 8, 10\} = \{4, 6\}.$$



La luz blanca puede considerarse como la intersección de los tres colores primarios.

(b) $\{9,14,25,30\}$ y $\{10,17,19,38,52\}$

Estos dos conjuntos no tienen elementos en común, de modo que

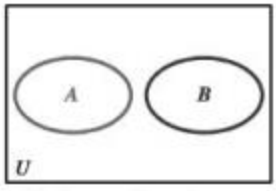
$$\{9,14,25,30\} \cap \{10,17,19,38,52\} = \emptyset.$$

(c) $\{5,9,11\}$ y $\emptyset$

No existen elementos en $\emptyset$, por lo que no puede haber elementos que pertenezcan a ambos conjuntos. Por lo tanto,

$$\{5,9,11\} \cap \emptyset = \emptyset.$$ ■

En los ejemplos 1(b) y 1(c) mostramos dos conjuntos que no tienen elementos en común. Los conjuntos que no tienen elementos en común reciben el nombre de **conjuntos disjuntos**. Un conjunto formado por perros y otro formado por gatos serían conjuntos disjuntos. En lenguaje matemático, los conjuntos A y B serán disjuntos siempre y cuando $A \cap B = \emptyset$. En la figura 6 aparecen dos conjuntos disjuntos.



Conjuntos disconjuntos

FIGURA 6

Unión de conjuntos Al inicio de esta sección mostramos las listas de las promesas hechas por dos candidatos a formar parte del Ayuntamiento. Suponga que un encuestador quiere resumir, para su oficina, los tipos de promesas hechas por los candidatos. El encuestador necesitará analizar *todas* las promesas hechas por *uno u otro* candidato, o lo que es lo mismo, el conjunto

$$\{m,t,s,p,c\},$$

es decir, la *unión* de los conjuntos de las promesas hechas por los candidatos, como se muestra en la zona sombreada en el diagrama de Venn en la figura 7. En símbolos,

$$\{m, t, s\} \cup \{m, p, c\} = \{m, t, s, p, c\},$$

donde el símbolo en forma de u, $\cup$, denota la unión de los conjuntos. Es importante no confundir este símbolo con el conjunto universal U. Nuevamente, la unión de dos conjuntos también es un conjunto.

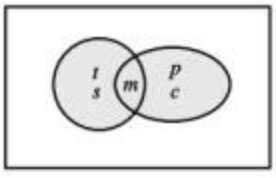
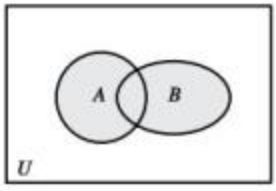


FIGURA 7

Unión de conjuntos

La **unión** de los conjuntos A y B, que se escribe $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos, o

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$



$A \cup B$

FIGURA 8

Forme la unión de los conjuntos A y B tomando los elementos de A y agregándole luego los elementos de B que no hayan estado antes en A, como lo muestra la zona sombreada en la figura 8.

EJEMPLO 2 Encuentre la unión de los siguientes conjuntos.

(a) $\{2,4,6\}$ y $\{4,6,8,10,12\}$

Comience por enumerar todos los elementos del primer conjunto, 2, 4 y 6. Después liste los elementos del segundo conjunto que no estén en el primer conjunto; estos elementos son 8, 10 y 12. La unión está formada por todos estos elementos, o lo que es lo mismo,

$$\{2,4,6\} \cup \{4,6,8,10,12\} = \{2,4,6,8,10,12\}.$$

(b) $\{a,b,d,f,g,h\}$ y $\{c,f,g,h,k\}$

La unión de estos dos conjuntos es:

$$\{a,b,d,f,g,h\} \cup \{c,f,g,h,k\} = \{a,b,c,d,f,g,h,k\}.$$

(c) $\{3,4,5\}$ y $\emptyset$

Como el conjunto $\emptyset$ carece de elementos, la unión de $\{3, 4, 5\}$ con $\emptyset$ contiene sólo los elementos 3, 4 y 5. Esto es:

$$\{3,4,5\} \cup \emptyset = \{3,4,5\}.$$ ■

PARA REFLEXIONAR

Las operaciones aritméticas de suma y multiplicación, aplicadas a los números, muestran algunas propiedades que nos son familiares. Si a, b y c son números reales, la **propiedad conmutativa de la suma** señala que el orden de los sumandos no altera la suma: $a + b = b + a$. (¿Existe una **propiedad conmutativa de la multiplicación**?) La **propiedad asociativa de la suma** señala que cuando se suman tres números, la forma de agruparlos no implica diferencia alguna: $(a + b) + c = a + (b + c)$. (¿Existe una **propiedad asociativa de la multiplicación**?) Al número 0 se le conoce como **elemento identidad para la suma**, ya que si sumamos 0 a cualquier otro número, este último no cambia: $a + 0 = a$. (¿Cuál es el **elemento identidad para la multiplicación**?) Por último, la **propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma** señala que $a(b + c) = ab + ac$. (¿Existe una propiedad distributiva de la suma sobre la multiplicación?)

Para análisis en grupo

Ahora considere las operaciones de unión e intersección aplicadas a los conjuntos. Utilice las definiciones anteriores o desarrolle ejemplos para responder las siguientes preguntas.

1. ¿La unión de conjuntos es conmutativa? ¿Y la intersección?
2. ¿La unión de conjuntos es asociativa? ¿Y la intersección?
3. ¿Existirá algún elemento identidad para la unión de conjuntos? Si existe, ¿cuál cree que sea? ¿Y de la intersección de conjuntos?
4. ¿Será la intersección de conjuntos distributiva sobre la unión? ¿Será la unión de conjuntos distributiva sobre la intersección?

Recuerde, de la sección anterior, que A' representa el *complemento* del conjunto A. El conjunto A' se forma tomando todos los elementos del conjunto universal U que no se encuentran en A.

EJEMPLO 3 Sea $U = \{1,2,3,4,5,6,9\}$,
$A = \{1,2,3,4\}$,
$B = \{2,4,6\}$,
$C = \{1,3,6,9\}$.

Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A' \cap B$

Primero identifique los elementos del conjunto A'; éstos son los elementos de U que no aparecen en el conjunto A:

$$A' = \{5,6,9\}.$$

Ahora encuentre $A' \cap B$, o sea, los elementos que pertenecen tanto a A' como a B:

$$A' \cap B = \{5,6,9\} \cap \{2,4,6\} = \{6\}.$$

(b) $B' \cup C' = \{1,3,5,9\} \cup \{2,4,5\} = \{1,2,3,4,5,9\}$.

(c) $A \cap (B \cup C')$

Primero encuentre el conjunto de los elementos dentro del paréntesis:

$$B \cup C' = \{2,4,6\} \cup \{2,4,5\} = \{2,4,5,6\}.$$

Ahora, determine la intersección de este conjunto con A.

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C') &= A \cap \{2,4,5,6\} \\ &= \{1,2,3,4\} \cap \{2,4,5,6\} \\ &= \{2,4\} \end{aligned}$$

(d) $(A' \cup C') \cap B'$

El conjunto $A' = \{5, 6, 9\}$ y el conjunto $C' = \{2, 4, 5\}$, con

$$A' \cup C' = \{5,6,9\} \cup \{2,4,5\} = \{2,4,5,6,9\}.$$

El conjunto B' es $\{1, 3, 5, 9\}$, por lo tanto

$$(A' \cup C') \cap B' = \{2,4,5,6,9\} \cap \{1,3,5,9\} = \{5,9\}.$$ ■

Con frecuencia se dice que las matemáticas son un "lenguaje". Como tal, tiene la ventaja de contar con un simbolismo conciso. Por ejemplo, el conjunto $(A \cap B)' \cup C$ es menos difícil de entender que cuando se expresa en palabras. Un intento podría ser el siguiente: "El conjunto cuyos elementos no están en A y tampoco en B, o que están en C". Las palabras clave aquí (*no, y, o*) serán analizadas más a fondo en el capítulo sobre lógica.

EJEMPLO 4 Describa con palabras cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A \cap (B \cup C')$

Este conjunto podría ser descrito como "el conjunto de todos los elementos que se encuentran en A, y se encuentran en B o no se encuentran en C".

(b) $(A' \cup C') \cap B'$

Una posibilidad es: "el conjunto de todos los elementos que no se encuentran en A o tampoco en C, y no están en B". ■

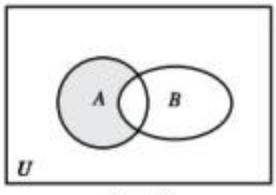
Diferencia de conjuntos Otra operación de los conjuntos es la *diferencia* entre dos conjuntos. Suponga que $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$ y $B = \{2,4,6,8,10\}$. Si los ele-

mentos de B son excluidos (o retirados) de A, se obtiene el conjunto $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. A C se le denomina la diferencia entre los conjuntos A y B.

Diferencia entre conjuntos

La **diferencia** entre los conjuntos A y B, que se escribe $A - B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B, o

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$



$A - B$

FIGURA 9

Puesto que $x \notin B$ significa lo mismo que $x \in B'$, el conjunto diferencia $A - B$ puede expresarse como $\{x | x \in A \text{ y } x \in B'\}$, o $A \cap B'$. La figura 9 ilustra la idea de la diferencia entre dos conjuntos. La región sombreada representa $A - B$.

EJEMPLO 5 Sean $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,
$A = \{1,2,3,4,5,6\}$,
$B = \{2,3,6\}$,
$C = \{3,5,7\}$.

Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A - B$

Comience con el conjunto A y elimine los elementos que también pertenezcan a B. Así,

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{2,3,6\} = \{1,4,5\}.$$

(b) $B - A$

Para que un elemento se encuentre en $B - A$, deberá estar en B y no pertenecer a A. Pero como todos los elementos de B están en A, entonces $B - A = \emptyset$.

(c) $(A - B) \cup C'$

Del inciso (a), $A - B = \{1,4,5\}$. Por otra parte, $C' = \{1,2,4,6\}$, por lo tanto

$$(A - B) \cup C' = \{1,2,4,5,6\}. \quad \blacksquare$$

Los resultados de los ejemplos 5(a) y 5(b) nos muestran que, en general,

$$A - B \neq B - A.$$

Pares ordenados Cuando enumeramos un conjunto que tiene varios elementos, el orden en que aparecen estos elementos es irrelevante. Por ejemplo, $\{1, 5\} = \{5, 1\}$. Sin embargo, existen muchos ejemplos en matemáticas en donde, cuando dos objetos forman un par, el orden en el cual están escritos sí resulta importante. Esto nos lleva al concepto del *par ordenado*. Cuando se escribe un par ordenado, se utilizan paréntesis (a diferencia de los corchetes, que se reservan para los conjuntos).

Pares ordenados

En el **par ordenado** (a, b), a se denomina **primer componente** y b **segundo componente**. En general, $(a, b) \neq (b, a)$.

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son **iguales** si sus primeros componentes son iguales y los segundos también lo son; esto es, $(a, b) = (c, d)$, si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

EJEMPLO 6 Determine si los siguientes enunciados son *verdaderos* o *falsos*.

(a) $(3,4) = (5 - 2, 1 + 3)$

Como $3 = 5 - 2$ y $4 = 1 + 3$, los pares ordenados son iguales. El enunciado es verdadero.

(b) $\{3,4\} \neq \{4,3\}$

Puesto que éstos son conjuntos, no pares ordenados, el orden en el cual se encuentran sus elementos es irrelevante. Dado que los conjuntos son iguales, el enunciado es falso.

(c) $(7,4) = (4,7)$

Estos pares ordenados no son iguales porque no cumplen con los requisitos sobre la igualdad de los pares ordenados. El enunciado es falso. ■

Producto cartesiano de conjuntos Un conjunto puede contener pares ordenados como elementos. Si A y B son conjuntos, entonces cada elemento de A puede ser pareado con un elemento de B, y los resultados pueden escribirse como pares ordenados. El conjunto que tiene dichos pares se llama *producto cartesiano* de A y B, lo cual se escribe $A \times B$ (y se lee "A por B"). El término cartesiano proviene del matemático francés René Descartes.

Producto cartesiano de conjuntos

El **producto cartesiano** de los conjuntos A y B, simbolizado como $A \times B$, es

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

EJEMPLO 7 Sea $A = \{1,5,9\}$ y $B = \{6,7\}$. Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A \times B$

Forme pares con cada elemento de A y cada elemento de B. Escriba el resultado como pares ordenados, colocando el elemento de A primero y el elemento de B después. Represéntelo como un conjunto.

$$A \times B = \{(1,6), (1,7), (5,6), (5,7), (9,6), (9,7)\}$$

(b) $B \times A$

Como B está primero, este conjunto consiste en pares ordenados cuyos componentes están intercambiados con respecto al inciso (a).

$$B \times A = \{(6,1), (7,1), (6,5), (7,5), (6,9), (7,9)\}$$ ■

Debe señalarse que el orden en el que se escriben los pares ordenados no es importante. Por ejemplo, otra forma de escribir $B \times A$ en el ejemplo 7 sería

$$\{(6,1), (6,5), (6,9), (7,1), (7,5), (7,9)\}.$$

EJEMPLO 8 Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Encuentre $A \times A$.

En este ejemplo tomamos el producto cartesiano de un conjunto *consigo mismo*. Tomamos el 1 y formamos pares de éste con cada uno de los otros elementos del conjunto, tomamos el 2 y hacemos lo mismo, y continuamos de esta forma, para obtener el conjunto siguiente:

$$\begin{aligned} A \times A = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\ &(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\ &(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\ &(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}. \end{aligned}$$

■

No es raro tomar el producto cartesiano de un conjunto consigo mismo, como mostramos en el ejemplo 8. De hecho, el producto cartesiano del ejemplo 8 representa todos los resultados posibles de lanzar dos dados. La determinación de este producto cartesiano es importante cuando se estudian ciertos problemas de técnicas de conteo y probabilidad, como veremos en capítulos posteriores.

Del ejemplo 7 se puede observar que, en general, $A \times B \neq B \times A$, ya que estos dos conjuntos no contienen exactamente los mismos pares ordenados. Sin embargo, los dos conjuntos contienen el mismo número de elementos: seis. Además, $n(A) = 3$, $n(B) = 2$ y $n(A \times B) = n(B \times A) = 6$. Como $3 \times 2 = 6$, se podría concluir que el número cardinal del producto cartesiano de dos conjuntos es igual al producto de los números cardinales de los conjuntos. En general, esta conclusión es correcta.

Número cardinal de un producto cartesiano

Si $n(A) = a$ y $n(B) = b$, entonces $\boldsymbol{n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B) = n(B) \times n(A) = ab}$

EJEMPLO 9 Encuentre $n(A \times B)$ y $n(B \times A)$ a partir de la siguiente información.

(a) $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$

Puesto que $n(A) = 7$ y $n(B) = 3$, $n(A \times B)$ y $n(B \times A)$ son ambos iguales a 7×3, o $= 21$.

(b) $n(A) = 24$ y $n(B) = 5$

$$n(A \times B) = n(B \times A) = 24 \times 5 = 120$$

■

Operaciones entre conjuntos Determinar la intersección, unión, diferencia, productos cartesianos y complementos de conjuntos son ejemplos de *operaciones entre conjuntos*. Una **operación** es una regla o procedimiento mediante el cual uno o más objetos son utilizados para obtener otro objeto. Los objetos involucrados en las operaciones son por lo general conjuntos o números. Las operaciones más comunes con números son la suma, resta, multiplicación y división. Por ejemplo, tomando los números 5 y 7, la operación de suma nos daría el número $5 + 7 = 12$. Con los mismos dos números, 5 y 7, la operación de multiplicación produciría el número $5 \times 7 = 35$.

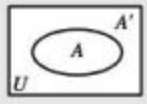
A continuación presentamos las operaciones más comunes entre conjuntos, con sus diagramas de Venn correspondientes.

Operaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, donde U es el conjunto universal.

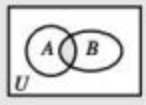
El **complemento** de A, simbolizado como A', es

$$A' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$



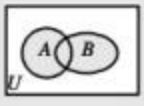
La **intersección** de A y B es

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



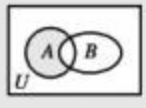
La **unión** de A y B es

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}.$$



La **diferencia** de A y B es

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$



El **producto cartesiano** de A y B es

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ y } y \in B\}.$$

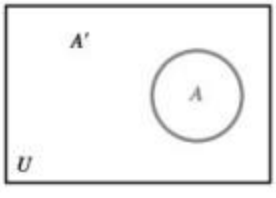
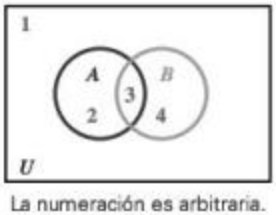


FIGURA 10



La numeración es arbitraria. Los números indican cuatro regiones, no números cardinales.

FIGURA 11

Diagramas de Venn Cuando trabajamos con un solo conjunto, podemos utilizar un diagrama de Venn, como se puede observar en la figura 10. El conjunto universal U se divide en dos regiones, una que representa al conjunto A y la otra que representa al conjunto A'.

Dos conjuntos A y B dentro del conjunto universal sugieren un diagrama de Venn como el de la figura 11, donde las cuatro regiones resultantes han sido numeradas con el fin de proporcionar una forma conveniente para referirse a ellas (la numeración es arbitraria). La región 1 contiene aquellos elementos fuera de los conjuntos A y B. La región 2 contiene los elementos de A que no están en B. La región 3 contiene los elementos que están en A y en B. ¿Cómo describiría los elementos de la región 4?

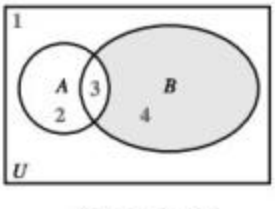


FIGURA 12

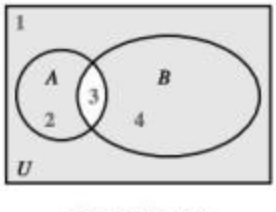


FIGURA 13

EJEMPLO 10 Dibuje un diagrama de Venn similar al de la figura 11 y sombree la región o las regiones que representan los siguientes conjuntos.

(a) $A' \cap B$

Observe la figura 11. El conjunto A' contiene todos los elementos fuera del conjunto A; en otras palabras, contiene todos los elementos de las regiones 1 y 4. El conjunto B está formado por los elementos de las regiones 3 y 4. La intersección de los conjuntos A' y B, el conjunto $A' \cap B$, está constituido por los elementos de la región en común a (1 y 4) y (3 y 4); esto es, la región 4. Por lo tanto, $A' \cap B$ está representado por la región 4, la cual está sombreada en la figura 12. Esta región puede describirse también como $B - A$.

(b) $A' \cup B'$

Una vez más, el conjunto A' está representado por las regiones 1 y 4, mientras que el conjunto B' está conformado por las regiones 1 y 2. La unión de A' y B', el conjunto $A' \cup B'$, está formado por los elementos que pertenecen a la unión de las regiones 1, 2 y 4, y que aparecen sombreadas en la figura 13. ■

Cuando cada elemento de los conjuntos A y B son conocidos, en ocasiones resulta útil mostrar dónde se encuentran ubicados los mismos dentro del diagrama de Venn.

EJEMPLO 11 Sea $U = \{q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$,
$A = \{r, s, t, u, v\}$,
$B = \{t, v, x\}$.

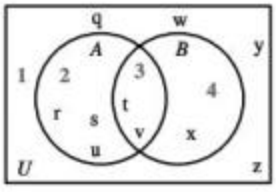
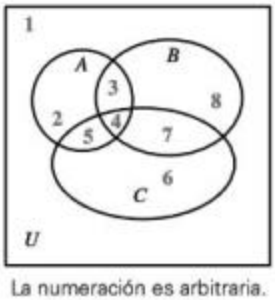


FIGURA 14

Coloque los elementos de estos conjuntos en su correcta posición en un diagrama de Venn.

Puesto que $A \cap B = \{t, v\}$, los elementos t y v están colocados dentro de la región 3 de la figura 14. Los elementos restantes de A, que son r, s y u, van dentro de la región 2. La figura muestra la ubicación correcta de los demás elementos. ■

Para representar tres conjuntos dentro de un conjunto universal, dibuje un diagrama de Venn como el que se muestra en la figura 15, donde la numeración de las regiones es arbitraria nuevamente.

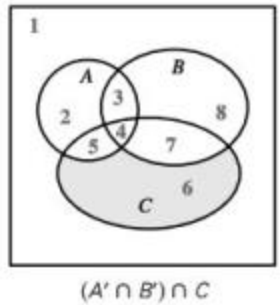


La numeración es arbitraria. Los números indican regiones, no números cardinales ni elementos.

FIGURA 15

EJEMPLO 12 Sombree el conjunto $(A \cap B') \cap C$ en un diagrama de Venn similar al de la figura 15.

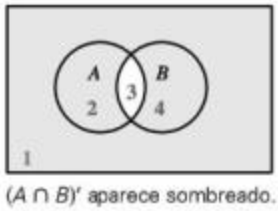
Trabaje primero la parte interior del paréntesis. Como se muestra en la figura 16, el conjunto A' esta formado por las regiones fuera del conjunto A, es decir, por las regiones 1, 6, 7 y 8. El conjunto B' está formado por las regiones 1, 2, 5 y 6. La intersección de estos conjuntos es el sitio donde se traslapan las regiones 1, 6, 7, 8 con 1, 2, 5, 6, o las regiones 1 y 6. Para el diagrama de Venn final, determine la intersección de las regiones 1 y 6 con el conjunto C. Como se puede observar en la figura 16, el conjunto C está formado por las regiones 4, 5, 6 y 7. La zona donde se traslapan las regiones 1, 6 y 4, 5, 6, 7 es la región 6, la cual se encuentra sombreada en la figura 16.



$(A' \cap B') \cap C$

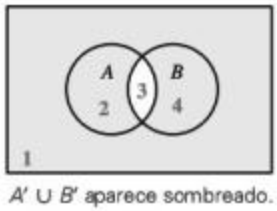
FIGURA 16

■



$(A \cap B)'$ aparece sombreado.

(a)



$A' \cup B'$ aparece sombreado.

(b)

FIGURA 17

EJEMPLO 13 ¿Es la proposición

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

cierta para cualquier elección de los conjuntos A y B?

Como ayuda para decidir la respuesta, utilice las regiones marcadas en la figura 11. El conjunto $A \cap B$ está formado por la región 3, por lo tanto, $(A \cap B)'$ está formado por las regiones 1, 2 y 4. Dichas regiones se presentan sombreadas en la figura 17(a).

Para encontrar un diagrama de Venn del conjunto $A' \cup B'$, primero confirme que A' está formado por las regiones 1 y 4, mientras que el conjunto B' incluye las regiones 1 y 2. Finalmente, $A' \cup B'$ está formado por las regiones 1 y 4, o por las regiones 1 y 2; esto es, por las regiones 1, 2 y 4. Estas regiones se presentan sombreadas en la figura 17(b).

El hecho de que las mismas regiones de los diagramas de Venn se encuentren sombreadas de la misma forma nos sugiere que

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$ ■

Un área en un diagrama de Venn (quizá se presentaría sombreada) puede describirse mediante las operaciones con conjuntos. Cuando hacemos esto, una buena idea es traducir la región en palabras, recordando que intersección se traduce como "y", unión se traduce como "o" y complemento como "no". Con frecuencia, existen varias formas de describir una región dada.

Leyes de De Morgan El resultado obtenido en el ejemplo 13 constituye una de las leyes de De Morgan, llamada así en honor del lógico británico Augustus De Morgan (1806-1871). A continuación se presentan las dos leyes de De Morgan para conjuntos.

Leyes de De Morgan

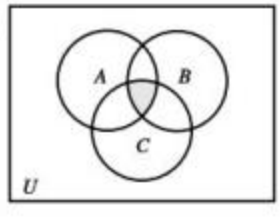
Para cualquiera de los conjuntos A y B,

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{y} \quad (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Los diagramas de Venn de la figura 17 sugieren de manera bastante sólida que la primera de las leyes de De Morgan es verdadera. Es decir, conducen una *conjetura*, como se vio en el capítulo 1. La verdadera comprobación de las leyes de De Morgan requiere métodos que se utilizan en cursos más avanzados de teoría de conjuntos.

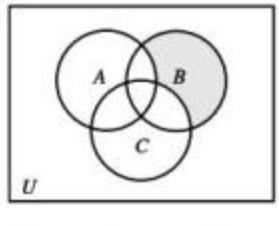
EJEMPLO 14 Describa con símbolos el área sombreada de cada uno de los siguientes diagramas de Venn, utilizando A, B, C, $\cap$, $\cup$, $-$ y $'$ según sea necesario.

(a)



El área sombreada pertenece a los tres conjuntos, A, B y C. Por lo tanto, la región corresponde a $A \cap B \cap C$.

(b)



La región sombreada se encuentra en el conjunto B y no se encuentra en A ni tampoco en C. Como no se encuentra en A, se encuentra en A', y por la misma razón se encuentra en C'. La región se encuentra, por lo tanto, en B y en A' y en C', y corresponde a $B \cap A' \cap C'$.

(c) Observe otra vez la figura del inciso (b) y proporcione dos formas adicionales de describir la región sombreada.

El área sombreada incluye a todo B, excepto las regiones pertenecientes ya sea a A o a C. Esto sugiere la idea de diferencia entre conjuntos. La región puede ser descrita como

$$B - (A \cup C), \quad \text{o su equivalente,} \quad B \cap (A \cup C)'.$$ ■

2.3 EJERCICIOS

Relacione cada término de la columna I con la designación que le corresponde de la columna II. Suponga que A y B son conjuntos.

I

1. la intersección de A y B
2. la unión de A y B
3. la diferencia de A y B
4. el complemento de A
5. el producto cartesiano de A y B
6. la diferencia de B y A

II

A. el conjunto de elementos en A que no están en B
B. el conjunto de elementos comunes a A y a B
C. el conjunto de elementos en el universo que no están en A
D. el conjunto de elementos en B que no están en A
E. el conjunto de pares ordenados tales que cada primer elemento es de A y cada segundo elemento es de B, con cada elemento de A pareado con cada elemento de B
F. el conjunto de elementos que están en A o en B o tanto en A como en B

Realice las siguientes operaciones.

Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
$X = \{a, c, e, g\}$,
$Y = \{a, b, c\}$,
$Z = \{b, c, d, e, f\}$.

7. $X \cap Y$ **8.** $X \cup Y$ **9.** $Y \cup Z$ **10.** $Y \cap Z$
11. $X \cup U$ **12.** $Y \cap U$ **13.** X' **14.** Y'
15. $X' \cap Y'$ **16.** $X' \cap Z$ **17.** $X \cup (Y \cap Z)$ **18.** $Y \cap (X \cup Z)$
19. $(Y \cap Z') \cup X$ **20.** $(X' \cup Y') \cup Z$ **21.** $(Z \cup X')' \cap Y$ **22.** $(Y \cap X')' \cup Z'$
23. $X - Y$ **24.** $Y - X$ **25.** $X' - Y$ **26.** $Y' - X$
27. $X \cap (X - Y)$ **28.** $Y \cup (Y - X)$

Describa cada uno de los siguientes conjuntos en palabras.

29. $A \cup (B' \cap C')$ **30.** $(A \cap B') \cup (B \cap A')$ **31.** $(C - B) \cup A$
32. $B \cap (A' - C)$ **33.** $(A - C) \cup (B - C)$ **34.** $(A' \cap B') \cup C'$

Efectos negativos del alcohol y el tabaco *La tabla muestra los efectos negativos del uso prolongado del tabaco y el alcohol.*

Tabaco	Alcohol
Enfisema, e	Daño al hígado, l
Daño al corazón, h	Daño al cerebro, b
Cáncer, c	Daño al corazón, h

Sea T el conjunto de todos los efectos producidos por el uso del tabaco y A el conjunto de los efectos producidos por el alcohol.

35. el conjunto universal más pequeño posible, U, que incluya a todos los efectos mencionados
36. A' **37.** T' **38.** $T \cap A$ **39.** $T \cup A$ **40.** $T \cap A'$

En los ejercicios 41 al 46, describa con palabras cada uno de los conjuntos.

Sea U = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos,
A = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos con deducciones pormenorizadas,
B = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos mostrando los ingresos del negocio,
C = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos archivadas en 2003,
D = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos seleccionadas para una auditoría.

41. $B \cup C$ **42.** $A \cap D$ **43.** $C - A$

44. $D \cup A'$ **45.** $(A \cup B) - D$ **46.** $(C \cap A) \cap B'$

Suponiendo que A y B representan dos conjuntos cualesquiera, indique si cada uno de los siguientes enunciados es siempre verdadero *o* no siempre verdadero.

47. $A \subseteq (A \cup B)$ **48.** $A \subseteq (A \cap B)$ **49.** $(A \cap B) \subseteq A$ **50.** $(A \cup B) \subseteq A$

51. $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ **52.** $n(A \cap B) = n(A) - n(B)$

53. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ **54.** $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

Para los ejercicios 55 al 62, utilice los resultados de las secciones anteriores para responder la última parte.

Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$X = \{1, 3, 5\}$,
$Y = \{1, 2, 3\}$,
$Z = \{3, 4, 5\}$.

55. **(a)** Encuentre $X \cup Y$. **(b)** Encuentre $Y \cup X$.
(c) Emita una conjetura.

56. **(a)** Encuentre $X \cap Y$. **(b)** Encuentre $Y \cap X$.
(c) Emita una conjetura.

57. **(a)** Encuentre $X \cup (Y \cup Z)$.
(b) Encuentre $(X \cup Y) \cup Z$.
(c) Emita una conjetura.

58. **(a)** Encuentre $X \cap (Y \cap Z)$.
(b) Encuentre $(X \cap Y) \cap Z$.
(c) Emita una conjetura.

59. **(a)** Encuentre $(X \cup Y)'$. **(b)** Encuentre $X' \cap Y'$.
(c) Emita una conjetura.

60. **(a)** Encuentre $(X \cap Y)'$. **(b)** Encuentre $X' \cup Y'$.
(c) Emita una conjetura.

61. **(a)** Encuentre $X \cup \emptyset$. **(b)** Emita una conjetura.

62. **(a)** Encuentre $X \cap \emptyset$. **(b)** Emita una conjetura.

Diga si cada enunciado es verdadero *o* falso.

63. $(3, 2) = (5 - 2, 1 + 1)$

64. $(10, 4) = (7 + 3, 5 - 1)$

65. $(6, 3) = (3, 6)$

66. $(2, 13) = (13, 2)$

67. $\{6, 3\} = \{3, 6\}$

68. $\{2, 13\} = \{13, 2\}$

69. $\{(1, 2), (3, 4)\} = \{(3, 4), (1, 2)\}$

70. $\{(5, 9), (4, 8), (4, 2)\} = \{(4, 8), (5, 9), (4, 2)\}$

Encuentre $A \times B$ *y* $B \times A$, *para A y B definidos como sigue.*

71. $A = \{2, 8, 12\}$, $B = \{4, 9\}$

72. $A = \{3, 6, 9, 12\}$, $B = \{6, 8\}$

73. $A = \{\text{d, o, g}\}$, $B = \{\text{p, i, g}\}$

74. $A = \{\text{b, l, u, e}\}$, $B = \{\text{r, e, d}\}$

Use la información dada para encontrar $n(A \times B)$ *y* $n(B \times A)$ *en los ejercicios 75 a 78.*

75. los conjuntos del ejercicio 71

76. los conjuntos del ejercicio 73

77. $n(A) = 35$ y $n(B) = 6$

78. $n(A) = 13$ y $n(B) = 5$

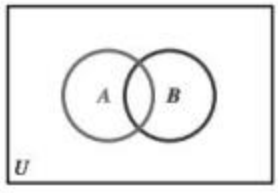
Encuentre el número cardinal especificado.

79. Si $n(A \times B) = 36$ y $n(A) = 12$, encuentre $n(B)$.

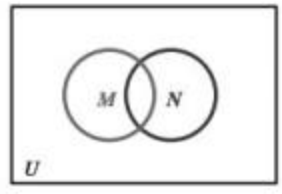
80. Si $n(A \times B) = 100$ y $n(B) = 4$, encuentre $n(A)$.

Coloque en el lugar correcto los elementos de estos conjuntos en el diagrama de Venn dado.

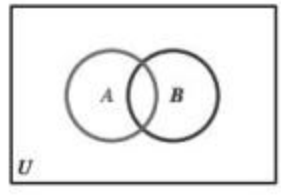
81. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
$A = \{b, d, f, g\}$,
$B = \{a, b, d, e, g\}$.



82. Sean $U = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$,
$M = \{5, 8, 10, 11\}$,
$N = \{5, 6, 7, 9, 10\}$.



Utilice un diagrama de Venn similar al que aparece aquí para sombrear cada uno de los siguientes conjuntos.



83. $B \cap A'$ **84.** $A \cup B$ **85.** $A' \cup B$

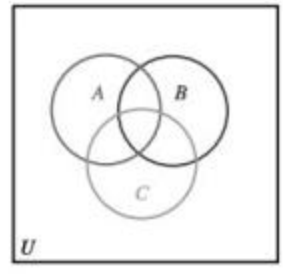
86. $A' \cap B'$ **87.** $B' \cup A$ **88.** $A' \cup A$

89. $B' \cap B$ **90.** $A \cap B'$ **91.** $B' \cup (A' \cap B')$

92. $(A \cap B) \cup B$ **93.** U' **94.** $\emptyset'$

95. Sean $U = \{m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w\}$,
$A = \{m, n, p, q, r, t\}$,
$B = \{m, o, p, q, s, u\}$,
$C = \{m, o, p, r, s, t, u, v\}$.

Coloque en el lugar correcto los elementos de estos conjuntos en un diagrama de Venn similar al que se muestra aquí.



96. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A = \{1, 3, 5, 7\}$,
$B = \{1, 3, 4, 6, 8\}$,
$C = \{1, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Coloque en el lugar correcto los elementos de estos conjuntos en un diagrama de Venn.

Utilice un diagrama de Venn para sombrear cada uno de los siguientes conjuntos.

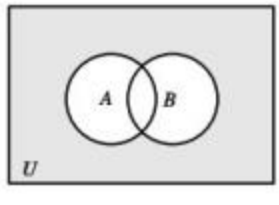
97. $(A \cap B) \cap C$ **98.** $(A \cap C') \cup B$ **99.** $(A \cap B) \cup C'$ **100.** $(A' \cap B) \cap C$

101. $(A' \cap B') \cap C$ **102.** $(A \cup B) \cup C$ **103.** $(A \cap B') \cup C$ **104.** $(A \cap C') \cap B$

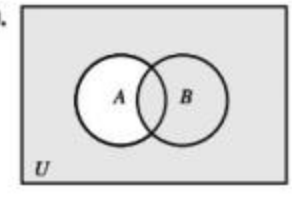
105. $(A \cap B') \cap C'$ **106.** $(A' \cap B') \cup C$ **107.** $(A' \cap B') \cup C'$ **108.** $(A \cap B)' \cup C$

Redacte una descripción de cada área sombreada. Utilice los símbolos A, B, C, ∩, ∪, − y ' según sea necesario. Puede haber más de una respuesta.

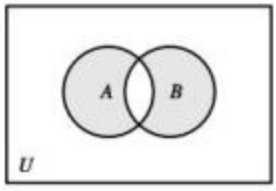
109.



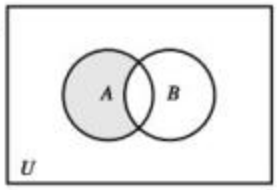
110.



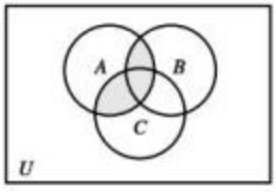
111.



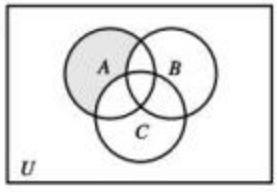
112.



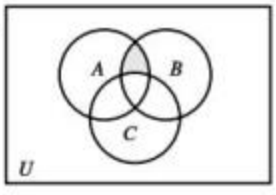
113.



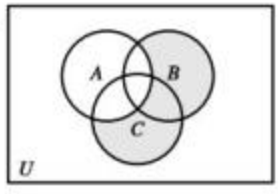
114.



115.



116.



Suponga que A y B son conjuntos. Describa las condiciones necesarias para que cada una de las proposiciones siguientes sea verdadera.

117. $A = A - B$ **118.** $A = B - A$ **119.** $A = A - \emptyset$ **120.** $A = \emptyset - A$

121. $A \cup \emptyset = \emptyset$ **122.** $A \cap \emptyset = \emptyset$ **123.** $A \cap \emptyset = A$ **124.** $A \cup \emptyset = A$

125. $A \cup A = \emptyset$ **126.** $A \cap A = \emptyset$

Para cada uno de los siguientes ejercicios, dibuje dos diagramas de Venn adecuados para decidir si el enunciado es siempre verdadero *o* no siempre verdadero.

127. $A \cap A' = \emptyset$

128. $A \cup A' = U$

129. $(A \cap B) \subseteq A$

130. $(A \cup B) \subseteq A$

131. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = A$.

132. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = B$.

133. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (Segunda ley de De Morgan)

134. Dé ejemplos de cómo una lengua como el español, el inglés, el árabe o el vietnamita pueden tener una ventaja sobre el lenguaje simbólico de las matemáticas.

135. Si A y B son conjuntos, ¿es necesariamente cierto que $n(A - B) = n(A) - n(B)$? Explique su respuesta.

136. Si $Q = \{x \mid x \text{ es un número racional}\}$ y $H = \{x \mid x \text{ es un número irracional}\}$, describa cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $Q \cup H$ **(b)** $Q \cap H$

2.4 Números cardinales y encuestas

Muchos problemas que tienen que ver con conjuntos de personas (o de objetos) requieren analizar información conocida sobre ciertos subconjuntos para obtener números cardinales de otros subconjuntos. En esta sección utilizamos tres técnicas muy útiles para la solución de tales problemas: diagramas de Venn, fórmulas para obtener números cardinales y tablas. La "información conocida" se obtiene comúnmente (aunque no siempre) realizando una encuesta.

Suponga que a un grupo de estudiantes que también acostumbran ver MTV se les pregunta acerca de algunos músicos, y la información obtenida fuera la siguiente.

33 les gusta Tim McGraw.
32 les gusta Céline Dion.
28 les gusta Britney Spears.
11 les gusta Tim y Céline.
15 les gusta Tim y Britney.
14 les gusta Céline y Britney.
5 les gustan por igual los tres.
7 no les gusta ninguno de estos artistas.





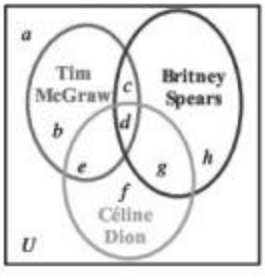


FIGURA 18

Para conocer el número total de estudiantes encuestados, no basta con sumar las ocho cifras anteriores, ya que algunas respuestas están traslapadas. Por ejemplo, en la figura 18, los 33 estudiantes a quienes les gusta Tim McGraw no deben ser colocados dentro de la región b, pero sí deben ser distribuidos entre las regiones b, c, d y e, de tal forma que sea consistente con la información proporcionada. (De hecho, la región b contiene a los estudiantes a quienes les gusta Tim, pero no les gusta Céline y tampoco les gusta Britney.)

Como en un principio no sabemos cómo distribuir a los 33 estudiantes a quienes les gusta Tim, buscamos primero información más fácil de manejar. El número más pequeño en la lista, los 5 estudiantes a quienes les gustan los tres cantantes, pueden ser colocados dentro de la región d (la intersección de los tres conjuntos). Los 7 a quienes no les gusta ninguno de los tres deben ir dentro de la región a. Por lo tanto, los 11 a quienes les gustan Tim y Céline deben ir en las regiones d y e. Como la región d ya contiene 5 estudiantes, debemos colocar $11 - 5 = 6$ estudiantes dentro de la región e. Como hay 15 estudiantes a quienes les gustan Tim y Britney (regiones c y d), colocamos $15 - 5 = 10$ en la región c. Ahora que las regiones c, d y e contienen 10, 5 y 6 estudiantes, respectivamente, la región b recibe $33 - 10 - 5 - 6 = 12$. Mediante razonamientos similares, a cada región se le asignan de forma correcta los números correspondientes, como se muestra en la figura 19.

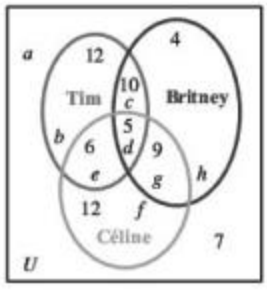


FIGURA 19

EJEMPLO 1 Utilizando la encuesta sobre las preferencias de los estudiantes por los músicos, como se resume en la figura 19, conteste las siguientes preguntas.

(a) ¿A cuántos estudiantes les gusta únicamente Britney Spears?

Un estudiante a quien sólo le gusta Britney, no le gusta Tim ni Céline. Este tipo de estudiante se encuentra en la región para Britney y fuera de las regiones para Tim y Céline. En la figura 19, la región que cumple estos requisitos es la h, donde observamos que a cuatro estudiantes les gusta únicamente Britney.

(b) ¿A cuántos estudiantes les gustan dos de estos artistas?

A los estudiantes de las regiones c, e y g les gustan exactamente dos cantantes. El número total de dichos estudiantes es $10 + 6 + 9 = 25$.

(c) ¿Cuántos estudiantes fueron encuestados?
Puesto que cada estudiante de la encuesta fue colocado en exactamente una región de la figura 19, el número total de estudiantes encuestados es la suma de los números de las ocho regiones:

$$7 + 12 + 10 + 5 + 6 + 12 + 9 + 4 = 65.$$ ■

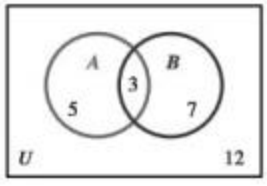


FIGURA 20

Si los números mostrados en la figura 20 son los números cardinales de las regiones individuales, entonces $n(A) = 5 + 3 = 8$, $n(B) = 3 + 7 = 10$, $n(A \cap B) = 3$ y $n(A \cup B) = 5 + 3 + 7 = 15$. Observe que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, ya que $15 = 8 + 10 - 3$. Esta relación es cierta para cualquiera de los conjuntos A y B.

Fórmula para los números cardinales

Para dos conjuntos cualesquiera A y B,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Esta fórmula puede reordenarse para encontrar cualquiera de sus cuatro componentes, siempre y cuando los otros tres sean conocidos.

EJEMPLO 2 Encuentre $n(A)$ si $n(A \cup B) = 22$, $n(A \cap B) = 8$ y $n(B) = 12$.
Dado que la fórmula anterior puede reordenarse como

$$n(A) = n(A \cup B) - n(B) + n(A \cap B),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} n(A) &= 22 - 12 + 8 \\ &= 18. \end{aligned}$$ ■

En ocasiones, aunque la información se presente como en el ejemplo 2, es más conveniente colocarla dentro de un diagrama de Venn, como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 3 Robert Hurst es un jefe de sección de una empresa de servicios eléctricos. Los empleados de su sección se encargan de podar los árboles cuando crecen demasiado, escalar postes y unir cables. Recientemente, Hurst presentó el siguiente reporte a la gerencia de la empresa:

Mi sección incluye a 100 empleados, con

$T =$ el conjunto de empleados que pueden podar árboles muy altos,

$P =$ el conjunto de empleados que pueden escalar postes,

$W =$ el conjunto de empleados que pueden unir cables.

$$\begin{aligned} n(T) &= 45 & n(P \cap W) &= 20 \\ n(P) &= 50 & n(T \cap W) &= 25 \\ n(W) &= 57 & n(T \cap P \cap W) &= 11 \\ n(T \cap P) &= 28 & n(T' \cap P' \cap W') &= 9 \end{aligned}$$

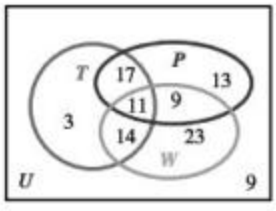


FIGURA 21

La información proporcionada por Hurst se encuentra representada por la figura 21. La suma de los números en el diagrama brinda el número total de los empleados de la sección:

$$9 + 3 + 14 + 23 + 11 + 9 + 17 + 13 = 99.$$

Hurst aseguró tener 100 empleados, pero su información indica sólo 99. La gerencia decidió que a causa de este error, Hurst no satisfacía los requisitos como jefe de sección. Así, fue reasignado como jefe nocturno de información en el Polo Norte. (La moraleja es: debió haber tomado este curso.) ■

A veces, la información aparece en una tabla en vez de un diagrama de Venn, pero las ideas básicas de unión e intersección se aplican de la misma forma.

EJEMPLO 4 La oficial encargada de la cafetería de una base militar de Carolina del Norte quería saber si la bebida que los reclutas, hombres y mujeres, preferían para el almuerzo dependía de su edad. Así que un día realizó una clasificación del almuerzo de acuerdo con la edad y con la preferencia por la bebida, recopilando los números resultantes en una tabla, como sigue.

		Bebida			
		Cola (*C*)	**Té helado (*I*)**	**Té dulce (*S*)**	**Totales**
Edad	**18-25 (*Y*)**	45	10	35	90
	26-33 (*M*)	20	25	30	75
	Más de 33 (*O*)	5	30	20	55
	Totales	70	65	85	220

Utilizando las letras de la tabla, encuentre el número de personas en cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $Y \cap C$

El conjunto Y contiene a todo el personal del primer renglón de la tabla (90 en total), mientras que C contiene a los 70 de la primera columna. La intersección de estos dos conjuntos es sólo la entrada superior izquierda: 45 personas.

(b) $O' \cup I$

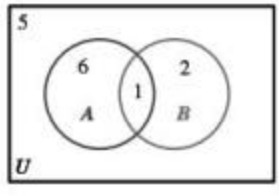
El conjunto O' excluye el renglón inferior, por lo tanto, incluye al primero y segundo renglones. El conjunto I incluye sólo a la columna de en medio. La unión de los dos conjuntos representa

$$45 + 10 + 35 + 20 + 25 + 30 + 30 = 195 \text{ personas.}$$ ■

2.4 EJERCICIOS

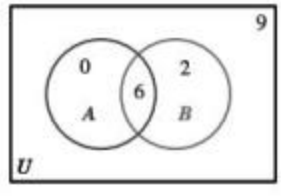
Utilice los números que representen números cardinales en los diagramas de Venn para proporcionar el número cardinal de cada conjunto dado.

1.



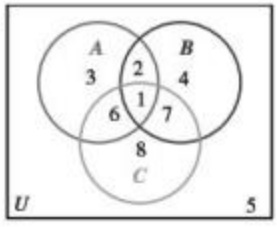
(a) $A \cap B$ **(b)** $A \cup B$ **(c)** $A \cap B'$
(d) $A' \cap B$ **(e)** $A' \cap B'$

2.



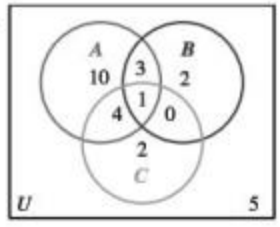
(a) $A \cap B$ **(b)** $A \cup B$ **(c)** $A \cap B'$
(d) $A' \cap B$ **(e)** $A' \cap B'$

3.



(a) $A \cap B \cap C$ **(b)** $A \cap B \cap C'$
(c) $A \cap B' \cap C$ **(d)** $A' \cap B \cap C$
(e) $A' \cap B' \cap C$ **(f)** $A \cap B' \cap C'$
(g) $A' \cap B \cap C'$ **(h)** $A' \cap B' \cap C'$

4.



(a) $A \cap B \cap C$ **(b)** $A \cap B \cap C'$
(c) $A \cap B' \cap C$ **(d)** $A' \cap B \cap C$
(e) $A' \cap B' \cap C$ **(f)** $A \cap B' \cap C'$
(g) $A' \cap B \cap C'$ **(h)** $A' \cap B' \cap C'$

En los ejercicios del 5 al 8, utilice la fórmula adecuada.

5. Evalúe $n(A \cup B)$ si $n(A) = 8$, $n(B) = 14$ y $n(A \cap B) = 5$.

6. Evalúe $n(A \cap B)$ si $n(A) = 15$, $n(B) = 12$ y $n(A \cup B) = 25$.

7. Evalúe $n(A)$ si $n(B) = 20$, $n(A \cap B) = 6$ y $n(A \cup B) = 30$.

8. Evalúe $n(B)$ si $n(A) = 35$, $n(A \cap B) = 15$ y $n(A \cup B) = 55$.

Como preparación para los problemas de encuestas que se plantean más adelante en este conjunto de ejercicios, dibuje el diagrama de Venn adecuado y use la información proporcionada para colocar el número de elementos de cada región.

9. $n(U) = 43$, $n(A) = 25$, $n(A \cap B) = 5$, $n(B') = 30$

10. $n(A) = 19$, $n(B) = 13$, $n(A \cup B) = 25$, $n(A') = 11$

11. $n(A \cup B) = 15$, $n(A \cap B) = 8$, $n(A) = 13$, $n(A' \cup B') = 11$

12. $n(A') = 25$, $n(B) = 28$, $n(A' \cup B') = 40$, $n(A \cap B) = 10$

13. $n(A) = 24$, $n(B) = 24$, $n(C) = 26$, $n(A \cap B) = 10$, $n(B \cap C) = 8$, $n(A \cap C) = 15$, $n(A \cap B \cap C) = 6$, $n(U) = 50$

14. $n(A) = 57$, $n(A \cap B) = 35$, $n(A \cup B) = 81$, $n(A \cap B \cap C) = 15$, $n(A \cap C) = 21$, $n(B \cap C) = 25$, $n(C) = 49$, $n(B') = 52$

15. $n(A \cap B) = 21$, $n(A \cap B \cap C) = 6$, $n(A \cap C) = 26$, $n(B \cap C) = 7$, $n(A \cap C') = 20$, $n(B \cap C') = 25$, $n(C) = 40$, $n(A' \cap B' \cap C') = 2$

16. $n(A) = 15$, $n(A \cap B \cap C) = 5$, $n(A \cap C) = 13$, $n(A \cap B') = 9$, $n(B \cap C) = 8$, $n(A' \cap B' \cap C') = 21$, $n(B \cap C') = 3$, $n(B \cup C) = 32$

Utilice los diagramas de Venn para responder lo siguiente.

17. ***Colección de discos compactos*** Paula Story es fanática de la música de Paul Simon y Art Garfunkel. En su colección de 22 discos compactos, tiene los siguientes:

5 en los cuales cantan ambos, Simon y Garfunkel
8 en los que canta Simon,
7 en los que canta Garfunkel,
12 en los que no canta ninguno de ellos.



(a) ¿En cuántos de sus discos compactos sólo canta Paul Simon?
(b) ¿En cuántos de sus discos compactos sólo canta Art Garfunkel?
(c) ¿En cuántos canta al menos uno de estos artistas?

18. ***Componer y producir música*** Kent LaVoie escribe y produce álbumes para diversos músicos. El año pasado trabajó en 10 de tales proyectos.

Él escribió y produjo 2 proyectos.
Escribió un total de 5 proyectos
Produjo un total de 7 proyectos.

(a) ¿Cuántos proyectos escribió, pero no produjo?
(b) ¿Cuántos proyectos produjo, pero no escribió?

19. ***Ayuda financiera a estudiantes*** En la Universidad de Luisiana, la mitad de los 48 estudiantes con especialidad en matemáticas recibieron ayuda financiera del gobierno. De éstos,

5 disfrutaban la beca Pell
14 participaron en el Programa de Estudio-Trabajo de la universidad
4 tuvieron becas TOPS
2 tuvieron becas TOPS y participaron en el programa de Estudio-Trabajo.

Aquellos con beca Pell no contaron con ninguna otra ayuda gubernamental.

¿Cuántos de los estudiantes de matemáticas
(a) no tuvieron ayuda gubernamental?
(b) tuvieron más de una de estas tres ayudas?
(c) tuvieron ayuda gubernamental distinta de estas tres?
(d) tuvieron una beca TOPS o de Estudio-Trabajo?

20. ***Respuestas de los espectadores a las películas*** Julianne Peterson, una psicóloga del deporte, planeaba realizar un estudio sobre las respuestas de los espectadores a ciertos aspectos de las películas de béisbol *The Natural, Field of Dreams* y *The Rookie*. Después de encuestar a un grupo de 55 estudiantes, obtuvo la siguiente información:

17 vieron *The Natural*
17 vieron *Field of Dreams*
23 vieron *The Rookie*
6 vieron *The Natural* y *Field of Dreams*
8 vieron *The Natural* y *The Rookie*
10 vieron *Field of Dreams* y *The Rookie*
2 vieron las tres películas.

¿Cuántos estudiantes vieron
(a) exactamente dos de estas películas?
(b) exactamente una de estas películas?
(c) ninguna de estas películas?
(d) *The Natural*, pero ninguna de las otras?

21. ***Cata de vino*** La siguiente lista muestra las preferencias de 102 personas que asistieron a una reunión para catar vinos:

99 prefieren Spañada
96 prefieren Ripple
99 prefieren vino de manzana Boone's
95 prefieren Spañada y Ripple
94 prefieren Ripple y Boone's
96 prefieren Spañada y Boone's
93 prefieren los tres vinos.

¿A cuántas personas les gusta
(a) ninguno de los tres?
(b) Spañada, pero no Ripple?
(c) cualquiera excepto el vino de manzana Boone's?
(d) sólo el Ripple?
(e) exactamente dos tipos de vino?

22. ***Hábitos culinarios*** Robert Hurst (vea el ejemplo 3 del texto) fue reasignado otra vez, en esta ocasión al departamento de mantenimiento de la misma empresa de servicios eléctricos. Entrevistó a 140 personas en un centro comercial de un suburbio con el fin de averiguar algunas de sus costumbres para cocinar, y obtuvo los siguientes resultados. Hay una plaza disponible en Siberia. ¿Deberá ser reasignado una vez más?

58 utilizan horno de microondas
63 utilizan hornillas eléctricas
58 utilizan gas
19 utilizan horno de microondas y hornillas eléctricas
17 utilizan horno de microondas y gas
4 utilizan tanto gas como hornillas eléctricas
1 utiliza los tres
2 cocinan sólo con energía solar.

23. ***Temas de canciones*** Alguna vez se dijo que la música country enfatiza tres temas básicos: amor, prisión y camiones. Una encuesta de una estación local de música country arrojó la siguiente información:

12 canciones acerca de un conductor de camiones que está enamorado en prisión
13 canciones acerca de un prisionero enamorado
28 canciones acerca de una persona enamorada
18 canciones acerca de un conductor de camiones enamorado
3 canciones acerca de un conductor de camiones en prisión, quien no está enamorado
2 canciones acerca de personas que están en prisión, que no están enamoradas y no son conductores de camiones
8 canciones acerca de gente que se encuentra fuera de prisión, que no está enamorada y no maneja camiones
16 canciones acerca de conductores de camiones que no están en prisión.

(a) ¿Cuántas canciones fueron incluidas en la encuesta?

Encuentre el número de canciones acerca de:

(b) conductores de camiones
(c) prisioneros
(d) conductores de camiones en prisión
(e) personas que no están en prisión
(f) personas que no están enamoradas.



24. *Aves en una granja* La anciana MacDonald examinó sus aves de corral y obtuvo los siguientes resultados. Ella tiene:

9 gallos gordos de color rojizo	18 gallos flacos de color café
2 gallinas gordas de color rojizo	6 gallos flacos de color rojizo
26 gallos gordos	5 gallinas flacas de color rojizo
37 pollos gordos	7 gallinas flacas de color café

Conteste las siguientes preguntas acerca de estas aves. [*Una pista:* Necesita un diagrama de Venn con círculos para los animales gordos, para los que son machos (el gallo es macho y la gallina hembra) y para los de color rojizo (suponga que el rojizo y el café son opuestos en el mundo de los pollos. Además, "pollo" es genérico, es decir incluye gallos y gallinas.] ¿Cuántos pollos son

(a) gordos? **(b)** rojizos?
(c) machos? **(d)** gordos, pero no machos?
(e) cafés, pero no gordos? **(f)** rojizos y gordos?

25. *Objetivos de los estudiantes* Julie Ward, quien vende libros de texto universitarios, realizó una encuesta en un campus de la costa oeste para averiguar los principales objetivos que tienen los estudiantes en la actualidad.

Sea W = el conjunto de aquellos que quieren volverse ricos,
F = el conjunto de aquellos que quieren formar una familia,
E = el conjunto de aquellos que quieren convertirse en expertos en sus áreas.

Los hallazgos de Julie se resumen a continuación:

$n(W) = 160$ $n(E \cap F) = 90$
$n(F) = 140$ $n(W \cap F \cap E) = 80$
$n(E) = 130$ $n(E') = 95$
$n(W \cap F) = 95$ $n[(W \cup F \cup E)'] = 10$.

Encuentre el número total de estudiantes entrevistados.

26. *Síntomas en pacientes en un hospital* Samantha Walker realizó una encuesta con 75 pacientes admitidos en la unidad de cardiología del hospital de Honolulu durante un periodo de dos semanas.

Sea B = el conjunto de pacientes con presión arterial alta,
C = el conjunto de pacientes con nivel de colesterol alto,
F = el conjunto de pacientes que fuman cigarrillos.

La información de Samantha es la siguiente:

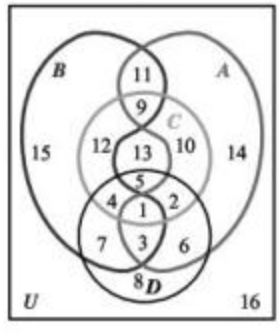
$n(B) = 47$ $n(B \cap S) = 33$
$n(C) = 46$ $n(B \cap C) = 31$
$n(S) = 52$ $n(B \cap C \cap S) = 21$
$n[(B \cap C) \cup (B \cap S) \cup (C \cap S)] = 51$.

Encuentre el número de pacientes que

(a) tenían presión alta o colesterol alto, pero no ambos.
(b) tenían menos de dos de las condiciones indicadas en la lista.
(c) eran fumadores, pero no tenían presión alta ni colesterol alto.
(d) no presentaron exactamente dos de las condiciones de la lista.

27. La figura que aparece a continuación muestra a U dividido en 16 regiones por 4 conjuntos, A, B, C y D. Encuentre el número de regiones que pertenecen a cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A \cap B \cap C \cap D$
(b) $A \cup B \cup C \cup D$
(c) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$
(d) $(A' \cap B') \cap (C \cup D)$



28. *Hábitos de los televidentes de deportes* Una encuesta de 130 televidentes reveló la información siguiente:

52 ven fútbol	21 ven tenis y golf
56 ven baloncesto	3 ven fútbol, baloncesto y tenis
62 ven tenis	15 ven fútbol, baloncesto y golf
60 ven golf	10 ven fútbol, tenis y golf
21 ven fútbol y baloncesto	10 ven baloncesto, tenis y golf
19 ven fútbol y tenis	3 ven los cuatro deportes
22 ven baloncesto y tenis	5 no ven ninguno de estos deportes.
27 ven fútbol y golf	
30 ven baloncesto y golf	

Utilice un diagrama como el del ejercicio 27 para contestar las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuántos de estos televidentes ven fútbol, baloncesto y tenis, pero no golf?
(b) ¿Cuántos de estos televidentes ven exactamente uno de los cuatro deportes?
(c) ¿Cuántos de estos televidentes ven exactamente dos de los cuatro deportes?

Resuelva cada problema.

29. *Viviendas del ejército* Un estudio sobre las preferencias por el tipo de vivienda del Ejército de Estados Unidos clasificó al personal como oficiales comisionados (C), oficiales autorizados (W) o reclutas (E), y su tipo de vivienda quedó clasificado como: en base (B), rentado fuera de la base (R) o fuera de la base en casa propia (O). La encuesta realizada arrojó la siguiente información.

		Vivienda			
		B	***R***	***O***	**Totales**
Personal	***C***	12	29	54	95
	W	4	5	6	15
	E	374	71	285	730
Totales		390	105	345	840

Determine el número del personal en cada uno de los conjuntos siguientes.

(a) $W \cap O$ **(b)** $C \cup B$
(c) $R' \cup W'$ **(d)** $(C \cup W) \cap (B \cup R)$
(e) $(C \cap B) \cup (E \cap O)$ **(f)** $B \cap (W \cup R)'$

30. *Posiciones en baloncesto* Dwaine Tomlinson dirige un programa de baloncesto en California. El primer día de la temporada se presentaron 60 mujeres jóvenes y fueron clasificadas por edad y por la posición en la que prefieren jugar, como muestra la siguiente tabla.

		Posición			
	Nivel	**Guardia (*G*)**	**Delantero (*D*)**	**Centro (*C*)**	**Totales**
Edad	**Primero de bachillerato (*J*)**	9	6	4	19
	Final bachillerato (*S*)	12	5	9	26
	Universidad (*C*)	5	8	2	15
	Totales	26	19	15	60

Utilizando el conjunto de etiquetas (letras) en la tabla, encuentre el número de jugadoras en cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $J \cap G$ **(b)** $S \cap N$ **(c)** $N \cup (S \cap F)$
(d) $S' \cap (G \cup N)$ **(e)** $(S \cap N') \cup (C \cap G')$
(f) $N' \cap (S' \cap C')$



31. ¿La información presentada en el ejemplo 4 podría representarse mediante un diagrama de Venn parecido al de los ejemplos 1 y 3? Si es así, dibuje dicho diagrama. De lo contrario, explique la diferencia esencial del ejemplo 4.

32. Explique cómo puede deducirse una fórmula para obtener el número cardinal en el caso de *tres* conjuntos. Específicamente, dé una fórmula que relacione $n(A \cup B \cup C)$ con $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$ y $n(A \cap B \cap C)$. Ilustre el ejercicio con un diagrama de Venn.

2.5 Conjuntos infinitos y sus números cardinales

Como se mencionó al principio de este capítulo, la mayor parte de los primeros trabajos en teoría de conjuntos son obra de Georg Cantor. Este matemático dedicó gran parte de su vida al estudio de los números cardinales de los conjuntos. Recuerde que el *número cardinal*, o *cardinalidad*, de un conjunto finito es el número de elementos que contiene. Por ejemplo, el conjunto $\{5, 9, 15\}$ contiene 3 elementos y tiene un número cardinal de 3. El número cardinal del $\emptyset$ es 0.

Cantor demostró muchos resultados acerca de los números cardinales de conjuntos infinitos. Las demostraciones de Cantor son muy diferentes del tipo de demostraciones que uno podría ver en un curso de álgebra o geometría. Debido a lo novedoso de los métodos de Cantor, no fueron aceptados rápidamente por los matemáticos de su época (de



Paradoja Esta palabra, procedente del griego, significaba en ese idioma "opinión equivocada", en contraposición con ortodoxia, que significaba "opinión correcta". Con los años, la palabra vino a significar contradicción consigo mismo. Un ejemplo es la proposición: "Esta frase es falsa". Suponiendo que sea verdadera, el resultado es contradicción; del mismo modo, suponiendo que sea falsa, el resultado es una contradicción. Por lo tanto, es una paradoja.

Antes del siglo XX, se consideraba una paradoja al hecho de que cualquier conjunto pudiera ser colocado en correspondencia de uno a uno con un subconjunto propio de él mismo. Esta paradoja, llamada paradoja de Galileo, en honor del matemático y científico del siglo XVII (vea la imagen), se explica ahora mediante el argumento de que la capacidad para construir tales correspondencias es lo que distingue a los conjuntos infinitos de los finitos. Lo que es verdadero para los conjuntos finitos no necesariamente lo es para los conjuntos infinitos.

hecho, algunos otros aspectos de la teoría de Cantor conducen a paradojas.) Sin embargo, los resultados que analizaremos aquí son comúnmente aceptados en la actualidad.

La idea del número cardinal de un conjunto infinito depende de la idea de correspondencia de uno a uno. Por ejemplo, cada uno de los conjuntos $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{9, 10, 11, 12\}$ contiene cuatro elementos. Los elementos correspondientes de los dos conjuntos pueden ponerse por pares de la manera siguiente (entre muchas otras formas):

$$\begin{array}{cccc} \{1, & 2, & 3, & 4\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{9, & 10, & 11, & 12\}. \end{array}$$

Esta paridad es una **correspondencia de uno a uno** entre los dos conjuntos. "Uno a uno" se refiere al hecho de que cada elemento del primer conjunto es apareado con exactamente un elemento del segundo conjunto, y cada elemento del segundo conjunto es apareado con exactamente un elemento del primer conjunto.

Cuando dos conjuntos A y B pueden ponerse en una correspondencia uno a uno se dice que son **equivalentes**. Simbólicamente, esto se escribe $A \sim B$. ¿Advierte usted que los dos conjuntos mostrados son equivalentes, pero no iguales?

La correspondencia siguiente entre los conjuntos $\{1, 8, 12\}$ y $\{6, 11\}$,

$$\begin{array}{ccc} \{1, & 8, & 12\} \\ \updownarrow & \nwarrow\!\!\searrow & \\ \{6, & 11\}, & \end{array}$$

no es uno a uno, ya que los dos elementos, 8 y 12, del primer conjunto tienen como pareja al elemento 11 del segundo conjunto. Estos conjuntos no son equivalentes.

Parece razonable decir que si dos conjuntos no vacíos tienen el mismo número cardinal, entonces puede establecerse una correspondencia de uno a uno entre dichos conjuntos. También, si se puede establecer una correspondencia de uno a uno entre dos conjuntos, entonces los dos conjuntos tienen el mismo número cardinal. Estos dos hechos son fundamentales en el estudio de los números cardinales de conjuntos infinitos.

El conjunto básico utilizando en el estudio de conjuntos infinitos es el conjunto de los números naturales, $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Se dice que el conjunto de los números naturales tiene el número cardinal infinito $\aleph_0$ (la primera letra hebrea, álef, con un cero como subíndice, se lee "álef cero"). Piense en $\aleph_0$ como el número cardinal infinito "más pequeño". A la pregunta: "¿Cuántos números naturales hay?", la respuesta es: "Hay $\aleph_0$ de ellos".

Del estudio anterior, cualquier conjunto que pueda ser puesto en una correspondencia de uno a uno con los números naturales tendrá el mismo número cardinal que el conjunto de números naturales, o $\aleph_0$. Resulta que muchos conjuntos de números tienen el número cardinal $\aleph_0$.

EJEMPLO 1 Muestre que el conjunto de números enteros $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tiene el número cardinal $\aleph_0$.

Aunque este problema se enuncia con facilidad, no es tan fácil resolverlo. Todo lo que realmente sabemos acerca de $\aleph_0$ es que, por definición, es el número cardinal del conjunto de números naturales. Para demostrar que otro conjunto, tal como el conjunto de los números enteros, también tiene a $\aleph_0$ como su número cardinal, al parecer debemos mostrar que dicho conjunto es equivalente al conjunto de los números naturales. Y la equivalencia se establece por medio de una correspondencia de uno a uno entre los dos conjuntos. Esta sucesión de razonamientos, que implican sólo unas cuantas ideas básicas, nos conduce a un plan: exhibir una correspondencia entre los números naturales y los números enteros. Nuestra estrategia será esbozar tal



La ciencia de los números del álef-bet Álef y otras letras del alfabeto hebreo aparecen en un diagrama cabalístico que representa una de las 10 emanaciones de Dios durante la creación. La cábala, tradición ultra mística dentro del judaísmo, surgió en el siglo V y alcanzó su punto máximo en el siglo XVI, en Palestina y Polonia.

Los cabalistas creían que la Biblia contenía misterios que podían develarse por medio de permutaciones, combinaciones y anagramas de sus diferentes letras. También "leían" el valor numérico de las letras de una palabra por medio de la técnica llamada Gematria (¿tal vez derivada de geometría?). Esto era posible porque cada letra en el álef-bet tiene un valor numérico (álef = 1), y por tanto constituye un sistema de numeración. La letra Y corresponde al 10, de modo que 15 deber ser YH (10 + 5). Sin embargo, como YH es una de las formas en que se representa el nombre de Dios, en su lugar se usa el símbolo TW (9 + 6).

correspondencia, con lo que demostraremos cómo cada número natural tiene como pareja exactamente un único entero. En la correspondencia

$$\begin{array}{lll} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, & n, & \ldots\} \quad \text{Números naturales} \\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow & \updownarrow & \\ \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, & n-1, & \ldots\} \quad \text{Números enteros} \end{array}$$

la paridad del número natural n con el número entero $n - 1$ continúa de manera indefinida, y ninguno de los dos conjuntos contiene algún elemento que no se utilice al realizar este proceso de correspondencia. Así, aunque el conjunto de los números enteros contiene un elemento más que el conjunto de los números naturales (el número 0), y por tanto debería tener el número cardinal $\aleph_0 + 1$, la correspondencia anterior demuestra que ambos conjuntos tienen el mismo número cardinal. Esto es,

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0. \quad \blacksquare$$

Este resultado demuestra que la intuición es mala consejera para lidiar con conjuntos infinitos. Intuitivamente, resulta "obvio" que hay más números enteros que números naturales. Sin embargo, como ambos conjuntos pueden colocarse en una perfecta correspondencia de uno a uno, los dos tienen el mismo número cardinal.

El conjunto {5, 6, 7} es un subconjunto propio del conjunto {5, 6, 7, 8}, y no hay forma de colocar estos dos conjuntos en una correspondencia de uno a uno. Por otra parte, el conjunto de los números naturales es un subconjunto propio del conjunto de los números enteros, y el ejemplo 1 mostró que estos dos conjuntos *pueden* ponerse en una correspondencia de uno a uno. La única manera de que un subconjunto propio de un conjunto sea puesto en una correspondencia de uno a uno con el conjunto mismo es que ambos conjuntos sean infinitos. De hecho, esta notable propiedad es utilizada como la definición de un conjunto infinito.

Conjunto infinito

Un conjunto es **infinito** si puede ponerse en una correspondencia de uno a uno con un subconjunto propio de él mismo.

EJEMPLO 2 Demuestre que el conjunto de enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tiene el número cardinal $\aleph_0$.

Se puede establecer una correspondencia de uno a uno entre el conjunto de números enteros y el conjunto de números naturales, como sigue:

$$\begin{array}{llllllllll} \{1, 2, & 3, 4, & 5, 6, & 7, \ldots, & 2n, & 2n+1, & \ldots\} \\ \updownarrow\ \updownarrow & \updownarrow\ \updownarrow & \updownarrow\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \{0, 1, & -1, 2, & -2, 3, & -3, \ldots, & n, & -n, & \ldots\}. \end{array}$$

Debido a esta correspondencia de uno a uno, el número cardinal del conjunto de enteros es el mismo que el del conjunto de números naturales, es decir, $\aleph_0$. $\blacksquare$

Si los elementos de un conjunto pueden colocarse en un orden específico, tal como el conjunto de los enteros del ejemplo 2, ese conjunto tiene número cardinal $\aleph_0$.

Observe que la correspondencia de uno a uno del ejemplo 2 también demuestra que el conjunto de enteros es infinito. El conjunto de enteros se colocó en una correspondencia de uno a uno con un subconjunto propio del él mismo.

Como se mostró en el ejemplo 2, hay tantos enteros como números naturales. Este resultado no es en absoluto intuitivo. Sin embargo, el resultado que viene a continuación es aún menos intuitivo. Sabemos que hay un número infinito de fracciones, $\{1/2, 3/4, 7/8, 15/16, 31/32, ...\}$, entre los enteros 0 y 1. Esto significaría que hay "más" fracciones que números naturales. Sin embargo, resulta que hay justamente tantas fracciones como números naturales existen, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Demuestre que el número cardinal del conjunto de los números racionales es $\aleph_0$.

Para demostrar que el número cardinal del conjunto de los números racionales es $\aleph_0$, primero hay que demostrar que puede establecerse una correspondencia de uno a uno entre el conjunto de los números racionales no negativos y el de los números naturales. Esto se logra mediante el ingenioso diagrama siguiente, ideado por Georg Cantor (vea la figura 22). Los números racionales no negativos cuyo denominador es 1 se colocan en el primer renglón; aquellos con denominador 2 van en el segundo renglón, y así sucesivamente. Tarde o temprano, todo número racional no negativo aparece en la lista. Por ejemplo, 327/189 está en la columna 327 del renglón 189.

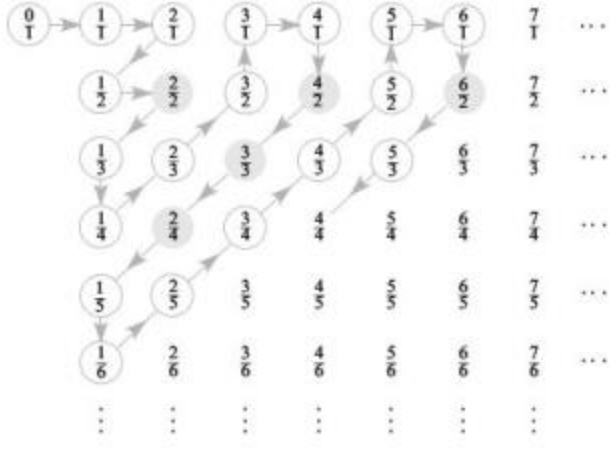


FIGURA 22

Para establecer una correspondencia de uno a uno entre el conjunto de los racionales no negativos y el conjunto de los números naturales, seguimos la ruta trazada en la figura 22. Si 0/1 corresponde a 1, entonces 1/1 corresponde a 2, 2/1 a 3, 1/2 a 4 (nos saltamos el 2/2, ya que 2/2 = 1/1), 1/3 a 5, 1/4 a 6, y así sucesivamente. Los números que aparecen sombreados se omiten puesto que pueden reducirse a términos menores, y ya fueron incluidos anteriormente en la lista.

Este procedimiento establece una correspondencia de uno a uno entre el conjunto de racionales no negativos y los números naturales, lo cual demuestra que ambos conjuntos tienen el mismo número cardinal, $\aleph_0$. Ahora, utilizado el método del ejemplo 2, esto es, haciendo que a cada número negativo le siga su correspondiente número positivo, podemos extender el proceso para incluir también a los números racionales negativos. Por tanto, el conjunto de todos los números racionales tiene el número cardinal $\aleph_0$. ■



La paradoja del barbero
Ésta es la versión de una paradoja de la teoría de conjuntos que Bertrand Russell propuso a principios del siglo XX.

1. Los hombres de cierto pueblo caen dentro de una de estas dos clases: los que no se afeitan ellos mismos y los que sí se afeitan ellos mismos.
2. El barbero del pueblo afeita a todos los hombres que no se afeitan ellos mismos y sólo afeita a esos hombres.

Pero, ¿quién afeita al barbero? El barbero no puede afeitarse a sí mismo. Si así lo hiciera, caería en la categoría de los hombres que se afeitan a ellos mismos. Sin embargo, la proposición (2) anterior establece que él no afeita a tales hombres.

Así que el barbero no se afeita él mismo. Pero entonces cae en la categoría de los hombres que no se afeitan ellos mismos. De acuerdo con (2), el barbero afeita a todos estos hombres; por lo tanto, también el barbero se afeita a sí mismo.

Encontramos así que el barbero no puede afeitarse él mismo, aunque sí se afeita él mismo... una paradoja.

Un conjunto se denomina **contable** o **numerable** si es finito, o si tiene número cardinal $\aleph_0$. Todos los conjuntos infinitos analizados hasta el momento (los números naturales, los enteros no negativos, los enteros y los números racionales) son numerables. Pareciera que *todo* conjunto es numerable, pero esto no es verdadero. El ejemplo siguiente muestra que el conjunto de los números reales es no numerable.

EJEMPLO 4 Demuestre que el conjunto de todos los números reales no tiene número cardinal $\aleph_0$.

Hay dos posibilidades:

1. Que el conjunto de números reales tenga número cardinal $\aleph_0$.
2. Que el conjunto de números reales no tenga número cardinal $\aleph_0$.

Por el momento, suponga que el primer enunciado es verdadero. De ser así, entonces puede establecerse una correspondencia de uno a uno entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los números naturales. No sabemos en qué forma puede realizarse esa correspondencia, pero supongamos que puede hacerse.

En un capítulo posterior demostraremos que todo número real puede escribirse como un número decimal (o simplemente "decimal"). Así, en la correspondencia de uno a uno que estamos suponiendo, al número natural 1 le corresponde algún decimal, al 2 le corresponde algún otro decimal, y así sucesivamente. Suponga que la correspondencia es como sigue:

$$1 \leftrightarrow .68458429006\ldots$$
$$2 \leftrightarrow .13479201038\ldots$$
$$3 \leftrightarrow .37291568341\ldots$$
$$4 \leftrightarrow .935223671611\ldots$$

y así sucesivamente.

Suponer que existe una correspondencia de uno a uno entre los números naturales y los números reales significa que todo decimal debería estar en la lista anterior. Formemos un nuevo decimal, K, como sigue. El primer decimal de la lista anterior tiene 6 como primer dígito; hagamos que K inicie como $K = .4\ldots$. Elegimos el 4 porque $4 \neq 6$; podríamos haber utilizado cualquier otro dígito, excepto 6. Como el segundo dígito del segundo decimal de la lista es 3, hacemos que $K = .45\ldots$ (ya que $5 \neq 3$). El tercer dígito del tercer decimal es 2, así que $K = .457\ldots$ (ya que $7 \neq 2$). El cuarto dígito del cuarto decimal es 2, de modo que $K = .4573\ldots$ (pues $3 \neq 2$). Continuamos dando forma a K de esta manera.

¿Está K dentro de la lista que suponíamos contenía a todos los decimales? El primer decimal de la lista difiere de K por lo menos en la primera posición (K inicia con 4, y el primer decimal de la lista inicia con 6). El segundo decimal de la lista difiere de K en al menos la segunda posición, y el n-ésimo decimal de la lista difiere de K en al menos la n-ésima posición. Todo decimal de la lista difiere de K en al menos una posición, de modo que no es posible que K esté en la lista. En resumen:

Suponemos que todo decimal aparece en la lista anterior.
El decimal K no está en la lista.

Como estas proposiciones no pueden ser verdaderas simultáneamente, la suposición original ha conducido a una contradicción. Esto nos obliga a aceptar la única alternativa posible a la suposición original: es imposible establecer una correspondencia de uno a uno entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los números naturales; el número cardinal del conjunto de los números reales no es igual a $\aleph_0$. ■

El conjunto de los números naturales es un subconjunto propio del conjunto de los números reales. Debido a esto, parecería razonable afirmar que el número cardinal del conjunto de los números reales, comúnmente designado por c, es mayor que $\aleph_0$. (La letra c es por *continuo*.) Pueden construirse otros números cardinales infinitos, incluso más grandes. Por ejemplo, el conjunto que engloba a todos los subconjuntos del conjunto de los números reales tiene un número cardinal mayor que c. Si continuamos con este proceso de encontrar los números cardinales de los conjuntos de subconjuntos, se producen números cardinales infinitos cada vez más grandes.

Los seis conjuntos infinitos más importantes de números se presentaron ya en una sección anterior. Todos ellos han sido tratados en esta sección, excepto los números irracionales. Los números irracionales pueden representarse con decimales, de modo que están incluidos entre los números reales. Puesto que los irracionales son un subconjunto de los reales, podríamos pensar que los irracionales tienen el número cardinal $\aleph_0$, al igual que los racionales. Sin embargo, como la unión de los racionales con los irracionales forma el conjunto de los reales, ello implicaría que $\aleph_0 + \aleph_0 = c$. Pero en el ejemplo 2 demostramos que éste no es el caso. Por tanto, una mejor suposición es que el número cardinal de los números irracionales es c (el mismo que el de los reales). De hecho, ésta es la verdad. Los principales conjuntos infinitos de números, con sus números cardinales, aparecen resumidos a continuación.

Números cardinales de conjuntos infinitos de números

Conjunto infinito	Número cardinal
Números naturales o de conteo	$\aleph_0$
Enteros no negativos	$\aleph_0$
Enteros	$\aleph_0$
Números racionales	$\aleph_0$
Números irracionales	c
Números reales	c

2.5 EJERCICIOS

Relacione cada conjunto de la columna I con el conjunto de la columna II que tiene la misma cardinalidad. Proporcione el número cardinal.

I	II
1. {3}	**A.** $\{x \mid x$ es un número racional$\}$
2. {a, b, c}	**B.** {26}
3. $\{x \mid x$ es un número natural$\}$	**C.** $\{x \mid x$ es un número irracional$\}$
4. $\{x \mid x$ es un número real$\}$	**D.** {x, y, z}
5. $\{x \mid x$ es un entero entre 0 y 1$\}$	**E.** $\{x \mid x$ es un número real que satisface $x^2 = 25\}$
6. $\{x \mid x$ es un entero que satisface $x^2 = 25\}$	**F.** $\{x \mid x$ es un entero que es al mismo tiempo par e impar$\}$

Coloque cada par de conjuntos en una correspondencia de uno a uno, si es posible.

7. {I, II, III} y {x, y, z}

8. {a, b, c, d} y {2, 4, 6}

9. {a, d, d, i, t, i, o, n} y {a, n, s, w, e, r}

10. {Reagan, Clinton, Bush} y {Nancy, Hillary, Laura}



Dé el número cardinal de cada conjunto.

11. $\{a, b, c, d, \ldots, k\}$

12. $\{9, 12, 15, \ldots, 36\}$

13. $\emptyset$

14. $\{0\}$

15. $\{300, 400, 500, \ldots\}$

16. $\{-35, -28, -21, \ldots, 56\}$

17. $\{-1/4, -1/8, -1/12, \ldots\}$

18. $\{x \mid x \text{ es un entero par}\}$

19. $\{x \mid x \text{ es un número natural impar}\}$

20. $\{b, a, 1, 1, a, d\}$

21. {Ene, Feb, Mar, ..., Dic}

22. {Alabama, Alaska, Arizona, ..., Wisconsin, Wyoming}

23. Lew Lefton, del Tecnológico de Georgia, ha modificado la vieja canción de "100 botellas de cerveza en la pared" para ilustrar una propiedad de los números cardinales infinitos. Llene el espacio en blanco con la primera línea de la composición de Lefton: "$\aleph_0$ botellas de cerveza en la pared, $\aleph_0$ botellas de cerveza, tomamos una y ahora nos quedan _____ botellas de cerveza en la pared".



24. Dos correspondencias de uno a uno son consideradas "diferentes" si en una de las correspondencias algunos elementos son pareados de diferente forma que en la otra. Por ejemplo,

$$\begin{matrix}\{a,\ b,\ c\}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\{a,\ b,\ c\}\end{matrix}$$
$$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \quad y \quad \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \quad \text{son diferentes,}$$
$$\begin{matrix}\{a,\ b,\ c\}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\{c,\ b,\ a\}\end{matrix}$$

$$\text{mientras que} \quad \begin{matrix}\{a,\ b,\ c\}\\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\\ \{c,\ a,\ b\}\end{matrix} \quad y \quad \begin{matrix}\{b,\ c,\ a\}\\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\\ \{a,\ b,\ c\}\end{matrix} \quad \text{no lo son.}$$

(a) ¿Cuántas correspondencias *diferentes* pueden establecerse entre los conjuntos {Mike Myers, Julia Roberts, William Shatner} y {Erin Brockovich, Capitán James T. Kirk, Austin Powers}?

(b) ¿Cuál de esas correspondencias parea a cada persona con el papel que cada una ha realizado en el cine?

Determine cuáles de los siguientes pares de conjuntos son iguales, equivalentes, ambos *o* ninguno de éstos.

25. $\{u, v, w\}, \{v, u, w\}$ **26.** $\{48, 6\}, \{4, 86\}$ **27.** $\{X, Y, Z\}, \{x, y, z\}$ **28.** {lea}, {ale}

29. $\{x \mid x \text{ es un número real positivo}\}, \{x \mid x \text{ es un número real negativo}\}$

30. $\{x \mid x \text{ es un número racional positivo}\}, \{x \mid x \text{ es un número real negativo}\}$

Demuestre que cada conjunto tiene número cardinal $\aleph_0$ estableciendo una correspondencia de uno a uno entre el conjunto dado y el conjunto de los números naturales.

31. El conjunto de los números enteros positivos

32. $\{-10, -20, -30, -40, \ldots\}$

33. $\{1{,}000{,}000,\ 2{,}000{,}000,\ 3{,}000{,}000, \ldots\}$

34. El conjunto de los números enteros impares

35. $\{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$ (*Una pista*: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, y así sucesivamente)

36. $\{-17, -22, -27, -32, \ldots\}$

En cada uno de los ejercicios 37 al 40, identifique si el enunciado dado es siempre verdadero *o* no siempre verdadero. *Si es* no siempre verdadero, *dé un contraejemplo.*

37. Si A y B son conjuntos infinitos, entonces A es equivalente a B.

38. Si el conjunto A es un conjunto infinito y el conjunto B puede ponerse en correspondencia de uno a uno con un subconjunto propio de A, entonces B debe ser infinito.

39. Si A es un conjunto infinito y A no es equivalente al conjunto de los números naturales, entonces $n(A) = c$.

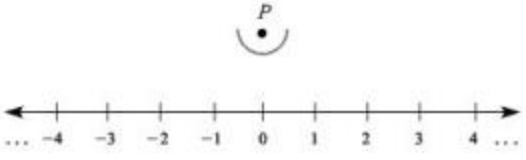
40. Si A y B son ambos conjuntos infinitos numerables, entonces $n(A \cup B) = \aleph_0$.

Los ejercicios 41 y 42 son aplicaciones geométricas del concepto de infinito.

41. El conjunto de números reales puede representarse por medio de una línea que se extiende indefinidamente en ambas direcciones. Cada punto de la línea corresponde a un número real único, y cada número real corresponde a un punto único de la línea.

(a) Utilice la figura siguiente, donde el segmento de recta entre 0 y 1 ha sido doblado en un semicírculo y colocado por encima de la línea para probar que

$\{x \mid x \text{ es un número real entre 0 y 1}\}$
equivale a $\{x \mid x \text{ es un número real}\}$.



(b) ¿Qué hecho establece el inciso (a) acerca del conjunto de los números reales?

42. Demuestre que los dos segmentos de recta verticales mostrados a continuación tienen el mismo número de puntos.



Demuestre que cada uno de los conjuntos siguientes puede colocarse en una correspondencia de uno a uno con un subconjunto propio de sí mismo para probar que cada conjunto es infinito.

43. $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$

44. $\{4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$

45. $\{3/4, 3/8, 3/12, 3/16, \ldots\}$

46. $\{1, 4/3, 5/3, 2, \ldots\}$

47. $\{1/9, 1/18, 1/27, 1/36, \ldots\}$

48. $\{-3, -5, -9, -17, \ldots\}$

49. Explique la diferencia entre conjuntos *iguales* y *equivalentes*.

50. Explique cómo la correspondencia sugerida en el ejemplo 4 muestra que el conjunto de los números reales entre 0 y 1 es no numerable.

Las paradojas de Zenón *La nota al margen en la página 84 explica el significado de paradoja. Otras paradojas muy famosas son las paradojas de Zenón, quién nació alrededor de 496 a.C. en el sur de Italia. Se dice que dos de ellas pueden demostrar que un corredor muy veloz es incapaz de rebasar otro corredor más lento, y que de hecho, el movimiento mismo es imposible.*

¿Qué explicación puede dar usted para los dos ejemplos siguientes de las paradojas de Zenón?

51. Si Aquiles inicia su carrera poco después que la tortuga, nunca podrá alcanzarla a pesar de que él corre más rápido.

Suponga que Aquiles le dio a la tortuga una ventaja de un metro y avanza a un décimo de la velocidad de aquél. Cuando Aquiles llega al punto donde inició la tortuga, ésta está un décimo de metro más adelante. Cuando Aquiles llega a *ese* punto, la tortuga está un centésimo de metro más adelante, y así sucesivamente. Aquiles estará cada vez más cerca, pero nunca podrá alcanzarla.

52. El movimiento es imposible.

Usted no puede avanzar un metro, sino hasta después de haber recorrido primero medio metro. Pero no puede avanzar medio metro, sino hasta después de haber recorrido un cuarto de metro. Y así sucesivamente. Incluso el movimiento más pequeño no puede ocurrir ya que primero debe ocurrir un movimiento todavía más pequeño.

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

Una encuesta en su clase

Esta actividad en clase está diseñada para determinar el número de estudiantes que hay en el grupo sin contar uno por uno a cada estudiante. Esto se realizará poniendo a cada estudiante de la clase en un conjunto particular al cual pertenece y luego determinando la suma de los números cardinales de los subconjuntos.

Para esta actividad, primero designaremos tres conjuntos: X, Y y Z. Éstas son sus respectivas descripciones:

$X =$ {estudiantes que están registrado en el partido Republicano}

$Y =$ {estudiantes que tienen 24 años o menos}

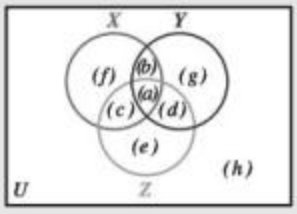
$Z =$ {estudiantes que nunca se han casado}

Cada estudiante en la clase pertenecerá a uno de los conjuntos X, X', a uno de los conjuntos Y, Y' y a uno de los conjuntos Z, Z'. (Recuerde que el complemento de un conjunto consiste en todos los elementos en el universo [la clase] que no están dentro de ese conjunto.)

Como un ejemplo, suponga que un estudiante es demócrata, divorciado y de 23 años. Este estudiante pertenece a los conjuntos X', Y y Z'. Si relacionamos estos conjuntos con símbolos de intersección, el conjunto al cual pertenece el estudiante sería

$$X' \cap Y \cap Z'.$$

Ahora observe el diagrama de Venn que sigue. Los ocho subconjuntos se identifican con las letras minúsculas (*a*) a (*h*). La última columna se completará cuando se realice la encuesta. Ahora cada estudiante determinará a que conjunto pertenece. (El estudiante descrito antes pertenece a (*g*).)



Región	Descripción en términos de notación de conjuntos	Número de estudiantes de la clase dentro del conjunto
(*a*)	$X \cap Y \cap Z$	
(*b*)	$X \cap Y \cap Z'$	
(*c*)	$X \cap Y' \cap Z$	
(*d*)	$X' \cap Y \cap Z$	
(*e*)	$X' \cap Y' \cap Z$	
(*f*)	$X \cap Y' \cap Z'$	
(*g*)	$X' \cap Y \cap Z'$	
(*h*)	$X' \cap Y' \cap Z'$	

El profesor deberá encuestar ahora a la clase para ver cuántos estudiantes hay en cada conjunto. *Recuerde que cada elemento en la clase pertenecerá a uno y sólo un conjunto.*

Una vez hecha la encuesta, encuentre la suma de todos los números de la última columna. Debe obtener *exactamente* el número de estudiantes que están presentes. Para verificarlo, cuente de uno en uno a los estudiantes de la clase.

Temas para análisis

1. Suponga que la suma de la última columna no concuerda con el total de estudiantes en la clase. ¿Qué podría estar mal?
2. ¿Por qué no puede un estudiante de la clase estar en más de uno de los ocho subconjuntos mostrados?

EXAMEN DEL CAPÍTULO 2

Para los ejercicios 1 al 14, sean

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \quad A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{b, e, a, d\} \quad \text{y} \quad C = \{a, e\}.$$

Encuentre cada uno de los conjuntos siguientes.

1. $A \cup C$ **2.** $B \cap A$ **3.** B' **4.** $A - (B \cap C')$

Determine si cada uno de los enunciados siguientes es verdadero *o* falso.

5. $b \in A$ **6.** $C \subseteq A$ **7.** $B \subset (A \cup C)$

8. $c \notin C$ **9.** $n[(A \cup B) - C] = 4$ **10.** $\emptyset \subset C$

11. $A \cap B'$ es equivalente a $B \cap A'$ **12.** $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Encuentre lo que se indica a continuación.

13. $n(A \times C)$ **14.** El número de subconjuntos propios de A

Dé una descripción verbal para cada uno de los conjuntos siguientes.

15. $\{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$ **16.** {enero, febrero, marzo, ..., diciembre}

Exprese cada uno de los conjuntos siguientes en notación de construcción de conjuntos.

17. $\{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$ **18.** $\{24, 32, 40, 48, \ldots, 88\}$

Coloque $\subset$, $\subseteq$, ambos *o* ninguno *en cada espacio en blanco para hacer que los enunciados sean verdaderos.*

19. $\emptyset$ _____ $\{x | x$ es un número natural entre 17 y 18$\}$

20. $\{4, 9, 16\}$ _____ $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Sombree cada uno de los conjuntos siguientes en el diagrama de Venn que les corresponda.

21. $X \cup Y'$ **22.** $X' \cap Y'$

23. $(X \cup Y) - Z$ **24.** $[(X \cap Y) \cup (Y \cap Z) \cup (X \cap Z)] - (X \cap Y \cap Z)$

Datos sobre ciertos inventos *La tabla siguiente enumera 10 inventos que son importantes de manera directa o indirecta para nuestras vidas, junto con otros datos pertinentes.*

Invento	Fecha	Inventor	País
Máquina sumadora	1642	Pascal	Francia
Barómetro	1643	Torricelli	Italia
Máquina de afeitar eléctrica	1917	Schick	Estados Unidos
Fibra óptica	1955	Kapany	Inglaterra
Contador Geiger	1913	Geiger	Alemania
Reloj de péndulo	1657	Huygens	Holanda
Radar	1940	Watson-Watt	Escocia
Telégrafo	1837	Morse	Estados Unidos
Termómetro	1593	Galileo	Italia
Cremallera	1891	Judson	Estados Unidos

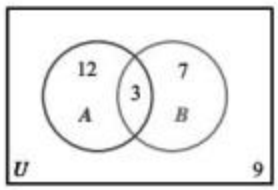


Sean U = *el conjunto de los 10 inventos,* A = *el conjunto de los artículos inventados en Estados Unidos y* T = *el conjunto de los artículos inventado en el siglo XX. Enumere los elementos de los siguientes conjuntos.*

25. $A \cap T$ **26.** $(A \cup T)'$ **27.** $A - T'$

28. Enuncie con palabras, en lugar de símbolos, las leyes de De Morgan para los conjuntos.

29. Los números en el diagrama de Venn indican el número de elementos en cada subconjunto particular.



Determine el número de elementos en cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A \cup B$ **(b)** $A \cap B'$ **(c)** $(A \cap B)'$

Ayuda financiera a estudiantes universitarios *En un año reciente, la ayuda financiera para estudiantes universitarios en Estados Unidos ascendió a cerca de* 30,000 *millones de dólares. (Mucha de esta ayuda no fue utilizada, la mayor parte de las veces porque los estudiantes calificados no se enteraron de la misma, no sabían cómo obtener o llenar las solicitudes requeridas, o sentían que los resultados no valían el esfuerzo que habrían tenido que realizar.) Las tres fuentes principales de ayuda son becas del gobierno, becas privadas y los colegios mismos.*

30. Melissa Young, directora de Ayuda Financiera de una pequeña universidad privada del Oeste Medio, inspeccionó los registros de 100 estudiantes de segundo año y encontró lo siguiente:

49 reciben beca del gobierno,
55 reciben becas privadas,
43 reciben ayuda de la universidad,
23 reciben becas del gobierno y becas privadas,
18 reciben becas del gobierno y ayuda de la universidad,
28 reciben becas privadas y ayuda de la universidad,
8 reciben ayuda de las tres fuentes.



¿Cuántos de los estudiantes en la encuesta
(a) cuentan solamente con becas del gobierno?
(b) cuentan con una beca privada pero no con beca del gobierno?
(c) reciben ayuda financiera sólo de una de estas fuentes?
(d) reciben ayuda exactamente de dos fuentes?
(e) no reciben ayuda financiera de ninguna de estas fuentes?
(f) no reciben ayuda financiera de la universidad ni del gobierno?

capítulo

3 Introducción a la lógica



Aunque las modernas computadoras digitales son máquinas sumamente complejas, su diseño implica sólo dos componentes básicos: compuertas y celdas de memoria. Una compuerta es un simple interruptor eléctrico que controla el flujo de información, de forma muy parecida a como una compuerta controla el flujo de agua en un canal. Una celda de memoria puede almacenar un solo bit de información. Interconectando varias compuertas y celdas de memoria puede diseñarse un circuito que realice operaciones como suma o resta. Desde los inicios de la industria de la computación, ha habido una tendencia constante hacia la miniaturización de los circuitos eléctricos. En 1960 sólo era posible imprimir de manera confiable unas cuantas compuertas sobre un chip de silicio. Este número se duplicó cada año durante esa década, y a partir de entonces casi se cuadriplica cada tres años. En la actualidad es posible imprimir más de un millón de compuertas lógicas en un chip de apenas unos cuantos milímetros de superficie. Algunos expertos creen que, dentro de unos 10 años, será posible crear un chip de silicio con más de 1000 millones de componentes. Una vez logrado esto, cualquier mejora quizá se verá impedida debido a limitaciones físicas fundamentales.

¿Cómo es posible diseñar la interconexión de tantas compuertas lógicas y hacerlas funcionar al unísono de manera apropiada? En el presente capítulo conocerá la respuesta a esta pregunta, cuando llegue a los temas sobre álgebra booleana y lógica formal. Sin estas disciplinas, las modernas computadoras sencillamente no existirían. Un circuito eléctrico sólo puede estar encendido o apagado; gracias a esta propiedad, puede modelarse para que corresponda a los estados lógicos de verdadero o falso. En vez de tener que observar las conexiones físicas de los circuitos eléctricos, los ingenieros en computación elaboran tablas de verdad para determinar qué salida arrojará un componente eléctrico como resultado de ciertas entradas determinadas. Gracias a esta abstracción, cualquier error de diseño puede corregirse antes de construir el primer prototipo de un circuito. El uso de la lógica para crear circuitos complejos ha permitido que la tecnología avance a un ritmo increíble.

Fuente: Stallings, W., *Computer Organization and Architecture*, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1993.

3.1 **Proposiciones y cuantificadores**

3.2 **Tablas de verdad y proposiciones equivalentes**

3.3 **Condicional y circuitos**

3.4 **Más sobre la condicional**

3.5 **Análisis de argumentos mediante diagramas de Euler**

Extensión: Rompecabezas lógicos

3.6 **Análisis de argumentos mediante tablas de verdad**

Investigación en grupo: Revisión de los rompecabezas lógicos

Examen del capítulo 3

3.1 Proposiciones y cuantificadores



Gottfried Leibniz (1646-1716) fue un gran filósofo y sabio de proyección universal que realizó notables intentos por conciliar los conflictos entre católicos y protestantes. Promovió el intercambio cultural entre Europa y Oriente. Los ideogramas chinos lo indujeron a buscar un simbolismo universal.

Leibniz fue uno de los primeros creadores de la lógica simbólica, y buscó construir un modelo totalmente objetivo para el razonamiento humano que redujera todos los errores de razonamiento a simples fallas de cálculo. Hasta ahora, su sueño sigue siendo una ilusión.

Esta sección nos introduce al estudio de la *lógica simbólica*, en la cual las proposiciones se representan mediante letras, y palabras como *y, o, no,* se representan con símbolos. Una de las principales aplicaciones de la lógica es en el estudio del *valor de verdad* (esto es, la veracidad o falsedad) de proposiciones que están compuestas de diversos elementos. El valor de verdad de estas proposiciones depende de los componentes que las conforman.

En el lenguaje cotidiano existen oraciones de muchas clases, por ejemplo, la descripción de un hecho, opiniones, órdenes o preguntas. La lógica simbólica estudia sólo el primer tipo de oración, es decir, la que concierne a los hechos.

Proposiciones Una **proposición** se define como una aseveración que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas. Por ejemplo, los dos enunciados siguientes son preposiciones:

El correo electrónico constituye un medio de comunicación.

$$11 + 6 = 12.$$

Cada una puede ser verdadera o falsa. Sin embargo, con base en esta definición, las oraciones siguientes no son proposiciones:

Pinta la pared.

¿No crees que hoy sea un gran día?

Nomar Garciaparra es mejor jugador de béisbol que Derek Jeter.

Esta oración es falsa.

No se puede determinar si estas oraciones son verdaderas o falsas. La primera es una orden y la segunda es una pregunta. La tercera es una opinión. "Esta oración es falsa" es una paradoja; si suponemos que es verdadera, entonces es falsa, y si suponemos que es falsa, entonces es verdadera.

Una **proposición compuesta** puede formarse por la combinación de dos o más proposiciones. Las proposiciones que forman parte de una proposición compuesta reciben el nombre de **componentes de la proposición**. Para crear proposiciones compuestas pueden usarse varios **conectivos lógicos**, o simplemente **conectivos**. Palabras como *y, o, no* y *si ... entonces* son ejemplos de conectivos. (Aunque la proposición "Hoy no es martes" no consta de dos componentes, por conveniencia se considera compuesta, ya que su valor de verdad depende del valor de verdad de una proposición diferente: "Hoy es martes".)

EJEMPLO 1 Determine si cada proposición es compuesta o no.

(a) Shakespeare escribió sonetos y el poema tiene la forma de pentámetro yámbico.

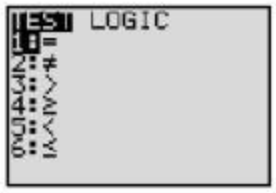
Este enunciado es compuesto, ya que está constituido de las proposiciones componentes "Shakespeare escribió sonetos" y "el poema tiene la forma de pentámetro yámbico". El conectivo es *y*.

(b) Puede pagarme ahora o puede pagarme después.

Aquí el conectivo es *o*. La proposición es compuesta.

(c) Si él lo dijo, entonces debe ser cierto.

En este caso, el conectivo es *si ... entonces*, el cual analizaremos con mayor detalle en una sección posterior. La proposición es compuesta.



El menú TEST de la calculadora TI-83 Plus permite al usuario probar la veracidad o falsedad de proposiciones que incluyen $=$, $\neq$, $>$, $\geq$, $<$ y $\leq$. Si una proposición es verdadera, el resultado es 1; si es falsa, el resultado es 0.

(d) Mi pistola fue fabricada por Smith y Wesson.

Aunque en esta proposición aparece la palabra "y", no está siendo utilizado como conectivo *lógico*, ya que es parte del nombre del fabricante. La proposición no es compuesta. ■

Negaciones La oración "Tom Jones tienes un automóvil rojo" es una proposición; la **negación** de esta proposición es "Tom Jones no tiene un automóvil rojo". La negación de una proposición verdadera es falsa, y la negación de una proposición falsa es verdadera.

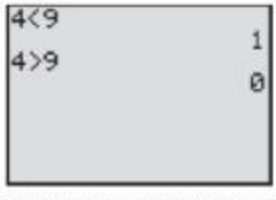
EJEMPLO 2 Construya la negación de cada proposición.

(a) Ese estado tiene un gobernador.

Para negar la proposición, introducimos *no* en la oración: "Ese estado no tiene un gobernador".

(b) El Sol no es una estrella.

Negación: "El Sol es una estrella". ■



$4 < 9$ es verdadero, como lo indica el 1. $4 > 9$ es falso, como lo indica el 0.

Una manera de detectar negaciones incorrectas es verificar el valor de verdad. Una negación tiene el valor de verdad contrario al de la proposición original.

El ejemplo siguiente utiliza algunos símbolos de desigualdad tomados del álgebra.

Simbolismo	Significado	Ejemplos
$a < b$	a es menor que b	$4 < 9$ $\quad \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$
$a > b$	a es mayor que b	$6 > 2$ $\quad -5 > -11$
$a \leq b$	a es menor o igual a b	$8 \leq 10$ $\quad 3 \leq 3$
$a \geq b$	a es mayor o igual a b	$-2 \geq -3$ $\quad -5 \geq -5$



El menú LOGIC de la calculadora TI-83 Plus permite al usuario probar la veracidad o falsedad de proposiciones que incluyen *y*, *o*, *exclusivo* (vea el ejercicio 75 de la sección siguiente) y *no*.

EJEMPLO 3 Proporcione la negación de cada desigualdad. *No* utilice una diagonal para negar la desigualdad.

(a) $p < 9$

La negación de "p es menor que 9" es "p *no* es menor que 9". Como no podemos utilizar "no", lo cual requeriría escribir $p \not< 9$, parafraseamos la negación como "p es mayor o igual a 9", o $p \geq 9$.

(b) $7x + 11y \geq 77$

La negación, sin diagonal, es $7x + 11y < 77$. ■

Símbolos Para simplificar el manejo de la lógica, se utilizan símbolos. Las proposiciones se representan con letras, como p, q o r, mientras que los conectivos se representan con símbolos, algunos de los cuales se muestran en la tabla siguiente. La tabla también indica el tipo de proposición compuesta que corresponde al conectivo dado.

Conectivo	Símbolo	Tipo de proposición
y	$\wedge$	Conjunción
o	$\vee$	Disyunción
no	$\sim$	Negación



Aristóteles, quien fuera el primero en sistematizar la lógica que usamos en la vida diaria, aparece arriba en un detalle del lienzo *La escuela de Atenas*, de Rafael. Se le representa debatiendo un punto con su maestro **Platón**. Muchas personas sienten que la lógica y el análisis de Aristóteles sobre la forma en que funcionan las cosas están inseparablemente entrelazados a la forma en que se nos enseña a pensar a los occidentales.

El símbolo $\sim$ representa al conectivo *no*. Si p corresponde a la proposición "Bill Clinton fue presidente de Estados Unidos en 1997", entonces $\sim p$ sería "Bill Clinton no fue presidente de Estados Unidos en 1997".

EJEMPLO 4 Sean p que representa "Hoy estamos a 80° F", y q que representa "Hoy es martes". Transcriba cada proposición simbólica en palabras.

(a) $p \vee q$

Según la tabla, $\vee$ simboliza *o*; así, $p \vee q$ representa

Hoy estamos a 80° F u hoy es martes.

(b) $\sim p \wedge q$

Hoy no estamos a 80° F y hoy es martes.

(c) $\sim(p \vee q)$

No es el caso que hoy estemos a 80° F o que sea martes.

(d) $\sim(p \wedge q)$

No es el caso que hoy estemos a 80° F y hoy sea martes. ■

La proposición en el inciso (c) del ejemplo 4 por lo regular se traduce como "ni p ni q".

Cuantificadores Las palabras *todo, cada uno, todos* y *ninguno* se denominan **cuantificadores universales**, mientras que palabras y frases como *hay* y *al menos uno* se conocen como **cuantificadores existenciales**. Los cuantificadores son muy usados en matemáticas para indicar *cuántos* casos existen de una situación determinada. Tenga cuidado al construir la negación de proposiciones que incluyan cuantificadores.

Si una proposición es verdadera, su negación debe ser falsa, y viceversa, debe ser verdadera si la proposición dada es falsa, en todos los casos posibles. Considere la proposición

Todas las niñas en el grupo se llaman Mary.

Muchas personas escribirían la negación de esta proposición como "Ninguna niña en el grupo se llama Mary" o "Todas las niñas en el grupo no se llaman Mary". Pero esto no sería correcto. Para determinar por qué, analice los tres grupos a continuación.

Grupo I: Mary Jones, Mary Smith, Mary Jackson

Grupo II: Mary Johnson, Betty Parker, Margaret Westmoreland

Grupo III: Donna Garbarino, Paula Story, Rhonda Alessi

Estos grupos contienen todas las posibilidades que deben considerarse. En el grupo I, *todas* las niñas se llaman Mary; en el grupo II, *algunas* niñas tienen por nombre Mary (y algunas no), y en el grupo III, *ninguna* niña se llama Mary. Vea los valores de verdad en el diagrama de la página siguiente y tenga presente que "alguna" significa "al menos una (y posiblemente todas)".

Valores de verdad cuando se aplica a:			
	Grupo I	**Grupo II**	**Grupo III**
(1) Todas las niñas en el grupo se llaman Mary. (Proposición)	V	F	F ←
(2) Ninguna niña en el grupo se llama Mary. (Posible negación)	F	F	V
(3) Todas las niñas en el grupo no se llaman Mary. (Posible negación)	F	F	V
(4) Algunas niñas en el grupo no se llaman Mary. (Posible negación)	F	V	V ←

Negación

La negación de la proposición dada (1) debe tener valores de verdad contrarios en *todos* los casos. Puede verse que las proposiciones (2) y (3) no satisfacen esta condición (para el grupo II), pero la proposición (4) sí la cumple. Puede concluirse que la negación correcta para: "Todas las niñas en el grupo se llaman Mary" es "Algunas niñas en el grupo no se llaman Mary". Otras formas de enunciar la negación son:

No todas las niñas en el grupo se llaman Mary.

No es el caso que todas las niñas en el grupo se llamen Mary.

Al menos una niña en el grupo no se llama Mary.

La tabla siguiente puede usarse para generalizar el método de determinar la negación de una proposición que incluya cuantificadores.

Negación de proposiciones con cuantificadores

Proposición	**Negación**
Todos cumplen.	Algunos no cumplen. (De forma equivalente. No todos cumplen.)
Algunos cumplen.	Ninguno cumple. (De forma equivalente. Todos no cumplen.)

La negación de la negación de una proposición es la proposición misma. Por ejemplo, las negaciones en la columna Negación son simplemente las proposiciones originales correspondientes de la columna Proposición. Es decir, la negación de "Algunos no cumplen" es "Todos cumplen".

EJEMPLO 5 Escriba la negación de cada proposición.

(a) Algunos gatos tienen pulgas.

Ya que *algunos* significa "al menos uno", la proposición "Algunos gatos tienen pulgas" en realidad es lo mismo que "Al menos un gato tiene pulgas". La negación de esto es "Ningún gato tiene pulgas".

(b) Algunos gatos no tienen pulgas.

Esta proposición afirma que al menos un gato, en algún lugar, no tiene pulgas. La negación de esto es "Todos los gatos tienen pulgas".

(c) Ningún gato tiene pulgas.

La negación es "Algunos gatos tienen pulgas". ■

Las diferentes relaciones entre los conjuntos especiales de números pueden expresarse utilizando cuantificadores universales y existenciales. Ya antes presentamos conjuntos de números que se estudian en álgebra, los cuales repetimos en el cuadro siguiente.

Conjuntos de números

Números naturales o de conteo $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Números racionales $\{p/q \mid p \text{ y } q \text{ son enteros y } q \neq 0\}$
(Algunos ejemplos de números racionales son $3/5$, $-7/9$, 5 y 0. Cualquier número racional puede escribirse como un número decimal finito, como 0.25, o como un número decimal que se repite, como 0.666….)

Números reales $\{x \mid x \text{ es un número que puede escribirse como decimal}\}$

Números irracionales $\{x \mid x \text{ es un número real y } x \text{ no puede escribirse como el cociente de enteros}\}$
(Algunos ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ y π. Las representaciones decimales de los números irracionales nunca terminan y nunca se repiten.)

EJEMPLO 6 Determine si cada una de las proposiciones siguientes acerca de los conjuntos de números, las cuales incluyen un cuantificador, es *verdadera* o *falsa*.

(a) Existe un entero no negativo que no es un número natural.

Puesto que tal número existe (es el 0), esta proposición es verdadera.

(b) Todo número entero es un número natural.

Esta proposición es falsa, ya que podemos encontrar al menos un entero que no es un número natural. Por ejemplo, -1 es un entero pero no es un número natural. (Hay un número infinito de elecciones que hubiéramos podido hacer.)

(c) Todo número natural es un número racional.

Ya que todos los números naturales pueden escribirse como una fracción con denominador 1, esta proposición es verdadera.

(d) Existe un número irracional que no es real.

Para poder ser un número irracional, un número primero debe ser real (vea el recuadro). Por lo tanto, como no podemos proporcionar un número irracional que no sea real, esta proposición es falsa. (Si hubiésemos sido capaces de encontrar al menos uno, entonces la proposición habría sido verdadera.) ■

3.1 EJERCICIOS

Determine si cada una de las oraciones siguientes es o no una proposición.

1. El 7 de diciembre de 1941 fue domingo.
2. El código postal de Manistee, en Estados Unidos, es 49660.
3. Pongan atención, mis niños: van a escuchar sobre la cabalgata que Paul Revere hizo a medianoche.
4. Ceda el paso al tráfico en sentido contrario.
5. $5 + 8 = 13$ y $4 - 3 = 1$

6. $5 + 8 = 12$ o $4 - 3 = 2$

7. Algunos números son negativos.

8. Andrew Johnson fue presidente de los Estados Unidos de América en 1867.

9. Los accidentes son la principal causa de muerte entre los niños menores de 8 años.

10. *La Guerra de las Galaxias: Episodio I-La Amenaza Fantasma* fue la película que recaudó mayores ingresos en 1999.

11. ¿A dónde irás hoy?

12. Compórtate y siéntate.

13. Kevin "Catfish" McCarthy una vez tomó una prolongada ducha que duró 340 horas y 40 minutos.

14. Un galón de leche pesa más de 4 libras.

Determine si cada una de las proposiciones siguientes es compuesta.

15. Leo el *Chicago Tribune* y leo el *New York Times.*

16. Mi hermano contrajo matrimonio en Londres.

17. Mañana será domingo.

18. Dara Lanier es menor de 29 años de edad, y también lo es Teri Orr.

19. A la esposa de Jay Beckenstein le gusta el helado de Ben y Jerry.

20. El letrero en la parte posterior del auto dice "£A California, o la muerte!"

21. Si Julie Ward vende su cuota, entonces Bill Leonard estará feliz.

22. Si Mike es un político, entonces Jerry es un ladrón.

Escriba la negación de cada una de las proposiciones siguientes.

23. El nombre de su tía es Lucía.

24. Se regarán las flores.

25. Cada perro tiene su día.

26. Hoy no llovió en el sur de California.

27. Algunos libros son más extensos que este libro.

28. Todos los estudiantes presentes tendrán otra oportunidad.

29. Ningún técnico en computación puede jugar *black jack.*

30. Algunas personas tienen toda la suerte del mundo.

31. Todo el mundo ama a alguien en algún momento.

32. Todos aman a los ganadores.

Proporcione una negación para cada desigualdad. No utilice una diagonal sobre el símbolo.

33. $y > 12$

34. $x < -6$

35. $q \geq 5$

36. $r \leq 19$

37. Intente negar la oración "El número exacto de palabras en esta oración es once" y vea qué sucede. Explique el problema que surge.

38. Explique por qué la negación de "$r > 4$" no es "$r < 4$".

Sea que p representa la proposición "Ella tiene ojos verdes" *y q representa* "Él tiene 48 años de edad". *Transcriba cada proposición simbólica en palabras.*

39. $\sim p$

40. $\sim q$

41. $p \wedge q$

42. $p \vee q$

43. $\sim p \vee q$

44. $p \wedge \sim q$

45. $\sim p \vee \sim q$

46. $\sim p \wedge \sim q$

47. $\sim(\sim p \wedge q)$

48. $\sim(p \vee \sim q)$

Sea que p representa la proposición "Chris colecciona videocintas" *y q representa la proposición* "Jack toca la tuba". *Transforme cada una de las siguientes proposiciones compuestas en símbolos.*

49. Chris colecciona videocintas y Jack no toca la tuba.

50. Chris no colecciona videocintas o Jack no toca la tuba.

51. Chris no colecciona videocintas o Jack toca la tuba.

52. Jack toca la tuba y Chris no colecciona videocintas.

53. Ni Chris colecciona videocintas ni Jack toca la tuba.

54. O bien Jack toca la tuba o Chris colecciona videocintas, y no es el caso que a la vez Jack toque la tuba y Chris coleccione videocintas.

55. En el lenguaje cotidiano suele presentarse el uso incorrecto de los cuantificadores. Suponga que escucha que una cadena de electrónica ofrece un 30% de descuento, y que el anuncio en la radio afirma: "Todos los artículos no están disponibles en todas las tiendas". ¿Cree usted que traducido literalmente, el anuncio realmente significa lo que dice? ¿Qué cree que trataban de decir? Explique su respuesta.

56. Aplique lo dicho en el ejercicio 55 a la siguiente proposición: "Todas las personas no tienen el tiempo para dedicarlo al mantenimiento adecuado de sus automóviles".

Observe los grupos de obras de arte A, B *y* C *e identifique con letras el grupo o los grupos que satisfagan las proposiciones siguientes, las cuales incluyen cuantificadores.*



A



B



C

57. Todas las pinturas tienen marco.

58. Ninguna pintura tiene marco.

59. Al menos una pintura no tiene marco.

60. No todas las pinturas tienen marco.

61. Al menos una pintura tiene marco.

62. Ninguna pintura no tiene marco.

63. Todas las pinturas no tienen marco.

64. No todas las pinturas no tienen marco.

Determine si cada una de las proposiciones de los ejercicios 65 a 74, las cuales incluyen cuantificadores, es verdadera *o* falsa.

65. Todo entero no negativo es un entero.

66. Todo número natural es un entero.

67. Existe un número racional que no es un entero.

68. Existe un entero que no es un número natural.

69. Todos los números racionales son números reales.

70. Todos los números irracionales son números reales.

71. Algunos números racionales no son enteros.

72. Algunos enteros no negativos no son números racionales.

73. Cada entero no negativo es un número positivo.

74. Cada número racional es un número positivo.

75. Explique la diferencia que existe entre las proposiciones siguientes:

Todos los estudiantes no aprobaron el examen.

No todos los estudiantes aprobaron el examen.

76. La proposición "Para algún número real x, $x^2 \geq 0$" es verdadera. Sin embargo, uno de sus compañeros no entiende por qué, pues él afirma que $x^2 \geq 0$ para *todo* número real x (no para *alguno*). ¿Cómo le podría explicar en qué consiste su error?

77. Escriba la proposición siguiente utilizando "cada": No hay alguien aquí que no haya hecho eso en un momento u otro.

78. Sólo una de las proposiciones siguientes es verdadera. ¿Cuál es?

A. Para algún número real x, $x \not< 0$.

B. Para todos los números reales x, $x^3 > 0$.

C. Para todos los números reales x menores que 0, x^2 también es menor que 0.

D. Para algún número real, x, $x^2 < 0$.

3.2 Tablas de verdad y proposiciones equivalentes

En esta sección, usamos los valores de verdad de los componentes de las proposiciones para encontrar los valores de verdad de las proposiciones compuestas.

Conjunciones Para comenzar, definamos los valores de verdad de la **conjunción** p *y* q, simbolizada $p \wedge q$. En el lenguaje cotidiano, el conectivo lógico *y* implica la idea de "ambos". La proposición

> El lunes sigue inmediatamente después del domingo y marzo es el mes que sigue inmediatamente a febrero

es verdadera, ya que cada proposición componente es verdadera. Por otra parte, la proposición

> El lunes sigue inmediatamente después del domingo y marzo es el mes que sigue inmediatamente a enero

es falsa, a pesar de que parte de la proposición (el lunes sigue inmediatamente después del domingo) es verdadera. Para que la conjunción $p \wedge q$ sea verdadera, ambas proposiciones, p y q, deben ser verdaderas. Este resultado se resume en una tabla, llamada **tabla de verdad**, la cual muestra las cuatro combinaciones posibles de valores de verdad para la conjunción p *y* q. A continuación se muestra la tabla de verdad para la *conjunción*.

Tabla de verdad para la conjunción p y q

		p y q
p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F



La calculadora muestra un "0" para $5 > 3$ y $6 < 0$, lo cual indica que la proposición es falsa.

EJEMPLO 1 Sea p la proposición "$5 > 3$" y q la proposición "$6 < 0$". Encuentre el valor de verdad de $p \wedge q$.

Aquí p es verdadera y q es falsa. Si observamos el segundo renglón de la tabla de verdad de la conjunción, vemos que $p \wedge q$ es falsa. ■

En algunos casos, el conectivo lógico *pero* es usado en proposiciones compuestas.

> Él quiere ir a las montañas pero ella quiere ir a la playa.

Aquí se usa el conectivo *pero* en lugar de *y* para darle una clase diferente de énfasis a la proposición. En este caso, tomaríamos la proposición como si tuviera la conjunción *y*. Entonces también se aplicaría la tabla de verdad para la conjunción, que ya mostramos antes.

Disyunción En el lenguaje ordinario, la palabra *o* puede tener un sentido ambiguo. La expresión "esto o aquello" puede significar tanto "esto o aquello o ambos", como "esto o aquello, pero no ambos". Por ejemplo, la proposición

> Pintaré la pared o pintaré el techo

quizá tenga el siguiente significado: "Pintaré la pared o pintaré el techo o pintaré ambos". Por otra parte, la proposición

Conduciré el Ford o el Nissan hasta la tienda

quizá signifique "conduciré el Ford o conduciré el Nissan, pero no conduciré ambos".

Normalmente, el símbolo $\vee$ representa la primera disyunción *o* que se menciona. Esto es, $p \vee q$ significa "p o q, o ambos". Debido a este significado de *o*, $p \vee q$ se denomina *disyunción inclusiva,* o sencillamente **disyunción** de p y q.

En el lenguaje común, la disyunción implica la idea de "cualquiera". Por ejemplo, la disyunción

Tengo una moneda de 25 centavos o tengo una moneda de 10 centavos

es verdadera, siempre y cuando yo tenga cualquiera de las dos, una moneda de 25 centavos, una moneda de 10 centavos o ambas. La única manera en que esta disyunción pudiera ser falsa sería si yo no tuviera ninguna de esas monedas. Una disyunción es falsa solamente si ambos componentes de la proposición son falsos. A continuación aparece la tabla de verdad para la *disyunción:*

Tabla de verdad para la disyunción p o q

		p o q
p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposición	Razón por la que es verdadera
$8 \geq 8$	$8 = 8$
$3 \geq 1$	$3 > 1$
$-5 \leq -3$	$-5 < -3$
$-4 \leq -4$	$-4 = -4$

El símbolo $\geq$ significa "mayor o igual a", mientras que $\leq$ significa "menor o igual a". Si a y b son números reales, $a \leq b$ es verdad si $a < b$ o $a = b$. La tabla en el margen muestra varias proposiciones y las razones por las que son verdaderas.

La **negación** de una proposición p, cuyo símbolo es $\sim p$, debe tener el valor de verdad opuesto al de la proposición p original. Esto nos conduce a la tabla de verdad para la negación, que mostramos a continuación:

Tabla de verdad para la negación no p

	no p
p	$\sim p$
V	F
F	V

EJEMPLO 2 Suponga que p es falsa, q es verdadera y r es falsa. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición compuesta $\sim p \wedge (q \vee \sim r)$?

En la expresión anterior los paréntesis se utilizan para agrupar a q y $\sim r$. Primero resuelva el contenido del paréntesis. Debido a que r es falsa, $\sim r$ será verdadera y puesto que $\sim r$ es verdadera y q también lo es, encuentre el valor de verdad de $q \vee \sim r$ buscando en el primer renglón de la tabla de verdad para la *disyunción*. Este renglón da como resultado verdadero. Puesto que p es falsa, $\sim p$ es verdadera, por lo que el valor de verdad final de la proposición compuesta $\sim p \wedge (q \vee \sim r)$ se encuentra en el renglón superior de la tabla de verdad para la *conjunción*. Partiendo de ésta, cuando $\sim p$ es verdadera y $q \vee \sim r$ es falsa, la proposición $\sim p \wedge (q \vee \sim r)$ es verdadera.

El párrafo anterior puede reinterpretarse mediante un método simbólico abreviado en el que V represente una proposición verdadera y F represente a una proposición falsa.

$$\begin{aligned} &\sim p \wedge (q \vee \sim r) \\ &\sim \mathrm{F} \wedge (\mathrm{V} \vee \sim \mathrm{F}) \\ &\mathrm{V} \wedge (\mathrm{V} \vee \mathrm{V}) && \sim \mathrm{F} \text{ es V.} \\ &\mathrm{V} \wedge \mathrm{V} && \mathrm{V} \vee \mathrm{V} \text{ es V.} \\ &\mathrm{V}. && \mathrm{V} \wedge \mathrm{V} \text{ es V.} \end{aligned}$$

La letra V en el último renglón indica que la proposición compuesta es verdadera. ■

PARA REFLEXIONAR

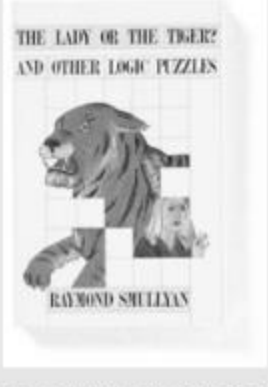
Raymond Smullyan es uno de los más importantes escritores de rompecabezas lógicos de la actualidad. Este talentoso y multifacético profesor de matemáticas y filosofía de la Universidad de Nueva York ha escrito varios libros sobre lógica recreativa, entre ellos *The Lady or the Tiger?* ("¿La dama o el tigre?"), *What is the Name of This Book?* ("¿Cuál es el título de este libro?") y *Alice in Puzzleland* ("Alicia en el país de los acertijos"). El título del primero de ellos fue tomado del cuento breve clásico de Frank Stockton, en el cual un prisionero debe hacer una elección entre dos puertas: detrás de una de ellas está una hermosa dama y detrás de la otra se encuentra un tigre hambriento.

Para análisis en grupo

Smullyan propone lo siguiente: ¿qué sucedería si cada una de las puertas tuviera un letrero y el hombre supiera que sólo uno de los letreros es verdadero?

El letrero de la primera puerta dice:

EN ESTE CUARTO HAY UNA DAMA Y
EN EL OTRO CUARTO HAY UN TIGRE.

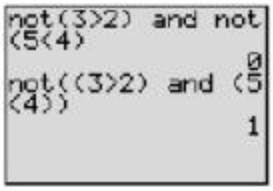


El letrero de la segunda puerta dice:

EN UNO DE ESTOS CUARTOS HAY UNA DAMA Y
EN UNO DE ESTOS CUARTOS HAY UN TIGRE.

Con esta información, el hombre pudo al fin elegir la puerta correcta. ¿Podría usted?
(La respuesta aparece en la pagina 106.)

Proposiciones matemáticas Es posible usar tablas de verdad para determinar los valores de verdad de proposiciones matemáticas.



El ejemplo 3(a) explica por qué $\sim(3 > 2) \wedge [\sim(5 < 4)]$ es falso. La calculadora muestra un 0. Para una proposición verdadera como $\sim[(3 > 2) \wedge (5 < 4)]$ muestra un 1.

EJEMPLO 3 Sea que p represente la proposición $3 > 2$, q represente $5 < 4$ y r represente $3 < 8$. Determine si las proposiciones siguientes son *verdaderas* o *falsas*.

(a) $\sim p \wedge \sim q$

Puesto que p es verdadera, $\sim p$ es falsa. Por la tabla de verdad de la conjunción *y*, si una parte de una proposición con "y" es falsa, la proposición compuesta también lo será. Por lo tanto, $\sim p \wedge \sim q$ es falsa.

(b) $\sim p \wedge \sim q$

Primero resuelva el interior del paréntesis. Como p es verdadera y q es falsa, $p \wedge q$ es falsa de acuerdo con la tabla de verdad de la *conjunción*. A continuación, apliquemos la negación. La negación de una proposición falsa es verdadera, lo cual hace que la proposición $\sim(p \wedge q)$ sea verdadera.

(c) $(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim p)$

Como p es verdadera, q es falsa y r es verdadera, esto genera que $\sim p$ sea falsa y $\sim q$ sea verdadera. Aplicando la tabla de verdad de la *conjunción*, resulta que las proposiciones $\sim p \wedge r$ y $\sim q \wedge \sim p$ son falsas. Finalmente,

$$\begin{array}{ccccc} (\sim p \wedge r) & \vee & (\sim q \wedge \sim p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{F} & \vee & \mathrm{F}, \end{array}$$

lo cual es falso de acuerdo con la tabla de verdad de la disyunción. (Para una solución alterna, vea el ejemplo 7(b).) ■

Cuando un cuantificador es utilizado con una conjunción o una disyunción, debemos tener cuidado en determinar el valor de verdad, como se muestra en el ejemplo siguiente.



George Boole (1815-1864) creció en medio de la pobreza. Su padre, un mercader londinense, le dio sus primeras lecciones de matemáticas y le enseñó a hacer instrumentos ópticos. En gran medida, Boole fue autodidacta. A los 16 años trabajó en una escuela elemental y a los 20 había abierto su propia escuela. Boole estudió matemáticas en sus ratos libres y murió por una enfermedad pulmonar a la edad de 49 años.

Las ideas de Boole han sido usadas para el diseño de computadoras y sistemas telefónicos.

EJEMPLO 4 Identifique si cada una de las proposiciones siguientes es *verdadera* o *falsa*.

(a) Para algunos números reales x, $x < 5$ y $x > 2$.

Reemplazando x por 3 (como un ejemplo) tenemos que $3 < 5$ y $3 > 2$; puesto que ambas son verdaderas, entonces la proposición dada, de acuerdo con la tabla de verdad para la conjunción, resulta verdadera. (Recuerde: *algunos* significa "al menos uno".)

(b) Para cada número real b, $b > 0$ o $b < 1$.

No importa qué número real se utilice para reemplazarlo por b, al menos una de las proposiciones $b > 0$ y $b < 1$ será verdadera. Como una proposición "o" es verdadera si uno de los componentes o ambos son verdaderos, la proposición completa resulta verdadera.

(c) Para todos los números reales x, $x^2 > 0$.

Dado que el cuantificador es un cuantificador universal, sólo necesitamos encontrar un caso en el cual la desigualdad sea falsa, para hacer que la proposición completa sea falsa. ¿Podemos encontrar un número real cuyo cuadrado no sea positivo (esto es, no mayor que 0)? Sí, sí podemos: el 0 es un número real (y es el *único*) cuyo cuadrado no es positivo. Por lo tanto, esta proposición es falsa. ■

Tablas de verdad En los ejemplos anteriores, el valor de verdad para una proposición dada se determinó usando las tablas de verdad básicas. Sin embargo, a la larga resulta más fácil crear una tabla de verdad completa para cada proposición específica.

Respuesta al problema de *¿La dama o el tigre?*

La dama está detrás de la puerta 2. Suponga que el letrero de la puerta 1 es verdadero. Entonces el letrero en la puerta 2 también será verdadero, pero esto no es posible, así que el letrero de la puerta 2 debe ser verdadero y el letrero de la puerta 1, falso. Como el letrero de la puerta 1 dice que la dama está en el cuarto 1 y esto es falso, entonces la dama debe estar detrás de la puerta 2.

Entonces, el valor de verdad final puede ser leído directamente de la tabla. El procedimiento para elaborar nuevas tablas de verdad se muestra en los siguientes ejemplos.

En este libro usaremos el formato estándar que mostramos a continuación para enumerar los posibles valores de verdad de las proposiciones compuestas que incluyen dos aseveraciones.

p	q	Proposición compuesta
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

EJEMPLO 5

(a) Elabore una tabla de verdad para $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$.

Comience por listar todas las posibles combinaciones de valores de verdad para p y q, como en la tabla anterior. Después, escriba los valores de verdad de $\sim p$, que son los opuestos de los de p.

p	q	$\sim p$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Sólo utilice la columna "$\sim p$" y "q", junto con la tabla de verdad de la conjunción *y*, para determinar los valores de verdad de $\sim p \wedge q$. Escríbalos en una columna aparte.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Luego incluya una columna para $\sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Por último, agregue una columna para la proposición compuesta entera. Para encontrar los valores de verdad, use la *disyunción* "o" para combinar $\sim p \wedge q$ con $\sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$(\sim p \wedge q) \vee \sim q$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	V

(b) Suponga que p y q son verdaderas. Encuentre el valor de verdad de $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$.

Observe en el primer renglón de la tabla de verdad anterior, donde tanto p como q tienen valores de verdad V (verdadero). Si mira al final del renglón, verá que la proposición compuesta es falsa. ■

EJEMPLO 6 Construya la tabla de verdad para $p \wedge (\sim p \vee \sim q)$.

Proceda como se muestra a continuación:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

■

Si una proposición compuesta incluye tres componentes p, q y r, usaremos el formato siguiente para construir la tabla de verdad.

p	q	r	Proposición compuesta
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	



Émile, marquesa de Châtelet (1706-1749), participó en la actividad científica de la generación posterior a Newton y Leibniz. Recibió educación en ciencias, música y literatura, y estudiaba matemáticas (era 1733) cuando inició una larga relación intelectual con el filósofo François Voltaire (1694-1778). Ella y Voltaire compitieron independientemente en 1738 por el premio que ofrecía la Academia Francesa sobre el tema del fuego. Aunque el trabajo de la marquesa no ganó el premio, su disertación fue publicada por la academia en 1744. Durante los últimos cuatro años de su vida tradujo los *Principia* de Newton del latín al francés (la única traducción al francés hasta la fecha).

EJEMPLO 7

(a) Elabore una tabla de verdad para $(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim p)$.

Esta proposición tiene tres componentes, p, q y r. La tabla de verdad, por lo tanto, requiere de ocho renglones para mostrar todas las posibles combinaciones de valores de verdad de p, q y r. Sin embargo, la tabla de verdad final puede encontrarse de la misma manera que las tablas anteriores.

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \wedge r$	$\sim q$	$\sim q \wedge \sim p$	$(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim p)$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V

(b) Suponga que p es verdadera, q es falsa y r es verdadera. Encuentre el valor de verdad de $(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim p)$.

De acuerdo con el tercer renglón de la tabla de verdad de el inciso (a), la proposición compuesta es falsa. (Éste es un método alterno para resolver el inciso (c) del ejemplo 3.) ■

Solución de problemas

Una estrategia para la resolver problemas es descubrir un patrón y luego usar el razonamiento inductivo. Esta estrategia se utiliza en el ejemplo siguiente.

Número de proposiciones	Número de renglones
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$

EJEMPLO 8 Si n es un número natural y una proposición lógica se compone de n proposiciones, ¿cuántos renglones aparecerán en la tabla de verdad para la proposición compuesta?

Para responder esta pregunta, examinemos algunas de las tablas de verdad anteriores de esta sección. La tabla de verdad para la negación tiene una proposición y dos renglones. Las tablas de verdad para la conjunción y la disyunción tienen dos componentes y cada una tiene cuatro renglones. La tabla de verdad en el ejemplo 7(a) tiene tres proposiciones componentes y ocho renglones. Resumiendo estas observaciones en una tabla, como la del margen, se advierte un patrón inicial. El razonamiento inductivo nos lleva a la conjetura de que, si una proposición lógica se compone de n componentes, tendrá 2^n renglones. Esto puede demostrarse usando conceptos más avanzados. ■

El resultado del ejemplo 8 recuerda la fórmula para el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos.

Número de renglones en una tabla de verdad

Una proposición lógica con n componentes tendrá 2^n renglones en su tabla de verdad.

Método alternativo para la elaboración de tablas de verdad Después de haber elaborado un número razonable de tablas de verdad, algunas personas prefieren el método abreviado que se muestra en el ejemplo 9, el cual repite los ejemplos 5 y 7.

EJEMPLO 9 Elabore la tabla de verdad para cada proposición.

(a) $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$

Comience por asignar valores de verdad para $\sim p$ y q.

p	q	$(\sim p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$\sim q$
V	V	F		V		
V	F	F		F		
F	V	V		V		
F	F	V		F		

Ahora use la tabla de verdad de la *conjunción* para obtener los valores de verdad de $\sim p \wedge q$.

p	q	$(\sim p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$\sim q$
V	V	F	F	V		
V	F	F	F	F		
F	V	V	V	V		
F	F	V	F	F		

Después omita las dos columnas preliminares de valores de verdad para $\sim p$ y q, e inserte los valores de verdad para $\sim q$. Finalmente, use la tabla de verdad de la *disyunción*.

p	q	$(\sim p \wedge q) \vee \sim q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

p	q	$(\sim p \wedge q) \vee \sim q$
V	V	F F
V	F	F V
F	V	V F
F	F	F V

Estos pasos pueden resumirse como sigue:

p	q	$(\sim p \wedge q) \vee \sim q$
V	V	F F V F F
V	F	F F F V V
F	V	V V V V F
F	F	V F F V V
		① ② ① ④ ③

Los números encerrados en círculos indican el orden en el que se determinaron las diferentes columnas.

(b) $(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim p)$

Trabaje como se indica a continuación:

p	q	r	$(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim p)$
V	V	V	F F V F F F F
V	V	F	F F F F F F F
V	F	V	F F V F V F F
V	F	F	F F F F V F F
F	V	V	V V V V F F V
F	V	F	V F F F F F V
F	F	V	V V V V V V V
F	F	F	V F F V V V V
			① ② ① ⑤ ③ ④ ③

■

Proposiciones equivalentes Una aplicación de las tablas de verdad consiste en mostrar que dos proposiciones son equivalentes; por definición, dos proposiciones son **equivalentes** si tienen el mismo valor de verdad en *todas* las situaciones posibles. Las columnas de cada tabla de verdad que fueron las últimas en llenarse serán exactamente las mismas para las proposiciones equivalentes.

EJEMPLO 10 ¿Son equivalentes las proposiciones?

$$\sim p \wedge \sim q \quad \text{y} \quad \sim(p \vee q)$$

Para saberlo, se hace una tabla de verdad para cada una de las proposiciones con el resultado siguiente:

p	q	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$\sim(p \vee q)$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Puesto que los valores son los mismos en todos los casos, como se muestra en las columnas en negritas, las proposiciones $\sim p \wedge \sim q$ y $\sim(p \vee q)$ son equivalentes. La equivalencia se escribe con un símbolo de tres barras, $\equiv$. Usando este símbolo, $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q)$. ■

Del mismo modo, las proposiciones $\sim p \vee \sim q$ y $\sim(p \wedge q)$ son equivalentes. Llamamos a estas equivalencias las leyes de De Morgan.

Leyes de De Morgan

Para cualesquiera proposiciones p y q,

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

y

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q.$$

(Compare las proposiciones lógicas de las leyes de De Morgan con sus versiones correspondientes de la teoría de conjuntos.) Estas leyes pueden utilizarse para encontrar las negaciones de ciertas proposiciones compuestas.

EJEMPLO 11 Encuentre la negación de cada una de las proposiciones siguientes, utilizando las leyes de De Morgan.

(a) Yo obtuve una A o yo obtuve una B.

Si p representa "Yo obtuve una A" y q "Yo obtuve una B", entonces la proposición compuesta se simboliza por $p \vee q$. La negación de $p \vee q$ es $\sim(p \vee q)$; de acuerdo con una de las leyes de De Morgan, esto es equivalente a

$$\sim p \wedge \sim q\,,$$

o, en otras palabras,

Yo no obtuve una A y yo no obtuve una B.

Esta negación es razonable (la proposición original indica que yo obtuve cualquiera de las dos: una A o una B); la negación dice que yo no obtuve *ninguna* de las dos calificaciones.

(b) Ella no lo intentará y él tendrá éxito.

De una de las leyes de De Morgan, $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$, así que la negación resulta ser

Ella lo intentará o él no tendrá éxito.

(c) $\sim p \vee (q \wedge \sim p)$

Niegue ambos componentes de la proposición y cambie $\vee$ por $\wedge$.

$$\sim[\sim p \vee (q \wedge \sim p)] \equiv p \wedge \sim(q \wedge \sim p)$$

Aplicando una vez más la ley de De Morgan,

$$\begin{aligned} p \wedge \sim(q \wedge \sim p) &\equiv p \wedge (\sim q \vee \sim(\sim p)) \\ &\equiv p \wedge (\sim q \vee p) \end{aligned}$$

Una tabla de verdad mostrará que las proposiciones

$$\sim p \vee (q \wedge \sim p) \quad \text{y} \quad p \wedge (\sim q \vee p)$$

son ambas negaciones. ■

3.2 EJERCICIOS

Utilice los conceptos presentados en esta sección para responder los ejercicios 1 al 6.

1. Si q es falsa, ¿cuál debe ser el valor de verdad de $(p \wedge \sim q) \wedge q$?
2. Si q es verdadera, ¿cuál debe ser el valor de verdad de $q \vee (q \wedge \sim p)$?
3. Si $p \wedge q$ es verdadera y p es verdadera, entonces q debe ser _____.
4. Si $p \vee q$ es falsa, y p es falsa entonces q debe ser _____.
5. Si $\sim(p \vee q)$ es verdadera, ¿cuáles deben ser los valores de verdad de sus proposiciones componentes?
6. Si $\sim(p \wedge q)$ es falsa, ¿cuáles deben ser los valores de verdad de sus proposiciones componentes?

Sea que p representa una proposición falsa y q una proposición verdadera. Encuentre el valor de verdad de las proposiciones mostradas a continuación:

7. $\sim p$
8. $\sim q$
9. $p \vee q$
10. $p \wedge q$
11. $p \vee \sim q$
12. $\sim p \wedge q$
13. $\sim p \vee \sim q$
14. $p \wedge \sim q$
15. $\sim(p \wedge \sim q)$
16. $\sim(\sim p \vee \sim q)$
17. $\sim[\sim p \wedge (\sim q \vee p)]$
18. $\sim[(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q]$
19. ¿La proposición $3 \geq 1$ es una conjunción o una disyunción? ¿Por qué?
20. ¿Por qué es verdadera la proposición $6 \geq 2$? ¿Por qué $6 \geq 6$ es verdadera?

Sea que p represente una proposición verdadera y q y r representen proposiciones falsas. Encuentre el valor de verdad de las proposiciones compuestas dadas a continuación:

21. $(p \wedge r) \vee \sim q$
22. $(q \vee \sim r) \wedge p$
23. $p \wedge (q \vee r)$
24. $(\sim p \wedge q) \vee \sim r$
25. $\sim(p \wedge q) \wedge (r \vee \sim q)$
26. $(\sim r \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge q)$
27. $\sim[(\sim p \wedge q) \vee r]$
28. $\sim[r \vee (\sim q \wedge \sim p)]$

Sea que p represente la proposición $2 > 7$, *q represente* $8 \not> 6$ *y r represente* $19 \leq 19$. *Determine el valor de verdad de las proposiciones compuestas dadas a continuación:*

29. $p \wedge r$
30. $p \vee \sim q$
31. $\sim q \vee \sim r$
32. $\sim p \wedge \sim r$
33. $(p \wedge q) \vee r$
34. $\sim p \vee (\sim r \vee \sim q)$
35. $(\sim r \wedge q) \vee \sim p$
36. $\sim(p \vee \sim q) \vee \sim r$

Proporcione el número de renglones en las tablas de verdad para cada una de las proposiciones compuestas siguientes:

37. $p \vee \sim r$
38. $p \wedge (r \wedge \sim s)$
39. $(\sim p \wedge q) \vee (\sim r \vee \sim s) \wedge r$
40. $[(p \vee q) \wedge (r \wedge s)] \wedge (t \vee \sim p)$
41. $[(\sim p \wedge \sim q) \wedge (\sim r \wedge s \wedge \sim t)] \wedge (\sim u \vee \sim v)$
42. $[(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim r \vee \sim s)] \vee [(\sim m \wedge \sim n) \wedge (u \wedge \sim v)]$
43. Si la tabla de verdad para cierta proposición compuesta tiene 64 renglones, ¿cuántos componentes distintos tiene?
44. ¿Es posible que la tabla de verdad de una proposición compuesta tenga exactamente 48 renglones? ¿Por qué sí o por qué no?

Elabore una tabla de verdad para cada una de las proposiciones compuestas siguientes:

45. $\sim p \wedge q$
46. $\sim p \vee \sim q$
47. $\sim(p \wedge q)$
48. $p \vee \sim q$
49. $(q \vee \sim p) \vee \sim q$
50. $(p \wedge \sim q) \wedge p$

51. $\sim q \wedge (\sim p \vee q)$ **52.** $\sim p \vee (\sim q \wedge \sim p)$ **53.** $(p \vee \sim q) \wedge (p \wedge q)$

54. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)$ **55.** $(\sim p \wedge q) \wedge r$ **56.** $r \vee (p \wedge \sim q)$

57. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim r \vee \sim p)$ **58.** $(\sim r \vee \sim p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

59. $\sim(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim r \vee \sim s)$ **60.** $(\sim r \vee s) \wedge (\sim p \wedge q)$

Utilice una de las leyes de De Morgan para escribir la negación de cada una de las proposiciones siguientes:

61. Puedes pagarme ahora o puedes pagarme después.

62. Yo no voy o ella va.

63. Es verano y no hay nieve.

64. $1/2$ es un número positivo y -12 es menor que cero.

65. Yo dije sí, pero ella dijo no.

66. Pauline Mula trató de vender el libro, pero no pudo hacerlo.

67. $5 - 1 = 4$ y $9 + 12 \neq 7$

68. $3 < 10$ o $7 \neq 2$

69. Cupid o Vixen conducirán el trineo de Santa la próxima Navidad.

70. El abogado y el cliente se presentaron en la corte.

Identifique si cada una de las proposiciones siguientes es falsa o verdadera.

71. Para cada número real y, $y < 13$ o $y > 6$.

72. Para cada número real t, $t > 9$ o $t < 9$.

73. Para algún entero p, $p \geq 4$ y $p \leq 4$.

74. Existe un entero n tal que $n > 0$ y $n < 0$.

75. Complete la tabla de verdad para la *disyunción exclusiva*. El símbolo $\underline{\vee}$ representa "uno o el otro es verdadero, pero no ambos".

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Disyunción exclusiva

76. Los abogados algunas veces usan el término "y/o". ¿A qué uso de la palabra *o*, inclusivo o exclusivo, corresponde el término?



Determine si las siguientes proposiciones compuestas son verdaderas *o* falsas. *Recuerde que* $\underline{\vee}$ *es la* disyunción exclusiva; *esto es, debe suponer que* "p o q es verdadera, pero no ambas".

77. $3 + 1 = 4 \ \underline{\vee} \ 2 + 5 = 7$

78. $3 + 1 = 4 \ \underline{\vee} \ 2 + 5 = 9$

79. $3 + 1 = 7 \ \underline{\vee} \ 2 + 5 = 7$

80. $3 + 1 = 7 \ \underline{\vee} \ 2 + 5 = 9$

3.3 Condicional y circuitos

Condicionales

"Si lo construyes, él vendrá."
—La Voz en la película de 1990 *Field of Dreams*.



En la película *Field of Dreams* Ray Kinsella, un granjero de Iowa, escuchó una voz proveniente del cielo y lo interpretó como una promesa de que si construía un campo de béisbol en su maizal, entonces el fantasma de Joe Jackson (una estrella del béisbol de principios del siglo XX) vendría a jugar en él. La promesa le llegó en la forma de una proposición condicional. Una proposición **condicional** es una proposición compuesta que usa el conectivo *si... entonces*. Por ejemplo, algunas proposiciones condicionales son:

Si leo durante muchas horas, *entonces* me dolerá la cabeza.
Si las miradas mataran, *entonces* estaría muerto.
Si él no regresa pronto, *entonces* tendrás que ir a buscarlo.

En cada una de estas proposiciones condicionales, el componente que aparece después de la palabra *si* impone una condición (aunque no necesariamente la única) con la cual la proposición que sigue a la palabra *entonces* será verdadera. Por ejemplo, la afirmación "Si la temperatura está por encima de los 90° F, entonces iré a las montañas" establece una condición posible bajo la cual iré a las montañas: si la temperatura es de más de 90° F.

La condicional se representa mediante una flecha, de modo que la proposición "si p, entonces q" se simboliza como

$$p \rightarrow q.$$

La expresión $p \rightarrow q$ se lee como "p implica a q" o "si p, entonces q". En la condicional $p \rightarrow q$, la proposición p se denomina **antecedente** (o **hipótesis**), mientras que a la proposición q se le llama **consecuente** (o **conclusión**).

El conectivo condicional no siempre se expresa de manera explícita. Esto es, podría estar oculto en una expresión común y corriente. Por ejemplo, la proposición

Las niñas grandes no lloran

puede escribirse en la forma *si... entonces* como sigue:

Si eres una niña grande, entonces no debes llorar.

Veamos otro ejemplo. La afirmación

Es difícil estudiar cuando se está distraído

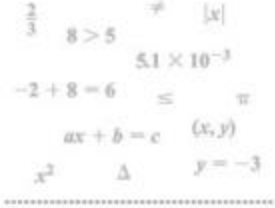
puede escribirse

Si se está distraído, entonces es difícil estudiar.

En la cita de la película *Field of Dreams* mencionada antes, la palabra "entonces" no aparece, sino que se sobrentiende por el contexto. En esa expresión, "tú la construyes" es el antecedente y "él vendrá" es el consecuente.

La tabla de verdad de la condicional es un poco más difícil de determinar que las demás tablas de la sección previa. Para ver cómo se elabora la tabla de verdad de la condicional, analicemos una declaración hecha por una mujer de la política, la senadora Bridget Terry:

Si resulto electa, entonces los impuestos se reducirán.



La importancia de los símbolos fue enfatizada por el filósofo y lógico estadounidense Charles Sanders Peirce (1839-1914), quien afirmó que los seres humanos son organismos que tienden a utilizar símbolos o signos. En una ocasión, Bertrand Rusell dijo que la notación simbólica es la mitad de las matemáticas.

Como antes, hay cuatro posibles combinaciones de valores de verdad para los dos componentes de la proposición. Sea p la proposición "Si resulto electa" y q "los impuestos se reducirán".

Conforme analizamos las cuatro posibilidades, sería útil pensar en términos de lo siguiente: "¿Mintió la senadora Terry?". Si lo hizo, entonces la proposición condicional se considera falsa; si no mintió, entonces la proposición condicional es verdadera.

Posibilidad	¿Electa?	¿Los impuestos se reducen?	
1	Sí	Sí	p es V, q es V
2	Sí	No	p es V, q es F
3	No	Sí	p es F, q es V
4	No	No	p es F, q es F

Las cuatro posibilidades son como sigue:

1. En el primer caso, suponga que la senadora fue electa y los impuestos bajaron (p es V y q es V). La senadora dijo la verdad, de modo que escribimos V en la primera fila de la tabla de verdad. (No estamos afirmando que los impuestos bajaron *debido a que* ella fue elegida; es posible que no haya tenido nada que ver con eso.)
2. En el segundo caso, suponga que la senadora resultó electa y los impuestos no bajaron (p es V, q es F). Entonces la senadora no dijo la verdad (esto es, ella mintió). Así, ponemos F en la segunda fila de la tabla de verdad.
3. En el tercer caso, suponga que la senadora fue derrotada pero los impuestos bajaron de todos modos (p es F, q es V). La senadora Terry no mintió: prometió una reducción de impuestos sólo si resultaba electa. No dijo nada acerca de qué pasaría si no resultaba electa. De hecho, su promesa de campaña no da información sobre lo que ocurriría en caso de que perdiera. Dado que no podemos decir que la senadora mintió, ponga V la tercera fila de la tabla de verdad.
4. En el último caso, suponga que la senadora fue derrotada y que los impuestos no bajaron (p es F, q es F). No podemos culparla, dado que ella prometió reducir los impuestos sólo si resultaba elegida. De este modo, en la última fila de la tabla de verdad va una V.

La tabla de verdad ya concluida para la condicional queda como sigue:

Tabla de verdad para la condicional Si p, entonces q

Si p, entonces q		
p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

```
PROGRAM:SIGN
:Input A
:If A>0
:Then
:Disp "POSITIVE"
:
:
```

```
PROGRAM:SIGN
:
:Else
:Disp "NOT POSIT
IVE"
:End
:
```

```
prgmSIGN
?3
POSITIVE
                Done
```

```
prgmSIGN
?-5
NOT POSITIVE
                Done
```

Las proposiciones condicionales son útiles para la creación de programas. El pequeño programa de las primeras dos pantallas determina si un número es positivo. Observe las líneas que empiezan con *If* (si) y *Then* (entonces).

Hay que hacer hincapié en que el uso del conectivo de la condicional no indica una condición de causa-efecto. Es posible colocar una flecha entre cualesquiera dos proposiciones para generar una proposición compuesta. Por ejemplo, la proposición

Si apruebo matemáticas, entonces el sol saldrá mañana

es verdadera, dado que el consecuente lo es. (Vea el recuadro después del ejemplo 1.) Sin embargo, no hay una relación de causa-efecto entre que yo sea aprobado en matemáticas y que el sol salga mañana. El sol saldrá sin importar qué calificación haya obtenido en el curso.

EJEMPLO 1 Dadas p, q y r falsas, determine la tabla de verdad de la proposición $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim r \rightarrow q)$.

Usando el método abreviado que mostramos en el ejemplo 2 de la sección anterior, podemos reemplazar p, q y r por F (ya que cada una es falsa) y proceder como antes, usando las tablas de verdad de la negación y la condicional según sea necesario.

$$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim r \rightarrow q)$$
$$(\mathrm{F} \rightarrow \sim \mathrm{F}) \rightarrow (\sim \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F})$$
$$(\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{V}) \rightarrow (\mathrm{V} \rightarrow \mathrm{F}) \qquad \text{Usamos la tabla de verdad de la negación.}$$
$$\mathrm{V} \rightarrow \mathrm{F} \qquad \text{Usamos la tabla de verdad de la condicional.}$$
$$\mathrm{F}$$

La proposición $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim r \rightarrow q)$ es falsa, cuando p, q y r son falsas. ■

Las siguientes observaciones se desprenden de la tabla de verdad para $p \rightarrow q$.

Características especiales de las proposiciones condicionales

1. $p \rightarrow q$ es falsa sólo cuando el antecedente es *verdadero* y el consecuente es *falso*.
2. Si el antecedente es *falso*, entonces $p \rightarrow q$ es automáticamente *verdadera*.
3. Si el consecuente es *verdadero*, entonces $p \rightarrow q$ es automáticamente *verdadera*.

EJEMPLO 2 Escriba *falso* o *verdadero* para cada proposición. Aquí V representa una proposición verdadera y F una falsa.

(a) $\mathrm{V} \rightarrow (6 = 3)$

Dado que el antecedente es verdadero mientras que el consecuente, $6 = 3$, es falso, la proposición dada es falsa, de acuerdo con la primera condición mencionada anteriormente.

(b) $(5 < 2) \rightarrow \mathrm{F}$

El antecedente es falso, entonces la proposición dada es verdadera de acuerdo con la segunda condición.

(c) $(3 \neq 2 + 1) \rightarrow \mathrm{V}$

El consecuentes es verdadero, lo que hace que la proposición sea verdadera de acuerdo con la tercera característica de las proposiciones condicionales. ■

Las tablas de verdad para proposiciones compuestas que incluyen condicionales se elaboran utilizando las técnicas descritas en la sección anterior.

EJEMPLO 3 Elabore una tabla de verdad para cada proposición.

(a) $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$

Primero, inserte los valores de verdad de $\sim p$ y de $\sim q$. Luego encuentre el valor de verdad de $\sim p \rightarrow \sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

A continuación utilice $\sim p$ y q para determinar los valores de verdad de $\sim p \wedge q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

Ahora, determine los valores de verdad de $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F

(b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$

Efectúe pasos similares a los realizados en el inciso anterior.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

■

Como muestra la tabla de verdad del ejemplo 3(b), la proposición $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$ siempre es verdadera, sin importar cuáles sean los valores de verdad de sus componentes. A esta clase de proposición se le llama **tautología**. Otros ejemplos de tautologías (como puede comprobarse mediante sus tablas de verdad correspondientes) serían $p \vee \sim p$, $p \rightarrow p$, $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(q \wedge p)$, etc. A propósito, las tablas de

verdad del ejemplo 3 se pudieron haber encontrado también mediante el método alternativo mostrado en la sección anterior.

Negación de un condicional Suponga que alguien expresa la siguiente proposición condicional:

"Si llueve, entonces llevaré mi paraguas."

¿Cuándo estará mintiendo esta persona? El único caso en el cual mentiría sería cuando lloviera y la persona *no* llevara su paraguas. Suponga que p representa "llueve" y q representa "llevaré mi paraguas"; usted podría sospechar que la proposición simbólica

$$p \wedge \sim q$$

es un buen candidato para ser la negación de $p \rightarrow q$. Esto es,

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q.$$

Sucede que éste es realmente el caso, como indica la tabla de verdad siguiente.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

$\equiv$

Negación de $p \rightarrow q$

La negación de $p \rightarrow q$ es $p \wedge \sim q$.

Dado que

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q,$$

al negar cada expresión tenemos

$$\sim[\sim(p \rightarrow q)] \equiv \sim(p \wedge \sim q).$$

El lado izquierdo de la equivalencia anterior es $p \rightarrow q$, y al lado derecho de la misma se le puede aplicar una de las leyes de De Morgan:

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee \sim(\sim q)$$
$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

El último renglón indica que una proposición condicional puede escribirse como una disyunción.

Cómo escribir una condicional como una disyunción

$p \rightarrow q$ es equivalente a $\sim p \vee q$.

EJEMPLO 4 Escriba la negación de cada proposición.

(a) Si tú lo construyes, él vendrá.

Si b representa "tú lo construyes" y q representa "él vendrá", entonces la proposición dada puede escribirse simbólicamente como $b \rightarrow q$. La negación de $b \rightarrow q$, como se mostró antes, es $b \wedge \sim q$, de modo que la negación de esta proposición es

Tú lo construyes y él no vendrá.

(b) Todos los perros tienen pulgas.

Primero, debemos expresar esta proposición dada en la forma *si... entonces*:

Si es un perro, entonces tiene pulgas.

Con base en nuestro análisis anterior, la negación es

Es un perro y no tiene pulgas. ■

Un error muy común de los estudiantes es tratar de escribir la negación de una proposición condicional como otra proposición condicional. Como se vio en el ejemplo 4, la negación de una condición condicional se escribe como una conjunción.

EJEMPLO 5 Escriba una proposición equivalente para cada condicional sin utilizar el conectivo *si... entonces*.

(a) Si el equipo de los Cachorros gana el banderín, entonces Gwen estará feliz.

Puesto que la condicional $p \rightarrow q$ es equivalente $\sim p \vee q$, sea p la proposición "El equipo de los Cachorros gana el banderín" y q la proposición "Gwen estará feliz". La condicional se expresará entonces como

El equipo de los Cachorros no gana el banderín o Gwen estará feliz.

(b) Si es de Borden, tiene que ser bueno.

Si p representa "es de Borden" y q representa "tiene que ser bueno", la condicional podría reescribirse como

No es de Borden o tiene que ser bueno. ■

Circuitos Una de las primeras aplicaciones no matemáticas de la lógica simbólica fue la que utilizó Claude Shannon en su tesis de maestría en 1937. Shannon mostró cómo la lógica podía usarse como un auxiliar en el diseño de circuitos eléctricos. Su trabajo fue adoptado inmediatamente por los diseñadores de computadoras. Como aún se encontraban en su etapa de desarrollo, las ideas de Shannon permitieron simplificar y abaratar los costos de construcción de las computadoras.

Para ver cómo funcionan las ideas de Shannon, observe el interruptor eléctrico que aparece en la figura 1. Debemos suponer que la corriente fluye a través del interruptor cuando está cerrado, y no cuando está abierto.



FIGURA 1

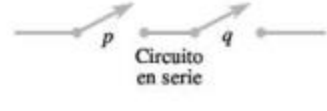
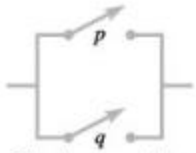


FIGURA 2

La figura 2 muestra dos interruptores conectados *en serie*; en un circuito así la corriente sólo fluirá cuando ambos interruptores estén cerrados. Observe cuánto se parece un circuito en serie a la conjunción $p \wedge q$. Sabemos que $p \wedge q$ es verdadera sólo cuando tanto p como q también lo son.



Circuito en paralelo

FIGURA 3

El circuito que correspondería a la disyunción $p \vee q$ sería un circuito *en paralelo*, como el de la figura 3. Aquí, la corriente fluye si cualquiera de los dos, p o q, está cerrado o si ambos, p y q, están cerrados.

El circuito de la figura 4 correspondería a la proposición $(p \vee q) \wedge \sim q$, la cual es una proposición compuesta que incluye una conjunción y una disyunción.

Para simplificar un circuito eléctrico es necesario recurrir al concepto de las proposiciones equivalentes que vimos en la sección 3.2. Recuerde que dos proposiciones son equivalentes si tienen exactamente la misma tabla de verdad. El símbolo $\equiv$ se usa para indicar que dos proposiciones son equivalentes. Algunas de las proposiciones equivalentes que necesitaremos se muestran en el recuadro siguiente:

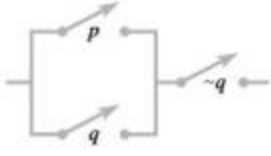


FIGURA 4

Proposiciones equivalentes utilizadas para simplificar circuitos

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \qquad p \vee p \equiv p$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \wedge p \equiv p$$
$$p \to q \equiv \sim q \to \sim p \qquad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$p \to q \equiv \sim p \vee q \qquad \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Si V represente cualquier proposición verdadera y F representa cualquier proposición falsa, entonces

$$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V} \qquad p \vee \sim p \equiv \mathbf{V}$$
$$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} \qquad p \wedge \sim p \equiv \mathbf{F}.$$

Los circuitos pueden usarse como modelos de proposiciones compuestas, donde un interruptor cerrado correspondería a verdadero (V), mientras que un interruptor abierto correspondería a F. El método para simplificar circuitos se explica en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 Simplifique el circuito de la figura 5.

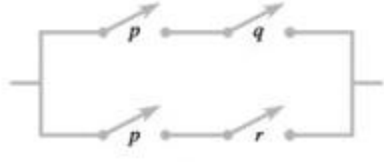


FIGURA 5

En la parte superior de la figura 5, p y q están conectados en serie, mientras que en la parte inferior son p y r los que están conectados en serie. Esto se interpreta como las proposiciones compuestas $p \wedge q$ y $p \wedge r$, respectivamente. Estas dos conjunciones están conectadas en paralelo, como se indica por la figura vista como un todo. Por lo tanto, escribimos la disyunción de las dos conjunciones como:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$



FIGURA 6

(Imagine que los dos interruptores con "p" están controlados por una misma palanca.) De acuerdo con uno de los pares de proposiciones equivalentes del recuadro anterior,

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r),$$

el cual tiene el circuito de la figura 6. Este circuito es el equivalente lógico del de la figura 5, y contiene sólo tres interruptores en vez de cuatro (lo cual bien podría llevar a grandes ahorros en costos de manufactura). ■

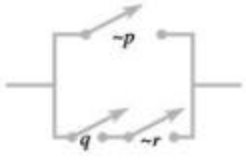


FIGURA 7

EJEMPLO 7 Trace un circuito para $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$.

Según la lista de proposiciones equivalentes del recuadro, $p \rightarrow q$ es equivalente a $\sim p \vee q$. Esta equivalencia da $p \rightarrow (q \wedge \sim r) \equiv \sim p \vee (q \wedge \sim r)$, cuyo circuito aparece en forma de diagrama en la figura 7. ■

3.3 EJERCICIOS

Reescriba cada proposición utilizando el conectivo si... entonces. *Parafrasee o agregue palabras cuando sea necesario.*

1. Debe estar vivo si está respirando.
2. Puede creerlo si lo ve en Internet.
3. Lorri Morgan visita Hawaii cada verano.
4. El código postal de Tom Shaffer es 216.
5. Todas las pinturas cuentan una historia.
6. A todos los infantes de marina les gusta el campamento de entrenamiento.
7. Ningún conejillo de Indias es un erudito.
8. No hay koalas en Texas.
9. Oso Corredor ama a Pequeña Paloma Blanca.
10. Un consumidor de opio no puede tener autocontrol.

En los ejercicios del 11 al 18, determine si cada proposición es falsa *o* verdadera.

11. Si el antecedente de una proposición condicional es falso, la proposición condicional es verdadera.
12. Si el consecuente de una proposición condicional es verdadero, la proposición condicional es verdadera.
13. Si q es verdadera, entonces $(p \wedge q) \rightarrow q$ es verdadera.
14. Si p es verdadera, entonces $\sim p \rightarrow (q \vee r)$ es verdadera.
15. La negación de "Si los cerdos vuelan, yo lo creería" es "Si los cerdos no vuelan, yo no lo creería".
16. La proposición "Si vuela, entonces es un pájaro" y "No vuela no es un pájaro" son proposiciones lógicamente equivalentes.
17. Dada una $\sim p$ que es verdadera y una q que es falsa, la condicional $p \rightarrow q$ sería verdadera.
18. Dada una $\sim p$ que es falsa y una q que es falsa, la condicional $p \rightarrow q$ sería verdadera.
19. En pocas palabras, explique cómo determinar el valor de verdad de una proposición condicional.
20. Explique por qué la proposición "Si $3 = 5$, entonces $4 = 6$" es verdadera.

Clasifique como verdadera *o* falsa *a cada condicional. Aquí,* V *representa una proposición verdadera y* F *una proposición falsa.*

21. $F \rightarrow (4 \neq 7)$
22. $V \rightarrow (6 < 3)$
23. $(6 \geq 6) \rightarrow F$
24. $F \rightarrow (3 \neq 3)$
25. $(4 = 11 - 7) \rightarrow (8 > 0)$
26. $(4^2 \neq 16) \rightarrow (4 - 4 = 8)$

Sea s la proposición "Ella tiene una serpiente por mascota", *p* "él entrena ponies" y *m* "ellos crían monos". *Exprese cada proposición compuesta en palabras.*

27. $\sim m \rightarrow p$ **28.** $p \rightarrow \sim m$ **29.** $s \rightarrow (m \wedge p)$

30. $(s \wedge p) \rightarrow m$ **31.** $\sim p \rightarrow (\sim m \vee s)$ **32.** $(\sim s \vee \sim m) \rightarrow \sim p$

Sea b la proposición "Conduzco mi bicicleta", *r* "llueve" *y p* "el juego se canceló". *Exprese cada proposición compuesta en símbolos.*

33. Si llueve, entonces conduzco mi bicicleta.

34. Si conduzco mi bicicleta, entonces el juego se canceló.

35. Si no conduzco mi bicicleta, entonces no llueve.

36. Si el juego se canceló, entonces no llueve.

37. Conduzco mi bicicleta, o si el juego se canceló entonces llueve.

38. El juego se canceló, y si llueve entonces no conduzco mi bicicleta.

39. Conduciré mi bicicleta si no llueve.

40. Llueve si el juego se canceló.

Encuentre los valores de verdad de cada proposición. Suponga que p y r son falsas, y q es verdadera.

41. $\sim r \rightarrow q$ **42.** $\sim p \rightarrow \sim r$ **43.** $q \rightarrow p$

44. $\sim r \rightarrow p$ **45.** $p \rightarrow q$ **46.** $\sim q \rightarrow r$

47. $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$ **48.** $(\sim r \vee p) \rightarrow p$ **49.** $\sim q \rightarrow (p \wedge r)$

50. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (p \wedge \sim r)$ **51.** $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$ **52.** $(p \rightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow r)$

53. Explique por qué, si sabemos que p es verdadera, también sabemos que

$$[r \vee (p \vee s)] \rightarrow (p \vee q)$$

es verdadera, aun si no conocemos los valores de verdad de q, r y s.

54. Elabore una proposición verdadera que incluya una condicional, una conjunción, una disyunción y una negación (no necesariamente en ese orden), que conste de las proposiciones componentes p, q y r, todas ellas falsas.

Elabore una tabla de verdad para cada proposición. Identifique cualquier tautología.

55. $\sim q \rightarrow p$ **56.** $p \rightarrow \sim q$ **57.** $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow p$

58. $(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim q$ **59.** $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ **60.** $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

61. $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$ **62.** $r \rightarrow (p \wedge \sim q)$ **63.** $[(r \vee p) \wedge \sim q] \rightarrow p$

64. $(\sim r \rightarrow s) \vee (p \rightarrow \sim q)$ **65.** $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (s \rightarrow r)$

66. ¿Cuál es el número mínimo de letras F que deben aparecer en la columna final de una tabla de verdad para que estemos seguros de que la proposición no es una tautología?

Escriba la negación de cada proposición. Recuerde que la negación de $p \rightarrow q$ *es* $p \wedge \sim q$.

67. Si ésa es una auténtica alfombra persa, quedaré sorprendido.

68. Si Elvia alcanza esa nota, romperá los vidrios.

69. Si las medidas inglesas no se convierten a medidas métricas, entonces la aeronave se estrellará en la superficie de Marte.

70. Si usted dice "Sí, acepto", entonces se sentirá feliz el resto de su vida.

71. "Si quiere ser feliz el resto de su vida, nunca tome por esposa a una mujer bonita". *Jimmy Soul*

72. Si amarte es un error, no quiero estar en lo correcto.

Escriba cada proposición como una proposición equivalente que no use el conectivo si... entonces. *Recuerde que* $p \rightarrow q$ *es equivalente a* $\sim p \vee q$.

73. Si cuidas tus plantas con ternura y cariño, florecerán.

74. Si el cheque está en la correspondencia, me sentiría sorprendido.

75. Si ella no lo hace, él lo hará.

76. Si yo digo sí, ella dice no.

77. Todos los residentes de Butte lo son también de Montana.

78. Todas las mujeres alguna vez fueron niñas.

Utilice tablas de verdad para determinar cuáles de los pares de proposiciones son equivalentes.

79. $p \rightarrow q$; $\sim p \vee q$

80. $\sim(p \rightarrow q)$; $p \wedge \sim q$

81. $p \rightarrow q$; $\sim q \rightarrow \sim p$

82. $q \rightarrow p$; $\sim p \rightarrow \sim q$

83. $p \rightarrow \sim q$; $\sim p \vee \sim q$

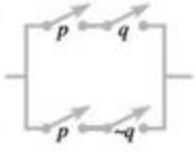
84. $p \rightarrow q$; $q \rightarrow p$

85. $p \wedge \sim q$; $\sim q \rightarrow \sim p$

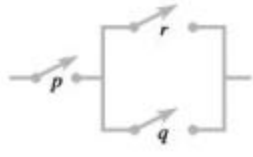
86. $\sim p \wedge q$; $\sim p \rightarrow q$

Escriba una proposición lógica que represente cada uno de los circuitos siguientes. Cuando sea posible, simplifique cada circuito.

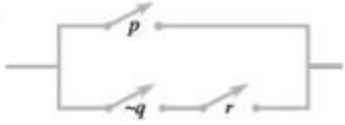
87.



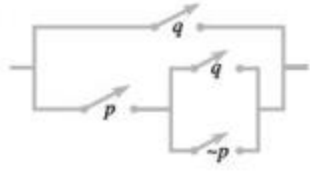
88.



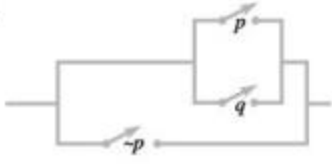
89.



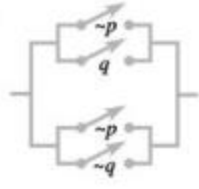
90.



91.



92.



Trace circuitos que representen las siguientes proposiciones como están dadas. Si es posible, simplifíquelas.

93. $p \wedge (q \vee \sim p)$

94. $(\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim r$

95. $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

96. $(\sim q \wedge \sim p) \vee (\sim p \vee q)$

97. $[(p \vee q) \wedge r] \wedge \sim p$

98. $[(\sim p \wedge \sim r) \vee \sim q] \wedge (\sim p \wedge r)$

99. $\sim q \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

100. $\sim p \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

101. Explique por qué el circuito



siempre tendrá uno de los interruptores abierto. ¿Qué simplificaría este circuito?

102. Remítase a las figuras 5 y 6 del ejemplo 6. Suponga que el costo de usar un interruptor es de 3 centavos por hora. Usando el circuito de la figura 6 en lugar del circuito de la figura 5, ¿cuál sería el ahorro luego de 365 días, suponiendo que el circuito se utilice de manera continua?

3.4 Más sobre la condicional



Alfred North Whitehead (1861-1947) y Bertrand Russell trabajaron juntos en los *Principia Mathematica*. Durante ese tiempo, Whitehead enseñaba matemáticas en la Universidad de Cambridge y escribió *Universal Algebra*. En 1910 se trasladó a la Universidad de Londres, para explorar no sólo las bases filosóficas de la ciencia sino los propósitos de la educación (o "Aims of education", como tituló uno de sus libros). Fue invitado en calidad de filósofo a la Universidad Harvard en 1924. Whitehead murió a la edad de 86 años en Cambridge, Massachusetts.

La proposición condicional, la cual presentamos en la sección previa, es una de las más importantes de todas las proposiciones compuestas. Muchas propiedades matemáticas y teoremas son planteados en la forma *si... entonces*. Dada su gran utilidad, es necesario estudiar las proposiciones condicionales que se relacionan con enunciados con la forma $p \rightarrow q$.

Recíproca, inversa y contrapositiva Cualquier proposición condicional está conformada por un antecedente y un consecuente. Si éstos se intercambian, se niegan, o las dos cosas, se forma una nueva proposición condicional. Suponga que empezamos con la proposición directa

Si tú te quedas, entonces yo me voy,

e intercambiamos el antecedente ("tú te quedas") con el consecuente ("yo me voy"). Obtenemos la nueva proposición condicional

Si yo me voy, entonces tú te quedas.

Esta nueva condicional se llama **recíproca** de la proposición dada.

Si se niegan tanto el antecedente como el consecuente, se obtiene la **inversa** de la proposición dada:

Si tú no te quedas, entonces yo no me voy.

Si el antecedente y el consecuente se intercambian y se niegan, se forma la **contrapositiva** de la proposición dada:

Si yo no me voy, entonces tú no te quedas.

Estas tres proposiciones relacionadas para la condicional $p \rightarrow q$ se resumen a continuación. (Observe que la inversa es la contrapositiva de la recíproca.)

Proposiciones condicionales relacionadas

Proposición directa	$\boldsymbol{p \rightarrow q}$	(Si p, entonces q.)
Recíproca	$\boldsymbol{q \rightarrow p}$	(Si q, entonces p.)
Inversa	$\boldsymbol{\sim p \rightarrow \sim q}$	(Si no p, entonces no q.)
Contrapositiva	$\boldsymbol{\sim q \rightarrow \sim p}$	(Si no q, entonces no p.)

EJEMPLO 1 Dada la proposición directa

Si vivo en Miami, entonces vivo en Florida,

determine cada una de las proposiciones que se indican:

(a) la recíproca

Sea p la proposición "Vivo en Miami" y q "Vivo en Florida". Entonces la proposición directa podría representarse como $p \rightarrow q$. La recíproca, $q \rightarrow p$, sería

Si vivo en Florida, entonces vivo en Miami.

Observe que en el caso de esta proposición, su recíproca no necesariamente es verdadera, aun cuando la proposición directa lo sea.

(b) la inversa

La inversa de $p \rightarrow q$ es $\sim p \rightarrow \sim q$. Para la proposición dada la inversa es:

Si no vivo en Miami, entonces no vivo en Florida,

la cual, una vez más, no necesariamente es verdadera.

(c) la contrapositiva

La contrapositiva, $\sim q \rightarrow \sim p$, sería

Si no vivo en Florida, entonces no vivo en Miami.

La contrapositiva, al igual que la proposición directa, es verdadera. ■

El ejemplo 1 muestra que la recíproca e inversa de una proposición verdadera no tienen que ser verdaderas ellas mismas. *Pueden* ser verdaderas, pero no necesariamente lo son. La relación entre los valores de verdad de las proposiciones directa, recíproca, inversa y contrapositiva se muestra en la tabla de verdad siguiente:

Equivalentes

Equivalentes

		Directa	Recíproca	Inversa	Contrapositiva
p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V



Bertrand Russell (1872-1970) fue alumno de Whitehead antes de que ambos escribieran sus *Principia*. Al igual que su profesor, Russell se inclinó hacia la filosofía. Sus trabajos incluyen una crítica de Leibniz, análisis sobre la mente y la materia y una historia del pensamiento occidental.

Russell se convirtió en figura pública debido a su intensa participación en temas sociales. Profundamente consciente de la soledad humana, deseó "con gran pasión encontrar formas de disminuir este trágico aislamiento". Durante la Primera Guerra Mundial emprendió una cruzada en contra de la guerra y estuvo en prisión por un tiempo breve. Más tarde, en los sesenta, defendió la paz. Escribió muchos libros sobre temas sociales, y obtuvo el Premio Nobel de Literatura en 1950.

Como lo muestra la tabla de verdad, la proposición directa y la contrapositiva siempre tienen los mismos valores de verdad, lo cual hace posible reemplazar cualquier proposición con su contrapositiva, sin que se afecte el significado lógico. Asimismo, la recíproca y la inversa siempre tienen los mismos valores de verdad.

Este análisis se resume a continuación.

Equivalencias

La proposición directa y la contrapositiva son equivalentes entre sí, mientras que la recíproca y la inversa lo son entre sí.

EJEMPLO 2 Para la proposición directa $\sim p \rightarrow q$, escriba cada una de las siguientes proposiciones.

(a) la recíproca

La recíproca de $\sim p \rightarrow q$ es $q \rightarrow \sim p$.

(b) la inversa

La inversa es $\sim(\sim p) \rightarrow \sim q$, que se simplifica como $p \rightarrow \sim q$.

(c) la contrapositiva

La contrapositiva es $\sim q \rightarrow \sim(\sim p)$, que se simplifica como $\sim q \rightarrow p$. ■

Formas alternas de "si p, entonces q" La proposición condicional "si p, entonces q" puede escribirse de diversas maneras en español. Por ejemplo,

Si vas al centro comercial, entonces encontrarás un lugar donde estacionarte,

también puede escribirse como

Ir al centro comercial es *suficiente* para encontrar un lugar donde estacionarse.

De acuerdo con esta proposición, ir al centro comercial basta para garantizar que se encontrará un lugar donde estacionarse. Ir a otros lugares, como escuelas o edificios de oficinas *podría* garantizar también un lugar de estacionamiento, pero al menos *sabemos* que ir al centro comercial sí lo garantiza. Luego entonces, $p \rightarrow q$ puede escribirse como "p es suficiente para que q". Basta con saber que p ocurre para garantizar que q también ocurrirá. Por otro lado,

Encender el aparato es necesario para ver televisión (*)

tiene un significado diferente. Aquí estamos diciendo que una condición necesaria para ver televisión es que uno encienda el aparato. Esto podría no ser suficiente; el aparato podría estar descompuesto, por ejemplo. La proposición marcada con (*) podría escribirse como

Si usted ve televisión, entonces encendió el aparato.

Como sugiere este ejemplo, $p \rightarrow q$ es lo mismo que "q es necesario para que p". En otras palabras, si no sucede q tampoco sucederá p. Observe que esta idea está estrechamente relacionada con la idea de equivalencia entre la proposición directa y su contrapositiva.

Algunas interpretaciones de $p \rightarrow q$ se resumen en el recuadro siguiente.

Interpretaciones comunes de $p \rightarrow q$

La condicional $p \rightarrow q$ puede interpretarse en cualquiera de las formas siguientes.

Si p, entonces q.	p es suficiente para que q.
Si p, q.	q es necesaria para que p.
p implica q.	Todas las p son q.
p sólo si q.	q si p.

La transformación de $p \rightarrow q$ en estas formas verbales de ninguna manera depende de la veracidad o falsedad de $p \rightarrow q$.

Por ejemplo, la proposición

Si tienes 18 años de edad, entonces puedes votar

puede escribirse en cualquiera de las siguientes maneras:

Puedes votar si tienes 18 años de edad.

Tienes 18 años de edad sólo si puedes votar.

Para que tengas 18 años de edad es necesario que puedas votar.

Tener 18 años de edad es suficiente para poder votar.

Todos los que tienen 18 años de edad pueden votar.

Tener 18 años de edad implica que puedes votar.

EJEMPLO 3 Escriba cada proposición en la forma "si p, entonces q".

(a) Lo lamentarás si voy.

Si voy, entonces lo lamentarás.

(b) Hoy es viernes sólo si ayer fue jueves.

Si hoy es viernes, entonces ayer fue jueves.

(c) Todas las enfermeras usan zapatos blancos.

Si eres enfermera, entonces usas zapatos blancos. ■

PARA REFLEXIONAR

¿Cuántas veces ha oído consejos como "Quien a buen árbol se arrima, buena sombra le cobija", "Agua pasada no mueve molino" o "Si ves las barbas de tu vecino cortar, pon las tuyas a remojar"? En muchos casos, tales consejos proverbiales pueden replantearse como una condicional en la forma *si... entonces*. Por ejemplo, estos tres enunciados pueden reescribirse como sigue:

"Si te arrimas a un buen árbol, entonces te cobijará una buena sombra."

"Si el agua pasó, entonces no está moviendo el molino."

"Si ves las barbas de tu vecino cortar, entonces pon las tuyas a remojar."

Para análisis en grupo

1. Piense en algunos refranes muy conocidos, y plantéelos en la forma *si... entonces*.
2. Usted ha oído probablemente el refrán "No todo lo que brilla es oro". ¿Cree usted que lo que se dice en él realmente es lo que significa? Si no, enúncielo como crea que debería ser expresado. (*Una pista:* Escriba la proposición original en la forma *si... entonces*.)

EJEMPLO 4 Sea p la proposición "Un triángulo es equilátero", y q "Un triángulo tiene tres lados iguales". Escriba cada una de las siguientes proposiciones en símbolos.

(a) Un triángulo es equilátero si tiene tres lados iguales.

$$q \rightarrow p$$

(b) Un triángulo es equilátero sólo si tiene tres lados iguales.

$$p \rightarrow q$$ ■

Bicondicionales La proposición compuesta *p si y sólo si q* (abreviada a menudo como *p sí q*) se llama **bicondicional**. Se simboliza mediante $p \leftrightarrow q$, y se interpreta como la conjunción de dos condicionales $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$. Usando símbolos, esta conjunción se escribe

$$(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$$

de modo que, por definición,

$$p \leftrightarrow q \equiv (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q).$$

Mediante esta definición, puede determinarse la tabla de verdad para la bicondicional $p \leftrightarrow q$.



Principia Mathematica El título elegido por Whitehead y Russell fue una referencia deliberada al libro de Isaac Newton de 1687, *Philosophiae naturalis principia mathematica* o "Los principios matemáticos de la filosofía de la naturaleza". Los *Principia* de Newton describían un tipo de "universo que trabaja como un reloj" que funcionaba conforme a su Ley de Gravitación. Newton inventó el cálculo de manera independiente, sin saber que Leibniz había publicado poco antes su propia versión. La controversia sobre quién fue el primero continuó hasta el siglo XVIII.

Tabla de verdad para la bicondicional *p* si y sólo si *q*

		p* si y sólo si *q
p	***q***	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si observamos la tabla de verdad, vemos que la bicondicional es verdadera cuando ambas proposiciones que la componen tienen el mismo valor de verdad. Es falsa cuando tienen diferentes valores de verdad.

EJEMPLO 5 Diga si cada una de las proposiciones bicondicionales siguientes es *verdadera* o *falsa*.

(a) $6 + 9 = 15$ si y sólo si $12 + 4 = 16$

Tanto $6 + 9 = 15$ como $12 + 4 = 16$ son verdaderas. De acuerdo con la tabla de verdad para la bicondicional, esta proposición es verdadera.

(b) $5 + 2 = 10$ si y sólo si $17 + 19 = 36$

Ya que la primera componente ($5 + 2 = 10$) es falsa y la segunda es verdadera, la proposición bicondicional completa es falsa.

(c) $6 = 5$ si y sólo si $12 \neq 12$

Ambos componentes de la proposición son falsos, así que, de acuerdo con el último renglón de la tabla de verdad para la bicondicional, la proposición completa es verdadera. (¡Para entender esto habría que reflexionar un poco más!) ■

En esta sección, así como en las dos anteriores, hemos deducido tablas de verdad para diversos tipos importantes de proposiciones compuestas. El resumen que sigue describe cómo podemos recordar estas tablas de verdad.

Resumen de las tablas de verdad básicas

1. $\sim p$, la **negación** de p, tiene valor de verdad opuesto al de p.
2. $p \wedge q$, la **conjunción**, es verdadera sólo cuando ambas, p y q, son verdaderas.
3. $p \vee q$, la **disyunción**, es falsa sólo cuando ambas, p y q, son falsas.
4. $p \rightarrow q$, la **condicional**, es falsa sólo cuando p es verdadera y q es falsa.
5. $p \leftrightarrow q$, la **bicondicional**, es verdadera sólo cuando p y q tienen el mismo valor de verdad.

3.4 EJERCICIOS

Para cada proposición directa dada, escriba **(a)** *la recíproca,* **(b)** *la inversa y* **(c)** *la contrapositiva en la forma* si... entonces. *En algunos ejercicios puede ser útil replantear la proposición directa en la forma* si... entonces.

1. Si la belleza fuera un minuto, entonces tú serías una hora.

2. Si usted dirige, entonces yo lo seguiré.

3. Si no está estropeado, no hay para qué repararlo.

4. Si yo obtuviera diez centavos por cada vez que esto sucediera, me volvería rico.

5. Caminar delante de un automóvil en movimiento es peligroso para la salud.

6. La leche contiene calcio.

7. Cada oveja con su pareja.

8. Agua pasada no mueve molino.

9. Si lo construyes, él vendrá.

10. Por el humo se sabe dónde está el fuego.

11. $p \rightarrow \sim q$ **12.** $\sim p \rightarrow q$

13. $\sim p \rightarrow \sim q$ **14.** $\sim q \rightarrow \sim p$

15. $p \rightarrow (q \vee r)$ (*Una pista:* Utilice una de las leyes de De Morgan según sea necesario).

16. $(r \vee \sim q) \rightarrow p$ (*Una pista:* Utilice una de las leyes de De Morgan según sea necesario).

17. Analice las equivalencias que existen entre las proposiciones condicional directa, recíproca, inversa y contrapositiva.

18. Indique la contrapositiva de "Si el cuadrado de un número natural es par, entonces el número natural es par". Las dos proposiciones deben tener el mismo valor de verdad. Utilice varios ejemplos y el razonamiento inductivo para determinar si ambas son verdaderas o ambas son falsas.

*Escriba cada una de las proposiciones siguientes en la forma "*si *p*, entonces *q*".

19. Si está fangoso, usaré mis botas.

20. Si termino de estudiar, iré a la fiesta.

21. "17 es positivo" implica que 17 + 1 es positivo.

22. "Hoy es miércoles" implica que ayer fue martes.

23. Todos los enteros son números racionales.

24. Todos los enteros no negativos son enteros.

25. Resolver crucigramas es suficiente para volverme loco.

26. Estar en Fort Lauderdale es suficiente para estar en Florida.

27. Para que Greg Tobin se afeite es necesario que la barba le crezca durante un día.

28. Defender la ecología es necesario para ser electo.

29. Yo puedo ir desde Boardwalk a la Avenida Connecticut sólo si paso donde dice "siga".

30. El director contratará más profesores sólo si la junta escolar lo aprueba.

31. Ningún número entero no negativo es entero.

32. Ningún entero es número irracional.

33. Los Indios ganarán el banderín cuando su lanzamiento mejore.

34. Jesse será liberal cuando los cerdos vuelen.

35. Un rectángulo es un paralelogramo con un ángulo recto.

36. Un paralelogramo es una figura de cuatro lados cuyos lados opuestos son paralelos.

37. Un triángulo con dos lados de la misma longitud es isósceles.

38. Un cuadrado es un rectángulo cuyos lados adyacentes son iguales.

39. El cuadrado de un número de dos dígitos cuyo dígito de las unidades es 5 terminará en 25.

40. Un entero cuyo dígito de las unidades es 0 o 5 es divisible entre 5.

41. Una de las proposiciones siguientes no es equivalente a las demás. ¿Cuál es?

A. *r* sólo si *s*.
B. *r* implica a *s*.
C. Si *r*, entonces *s*.
D. *r* es necesaria para que *s*.

42. Muchos estudiantes tienen dificultades para interpretar *necesario* y *suficiente*. Utilice la proposición "Estar en Canadá es suficiente para estar en Norteamérica" para explicar por qué "*p* es suficiente para *q*" se traduce como "si *p*, entonces *q*".

43. Utilice la proposición "Para ser entero, es necesario que un número sea racional" para explicar por qué "*p* es necesario para que *q*" se traduce como "si *q*, entonces *p*".

44. Explique por qué la proposición "Una semana tiene ocho días si y sólo si diciembre tiene cuarenta días" es verdadera.

Identifique cada proposición como verdadera *o* falsa.

45. $5 = 9 - 4$ si y sólo si $8 + 2 = 10$.

46. $3 + 1 \neq 6$ si y sólo si $8 \neq 8$.

47. $8 + 7 \neq 15$ si y sólo si $3 \times 5 \neq 9$.

48. $6 \times 2 = 14$ si y sólo si $9 + 7 \neq 16$.

49. Bill Clinton fue presidente si y sólo si Jimmy Carter no fue presidente.

50. Burger King vende Big Macs si y sólo si IBM fabrica computadoras.

Dos proposiciones que son verdaderas de manera simultánea para el mismo objeto son **consistentes**. *Por ejemplo,* "Es café" y "Pesa 50 libras" *son proposiciones consistentes. Proposiciones que no pueden ser simultáneamente verdaderas para el mismo objeto reciben el nombre de* **contrarias**; "Es un Dodge" y "Es un Toyota" *son contrarias.*

Indique si las parejas siguientes de proposiciones son contrarias *o* consistentes.

51. Elvis está vivo. Elvis está muerto.

52. George W. Bush es Demócrata. George W. Bush es Republicano.

53. Ese animal tiene cuatro patas. Ese animal es un perro.

54. Ese libro no es de ficción. Ese libro cuesta más de $70.

55. Este número es un entero. Este número es irracional.

56. Este número es positivo. Este número es un número natural.

57. Elabore dos proposiciones que sean consistentes.

58. Elabore dos proposiciones que sean contrarias.

3.5 Análisis de argumentos mediante diagramas de Euler



Leonhard Euler (1707-1783) ganó el galardón de la academia que habían pretendido la marquesa de Châtelet y Voltaire. Ello constituyó un éxito menor al igual que su invención de "los círculos de Euler" (anteriores a los diagramas de Venn). Euler fue el matemático más prolífico de su generación, a pesar de que su ceguera lo obligaba a dictar de memoria.

Existen dos tipos de razonamiento: inductivo y deductivo. En el razonamiento inductivo observamos patrones para resolver problemas. Ahora, en esta sección y en la siguiente, estudiaremos cómo se utiliza el razonamiento deductivo para determinar si los argumentos lógicos son válidos o inválidos. Un argumento lógico se compone de **premisas** (suposiciones, leyes, reglas, ideas ampliamente aceptadas u observaciones) y una **conclusión**. Juntas, las premisas y la conclusión componen el argumento. Recuerde también que el razonamiento *deductivo* implica extraer conclusiones de premisas generales dadas. Cuando razonamos a partir de las premisas de un argumento para obtener una conclusión, pretendemos que el argumento sea válido.

Argumentos válidos e inválidos

Un argumento es **válido** si el hecho de que todas las premisas sean verdaderas obliga a que la conclusión sea verdadera. Un argumento **no válido** es una **falacia**.

Es muy importante observar que "válido" y "verdadero" no son lo mismo. Un argumento puede ser válido aunque su conclusión sea falsa. (Vea el ejemplo 4.)

Varias técnicas pueden utilizarse para verificar si un argumento es válido. Una de éstas es la técnica visual basada en los **diagramas de Euler**, que se ilustra mediante los ejemplos siguientes. (Otro método es el de las tablas de verdad, que mostraremos en la sección siguiente.)

EJEMPLO 1 ¿Es válido el siguiente argumento?

Todos los perros son animales.

Fred es un perro.

Fred es un animal.



FIGURA 8

Aquí utilizamos el método común de colocar una premisa sobre la otra, con la conclusión debajo de una línea. Para empezar, dibuje una región que represente la primera premisa. Ésta es la región para "animales". Como todos los perros son animales, la región para "perros" va dentro de la región para "animales", como se ve en la figura 8.

La segunda premisa, "Fred es un perro", sugiere que "Fred" iría dentro de la región que representa a "perros". Sea x que represente a "Fred". La figura 9 muestra que "Fred" también está dentro de la región "animales". Por lo tanto, si ambas premisas son verdaderas, la conclusión de que Fred es un animal también debe ser verdadera. El argumento es válido, como hemos verificado por medio de los diagramas de Euler. ■



x representa a Fred.

FIGURA 9

El método de los diagramas de Euler es útil especialmente para argumentos que incluyen los cuantificadores *todos*, *algunos* o *ninguno*.

EJEMPLO 2 ¿Es válido el siguiente argumento?

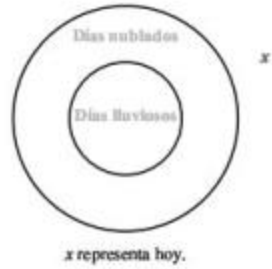
Todos los días lluviosos están nublados.
Hoy no está nublado.

Hoy no es día lluvioso.

En la figura 10, la región para "días lluviosos" se dibujó completamente dentro de la región para "días nublados". Como "Hoy *no* está nublado", colocamos una x para "hoy" *fuera* de la región para "días nublados". (Vea la figura 11.) Al colocar la x fuera de la región para "días nublados" se obliga a que también esté fuera de la región para "días lluviosos". Por lo tanto, si las primeras dos premisas son verdaderas, entonces también es verdadero que hoy no es un día lluvioso. El argumento es válido.



FIGURA 10



x representa hoy.

FIGURA 11 ■

EJEMPLO 3 ¿Es válido el siguiente argumento?

Todas las plantas de plátanos tienen hojas verdes.
Esa planta tiene hojas verdes.

Esa planta es una planta de plátanos.



FIGURA 12

La región para "plantas de plátanos" va completamente dentro de la región para "cosas que tienen hojas verdes". (Vea la figura 12.) Existe la opción de ubicar la x que representa a "esa planta" en distintas regiones. La x debe ir dentro de la región para "plantas que tienen hojas verdes", pero puede ir dentro o fuera de la región para "plantas de plátanos". Aun si las premisas son verdaderas, no estamos obligados a aceptar la conclusión como verdadera. Este argumento es inválido; es una falacia. ■

Como se mencionó antes, la validez de un argumento no es lo mismo que la veracidad de su conclusión. El argumento en el ejemplo 3 era inválido, pero la conclusión "Esa planta es una planta de plátanos" puede o no ser verdadera. No lo podemos asegurar.

EJEMPLO 4 ¿Es válido el siguiente argumento?

Todas las cosas caras son deseables.

Todas las cosas deseables hacen que uno se sienta bien.

Todas las cosas que hacen que uno se sienta bien hacen que viva más.

Todas las cosas caras hacen que uno viva más.

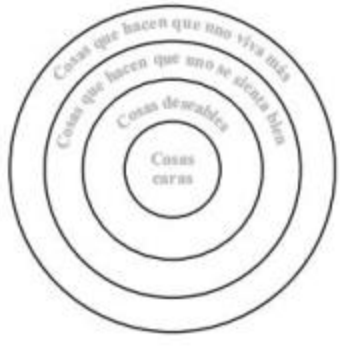


FIGURA 13

En la figura 13 aparece un diagrama para este argumento. Si cada premisa es verdadera, entonces la conclusión debe ser verdadera, ya que la región para "cosas caras" está por completo dentro de la región para "cosas que hacen que uno viva más". Por lo tanto, el argumento es válido. (Este argumento es un ejemplo del hecho de que un argumento *válido no necesariamente* tiene una conclusión verdadera.) ■



FIGURA 14

Los argumentos con la palabra "algunos" pueden ser engañosos.

EJEMPLO 5 ¿Es válido el siguiente argumento?

Algunos estudiantes van a la playa.

Yo soy estudiante.

Yo voy a la playa en las vacaciones de primavera.



FIGURA 15

En la figura 14 aparece la primera premisa. Como muestra el dibujo, algunos estudiantes (aunque no necesariamente *todos*) van a la playa. Hay dos posibilidades para *Yo*, como se muestra en la figura 15.

Una posibilidad es que *yo* vaya a la playa; la otra es que *yo* no vaya a la playa. Puesto que la veracidad de las premisas no obliga a que la conclusión sea verdadera, el argumento es inválido. ■

3.5 EJERCICIOS

Determine si cada uno de los argumentos es válido *o* inválido.

1. Todos los boxeadores usan shorts.
Chris Mader es boxeador.

Chris Mader usa shorts.

2. Todos los parques de diversiones tienen montaña rusa.
Great America es un parque de diversiones.

Great America tiene montaña rusa.

3. Todos los sureños hablan con acento.
Bill Leonard habla con acento.

Bill Leonard es sureño.

4. Todos los políticos mienten, engañan y roban.
Ese hombre miente, engaña y roba.

Ese hombre es un político.

5. Todos los contratistas utilizan teléfono celular.
Doug Boyle no utiliza teléfono celular.

Doug Boyle no es contratista.

6. A todos los perros les gusta enterrar huesos.
Archie no le gusta enterrar huesos.

Archie no es un perro.

7. Todas las personas que solicitan un préstamo deben pagar la investigación comercial.
Cindy Herring pagó una investigación comercial.

Cindy Herring solicitó un préstamo.

8. Todos los residentes de Minnesota saben cómo vivir bajo temperaturas gélidas.
Wendy Rockswold sabe cómo vivir bajo temperaturas gélidas.

Wendy Rockswold vive en Minnesota.

9. Algunos filósofos son distraídos.
Amanda Perdaris es filósofa.

Amanda Perdaris es distraída.

10. Algunos dinosaurios fueron herbívoros.
Danny fue herbívoro.

Danny fue un dinosaurio.

11. Algunos camiones tienen sistemas de sonido.
Algunos camiones tienen sistemas de aceleración.

Algunos camiones con sistemas de sonido tienen sistemas de aceleración.

12. Algunas enfermeras usan uniforme azul.
Kim Falgout es enfermera.

Kim Falgout usa uniforme azul.

13. Vuelva a revisar el ejemplo 3. Si la segunda premisa y la conclusión se intercambian, ¿entonces el argumento sería válido?

14. Vuelva a revisar el ejemplo 4. Proporcione una conclusión diferente de la que se dio ahí, de modo que el argumento siga siendo válido.

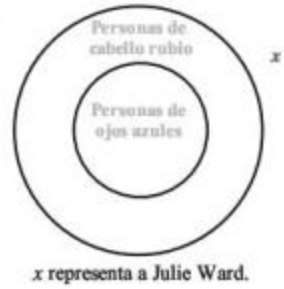
Elabore un argumento válido con base en el diagrama de Euler que se muestra a continuación.

15.



x representa a Julianne Peterson.

16.



x representa a Julie Ward.

Como se mencionó en el texto, un argumento puede tener una conclusión verdadera y aun así ser inválido. En estos ejercicios, cada argumento tiene una conclusión verdadera. *Identifique cada argumento como* válido *o* no válido.

17. Todos los automóviles tienen neumáticos.
Todos los neumáticos son de caucho.

Todos los automóviles tienen caucho.

18. Todas las aves vuelan.
Todos los aviones vuelan.

Un ave no es un avión.

19. Todos los pollos tienen pico.
Todas las aves tienen pico.

Todos los pollos son aves.

20. Todos los pollos tienen pico.
Todas las gallinas son pollos.

Todas las gallinas tienen pico.

21. Veracruz está al sur de Tampico.
Tampico está al sur de Monterrey.

Veracruz está al sur de Monterrey.

22. Quebec está al noreste de Ottawa.
Quebec está al noreste de Toronto.

Ottawa está al noreste de Toronto.

23. Un triángulo escaleno tiene un lado más largo.
Un triángulo escaleno tiene un ángulo más grande.

El ángulo más grande en un triángulo escaleno es opuesto al lado más largo.

24. Ningún entero no negativo es negativo.
-4 es negativo.

-4 no es un entero no negativo.

En los ejercicios 25 al 30, a las premisas marcadas con A, B *y* C *les siguen varias conclusiones posibles. Analice cada conclusión y verifique si el argumento resultante es* válido *o* inválido.

A. Todas las personas que conducen contribuyen a la contaminación del aire.
B. Todas las personas que contribuyen a la contaminación del aire empeoran un poco más la vida.
C. Algunas personas que viven en un suburbio empeoran un poco más la vida.

25. Algunas personas que viven en un suburbio conducen.

26. Algunas personas que viven en un suburbio contribuyen a la contaminación del aire.

27. Algunas personas que contribuyen a la contaminación del aire viven en un suburbio.

28. Los residentes suburbanos nunca conducen.

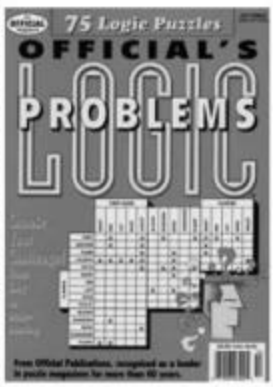
29. Todas las personas que conducen empeoran un poco más la vida.

30. Algunas personas que empeoran un poco más nuestra vida viven en un suburbio.

31. Busque ejemplos de argumentos en anuncios de revistas. Verifique su validez.

32. Encuentre ejemplos de argumentos en comerciales de televisión. Verifique su validez.

EXTENSIÓN



Rompecabezas lógicos

Algunas personas encuentran que los rompecabezas lógicos, los cuales aparecen en publicaciones periódicas como *Official's Logic Problems, World-Class Logic Problems* (Penny Press) y *Logic Puzzles* (Dell), les proporcionan horas de diversión. Estos rompecabezas se basan en el razonamiento deductivo, y los jugadores responden preguntas con base en las claves que proporcionan los autores. La explicación siguiente sobre cómo solucionar tales problemas apareció en el número de otoño de 1999 de *World-Class Logic Problems.*

Cómo resolver problemas lógicos Resolver problemas lógicos es una actividad entretenida y desafiante. Toda la información que se necesita para resolver un problema lógico está dada en la introducción y las claves, así como en las ilustraciones, cuando las hay. Si nunca antes ha resuelto un problema lógico, nuestro ejemplo le ayudará a empezar. Llene el diagrama Solución de muestra conforme vaya leyendo nuestra explicación. Utilizamos un "•" para representar "Sí" y una "X" para representar "No".

(*continúa*)

Ejemplo de un problema lógico

Cinco parejas se casaron la semana pasada, cada una en un día diferente. De la información que se da, determine qué mujer (una de ellas es Cathy) y qué hombre (uno de ellos es Paul) formaron cada pareja, así como el día en que cada pareja se casó.

1. Anne se casó en lunes, pero no con Wally.
2. La boda de Stan fue en miércoles. Rob se casó en viernes, pero no con Ida.
3. Vern (quien se casó con Fran) se casó un día después que Eve.

Gráfica de la solución de muestra:

	PAUL	ROB	STAN	VERN	WALLY	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
ANNE										
CATHY										
EVE										
FRAN										
IDA										
LUNES										
MARTES										
MIÉRCOLES										
JUEVES										
VIERNES										

1

	PAUL	ROB	STAN	VERN	WALLY	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
ANNE		X	X		X	•	X	X	X	X
CATHY						X				
EVE						X				
FRAN						X				
IDA		X				X				X
LUNES		X	X							
MARTES		X	X							
MIÉRCOLES	X	X	•	X	X					
JUEVES		X	X							
VIERNES	X	•	X	X	X					

Explicación

Anne se casó en lunes (1), así que coloque un "•" en la intersección de Anne con lunes. Coloque una "X" en todos los demás días del renglón de Anne y en todos los otros nombres para la columna del Lunes. (Siempre que establezca una relación, como lo hicimos aquí, asegúrese de colocar una "X" en las intersecciones de todas las relaciones que, a consecuencia de esto, se vuelven imposibles.) Anne no se casó con Wally (1), así que ponga una "X" en la intersección de Anne con Wally. La boda de Stan fue en miércoles (2), así que coloque un "•" en la intersección de Stan con miércoles. (No olvide las "X".) Stan no se casó con Anne, quien se casó en lunes, así que coloque una "X" en la intersección de Anne con Stan. Rob se casó en viernes, pero no con Ida (2), así que ponga un "•" en la intersección de Rob con viernes, y una "X" en las intersecciones de Rob con Ida e Ida con viernes. Rob tampoco se casó con Anne, que se casó en lunes, así que ponga una "X" en la intersección de Anne con Rob. Ahora su gráfica debería parecerse al diagrama 1.

Vern se casó con Fran (3), así que coloque un "•" en la intersección de Vern con Fran. Esto sólo deja la posibilidad de que el esposo de Anne sea Paul, así que ponga un "•" en la intersección de Anne con Paul y en la de Paul con lunes. La boda de Vern y Fran fue un día después que la de Eve (3), que no fue en lunes [Anne], así que su boda no fue en martes. Debe haber sido en jueves [vea la gráfica], así que la boda de Eve fue en miércoles (3). Coloque un "•" en las intersecciones de Vern con jueves, Fran con jueves e Eve con miércoles. Ahora su diagrama luciría como la gráfica 2.

2

	PAUL	ROB	STAN	VERN	WALLY	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
ANNE	•	X	X	X	X	•	X	X	X	X
CATHY	X			X		X		X	X	
EVE	X			X		X	X	•	X	X
FRAN	X	X	X	•	X	X	X	X	•	X
IDA	X	X		X		X		X	X	X
LUNES	•	X	X	X	X					
MARTES	X	X	X	X						
MIÉRCOLES	X	X	•	X	X					
JUEVES	X	X	X	•	X					
VIERNES	X	•	X	X	X					

3

	PAUL	ROB	STAN	VERN	WALLY	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
ANNE	•	X	X	X	X	•	X	X	X	X
CATHY	X	•	X	X	X	X	X	X	X	•
EVE	X	X	•	X	X	X	X	•	X	X
FRAN	X	X	X	•	X	X	X	X	•	X
IDA	X	X	X	X	•	X	•	X	X	X
LUNES	•	X	X	X	X					
MARTES	X	X	X	X	•					
MIÉRCOLES	X	X	•	X	X					
JUEVES	X	X	X	•	X					
VIERNES	X	•	X	X	X					

La gráfica muestra que Cathy se casó en viernes, Ida se casó en martes y Wally se casó en jueves. Ida se casó con Wally y la boda de Cathy fue en viernes, así que ella se casó con Rob. Una vez colocada esta información, Eve sólo podría haberse casado con Stan. Usted ha completado el rompecabezas, y su gráfica debería verse como la gráfica 3.

En resumen: Anne y Paul, lunes; Cathy y Rob, viernes; Eve y Stan, miércoles; Fran y Vern, jueves; Ida y Wally, martes.

En algunos problemas, podría ser necesario que usted haga conjeturas lógicas con base en los hechos que ha determinado. Cuando lo haga, siempre vea las claves y otros hechos que las refuten. Si encuentra que su conjetura es incorrecta, elimínela como posibilidad.

EJERCICIOS DE EXTENSIÓN

Siga las indicaciones para resolver cada problema lógico.

1. ***Niños en el sembradío de calabazas*** El sábado pasado, cada uno de cinco niños, acompañados por sus padres, fueron a la Granja de Goldman para escoger una calabaza. Sin embargo, una vez allí, a cada niño (uno de ellos era Raven) le atrajo más alguna otra actividad de la granja (en uno de los casos, alimentar a los animales) ¡que la elección de las calabazas! Por fortuna, cada padre fue capaz de recuperar la atención de su hijo o hija lo suficiente para que eligiese la calabaza perfecta para su linterna de Halloween. Con base en la información que se proporciona, relacione a cada niño o niña con su padre o madre (uno de éstos es el señor Maier) e indique qué cosa de la granja le gustó más que elegir una calabaza.

		PAPÁ O MAMÁ					ACTIVIDAD				
		SRA. FEDOR	SR. HANSON	SR. MAIER	SR. MORGAN	SRA. REED	RECOLECTAR MANZANAS	HACER SIDRA	TIENDA DE SUMINISTROS	ALIMENTAR A LOS ANIMALES	JUGAR EN EL HENO
NIÑO (A)	LAUREN										
	RAVEN										
	TARA										
	XANDER										
	ZACH										
ACTIVIDAD	RECOLECTAR MANZANAS										
	HACER SIDRA										
	SUMINISTROS										
	ALIMENTAR ANIMALES										
	JUGAR EN EL HENO										

Fuente: World-Class Logic Problems, otoño de 1999, p. 5.

(a) Ni Lauren ni Zach llegaron a la granja acompañando a la señora Reed. Tara estuvo más interesada en comprar en la tienda que en seleccionar calabazas.

(b) Xander y su padre, el señor Morgan, no fueron a jugar con el heno. Al hijo (o hija) de la señora Fedor (que no es Zach ni Lauren) le fascinó el proceso de fabricación de la sidra.

(c) Zach no es el niño que fue a jugar con el heno ni el que quería recolectar manzanas. El hijo (o hija) del señor Hanson no fue a jugar con el heno.

2. ***Jugar a los bolos*** Con el inicio de la liga de invierno a pocas semanas de distancia, la tienda Bolos de Calidad se atestó de personas que fueron a comprar cada una su nueva bola para los bolos. Justo esta tarde, cada uno de cinco jugadores compró una bola, cada una de diferente color (una es gris) y peso (10, 12, 14, 16 y 18 libras, respectivamente). Después de haber perforado los agujeros al tamaño de sus dedos, se imprimió el nombre de cada persona en su bola. Aunque sus bolas no estarían listas antes de una semana, los jugadores están ansiosos de experimentar la emoción en las pistas de bolos. Con la información que se proporciona, determine el color y peso de la bola de cada jugador.

		COLOR					PESO EN LIBRAS				
		GRIS	NARANJA	ROSA	ROJA	TURQUESA	10	12	14	16	18
JUGADOR (A)	ARLENE										
	DEVON										
	ROSETTA										
	SILAS										
	TINA										
PESO	10										
	12										
	14										
	16										
	18										

Fuente: World-Class Logic Problems, otoño de 1999, p. 5.

(a) Arlene lleva impreso su nombre en su nueva bola de color naranja. Devon compró una bolsa para su nueva bola, que es más ligera que la de Silas.

(b) Tina juega con una bola de 14 libras. La bola rosa es exactamente 6 libras más ligera que la de color turquesa.

(c) La bola roja, que no es la de Rosetta, es la más pesada. Rosetta no compró la bola de 16 libras.

(*continúa*)

3. ***Es una corbata*** por Jenny Roberts. Hace poco, cuatro colegas comentaban sobre los patrones tan extravagantes que ostentan las corbatas hoy en día. Para divertirse, al día siguiente cada uno llegó al trabajo exhibiendo la corbata más ridícula que pudo encontrar (ninguna corbata mostraba el mismo patrón que las demás... una incluso estaba decorada con cupidos sonrientes). Ninguno de ellos tuvo que comprar una corbata nueva, ¡todas fueron regalo de algún pariente! Con base en las pistas siguientes, ¿podría decir cuál de ellos usó cada patrón extravagante, así como determinar qué pariente le regaló a cada uno su corbata?
   (a) La corbata con los duendes de sonrisa burlona no fue regalo de una hija.
   (b) La corbata del señor Crow no muestra un reno danzarín ni las caritas amarillas sonrientes.
   (c) La corbata del señor Speigler no fue un regalo de su tío.
   (d) La corbata con las caritas amarillas sonrientes no fue un regalo de una hermana.
   (e) El señor Evans y el señor Speigler poseen la corbata con los duendes de sonrisa burlona y la corbata que fue regalo de un suegro, aunque no en ese orden.
   (f) El señor Hurley recibió su extravagante corbata como regalo de su hermana.

	Cupidos	Caritas felices	Duendes	Renos	Hija	Suegro	Hermana	Tío
Sr. Crow								
Sr. Evans								
Sr. Hurley								
Sr. Speigler								
Hija								
Suegro								
Hermana								
Tío								

Fuente: Dell Logic Puzzles, octubre de 1999, p. 7.

4. ***Amigos imaginarios*** por Keith King. Hace poco, la librería local de Granville patrocinó un concurso de escritura para niños de la comunidad. Cada uno de los cuatro concursantes (uno de ellos es Ralph) tuvo la tarea de dar vida a un amigo imaginario en un cuento corto. Cada niño seleccionó un animal diferente (incluyendo un alce) como personaje de su cuento, y cada uno describió una aventura que involucraba a su nuevo amigo (una de las historias narraba cómo el amigo imaginario había formado un grupo de rock). Con las claves siguientes, ¿podría relacionar a cada autor con su amigo imaginario y determinar la aventura que pasaron juntos?
   (a) La foca (que no fue creación de Joanne ni de Lou) no fue a la Luna en una nave espacial ni hizo un viaje alrededor del mundo en un tren mágico.
   (b) El amigo imaginario de Joanne (que no es el oso gris) fue al circo.
   (c) El amigo imaginario de Winnie es una cebra.
   (d) El oso gris no abordó la nave espacial a la Luna.

	Oso gris	Alce	Foca	Cebra	Circo	Grupo de rock	Nave espacial	Tren
Joanne								
Lou								
Ralph								
Winnie								
Circo								
Grupo de rock								
Nave espacial								
Tren								

Fuente: Dell Logic Puzzles, octubre de 1999, p. 7.

3.6 Análisis de argumentos mediante tablas de verdad

En la sección 3.5 utilizamos diagramas de Euler para probar la validez de los argumentos. Aunque los diagramas de Euler suelen funcionar bien para argumentos sencillos, pueden surgir dificultades cuando se usan con argumentos más complejos, ya que los diagramas de Euler requieren un bosquejo que ilustre todos los casos posibles. En argumentos complejos es difícil asegurarse de que todos los casos se han tomado en consideración.

Para decidir si hay que utilizar diagramas de Euler para probar la validez de un argumento, busque cuantificadores tales como "todo", "algunos" o "ninguno". Estas palabras con frecuencia indican que los argumentos que las contienen se prueban me-

jor por medio de los diagramas de Euler. Si estas palabras no aparecen, quizá resulte mejor utilizar tablas de verdad para probar la validez de un argumento.

Considere el siguiente argumento como ejemplo de este método:

Si el piso está sucio, entonces yo debo limpiarlo.
El piso está sucio.

Yo debo limpiarlo.

A fin de probar la validez de este argumento, empezamos por identificar las proposiciones *componentes* que se encuentran en él. Éstas son "el piso está sucio" y "yo debo limpiarlo". Asignaremos las letras p y q para representar estas proposiciones:

p representa "el piso está sucio".
q representa "yo debo limpiarlo".

Ahora escribimos las dos premisas y la conclusión en símbolos:

Premisa 1: $p \rightarrow q$
Premisa 2: p

Conclusión: q .

Para decidir si este argumento es válido, debemos determinar si la conjunción de ambas premisas implica la conclusión para todos los casos posibles de valores de verdad para p y q. Por lo tanto, escriba la conjunción de las dos premisas como el antecedente de una proposición condicional, y la conclusión como el consecuente.

$$\underset{\uparrow}{[(p \rightarrow q)} \quad \underset{\uparrow}{\wedge} \quad \underset{\uparrow}{p]} \quad \underset{\uparrow}{\rightarrow} \quad \underset{\uparrow}{q}$$
premisa y premisa implica conclusión

Por último, elabore la tabla de verdad para esta proposición condicional, como se muestra a continuación:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Como la última columna (mostrada en negritas) indica que la proposición condicional que representa al argumento es verdadera para todos los valores de verdad de p y q, la proposición es una tautología. Por lo tanto, el argumento es válido.

El patrón que ostenta el argumento en el ejemplo de limpiar el piso,

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p} \\ q \quad , \end{array}$$

es muy común, y recibe el nombre de **modus ponens**, o *ley de separación.*

En resumen, para probar la validez de un argumento utilizando tablas de verdad, siga los pasos del cuadro siguiente.

Cómo comprobar la validez de un argumento con una tabla de verdad

1. Asigne una letra para representar cada proposición componente del argumento.
2. Exprese cada premisa y la conclusión mediante símbolos.
3. Forme la proposición simbólica del argumento entero, colocando la *conjunción* de *todas* las premisas como antecedente de una proposición condicional y la conclusión del argumento como su consecuente.
4. Complete la tabla de verdad para la proposición condicional elaborada según el inciso 3. Si es una tautología, entonces el argumento es válido; de otro modo es inválido.

EJEMPLO 1 Determine si el argumento es *válido* o *inválido*.

Si mi cheque llega a tiempo, me inscribiré en el semestre de otoño.
Me inscribí en el semestre de otoño.

Mi cheque llegó a tiempo.

Sea que p represente "mi cheque llega (llegó) a tiempo" y sea que q represente "me inscribiré en el semestre de otoño". Por medio de estos símbolos, el argumento puede escribirse en la forma

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}.$$

Para comprobar su validez, elabore una tabla de verdad para la proposición

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p.$$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	T	F
F	F	V	F	V

El tercer renglón de la última columna de la tabla de verdad muestra una F, lo cual es suficiente para concluir que el argumento es inválido. ■

Si una condicional y su recíproco fueran lógicamente equivalentes, entonces un argumento del tipo que aparece en el ejemplo 1 sería válido. Puesto que una condicional y su recíproco *no* son equivalentes, el argumento es ejemplo de lo que algunas veces se denomina la **falacia del recíproco**.

EJEMPLO 2 Determine si el argumento es *válido* o *inválido*.

Si un hombre pudiese estar en dos lugares a la vez, yo estaría con usted.
Yo no estoy con usted.

Un hombre no puede estar en dos lugares a la vez.

Si p representa "un hombre pudiese estar en dos lugares a la vez" y q representa "yo estoy con usted", el argumento se transforma en

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \quad . \end{array}$$

La proposición simbólica de todo el argumento es

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p.$$

La tabla de verdad para este argumento, la cual se muestra a continuación, indica una tautología, por lo que el argumento es válido.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$	$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

El patrón de razonamiento en este ejemplo se llama **modus tollens**, o *ley de contraposición*, o *razonamiento indirecto*. ■

Por un razonamiento análogo al que se utilizó para nombrar a la falacia del recíproco, la falacia

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim p \\ \hline \sim q \end{array}$$

con frecuencia se denomina **falacia del inverso**. Un ejemplo de tal falacia es "Si llueve, me mojo. No llueve. Por lo tanto, no me mojo".

EJEMPLO 3 Determine si el argumento es *válido* o *inválido*.

Compraré un automóvil o me iré de vacaciones.
No compraré un automóvil.

Me iré de vacaciones.

Si p representa "Compraré un automóvil" y q representa "Me iré de vacaciones", el argumento se transforma en

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \quad . \end{array}$$

Debemos elaborar una tabla de verdad para

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q.$$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

La proposición es una tautología, por lo que el argumento es válido. Cualquier argumento que tenga esta forma es válido por la ley del **silogismo disyuntivo**. ■



EJEMPLO 4 Determine si el argumento es *válido* o *inválido*.

Si rechina, entonces utilizo WD-40.
Si utilizo WD-40, entonces debo ir a la ferretería.

Si rechina, entonces debo ir a la ferretería.

Sea que p represente "rechina", q "utilizo WD-40" y r "debo ir a la ferretería". El argumento adquiere la forma general

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ p \rightarrow r. \end{array}$$

Construya una tabla de verdad para la proposición siguiente:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r).$$

Esto exige ocho renglones.

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Este argumento es válido, ya que la proposición final es una tautología. El patrón del argumento que se muestra en este ejemplo se llama **razonamiento transitivo** o *ley del silogismo hipotético*. ■

A continuación mostramos un resumen de las formas de argumentos válidos y no válidos presentados hasta aquí.

Formas de argumentos válidos

Modus ponens	Modus tollens	Silogismo disyuntivo	Razonamiento transitivo
$p \to q$	$p \to q$	$p \lor q$	$p \to q$
p	$\sim q$	$\sim p$	$q \to r$
$\therefore q$	$\therefore \sim p$	$\therefore q$	$\therefore p \to r$

Formas de argumentos no válidos (falacias)

Falacia del recíproco	Falacia del inverso
$p \to q$	$p \to q$
q	$\sim p$
$\therefore p$	$\therefore \sim q$

Cuando un argumento contiene tres o más premisas, será necesario determinar el valor de verdad de la conjunción de todas ellas. Recuerde que *si al menos una* premisa de una conjunción de varias premisas es falsa, entonces toda la conjunción es falsa.

EJEMPLO 5 Determine si el argumento es *válido* o *inválido*.

Si Eddie va al pueblo, entonces Mabel se queda en casa.

Si Mabel no se queda en casa, entonces Rita cocinará.

Rita no cocinará.

Por lo tanto, Eddie no va al pueblo.

En un argumento escrito de esta manera, primero se dan las premisas, y la conclusión es la proposición que sigue a la frase "Por lo tanto". Represente con p a "Eddie va al pueblo", con q a "Mabel se queda en casa" y con r a "Rita cocinará". La forma simbólica del argumento es

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \sim q \to r \\ \sim r \\ \hline \therefore \sim p \end{array}.$$

Para probar la validez del argumento, elabore una tabla de verdad para la proposición

$$[(p \to q) \land (\sim q \to r) \land \sim r] \to \sim p.$$

La tabla se muestra a continuación.

p	q	r	$p \to q$	$\sim q$	$\sim q \to r$	$\sim r$	$(p \to q) \wedge (\sim q \to r) \wedge \sim r$	$\sim p$	$[(p \to q) \wedge (\sim q \to r) \wedge \sim r] \to \sim p$
V	V	V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V	V

Dado que la columna final no contiene únicamente valores verdaderos (V), la proposición no es una tautología. El argumento no es válido. ■

Considere el poema siguiente, que ha recorrido el mundo por muchos años.

Por falta de un clavo, la herradura se perdió.
Por falta de una herradura, el caballo se perdió.
Por falta de un caballo, el jinete se perdió.
Por falta de un jinete, la batalla se perdió.
Por falta de una batalla, la guerra se perdió.
Por lo tanto, por falta de un clavo, la guerra se perdió.

Cada línea del poema puede escribirse como una proposición *si... entonces*. Por ejemplo, la primera línea puede replantearse como: "si un clavo se pierde, entonces la herradura se pierde". Las otras proposiciones pueden expresarse de manera análoga. La conclusión, "por falta de un clavo, la guerra se perdió" se deduce a partir de las premisas porque se aplica el uso repetido de la ley de transitividad. Los argumento utilizados por Lewis Carrol (vea la nota al margen en el capítulo 1) con frecuencia adquieren una forma similar. El ejemplo siguiente proviene de una de sus obras.



Tweedlelógica "Yo sé qué es lo que estás pensando", dijo Tweedledum, "pero eso no es así, de ninguna manera". "Al contrario", continuó Tweedledee, "si así fuera, podría ser; y si éste fuera el caso, así sería, pero como no es, entonces no es. Eso es lógica".

EJEMPLO 6 Proporcione una conclusión válida para las premisas siguientes.

Los bebés son ilógicos.
Nadie desprecia a quien puede domar un cocodrilo.
Las personas ilógicas son despreciadas.

Primero, escriba cada premisa en la forma *si... entonces*.

Si usted es un bebé, entonces usted es ilógico.
Si usted puede domar a un cocodrilo, entonces usted no es despreciado.
Si usted es ilógico, entonces usted es despreciado.

Sea p "usted es un bebé", sea q "usted es ilógico", sea r "usted puede domar a un cocodrilo" y sea s "usted es despreciado". Con estas letras, las proposiciones pueden escribirse simbólicamente como

$$p \to \sim q$$
$$r \to \sim s$$
$$\sim q \to s.$$

Ahora empiece con cualquier letra que aparezca sólo una vez. Aquí p aparece una sola vez. Utilizando la contrapositiva de $r \rightarrow \sim s$, que es $s \rightarrow \sim r$, reacomode las tres proposiciones como sigue:

$$p \rightarrow \sim q$$
$$\sim q \rightarrow s$$
$$s \rightarrow \sim r.$$

A partir de las tres proposiciones, el uso repetido del razonamiento transitivo da la conclusión válida

$$p \rightarrow \sim r,$$

lo que da como resultado un argumento válido.

En otras palabras, "Si usted es un bebé, entonces no puede domar un cocodrilo", o como Lewis Carrol habría escrito, "Los bebés no pueden domar cocodrilos". ■

PARA REFLEXIONAR

El campo de la publicidad es notorio por sus errores lógicos. Aunque la conclusión obtenida en un anuncio puede ser verdadera, la lógica empleada para llegar a esa conclusión puede basarse en un argumento inválido. Una y otra vez vemos en la televisión lo que se conoce como la falacia de los expertos. Es decir, se apela a la opinión de un experto (o de una figura famosa) para validar algo que está fuera de su campo de conocimientos.



En su columna del 8 de abril de 1997, "Cuando los atletas avalan algo, ¿por qué todos les hacen caso?", que apareció en *USA TODAY Chicago Tribune*, el columnista Bob Green hizo algunas observaciones muy sagaces. Mientras visitaba Denver, observó que la imagen de John Elway, el *quarterback* de los Broncos de Denver, aparecía por todos lados como aval de una gran variedad de productos.* Green habló con Jeff Sperbeck, el director de mercadotecnia del futuro miembro del Salón de la Fama:

"Desde que John se hizo famoso, ha habido una gran fascinación en torno a su persona", comentó Sperbeck. "Cualquiera que desea vender un artículo sabe que la mejor manera de hacer que la gente se identifique con un producto es asociarlo con John, porque al adquirir esa mercancía la gente siente que está estableciendo una conexión personal con Elway".

Así es como funcionan las cosas en Estados Unidos. Cuando alguien es famoso, ya sea gracias a los deportes, el cine, la televisión o la música, los comerciantes hacen todo lo posible por contratarlo precisamente por las razones que mencionaba Sperbeck: para que los clientes, en un deseo por acercarse de algún modo a la vida de esos famosos, compren dicha mercancía. Se trata de una característica del estilo de vida americano, algo tan ubicuo que rara vez se menciona: la firma de una celebridad es igual a grandes ventas.

*Nota de los autores: En la entrevista que otorgó durante el medio tiempo en el Super Tazón XXXIV, Elway trató de poner un anuncio gratis para un sitio web de mercancía deportiva.

(continúa)

Quizá valga la pena detenernos unos instantes y preguntarnos: ¿por qué ocurre esto?

Todo consumidor sabe que si las celebridades anuncian productos —Elway como muchos otros— y permiten que sus nombres sean utilizados para promoverlos, lo hacen por una sencilla razón: porque les pagan por hacerlo. Para cada empresa (ya sea fabricante de zapatos, camisas, sombreros o bebidas) el gasto de estos recursos es una inversión. Los millones de personas que vean el nombre de una estrella asociado con la publicidad de un producto seguramente lo comprarán.

¿Por qué?

"¿Y el dinero?" Una de las frases más antipáticas que hemos escuchado en las pantallas en años recientes, era el grito silencioso de los atletas profesionales y otras celebridades meses antes de que un guionista de cine lo redujera a un valor monetario en el mercado de las promociones. Éste es uno de los privilegios de la fama: el derecho a ser remunerado por dejar que otros usen nuestro nombre. Y es una realidad para la persona que vende su nombre al mejor postor.

Aún queda la pregunta, ¿por qué el resto de las personas —todos o cualquiera de nosotros— compra un producto a sabiendas de que a alguien famoso le han pagado por decir que le gusta? En un tribunal, un abogado invalidaría, a los ojos del jurado, el testimonio de un testigo si pudiera demostrar que alguien le había pagado una enorme cantidad de dinero a esa persona para que hablara bien de él. Si se demostrara que las palabras elogiosas de una persona acerca de otra son resultado de una transacción monetaria, el testimonio de esa persona quedaría invalidado. Así ocurre en los tribunales.

En el tribunal de la opinión pública, por alguna razón inexplicable no se aplican las mismas reglas del sentido común. Cuanto más se pague a una celebridad por promocionar un producto, y mayor parezca ser el presupuesto del anuncio, mayor será la atracción que sientan los consumidores hacia el producto que se promociona. Nadie se detiene a pensar: "Un momento, esa celebridad dice que un producto (unos zapatos, una bebida, un auto, una barra de dulce) es grandioso, pero, ¿por qué debo creerle, si ha sido comprado? Le pagan por decir eso."

Pero las cosas nunca son así. En un mundo sensato, el único aval que realmente tendría significado (es decir, que verdaderamente pudiera persuadir a alguien) sería el que hombres o mujeres famosos ofrecieran de manera gratuita. La gente sólo debería creer y aceptar un respaldo de esa naturaleza.

Haciendo a un lado las promociones de las celebridades, una encuesta determinó que los comerciales más efectivos son aquellos en los que no aparecen "personas de carne y hueso". Algunos de los mejores fueron los del conejito de Eveready, el niño hecho de masa de Pillsbury y los duendes de Keebler, y aunque no es un personaje animado, una de las estrellas comerciales de los últimos años es el perro Chihuahua de Taco Bell.

Otro truco común en la publicidad es la falacia emotiva, en donde se apela a la compasión, la pasión, la fuerza bruta, el esnobismo, la vanidad o alguna otra emoción. ¿Ha visto el anuncio de neumáticos donde se sugiere que si usted no utiliza cierta marca de neumáticos, sus pequeños no estarán seguros? ¿Y acaso ha visto alguna vez un anuncio de cosméticos que no muestre "gente bonita"?

Para análisis en grupo

1. Comente lo siguiente, que apareció como parte de una pregunta dirigida a la columnista Sue Rusche ("Education helps control alcoholism", 9 de julio de 1988, en el Sacramento Union):

   La verdad simple es que el Congreso y la prensa rara vez escuchan a las personas que realmente conocen los problemas. Prefieren escuchar a aquellos cuyo testimonio o cuyas afirmaciones, aunque

no tengan idea de lo que hablan, les dará una gran publicidad. Como alguna vez comentara un amigo británico: "Ustedes los estadounidenses le piden a un actor que ha hecho el papel de adicto a las drogas en alguna película que testifique ante el Congreso como si fuera un experto en drogas. Lord Laurence Olivier ha hecho miles de veces el papel de Hamlet, pero el Parlamento jamás lo ha requerido para testificar sobre temas relacionados con Dinamarca."

2. ¿Qué otros ejemplos de falacias de expertos ha visto u oído recientemente? ¿Qué otros ejemplos de falacias emotivas ha visto u oído?
3. ¿Qué tiene que ver Michael Jordan con este asunto?

3.6 EJERCICIOS

Cada uno de los argumentos siguientes es válido según alguna de las formas de los argumentos válidos estudiados en esta sección, o es una falacia según alguna de las formas de los argumentos no válidos estudiados. (Vea los cuadros donde se resumen estas formas.) Determine si el argumento es válido *o es una* falacia, *e indique la forma que corresponda.*

1. Si usted utiliza binoculares, entonces alcanzará a ver el cometa.
   Si usted alcanza a ver el cometa, entonces se sorprenderá.

   Si usted utiliza binoculares, entonces se sorprenderá.

2. Si Billy Joel viene al pueblo, entonces iré al concierto.
   Si voy al concierto, entonces me reportaré enfermo al trabajo.

   Si Billy Joel viene al pueblo, entonces me reportaré enfermo al trabajo.

3. Si Frank Steed vende su cuota, obtendrá un bono.
   Frank Steed vendió su cuota.

   Obtuvo un bono.

4. Si Amy McRee trabaja duro, conseguirá un ascenso.
   Amy McRee trabajó duro.

   Consiguió un ascenso.

5. Si ella compra otro par de zapatos, su armario se llenará.
   Su armario se llenará.

   Ella compra otro par de zapatos.

6. Si no tiene que levantarse a las 5:30 A.M., quedará en la cama.
   Se quedó en la cama.

   No tiene que levantarse a las 5:30 A.M.

7. Si juega Patrick Roy, el oponente se queda fuera.
   El oponente no se queda fuera.

   Patrick Roy no juega.

8. Si Pedro Martínez lanza, los Medias Rojas ganan.
   Los Medias Rojas no ganan.

   Pedro Martínez no lanza.

9. "Si evolucionáramos para convertirnos en una raza de Isaac Newtons, eso no sería progreso." (Cita de Aldous Huxley)
No hemos evolucionado para convertirnos en una raza de Isaac Newtons.

Eso es progreso.

10. "Si he podido ver más que los demás, es porque estoy apoyado en los hombros de gigantes." (Cita de sir Isaac Newton)
Yo no he visto más que los demás.

No estoy apoyado en los hombros de gigantes.

11. Alison Romike trota o Kaare Taylor levanta pesas.
Kaare Taylor no levanta pesas.

Alison Romike trota.

12. Ella utiliza el comercio por Internet o ella paga con tarjeta de crédito.
Ella no paga con tarjeta de crédito.

Ella utiliza el comercio por Internet.

Utilice una tabla de verdad para determinar si el argumento es válido *o* inválido.

13. $p \vee q$
p
$\sim q$

14. $p \wedge \sim q$
p
$\sim q$

15. $\sim p \rightarrow \sim q$
q
p

16. $p \vee \sim q$
p
$\sim q$

17. $p \rightarrow q$
$q \rightarrow p$
$p \wedge q$

18. $\sim p \rightarrow q$
p
$\sim q$

19. $p \rightarrow \sim q$
q
$\sim p$

20. $p \rightarrow \sim q$
$\sim p$
$\sim q$

21. $(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \rightarrow q)$
p
$\sim q$

22. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
p
$p \vee q$

23. $(\sim p \wedge r) \rightarrow (p \vee q)$
$\sim r \rightarrow p$
$q \rightarrow r$

24. $(r \wedge p) \rightarrow (r \vee q)$
$q \wedge p$
$r \vee p$

25. Explique en pocas frases cómo determinaría la proposición según la cual se pudiera elaborar una tabla de verdad tal que con ella pudiera verificarse la validez de los argumentos en los ejercicios 27 a 36.

26. Anteriormente mostramos cómo analizar argumentos utilizando los diagramas de Euler. Remítase al ejemplo 4 de esta sección, vuelva a plantear cada premisa y la conclusión utilizando un cuantificador, y luego dibuje un diagrama de Euler para ilustrar la relación resultante.

Determine si los argumentos siguientes son válidos o inválidos.

27. A Jeff le gusta jugar al golf. Si a Joan le gusta coser, entonces a Jeff no le gusta jugar al golf. Si a Joan no le gusta coser, entonces Brad canta en el coro. Por lo tanto, Brad canta en el coro

28. Si ese árbol está infestado de escarabajos de la corteza, entonces morirá. La gente planta árboles el Día de la Reforestación y no morirá. Por lo tanto, si la gente planta árboles el Día de Reforestación, entonces ese árbol no está infestado de escarabajos de la corteza.

29. Si la locura por el juguete Bobble continúa, entonces los muñecos Beanie seguirán siendo populares. Las muñecas Barbie continúan siendo las favoritas o los muñecos Beanie seguirán siendo populares. Las muñecas Barbie no continúan siendo las favoritas. Por lo tanto, la locura por el juguete Bobble no continúa.

30. Christina Aguilera canta o Ricky Martin no es un ídolo de los adolescentes. Si Ricky Martin no es ídolo de los adolescentes, entonces Britney Spears no ganó un American Music Award. Britney Spears ganó un American Music Award. Por lo tanto, Christina Aguilera no canta.

31. Si te tengo bajo mi piel, entonces estás en lo profundo de mi corazón. Si estás en lo profundo de mi corazón, entonces realmente no eres parte de mí. Estás en lo profundo de mi corazón o realmente eres parte de mí. Por lo tanto, si te tengo bajo mi piel, entonces realmente eres parte de mí.

32. Los Colts estarán en las finales si y sólo si Peyton es el líder de pases en la liga. Marv ama a los Colts o Peyton es líder de pases en la liga. Marv no ama a los Colts. Por lo tanto, los Colts no estarán en los *playoffs*.

33. Si Otis es *disc jockey*, entonces vive en Lexington. Él vive en Lexington, y es un fanático de la historia. Por lo tanto, si Otis no es un fanático de la historia, entonces no es *disc jokey*.

34. Si yo fuera su mujer y usted fuera mi marido, entonces yo nunca dejaría de amarlo. Yo he dejado de amarlo. Por lo tanto, yo no soy su mujer o usted no es mi marido.

35. Todos los hombres fueron creados iguales. Todas las personas que han sido creadas iguales son mujeres. Por lo tanto, todos los hombres son mujeres.

36. Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es mortal.

37. Suponga que usted le pregunta la hora a alguien y obtiene la siguiente respuesta:

> "Si le digo la hora, entonces empezaremos a conversar. Si empezamos a conversar, entonces usted querrá encontrarse conmigo en la parada del autobús. Si nos encontramos en la parada del autobús, entonces hablaremos de mi familia. Si hablamos de mi familia, entonces usted se enterará de que mi hija es una mujer casadera. Si usted se entera de que ella es una mujer casadera, entonces usted querrá desposarla. Si usted la desposara, entonces mi vida sería miserable, porque lo último que deseo es que mi hija se case con un bueno para nada que no puede comprarse un reloj de 10 dólares."

Utilice el razonamiento transitivo para sacar una conclusión válida.



38. Cheryl Arabie hizo la siguiente observación: "Si quisiera determinar si un argumento que conduce a la proposición

$$[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$$

es válido, sólo tendría que considerar las líneas de la tabla de verdad que en la columna encabezada con $(p \to q) \wedge \sim p$ muestran una V". Cheryl fue muy perspicaz. ¿Puede explicar por qué su observación es correcta?

En los argumentos usados por Lewis Carroll, resulta muy útil reescribir las premisas en la forma si... entonces, *a fin de llegar de forma más sencilla a una conclusión válida. Las siguientes premisas son de Lewis Carroll. Escriba cada una en la forma* si... entonces.

39. Todas mis aves de corral son patos.

40. Ninguno de sus hijos puede pensar en forma lógica.

41. Los conejillos de Indias carecen de sentido musical.

42. Ningún abstemio es prestamista.

43. Ningún gatito que aprende con facilidad tiene ojos verdes.

44. Los opiómanos carecen de autocontrol.

45. No he archivado ninguna que no pueda leer.

46. Todos los escritos en papel azul están archivados.

Los siguientes ejercicios incluyen premisas de Lewis Carroll. Escriba cada una de las premisas en símbolos, y luego, en la parte final, ofrezca una conclusión que produzca un argumento válido.

47. Sea p la premisa "es un pato", sea q "es mi ave de corral", sea r "uno es un oficial", y sea s "uno está dispuesto a bailar vals".
- **(a)** Ningún pato está dispuesto a bailar vals.
- **(b)** Ningún oficial declina jamás bailar vals.
- **(c)** Todas mis aves de corral son patos.
- **(d)** Formule una conclusión que produzca un argumento válido.

48. Sea p la premisa "uno es capaz de pensar de manera lógica", sea q "uno está capacitado para servir en un jurado", sea r "uno es cuerdo" y sea s "él es su hijo".
- **(a)** Todos aquellos que son cuerdos pueden pensar de manera lógica.
- **(b)** Ningún lunático puede estar capacitado para servir en un jurado.
- **(c)** Ninguno de mis hijos puede pensar de manera lógica.
- **(d)** Dé una conclusión que produzca un argumento válido.

49. Sea p la premisa "uno es honesto", sea q "uno es prestamista", sea r "uno que no cumple las promesas", sea s "uno es digno de confianza", sea t "uno es muy comunicativo" y sea u "uno es bebedor de vino".
- **(a)** Quienes no cumplen las promesas no son dignos de confianza.
- **(b)** Los bebedores de vino son muy comunicativos.
- **(c)** Una persona que cumple las promesas es honesta.

(d) Ningún abstemio es prestamista. (*Una pista*: Suponga que "abstemio" es lo opuesto a "bebedor de vino".)
(e) Uno siempre puede confiar en una persona muy comunicativa.
(f) Formule una conclusión que produzca un argumento válido.

50. Sea p "es un conejillo de Indias", sea q "carece de sentido musical", sea r "se mantiene en silencio mientras se interpreta la sonata *Claro de Luna*" y sea s "aprecia a Beethoven".
(a) Nadie que aprecie realmente a Beethoven no guarda silencio mientras se interpreta la sonata *Claro de Luna*.
(b) Los conejillos de Indias carecen de sentido musical.
(c) Nadie que carezca de sentido musical se mantiene en silencio mientras se interpreta la sonata *Claro de Luna*.
(d) Proporcione una conclusión que produzca un argumento válido.

51. Sea p la premisa "empieza con 'Estimado señor'", sea q "está tachada", sea r "está fechado", sea s "está archivado", sea t "está a tinta negra", sea u "está en tercera persona", sea v "yo lo puedo leer", sea w "está en papel azul", sea x "está en una hoja" y sea y "está escrito por Brown".
(a) Todas las cartas fechadas en esta habitación están escritas en papel azul.
(b) Ninguna de ellas está en tinta negra, excepto aquellas que están escritas en tercera persona.
(c) No he archivado ninguna que no pueda leer.
(d) Ninguna de las que están escritas en una hoja están sin fechar.
(e) Todas aquellas que no están tachadas están en tinta negra.
(f) Todas las escritas por Brown empiezan con "Estimado señor".
(g) Todas las escritas en papel azul están archivadas.
(h) Ninguna de las escritas en más de una hoja están tachadas.
(i) Ninguna de las que empiezan con "Estimado señor" están escritas en tercera persona.
(j) Formule una conclusión que produzca un argumento válido.

52. Sea p la premisa "él irá a una fiesta", sea q "él cepilla su cabello", sea r "él tiene control de sí mismo", sea s "él se ve encantador", sea t "él consume opio", sea u "él es pulcro" y sea v "él usa guantes blancos".
(a) Nadie que vaya a una fiesta deja de cepillarse el cabello.
(b) Nadie se ve encantador si es desaliñado.
(c) Los consumidores de opio no tienen autocontrol.
(d) Todos los que se han cepillado el cabello se ven encantadores.
(e) Nadie usa guantes blancos, a no ser que vaya a una fiesta. (*Una pista*: "a a menos que b" $\equiv \sim b \rightarrow a$.)
(f) Un hombre siempre está desaliñado si no tiene autocontrol.
(g) Formule una conclusión que produzca un argumento válido.

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

Revisión de los rompecabezas lógicos

Los rompecabezas lógicos en la sección de Extensión de las páginas 133 a 136 son muy elementales, considerando la complejidad de algunos otros problemas que se encuentran en las tres revistas mencionadas. El siguiente problema requiere más tiempo y habilidades de razonamiento que las que se requirieron en la sección mencionada. Se tomó de *Dell Logic Puzzles*, octubre de 1999.

El grupo puede dividirse en equipos y ver cuál equipo es capaz de resolver este problema con mayor rapidez.

TINA DEL REMOJO por Margaret Rounds

Para ayudar a recaudar dinero para el festival anual de Dellville, el entrenador del equipo local de béisbol masculino se ofreció como voluntario para sentarse en una Tina del Remojo. Cinco jugadores del entrenador Clark, cada uno de los cuales juega en una posición diferente (incluyendo al primera base), aceptan el reto de tirarlo en la tina, y cada jugador hizo un número diferente de lanzamientos (dos, tres, cuatro, cinco, seis

o nueve) para completar este objetivo. Con base en las claves siguientes, ¿puede determinar el orden en que cada jugador (identificando su nombre completo —uno de los apellidos es Winslow— tiró en la tina al entrenador, el número de lanzamientos que le tomó hacerlo y la posición que cada uno juega?

1. Al jardinero derecho le tomó tres lanzamientos más que a Josh (quien no fue el último en lanzar).
2. El parador en corto lanzó inmediatamente antes que el señor Belford, quien lanzó inmediatamente antes que Geoffrey.
3. El señor Cavallo tiró a la tina al entrenador con su sexto lanzamiento.
4. Los jugadores que hicieron un número par de lanzamientos fueron Scott, el señor Hepler y la quinta persona en tirar a la tina al entrenador, aunque no en ese orden.
5. El *pitcher* (quien no fue el cuarto en tirar al entrenador) hizo más lanzamientos que Oliver, pero menos que el señor Janney.
6. Los jugadores que hicieron un número impar de lanzamientos son Edgar y el *catcher*, aunque no en ese orden.

Orden	Nombre	Apellido	Lanzamientos	Posición

	Edgar	Geoffrey	Josh	Oliver	Scott	Belford	Cavallo	Hepler	Janney	Winslow	Dos	Cuatro	Cinco	Seis	Nueve	Catcher	Primera base	Pitcher	Jardinero der.	Parador en corto
Primero																				
Segundo																				
Tercero																				
Cuarto																				
Quinto																				
Catcher																				
Primera base																				
Pitcher																				
Jardinero der.																				
Parador en corto																				
Dos																				
Cuatro																				
Cinco																				
Seis																				
Nueve																				
Belford																				
Cavallo																				
Hepler																				
Janney																				
Winslow																				

EXAMEN DEL CAPÍTULO 3

Escriba una negación para cada una de las proposiciones siguientes.

1. $6 - 3 = 3$
2. Todos los hombres fueron creados iguales.
3. Algunos miembros de la clase fueron al viaje de campo.
4. Si ésa es la forma en que lo siente, entonces yo lo aceptaré.
5. Ella cruzó en SIGA y obtuvo $200.

Sea p la premisa "Me amarás" *y sea q* "Yo te amaré". *Escriba con símbolos cada una de las siguientes proposiciones.*

6. Si tú no me amarás, entonces yo te amaré.
7. Yo te amaré si tú me amarás.
8. Yo no te amaré si y sólo si tu no me amarás.

Utilizando las mismas instrucciones que para las ejercicios 6 al 8, escriba en palabras cada una de las siguientes proposiciones.

9. $\sim p \wedge q$
10. $\sim(p \vee \sim q)$

En cada uno de los siguientes ejercicios, suponga que p es verdadera y q y r son falsas. Determine el valor de verdad de cada proposición.

11. $\sim q \wedge \sim r$
12. $r \vee (p \wedge \sim q)$
13. $r \rightarrow (s \vee r)$. (El valor de verdad de la proposición s no se conoce.)

14. $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

15. Explique con sus palabras por qué si p es una proposición bicondicional, $p \leftrightarrow \sim p$ debe ser falsa.

16. Establezca las condiciones necesarias para que
(a) una proposición condicional sea falsa.
(b) una conjunción sea verdadera.
(c) una disyunción sea falsa.

Elabore una tabla de verdad para cada una de las proposiciones siguientes.

17. $p \wedge (\sim p \vee q)$ **18.** $\sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Determine si cada proposición es verdadera *o* falsa.

19. Algunos enteros negativos son enteros no negativos.

20. Todos los números irracionales son números reales.

Escriba cada proposición condicional en la forma si... entonces.

21. Todos los enteros son números racionales.

22. Ser un rombo es suficiente para que un polígono sea cuadrilátero.

23. Ser divisible entre 3 es necesario para que un número sea divisible entre 9.

24. Ella desentierra huesos de dinosaurios sólo si ella es paleontóloga.

Para cada proposición, escriba **(a)** *su recíproca,* **(b)** *su inversa y* **(c)** *su contrapositiva.*

25. Si una imagen dice más que mil palabras, la gráfica me ayudará a entenderlo.

26. $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$ (Utilice una de las leyes de De Morgan cuando sea necesario).

27. Utilice un diagrama de Euler para determinar si el argumento siguiente es *válido* o *inválido.*

Todos los miembros de ese videoclub ahorran dinero.
Pat Pearson es miembro de ese videoclub.
Pat Pearson ahorra dinero.

28. Relacione cada argumento de las partes (a) a (d) con la ley que justifica su validez o la falacia de la cual es un ejemplo.
A. *Modus ponens*
B. *Modus tollens*
C. Razonamiento transitivo
D. Silogismo disyuntivo
E. Falacia del recíproco
F. Falacia del inverso

(a) Si él come hígado, entonces el comerá cualquier cosa.
Él come hígado
Él comerá cualquier cosa.

(b) Si usted utiliza su cinturón de seguridad, estará más seguro.
Usted no utiliza su cinturón de seguridad.
Usted no estará seguro.

(c) Si oigo *Come Saturday Morning*, pienso en ella.
Si pienso en ella, me deprimo.
Si oigo *Come Saturday Morning*, me deprimo.

(d) Ella canta o ella baila.
Ella no canta.
Ella baila.

Utilice una tabla de verdad para determinar si cada argumento es válido *o* inválido.

29. Si emito un cheque, será rechazado. Si el banco lo respalda, entonces no será rechazado. El banco lo respalda. Por lo tanto, no emito un cheque.

30. $\sim p \rightarrow \sim q$
$q \rightarrow p$
$\therefore p \vee q$

capítulo

4 Numeración y sistemas matemáticos



Desde el principio de la historia de las matemáticas ha quedado claro que la necesidad de contar fue la base para el desarrollo de sistemas de numeración; como se verá en este capítulo, van desde los más sencillos, que utilizaban marcas, hasta nuestros actuales sistemas posicionales. Una de las mayores ventajas de nuestro sistema actual es que los algoritmos, o procedimientos, para realizar cálculos son relativamente fáciles. Por ejemplo, cuando sumamos o restamos dos números en forma vertical, "los alineamos en columnas" de modo que los dígitos que representan el mismo valor posicional se combinen. Es posible que este procedimiento sea el único que usted haya utilizado al sumar o restar con lápiz y papel. Sin embargo, existen métodos alternos para realizar cálculos, y algunos de ellos se estudian en este capítulo.

Uno de los más interesantes de estos algoritmos alternos es el *método de complemento a nueve* para restar. Para usar este método, primero convengamos que el complemento a nueve de un dígito n es $9 - n$. Por ejemplo, el complemento a nueve de 0 es 9, de 1 es 8, de 2 es 7, y así sucesivamente, hasta el complemento a nueve de 9 que es 0. Ahora suponga que queremos restar

$$\begin{array}{r} 25{,}341 \\ -8496. \\ \hline \end{array}$$

Se llenan con ceros los lugares que falten en el sustraendo (8496) para que tenga el mismo número de dígitos que el minuendo:

$$\begin{array}{r} 25{,}341 \\ -08{,}496. \\ \hline \end{array}$$

Ahora, reemplace cada dígito en el sustraendo con su complemento a nueve, y luego sume:

$$\begin{array}{r} 25{,}341 \\ +91{,}503 \\ \hline 116{,}844. \end{array}$$

Ahora, borre el primer dígito (1) y sume 1 al número que queda en la suma (16,844):

$$16{,}844 + 1 = \boxed{16{,}845}. \leftarrow \text{Respuesta}$$

La respuesta al problema original de diferencia es 16,845.

4.1 Los sistemas de numeración a través de la historia

4.2 Aritmética en el sistema indoarábigo

4.3 Cómo convertir números a diferentes bases

4.4 Sistemas matemáticos finitos

4.5 Grupos

Investigación en grupo: Algoritmo para un calendario perpetuo

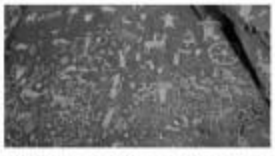
Examen del capítulo 4

Anteriormente, se ha estudiado el concepto de *conjunto* o colección de elementos. Un conjunto, en sí mismo, puede no tener una estructura particular. Pero cuando introducimos *formas de combinar los elementos* (llamadas *operaciones*) y *formas de comparar los elementos* (denominadas *relaciones*), obtenemos un **sistema matemático**.

Sistema matemático

Un **sistema matemático** consta de tres partes:

1. un conjunto de elementos;
2. una o más operaciones para combinar los elementos;
3. una o más relaciones para comparar los elementos.



Símbolos concebidos para representar objetos o ideas, se encuentran entre las invenciones más antiguas de los humanos. Estos símbolos indios de Arizona tienen varios siglos de antigüedad.

Un ejemplo conocido de sistema matemático es el conjunto de los enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, junto con la operación de suma y la relación de igualdad.

Desde un punto de vista histórico, el sistema matemático más primitivo incluía el conjunto de los números naturales (o de conteo) o inicialmente un subconjunto constituido por los números "más pequeños" utilizados para contar. Las diferentes formas de simbolizar y trabajar con los números para contar constituyen los **sistemas de numeración**. Los símbolos de un sistema de numeración constituyen los **numerales** o **cifras**.

4.1 Los sistemas de numeración a través de la historia

Las sociedades primitivas tienen poca necesidad de utilizar cifras que expresen grandes cantidades. Incluso en la actualidad, los lenguajes de algunas culturas no poseen palabras para los números, aparte de "uno", "dos" y, tal vez, un vocablo indefinido que sugiera la idea de "muchos". Por ejemplo, de acuerdo con el psicólogo Jared Diamond de la UCLA (*Discover,* agosto de 1987, p. 38), ciertas aldeas de los gimi, en Nueva Guinea, sólo usan dos palabras como raíz *–iya,* para indicar uno, y *rarido* para indicar dos. Los números un poco mayores se expresan utilizando combinaciones de estas dos palabras: por ejemplo, *rarido-rarido* es cuatro y *rarido-rarido-iya* es cinco.



Bastones para contar como éste fueron usados en Inglaterra hacia 1400 d.C. para conservar el registro de las transacciones financieras. Cada muesca representa una libra esterlina.

Un método práctico de llevar la cuenta por medio de la equiparación pudo haberse desarrollado cuando los seres humanos comenzaron a asentarse en poblados fijos y a cultivar la tierra y criar ganado. La gente probablemente comenzó a llevar la cuenta de las ovejas que poseía en un rebaño, equiparando el número de piedras con el de ovejas, por ejemplo. Las piedras probablemente se conservaban, luego, como un registro o inventario del número de total de ovejas.

Un método más eficiente consistía en el uso de un **bastón para contar**, en el cual se grababa una muesca o **marca** por cada oveja que se quería contar. Se han encontrado bastones marcados que al parecer tienen muchos miles de años de antigüedad. Las marcas en un bastón todavía se utilizan en la actualidad: por ejemplo, nueve elementos se registran escribiendo 𝍸 𝍸 ||||.

Los bastones para contar y los grupos de piedras para ese mismo fin constituyeron un importante avance. Por medio de estos métodos, comenzó a desarrollarse la idea de *número.* Los hombres primitivos se se percataron de que un grupo de tres gallinas y un grupo de tres perros tenían algo en común: la idea de *tres.* Poco a poco, concibieron los números de manera separada de las cosas que representaban. Así, fueron desarrollándose ciertos símbolos para los diferentes números.

Los registros numéricos de los pueblos de la Antigüedad nos dan una idea de su vida cotidiana y nos los muestran como productores y consumidores. Por ejemplo, María y José se trasladaron a Belén para ser contados en un censo —un registro numérico. Mucho antes, 5000 años atrás, los pueblos egipcio y sumerio ya utilizaban números grandes en sus registros de gobierno y de negocios. Existen antiguos documentos que revelan algunos de sus métodos numéricos, así como los de los griegos,

romanos, chinos e indios. Los sistemas de numeración se volvieron más sofisticados, conforme surgieron las necesidades.

Numeración en el antiguo Egipto: agrupación simple Las primeras equiparaciones y el uso de muescas condujeron finalmente al elemento básico que constituye la esencia de todos los sistemas de numeración más avanzados, es decir, el **agrupamiento**, que permite menos repetición de los símbolos y también contribuye a que los numerales sean más fáciles de interpretar. La mayoría de los sistemas, incluyendo el nuestro, han usado agrupaciones de 10, lo cual indica que las primeras operaciones se realizaban probablemente con ayuda de los 10 dedos de las manos. El tamaño de la agrupación (usualmente 10) recibe el nombre de **base** del sistema de numeración. Aunque también se han utilizado agrupaciones de 5, 20 y 60 como bases de numeración.



Las matemáticas egipcias Gran parte de nuestro conocimiento de las matemáticas egipcias proviene del papiro Rhind, de hace casi 3800 años. Aquí se reproduce un pequeño fragmento que muestra diversos métodos para hallar el área de un triángulo.

El sistema egipcio antiguo es un ejemplo de un sencillo sistema de agrupación. Utilizaba el 10 como base, y sus diferentes símbolos se muestran en la tabla 1. El símbolo para el 1 (|) se repite como las muescas en los bastones, y también para 2, 3, y así hasta 9. Para el 10 se utilizaba un símbolo distinto (∩), el cual se repetía para el 20, el 30 y así sucesivamente, hasta el 90. Este patrón permitió a los egipcios expresar números hasta el 9,999,999 con solo los siete símbolos que se muestran en la tabla.

TABLA 1 Símbolos egipcios antiguos

Número	Símbolo	Descripción
1		Barra
10		Talón
100		Papiro
1000		Flor de loto
10,000		Dedo señalando
100,000		Pez lota
1,000,000		Persona asombrada

Los símbolos utilizados denotan las diferentes **potencias** de la base (10):

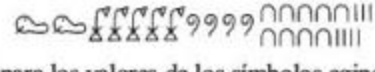
$$10^0 = 1,\ 10^1 = 10,\ 10^2 = 100,\ 10^3 = 1000,\ 10^4 = 10{,}000,$$
$$10^5 = 100{,}000 \text{ y } 10^6 = 1{,}000{,}000.$$

Los numerales pequeños, localizados en la parte superior derecha de los 10, se llaman **exponentes**.



Matemáticas aplicadas Esta pintura de una tumba egipcia muestra a los escribas haciendo marcas para contar una cosecha de granos. Las matemáticas egipcias estaban más orientadas al aspecto práctico que las griegas o babilonias, aunque los egipcios tenían una fórmula para determinar el volumen de cierta parte de una pirámide.

EJEMPLO 1 Escriba en nuestro sistema el número siguiente:



Consulte la tabla 1 para los valores de los símbolos egipcios. Cada representa 100,000. Por lo tanto, dos representan $2 \times 100{,}000$ o 200,000. Proceda como sigue:

dos		$2 \times 100{,}000 = 200{,}000$
cinco		$5 \times 1000 = 5000$
cuatro		$4 \times 100 = 400$
nueve		$9 \times 10 = 90$
siete	|	$7 \times 1 = 7$
		205,497.

El número es 205,497. ■

Número	Símbolo
1	I
5	V
10	X
50	L
100	C
500	D
1000	M

Los numerales romanos aún se utilizan en la actualidad, principalmente con fines decorativos: en las carátulas de los relojes, para numerar los capítulos de los libros, etc. El sistema es en esencia de base 10 y de agrupación simple, aunque con símbolos diferentes para los valores intermedios de 5, 50 y 500, como se ilustra. Cuando el I está colocado a la izquierda de V o de X, se resta en lugar de sumarse. Lo mismo sucede cuando X aparece a la izquierda de D o M. Así, por ejemplo, CX representa 110, mientras que XC representan 90.

EJEMPLO 2 Escriba 376,248 en símbolos egipcios.

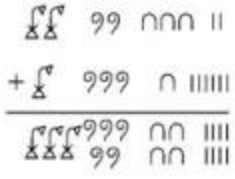
La escritura de este número requiere tres $\frown$, siete $\mathcal{I}$, seis $\mathcal{S}$, dos $\mathcal{9}$, cuatro $\cap$ y ocho | o



■

Es importante observar que la posición u orden de los símbolos no implica diferencia alguna en un sistema de agrupación simple. Cada uno de los números $\mathcal{99}\cap\cap$||||, ||||$\cap\cap\mathcal{99}$ y ||$\cap\cap\mathcal{99}\cap$|| sería interpretado como 234. Sin embargo, el orden más común es el que se muestra en los ejemplos 1 y 2, en donde los símbolos iguales están agrupados juntos y los grupos de símbolos con valores mayores están colocados a la izquierda.

Un sistema de agrupación simple es muy adecuado para sumar y restar. Por ejemplo, para sumar $\mathcal{SS}\mathcal{99}\cap\cap$|| y $\mathcal{S}\mathcal{999}\cap$|||||| en el sistema egipcio antiguo, se resuelve como se muestra. Dos | más seis | es igual a ocho |, y así sucesivamente.



Aunque usamos un signo + por conveniencia y dibujamos una línea debajo de los números, los egipcios no lo hacían así.

Algunas veces se necesita reagrupar, o "acarrear", como en el ejemplo que se muestra a continuación en el que la respuesta contiene más de nueve talones. Para reagrupar quitamos 10 talones de los grupos de 10 (decenas). Para compensar esto colocamos un papiro extra en el grupo de los 100 (centenas).



La resta se realiza de manera muy similar, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Reste en cada uno de los casos siguientes:

(a)



(b)



En el inciso (b), para restar cuatro | de dos |, se "toma prestado" un talón, que equivale a diez |. El problema termina después de escribir 10 | a la derecha.

Reagrupamiento: $99\cap\cap\cap\overset{|||||||}{|||||||}$

$$\underline{-\ 9\ \cap\cap\ |||||}$$

Diferencia: $9\ \cap\ |||||||$ ■

Procedimientos como los que se acaban de describir reciben el nombre de **algoritmo**: regla o método para resolver un problema. Los egipcios usaban un algoritmo interesante para la multiplicación, que sólo requería la habilidad de sumar y duplicar números, como se muestra en el ejemplo 4. Por conveniencia, este ejemplo utiliza nuestros símbolos en lugar de los egipcios.

EJEMPLO 4 Una piedra utilizada en la construcción de una pirámide tiene una base rectangular que mide 5 por 18 codos. Determine el área de la base.

El área de un rectángulo se calcula multiplicando el largo y el ancho; en este problema, 5×18. Para empezar, construya dos columnas de números, como se muestra a continuación. Inicie la primera columna con 1, y la segunda columna con 18. Cada columna se construye hacia abajo duplicado el número anterior. Continúe así hasta que la primera columna tenga números que puedan sumarse para obtener 5. Aquí $1 + 4 = 5$. Resuelva 5×18, sumando sólo aquellos números de la segunda columna que corresponden a 1 y 4. En este caso, 18 y 72 se suman para obtener la respuesta de 90. El área de la base de la piedra es de 90 codos cuadrados.

$$1 + 4 = 5 \left\{ \begin{array}{lll} \rightarrow 1 & 18 & \leftarrow \text{Corresponde a 1} \\ 2 & 36 & \\ \rightarrow 4 & 72 & \leftarrow \text{Corresponde a 4} \end{array} \right\} 18 + 72 = 90$$

Por último, $5 \times 18 = 90$. ■

EJEMPLO 5 Utilice el algoritmo egipcio de la multiplicación para determinar 19×70.

$\rightarrow 1$	$70 \leftarrow$
$\rightarrow 2$	$140 \leftarrow$
4	280
8	560
$\rightarrow 16$	$1120 \leftarrow$

Construya dos columnas, encabezadas por 1 y por 70. Duplique hasta que haya números en la primera columna que sumen 19. (Aquí, $1 + 2 + 16 = 19$.) Luego, sume los números correspondientes de la segunda columna: $70 + 140 + 1120 = 1330$, de modo que $19 \times 70 = 1330$. ■

Numerales griegos

1	α	60	ξ
2	β	70	o
3	γ	80	π
4	δ	90	φ
5	ϵ	100	ρ
6	ς	200	σ
7	ζ	300	τ
8	η	400	υ
9	θ	500	ϕ
10	ι	600	χ
20	κ	700	ψ
30	λ	800	ω
40	μ	900	λ
50	ν		

¿Qué hay acerca de los griegos? Los griegos clásicos usaron algunas letras de su alfabeto como símbolos numéricos. La base del sistema era el 10, y los números del 1 al 9 se representaban con las primeras nueve letras del alfabeto. En lugar de usar repetición o multiplicación, utilizaban nueve letras más para los múltiplos de 10 (hasta 90), y más letras para los múltiplos de 100 (hasta 900). Esto se llama sistema cifrado, y era suficiente para cifras pequeñas. Por ejemplo, 57 sería $\nu\zeta$; 573 sería $\phi o\gamma$ y 803 sería $\omega\gamma$. Para los múltiplos de 1000 (hasta 9000) se utilizaba una comilla, con el símbolo de la unidad; así, 1000 sería $,\alpha$ o $'\alpha$. Con frecuencia M indicaba las decenas de millar (M por miríada = 10,000) con los múltiplos escritos sobre M.

Numeración tradicional china: agrupación multiplicativa

Los ejemplos del 1 al 3 anteriores muestran que la agrupación simple, si bien constituye un avance frente al uso de muescas, aún requiere de una considerable repetición de símbolos. Por ejemplo, para denotar 90 el sistema egipcio antiguo debía utilizar nueve $\cap$: $\overset{\cap\cap\cap\cap}{\cap\cap\cap\cap}\cap$. Si hubieran introducido un símbolo adicional para representar el nueve, digamos "9", entonces 90 podría denotarse así: $9\cap$. Todos los posibles números de repeticiones de potencias de las base podrían manejarse introduciendo un símbolo multiplicador distinto para cada número menor que el de la base. Aunque, al parecer, el sistema egipcio antiguo no evolucionó en esta dirección, tal sistema justamente se utilizaba ya años atrás en China. Más tarde fue adoptado, en su mayor parte, por los

TABLA 2	
Número	Símbolo
1	一
2	二
3	三
4	四
5	五
6	六
7	七
8	八
9	九
10	十
100	百
1000	千
0	零

japoneses y surgieron distintas versiones en el transcurso de los años. Aquí mostramos la versión china que predominó, y que utilizaba los símbolos mostrados en la tabla 2. Este sistema se llama de **agrupación multiplicativa**. En general, incluye parejas de símbolos, cada pareja con un multiplicador (con valor menor al de la base) y luego una potencia de la base. Los numerales chinos se leen de arriba abajo, en lugar de izquierda a derecha.

Tres características distinguen a este sistema de uno de agrupación multiplicativa estrictamente puro. Primera, el número de unos (unidades) se indica usando un solo símbolo en lugar de dos. De hecho, el multiplicador $(1, 2, 3, \ldots, 9)$ se escribe, al contrario de la potencia de la base (10^0), que no se escribe. Segunda, en el par que indica las decenas, si el multiplicador es 1, éste se omite. Sólo se escribe el símbolo para el 10. Tercera, cuando una potencia dada de la base no aparece en un número en particular, esta omisión se muestra por la inclusión de un símbolo cero especial. (Vea la tabla 2.) Si no se tienen dos o más potencias, un solo símbolo cero sirve para hacer notar la omisión total. (Observe que, por claridad en los ejemplos siguientes, hemos enfatizado la agrupación en pares separándolos por medio de llaves. Esta característica *no* es parte del numeral real.)



La fotografía muestra un **quipú**. En *Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas*, Marcia Ascher escribe:

"Un quipú es una estructura de cordones de algodón de colores anudados. Entre los incas, la ropa de algodón y el cordaje eran de suma importancia. Utilizados para construir puentes, en ceremonias, para el pago de tributos y en cada fase del ciclo de la vida, desde el nacimiento hasta la muerte, el cordaje y la tela de algodón tenían una importancia sin paralelo en la cultura inca; así, no es de extrañar que los utilizaran para los acontecimientos de mayor relevancia. Los colores de las cuerdas, la forma en que estaban entrelazadas, la posición al entrelazarlas, los espacios entre ellas, los tipos de nudos de cada una, y la posición de los nudos, todo forma parte del registro lógico-numérico".

EJEMPLO 6 Interprete los numerales chinos siguientes.

(a) 三 千 } $3 \times 1000 = 3000$
一 百 } $1 \times 100 = 100$
六 十 } $6 \times 10 = 60$
四 $4(\times 1) = 4$
Total: 3164

(b) 七 百 } $7 \times 100 = 700$
零 $0(\times 10) = 00$
三 $3(\times 1) = 3$
Total: 703

(c) 五 千 } $5 \times 1000 = 5000$
零 $0(\times 100) = 000$
$0(\times 10) = 00$
九 $9(\times 1) = 9$
Total: 5009

(d) 四 千 } $4 \times 1000 = 4000$
二 百 } $2 \times 100 = 200$
Total: 4200

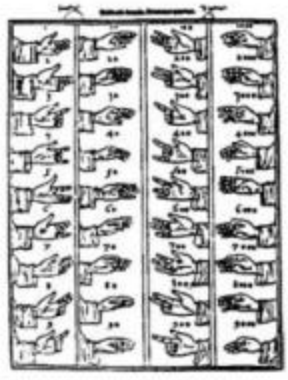
■

EJEMPLO 7 Escriba los numerales chinos para las siguientes cifras.

(a) 614

Este número está formado por seis 100, un 10 y un 4, como se representa a la derecha.

6×100: 六 百
$(1 \times)10$: 十
$4(\times 1)$: 四



El cálculo con los dedos Existe evidencia abundante de que los seres humanos primitivos (en diversas culturas) usaban los dedos para representar números. Conforme los diferentes cálculos de la vida diaria se hicieron más complicados, el *cálculo con los dedos*, como el que se muestra en este dibujo, adquirió popularidad. Al parecer, los romanos adoptaron este método de cálculo, llevándolo hasta 10,000 o tal vez más allá de esta cifra.

(b) 5090

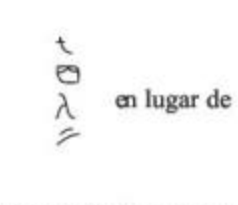
Este número consta de cinco 1000, ningún 100 y nueve 10 (no hay 1).

5×1000: 

$0(\times 100)$: 

9×10: 

Numeración indoarábiga: sistema posicional Un sistema de agrupación simple depende de la repetición de símbolos para denotar el número de cada potencia de la base. Un sistema de agrupación multiplicativa utiliza multiplicadores en lugar de la repetición, lo cual es más eficiente. Pero la eficiencia máxima se alcanza cuando continuamos con el siguiente paso, el sistema **posicional**, en el que sólo se utilizan los multiplicadores. Las diversas potencias de la base no requieren símbolos distintos, ya que las potencias asociadas con cada multiplicador pueden entenderse por medio de la posición que el multiplicador ocupe en el numeral. Si el sistema chino hubiera evolucionado a un sistema posicional, entonces el numeral para 7482 podría escribirse como



El símbolo en la posición de más abajo en la columna se entiende que representa dos 1 (10^0), el siguiente par hacia arriba, ocho 10 (10^1), luego cuatro 100 (10^2), y por último, siete 1000 (10^3). Cada símbolo en una cantidad tiene ahora un *valor absoluto* según la forma de ese símbolo particular (el valor del multiplicador), y un *valor posicional* o *valor relativo* (potencia de la base), asociado con la posición, o lugar, que ocupa.

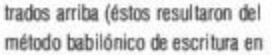
Numeración posicional

En un numeral posicional, cada símbolo (llamado **dígito**) nos transmite dos particularidades:

1. el **valor absoluto**: valor inherente del símbolo;
2. el **valor relativo**: potencia de la base que está asociada con la posición que el dígito ocupa en el numeral.

Numeral	Símbolo
1	𒁹
10	𒌋

La numeración babilónica fue posicional, de base 60. Pero los valores absolutos en las posiciones eran cifras o numerales en grupos simples de base 10, formados con los dos símbolos mostrados arriba (éstos resultaron del método babilónico de escritura en arcilla que utilizaba un punzón en forma de cuña). El numeral



denota 1421 ($23 \times 60 + 41 \times 1$).

Los valores de las posiciones en un numeral indoarábigo, de derecha a izquierda, son 1, 10, 100, 1000, y así sucesivamente. Los tres 4 en el número 46,426 tienen el mismo valor absoluto pero diferentes valores relativos. El primer 4, a la izquierda, denota cuatro veces 10,000, el siguiente indica cuatro veces 100 y el de la derecha cuatro veces 1. Los valores relativos (de base 10) se llaman como se muestra a continuación:

Miles de millones,	Cientos de millones	Decenas de millones	Millones,	Cientos de miles	Decenas de miles	Miles,	Cientos	Decenas	Unidades	Punto decimal.
8,	3	2	1,	4	5	6,	7	9	5	.

Este numeral se lee ocho mil trescientos veintiún millones, cuatrocientos cincuenta y seis mil setecientos noventa y cinco.



Del bastón para contar a la tablilla La tablilla de arcilla de la ilustración, a pesar del deterioro por los años, muestra la perdurabilidad del barro de los babilonios. Miles de años después de que las tablillas fueran confeccionadas, los problemas algebraicos babilónicos que contienen pueden resolverse con sus escritos originales.

En tiempos recientes, los pastores y ganaderos marcan el ganado con pequeños "símbolos" parecidos a los de esta arcilla. Símbolos similares han sido descubiertos por los arqueólogos en el territorio que alguna vez fue Babilonia. Algunos de los símbolos tienen forma de esferas, círculos, conos y otras figuras geométricas regulares, raramente exceden los 5 cm de diámetro.

Para que un sistema posicional funcione, debe tener un símbolo para el cero, que sustituya **un lugar**, en caso de que una o más de las potencias de la base no se necesiten. Como consecuencia, a algunos sistemas primitivos de numeración les tomó mucho tiempo evolucionar a una forma posicional, o en su defecto, nunca lo hicieron. Aunque el sistema tradicional chino utiliza el símbolo del cero, nunca incorporó todas las demás características de sistema posicional, en esencia permanece como un sistema de agrupación multiplicativo.

El único sistema de numeración que alcanzó la máxima eficiencia de la forma posicional es el nuestro, mejor conocido por razones históricas como sistema **indoarábigo**, desarrollado a lo largo de muchos siglos. Sus símbolos se remontan a los hindúes de 200 a.C. Fueron recopilados por los árabes y más tarde transmitidos a España en donde una versión de finales del siglo X luciría así:

Las primeras etapas de los sistemas numéricos evolucionaron bajo la influencia de las exigencias de la navegación, el comercio, la ingeniería y la milicia. Por otra parte, al inicio de la Edad Moderna, el avance de la astronomía y otras ciencias produjeron una estructura muy adecuada para los cálculos rápidos y precisos. La forma posicional pura que el sistema finalmente adoptó fue introducida en Occidente por Leonardo Fibonacci de Pisa (1170-1250) al inicio del siglo XIII. Sin embargo, no se alcanzó la aceptación generalizada de símbolos y formas estandarizados hasta la invención de la imprenta, en el siglo XV. A partir de esa época, no se ha inventado ningún sistema de numeración que haya sido mejor, y en la actualidad el sistema indoarábigo posicional de base 10 es comúnmente utilizado en el mundo. (En la India, donde todo tuvo su origen, no se ha alcanzado aún por completo la estandarización del sistema, pues aún hoy se utilizan diversos sistemas locales.)

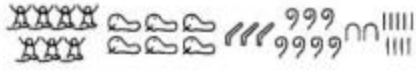
En la sección siguiente veremos con mayor profundidad la estructura del sistema indoarábigo y algunos métodos y dispositivos para hacer cálculos.

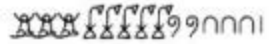
4.1 EJERCICIOS

Convierta cada numeral egipcio a la forma indoarábiga.

1. 

2. 

3. 

4. 

Convierta cada numeral indoarábigo a la forma egipcia.

5. 23,145

6. 427

7. 8,657,000

8. 306,090

El libro de los Números *en la* Biblia *describe un censo de los hombres mayores de 20 años de Israel, después de que Moisés los guiara fuera de Egipto, a través del desierto del Sinaí, hacia el año 1450 a.C. Escriba un numeral egipcio para cada cantidad de hombres disponibles de cada tribu de Israel listada.*

9. 59,300 de la tribu de Simeón

10. 46,500 de la tribu de Rubén

11. 74,600 de la tribu de Judá

12. 45,650 de la tribu de Gad

13. 62,700 de la tribu de Dan

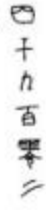
14. 54,400 de la tribu de Issachâr

Convierta cada numeral chino en la forma indoarábiga.

15. 

16. 

17. 

18. 

Convierta cada numeral indoarábigo en numeral chino.

19. 960

20. 63

21. 7012

22. 2416

Aunque las formas de arte chino empezaron antes de la aparición de la historia escrita, su más alto desarrollo se alcanzó durante cuatro dinastías en particular. Escriba en numerales chinos tradicionales las fechas inicial y final de cada dinastía listada.

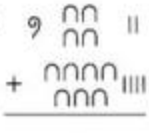
23. Ming (1368 a 1644)

24. Sung (960 a 1279)

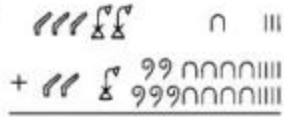
25. T'ang (618 a 907)

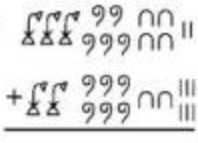
26. Han (202 a.C. a 220 d.C.)

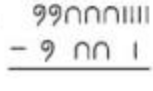
Realice cada una de las operaciones de suma y resta, utilizando la reagrupación cuando sea necesaria. Convierta cada respuesta en la forma indoarábiga.

27. 

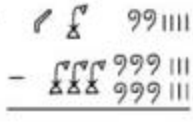
28. 

29. 

30. 

31. 

32. 

33. 

34. 

Utilice el algoritmo egipcio para determinar cada producto.

35. 26×53

36. 33×81

37. 58×103

38. 67×115

Convierta todos los números que aparecen en los problemas siguientes en numerales egipcios. Multiplique utilizando el algoritmo egipcio, y sume empleando símbolos egipcios. Proporcione la respuesta final usando numerales indoarábigos.

39. ***Valor de un tesoro bíblico*** El libro de *Esdras* en la *Biblia* describe el regreso del exilio de Jerusalén. Cuando se reconstruyó el templo, el rey de Persia les dio los siguientes utensilios: 30 fuentes de oro, 1000 fuentes de plata, 410 tazones de plata y 30 tazones de oro. Determine el valor total de este tesoro, si cada fuente de oro vale 3000 monedas, cada fuente de plata vale 500 monedas, cada tazón de plata vale 50 monedas y cada tazón de oro vale 400 monedas.

40. ***Pago total del rey Salomón*** El rey Salomón le dijo al rey de Tiro (ahora Líbano) que necesitaba el mejor cedro para su templo, y añadió: "Pagaré por tus hombres todo lo que pidas". Determine el pago total que Salomón hizo, si el rey de Tiro usó la siguiente cantidad de hombres: 5500 taladores de árboles a dos monedas por semana cada uno, durante un total de siete semanas; 4600 aserradores de madera cada uno de tres monedas por semana, durante 32 semanas, y 900 marineros a una moneda por semana cada uno, durante un total de 16 semanas.

✎ *Explique por qué cada uno de los pasos siguientes mejora el desarrollo de los sistemas de numeración.*

41. El progreso de pasar de agrupación de piedras a usar marcas o muescas en una vara.

42. El progreso del marcaje con muescas a la agrupación simple.

43. El progreso de la agrupación simple a la agrupación multiplicativa.

44. El progreso de la agrupación multiplicativa a la numeración posicional.

Recuerde que el sistema egipcio antiguo descrito en esta sección fue de agrupación simple, usó la base 10, y tenía 7 símbolos distintos. El número más grande que puede expresarse en ese sistema es el 9,999,999. Identifique el número mayor que se puede expresar en cada uno de los siguientes sistemas de agrupación simple. (En los ejercicios del 49 al 52, d puede ser cualquier número de conteo.)

45. base 10, cinco símbolos distintos

46. base 10, 10 símbolos distintos

47. base 5, cinco símbolos distintos

48. base 5, 10 símbolos distintos

49. base 10, d símbolos distintos

50. base 5, d símbolos distintos

51. base 7, d símbolos distintos

52. base b, d símbolos distintos (donde b es cualquier número de conteo, 2 o mayor)

✎ *El sistema indoarábigo es posicional y utiliza el 10 como base. Describa ventajas y desventajas que puedan haber resultado en cada uno de los casos siguientes.*

53. Suponga que la base hubiese sido mayor, de 12 o 20, por ejemplo.

54. Suponga que la base hubiese sido menor, como podría ser 8 o 5.

4.2 Aritmética en el sistema indoarábigo

El desarrollo histórico de la numeración culminó con los sistemas posicionales, entre los cuales el sistema indoarábigo es el más aceptado. Como se expresó en la sección anterior, los valores de las posiciones indoarábigas son potencias de base 10. Por ejemplo, 10^4 denota la cuarta potencia de 10. Tales expresiones comúnmente se denominan **expresiones exponenciales**. En este caso, 10 es la **base** y 4 es el **exponente**. De hecho, los exponentes indican el número de veces que la base es multiplicada:

$$10^4 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\text{Cuatro factores iguales a 10}} = 10{,}000.$$

De la misma forma, $10^2 = 10 \times 10 = 100$, $10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1{,}000{,}000$, y así sucesivamente. La base no necesariamente tiene que ser 10; por ejemplo,

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64, \quad 2^2 = 2 \times 2 = 4,$$
$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243,$$

y así sucesivamente. A continuación, se definen de forma general expresiones de este tipo.



Dígitos Esta estampilla postal de Irán debiera recordarnos que el contar con los dedos de las manos (y de los pies) es una práctica antigua. De hecho, la palabra *dígito*, refiriéndonos a los números 0-9, proviene del término en latín que significa "dedo". Aristóteles notó primero la relación entre los dedos y la base de 10 en el sistema de numeración griego. Los antropólogos coincidieron con la idea. Sin embargo, algunas culturas han utilizado los números dos, tres o cuatro como bases; por ejemplo, al contar con las coyunturas de los dedos de la mano o espacios entre ellos.

Expresiones exponenciales

Para cualquier número a y para cualquier número natural m,

$$a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ factores iguales a } a}$$

El número a es la **base**, m es el **exponente** y a^m se lee como "a elevada a la potencia m".

EJEMPLO 1 Determine cada potencia.

(a) $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

(10^3 se lee "10 al cubo", o "10 a la tercera potencia").

(b) $7^2 = 7 \times 7 = 49$

(7^2 se lee "7 al cuadrado", o "7 a la segunda potencia").

(c) $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

(5^4 se lee "5 a la cuarta potencia"). ■

Para simplificar el uso de exponentes, se acuerda que $a^0 = 1$ para cualquier número a distinto de cero. De acuerdo con esto, $7^0 = 1$, $52^0 = 1$, y así sucesivamente. De la misma forma, $a^1 = a$ para cualquier número a. Por ejemplo, $8^1 = 8$ y $25^1 = 25$. El exponente 1 por lo común se omite.

Mediante el uso de exponentes, los números pueden ser escritos en **forma desarrollada**, en la cual el valor del dígito de cada posición está perfectamente definido. Por ejemplo, es posible escribir 924 en forma desarrollada, si se considera el 924 como 9 centenas (100), más 2 decenas (10), más 4 unidades (1), o

$$924 = 900 + 20 + 4$$
$$924 = (9 \times 100) + (2 \times 10) + (4 \times 1).$$

Gracias a la definición de los exponentes, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ y $1 = 10^0$. Se han utilizado estos exponentes para escribir 924 en forma desarrollada de la siguiente manera:

$$924 = (9 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (4 \times 10^0).$$

EJEMPLO 2 Escriba cada uno de los siguientes números en forma desarrollada.

(a) $1906 = (1 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (6 \times 10^0)$.

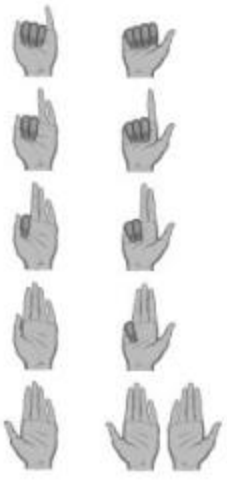
Como $0 \times 10^1 = 0$, este término pudo omitirse, pero la expresión es más clara si se le incluye.

(b) $46{,}424 = (4 \times 10^4) + (6 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (4 \times 10^0)$ ■

EJEMPLO 3 Simplifique cada una de las siguientes expresiones desarrolladas.

(a) $(3 \times 10^5) + (2 \times 10^4) + (6 \times 10^3) + (8 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (9 \times 10^0) = 326{,}879$

(b) $(2 \times 10^1) + (8 \times 10^0) = 28$ ■



Contar con los dedos Los primeros dígitos que se utilizaron para contar fueron los dedos. En África los zulúes emplearon el método que aquí mostramos para contar hasta 10. Comenzaban con la mano izquierda, la palma hacia arriba y con el puño cerrado. La posición de los dedos del zulú del 1 al 5 se muestra en la parte izquierda de la figura de arriba. La posición de los dedos del 6 al 10 se encuentra a la derecha.

La notación desarrollada puede ser utilizada para mostrar cómo funcionan en realidad los algoritmos comunes para la suma y la resta. La idea principal detrás de estos algoritmos está basada en la **propiedad distributiva**, que se estudiará a fondo más adelante en este capítulo. Puede escribirse de la siguiente forma.

Propiedad distributiva

Para todos los números reales a, b y c,

$$(b \times a) + (c \times a) = (b + c) \times a$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(3 \times 10^4) + (2 \times 10^4) &= (3 + 2) \times 10^4 \\ &= 5 \times 10^4.\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Utilice notación desarrollada para sumar 23 y 64.

$$\begin{aligned}23 &= (2 \times 10^1) + (3 \times 10^0) \\ \underline{+64} &= \underline{(6 \times 10^1) + (4 \times 10^0)} \\ &(8 \times 10^1) + (7 \times 10^0) = 87\end{aligned}$$

■

La resta funciona de forma similar.

EJEMPLO 5 Determine $695 - 254$.

$$\begin{aligned}695 &= (6 \times 10^2) + (9 \times 10^1) + (5 \times 10^0) \\ \underline{-254} &= \underline{(2 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (4 \times 10^0)} \\ &(4 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (1 \times 10^0) = 441\end{aligned}$$

■

La notación desarrollada y la propiedad distributiva también pueden utilizarse para mostrar cómo resolver problemas de adición, en donde una potencia de 10 termina con un multiplicador de más de un dígito.

EJEMPLO 6 Utilice notación desarrollada para sumar 75 y 48.

$$\begin{aligned}75 &= (7 \times 10^1) + (5 \times 10^0) \\ \underline{+48} &= \underline{(4 \times 10^1) + (8 \times 10^0)} \\ &(11 \times 10^1) + (13 \times 10^0)\end{aligned}$$

Como la posición de las unidades (10^0) tiene espacio tan solo para un dígito, 13×10^0 deberá ser modificado:

$$\begin{aligned}13 \times 10^0 &= (10 \times 10^0) + (3 \times 10^0) \quad \text{Propiedad distributiva} \\ &= (1 \times 10^1) + (3 \times 10^0).\end{aligned}$$

En efecto, el 1 del 13 se movió a la izquierda de la posición de las unidades a la posición de las decenas. Esto se conoce como "reagrupación" (pedir prestado). Nuestra suma ahora es

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(11 \times 10^1) + (1 \times 10^1)} + (3 \times 10^0) \\
&= (12 \times 10^1) + (3 \times 10^0) && \text{Propiedad distributiva} \\
&= (10 \times 10^1) + (2 \times 10^1) + (3 \times 10^0) \\
&= (1 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (3 \times 10^0) \\
&= 123. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Los problemas de sustracción casi siempre requieren reagrupación (pedir prestado), lo cual también puede aclararse con notación desarrollada.

EJEMPLO 7 Utilice notación desarrollada para restar 186 de 364.

$$\begin{aligned}
364 &= (3 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (4 \times 10^0) \\
-186 &= (1 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (6 \times 10^0)
\end{aligned}$$

Como en la posición de las unidades, no podemos restar 6 de 4, modificamos el desarrollo superior como sigue (la posición de las unidades piden prestado a la posición de las decenas):

$$\begin{aligned}
&(3 \times 10^2) + \underbrace{(6 \times 10^1)} + (4 \times 10^0) \\
&= (3 \times 10^2) + \underbrace{(5 \times 10^1) + (1 \times 10^1)} + (4 \times 10^0) && \text{Propiedad distributiva} \\
&= (3 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + \underbrace{(10 \times 10^0) + (4 \times 10^0)} \\
&= (3 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (14 \times 10^0). && \text{Propiedad distributiva}
\end{aligned}$$

(Podemos ahora restar 6 de 14 en la posición de las unidades; pero no podemos tomar 8 de 5 en la posición de las decenas; por lo tanto, continuamos la modificación, reagrupando centenas para cambiarlas a decenas.)

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(3 \times 10^2)} + (5 \times 10^1) + (14 \times 10^0) \\
&= \underbrace{(2 \times 10^2) + (1 \times 10^2)} + (5 \times 10^1) + (14 \times 10^0) && \text{Propiedad distributiva} \\
&= (2 \times 10^2) + \underbrace{(10 \times 10^1) + (5 \times 10^1)} + (14 \times 10^0) \\
&= (2 \times 10^2) + (15 \times 10^1) + (14 \times 10^0) && \text{Propiedad distributiva}
\end{aligned}$$

Ahora podemos completar la sustracción.

$$\begin{aligned}
&(2 \times 10^2) + (15 \times 10^1) + (14 \times 10^0) \\
&-(1 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (6 \times 10^0) \\
&(1 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (8 \times 10^0) = 178 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

En los ejemplos 4 al 7 se utilizaron la notación desarrollada y la propiedad distributiva para aclarar nuestros métodos tradicionales de adición y sustracción. En la práctica, el trabajo real para estos cuatro problemas aparecería de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rrrr}
23 & 695 & \overset{1}{7}5 & \overset{2}{3}\overset{15}{\not 6}{}^{1}4 \\
+\,64 & -254 & +\,48 & -1\,8\,6 \\
\hline
87 & 441 & 123 & 1\,7\,8.
\end{array}$$



El ***Carmen de algorismo*** (cuyos versos iniciales se muestran aquí) de Alexander de Villa Dei, del siglo XIII, popularizó el nuevo arte del "algorismus":

. . . con un número dos veces cinco de estos símbolos 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1 de los indios nos beneficiamos . . .

El *Carmen* relataba que Algor, un rey de la India, inventó este arte. Pero en realidad "algorism" (o "algoritmo") proviene de forma indirecta del nombre de Muhammad ibn Musa al-Khoārizmi, un matemático árabe del siglo IX, cuyo libro de aritmética fue traducido al latín. Además, de una manera similar, el libro de Muhammad sobre ecuaciones, *Hisab al-jabr w'almuqâbalah*, dio origen al término "álgebra".



Las computadoras *palmtop* son lo último en el desarrollo de dispositivos de cálculo.

Los procedimientos descritos en esta sección también funcionan para sistemas posicionales con bases diferentes de 10.

Como nuestro sistema de numeración está basado en potencias de 10, a menudo se conoce como **sistema decimal**, de la palabra latina *decem*, que significa "diez"*. A través de los años, se han diseñado muchos métodos para acelerar los cálculos en el sistema decimal. Uno de los más antiguos es el **ábaco**, dispositivo con una serie de varillas con cuentas deslizables y una barra que las separa. Se lee de derecha a izquierda, y las cuentas tienen valores de 1, 10, 100, 1000, y así sucesivamente. Las cuentas de la barra superior tienen un valor cinco veces mayor que el de aquéllas de la barra inferior. Las cuentas que se mueven hacia la barra están en posición "activa", y aquéllas hacia el marco no se toman en cuenta. Las ilustraciones de ábacos que aquí aparecen, como el de la figura 1, las cuentas activas se muestran en negro para lograr mayor énfasis.

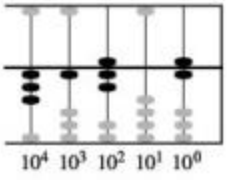


FIGURA 1

EJEMPLO 8 El número del ábaco en la figura 1 se determina de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}&(3 \times 10{,}000) + (1 \times 1000) + [(1 \times 500) + (2 \times 100)] + 0 \\ &\quad + [(1 \times 5) + (1 \times 1)] \\ &= 30{,}000 + 1000 + 500 + 200 + 0 + 5 + 1 \\ &= 31{,}706.\end{aligned}$$

■

A medida que el papel se volvió más fácilmente asequible, la gente poco a poco comenzó a cambiar los dispositivos como el ábaco (aunque éste aún se utiliza de manera habitual en ciertas regiones) por cálculos con lápiz y papel. Un método utilizado anteriormente en India y Persia, fue el **método de la cuadrícula (de las casillas)**, en el que se acomodan los productos separando los dígitos de manera individual en cuadros divididos por una diagonal, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

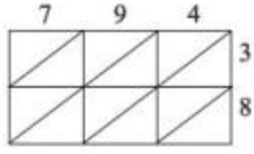
Matemáticas alegres Las siguientes dos rimas provienen de *Marmaduke Multiply's Merry Method of Making Minor Mathematicians*, un libro para enseñar a los niños, publicado en Boston a finales de 1830:

1. *Twice 2 are 4. Pray hasten on before.* (Dos veces 2 son 4. Reza y apréndelo en un rato.)
2. *Five times 5 are 25. I thank my stars I9m yet alive.* (Cinco veces 5 son 25. Doy gracias a mis estrellas, pues sigo vivo.)

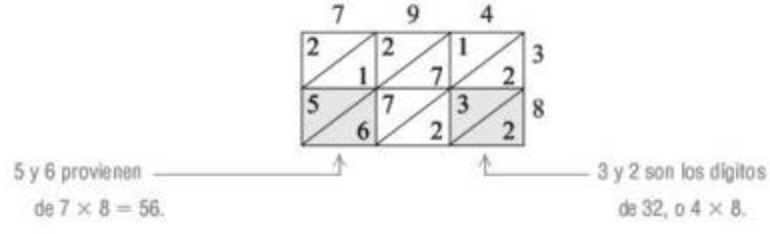
EJEMPLO 9 Determine el producto 38×794 mediante el método de la cuadrícula.

Funciona de la forma siguiente.

Fase 1: Escriba el problema con un número al lado y uno en la parte superior.

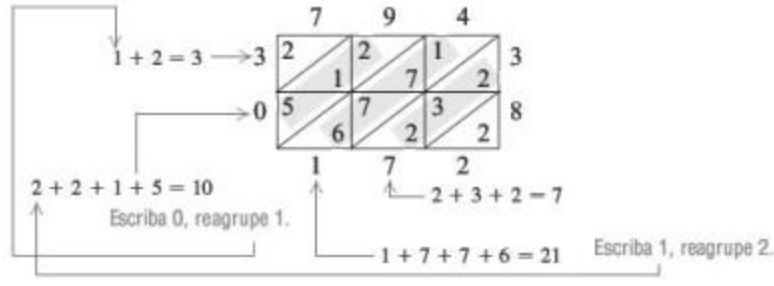


Fase 2: Dentro de la cuadrícula, escriba los productos de todas las parejas de dígitos de la parte superior con los de un lado.



*Diciembre era el décimo mes en una antigua forma de calendario. Es interesante resaltar que *decem* se convirtió en *dix* en francés; antes de la Guerra Civil existió un billete de 10 dólares, llamado *dixie*, que circulaba en Nueva Orleans. "Dixie Land" era el sobrenombre de esa ciudad antes de que la palabra *Dixie* se usara para referirse a todos los estados sureños, como en la canción de Daniel D. Emmett, escrita en 1859.

Fase 3: Empezando por la derecha de la cuadrícula sume de forma diagonal, reagrupando cuando sea necesario.



Fase 4: Lea la respuesta alrededor en los lados izquierdo e inferior de la cuadrícula:

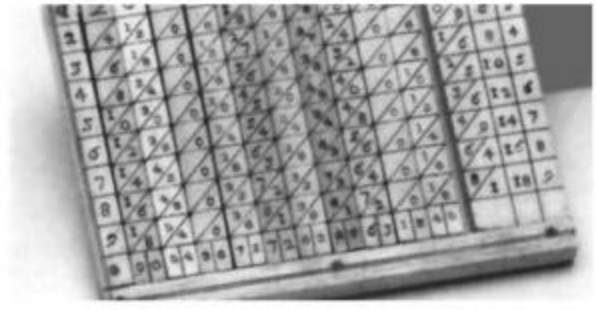
$$38 \times 794 = 30{,}172.$$ ■



El matemático escocés John Napier (1550-1617) ideó una importante herramienta de cálculo conocida como **varillas** o **tablas de Napier**. Su invención, basada en el método de la cuadrícula para la multiplicación, es ampliamente reconocida como uno de los primeros antecedentes de las computadoras modernas. Consistía en un conjunto de tiras o varillas, varias de ellas para cada dígito del 0 al 9, en las que aparecían los múltiplos de cada dígito en una columna de cuadros divididos por una diagonal. Vea la figura 2.

John Napier Su contribución matemática más significativa, desarrollada a lo largo de por lo menos 20 años, fue el concepto de los *logaritmos*, los cuales permiten realizar, entre otras cosas, la multiplicación y división mediante la adición y la sustracción. Fue un gran avance en el cálculo, dado el nivel de conocimiento en matemáticas de ese tiempo (1614).

El propio Napier consideraba su interés por las matemáticas como mera afición, ya que sus principales ocupaciones eran de carácter político y religioso. Partidario de John Knox y Jaime I, publicó un escrito anticatólico ampliamente difundido, que analizaba el libro de la *Revelación*, de la *Biblia*, y concluía que el Papa era el anticristo y que el fin del mundo ocurriría entre 1688 y 1700. Napier fue uno de los muchos que, a lo largo de la historia, han calculado erróneamente el fin del mundo.



Índice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
2	0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

FIGURA 2

Una tira adicional, llamada índice, podía colocarse a un lado de las otras para indicar el multiplicador en cada nivel. Las varillas de Napier se utilizaron para calcular de forma mecánica las multiplicaciones, las divisiones y las raíces cuadradas. La figura 3 muestra cómo multiplicar 2806 por 7. Seleccione las varillas para 2, 8, 0 y 6, colocándolas una junto a la otra. Luego, por medio del índice, localice el nivel para un multiplicador de 7. La cuadrícula resultante, mostrada en la parte inferior de la figura, da el producto 19,642.

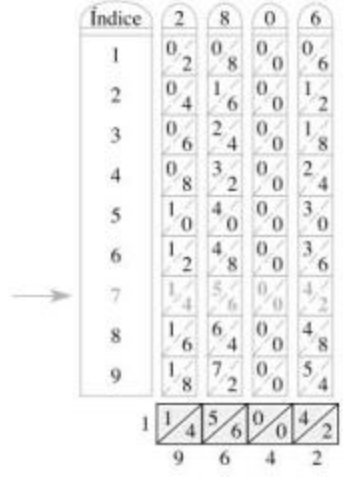


FIGURA 3

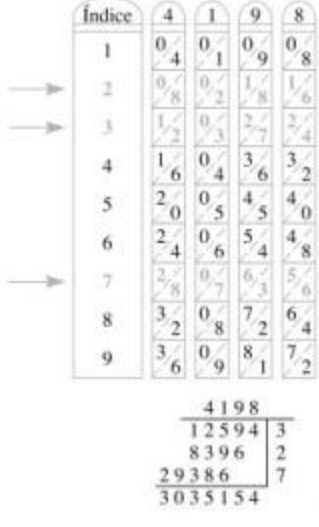


FIGURA 4

EJEMPLO 10 Utilice las varillas de Napier para encontrar el producto de 723 y 4198.

Alineamos las varillas para 4, 1, 9 y 8 a continuación del índice como se muestra en la figura 4. El producto 3×4198 se determina tal y como está descrito en el ejemplo 9 y se escribe en la parte inferior de la figura. Luego 2×4198 se determina de manera similar y se escribe abajo, desplazado un lugar hacia la izquierda (¿por qué?). Por último, el producto 7×4198 se escribe dos lugares a la izquierda. La respuesta final se determina mediante la suma, para obtener

$$723 \times 4198 = 3{,}035{,}154.$$ ■

Otro método que requiere sólo de lápiz y papel para multiplicar es el **método del campesino ruso** (o simplemente **método ruso**), que es similar al método egipcio de duplicación explicado en la sección anterior. (De hecho, estos dos métodos trabajan expandiendo uno de los números que se va multiplicar, pero con base 2, en vez de con base 10. Los numerales con base 2 se estudian en la siguiente sección.) Para multiplicar 37 y 42 mediante el método ruso, construya dos columnas encabezadas por 37 y 42. Forme la primera columna dividiendo 37 entre 2 una y otra vez, ignorando los residuos. Deténgase cuando haya obtenido el 1. Construya la segunda columna duplicando cada número, para obtener el siguiente.

	37	42	
	18	84	
Divida entre 2, ignore los residuos.	9	168	Duplique cada número.
	4	336	
	2	672	
	1	1344	

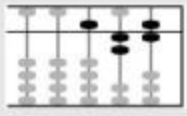
Ahora sume sólo los números de la segunda columna que correspondan a números impares en la primera columna, y omita aquellos que correspondan a números pares en la primera columna.

	→ 37	42 ←
	18	84
Números impares →	9	168 ← Sume estos números.
	4	336
	2	672
	→ 1	1344 ←

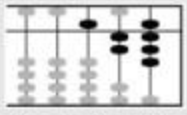
Por último, $37 \times 42 = 42 + 168 + 1344 = 1554$.

PARA REFLEXIONAR

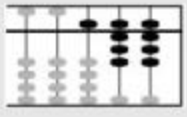
El ábaco ha sido utilizado (y aún lo es) para realizar cálculos muy rápidos. Un ejemplo sencillo es sumar 526 y 362. Comience por el 526 en el ábaco.



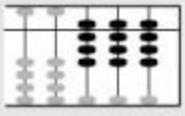
Para sumar 362, comience por "activar" un 2 adicional en la varilla de las unidades:



A continuación, active un 6 adicional en la varilla de las decenas:



Finalmente, active un 3 adicional en la varilla de las centenas:



La suma, leída del ábaco, es 888.

Los problemas en donde la reagrupación es necesaria requieren de una mayor reflexión y habilidad. Trate de obtener un ábaco actual (o haga bosquejos del mismo) y practique algunos problemas de adición y sustracción hasta que pueda hacerlos de manera rápida.

Para análisis en grupo

1. Utilice un ábaco para sumar: 13,728 + 61,455. Explique cada uno de los pasos de su procedimiento.
2. Utilice un ábaco para restar, 6512 − 4816. De nuevo, explique cada uno de los pasos.

4.2 EJERCICIOS

Escriba cada número en forma desarrollada.

1. 73 **2.** 925 **3.** 3774 **4.** 12,398

5. cuatro mil novecientos veinte cuatro

6. cincuenta y dos mil ciento dieciocho

7. catorce millones doscientos seis mil cuarenta

8. doscientos doce millones once mil novecientos dieciséis

Simplifique cada una de las siguientes notaciones desarrolladas.

9. $(4 \times 10^1) + (2 \times 10^0)$

10. $(3 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (0 \times 10^0)$

11. $(6 \times 10^3) + (2 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (9 \times 10^0)$

12. $(5 \times 10^5) + (0 \times 10^4) + (3 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (8 \times 10^0)$

13. $(7 \times 10^7) + (4 \times 10^5) + (1 \times 10^3) + (9 \times 10^0)$

14. $(3 \times 10^8) + (8 \times 10^7) + (2 \times 10^2) + (3 \times 10^0)$

Realice cada suma con notación desarrollada.

15. 54 + 35

16. 782 + 413

Resuelva cada una de las siguientes restas con notación desarrollada.

17. 85 − 53

18. 784 − 523

Realice cada suma por medio de notación desarrollada.

19. 75 + 34

20. 537 + 278

21. 434 + 299

22. 6755 + 4827

Realice cada sustracción por medio de notación desarrollada.

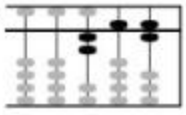
23. 54 − 48

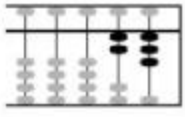
24. 364 − 59

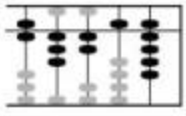
25. 645 − 439

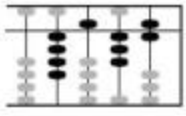
26. 816 − 335

Identifique el número representado en cada uno de los ábacos.

27. 

28. 

29. 

30. 

Dibuje un ábaco para mostrar cada uno de los números.

31. 38

32. 183

33. 2547

34. 70,163

Utilice el método de la cuadrícula para encontrar cada producto.

35. 65 × 29

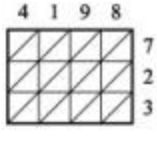
36. 32 × 741

37. 525 × 73

38. 912 × 483

Consulte el ejemplo 10, donde se utilizaron las varillas de Napier para encontrar el producto de 723 *y* 4198. *Después complete los ejercicios 39 y 40.*

39. Determine el producto de 723 y 4198 completando aquí el proceso de la cuadrícula.



40. Explique cómo las varillas de Napier podrían haber sido usadas en el ejemplo 10 para conformar un producto completo por medio de una cuadrícula, en lugar de sumar 3 productos individuales recorridos. Ilustre su explicación con un diagrama.

Haga uso de las varillas de Napier (figura 2), para encontrar cada producto.

41. 8 × 62

42. 32 × 73

43. 26 × 8354

44. 526 × 4863

Consulte la introducción del capítulo, y realice cada una de las sustracciones siguientes por medio del método de complemento a nueve.

45. 283 − 41

46. 536 − 425

47. 50,000 − 199

48. 40,002 − 4846

Utilice el método del campesino ruso para calcular cada producto.

49. 5 × 92

50. 41 × 53

51. 62 × 529

52. 145 × 63

4.3 Cómo convertir números a diferentes bases

Aunque los sistemas de numeración estudiados en las primeras secciones fueron todos con base de 10, se han utilizado otras bases a lo largo de la historia. Por ejemplo, los antiguos babilonios usaron el 60 como base. Los indígenas mayas de Centroamérica y México usaron el 20. En esta sección se considerarán bases diferentes de 10, pero se usarán los símbolos familiares del sistema indoarábigo. De manera consistente se indicarán con un subíndice las bases diferentes de 10, como en el numeral 43_{cinco}. Siempre que un número aparezca sin subíndice, debe suponerse que la base es 10. Resultará de ayuda el tener cuidado de cómo lea (o denomine) los numerales. El numeral 43_{cinco} se lee "cuatro tres base cinco". (*No* lo lea como "cuarenta y tres", ya que esa terminología implica base 10 y significa un número totalmente diferente.)

Como referencia para escribir números en forma desarrollada y para conversiones de bases, la tabla 3 contiene las primeras potencias de ciertos números utilizados como bases alternas en esta sección.

TABLA 3 Potencias seleccionadas de algunas bases de sistemas numéricos alternos

	Cuarta potencia	Tercera potencia	Segunda potencia	Primera potencia	Potencia cero
Base 2	16	8	4	2	1
Base 5	625	125	25	5	1
Base 7	2401	343	49	7	1
Base 8	4096	512	64	8	1
Base 16	65,536	4096	256	16	1

TABLA 4

Base 10	Base 5
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	10
6	11
7	12
8	13
9	14
10	20
11	21
12	22
13	23
14	24
15	30
16	31
17	32
18	33
19	34
20	40
21	41
22	42
23	43
24	44
25	100
26	101
27	102
28	103
29	104
30	110

Comenzamos con el sistema de base 5, el cual requiere sólo de cinco símbolos distintos, 0, 1, 2, 3 y 4. La tabla 4 compara los numerales de base 5 y los numerales decimales (base 10) para los números del 0 al 30. Observe que, mientras que el sistema de base 5 usa menos símbolos distintos, es normal que se requiera de más dígitos para representar al mismo número.

EJEMPLO 1 Convierta 1342_{cinco} a base 10.

Refirámonos a las potencias de cinco en la tabla 3, y veremos que este número tiene un 125, tres 25, cuatro 5 y dos 1, por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1342_{cinco} &= (1 \times 125) + (3 \times 25) + (4 \times 5) + (2 \times 1) \\ &= 125 + 75 + 20 + 2 \\ &= 222. \end{aligned}$$

■

Una forma rápida para convertir de base 5 a base 10, la cual es *particularmente útil cuando se utiliza una calculadora,* puede obtenerse como sigue. (Repetiremos la conversión del ejemplo 1.)

$$1342_{cinco} = (1 \times 5^3) + (3 \times 5^2) + (4 \times 5) + 2$$

Ahora podemos factorizar el 5 de las tres cantidades en paréntesis; por lo tanto,

$$1342_{cinco} = ((1 \times 5^2) + (3 \times 5) + 4) \times 5 + 2.$$

Ahora, factorizando otro 5 de las cantidades incluidas dentro del paréntesis, obtenemos

$$1342_{cinco} = (((1 \times 5) + 3) \times 5 + 4) \times 5 + 2.$$

El paréntesis interno alrededor de 1×5 no es necesario, ya que este producto será calculado antes de que el 3 sea sumado. Una vez hecho esto, podemos escribir

$$1342_{\text{cinco}} = ((1 \times 5 + 3) \times 5 + 4) \times 5 + 2.$$

Esta serie de productos y sumas es fácilmente determinada como una secuencia ininterrumpida de operaciones en una calculadora, sin ningún resultado intermedio. Este mismo método sirve también para convertir a base 10 desde cualquier otra base. El procedimiento puede resumirse de la siguiente forma.

Forma rápida para calcular

Para convertir desde cualquier otra base a base 10: Comience por el primer dígito del lado izquierdo y multiplique por la base. Luego, sume el siguiente dígito y multiplique otra vez por la base, y así sucesivamente. El último paso consiste en sumar el último dígito de la derecha. *No* multiplique por la base.

La forma exacta de llevar a cabo estos pasos depende del tipo de calculadora que se utilice. En algunas, sólo es necesario escribir en forma ordenada los dígitos, las multiplicaciones y las restas. Con otras, es posible que deba presionar la tecla [=] al terminar cada suma. Si su calculadora puede resolver expresiones agrupadas haciendo uso de los paréntesis, escriba la expresión que se mostró anteriormente y en el ejemplo siguiente. (El número de paréntesis al principio será dos menos que el número de dígitos en el numeral original.)

EJEMPLO 2 Utilice la forma rápida para convertir $244{,}314_{\text{cinco}}$ a base 10.

$$\begin{aligned} 244{,}314_{\text{cinco}} &= ((((2 \times 5 + 4) \times 5 + 4) \times 5 + 3) \times 5 + 1) \times 5 + 4 \\ &= 9334. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Convertir 497 de forma decimal a base 5.

Los valores de las posiciones en la base 5, comenzando por la derecha, son 1, 5, 25, 125, 625, y así sucesivamente. Como 497 está entre 125 y 625, no requerirá de grupos de 625, y sí, en cambio, de algunos de 125, como de algunos posibles grupos de 25, 5 y 1. Dividiendo 497 entre 125 se determina el número apropiado de grupos de 125. El cociente es igual a 3, con residuo igual a 122. Por lo tanto, necesitamos tres grupos de 125. Después, el residuo 122, se divide entre 25 (el valor de la siguiente posición) para determinar el número apropiado de grupos de 25. El cociente es igual a 4, con residuo igual a 22; por lo tanto, necesitamos cuatro grupos de 25. Dividir 22 entre 5 da como resultado 4, con residuo igual a 2. Por lo tanto, necesitamos cuatro grupos de 5. La división de 2 entre 1 da como resultado 2 (con residuo igual a 0); por lo tanto, necesitamos dos grupos de 1. Finalmente, vemos que 497 consta de tres grupos 125, cuatro de 25, cuatro de 5 y dos de 1, por lo que $497 = 3442_{\text{cinco}}$.

De forma más concisa, este proceso puede escribirse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} 497 \div 125 &= 3 && \text{Residuo 122} \\ 122 \div 25 &= 4 && \text{Residuo 22} \\ 22 \div 5 &= 4 && \text{Residuo 2} \\ 2 \div 1 &= 2 && \text{Residuo 0} \\ 497 &= 3442_{\text{cinco}} \end{aligned}$$

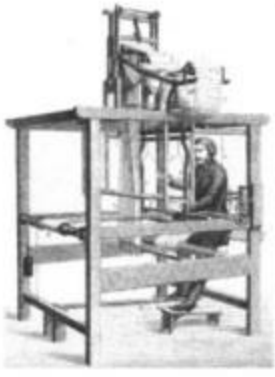


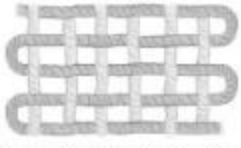
Yin-yang Los símbolos binarios (de base 2) del *I Ching* una obra clásica china de 2000 años de antigüedad, se permutan en 8 trigramas elementales; 64 hexagramas son interpretados en oráculos.

Aquí el símbolo básico es el antiguo "yin-yang" chino, en el que el negro y el blanco se funden uno con otro y en el que cada uno contiene una parte del otro. Se transmite cierto tipo de dualidad entre el aspecto destructivo (*yin*) y el benéfico (*yang*). Leibniz (1646-1716) estudió los ideogramas chinos en busca de un idioma simbólico universal y promovió el contacto cultural entre Oriente y Occidente; él percibió un paralelismo entre los trigramas y su aritmética binaria.

Niels Bohr (1885-1962), reconocido científico danés ganador del Premio Nobel de Física (por su teoría atómica), adoptó el símbolo del *yin-yang* en su toga para retratar su principio de *complementariedad*, el cual creía fundamental para entender la realidad en los niveles más profundos. Bohr también pugnó por la cooperación entre Oriente y Occidente.

En su edición de 1992, *The World Book Dictionary* juzgó que el término "yin-yang" había sido usado de forma suficiente como para ser aceptado como una palabra más del siempre cambiante idioma inglés, y le asignó la definición de "lo constituido por partes opuestas".





El tejido de lana consiste en un sistema binario de hebras que van a lo largo (las hebras de la urdimbre, en tono más claro en el diagrama de arriba) y hebras que van transversalmente (trama). Ya sea la urdimbre o bien la trama, quedan en la parte de arriba, en un punto determinado de la tela, y la variación de esto determina el patrón en el diseño.

Los telares del siglo XIX funcionaban con tarjetas perforadas, "programadas" con un patrón. Los telares estaban constituidos por agujas con ganchos, y éstos sujetaban la urdimbre. En donde la tarjeta tenía orificios, las agujas se movían, la urdimbre se alzaba y la trama pasaba por debajo. Donde no tenía orificios, la urdimbre no se levantaba y la trama quedaba por arriba. El sistema es comparable al encendido y apagado de las calculadoras y las computadoras. De hecho, los telares descritos aquí sirvieron de modelo para el desarrollo de la moderna maquinaria de cálculo.

A Joseph Marie Jacquard (1752-1823) se le atribuye el mejoramiento del telar mecánico, de modo que fuese posible la producción en serie.

Comprobación: $3442_{cinco} = (3 \times 125) + (4 \times 25) + (4 \times 5) + (2 \times 1)$
$= 375 + 100 + 20 + 2$
$= 497.$ ■

La forma rápida de convertir de otra base a base 10 (forma decimal) implica el uso de repetidas *multiplicaciones* de la otra base (vea el ejemplo 2). Una forma rápida de convertir de base 10 a otra base hace uso de repetidas *divisiones* de la otra base. Divida sólo el numeral decimal original y los cocientes resultantes en turno, entre la base deseada, hasta que el cociente 0 aparezca.

EJEMPLO 4 Repita el ejemplo 3 mediante la forma rápida recién descrita.

		Residuo
5	497	
5	99 ←	2
5	19 ←	4
5	3 ←	4
	0 ←	3

Lea la respuesta de la columna de residuos, leyendo de abajo hacia arriba:

$$497 = 3442_{cinco}$$ ■

Para ver por qué funciona esta forma rápida, observe lo siguiente:

La primera división nos muestra que cuatrocientos noventa y siete grupos de 1 (unidades) son equivalentes a noventa y nueve grupos de 5 y dos 1 (los dos 1 están puestos a un lado y cuentan para el último dígito de la respuesta).

La segunda división muestra que noventa y nueve grupos de 5 son equivalentes a diecinueve grupos de 25 y cuatro de 5 (los cuatro grupos de 5 cuentan para el siguiente dígito de la respuesta).

La tercera división muestra que diecinueve grupos de 25 son equivalentes a tres de 125 y cuatro de 25 (los cuatro grupos de 25 cuentan para el siguiente dígito de la respuesta).

La cuarta (y última) división muestra que los tres grupos de 125 no son equivalentes a ningún grupo de 625 y sí a tres de 125. Los residuos, obtenidos *de arriba hacia abajo*, dan el número de los grupos de 1, 5, 25, 125.

Los métodos para conversiones entre bases 10 y 5, incluyendo las formas rápidas, pueden ser adaptados para conversiones entre base 10 y cualquier otra base.

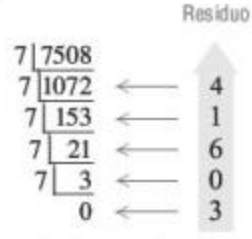
EJEMPLO 5 Convierta 6343_{siete} a base 10, mediante el desarrollo de potencias y utilizando la forma rápida.

$$6343_{siete} = (6 \times 7^3) + (3 \times 7^2) + (4 \times 7^1) + (3 \times 7^0)$$
$$= (6 \times 343) + (3 \times 49) + (4 \times 7) + (3 \times 1)$$
$$= 2058 + 147 + 28 + 3$$
$$= 2236$$

Forma rápida: $6343_{siete} = ((6 \times 7 + 3) \times 7 + 4) \times 7 + 3 = 2236.$ ■

EJEMPLO 6 Convierta 7508 a base 7.

Divida 7508 entre 7, luego divida el cociente resultante entre 7, y así sucesivamente hasta que se obtenga el cociente 0.



A partir de los residuos, leyendo de abajo hacia arriba, $7508 = 30{,}614_{\text{siete}}$. ■

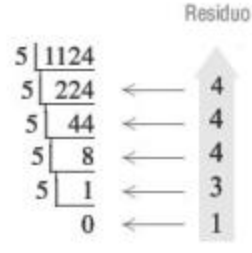
Debido a que estamos acostumbrados a la aritmética de base 10, la mayoría de nosotros podríamos manejar conversiones entre bases arbitrarias (donde ninguna sea 10) yendo de la base dada a la base 10 y después a la base que se desee. Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 Convierta 3164_{siete} a base 5.

Primero convierta a base 10.

$$\begin{aligned} 3164_{\text{siete}} &= (3 \times 7^3) + (1 \times 7^3) + (6 \times 7^1) + (4 \times 7^0) \\ &= (3 \times 343) + (1 \times 49) + (6 \times 7) + (4 \times 1) \\ &= 1029 + 49 + 42 + 4 \\ &= 1124 \end{aligned}$$

A continuación, convierta esta respuesta de base 10 a base 5



Con base en los residuos $3264_{\text{siete}} = 13444_{\text{cinco}}$. ■

TABLA 5

Base 10 (decimal)	Base 2 (binaria)
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000
17	10001
18	10010
19	10011
20	10100

Matemáticas para computación En aplicaciones de computadoras, hay tres sistemas alternativos que son los más utilizados. Éstos son el **binario** (base 2), el **octal** (base 8) y el **hexadecimal** (base 16). Actualmente, las computadoras y calculadoras manuales utilizan el sistema binario para realizar sus cálculos internos, debido a que consta sólo de símbolos, el 0 y el 1. Por lo tanto, todos los números pueden ser representados por "interruptores" electrónicos, del tipo encendido/apagado, donde "encendido" (*ON*) significa 1 y "apagado" (*OFF*) significa 0. El sistema octal es utilizado de forma extensa por programas que trabajan con códigos de computación internos. En una computadora, la CPU (unidad central de procesamiento) con frecuencia utiliza el sistema hexadecimal para comunicarse con una impresora o cualquier otro dispositivo de salida.

El sistema binario es extremo en el sentido de que tan sólo utiliza dos símbolos (0 y 1), a causa de ello la representación de números en este sistema requiere más dígitos que cualquier otra base. La tabla 5 muestra los números del 1 al 20 en forma binaria.

Las conversiones entre cualquiera de estas tres bases especiales (binaria, octal y hexadecimal) y la base 10 se pueden realizar mediante los métodos ya estudiados, incluidos los métodos rápidos.

EJEMPLO 8 Convierta 110101_{dos} a base 10 mediante el desarrollo de potencias y utilizando el método rápido.

$$\begin{aligned} 110101_{dos} &= (1 \times 2^5) + (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) \\ &\quad + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) \\ &= (1 \times 32) + (1 \times 16) + (0 \times 8) + (1 \times 4) + (0 \times 2) \\ &\quad + (1 \times 1) \\ &= 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 \\ &= 53 \end{aligned}$$

Forma rápida:

$$\begin{aligned} 110101_{dos} &= ((((1 \times 2 + 1) \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 0) \times 2 + 1 \\ &= 53. \end{aligned}$$

■

¿Halloween o Navidad? El número octal 31 es igual al número decimal 25. Esto puede escribirse como, en inglés,

31 OCT = 25 DEC

¿Esto significa que Halloween y Navidad caen en el mismo día del año?

EJEMPLO 9 Convierta 9583 a base 8.

Divida repetidamente entre 8, escribiendo los residuos a un lado.

		Residuo
8 | 9583		
8 | 1197	←	7
8 | 149	←	5
8 | 18	←	5
8 | 2	←	2
0	←	2

A partir de los residuos, $9583 = 22557_{ocho}$. ■



Conversiones con calculadoras Varios tipos de calculadoras científicas son capaces de realizar conversiones entre los sistemas binario, octal y hexadecimal, así como de realizar operaciones de forma directa en cada uno de estos modos.

El sistema hexadecimal, que tiene base 16, que es mayor que 10, presenta un nuevo problema. Dado que son necesarios símbolos distintos para todos los números del 0 al 1 antes del número de la base, la base 16 requiere de más símbolos que los que normalmente se utilizan en nuestro sistema decimal. Los programadores de computadoras usan las letras A, B, C, D, E y F como dígitos hexadecimales para los números del 10 al 15, respectivamente.

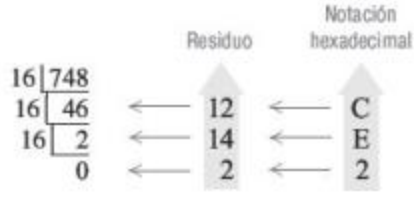
EJEMPLO 10 Convierta $FA5_{dieciséis}$ a base 10.

Como los dígitos hexadecimales F y A representan al 15 y al 10 respectivamente,

$$\begin{aligned} FA5_{dieciséis} &= (15 \times 16^2) + (10 \times 16^1) + (5 \times 16^0) \\ &= 3840 + 160 + 5 \\ &= 4005. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 11 Convierta 748 a base 16.
Utilice de forma repetida la división entre 16.



De los residuos a la derecha, $748 = 2EC_{\text{dieciséis}}$. ■

Los números decimales del 0 al 17 se muestran en la tabla 6, junto con sus equivalencias en las bases (2, 8 y 16) comúnmente usadas en las computadoras. Las conversiones entre los sistemas binarios, octal y hexadecimal pueden ser calculadas mediante las formas rápidas que se explican a continuación, y se ilustran en los diversos ejemplos que siguen.

TABLA 6 Algunas equivalencias de base decimal en las bases comunes utilizadas en las computadoras

Decimal (base 10)	Hexadecimal (base 16)	Octal (base 8)	Binaria (base 2)
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	10
3	3	3	11
4	4	4	100
5	5	5	101
6	6	6	110
7	7	7	111
8	8	10	1000
9	9	11	1001
10	A	12	1010
11	B	13	1011
12	C	14	1100
13	D	15	1101
14	E	16	1110
15	F	17	1111
16	10	20	10000
17	11	21	10001

El sistema binario es el sistema natural para el trabajo interno de las computadoras debido a su compatibilidad con los dos estados de los interruptores electrónicos. Sin embargo, resulta muy incómodo para ser usado por los humanos, ya que se requieren demasiados dígitos para números relativamente pequeños. Los sistemas octal y hexadecimal son las opciones por las que se rigen los programadores de computadoras, principalmente debido a su estrecha relación con el sistema binario. *Tanto ocho como dieciséis son potencias de dos.* Y cuando la conversión incluye una base

que es potencia de la otra, se dispone de una conversión rápida. Por ejemplo, dado que $8 = 2^3$, cada dígito octal (del 0 al 7) se puede expresar como un numeral binario de 3 dígitos. Vea la tabla 7.

TABLA 7

Octal	Binaria
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

EJEMPLO 12 Convierta 473_{ocho} a base 2.

Reemplace cada dígito octal por su equivalente binario de tres dígitos (los ceros al principio pueden ser omitidos sólo cuando se encuentren en el primer grupo de la izquierda). Luego, combine todos los equivalentes binarios en un único numeral binario.

$$\begin{array}{ccc} 4 & 7 & 3_{ocho} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 100 & 111 & 011_{dos} \end{array}$$

Mediante este método, $473_{ocho} = 100111011_{dos}$. ■

De manera análoga, convierta de forma binaria a forma octal. Comience por la derecha y separe el numeral binario en grupos de tres dígitos (los ceros al principio del primer grupo de la izquierda pueden omitirse).

TABLA 8

Hexadecimal	Binaria
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

EJEMPLO 13 Convierta 10011110_{dos} a base 8.

Comience por la derecha, separe los dígitos en grupos de tres. Luego, transforme los grupos en sus equivalentes octales.

$$\begin{array}{ccc} 10 & 011 & 110_{dos} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 6_{ocho} \end{array}$$

Por último, $10011110_{dos} = 236_{ocho}$. ■

Como $16 = 2^4$, cada dígito hexadecimal se puede expresar como un numeral binario de 4 dígitos (vea la tabla 8) y las conversiones entre bases 2 y 16 se pueden calcular de forma similar a la de los ejemplos 12 y 13.

EJEMPLO 14 Convierta $8B4F_{dieciséis}$ a base 2.

Cada dígito hexadecimal tiene un numeral binario de 4 dígitos equivalente.

$$\begin{array}{cccc} 8 & B & 4 & F_{dieciséis} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1000 & 1011 & 0100 & 1111_{dos} \end{array}$$

Al reunir estos grupos de dígitos, observamos que

$$8B4F_{dieciséis} = 1000101101001111_{dos}.$$ ■



Hace varios años, la compañía Kellogg diseñó un juego llamado "Detector mágico de la edad", el cual aparecía en algunos paquetes marcados de cereal *Rice Krispies,* ® de *Kellogg's* ®. El juego consistía en una ampliación de lo estudiado en el texto.

Kellogg's ®, *Rice Krispies* ®, y los personajes *Snap!* ®, *Crackle!* ® y *Pop* ®, son marcas registradas de Kellogg Company.

Muchos juegos y trucos están basados en el sistema binario. Por ejemplo, la tabla 9 puede utilizarse para adivinar la edad de una persona de 31 años o menor. La persona sólo tiene que decirle a usted en qué columnas se encuentra el número que indica su edad. Por ejemplo, suponga que Kellen Dawson dice que su edad aparece solamente en las columnas B y D. Para adivinar su edad, sume los números del renglón superior de estas columnas:

Kellen tiene $2 + 8 = 10$ años.

¿Puede ver cómo funciona este truco? (Vea los ejercicios del 68 al 71.)

TABLA 9

A	B	C	D	E
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

4.3 EJERCICIOS

Liste los primeros 20 números naturales en cada una de las siguientes bases:

1. siete (sólo los dígitos del 0 al 6 son usados en la base 7)

2. ocho (sólo se utilizan los dígitos del 0 al 7)

3. nueve (sólo se utilizan los dígitos del 0 al 8)

4. dieciséis (los dígitos 0, 1, 2, …, 9, A, B, C, D, E, F se utilizan en la base 16)

En los ejercicios del 5 al 8, escriba (en la misma base) el número natural anterior y el posterior al número dado. (No convierta a base 10.)

5. 14_{cinco} **6.** 555_{seis} **7.** $\text{B6F}_{\text{dieciséis}}$ **8.** 10111_{dos}

Determine el número de símbolos distintos que se requieren en cada uno de los sistemas posicionales siguientes:

9. base 3 **10.** base 7 **11.** base 11 **12.** base 16

Determine, en cada una de las siguientes bases, el número de cuatro dígitos más pequeño y el más grande así como sus equivalencias en base 10.

13. 3 **14.** 16

Convierta cada uno de los siguientes números a base 10, mediante el desarrollo de potencias y la forma rápida.

15. 24_{cinco} **16.** 62_{siete} **17.** 1011_{dos} **18.** 35_{ocho}

19. $3BC_{\text{dieciséis}}$ **20.** 34432_{cinco} **21.** 2366_{siete} **22.** 101101110_{dos}

23. 70266_{ocho} **24.** $ABCD_{\text{dieciséis}}$ **25.** 2023_{cuatro} **26.** 6185_{nueve}

27. 41533_{seis} **28.** 88703_{nueve}

Convierta cada uno de los siguientes números de base 10 a la base que se indica.

29. 86 a base 5 **30.** 65 a base 7 **31.** 19 a base 2

32. 935 a base 8 **33.** 147 a base 16 **34.** 2730 a base 16

35. 36401 a base 5 **36.** 70893 a base 7 **37.** 586 a base 2

38. 12888 a base 8 **39.** 8407 a base 3 **40.** 11028 a base 4

41. 9346 a base 6 **42.** 99999 a base 9

Realice las siguientes conversiones como se indican.

43. 43_{cinco} a base 7 **44.** 27_{ocho} a base 5

45. 6748_{nueve} a base 4 **46.** $C02_{\text{dieciséis}}$ a base 7

Convierta cada uno de los siguientes números de forma octal a binaria.

47. 367_{ocho} **48.** 2406_{ocho}

Convierta cada uno de los siguientes números de forma binaria a octal.

49. 100110111_{dos} **50.** 11010111101_{dos}

Realice las siguientes conversiones como se indica.

51. $DC_{\text{dieciséis}}$ a binario **52.** $F111_{\text{dieciséis}}$ a binario

53. 101101_{dos} a base hexadecimal **54.** $101111011101000_{\text{dos}}$ a base hexadecimal

En los ejercicios 55 y 56, identifique el número más grande de la lista.

55. 42_{siete}, 37_{ocho}, $1D_{\text{dieciséis}}$ **56.** 1101110_{dos}, 407_{cinco}, $6F_{\text{dieciséis}}$

Algunas personas piensan que, para uso general, 12 sería mejor que 10. Principalmente porque 12 tiene más divisores (1, 2, 3, 4, 6, 12) *que 10* (1, 2, 5, 10), *lo cual hace que las fracciones sean más sencillas en la base 12. El sistema de base 12 se llama* **sistema duodecimal**. *De la misma forma en que en el sistema decimal hablamos de un uno, un diez y un ciento (y así sucesivamente), en el sistema duodecimal decimos un* uno, *una* docena (doce) *y una* gruesa *(doce al cuadrado, o ciento cuarenta y cuatro).*

57. Los clientes de Otis Taylor ordenaron 9 gruesas, 10 docenas y 11 copias del libro *The Minnie Minoso Story* durante 2002. ¿Cuántas copias fueron en base 10?

58. ¿Qué cantidad es mayor: 3 gruesas, 6 docenas o 2 gruesas y 19 docenas?

*Un método muy común para convertir símbolos a dígitos binarios, para el procesamiento de las computadoras, se denomina ASCII (*American Standard Code o Information Interchange, *código estadounidense estándar para intercambio de información). A las letras mayúsculas de la* A *hasta la* Z *se les asignan los números del* 65 *al* 90*; por lo tanto,* A *tiene código binario* 1000001 *y* Z *tiene código* 1011010. *Las letras minúsculas de la* a *hasta la* z *tienen códigos del* 97 *al* 122 *(esto es, del* 1100001 *al* 1111010*). Los códigos ASCII, así como otras salidas numéricas de computadoras, normalmente aparecen sin comas.*

Escriba el código binario de cada una de las siguientes letras.

59. C **60.** X **61.** k

Separe cada uno de los siguientes números en grupos de siete dígitos y escríbalos como letras.

62. 10010001000101100110010100000 **63.** 10000111001000101010110000111001011

Traduzca cada una de las palabras en una cadena ASCII de dígitos binarios. (Asegúrese de distinguir entre las letras mayúsculas y las minúsculas.)

64. Nueva **65.** Orleans

66. Explique por qué los sistemas octal y hexadecimal son convenientes para los programadores.

67. Existen 37 números naturales cuyos numerales de base 8 contienen dos dígitos, pero cuyos numerales de base 3 contienen cuatro dígitos. Determine el más pequeño y el más grande de estos números.

Consulte la tabla 9 para los ejercicios 68 a 71.

68. Después de observar la representación binaria de los números del 1 al 31, identifique una propiedad común de todos los números de la tabla 9, que están en cada una de las siguientes columnas.

(a) Columna A **(b)** Columna B **(c)** Columna C **(d)** Columna D **(e)** Columna E

69. Explique cómo funciona el "truco" de la tabla 9.

70. ¿Cuántas columnas requeriría la tabla 9 para incluir las edad hasta 63?

71. ¿Cuántas columnas requeriría la tabla 9 para incluir todos los números hasta 127?

En nuestro sistema decimal, nosotros podemos distinguir los números pares de los impares, al mirar el dígito de las unidades. Si este dígito es par (0, 2, 4, 6 u 8) *el número es par. Si el dígito de las unidades es impar* (1, 3, 5, 7 o 9) *el número es impar. En los ejercicios 72 al 79, determine si este mismo criterio funciona para los números expresados en las siguientes bases.*

72. 2 **73.** 3 **74.** 4 **75.** 5

76. 6 **77.** 7 **78.** 8 **79.** 9

80. Considere todas las bases pares. Si funciona para todas, explique por qué. Si no es así, encuentre un criterio que sí funcione para todas las bases pares.

81. Considere todas las bases impares. Si funciona para todas, explique por qué. Si no es así, encuentre un criterio que sí funcione para todas las bases impares.

Determine si el numeral dado en cinco representa uno que sea divisible entre cinco.

82. 3204_{cinco} **83.** 200_{cinco} **84.** 2310_{cinco} **85.** 342_{cinco}

4.4 Sistemas matemáticos finitos

Continuamos nuestro estudio de sistemas matemáticos considerando ejemplos construidos sobre conjuntos *finitos*. Algunos ejemplos aquí constarán de números, pero otros estarán formados por elementos denotados por medio de letras. Y las operaciones con frecuencia son representadas por símbolos abstractos sin ningún significado matemático en particular. Esto es para destacar el hecho de que un sistema se caracteriza por el comportamiento de los elementos de sus operaciones y no por la selección de los símbolos utilizados.

TABLA 10

☆	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

Para empezar, introducimos un nuevo sistema matemático finito, formado por el conjunto de elementos $\{a, b, c, d\}$, y una operación escrita con el símbolo ☆. Damos significado a la operación ☆ mostrando una **tabla de la operación**, que indica cómo esta ☆ se utiliza para determinar la respuesta para cualesquiera dos elementos del conjunto $\{a, b, c, d\}$. La tabla de la operación para ☆ se muestra en la tabla 10. Para usar la tabla para determinar, digamos, c ☆ d, primero localizamos c en el lado izquierdo, y d en la parte superior. Este renglón y columna da b, de modo que

$$c \star d = b.$$

Las propiedades importantes que buscamos en un sistema son las siguientes: **clausura**, **conmutativa**, **asociativa**, existencia de identidad e **inverso**. Decidamos cuáles propiedades satisfacen el sistema conformado por $\{a, b, c, d\}$ y ☆.

Propiedad de clausura Para que sea cerrado bajo la operación ☆, la respuesta a cualquier combinación posible de elementos del sistema debe estar en el conjunto $\{a, b, c, d\}$. Un vistazo a la tabla 10 muestra que todas las respuestas en la tabla son elementos de este conjunto. Esto significa que el sistema es cerrado. Si un elemento distinto de a, b, c o d hubiese aparecido en la tabla, el sistema no hubiese sido cerrado.

TABLA 11

☆	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

Propiedad conmutativa Para que el sistema tenga la propiedad conmutativa, debe ser cierto que $\Gamma \star \Delta = \Delta \star \Gamma$, donde Γ y Δ representan cualesquiera elementos del conjunto $\{a, b, c, d\}$. Por ejemplo,

$$c \star d = b \quad \text{y} \quad d \star c = b, \quad \text{por lo que} \quad c \star d = d \star c.$$

Para ver que lo mismo ocurre para *todas* las elecciones de Γ y Δ, observe que la tabla 11 es simétrica con respecto a la línea diagonal que se muestra. Esta "línea diagonal de prueba" establece que ☆ es una operación conmutativa para este sistema.

Propiedad asociativa El sistema es asociativo si $(\Gamma \star \Delta) \star \Upsilon = \Gamma \star (\Delta \star \Upsilon)$, donde Γ, Δ y Υ representan cualesquiera de los elementos del conjunto $\{a, b, c, d\}$. No hay forma rápida para verificar la propiedad asociativa en una tabla, como lo hay para la propiedad conmutativa. Todo lo que podemos hacer es intentar con algunos ejemplos. Utilizando la tabla que define la operación ☆:

$$(a \star d) \star b = d \star b = c \quad \text{y} \quad a \star (d \star b) = a \star c = c,$$

de modo que $(a \star d) \star b = a \star (d \star b)$.

De la misma manera $b \star (c \star d) = (b \star c) \star d$.

En ambos ejemplos, el cambio de posición de los paréntesis no alteró las respuestas. Como dos ejemplos han funcionando, sospechamos que el sistema es asociativo. Sin embargo, no podemos estar seguros, a menos que se verifiquen todas las posibles selecciones de tres letras de ese conjunto (aunque no lo hemos verificado por completo, este sistema, de hecho, satisface la propiedad asociativa).



Bernard Bolzano (1781-1848) fue de los primeros exponentes del rigor y la precisión en matemáticas. Muchas de las primicias en especialidades como el cálculo, se deben a los maestros en el campo; ellos sabían lo que hacían y dieron resultados precisos. Sin embargo, sus argumentos algo enrevesados causaban estragos en manos de personas menos talentosas. El trabajo de Bolzano y otros ayudó a situar las matemáticas sobre una base firme.

Propiedad de la identidad Para que se cumpla la propiedad de la identidad, debe existir un elemento Δ del conjunto del sistema tal que $\Delta \star X = X$ y $X \star \Delta = X$, donde X representa cualquier elemento del conjunto $\{a, b, c, d\}$. Podemos ver que a es tal elemento como sigue. En la tabla 11, la columna bajo la a (de la parte superior) es idéntica a la columna a la izquierda, y el renglón que inicia con a (a la izquierda) es idéntico al renglón superior. Por lo tanto, a es el elemento identidad del sistema. (En cursos más avanzados, se demuestra que si un sistema tiene un elemento identidad tiene un *solo* uno.)

Propiedad del inverso Antes determinamos que a es el elemento identidad para el sistema que utiliza la operación $\star$. ¿Existe en este sistema, un inverso para, digamos, el elemento b? Si Δ representa al inverso de b en este sistema, entonces

$$b \star \Delta = a \quad \text{y} \quad \Delta \star b = a \quad \text{(ya que } a \text{ es el elemento identidad).}$$

La inspección de la tabla para la operación $\star$ muestra que Δ debe reemplazarse con c.

$$b \star c = a \quad \text{y} \quad c \star b = a.$$

Podemos inspeccionar la tabla para ver si todo elemento de nuestro sistema tiene un inverso en el sistema. Vemos (en la tabla 11) que el elemento identidad a aparece exactamente una vez en cada renglón, y que en cada caso, la pareja de elementos que producen a también la produce en orden inverso. Por lo tanto, concluimos que el sistema satisface la propiedad del inverso.

En resumen, el sistema matemático formado por el conjunto $\{a, b, c, d\}$ y la operación $\star$ satisface las propiedades de clausura, conmutativa, asociativa, de la identidad y del inverso.

Mostramos a continuación las propiedades básicas que pueden (o no) ser satisfechas por un sistema matemático que incluye una sola operación.

Propiedades potenciales de un sistema con una sola operación

Aquí a, b y c representan elementos del conjunto del sistema, y $\circ$ representa la operación del sistema.

Clausura El sistema es cerrado si para todos los elementos a y b

$$a \circ b$$

está en el conjunto del sistema.

Conmutativa El sistema tiene la propiedad conmutativa si

$$a \circ b = b \circ a$$

para todos los elementos a y b del sistema.

Asociativa El sistema tienen la propiedad asociativa si

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

para toda elección de tres elementos a, b y c del sistema.

Identidad El sistema tienen un elemento identidad e (donde e está en el conjunto del sistema) si

$$a \circ e = a \quad \text{y} \quad e \circ a = a$$

para todo elemento a en el sistema.

Inverso El sistema satisface la propiedad del inverso si para todo elemento a del sistema, existe un elemento x en el sistema tal que

$$a \circ x = e \quad \text{y} \quad x \circ a = e$$

donde e es el elemento identidad del sistema.

$\otimes$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

EJEMPLO 1 La tabla al margen es una tabla de multiplicación para el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ bajo la operación $\otimes$. ¿Cuáles de las propiedades anteriores satisface este sistema?

Todos los números en la tabla provienen del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, de modo que el sistema es cerrado. Si trazamos una línea desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha, podríamos doblar la tabla a lo largo de esta línea y hacer que los elementos correspondientes coincidan; el sistema tiene la propiedad conmutativa.

Para verificar la propiedad asociativa, probamos algunos ejemplos:

$$2 \otimes (3 \otimes 5) = (2 \otimes 3 = 0 \quad \text{y} \quad (2 \otimes 3) \otimes 5 = 0 \otimes 5 = 0.$$

de modo que $2 \otimes (3 \otimes 5) = (2 \otimes 3) \otimes 5.$

También, $5 \otimes (4 \otimes 2) = (5 \otimes 4) \otimes 2.$

Cualquier otro ejemplo que probemos también funcionaría. El sistema tiene la propiedad asociativa.

Como la columna a la izquierda de la tabla de multiplicación está repetida bajo el 1 en el cuerpo de la tabla, 1 es un candidato para el elemento identidad. Para asegurar que en verdad el 1 es el elemento identidad, verifique que el renglón correspondiente a 1 es idéntico con el renglón superior de la tabla.

Para determinar los elementos inversos, busque el elemento identidad, 1, en los renglones de la tabla. El elemento identidad aparece en el segundo renglón, $1 \otimes 1 = 1$; y en el renglón inferior, $5 \otimes 5 = 1$; de modo que 1 y 5 ambos son sus propios inversos. No aparece el elemento identidad en los renglones de los números 0, 2, 3 y 4, de modo que ninguno de estos elementos tiene un inverso.

En resumen, el sistema formado del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ bajo la operación $\otimes$, satisface las propiedades de clausura, asociativa, conmutativa y de la identidad, pero no la propiedad del inverso. ■

$\boxtimes$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

EJEMPLO 2 La tabla en el margen es una tabla de multiplicación para el conjunto de números $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bajo una operación designada $\boxtimes$. ¿Cuáles de las propiedades se satisfacen por este sistema?

Aquí observe que 0 no es un elemento del sistema. Esto es perfectamente legítimo. Como estamos definiendo el sistema, podemos incluir (o excluir) todo lo que deseemos. Verifique que el sistema satisfaga las propiedades de clausura, conmutativa, asociativa y de la identidad, con elemento identidad 1. Ahora verifiquemos los inversos. El elemento 1 es su propio inverso, ya que $1 \boxtimes 1 = 1$. En el renglón 2, el elemento identidad 1 aparece bajo el número 4, de modo que $2 \boxtimes 4 = 1$ (y $4 \boxtimes 2 = 1$), con 2 y 4 **inversos** uno de otro. También 3 y 5 son inversos uno de otro, y 6 es su propio inverso. Ya que cada número en el conjunto del sistema tiene un inverso, el sistema satisface la propiedad del inverso. ■

Cuando un sistema matemático tiene dos operaciones, en lugar de sólo una, podemos buscar una propiedad adicional muy importante, a saber, la **propiedad distributiva**. Por ejemplo, cuando estudiamos la aritmética indoarábiga de números naturales, vimos que la multiplicación es distributiva con respecto a la suma.

$$3 \times (5 + 9) = 3 \times 5 + 3 \times 9$$

y

$$(5 + 9) \times 3 = 5 \times 3 + 9 \times 3.$$

En cada caso, el factor 3 se "distribuye" con respecto al 5 y al 9.

Aunque, en una sección posterior, la propiedad distributiva (así como las otras propiedades estudiadas aquí), se aplicarán a los números reales en general, la establecemos aquí sólo para el sistema de enteros.

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

Para los enteros a, b y c, se cumple la **propiedad distributiva** para la multiplicación con respecto a la suma.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

y

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

EJEMPLO 3 ¿La suma distribuye sobre la multiplicación?

Para averiguarlo, intercambiamos $\times$ y $+$ en la primera ecuación anterior:

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c).$$

Necesitamos averiguar si ésta es una proposición verdadera para *toda* elección de tres números que podamos hacer. Pruebe un ejemplo. Si $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$,

$$a + (b \times c) = 3 + (4 \times 5) = 3 + 20 = 23,$$

mientras que $$(a + b) \times (a + c) = (3 + 4) \times (3 + 5) = 7 \times 8 = 56.$$

Como $23 \neq 56$, tenemos que $3 + (4 \times 5) \neq (3 + 4) \times (3 + 5)$. Este resultado falso es un *contraejemplo* (un ejemplo que muestra que una proposición general es falsa). Este contraejemplo muestra que la suma *no* distribuye con respecto a la multiplicación. ■

Ya que la sustracción de números reales está definida en términos de la suma, la propiedad distributiva de la multiplicación también se cumple con respecto a la sustracción.

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción

Para enteros a, b y c se cumple la **propiedad distributiva** para la multiplicación con respecto a la sustracción.

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

y

$$(b - c) \times a = b \times a - c \times a$$

La **forma general de la propiedad distributiva** aparece a continuación.

Forma general de la propiedad distributiva

Sean $\star$ y $\circ$ dos operaciones definidas para elementos en el mismo conjunto. Entonces $\star$ distribuye sobre $\circ$ si

$$a \star (b \circ c) = (a \star b) \circ (a \star c)$$

para toda elección de elementos a, b y c del conjunto.

El ejemplo final ilustra cómo la propiedad distributiva puede cumplirse para un sistema finito.

EJEMPLO 4 Suponga que el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ tiene dos operaciones $\star$ y $\circ$ definidas por las tablas siguientes.

$\star$	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e
c	a	c	e	b	d
d	a	d	b	e	c
e	a	e	d	c	b

$\circ$	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

La propiedades distributiva de $\star$ con respecto a $\circ$ se cumple en este sistema. Verifique el caso siguiente: $e \star (d \circ b) = (e \star d) \circ (e \star b)$.

Primero evalúe el lado izquierdo de la ecuación utilizando las tablas.

$$e \star (d \circ b) = e \star e \qquad \text{Utilice la tabla para } \circ.$$
$$= b \qquad \text{Utilice la tabla para } \star.$$

Ahora, evalúe el lado derecho de la ecuación.

$$(e \star d) \circ (e \star b) = c \circ e \qquad \text{Utilice dos veces la tabla para } \star.$$
$$= b \qquad \text{Utilice la tabla para } \circ.$$

En ambos casos el resultado final es b, y la propiedad distributiva se verifica para este caso. ■

4.4 EJERCICIOS

Para cada sistema en los ejercicios del 1 al 10, decida cuál de las propiedades de sistemas con una sola operación se satisfacen. Si la propiedad de la identidad se satisface, proporcione el elemento identidad. Si la propiedad del inverso se satisface, proporcione el inverso de cada elemento. Si la propiedad de la identidad se satisface, pero la propiedad del inverso no, mencione los elementos que no tienen inversos.

1. $\{1, 2\}$; operación $\otimes$

$\otimes$	**1**	**2**
1	1	2
2	2	1

2. $\{1, 2, 3, 4\}$; operación $\otimes$

$\otimes$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

3. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; operación $\boxtimes$

$\boxtimes$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	0	2	4	6
3	3	6	1	4	7	2	5
4	4	0	4	0	4	0	4
5	5	2	7	4	1	6	3
6	6	4	2	0	6	4	2
7	7	6	5	4	3	2	1

4. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; operación $\boxtimes$

$\boxtimes$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

5. $\{1,3,5,7,9\}$; operación ☆

☆	1	3	5	7	9
1	1	3	5	7	9
3	3	9	5	1	7
5	5	5	5	5	5
7	7	1	5	9	3
9	9	7	5	3	1

6. $\{1,3,5,7\}$; operación ☆

☆	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

7. $\{A,B,F\}$; operación *

*	*A*	*B*	*F*
A	*B*	*F*	*A*
B	*F*	*A*	*B*
F	*A*	*B*	*F*

8. $\{m,n,p\}$; operación ***J***

J	***m***	***n***	***p***
m	*n*	*p*	*n*
n	*p*	*m*	*n*
p	*n*	*n*	*m*

9. $\{r,s,t,u\}$; operación **Z**

Z	***r***	***s***	***t***	***u***
r	*u*	*t*	*r*	*s*
s	*t*	*u*	*s*	*r*
t	*r*	*s*	*t*	*u*
u	*s*	*r*	*u*	*t*

10. $\{A,J,T,U\}$; operación #

#	*A*	*J*	*T*	*U*
A	*A*	*J*	*T*	*U*
J	*J*	*T*	*U*	*A*
T	*T*	*U*	*A*	*J*
U	*U*	*A*	*J*	*T*

Las tablas en los sistemas matemáticos finitos que hemos desarrollado en esta sección pueden obtenerse de diferentes maneras. Por ejemplo, empecemos con un cuadrado, como se muestra en la figura. Los símbolos a, b, c y d pueden definirse como se muestra en la figura.



Sea *a* la rotación cero —deja al cuadrado como está.



Sea *b* la rotación de 90° en sentido de las manecillas del reloj, con respecto a su posición original.



Sea *c* la rotación de 180° en sentido de las manecillas del reloj, con respecto a su posición original.

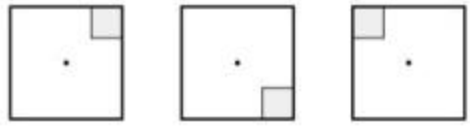


Sea *d* la rotación de 270° en sentido de las manecillas del reloj, con respecto a su posición original.

Defina una operación □ para estas letras, como sigue. Por ejemplo, para evaluar b □ c, primero realizamos b girando el cuadrado 90° (vea la figura). Luego, realizamos la operación girando el cuadrado 180° más. El resultado neto es el mismo que si sólo hubiésemos realizado d. Así,

$$b \square c = d.$$

Iniciar con *a*. Realizar *b*. Iniciar con *b*, y realizar *c*.



Utilice este método para determinar cada uno de los siguientes apartados.

11. $b \square d$ **12.** $b \square b$ **13.** $d \square b$ **14.** $a \square b$

Resuelva cada problema.

15. Complete la tabla de la derecha.

□	*a*	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*b*	*c*	*d*
b	*b*	*c*		*a*
c	*c*		*a*	
d	*d*	*a*		

16. ¿Cuáles de las propiedades de esta sección se satisfacen por este sistema?

17. Defina un conjunto universal U como el conjunto de los números naturales. Construya un nuevo conjunto que contenga todos los posibles subconjuntos, de U. Este nuevo conjunto de subconjuntos, junto con la operación de intersección de subconjuntos forman un sistema matemático. ¿Cuáles de las propiedades listadas en esta sección se satisfacen por este sistema?

18. En el ejercicio 17, reemplace la palabra "intersección" por la palabra "unión"; luego responda a la misma pregunta.

19. Complete la tabla de la derecha de modo que el resultado *no* sea la misma operación □ del ejercicio 15, pero de modo que las cinco propiedades listadas en esta sección sigan cumpliéndose.

	a	*b*	*c*	*d*
a				
b				
c				
d				

Pruebe ejemplos para ayudarse a decidir si las operaciones siguientes satisfacen o no la propiedad distributiva cuando se aplica a los enteros.

20. sustracción con respecto a la multiplicación

21. suma con respecto a la sustracción

22. sustracción con respecto a la suma

Recuerde que el ejemplo 3 proporciona un contraejemplo para la proposición general.

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c).$$

Por tanto, la suma no *distribuye con respecto a la multiplicación. Ahora haga los ejercicios del 23 al 26.*

23. Decida si la proposición anterior es verdadera para cada uno de los conjuntos siguientes de valores.
- **(a)** $a = 2, b = -5, c = 4$
- **(b)** $a = -7, b = 5, c = 3$
- **(c)** $a = -8, b = 14, c = -5$
- **(d)** $a = 1, b = 6, c = -6$

24. Encuentre otro conjunto de valores a, b y c que haga a la proposición verdadera.

25. Explique qué condiciones generales siempre causarán que la proposición anterior sea verdadera.

26. Explique la razón por la cual a pesar de los resultados en los ejercicios 23 al 25, la suma *no* distribuye con respecto a la multiplicación.

27. Mencione las condiciones en las cuales cada una de las ecuaciones siguientes serían verdaderas.
- **(a)** $a + (b - c) = (a + b) - (a + c)$
- **(b)** $a - (b + c) = (a - b) + (a - c)$

28. **(a)** Encuentre valores de a, b y c, tales que

$$a - (b \times c) = (a - b) \times (a - c).$$

(b) ¿Esto significa que la sustracción es distributiva con respecto a la multiplicación? Explique.

Verifique para el sistema matemático del ejemplo 4 que la propiedad distributiva se cumple para los casos siguientes.

29. $c \star (d \circ e) = (c \star d) \circ (c \star e)$

30. $a \star (a \circ b) = (a \star a) \circ (a \star b)$

31. $d \star (e \circ c) = (d \star e) \circ (d \star c)$

32. $b \star (b \circ b) = (b \star b) \circ (b \star b)$

Estos ejercicios son para estudiantes que hayan estudiado conjuntos.

33. Utilice diagramas de Venn para mostrar que la propiedad distributiva de la unión con respecto a la intersección se cumple para los conjuntos A, B y C. Esto es,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

34. Utilice diagramas de Venn para mostrar que se cumple *otra* propiedad distributiva para los conjuntos A, B y C. Es la propiedad distributiva de la intersección con respecto a la unión.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Estos ejercicios son para estudiantes que poseen conocimientos de lógica.

35. Utilice tablas de verdad para mostrar que se cumple la siguiente propiedad distributiva:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

36. Utilice tablas de verdad para mostrar que se cumple *otra* propiedad distributiva:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

4.5 Grupos

Hemos considerado unos cuantos sistemas matemáticos, la mayoría de los cuales han satisfecho algunas o todas las propiedades siguientes: clausura, asociativa, conmutativa, de identidad, del inverso y distributiva. Por lo común, los sistemas se clasifican de acuerdo con las propiedades que satisfacen. Una de las categorías más importantes estudiadas es el grupo matemático, que definimos aquí.



Niels Henrik Abel (1802-1829) originario de Noruega, fue identificado en su infancia como un genio matemático, aunque nunca recibió en vida el reconocimiento profesional que su trabajo merecía.

A los 16 años, influido por un perceptivo maestro, leyó los trabajos de Newton, Euler y Lagrange. Uno de los logros de Abel fue la demostración de que no existe una fórmula general para resolver ecuaciones de quinto grado. La fórmula cuadrática (para ecuaciones de grado dos) es bien conocida, y existen fórmulas para resolver ecuaciones de tercer y cuatro grados. El logro de Abel puso fin a una búsqueda que había durado muchos años.

En el estudio de álgebra abstracta, los grupos que tienen la propiedad conmutativa se conocen como grupos **abelianos**, en honor de Abel. Murió de tuberculosis a la edad de 27.

Grupo

Un sistema matemático se denomina **grupo** si, bajo su operación, satisface las propiedades de clausura, asociativa, de la identidad y del inverso.

EJEMPLO 1 ¿El conjunto $\{-1, 1\}$ bajo la operación de multiplicación forma un grupo?

Verifique las cuatro propiedades necesarias.

Clausura El sistema dado lleva a la tabla de multiplicación que sigue. Todas las entradas en el cuerpo de la tabla son -1 o 1; el sistema es cerrado.

×	−1	1
−1	1	−1
1	−1	1

Asociativa -1 y 1 son enteros, y la multiplicación de enteros es asociativa.

Identidad La identidad de la multiplicación es 1, un elemento del conjunto del sistema $\{-1, 1\}$.

Inverso -1 y 1 son sus propios inversos para la multiplicación.

Las cuatro propiedades se satisfacen, de modo que el sistema es un grupo. ■

EJEMPLO 2 ¿El conjunto $\{-1, 1\}$ con la operación de suma forma un grupo?

La tabla de la suma siguiente muestra que la propiedad de clausura no se satisface, de modo que no es necesario verificar más. El sistema no es un grupo.

+	−1	1
−1	−2	0
1	0	2

■

El sistema del ejemplo 1 es un grupo finito. Veamos un grupo infinito.



Amalie ("Emmy") Noether (1882-1935) matemática sobresaliente en el campo del álgebra abstracta. Estudió y trabajó en Alemania en una época en que era muy difícil para una mujer dedicarse a ello, en la Universidad de Erlangen en 1900. Noether fue una de las dos únicas mujeres. Aunque podía entrar a clases, los profesores ejercían su privilegio de negarle el derecho a tomar los exámenes de sus cursos. No fue sino hasta 1904 que se le permitió matricularse oficialmente. Terminó su doctorado cuatro años después.

En 1916, Emmy Noether fue a Göttingen a trabajar con David Hilbert sobre la teoría general de la relatividad. Pero, aun con el respaldo y prestigio de Hilbert, tuvo que esperar tres años más para ser elegida *Privatdozent*, el rango docente más bajo en la facultad. En 1922, Noether fue nombrada Ayudante de Profesor (asistente); no recibía salario por este puesto, aunque se le daba una pequeña remuneración por dar clases de álgebra.

Su área de interés fue el álgebra abstracta, en particular las estructuras llamadas anillos e ideales (los grupos también son estructuras con propiedades diferentes). Un tipo especial de grupo tiene su nombre, pues ella fue la primera en estudiar sus propiedades.

EJEMPLO 3 ¿El conjunto de los enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ con la operación de suma forma un grupo?

Verifique las propiedades requeridas.

Clausura La suma de cualesquiera dos enteros es un entero; el sistema es cerrado.

Asociativa Pruebe algunos ejemplos;

$$2 + (5 + 8) = 2 + 13 = 15$$

y

$$(2 + 5) + 8 = 7 + 8 = 15,$$

de modo que

$$2 + (5 + 8) = (2 + 5) + 8.$$

$$-4 + (7 + 14) = -4 + 21 = 17$$

y

$$(-4 + 7) + 14 = 3 + 14 = 17,$$

de modo que

$$-4 + (7 + 14) = (-4 + 7) + 14.$$

Aparentemente, la suma de entero es asociativa.

Identidad Sabemos que $a + 0 = a$ y $0 + a = a$ para cualquier entero a. El elemento identidad para la suma de enteros es 0.

Inverso Dado cualquier entero a, su inverso aditivo, $-a$, también es un entero. Por ejemplo 5 y -5 son inversos. El sistema satisface la propiedad del inverso.

Como las cuatro propiedades se satisfacen, el sistema (infinito) *es* un grupo. ■

La estructura de grupo no sólo se aplica a conjuntos de números. Un grupo común es el grupo de **simetrías de un cuadrado**, que ahora desarrollaremos. Primero, recorte un pequeño cuadrado, y márquelo como se muestra en la figura 5.

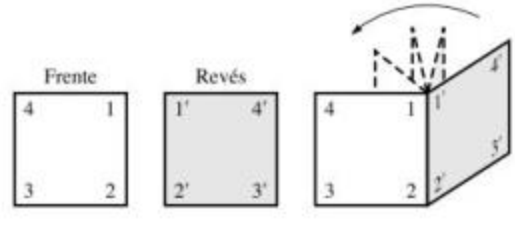
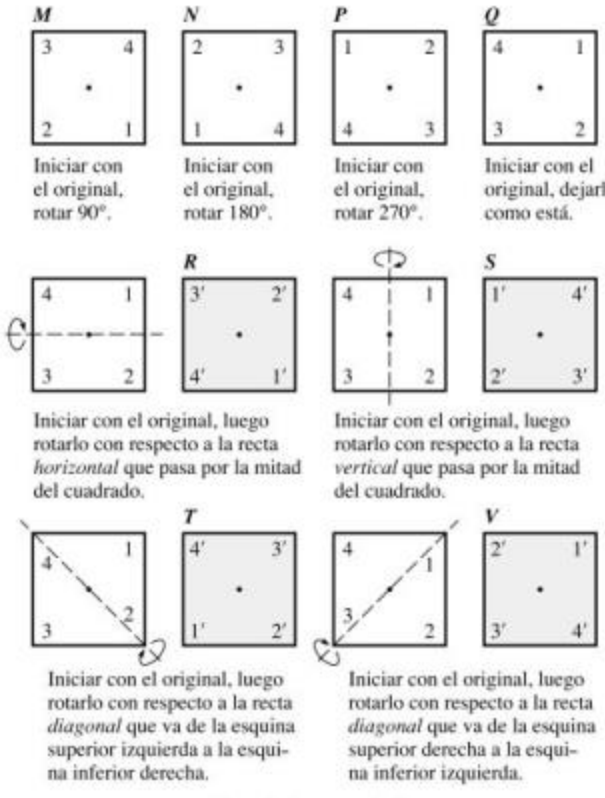


FIGURA 5

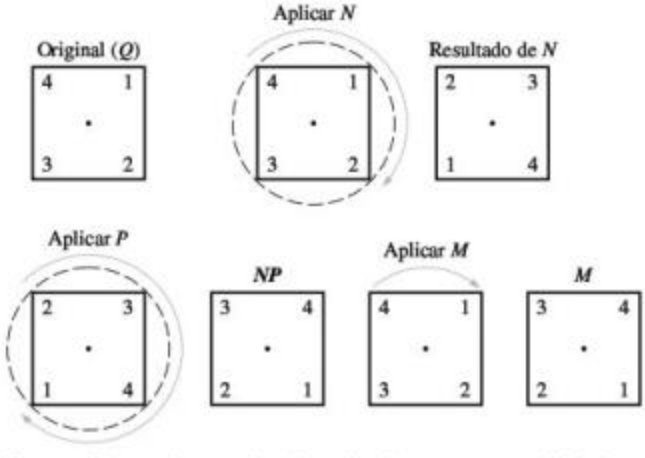
Asegúrese de que 1 esté enfrente de 1′, 2 esté enfrente de 2′, 3 esté enfrente de 3′ y 4 enfrente de 4′. Represente con M a la rotación, en el sentido de las manecillas del reloj, de 90° *con respecto al centro del cuadrado* (marcado con un punto en la figura 6). Represente con N una rotación de 180°, y así sucesivamente. Una lista completa de las simetrías de un cuadrado se proporciona en la figura 6, de la siguiente página.



Simetría de un cuadrado.

FIGURA 6

Combine las simetrías como sigue: NP representa a N seguida de P. Realizar N y luego P es lo mismo que sólo realizar M, de modo que $NP = M$. Vea la figura 7.



Piense en N como el avance de cada esquina dos cuartos en sentido de las manecillas del reloj. Así el 4 va de la esquina superior izquierda a la inferior derecha. A este resultado aplique P, que avanza cada esquina tres cuartos de vuelta. Así el 2 va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior izquierda. El resultado, NP, es el mismo que avanzar cada esquina (original) un cuarto de vuelta, lo cual hace M. Así que $NP = M$.

FIGURA 7



Évariste Galois (1811-1832) siendo joven, este matemático francés aceptó combatir en un duelo. Había estado comprometido en profundas investigaciones matemáticas por algún tiempo. Ahora, anticipando la posibilidad de su muerte, resumió lo esencial de sus descubrimientos en una carta a un amigo. Al día siguiente Galois murió en el duelo. No había cumplido 21 años de edad.

No fue hasta 1846 que las teorías de Galois fueron publicadas. Los matemáticos apreciaron la importancia de su trabajo cuando se centraron en resolver ecuaciones utilizando grupos. Galois encontró la forma de deducir un grupo que corresponde a cada ecuación. Este grupo, llamado grupo de Galois forma una parte importante de la moderna álgebra abstracta.

EJEMPLO 4 Determine RT.

Primero, realice R dando vuelta al cuadrado alrededor de una línea horizontal que pase por la mitad. Luego, realice T dando vuelta al resultado de R, con respecto a una diagonal, que vaya de arriba a la izquierda abajo a la derecha. El resultado de RT es el mismo que si sólo se realiza M, de modo que $RT = M$. ■

El método del ejemplo 4 puede usarse para completar la tabla siguiente combinando las simetrías de un cuadrado.

□	***M***	***N***	***P***	***Q***	***R***	***S***	***T***	***V***
M	N	P	Q	M	V	T	R	S
N	P	Q	M	N	S	R	V	T
P	Q	M	N	P	T	V	S	R
Q	M	N	P	Q	R	S	T	V
R	T	S	V	R	Q	N	M	P
S	V	R	T	S	N	Q	P	M
T	S	V	R	T	P	M	Q	N
V	R	T	S	V	M	P	N	Q

EJEMPLO 5 Muestre que el sistema formado por las simetrías de un cuadrado es un grupo.

Para que el sistema sea un grupo, debe satisfacer las propiedades de clausura, asociativa, de la identidad y del inverso.

Clausura Todas las entradas en el cuerpo de la tabla provienen del conjunto $\{M, N, P, Q, R, S, T, V\}$. Por tanto, el sistema es cerrado.

Asociativa Pruebe el ejemplo:

$$P(MT) = P(R) = T.$$

También, $(PM)T = (Q)T = T,$

de modo que $P(MT) = (PM)T.$

Otros ejemplos similares también funcionan (vea los ejercicios del 25 al 28). Así, el sistema tiene la propiedad asociativa.

Identidad La columna a la izquierda de la tabla se repite debajo de Q. Verifique que Q es en realidad el elemento identidad.

Inverso En el primer renglón de Q aparece debajo de P. Verifique que M y P son inversos uno del otro. De hecho, cada elemento en el sistema tiene un inverso (vea los ejercicios del 29 al 34).

Como se satisfacen las cuatro propiedades, el sistema es un grupo. ■

□	***M***	***N***	***P***	***Q***
M	N	P	Q	M
N	P	Q	M	N
P	Q	M	N	P
Q	M	N	P	Q

EJEMPLO 6 Forme un sistema matemático usando sólo el conjunto $\{M, N, P, Q\}$ del grupo de simetrías de un cuadrado. ¿Este nuevo sistema es un grupo?

La tabla para los elementos $\{M, N, P, Q\}$ (mostrada a la izquierda) es justamente una esquina de la tabla para el sistema completo. Verifique que el sistema representado por esta tabla satisface las cuatro propiedades y, por tanto es un grupo. Este nuevo grupo es un *subgrupo* del grupo original de las simetrías de un cuadrado. ■

Monster groups Se ha llevado a cabo una intensa investigación en la teoría de grupos dedicada actualmente a los grupos "simples" (los cuales no son tan simples). Dichos grupos son fundamentales —otros grupos se construyen a partir de ellos. Uno de los grupos simples más grandes tiene

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

elementos diferentes. Debido a esta cantidad enorme de elementos, se le llama *monster group*. Si este grupo monstruoso contiene demasiados elementos ¿qué le parece un grupo simple, llamado *baby monster*, con sólo

$$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$$

elementos diferentes? (Para mayor información, vea "The classification of the Finite Simple Groups", de Michael Aschbacher en *The Mathematical Intelligencer*, núm. 2, 1981.)

Grupos de permutación Un ejemplo muy útil de grupo se desprende del estudio de las permutaciones, o arreglos, de una lista de números. Inicie con los símbolos 1-2-3, en ese orden.

Hay varias maneras en las que el orden podría ser cambiado, por ejemplo, 2-3-1. Esta permutación se escribe:

1-2-3
2-3-1.

Reemplace el 1 con 2, reemplace el 2 con 3 y el 3 con 1. De la misma forma,

1-2-3
3-1-2

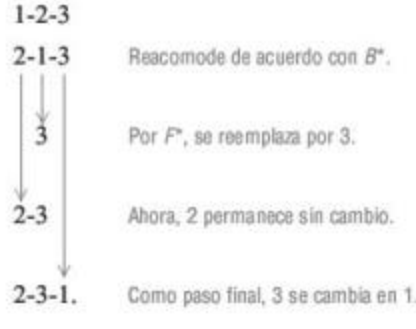
significa reemplazar el 1 con 3, el 2 con 1 y el 3 con 2, mientras que

1-2-3
3-2-1

dice reemplazar 1 con 3; deje el 2 sin cambio y reemplace 3 con 1. Todas las posibles permutaciones de los símbolos 1-2-3 están listados a continuación donde, por conveniencia, se le ha dado un nombre a cada permutación.

A^*:	B^*	C^*:	D^*:	E^*:	F^*:
1-2-3	1-2-3	1-2-3	1-2-3	1-2-3	1-2-3
2-3-1	2-1-3	1-2-3	1-3-2	3-1-2	3-2-1

Dos permutaciones pueden combinarse como las simetrías de un cuadrado; por ejemplo, el símbolo B^*F^* significa aplicar B^* a 1-2-3 y luego aplicar F^* al resultado. La permutación B^* cambia 1-2-3 en 2-1-3. Luego aplique F^* a este resultado: 1 se convierte en 3, 2 permanece sin cambio y 3 transforma en 1. En resumen



El resultado neto de B^*F^* es cambiar 1-2-3 en 2-3-1, que es exactamente lo que A^* hace a 1-2-3. Por lo tanto,

$$B^*F^* = A^*.$$

EJEMPLO 7 Determine D^*E^*.

Utilice el procedimiento descrito antes.



Aplique D^*. Para aplicar E^*, primero reemplace 1 con 3. Luego, reemplace 2 con 1. El último paso es reemplazar 3 con 2. El resultado: D^*E^* convierte 1-2-3 en 3-2-1, lo que hace F^*, de modo que

$$D^*E^* = F^*.$$ ■

Como ejemplos adicionales $A^*B^* = D^*$ y $F^*E^* = B^*$.

Una vez más, vemos que hemos encontrado un sistema matemático: el conjunto $\{A^*, B^*, C^*, D^*, E^*, F^*\}$ y las operaciones de la combinaciones de dos permutaciones. Para ver si este sistema es o no un grupo, verifique los requisitos.

Clausura Combine cualesquiera dos permutaciones y el resultado es otra permutación, de modo que el sistema es cerrado.

Asociativa Pruebe un ejemplo:

Primero, $(B^*D^*)A^* = E^*A^* = C^*$,
mientras que $B^*(D^*A^*) = B^*B^* = C^*$,
de modo que $(B^*D^*)A^* = B^*(D^*A^*)$.

Como otros ejemplos funcionan de manera similar, el sistema es asociativo.

Identidad El elemento identidad es C^*. Si x es cualquier permutación, entonces $xC^* = C^*x = x$.

Inverso ¿Cada permutación tiene una permutación inversa? Empiece con el orden básico 1-2-3 y luego aplique, digamos B^*, de modo que nos da 2-1-3. El inverso de B^* debe convertir 2-1-3 de regreso en 1-2-3, cambiando 2 en 1 y 1 en 2. Pero B^* mismo hará esto. De aquí que $B^*B^* = C^*$ y B^* sea su propio inverso. Por medio del mismo proceso, E^* y A^* son inversos uno del otro. También cada uno de C^*, D^* y F^* es su propio inverso.

Como los cuatro requisitos se satisfacen, el sistema es un grupo. Los reacomodos también se conocen como *permutaciones*, de modo que este grupo algunas veces se denomina **grupo de permutaciones de tres símbolos**. El número total de permutaciones diferentes de un número dado de símbolos puede determinarse por medio de los métodos descritos en el capítulo sobre conteo.

4.5 EJERCICIOS

¿Qué es lo incorrecto en la manera en que está planteada cada una de las preguntas siguientes?

1. ¿Los enteros forman un grupo?

2. ¿La multiplicación satisface todas las propiedades de grupo?

Decida si cada sistemas es o no un grupo. Si no es un grupo, identifique todas las propiedades que no satisface. (Recuerde que cualquier sistema que no cumple la propiedad de la identidad tampoco satisface la propiedad del inverso.) Para los sistemas finitos, puede auxiliarse construyendo tablas. Para los sistemas infinitos, pruebe ejemplos que le ayuden a decidir.

3. $\{0\}$; multiplicación

4. $\{0\}$; suma

5. $\{0, 1\}$; suma

6. $\{0\}$; sustracción

7. $\{-1, 1\}$; división

8. $\{0, 1\}$; multiplicación

9. $\{-1, 0, 1\}$; multiplicación

10. $\{-1, 0, 1\}$; suma

11. enteros; sustracción

12. enteros; multiplicación

13. enteros impares; multiplicación

14. números naturales; suma

15. números racionales; suma

16. enteros pares; suma

17. números primos; suma

18. números racionales diferentes de cero; multiplicación

19. Explique por qué un grupo *finito* basado en la operación ordinaria de suma de números no puede contener al elemento 1.

20. Explique por qué un grupo basado en la operación ordinaria de suma de números debe contener al elemento 0.

Los ejercicios del 21 al 34 se aplican al sistema de simetrías de un cuadrado, que se presentó en el texto. Determine cada una de las operaciones siguientes.

21. RN **22.** PR **23.** TV **24.** VP

Verifique cada uno de los enunciados siguientes.

25. $N(TR) = (NT)R$ **26.** $V(PS) = (VP)S$ **27.** $T(VN) = (TV)N$ **28.** $S(MR) = (SM)R$

Encuentre el inverso de cada elemento

29. N **30.** Q **31.** R **32.** S **33.** T **34.** V

Un grupo que también satisface la propiedad conmutativa se denomina grupo conmutativo *(o* grupo abeliano, *en honor de Niels Henrik Abel).*

Determine si cada uno de los grupos siguientes es conmutativo.

35. el grupo de simetrías del cuadrado

36. el subgrupo del ejemplo 6

37. los enteros con la suma

38. el grupo de permutación de tres símbolos

Proporcione ejemplos que respalden sus respuestas a los ejercicios del 39 al 42.

39. Produzca un sistema matemático con dos operaciones que sea un grupo bajo una operación, pero no sea un grupo bajo la otra operación.

40. Explique qué propiedad se gana cuando el sistema de los números enteros no negativos se amplia al sistema de los enteros.

41. Explique qué propiedad se gana cuando el sistema de los números naturales se amplía al sistema de los enteros no negativos.

42. Explique qué propiedad se gana cuando el sistema de los enteros se amplía al sistema de los números racionales.

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

Algoritmo para un calendario perpetuo

En este capítulo examinamos algunos algoritmos alternos para cálculos aritméticos. Los algoritmos aparecen en diferentes lugares en matemáticas y en ciencias de la computación, y en cada caso nos proporcionan un método específico para llevar a cabo un procedimiento que produce un resultado deseado. El algoritmo siguiente nos permite determinar el día de la semana en el cual ocurrió u ocurrirá una fecha particular.

Para aplicar el algoritmo, necesitará conocer si un año particular es año bisiesto. En general, si un año es (exactamente) divisible entre 4 es un año bisiesto. Sin embargo, hay excepciones. Los años de siglos, como 1800 y 1900, no son bisiestos, a pesar de que son divisibles entre 4. Además, existe una excepción a la excepción, un año de siglo que sea divisible entre 400 (tal como el año 2000) sí fue un año bisiesto.

En grupos de tres a cinco estudiantes, lean el algoritmo y luego trabajen los Temas para análisis.

EL ALGORITMO

Este algoritmo requiere varios *números clave*. Los números clave para el mes, día y siglo se determinan por medio de las tablas siguientes:

Mes	Clave
Enero	1 (0 si es un año bisiesto)
Febrero	4 (3 si es un año bisiesto)
Marzo	4
Abril	0
Mayo	2
Junio	5
Julio	0
Agosto	3
Septiembre	6
Octubre	1
Noviembre	4
Diciembre	6

Día	Clave
Sábado	0
Domingo	1
Lunes	2
Martes	3
Miércoles	4
Jueves	5
Viernes	6

Siglo	Clave
1700	4
1800	2
1900	0
2000	6

El algoritmo funciona como sigue. (Como ejemplo, usamos el 12 de octubre de 1949.)

		Ejemplo
Paso 1:	Obtenga los siguientes cinco números.	
1.	El número formado por los últimos dos dígitos del año	49
2.	El número en el paso 1, dividido entre 4, ignorando el residuo	12
3.	La clave del mes (en nuestro ejemplo 1 para octubre)	1
4.	El día del mes (12, por 12 de octubre)	12
5.	La clave del siglo (0 para 1900)	0
Paso 2:	Sume estos cinco números.	74
Paso 3:	Divida la suma entre 7, y quédese con el residuo. (74/7 = 10, con residuo 4)	
Paso 4:	Localice este residuo en la tabla de la clave del día. (El número 4 implica que el 12 de octubre de 1949 fue miércoles.)	

TEMAS PARA ANÁLISIS

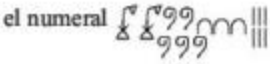
1. Haga que cada persona en el grupo determine el día de la semana en que nació.
2. Entre los miembros del grupo, analice si se puede aplicar el poema siguiente. (Por supuesto es en broma.)

> El niño del lunes tiene un rostro hermoso.
> El niño del martes seguro es gracioso.
> El niño del miércoles penas hallará,
> y el que nació en jueves lejos llegará.
> El niño del viernes es cariñoso y desprendido,
> y el del sábado trabajador y comedido.
> Pero el niño que nació en domingo
> es hermoso y bueno, feliz y despreocupado.

(continúa)

3. Determine el día de la semana en que ocurrieron los importantes sucesos históricos siguientes:
   (a) 7 de diciembre de 1941 (bombardeo de Pearl Harbor)
   (b) 22 de noviembre de 1963 (asesinato de John F. Kennedy)
   (c) 4 de julio de 1976 (bicentenario de Estados Unidos)
   (d) 1 de enero de 2000 (el "terrorífico" día del nuevo milenio)
   (e) 11 de septiembre del 2001 (los terroristas atacan Estados Unidos)

EXAMEN DEL CAPÍTULO 4

1. Para el numeral  , identifique el sistema de numeración y proporcione el indoarábigo equivalente.
2. Simplifique:
   $(8 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (4 \times 10^0)$.
3. Escriba en notación desarrollada: 60,923.

Realice cada operación por medio del algoritmo alterno que se especifica.

4. 37×54 (método egipcio o método del campesino ruso)
5. 236×94 (método de las casillas)
6. $21{,}325 - 8498$ (método de complemento a nueve)

Convierta cada uno de los números siguientes a base 10.

7. 424_{cinco} 8. $100{,}100_{\text{dos}}$ 9. $\text{A80C}_{\text{dieciséis}}$

Convierta como se indica.

10. 58 a base 2
11. 1846 a base 5
12. 10101110_{dos} a base 8
13. $\text{B52}_{\text{dieciséis}}$ a base 2

Explique brevemente cada uno de los siguientes puntos.

14. La ventaja de la agrupación multiplicativa sobre la agrupación simple.
15. La ventaja, en un sistema de numeración posicional, de una base más pequeña sobre una base mayor.
16. La ventaja, en un sistema de numeración posicional, de una base más grande sobre una base menor.

Responda las preguntas en los ejercicios del 17 al 19.

17. Para la suma de enteros no negativos, ¿cuál es el elemento identidad?
18. Para la multiplicación de números racionales, ¿cuál es el inverso del 5?
19. Para cualesquiera enteros no negativos a, b y c $(a + b) + c = (b + a) + c$, ¿qué propiedad ilustra esto?
20. Describa en general, qué constituye un grupo matemático.

Un sistema matemático con la operación V está definido por medio de esta tabla.

V	a	e	i	o	u
a	o	e	u	a	i
e	u	o	a	e	i
i	e	u	o	i	a
o	a	e	i	o	u
u	i	a	e	u	o

21. **(a)** ¿Existe un elemento identidad en este sistema?
    (b) Si es así, ¿cuál es?
22. **(a)** ¿El sistema satisface la propiedad de clausura?
    (b) Explique.
23. **(a)** ¿El sistema es conmutativo?
    (b) Explique.
24. **(a)** ¿El sistema satisface la propiedad distributiva?
    (b) Explique.
25. **(a)** ¿El sistema con la operación V es un grupo?
    (b) Explique.

capítulo

5 Teoría de números

En el mundo actual, la información es un recurso valioso. Muchas empresas y organismos gubernamentales deben guardar cierto tipo de información en secreto. Los códigos se utilizan para comunicar de manera segura información clasificada de tal suerte que debe decodificarse antes para que pueda ser comprendida. Es esencial que un código sea fácil de utilizar, pero muy difícil de violar. Uno de los códigos más ampliamente utilizados en la industria fue desarrollado por Ronald L. Rivest, Adi Shamir y Leonard M. Adleman. Conocido como código RSA por las iniciales de sus tres coinventores, empieza por cambiar el mensaje que ha de codificarse por un número grande M. Después M, se transforma en un número diferente C mediante la fórmula

$$C = M^k \pmod{n}.$$

(Este tipo de ecuación "modular" se estudia en la sección 5.4.) Los números n y k se ponen a disposición de todos, por lo que cualquiera puede codificar un mensaje. Por esta razón, RSA se denomina un sistema de "clave pública". Sin embargo, la única manera conocida para decodificar C en M es factorizar primero n en dos factores primos únicos, p y q (que son conocidos por quien eligió originalmente n, pero por nadie más).

Cuando en 1977 se introdujo el código RSA, Rivest desafió a los investigadores a que decodificaran un mensaje que utilizaba una n con 129 dígitos. Se había estimado que, sin conocimiento alguno de p y q, se llevaría aproximadamente 20,000 años descifrar este mensaje. Sin embargo, con ayuda de la teoría de los números, a 600 matemáticos de 25 países diferentes les tomó sólo 17 años factorizar n en números primos de 64 y 65 dígitos. La factorización se da en la nota al margen de la página 197. El mensaje decodificado decía: "Las palabras mágicas son fastidiosas osífragas". Para mayor información sobre los códigos RSA, vea *Mathematics Teacher*, cuya referencia aparece más adelante.

En la actualidad, se deben factorizar números aún más grandes. Pero en lugar de involucrar a numerosos matemáticos, ahora el esfuerzo incluye a muchas computadoras, en un proceso denominado "cómputo distribuido". Varias computadoras comparten la tarea para obtener un resultado en un tiempo razonable.

En ocasiones, las técnicas avanzadas favorecen la invención de códigos, pero también pueden favorecer a aquellos que tratan de descifrarlos. Por lo que se desata una competencia entre diseñadores de códigos y descifradores de códigos.

Fuente: SIAM News, vol. 27, núm. 6, 1994 y *Mathematics Teacher*, noviembre de 2001, p. 689.

5.1 Números primos y compuestos

5.2 Temas selectos de la teoría de números

5.3 Máximo factor común y mínimo común múltiplo

5.4 Aritmética del reloj y sistemas modulares

5.5 La sucesión de Fibonacci y la razón áurea

Extensión: Cuadros mágicos

Investigación en grupo: Investigación de una propiedad interesante de los números cuadrados

Examen del capítulo 5

El famoso matemático alemán Carl Friedrich Gauss comentó una vez: "La matemática es la reina de las ciencias, y la teoría de números es la reina de las matemáticas". El presente capítulo gira en torno al estudio de esta teoría. La teoría de números es la rama de las matemáticas dedicada al estudio de las propiedades de los números naturales (esto es, el conjunto infinito de números 1, 2, 3, 4, ..., que también se conocen como números de conteo).

5.1 Números primos y compuestos

En capítulos anteriores, estudiamos el conjunto de **números naturales**, también llamados **números de conteo** o **enteros positivos**:

$$\{1, 2, 3, \ldots\}.$$

La teoría de los números trata del estudio de las propiedades de este conjunto de números, y un concepto clave de esta teoría es la idea de *divisibilidad.* Hablando informalmente, decimos que un número natural es *divisible* entre otros si, al dividir el primero entre el segundo, se obtiene un residuo de 0. Esto puede definirse formalmente como sigue.

Divisibilidad

El número natural a es **divisible** entre el número natural b si existe un número natural k tal que $a = bk$. Si b divide a a, entonces, para indicarlo, escribimos $b \mid a$.

Observe que si b divide a a, entonces el cociente a / b es un número natural. Por ejemplo, 4 divide a 20 ya que existe un número natural k tal que $20 = 4k$. Aquí el valor de k es 5, puesto que $20 = 4 \cdot 5$. (En este caso se utiliza un punto para indicar multiplicación.) Por ejemplo, el número natural 20 no es divisible entre 7, pues no existe número natural k que satisfaga $20 = 7k$. La alternativa sería pensar: "20 dividido entre 7 da un cociente de 2 con residuo de 6", pero como hay un residuo diferente de cero, no se cumple la divisibilidad. Escribimos $7 \nmid 20$ para indicar que 7 no divide a 20.

Si el número natural a es divisible entre el número natural b, entonces b es un **factor** (o **divisor**) de a, y a es un **múltiplo** de b. Por ejemplo, 5 es un factor de 30, y 30 es un múltiplo de 5. También, 6 es un factor de 30, y 30 es un múltiplo de 6. El número 30 es igual a $6 \cdot 5$; este producto $6 \cdot 5$ se denomina **factorización** de 30. Otras factorizaciones de 30 incluyen $3 \cdot 10$, $2 \cdot 15$, $1 \cdot 30$ y $2 \cdot 3 \cdot 5$.

Las ideas de números naturales pares e impares se basan en el concepto de divisibilidad. Un número natural es par si es divisible entre 2, e impar si no es divisible entre 2.

EJEMPLO 1 Decida si el primer número en cada pareja es divisible entre el segundo.

(a) 45; 9

¿Hay un número natural k que satisfaga $45 = 9k$? La respuesta es sí, ya que $45 = 9 \cdot 5$, y 5 es un número natural. Por lo tanto, 9 divide a 45, que se denota así $9 \mid 45$.

(b) 60; 7

Como el cociente $60 \div 7$ no es un número natural, 60 no es divisible entre 7, y se escribe $7 \nmid 60$.

(c) 19; 19

El cociente $19 \div 19$ es el número natural 1, de modo que 19 es divisible entre 19. (De hecho, cualquier número natural es divisible entre él mismo y también entre 1.)

(d) 26; 1

El cociente $26 \div 1$ es el número natural 26, así 26 es divisible entre 1. (En realidad, cualquier número natural es divisible entre 1. Con frecuencia esto se olvida.) ■

Las observaciones realizadas en los incisos (c) y (d) del ejemplo 1 pueden generalizarse como sigue: Para cualquier número natural a, $a \mid a$ y $1 \mid a$.

EJEMPLO 2 Encuentre los factores de cada número.

(a) 36

Para determinar los factores de 36, comience por tratar de dividir 36 entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. Al hacerlo, se obtiene la lista siguiente de factores de 36:

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

(b) 50

Los factores de 50 son 1, 2, 5, 10, 25 y 50.

(c) 11

Los únicos factores de 11 son 11 y 1. ■

Al igual que el número 19 en el ejemplo 1(c), el número 11 sólo tiene dos factores, el número mismo y 1. Ésta es una clase muy importante de números naturales, denominada *número primo*.

Números primos y compuestos

Un número natural mayor que 1 que sólo tiene el número mismo y 1 como factores se denomina **número primo**. Un número natural mayor que 1 que no es primo se llama **compuesto**.

Los matemáticos han acordado que el número natural 1 no es primo ni compuesto. La siguiente definición alterna de número primo aclara que 1 no es primo.

Definición alterna de un número primo

Un **número primo** es un número natural que tiene *exactamente* dos factores diferentes.

Esta definición alternativa excluye la posibilidad de que 1 sea primo, ya que 1 tiene un solo factor (a saber, 1).

Hay un método sistemático para identificar números primos en una lista de números: 2, 3, …, n. El método, conocido como **Criba de Eratóstenes**, se denomina así en honor del geógrafo, poeta, astrónomo y matemático griego, que vivió hacia el

Violación de códigos La determinación de factores primos de números muy grandes había sido considerada un simple ejercicio para computadora, interesante para el mejoramiento de los métodos de trabajo con estas máquinas, pero sin ningún valor por derecho propio. Esto ha cambiado en años recientes debido a los nuevos métodos de *codificación*, en los que se utilizan números muy grandes a fin de intentar conseguir códigos inviolables para información computarizada. Tan pronto como se aplican estos números, aparecen quienes tratan de encontrar factores primos que permitan descifrar el código.

En un artículo de la *Science News* del 7 de mayo de 1994 ("Team Sieving Cracks a Huge Number", p. 292) se informó que el mensaje codificado propuesto por Rivest 17 años antes había sido descifrado. (Vea la introducción del capítulo, p. 195.) El número clave de 129 dígitos, conocido como RSA-129, había sido factorizado por el método de la criba cuadrática (QS, por sus siglas en inglés), con más de 600 computadoras que trabajaron en conjunto. Aquí está el número y sus dos factores:

114,381,625,757,888,867,669,235,779,
976,146,612,010,218,296,721,242,362,
562,561,842,935,706,935,245,733,897,
830,597,123,563,958,705,058,989,075,
147,599,290,026,879,543,541 =
3,490,529,510,847,650,949,147,849,
619,903,898,133,417,764,638,493,387,
843,990,820,577 × 32,769,132,993,
266,709,549,961,988,190,834,461,413,
177,642,967,992,942,539,798,288,533.

año 276 al 192 a.C. Para construir tal criba, haga una lista de todos los números naturales desde 2 hasta algún número natural dado, como 100. El número 2 es primo, pero todos los demás múltiplos 2 (4, 6, 8, 10, etc.) son compuestos. Como 2 es primo, enciérrelo en un círculo, y tache todos los demás múltiplos de 2. Como 3 es primo, debe encerrarlo en un círculo, mientras que a todos los demás múltiplos de 3 (6, 9, 12, 15, etc.) que no están tachados debe tacharlos. Encierre en un círculo el siguiente primo que es 5, mientras que los demás múltiplos de 5 se tienen que tachar. Encierre en un círculo al 7, y tache todos los demás múltiplos de 7. Continúe este proceso para todos los primos menores o iguales a la raíz cuadrada del último número en la lista. Para esta lista, puede detenerse en 7, ya que el siguiente número primo, 11, es mayor que la raíz cuadrada de 100, que es 10. La tabla 1 da la Criba de Eratóstenes para 2, 3, 4, … ,100, en la que se identifican los 25 primos en ese rango. En teoría, tal criba se puede construir para cualquier valor de n.

TABLA 1 Criba de Eratóstenes

	(2)	(3)	4	(5)	6	(7)	8	9	10	(11)	12	(13)	14
15	16	(17)	18	(19)	20	21	22	(23)	24	25	26	27	28
(29)	30	(31)	32	33	34	35	36	(37)	38	39	40	(41)	42
(43)	44	45	46	(47)	48	49	50	51	52	(53)	54	55	56
57	58	(59)	60	(61)	62	63	64	65	66	(67)	68	69	70
(71)	72	(73)	74	75	76	77	78	(79)	80	81	82	(83)	84
85	86	87	88	(89)	90	91	92	93	94	95	96	(97)	98
99	100												

Cómo utilizar grandes cantidades de tiza En 1903, mucho antes de la época de las computadoras, el matemático F. N. Cole presentó en una reunión de la Sociedad Estadounidense de Matemáticas (American Mathematical Society) su descubrimiento de una factorización del número

$$2^{67} - 1.$$

Caminó hasta la pizarra, obtuvo la potencia 67 de 2 y luego le restó 1. Después se desplazó hacia el otro lado de la pizarra y multiplicó

$$193{,}707{,}721 \times 761{,}838{,}257{,}287.$$

Los dos cálculos coincidían, y Cole fue ovacionado de pie por una presentación que no incluía una sola palabra.

EJEMPLO 3 Utilice las definiciones de números primos y compuestos para decidir si cada número es primo o compuesto.

(a) 97

Como los únicos factores de 97 son 97 y 1, el número 97 es primo.

(b) 59,872

El número 59,872 es par, de modo que es divisible entre 2. Es compuesto. (Solamente hay un número primo par, el número 2.)

(c) 697

Para que 697 sea compuesto, debe haber un número diferente de 697 y de 1 que lo divida con residuo cero. Comencemos probando con 2, y luego con 3. Ninguno funciona. No hace falta intentarlo con 4. (Si 4 divide a un número, entonces 2 también lo dividirá.) Inténtelo con 5. No es necesario probar con 6 o cualquier par subsiguiente. (¿Por qué?) Inténtelo con 7, luego con 11. (¿Por qué no con 9?) Pruebe con 13. Siga intentándolo con números hasta que alguno funcione, o hasta que lo intente con un número cuyo cuadrado exceda a tal número. Inténtelo con 17:

$$697 \div 17 = 41.$$

El número 697 es compuesto. ■

Hay una ayuda para determinar si un número natural es divisible entre otro número natural que se conoce como **prueba de divisibilidad**. Existen algunas de estas pruebas para números naturales pequeños, y se dan en la tabla 2. Las pruebas de di-



En un escrito del 1 de octubre de 1994, publicado en *Science News*, Ivars Peterson da una explicación fascinante del reciente descubrimiento de una máquina para factorizar de 75 años de antigüedad ("Cranking Out Primes: Tracking Down a Long-lost Factoring Machine"). En 1989, Jeffrey Shallit de la Universidad de Waterloo, en Ontario, encontró un artículo de una poco conocida revista francesa de 1920 en la que el autor, Eugene Olivier Carissan, informó su invención del aparato para factorizar. Shallit y otros dos colegas emprendieron la búsqueda de esta máquina. Se pusieron en contacto con todos los Carissan de la guía telefónica de Francia, y recibieron respuesta de la hija de Eugene Carissan. La máquina aún existía y funcionaba, estaba almacenada en el cajón de un observatorio astronómico en Floirac, cerca de Burdeos.

En el artículo, Peterson explica el funcionamiento del aparato. Valiéndose de la máquina, a Carissan le tomó 10 minutos probar que 708,158,977 es un número primo, y fue capaz de factorizar un número de 13 dígitos. Aunque esto no puede compararse con lo que la tecnología es capaz de realizar en la actualidad, fue un logro significativo en la época de Carissan.

visibilidad para 7 y 11 son un poco complicadas, pero se estudian en los ejercicios de esta sección.

TABLA 2 Criterios de divisibilidad

Divisible entre	Criterio	Ejemplo
2	El número termina en 0, 2, 4, 6 u 8. (El último dígito es par.)	9,489,994 termina en 4; es divisible entre 2.
3	La suma de los dígitos es divisible entre 3.	897,432 es divisible entre 3, ya que $8 + 9 + 7 + 4 + 3 + 2 = 33$ es divisible entre 3.
4	Los últimos dos dígitos forman un número divisible entre 4.	7,693,432 es divisible entre 4, ya que 32 es divisible entre 4.
5	El número termina en 0 o 5.	890 y 7635 son divisibles entre 5.
6	El número es divisible entre 2 y 3.	27,342 es divisible entre 6 puesto que es divisible entre 2 y entre 3.
8	Los últimos tres dígitos forman un número que es divisible entre 8.	1,437,816 es divisible entre 8, ya que 816 es divisible entre 8.
9	La suma de los dígitos es divisible entre 9.	428,376,105 es divisible entre 9 ya que la suma de sus dígitos es 36, que es divisible entre 9.
10	El último dígito es 0.	897,463,940 es divisible entre 10.
12	El número es divisible entre 4 y 3.	376,984,032 es divisible entre 12.

EJEMPLO 4 Decida si el primer número es divisible entre el segundo.

(a) 2,984,094; 4

Los últimos dos dígitos forman el número 94. Como 94 no es divisible entre 4, el número dado no es divisible entre 4.

(b) 4,119,806,514; 9

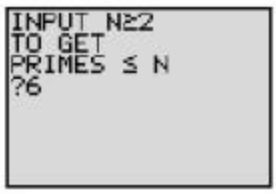
La suma de los dígitos es $4 + 1 + 1 + 9 + 8 + 0 + 6 + 5 + 1 + 4 = 39$, que no es divisible entre 9. Por lo tanto, el número dado no es divisible entre 9. ■

Como se mencionó, a un número como 15, que puede escribirse como el producto de factores primos ($15 = 3 \cdot 5$), se le denomina número *compuesto*. Un importante teorema en matemáticas establece que sólo hay una forma posible de escribir la factorización prima de un número compuesto natural. Este teorema se conoce como *teorema fundamental de la aritmética*, una forma de las cuales conocían los antiguos griegos.*

*Un teorema es una proposición cuya demostración de que es verdadera se base en otras proposiciones. Para una demostración de este teorema, vea *What Is Mathematics?* de Richard Courant y Herbert Robbins (Oxford University Press, 1941), p. 23.

El siguiente programa puede utilizarse en la calculadora TI-83 para listar todos los primos menores o iguales a un número natural dado *N*. Fue escrito por Charles W. Gantner y es cortesía de Texas Instruments.

```
PROGRAM: PRIMES
: Disp "INPUT N ≥ 2"
: Disp "TO GET"
: Disp "PRIMES ≤ N
: Input N
: 2 → T
: Disp T
: 1 → A
: Lbl 1
: A + 2 → A
: 3 → B
: If A > N
: Stop
: Lbl 2
: If B ≤ √(A)
: Goto 3
: Disp A
: Pause
: Goto 1
: Lbl 3
: If A/B ≤ int (A/B)
: Goto 1
: B + 2 → B
: Goto 2
```





La pantalla indica que los primos menores o iguales a 6 son 2, 3 y 5.

El teorema fundamental de la aritmética

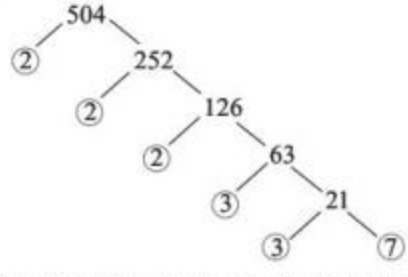
Todo número natural compuesto puede expresarse en una sola forma como producto de primos (si no se considera el orden de los factores).

Algunas veces, a este teorema se le denomina **teorema de la factorización única** para reflejar la idea de que sólo hay una (única) forma posible de factorización prima para cualquier número natural dado.

Un número compuesto puede factorizarse en primos mediante un "árbol de factorización" como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Determine la factorización prima del número compuesto 504.

Como 2 es un factor de 504, podemos empezar las primeras ramas del árbol de factorización escribiendo 504 como $2 \cdot 252$. Luego factorizar 252 como $2 \cdot 126$. Cuando aparezca un factor compuesto que no tenga al 2 como factor, intente con 3, luego con 5, después con 7, y así sucesivamente, hasta que al final de cada rama se encuentre un número primo.



Los factores primos están encerrados en un círculo. Al utilizar exponentes, la factorización prima de 504 es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. (*Nota:* Puesto que el teorema fundamental de la aritmética garantiza que esta factorización prima es única, podríamos haber iniciado el árbol de factorización con $3 \cdot 168$ o con $8 \cdot 63$ u otras posibilidades, y podríamos haber continuado hasta que todos los factores fuesen primos. En todos los casos, hubiéramos obtenido la misma factorización final.)

Como un método alterno al método del árbol de factorización, podríamos dividir 504 entre primos una y otra vez, por medio de la forma compacta que se muestra enseguida.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 504 \\ 2 & 252 \\ 2 & 126 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array}$$

Siguiendo así, y utilizando cuando sean necesarios los primos 2, 3, 5, 7, 11, etc., hasta que el último número sea primo. Lea los factores primos que se muestran en negritas, para obtener, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. ■

La infinitud de los números primos Como, en cierto sentido, los números primos son los bloques de construcción del sistema de los números enteros, los matemáticos (tanto aficionados como profesionales) los han estudiado durante miles de años. Aunque todavía hay mucho por conocer, existe un importante resultado básico que fue demostrado por Euclides hacia el año 300 a.C., y es que existe una cantidad in-

finita de números primos. Esto significa que no importa si identificamos un número primo muy grande, siempre habrá otros mayores a él. La demostración de Euclides permanece actualmente como una de las demostraciones más elegantes en las matemáticas. (Una demostración matemática *elegante* es la que presenta el resultado deseado de la forma más directa y concisa posible. Los matemáticos se esfuerzan por lograr la elegancia de sus demostraciones.) Se conoce como **demostración por contradicción**.

Un enunciado puede demostrarse por contradicción de esta forma: suponemos que la negación del enunciado es verdadera. Suponer que la negación es verdadera se utiliza para generar cierto tipo de contradicción, o un absurdo. El hecho de que la negación del enunciado original conduzca a una contradicción significa que el enunciado original debe ser verdadero.

El siguiente argumento puede ayudarnos a lograr un mejor entendimiento de cierta parte de la demostración de que existe un número infinito de números primos.

Supóngase que $M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$. Ahora, M es el producto de los primeros cuatro números primos más 1. Si dividimos 211 entre cada uno de los primos 2, 3, 5 y 7 el residuo siempre es 1.

$$\begin{array}{rrrr} 105 & 70 & 42 & 30 \\ 2\overline{)211} & 3\overline{)211} & 5\overline{)211} & 7\overline{)211} \\ \underline{210} & \underline{210} & \underline{210} & \underline{210} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Por lo tanto, 211 no es divisible entre ninguno de los primos 2, 3, 5 y 7.

Ya estamos preparados para demostrar que hay un número infinito de primos. Si se puede demostrar que *no hay número primo más grande*, entonces debe haber un número infinito de primos.

Teorema No existe un número primo más grande.

Demostración: Suponga que existe un número primo más grande y llámelo P. Ahora forme el número M de manera que

$$M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots P + 1,$$

donde $p_1, p_2, p_3, \ldots, P$ representan todos los primos menores o iguales a P. Ahora, el número M debe ser primo o compuesto.

1. Suponga que M es primo.
   M es obviamente mayor que P, así que si M es primo, es mayor que el supuesto primo más grande P. Hemos llegado a una *contradicción*.
2. Suponga que M es compuesto.
   Si M es compuesto, debe tener un factor primo. Pero ninguno de los $p_1, p_2, p_3, \ldots, P$ son factores de M, ya que la división entre cada uno dejaría un residuo de 1. (Recuerde el argumento de arriba.) Por lo tanto, si M tiene un factor primo, debe ser mayor que P. Pero esto es una *contradicción*, ya que P es el supuesto número primo más grande.

En cualquiera de los casos, 1 o 2, llegamos a una contradicción. Todo el argumento estaba basado en el supuesto de que existe un número primo más grande, pero como esto nos conduce a contradicciones, no debe haber primo más grande o, de forma equivalente, existe un número infinito de primos. ■

Búsqueda de números primos grandes En la actualidad, tiene una gran importancia práctica la identificación de números primos cada vez más grandes y la factorización de números compuestos muy grandes en sus componentes primos, ya que es la base de los modernos **sistemas de criptografía** (códigos secretos). Durante



Búsqueda de primos En algún momento, $2^{11,213} - 1$ fue el número primo más grande conocido. Para honrar su descubrimiento, la oficina postal de Urbana, Illinois, utilizó el matasellos que se aprecia en la figura. Desde entonces, se han encontrado números primos mayores.

siglos se han utilizado varios códigos en aplicaciones militares. Hoy en día, la seguridad industrial y la información de negocios también dependen de la teoría de los números primos.

Como los matemáticos continúan la búsqueda de números primos cada vez más grandes, sería bueno tener una fórmula que genere a todos los primos (algo análogo, por ejemplo, a la fórmula $2n$ que genera todos los naturales pares para $n = 1, 2, 3, \ldots$, o la fórmula n^2 que genera todos los cuadrados perfectos). Los números generados por la fórmula $M_n = 2^n - 1$ se denominan **números de Mersenne**, nombrados así en honor del monje francés Marin Mersenne (1588-1648). Era muy sabido que si n era un número *compuesto* siempre se generaría un número de Mersenne que fuera compuesto. (Vea los ejercicios 81 a 86.) Y al principio, algunos matemáticos creyeron que un valor *primo* para n siempre generaría un número de Mersenne que fuese primo. Esto es, iniciando con un número primo n, uno siempre produciría otro número primo mayor, $2^n - 1$. (Aunque "generar siempre un primo" no es lo mismo que "generar todos los primos", al menos sería una fuente de primos.)



Marin Mersenne (1588-1648) en su *Cogitata Physico-Mathematica* (1644) aseguró que M_n era primo para $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ y 257 y compuesto para todos los demás números primos n menores que 257. Otros matemáticos de esa época sabían que Mersenne no podía haber probado todos estos valores, pero ninguno pudo comprobar o refutar lo dicho. Tuvieron que pasar más de 300 años para que todos los primos hasta 257 se pudieran probar en realidad y finalmente se reveló que Mersenne había cometido cinco errores.

M_{61} es primo

M_{67} es compuesto

M_{89} es primo

M_{107} es primo

M_{257} es compuesto.

EJEMPLO 6 Evalúe el número de Mersenne M_n para $n = 2$, 3 y 5.

$$M_2 = 2^2 - 1 = 3 \qquad M_3 = 2^3 - 1 = 7 \qquad M_5 = 2^5 - 1 = 31$$

Observe que los tres valores 3, 7 y 31 son primos. ■

Resulta que M_7 también es primo (vea el ejercicio 26), pero se descubrió en 1536 que $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$ no es primo (puesto que es $23 \cdot 89$). Por lo que los valores primos de n *no* siempre producen M_n primo. Entonces la pregunta es ahora cuáles valores primos de n producen números de Mersenne primos (los llamados **primos de Mersenne**). Como, en general, no hay una forma de identificar cuáles valores primos de n resultan en primos de Mersenne, se ha de verificar cada valor primo de manera individual, lo cual no es una tarea fácil, ya que pronto se generaron números de Mersenne muy grandes.

La búsqueda de primos de Mersenne obtenía resultados de manera muy lenta. Hacia el año 1600, M_n había sido verificado como primo para todo primo n hasta 19 (con excepción del 11, como se mencionó antes). El siguiente fue M_{31}, verificado por Euler en 1732. Alrededor de 100 años después se demostró que M_{127} es primo. No se había descubierto ningún otro primo de Mersenne mayor hasta 1952 cuando una de las primeras computadoras verificó que M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} y M_{2281} son primos.

Durante los últimos 50 años, han existido matemáticos expertos en diseño y programación de algoritmos que hacen uso de las computadoras más poderosas disponibles a fin de identificar el nuevo número primo más grande que rompa el récord. A principios de 1996, se inició la gran **búsqueda en Internet de primos de Mersenne (GIMPS**, por sus siglas en inglés). Al inicio de 2002, más de 130,000 personas se habían inscrito, y habían recibido un software y un código fuente gratis para ser ejecutado durante el tiempo ocioso de más de 205,000 computadoras personales en el mundo. El último primo de Mersenne fue $M_{13,466,917} = 2^{13,466,917} - 1$, un número con 4,053,946 dígitos. Fue el trigésimo noveno primo de Mersenne conocido. (En un artículo en línea de la BBC se calculó que el logro de la GIMPS había utilizado un tiempo de computadora combinado de 13,000 años.)

Durante el mismo periodo que Mersenne cavilaba sobre los números primos, Pierre de Fermat (alrededor de 1601-1665) hacía la conjetura de que la fórmula $2^{2^n} + 1$ siempre producía primos, para cualquier valor entero no negativo de n. La tabla 3 muestra cómo esta fórmula genera los primeros cuatro **números de Fermat**, que en realidad son primos. El quinto número de Fermat (para $n = 4$) es igualmente primo, pero el sexto número de Fermat (para $n = 5$) resulta ser 4,294,967,297 que

Los primos pagan El 14 de noviembre de 2001, la computadora de Michael Cameron, una T-Bird con procesador AMD a 800 MHz, encontró el 39° número primo de Mersenne conocido, después de sólo 42 días de cómputo en los ratos en que se encontraba disponible una computadora. El número tiene 4,053,946 dígitos. La fundación Electronics Frontier ha pagado premios de 50,000 dólares por números primos que rompan el récord, a partir del primer primo con más de 1 millón de dígitos. El primer descubridor de un primo de 10 millones de dígitos recibirá 100,000 dólares.

Si quiere unirse a la GIMPS (gran búsqueda en Internet de primos de Mersenne) revise http://www.mersenne.org.

no es primo. (Vea los ejercicios 75 y 76.) Hasta la fecha, no se han encontrado más primos entre los números de Fermat.

TABLA 3 Generación de números de Fermat

n	2^n	2^{2^n}	$2^{2^n}+1$
0	1	2	3
1	2	4	5
2	4	16	17
3	8	256	257

Como dato histórico, existen un par de fórmulas polinomiales que producen primos. En 1732, Leonardo Euler mostró la fórmula $n^2 - n + 41$, que genera primos para n hasta 40 y no funciona para $n = 41$. En 1879, E.B. Escott produjo más primos con la fórmula $n^2 - 79n + 1601$, que deja de funcionar por primera vez con $n = 80$.

EJEMPLO 7 Determine los primeros cinco números producidos por cada una de las fórmulas polinomiales de Euler y Escott.

La tabla 4 muestra los números de referencia.

TABLA 4 Unos cuantos números primos generados con el polinomio

n	Fórmula de Euler $n^2 - n + 41$	Fórmula de Escott $n^2 - 79n + 1601$
1	41	1523
2	43	1447
3	47	1373
4	53	1301
5	61	1231

Todos los valores encontrados aquí son primos. (Utilice la tabla 1 para verificar los valores de Euler.) ■

En realidad, no es difícil probar que no puede existir un polinomio que de manera consistente siempre genere números primos. Existen fórmulas matemáticas más complicadas para generar primos, pero hasta hoy ninguna puede ser aplicada de manera práctica en un tiempo razonable, aun utilizando las computadoras más rápidas.

5.1 EJERCICIOS

Decida si las proposiciones siguientes son verdaderas *o* falsas.

1. Todo número natural es divisible entre 1.
2. Ningún número natural es a la vez primo y compuesto.
3. No existen números primos pares.
4. Si n es un número natural y $9 \mid n$, entonces $3 \mid n$.
5. Si n es un número natural y $5 \mid n$, entonces $10 \mid n$.
6. El 1 es el número primo más pequeño.
7. Todo número natural es tanto factor como múltiplo de sí mismo.
8. Si 16 divide a un número natural, entonces 2, 4 y 8 también deben dividir a ese número natural.

9. El número compuesto 50 tiene exactamente 2 factorizaciones primas.

10. El número primo 53 tiene exactamente 2 números naturales como factores.

11. El número $2^{11} - 1$ es un ejemplo de un primo de Mersenne.

12. Hasta principios de 2003, sólo se habían encontrado cinco primos de Fermat.

Determine todos los factores de cada número.

13. 12 **14.** 18 **15.** 20 **16.** 28 **17.** 120 **18.** 172

Utilice pruebas de divisibilidad para decidir si el número dado es divisible entre cada uno de los números siguientes.

(a) 2 **(b)** 3 **(c)** 4 **(d)** 5 **(e)** 6 **(f)** 8 **(g)** 9 **(h)** 10 **(i)** 12

19. 315 **20.** 630 **21.** 25,025

22. 45,815 **23.** 123,456,789 **24.** 987,654,321

25. (a) Al construir la Criba de Eratóstenes para 2 a 100, dijimos que cualquier número compuesto en ese rango debe ser múltiplo de algún primo menor o igual a 7 (ya que el siguiente primo, 11, es mayor que la raíz cuadrada de 100). Explique.

(b) Para ampliar la Criba de Eratóstenes a 200, ¿cuál es mayor primo cuyos múltiplos tienen que considerarse?

(c) Complete el siguiente enunciado: al buscar factores primos de un número dado, sólo necesitamos considerar todos los primos hasta e incluyendo _____ _____ de ese número, ya que un factor primo mayor que _____ _____ sólo puede ocurrir si existe al menos otro factor primo menor que _____ _____.

(d) Complete este enunciado. Si ningún primo menor o igual a $\sqrt{n}$ divide a n, entonces n es un número _____ .

26. (a) Amplíe la Criba de Eratóstenes de la tabla de 101 a 200 y liste los primos entre 100 y 200. ¿Cuántos hay?

(b) De la lista del inciso (a), verifique que el número de Mersenne M_7 en realidad es primo.

27. Liste dos primos que sean números naturales consecutivos. ¿Puede existir otra pareja?

28. ¿Puede haber tres primos que sean números naturales consecutivos? Explíquelo.

29. Para que un número natural sea divisible entre 2 y 5, ¿qué condición debe cumplir su último dígito (el dígito de las unidades)?

30. Considere las pruebas de divisibilidad para 2, 4 y 8 (potencias de 2). Utilice el razonamiento inductivo para predecir la prueba de divisibilidad entre 16. Luego utilice la prueba para demostrar que 456,882,320 es divisible entre 16.

Determine la factorización prima de cada número compuesto.

31. 240 **32.** 300 **33.** 360 **34.** 425 **35.** 663 **36.** 885

He aquí una prueba de divisibilidad entre 7.

(a) *Duplique el último dígito del número dado y reste este valor del número sin su último dígito.*

(b) *Repita el proceso del inciso (a) tantas veces como sea necesario hasta que el número obtenido pueda dividirse fácilmente entre* 7.

(c) *Si el último número obtenido es divisible entre* 7, *entonces el número dado también es divisible entre* 7. *Si el último número no es divisible entre* 7, *entonces tampoco lo es el número dado.*

Utilice esta prueba de divisibilidad para determinar si cada número siguiente es o no divisible entre 7.

37. 142,891 **38.** 409,311 **39.** 458,485 **40.** 287,824

Aquí está una prueba de divisibilidad entre 11.

(a) *Iniciando a la izquierda del número dado, obtenga la suma de los dígitos tomados de manera alternada, es decir uno sí y otro no.*

(b) *Sume los dígitos que no sumó en el paso anterior.*

(c) *Reste la más pequeña de las sumas de la mayor.* (*Si las sumas son iguales, la diferencia es* 0.)

(d) *Si el número final obtenido es divisible entre* 11, *entonces el número dado también es divisible entre* 11. *Si el número final no es divisible entre* 11, *entonces tampoco lo será el número dado.*

Utilice esta prueba de divisibilidad para determinar si cada uno de los siguientes números es o no divisible entre 11.

41. 8,493,969 **42.** 847,667,942 **43.** 453,896,248 **44.** 552,749,913

45. Considere la prueba de divisibilidad para el número compuesto 6, y haga una conjetura para la prueba de divisibilidad para el número compuesto 15.

46. Explique qué significa "demostración por contradicción".

Determine todos los posibles dígitos que pueden reemplazar a la x, de modo que el primer número sea divisible entre el segundo. Por ejemplo, 37,58*x es divisible entre* 2 *si* $x = 0, 2, 4, 6$ *u* 8.

47. 398,87*x*; 2 **48.** 2,45*x*,765; 3 **49.** 64,537,84*x*; 4 **50.** 2,143,89*x*; 5

51. 985,23*x*; 6 **52.** 7,643,24*x*; 8 **53.** 4,329,7*x*5; 9 **54.** 23,*x*54,470; 10

Hay un método para determinar el **número de divisores** *de un número compuesto. Para hacerlo, escriba el número compuesto en su forma de factores primos, utilizando exponentes. Sume* 1 *a cada exponente y multiplique estos números. Su producto indica el número de divisores del número compuesto. Por ejemplo,* $24 = 2^3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$. *Ahora sume* 1 *a cada exponente:* $3 + 1 = 4$, $1 + 1 = 2$. *Multiplique* 4×2 *para obtener* 8. *Hay* 8 *divisores de* 24. *(Como* 24 *es muy pequeño, esto puede verificarse con facilidad. Los divisores son* 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 *y* 24, *un total de 8, como se predijo.)*

Determine el número de divisores de cada uno de los siguientes números compuestos.

55. 36 **56.** 48 **57.** 72 **58.** 144 **59.** $2^8 \cdot 3^2$ **60.** $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2$

Año bisiesto es aquel divisible entre 4, *excepto cuando el año es divisible entre* 100 *(cuando termina con dos ceros). En tal caso, el número debe ser divisible entre* 400 *para que el año sea bisiesto. Determine cuál de los años siguientes es bisiesto.*

61. 1776 **62.** 1948 **63.** 1994 **64.** 1894 **65.** 2400 **66.** 1800

67. ¿Por qué la siguiente *no* es una prueba válida de divisibilidad entre 8? "Un número es divisible entre 8 si es divisible entre 4 y entre 2." Sustente su respuesta con un ejemplo.

68. Seleccione tres números naturales consecutivos, multiplíquelos y divida el producto entre 6. Repita esto varias veces mediante diferentes elecciones de tres números consecutivos. Haga una conjetura sobre el resultado.

69. Explique por qué el producto de tres números naturales consecutivos debe ser divisible entre 6.

70. Seleccione cualquier número de 6 dígitos que consista en tres dígitos seguidos por los mismos tres dígitos, en el mismo orden (por ejemplo, 467,467). Divídalo entre 13. Divídalo entre 11. Divídalo entre 7. ¿Qué observa? ¿Por qué piensa que sucede esto?

71. Verifique que la fórmula polinomial de Euler generadora de primos $n^2 - n + 41$ no funciona para $n = 41$.

72. Evalúe la fórmula polinomial de Euler para **(a)** $n = 42$ y **(b)** $n = 43$.

73. Seleccione para completar de manera correcta: para $n > 41$, la fórmula de Euler produce un primo
A. nunca. **B.** algunas veces. **C.** siempre.
(*Una pista:* Si ningún primo menor o igual a $\sqrt{n}$ divide a n, entonces n es primo.)

74. Recuerde que la fórmula de Escott, $n^2 - 79n + 1601$, no produce un primo para $n = 80$. Evalúe esta fórmula para $n = 81$ y $n = 82$ y luego complete el enunciado siguiente: Para $n > 80$, la fórmula de Escott produce un primo
A. nunca. **B.** algunas veces. **C.** siempre.

75. **(a)** Evalúe el número de Fermat $2^{2^n} + 1$ para $n = 4$.
(b) Al buscar posibles factores primos del número de Fermat del inciso (a), ¿cuál es el potencial factor primo más grande con el que intentaría probar? (Como se establece en el texto, el "quinto" número de Fermat en realidad es primo.)

76. **(a)** Verifique el valor dado en el texto para el "sexto" número de Fermat (por ejemplo, $2^{2^5} + 1$).
(b) Divida este número de Fermat entre 641. (Euler descubrió está factorización en 1732, con lo que probó que el sexto número de Fermat no es primo.)

77. Escriba un reporte breve sobre la GIMPS.

78. Escriba un reporte breve que identifique los primos 36°, 37° y 38° de Mersenne y cómo, cuándo y por quién fueron encontrados.

79. La nota al margen sobre Mersenne cita una afirmación que no se resolvió completamente durante 300 años. Encuentre cuándo y por quién fueron demostrados los cinco errores de Mersenne.

80. En la demostración de Euclides de que no existe un primo mayor que todos, se construyó un número M tomando el producto de primos y sumando 1. Observe el patrón siguiente.

$M = 2 + 1 = 3$ (3 es primo)

$M = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ (7 es primo)

$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ (31 es primo)

$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$ (211 es primo)

$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$ (2311 es primo)

Parece que este patrón siempre dará un número primo. Ahora evalúe

$$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1.$$

¿Es primo o compuesto? Si es compuesto proporcione su factorización en primos.

El texto afirmaba que el número de Mersenne M_n es compuesto siempre que n sea compuesto. Los ejercicios siguientes perfeccionan una manera en la que usted siempre puede determinar un factor de tal número de Mersenne.

81. Determine $M_n = 2^n - 1$ para el número compuesto $n = 6$.

82. Observe que $p = 3$ es un factor primo de $n = 6$. Determine $2^p - 1$ para $p = 3$. ¿$2^p - 1$ es un factor de $2^n - 1$?

83. Complete este enunciado: si p es un factor primo de n entonces _____ es un factor del número de Mersenne $2^n - 1$.

84. Determine $M_n = 2^n - 1$ para $n = 10$.

85. Utilice el procedimiento que se ilustró antes, para encontrar dos factores distintos de M_{10}.

86. ¿Cree que este procedimiento siempre produce factores *primos* de M_n para n compuesto? (*Una pista:* Considere $n = 22$ y su factor primo $p = 11$, y recuerde el enunciado que sigue al ejemplo 6.) Explique.

5.2 Temas selectos de la teoría de números

Números de Smith El matemático Albert Wilansky, al llamar a su cuñado, el señor Smith, se dio cuenta de una propiedad interesante respecto del número telefónico (493-7775). El número 4,937,775 es compuesto y su factorización prima es $3 \times 5 \times 5 \times 65{,}837$. Cuando se suman los dígitos del número telefónico, el resultado, 42, es igual a la suma de los dígitos de los factores primos $3 + 5 + 5 + 6 + 5 + 8 + 3 + 7 = 42$. Wilansky bautizó a este número como *número de Smith*. En 1985 se demostró que existe un número infinito de números de Smith, pero aún hay muchas preguntas sin responder acerca de ellos.

En un capítulo anterior introdujimos los números figurados, tema investigado por los pitagóricos. Este grupo de matemáticos y músicos griegos dirigido por Pitágoras mantenía sus reuniones en secreto. En esta sección examinaremos algunos otros números especiales que fascinaron a los pitagóricos y que aún siguen estudiando los matemáticos de la actualidad.

Números perfectos

Los divisores de un número natural se estudiaron en la primera sección de este capítulo. Los **divisores propios** de un número natural incluyen todos los divisores del número excepto el número mismo. Por ejemplo, los divisores propios del 8 son 1, 2 y 4. (8 *no* es divisor propio de 8.)

Números perfectos

Se dice que un número natural es **perfecto** si es igual a la suma de sus divisores propios.

¿8 es perfecto? No, ya que $1 + 2 + 4 = 7$ y $7 \neq 8$. Sucede que el número perfecto más pequeño es el 6, pues los divisores propios de 6 son 1, 2 y 3, y además

$$1 + 2 + 3 = 6.$$ 6 es perfecto.

EJEMPLO 1 Demuestre que 28 es un número perfecto.

Los divisores propios de 28 son 1, 2, 4, 7 y 14. La suma de éstos es 28:

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

Por la definición, 28 es perfecto. ■

Los números 6 y 28 son los dos números perfectos más pequeños. Los siguientes son 496 y 8128. El patrón de estos primeros cuatro números perfectos llevó a los primeros escritores a conjeturar que

1. El n-ésimo número perfecto tiene exactamente n dígitos.
2. Los números perfectos pares terminan en 6 u 8, de forma alternada.

(Los ejercicios 41 a 43 nos ayudarán a evaluar estas conjeturas.)

Aún quedan muchas preguntas sin responder acerca de los números perfectos. Euclides demostró que si $2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto y recíprocamente. Como los valores primos de $2^n - 1$ son primos de Mersenne (analizados en la sección anterior), esto significa que para cada nuevo primo de Mersenne que se descubra, de forma automática se descubre otro número perfecto. (De aquí que, al final de 2002, también había 39 números perfectos conocidos.) También se sabe que todos los números perfectos pares deben tener la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$ y se cree con firmeza que no existe número perfecto que sea impar. (Cualquier número impar tendría al menos ocho factores primos diferentes y tendría al menos 300 dígitos.) Por lo tanto, Euclides y los antiguos griegos muy probablemente identificaron la forma de todos los números perfectos.

Números deficientes y abundantes Anteriormente vimos que 8 no es perfecto, pues es mayor que la suma de sus divisores propios ($8 > 7$).

Números peculiares Se dice que un número es peculiar si es abundante sin ser igual a la suma de cualquier conjunto de sus divisores propios. Por ejemplo, 70 es peculiar pues es abundante ($1 + 2 + 5 + 7 + 10 + 14 + 35 = 74 > 70$), pero ningún conjunto de los factores 1, 2, 5, 10, 14, 35 suman 70.

Números deficientes y abundantes

Un número natural es **deficiente** si es mayor que la suma de sus divisores propios. Es **abundante** si es menor que la suma de sus divisores propios.

Con base en esta definición, un *número deficiente no tiene suficientes* divisores propios para que la suma sea igual a él mismo, mientras que un *número abundante tiene más que suficientes* divisores propios para que la suma de todos sea mayor que él mismo.

EJEMPLO 2 Decida si el número dado es deficiente o abundante.

(a) 12

Los divisores propios de 12 son 1, 2, 3, 4 y 6. La suma de éstos es 16. Como $12 < 16$, 12 es abundante.

(b) 10

Los divisores propios de 10 son 1, 2 y 5. Como $1 + 2 + 5 = 8$ y $10 > 8$, 10 es deficiente. ■

Números amigables Suponga que sumamos los divisores propios de 284:

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Su suma es 220. Ahora sume los divisores propios de 220:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Observe que la suma de los divisores propios de 220 es 284, mientras que la suma de los divisores propios de 284 es 220. A los pares de números como éstos se les llama *amigables*.

Números sociables De una extensión de la idea de los números amigables resultan los números sociables. En una cadena de números sociables, la suma de los divisores propios de cada número es el número siguiente de la cadena y la suma de los divisores propios del último número de la cadena es el primer número. He aquí una cadena de 5 eslabones de números sociables:

12,496
14,288
15,472
14,536
14,264.

El número 14,316 comienza una cadena de 28 eslabones de números sociables.

Números amigables

Los números naturales a y b son **amigables** si la suma de los divisores propios de a es b y la suma de los divisores propios de b es a.

El par más pequeño de números amigables, 220 y 284, era conocido por los pitagóricos, pero no fue sino hasta más de 1000 años después que se descubrió el siguiente par, 18,416 y 17,296. Se descubrieron muchos pares más en las décadas subsecuentes, pero en 1866 un joven italiano de 16 años, llamado Nicolo Paganini, descubrió que durante siglos ¡se había pasado por alto el par de números amigables 1184 y 1210!

Ahora, las poderosas computadoras amplían sin cesar la lista de pares de números amigables. Durante la última verificación, se conocían más de medio millón de parejas de números amigables, algunos de ellos tenían más de 5000 dígitos. Sin embargo, aún no se sabe si existe una infinidad de ellos. Por último, nadie ha encontrado una pareja de números amigables sin factores en común, pero la probabilidad de que exista un par como éste no se ha eliminado.

Conjetura de Goldbach Uno de los más famosos problemas matemáticos sin resolver es la conjetura de Goldbach. El matemático Christian Goldbach (1690-1764) conjeturó que todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos números primos. Por ejemplo, $8 = 5 + 3$ y $10 = 5 + 5$. (En muchos casos, hay diversas formas de satisfacer la conjetura. Por ejemplo, 10 puede escribirse también como $7 + 3$.) Los matemáticos han tratado, sin éxito, de probar la conjetura de Goldbach aunque se ha verificado para números hasta 4×10^{14}.



¿Un número aburrido? El matemático hindú Srinivasa Ramanujan (1887-1920) desarrolló muchas ideas de la teoría de los números. Su amigo y colaborador ocasional era G. H. Hardy, también un teórico de los números y profesor en la Universidad de Cambridge, en Inglaterra.

Hay una historia acerca de Ramanujan que ilustra su ingenio. Hardy dijo en cierta ocasión a Ramanujan que acababa de tomar un taxi con un número aburrido: 1729. Ramanujan respondió que no se trataba en absoluto de un número aburrido, pues es el número natural más chico que puede expresarse como la suma de dos cubos de dos formas distintas:

$$1^3 + 12^3 = 1729$$

y

$$9^3 + 10^3 = 1729.$$

¿Puede usted demostrar que 85 puede escribirse como la suma de dos cuadrados en dos formas diferentes?

EJEMPLO 3 Escriba cada número par como la suma de dos primos.

(a) 18

$18 = 5 + 13$. Otra forma de escribirlo es $7 + 11$. Observe que $1 + 17$ *no* es válido, ya que por definición 1 no es un número primo.

(b) 60

$60 = 7 + 53$. ¿Puede usted encontrar otras formas? ¿Por qué $3 + 57$ no es válido? ■

Números primos gemelos Los números primos que difieren por 2 se denominan **primos gemelos**. Algunos primos gemelos son 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, etc. Una de las muchas conjeturas no demostradas acerca de los números primos (la "conjetura de los primos gemelos") afirma que hay un número infinito de pares de primos gemelos. Como la conjetura de Goldbach, esto nunca ha sido demostrado. Tal vez desee verificar que hay ocho de esos pares menores que 100 utilizando la Criba de Eratóstenes de la tabla 1. A final de 2002, los primos gemelos más grandes conocidos eran $318{,}032{,}361 \cdot 2^{107{,}001} \pm 1$. Cada uno con 32,220 dígitos.

Recuerde que en la sección 5.1, durante la demostración de Euclides sobre la infinitud de primos, se utilizaron números de la forma $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots p_n + 1$, donde todas las p eran números primos. Podría parecer que cualquiera de tales números debería ser primo, pero no es así. (Vea el ejercicio 80 de la sección 5.1.) Sin embargo, esta forma con frecuencia produce primos (incluso si se reemplaza el signo de más con un signo de menos). Cuando *todos* los primos hasta p_n están incluidos, los pri-



Sophie Germain (1776-1831) estudió en la Escuela Politécnica de París, en la época en que no se aceptaban mujeres como estudiantes. Envió su obra al profesor Joseph Louis Lagrange (de quien incluimos una reseña biográfica en una nota al margen en el apéndice del Sistema Métrico) bajo el pseudónimo M. Leblanc. Al final Lagrange supo su verdadera identidad y la elogió como una joven promesa matemática. Posteriormente, Germain demostró el último teorema de Fermat para un caso especial que incluía exponentes divisibles entre cierta clase de primos, que llevan su nombre en su honor. Un **primo de Sophie Germain** es un primo impar, p, para el que $2p + 1$ también es primo. Recientemente, se han descubierto grandes números primos de Sophie Germain, a una velocidad de varios por año. A principios de 2003, el más grande conocido era $2{,}540{,}041{,}185 \cdot 2^{84{,}729} - 1$, que tiene 34,547 dígitos. *Fuente:* http://www.utm.edu/research/primes

mos resultantes se denominan **primos primoriales**. Se denotan por $p\# \pm 1$. Por ejemplo, $5\# + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ es un primo primorial. (A finales de 2002, el primo primorial más grande conocido era $392{,}113\# + 1$, un número con 169,966 dígitos.) Los primos primoriales son una fuente de apoyo para buscar primos gemelos.

EJEMPLO 4 Verifique que la fórmula primorial $p\# \pm 1$ produce pares de primos gemelos para **(a)** $p = 3$ y **(b)** $p = 5$.

(a) $3\# \pm 1 = 2 \cdot 3 \pm 1 = 6 \pm 1 = 5$ y 7 (primos gemelos)

(b) $5\# \pm 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \pm 1 = 30 \pm 1 = 29$ y 31 (primos gemelos) ■

Último teorema de Fermat En cualquier triángulo rectángulo con catetos a y b (lados cortos) e hipotenusa (lado más largo) c, se satisfará la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$. Éste es el famoso teorema de Pitágoras. Por ejemplo, para $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$, obtenemos

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$25 = 25.$$

Resulta que existe un número infinito de tripletas de números que satisfacen esta ecuación. Pero, ¿hay acaso algunas tripletas de números naturales que satisfagan la ecuación $a^n + b^n = c^n$ para número natural $n \geq 3$? Pierre de Fermat, de quien presentamos una reseña biográfica en una nota al margen de la siguiente sección, pensaba que no, y como era su costumbre, señaló en el margen de un libro, que tenía "una demostración realmente maravillosa" para esto, pero que el margen era "demasiado pequeño para contenerla". ¿Tendría Fermat realmente una demostración, o contaba con una demostración incorrecta?

Cualquiera que sea el caso, la aseveración de Fermat fue el objeto de más de 400 años de intentos de los matemáticos de proporcionar una demostración adecuada. Aunque fue verificada para muchos casos particulares (el mismo Fermat lo demostró para $n = 3$), no se encontró una demostración del caso general hasta que el matemático Andrew Wiles, de Princeton, anunció una demostración en la primavera de 1993. Aunque se descubrieron algunas fallas en su argumento, Wiles pudo, en el verano de 1994, reparar e incluso mejorar la demostración.

Probablemente, había en el mundo unos 100 matemáticos calificados para entender la demostración de Wiles. Muchos de ellos la examinaron y la aprobaron. Algunas partes se simplificaron y se mejoraron. Finalmente, ahora la comunidad matemática considera oficialmente demostrado el último teorema de Fermat.



Andrew Wiles demostró el último teorema de Fermat.

EJEMPLO 5 Uno de los teoremas demostrados por Fermat es el siguiente: *Todo número primo impar puede ser expresado como la diferencia de dos cuadrados de una sola forma.* Exprese cada uno de los siguientes primos impares como la diferencia de dos cuadrados.

(a) 3

$$3 = 4 - 1 = 2^2 - 1^2$$

(b) 7

$$7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$$ ■

PARA REFLEXIONAR

El libro *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* (1986), de David Wells, es uno de los libros más notables dentro de la teoría de números. Contiene números fascinantes y sus propiedades, algunos de los cuales se exponen aquí.

- Sólo existen tres conjuntos de tres dígitos que forman números primos en todos su posibles arreglos: {1, 1, 3}, {1, 9, 9} y {3, 3, 7}.
- Determine la suma de los cubos de los dígitos de $1^3 + 3^3 + 6^3 = 244$. Repita el proceso con los dígitos de 244:
  $2^3 + 4^3 + 4^3 = 136$.
  Estamos de regreso en donde empezamos.
- El número 635,318,657 es el número más pequeño que puede expresarse de dos formas distintas como la suma de dos cuartas potencias:
  $$635{,}318{,}657 = 59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4.$$
- El número 24,678,050 tiene una propiedad interesante:
  $$24{,}678{,}050 = 2^8 + 4^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8 + 0^8 + 5^8 + 0^8.$$
- El número 54,748 posee una propiedad similar interesante:
  $$54{,}748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5.$$
- El número 3435 tiene esta propiedad:
  $$3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5.$$

Si estos hechos despertaron su curiosidad, este libro es para usted!

Para análisis en grupo

Haga que cada estudiante de la clase escoja un número de tres dígitos que sea múltiplo de 3. Sume los cubos de sus dígitos. Repita el proceso hasta que obtenga el mismo número una y otra vez. Posteriormente, haga que los estudiantes comparen sus resultados. ¿Qué es lo interesante y curioso de este proceso?

5.2 EJERCICIOS

Basado en las lecturas de esta sección, decida si cada uno de los siguientes enunciados en los ejercicios del 1 al 10 es verdadero *o* falso.

1. Hay un número infinito de números primos.
2. Los números primos 2 y 3 son primos gemelos.
3. No existe un número perfecto entre 496 y 8128.
4. $2^n - 1$ es primo si y sólo si $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto.
5. Cualquier número primo debe ser deficiente.
6. La ecuación $17 + 51 = 68$ verifica la conjetura de Goldbach para el número 68.
7. Hay más primos de Mersenne conocidos que números perfectos conocidos.
8. El número 31 no puede ser representado como la diferencia de dos cuadrados.
9. El número $2^6(2^7 - 1)$ es perfecto.
10. Un número natural mayor que 1 será uno y solamente uno de los siguientes: perfecto, deficiente o abundante.
11. Los divisores propios de 496 son 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 y 248. Use esta información para verificar que 496 es perfecto.
12. Los divisores propios de 8128 son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032 y 4064. Emplee esta información para verificar que 8128 es perfecto.
13. Como se mencionó en el texto, cuando $2^n - 1$ es primo, $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto. Si $n = 2, 3, 5$ y 7, obtenemos los cuatro primeros números perfectos. Demuestre que $2^n - 1$ es primo para $n = 13$ y después determine la representación decimal para el quinto número perfecto.
14. En el año 2002, el número primo más grande conocido era $2^{13{,}466{,}917} - 1$. Use la fórmula del ejercicio 13 para escribir una expresión para el número perfecto generado por este número primo.
15. Se ha demostrado que la suma de *todos* los recíprocos de los divisores positivos de un número perfecto es igual a 2. Verifique esto para el número perfecto 6.

16. Considere las siguientes ecuaciones.

$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

Demuestre que una ecuación similar es válida para el tercer número perfecto, 496.

Determine si cada número es abundante *o* deficiente.

17. 36 **18.** 30 **19.** 75 **20.** 95

21. Existen cuatro números abundantes entre 1 y 25. Encuéntrelos. (*Una pista:* Todos son pares y ningún número primo es abundante.)

22. Explique por qué un número primo debe ser deficiente.

23. El primer número abundante impar es 945. Sus divisores propios son 1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 27, 35, 45, 63, 105, 135, 189 y 315. Utilice esta información para verificar que 945 es abundante.

24. Explique en sus propias palabras los términos *número perfecto, número abundante* y *número deficiente.*

25. Los números de Nicolo Paganini, 1184 y 1210 son amigables. Los divisores propios de 1184 son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296 y 592. Los divisores propios de 1210 son 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242 y 605. Utilice la definición de números amigables para demostrar que realmente son amigables.

26. Un matemático árabe del siglo IX planteó lo siguiente:

Si los tres números

$$x = 3 \cdot 2^{n-1} - 1,$$
$$y = 3 \cdot 2^{n} - 1$$

y

$$z = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

son primos y $n \geq 2$, entonces $2^n xy$ y $2^n z$ son números amigables.

(a) Use $n = 2$ y demuestre que el resultado es el par de números amigables mencionados en el análisis del texto.

(b) Use $n = 4$ para obtener otro par de números amigables.

Escriba cada uno de los siguientes números pares como la suma de dos primos. (Puede haber más de una forma de hacerlo.)

27. 14 **28.** 22 **29.** 26 **30.** 32

31. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) supuso que todo número natural impar mayor que 5 puede escribirse como la suma $a + 2b$, donde a y b son primos. Verifique esto para el número natural impar 11.

32. Una conjetura aún no demostrada dentro de la teoría de los números plantea que todo número natural múltiplo de 6 puede escribirse como la diferencia de dos primos. Verifique esto para 6, 12 y 18.

Encuentre un par de primos gemelos entre los números dados.

33. 65, 80 **34.** 85, 105 **35.** 125, 140

Aunque quizá es más conocido por su hoy famoso "último teorema", Pierre de Fermat proporcionó demostraciones de muchos otros teoremas de la teoría de números. Los ejercicios 36-40 examinan algunos de ellos.

36. Si p es primo y los números naturales a y p no tienen ningún factor común excepto el 1, entonces $a^{p-1} - 1$ es divisible entre p.

(a) Verifique esto para $p = 5$ y $a = 3$.

(b) Verifique esto para $p = 7$ y $a = 2$.

37. Todo primo impar puede expresarse como la diferencia de dos cuadrados de una sola forma.

(a) Determine esta forma única para el número primo 5.

(b) Determine esta forma única para el número primo 11.

38. Un número primo de la forma $4k + 1$ puede presentarse como la suma de dos cuadrados.

(a) El número primo 5 satisface las condiciones del teorema, con $k = 1$. Verifique este teorema para 5.

(b) Verifique este teorema para 13 (aquí, $k = 3$).

39. Sólo existe una solución en los números naturales para $a^2 + 4 = b^3$ y ésta es $a = 5$, $b = 3$. Verifique esta solución.

40. Sólo hay dos soluciones en los enteros para $a^2 + 4 = b^3$ y éstas son $a = 2$, $b = 2$ y $a = 11$, $b = 5$. Verifique estas soluciones.

Los primeros cuatro números perfectos se identificaron en el texto: 6, 28, 496 *y* 8128. *Los siguientes dos son* 33,550,336 *y* 8,589,869,056. *Utilice esta información acerca de los números perfectos para resolver los ejercicios 41 a 43.*

41. Verifique que cada uno de estos seis números perfectos terminan con 6 o 28. (De hecho, esto es cierto para todos los números perfectos pares.)

42. ¿La conjetura (1) en el texto (que el n-ésimo número perfecto tiene exactamente n dígitos) es verdadera o falsa? Explique.

43. ¿La conjetura (2) en el texto (que los números perfectos pares terminan en 6 o en 8, de manera alternada) es verdadera o falsa? Explique.

✎**44.** Si los antiguos griegos conocían la forma de todos los números perfectos, es decir $2^{n-1}(2^n - 1)$, entonces ¿por qué no descubrieron todos los que conocemos actualmente?

✎**45.** Explique por qué la forma primorial $p\# \pm 1$ no tiene como resultado un par de primos gemelos para el valor primo 2.

46. **(a)** ¿Qué par de números produce la fórmula primorial para $p = 7$?
(b) ¿Cuál de estos números es primo, si lo hay?

47. Complete de manera correcta: la fórmula primorial produce primos gemelos
A. nunca. **B.** algunas veces. **C.** siempre.

Lea la nota al margen que define un número primo de Sophie Germain, y complete esta tabla.

	p	$2p + 1$	¿$p$es un número primo de Sophie Germain?
48.	2	_____	_____
49.	3	_____	_____
50.	5	_____	_____
51.	7	_____	_____
52.	11	_____	_____
53.	13	_____	_____

Otra fuente moderna de números primos grandes es la clase de los **primos factoriales**, *aquellos de la forma* $n! \pm 1$ *para números naturales n. (n! denota a "n factorial", el producto de* todos *los números naturales hasta n, no sólo los primos como en los primos primoriales.) A finales de 2002, el mayor primo factorial era* 34,790! − 1, *que tiene* 142,891 *dígitos. Determine las entradas que faltan en esta tabla.*

	n	$n!$	$n! - 1$	$n! + 1$	¿$n! - 1$ es primo?	¿$n! + 1$ es primo?
	2	2	1	3	no	sí
54.	3	_____	_____	_____	_____	_____
55.	4	_____	_____	_____	_____	_____
56.	5	_____	_____	_____	_____	_____

✎**57.** Explique por qué la fórmula para primo factorial no da primos gemelos para $n = 2$.

Con base en la tabla anterior, complete cada uno de los enunciados siguientes con: **A.** *nunca,* **B.** *algunas veces o* **C.** *siempre. Cuando se aplica a valores particulares de n, la fórmula factorial* $n! \pm 1$ *produce*

58. no primos _____. **59.** exactamente un primo _____. **60.** primos gemelos _____.

5.3 Máximo factor común y mínimo común múltiplo

El **máximo factor común (máximo común divisor, MCD)** de un grupo de números naturales es el número natural más grande que es factor de todos los números en el grupo. Por ejemplo, 18 es el máximo común divisor (factor) de 36 y 54, ya que 18 es el número natural más grande que divide tanto a 36 como a 54. También 1 es el máximo común divisor de 7 y 18.

Los máximos comunes divisores pueden obtenerse mediante el uso de la factorización prima. Para ver cómo, encontraremos el máximo común divisor de 36 y 54. Primero escriba la factorización prima de cada número:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad \text{y} \quad 54 = 2^1 \cdot 3^3.$$

El MCD es el producto de los primos que tienen en común las factorizaciones, con cada primo elevado a la potencia indicada por el exponente *más pequeño* que aparece en cada factorización. En este caso, el primo 2 tiene al 1 como el exponente más pe-



Pierre de Fermat (hacia 1601-1665) funcionario de gobierno que nunca se interesó en las matemáticas hasta pasados los 30 años de edad, que comenzó a dedicar su tiempo libre al estudio de esta disciplina. Fue un estudiante valioso, reconocido por su trabajo sobre la teoría de los números. Otras de sus grandes contribuciones implican ciertas aplicaciones en geometría y su trabajo original sobre la probabilidad.

Desafortunadamente, gran parte de su mejor trabajo se conserva en hojas sueltas o apuntes, sin demostración, al margen de las obras que leía. A los matemáticos de generaciones subsecuentes no les ha sido fácil verificar algunos de estos resultados, aunque en general su validez no se ha puesto en duda.

queño (en $54 = 2^1 \cdot 3^3$), mientras que el primo 3 tiene a 2 como el exponente más pequeño (en $36 = 2^2 \cdot 3^2$). El máximo común divisor de 36 y 54 es

$$2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18,$$

como se enunció anteriormente. A continuación se presenta un resumen.

Determinación del máximo común divisor (método de los factores primos)

1. Escriba la factorización prima de cada número.
2. Seleccione todos los primos que tienen en común *todas* las factorizaciones, con cada primo elevado al exponente *más pequeño* que aparece en las factorizaciones.
3. Forme el producto de todos los números del paso 2; este producto es el máximo común divisor.

EJEMPLO 1 Determine el máximo común divisor de 360 y 2700.

Escriba la factorización prima de cada número:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \text{y} \quad 2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2.$$

Ahora encuentre los primos que tienen en común las factorizaciones, con cada primo que tenga como exponente el exponente *más pequeño* de los productos: 2^2, 3^2, 5. Después forme el producto de estos números.

$$\text{Máximo común divisor} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

El máximo común divisor de 360 y 2700 es 180. ■

EJEMPLO 2 Determine el máximo común divisor de los tres números 720, 1000 y 1800.

Para empezar, escriba la factorización prima de cada número:

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5, \quad 1000 = 2^3 \cdot 5^3 \quad \text{y} \quad 1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2.$$

En cada primo utilice el exponente más pequeño que tienen en común las factorizaciones:

$$\text{Máximo común divisor} = 2^3 \cdot 5 = 40.$$

(El primo 3 no es utilizado para determinar el máximo común divisor ya que el primo 3 no aparece en la factorización del 1000.) ■

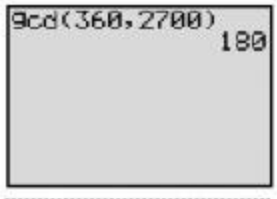
EJEMPLO 3 Determine el máximo común divisor de 80 y 63.

Comience por

$$80 = 2^4 \cdot 5 \quad \text{y} \quad 63 = 3^2 \cdot 7.$$

No existen primos en común aquí, por lo tanto el máximo común divisor = 1. El número 1 es el número más grande que dividirá tanto a 80 como a 63. ■

A dos números, como 80 y 63, con un máximo común divisor de 1 se les denomina **primos relativos**, esto es, cada uno es primo *relativo* al otro.



La calculadora ilustra que el máximo común divisor (factor) de 360 y 2700 es 180. Compare con el ejemplo 1.

Otro método para determinar el máximo común divisor implica dividir los números entre primos divisores comunes.

Determinación del máximo común divisor (método de división entre factores primos)

1. Escriba los números en una columna.
2. Divida cada uno de los números entre un primo divisor en común. Trate con el 2, después el 3, etcétera.
3. Divida los cocientes entre un primo divisor en común. Continúe hasta que ningún primo divida a todos los cocientes.
4. El producto de los primos de los pasos 2 y 3 es el máximo común divisor.

Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.



Esta pantalla demuestra el hecho de que mcd (*a*, *b*, *c*) = gcd (*a*, gcd (*b*, *c*)). Compare con el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Determine el máximo común divisor de 12, 18 y 60.

Escriba los números en una columna y divida entre 2.

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 12 & 18 & 60 \\ \hline & 6 & 9 & 30 \end{array}$$

Los números 6, 9 y 30 no son divisibles entre 2, pero sí son divisibles entre 3.

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 12 & 18 & 60 \\ 3 & 6 & 9 & 30 \\ \hline & 2 & 3 & 10 \end{array}$$

Ningún primo divide a los números 2, 3 y 10, por lo tanto el máximo común divisor de los números 12, 18 y 60 está dado por el producto de los primos de la izquierda, 2 y 3.

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 12 & 18 & 60 \\ 3 & 6 & 9 & 30 \\ \hline & 2 & 3 & 10 \end{array}$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

El máximo común divisor de 12, 18 y 60 es 6. ■

Hay incluso otro método para determinar el máximo común divisor de dos números que no requiere de la factorización prima o de dividir sucesivamente entre primos. Se conoce como **algoritmo de Euclides***, y se ilustra en el siguiente ejemplo.

*Para una demostración de que este proceso en verdad proporciona el máximo común divisor, vea *Elementary Introduction to Number Theory*, 2a. ed., de Calvin T. Long, pp. 34-35.

EJEMPLO 5 Utilice el algoritmo de Euclides para determinar el máximo divisor de 90 y 168.

Paso 1: Comience por dividir el número más grande, 168, entre el número menor, 90. Haga caso omiso del cociente, pero anote el residuo.

Paso 2: Divida el menor de los dos números entre el residuo obtenido en el paso 1. De nuevo, anote el residuo.

Paso 3: Continúe dividiendo los sucesivos residuos, tantas veces como se requiera hasta obtener un residuo de 0.

Paso 4: El *último residuo positivo* en este proceso es el máximo común divisor de 90 y 168. Se puede observar que su máximo común divisor es 6.

$$
\begin{array}{r}
1 \\
90\overline{)168} \\
\underline{90} \\
78
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1 \\
78\overline{)90} \\
\underline{78} \\
12
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
6 \\
12\overline{)78} \\
\underline{72} \\
6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2 \\
6\overline{)12} \\
\underline{12} \\
0
\end{array}
$$

Máximo común divisor

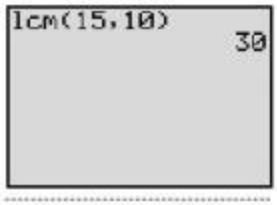
■

El algoritmo de Euclides es particularmente útil, si los dos números son difíciles de factorizar en primos. A continuación resumimos el algoritmo.

Determinación del máximo común divisor (algoritmo de Euclides)

Para determinar el máximo común divisor de dos números, divida el más grande entre el más pequeño. Anote el residuo y divida el divisor anterior entre este residuo. Continúe el proceso hasta que obtenga el residuo 0. El máximo común divisor es el último residuo positivo obtenido en este proceso.

Estrechamente relacionado con la idea del máximo común divisor está el concepto de mínimo común múltiplo. El **mínimo común múltiplo (mcm)** de un grupo de números naturales es el número natural más pequeño que es un múltiplo de todos los números del grupo. Por ejemplo, si queremos determinar el mínimo común múltiplo de 15 y 10, podemos especificar los conjuntos de múltiplos de 15 y los múltiplos de 10.



El mínimo común múltiplo de 15 y 10 es 30.

Múltiplos de 15: $\{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, \ldots\}$

Múltiplos de 10: $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, \ldots\}$

El conjunto de números naturales que son múltiplos *tanto* de 15 como de 10 forma el conjunto de los *múltiplos comunes*:

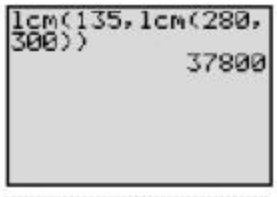
$$\{30, 60, 90, 120, \ldots\}.$$

Aunque existe un número infinito de múltiplos comunes, se observa que el *mínimo* común múltiplo es 30.

Un método similar al primero que se expuso para el máximo común divisor podría ser utilizado para determinar el mínimo común múltiplo de un grupo de números.

Determinación del mínimo común múltiplo (método de los factores primos)

1. Escriba la factorización prima de cada número.
2. Seleccione todos los primos pertenecientes a *cualquier* factorización, que estén elevados a la potencia indicada por el exponente *más grande* en cualquier factorización.
3. Forme el producto de todos los números del paso 2; este producto es el mínimo común múltiplo.



El mínimo común múltiplo de 135, 280 y 300 es 37,800. Compare con el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Determine el mínimo común múltiplo de 135, 280 y 300.

Escriba las factorizaciones primas:

$$135 = 3^3 \cdot 5, \quad 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \quad \text{y} \quad 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Forme el producto de todos los primos que aparecen en cualquiera de las factorizaciones. Como exponentes, utilice el exponente más grande de las factorizaciones.

$$\text{Mínimo común múltiplo} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 37{,}800$$

El número natural más pequeño que es divisible entre 135, 280 y 300 es 37,800 ■

El mínimo común múltiplo de un grupo de números naturales también puede determinarse dividiendo entre los factores primos. El proceso es un poco diferente de aquél para determinar el MCD.

Determinación del mínimo común múltiplo (dividiendo por medio del método de factores primos)

1. Escriba los números en un renglón.
2. Divida cada uno de los números entre un factor primo común. Intente con 2, luego con 3, y así sucesivamente.
3. Divida los cocientes entre un factor primo común. Cuando ningún primo divida a todos los cocientes, pero un primo divida a algunos de ellos, divida los que sea posible hacerlo y "baje" los cocientes que no sean divisibles. Continúe hasta ningún primo divida a dos cocientes.
4. El producto de todos los divisores primos de los pasos 2 y 3 así como todos los cocientes restantes es el mínimo común múltiplo.

EJEMPLO 7 Determine el mínimo común múltiplo de 12, 18 y 60.

Proceda como igual que en el ejemplo 4 para obtener lo siguiente.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \quad 18 \quad 60 \\ \hline 3 & 6 \quad 9 \quad 30 \\ \hline & 2 \quad 3 \quad 10 \end{array}$$

Ahora, aunque ningún primo divide a 2, 3 y 10, el primo 2 divide a 2 y a 10. Divida el 2 y el 10 y baje el 3.

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 12 & 18 & 60 \\ \hline 3 & 6 & 9 & 30 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 10 \\ \hline & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = 180$$

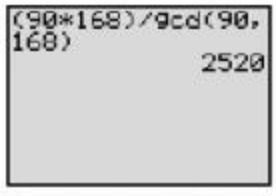
El mcm de 12, 18 y 60 es 180. ■

En cursos más avanzados se demuestra que el mínimo común múltiplo de dos números m y n puede obtenerse dividiendo su producto entre su máximo común divisor. (Este método funciona sólo para dos números, no para más de dos.)

Determinación del mínimo común múltiplo (fórmula)

El mínimo común múltiplo de m y n está dado por

$$\text{mcm} = \frac{m \cdot n}{\text{máximo común divisor de } m \text{ y } n}.$$



Esto sustenta el resultado en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Utilice la fórmula para determinar el mínimo común múltiplo de 90 y 168.

En el ejemplo 5 utilizamos el algoritmo de Euclides para determinar que el máximo común divisor de 90 y 168 es 6. Por lo tanto, la fórmula nos da

$$\text{Mínimo común múltiplo de 90 y 168} = \frac{90 \cdot 168}{6} = 2520.$$ ■

Solución de problemas

Problemas que abordan preguntas como "¿cuántos objetos habrá en cada grupo si cada grupo contiene el mismo número de objetos?" y "¿cuándo ocurrirán dos eventos al mismo tiempo?" algunas veces pueden resolverse utilizando las ideas de máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

EJEMPLO 9 El cine Rey y el cine Estrella proyectan películas en forma continua, y cada cine comienza su primera función a la 1:00 p.m. Si la película que se proyecta en el cine Rey dura 80 minutos y la película proyectada en el cine Estrella dura 2 horas, ¿a qué hora volverán a comenzar las dos películas al mismo tiempo?

Primero, convierta 2 horas en 120 minutos. La pregunta también puede reformularse como sigue: "¿cuál es el menor número de minutos que tomará para que las dos películas comiencen al mismo tiempo otra vez?" Esto es equivalente a decir "¿cuál es el mínimo común múltiplo de 80 y 120?" Utilizando cualquiera de los métodos descritos en esta sección, se puede mostrar que el mínimo común múltiplo de 80 y 120 es 240. Por lo tanto, tomará 240 minutos, o $240/60 = 4$ horas para que las películas comiencen otra vez al mismo tiempo. Al sumar 4 horas a la 1:00 p.m. encontramos que empezarán juntas otra vez a las 5:00 p.m. ■



EJEMPLO 10 Joshua Hornsby tiene 450 tarjetas de futbol americano y 840 tarjetas de béisbol. Quiere colocarlas en montones en una mesa de modo que cada montón tenga el mismo número de tarjetas y que dentro de cada montón no existan tarjetas de tipos diferentes. ¿Cuál es el número más grande de tarjetas que puede tener en cada montón?

Aquí, estamos buscando el número más grande que dividirá tanto a 450 como a 840. Esto es, por supuesto, el máximo común divisor de 450 y 840. Utilizando cualquiera de los métodos descritos en esta sección, encontramos que

Máximo común divisor de 450 y 840 = 30.

Por lo tanto, el número más grande de tarjetas que puede tener en cada montón es de 30. ■

5.3 EJERCICIOS

Decida si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero *o* falso.

1. Dos números naturales pares no pueden ser primos relativos.
2. Dos números primos diferentes deben ser primos relativos.
3. Si p es un número primo, entonces el máximo común divisor de p y p^2 es p.
4. Si p es un número primo, entonces el mínimo común múltiplo de p y p^2 es p^3.
5. No existe número primo p tal que el máximo común divisor de p y 2 sea 2.
6. El conjunto de todos los múltiplos comunes de dos números naturales dados es finito.
7. Dos números naturales deben tener por lo menos un factor común.
8. El mínimo común múltiplo de dos primos diferentes es su producto.
9. Dos números compuestos pueden ser primos relativos.
10. El conjunto de todos los factores comunes de dos números naturales dados es finito.

Utilice el método de los factores primos para determinar el máximo común divisor de cada grupo de números.

11. 70 y 120 **12.** 180 y 300 **13.** 480 y 1800

14. 168 y 504 **15.** 28, 35 y 56 **16.** 252, 308 y 504

Utilice el método de división entre factores primos para determinar el máximo común divisor de cada grupo de números.

17. 60 y 84 **18.** 130 y 455 **19.** 310 y 460

20. 234 y 470 **21.** 12, 18 y 30 **22.** 450, 1500 y 432

Utilice el algoritmo de Euclides para determinar el máximo común divisor de cada grupo de números.

23. 36 y 60 **24.** 25 y 70 **25.** 84 y 180

26. 72 y 120 **27.** 210 y 560 **28.** 150 y 480

29. Explique con sus propias palabras cómo determinar el máximo común divisor de un grupo de números.

30. Explique con sus propias palabras cómo determinar el mínimo común múltiplo de un grupo de números.

Utilice el método de los factores primos para determinar el mínimo común múltiplo de cada grupo de números.

31. 24 y 30 **32.** 12 y 32 **33.** 56 y 96

34. 28 y 70 **35.** 30, 40 y 70 **36.** 24, 36 y 48

Utilice el método de dividir entre factores primos para determinar el mínimo común múltiplo de cada grupo de números.

37. 24 y 32 **38.** 35 y 56 **39.** 45 y 75

40. 48, 54 y 60 **41.** 16, 120 y 216 **42.** 210, 385 y 2310

Utilice la fórmula dada en el texto y los resultados de los ejercicios 23 a 28 para determinar el mínimo común múltiplo de cada grupo de números.

43. 36 y 60 **44.** 25 y 70

45. 84 y 180 **46.** 72 y 120

47. 210 y 560 **48.** 150 y 480

49. *Si p, q y r* son primos diferentes, y *a, b y c* son números naturales tales que $a > b > c$,
- **(a)** ¿cuál es el máximo común divisor de $p^a q^c r^b$ y $p^b q^a r^c$?
- **(b)** ¿cuál es el mínimo común múltiplo de $p^b q^a$, $q^b r^c$ y $p^a r^b$?

50. Determine **(a)** el máximo común divisor y **(b)** el mínimo común múltiplo de $2^{31} \cdot 5^{17} \cdot 7^{21}$ y $2^{34} \cdot 5^{22} \cdot 7^{13}$. Escriba sus respuestas en forma de factorización prima.

Es posible ampliar el algoritmo de Euclides con el objeto de determinar el máximo común divisor de más de dos números. Por ejemplo, si nosotros deseamos determinar el máximo común divisor de 150, 210 *y* 240, *podemos utilizar primero el algoritmo para determinar el máximo común divisor de dos de éstos (digamos, por ejemplo,* 150 *y* 210*). Luego determinamos el máximo común divisor de ese resultado y el tercer número,* 240. *El resultado final es el máximo común divisor del grupo de números originales.*

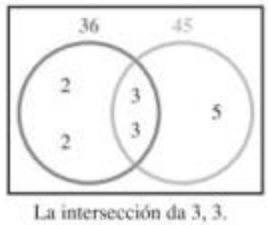
Utilice el algoritmo de Euclides como se describió arriba para determinar el máximo común divisor de cada grupo de números.

51. 150, 210 y 240 **52.** 12, 75 y 120

53. 90, 105 y 315 **54.** 48, 315 y 450

55. 144, 180 y 192 **56.** 180, 210 y 630

Si permitimos repeticiones de factores primos, los diagramas de Venn (capítulo 2) pueden utilizarse para determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números. Por ejemplo, considere $36 = 2^2 \cdot 3^2$ *y* $45 = 3^2 \cdot 5$. *Su máximo común divisor es* $3^2 = 9$, *y su mínimo común múltiplo es* $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.



La intersección da 3, 3.
La unión da 2, 2, 3, 3, 5.

Utilice este método para determinar **(a)** *el máximo común divisor y* **(b)** *el mínimo común múltiplo de la pareja de números dada.*

57. 12 y 18 **58.** 27 y 36 **59.** 54 y 72

60. Suponga que el mínimo común múltiplo de *p* y *q* es *q*. ¿Qué podemos decir acerca de *p* y *q*?

61. Suponga que el mínimo común múltiplo de *p* y *q* es *pq*. ¿Qué podemos decir acerca de *p* y *q*?

62. Suponga que el máximo común divisor de *p* y *q* es *p*. ¿Qué podemos decir acerca de *p* y *q*?

63. Recuerde algunas de sus primeras experiencias con las matemáticas (por ejemplo, en el salón de clases de la primaria). ¿Qué tema que implica el uso de fracciones requiere de la utilización del mínimo común múltiplo? Proporcione un ejemplo.

64. Recuerde algunas de sus experiencias con el álgebra elemental. ¿Qué temas requieren del uso del máximo común divisor? Proporcione un ejemplo.

Consulte los ejemplos 9 y 10 para resolver los siguientes problemas.

65. ***Inspección de calculadoras*** Collen Jones y Nancy Barre trabajan en una línea de ensamblaje; supervisan calculadoras electrónicas. Collen se ocupa de las partes electrónicas de cada decimosexta calculadora, mientras que Nancy se encarga del armado de cada trigésima sexta calculadora. Si las dos comienzan a trabajar al mismo tiempo, ¿cuál será la primera calculadora que ambas inspeccionen?

66. ***Noche de descanso para guardias de seguridad*** Paul Crockett y Cindy Herring trabajan como guardias de seguridad en una editorial; Paul tiene descanso cada seis noches y Cindy descansa cada 10. Si los dos descansaron el 1 de julio, ¿cuál será la próxima noche en la que ambos descansos coincidirán?

67. ***Monedas agrupadas*** Sheila Abbruzzo tiene 240 monedas de 1 centavo y 288 monedas de 5 centavos. Quiere colocarlas en montones de forma que cada montón tenga el mismo número de monedas y que cada uno contenga solamente monedas de una misma denominación. ¿Cuál es el número más grande de monedas que puede colocar en cada montón?

68. ***Carrera de bicicletas*** Kathryn Campbell y Tami Dreyfus participan en una competencia de bicicletas dentro de una pista circular. Si comienzan en el mismo lugar y avanzan en la misma dirección, y Kathryn completa una vuelta cada 40 segundos, mientras que Tami completa la vuelta cada 45 segundos, ¿cuánto tiempo pasará antes de que ambas alcancen de nuevo el punto de salida simultáneamente?

69. ***Venta de libros*** John Cross vendió algunos libros a 24 dólares cada uno y tuvo suficiente dinero para comprar unos boletos para un concierto a 50 dólares cada uno. Se quedó sin dinero después de comprarlos. ¿Cuál es la cantidad mínima de dinero que pudo haber ganado al vender los libros? ¿Cuál es el número mínimo de libros que pudo haber vendido?

70. ***Corte de madera*** Jill Bos tiene algunas tablas de 2 por 4 pulgadas y de diferentes largos. Algunas son de 60 pulgadas de largo y otras son de 72. Desea cortarlas a fin de obtener piezas de igual longitud. ¿Cuál es la longitud mayor de piezas que puede cortar sin desperdiciar ningún pedazo?

5.4 Aritmética del reloj y sistemas modulares



FIGURA 1



FIGURA 2



FIGURA 3



FIGURA 4

Aritmética del reloj La introducción del capítulo 4 describió un "sistema matemático" como 1) un conjunto de elementos, junto con 2) una o más operaciones definidas en dichos elementos y 3) una o más relaciones para comparar esos elementos. Ahora consideramos el *sistema del reloj de 12 horas*, está basado en la carátula de un reloj ordinario, con la diferencia de que el 12 es reemplazado por el 0 y se excluye el minutero. Vea la figura 1.

La carátula del reloj da lugar al conjunto finito {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}. Como operación para este sistema del reloj, defina la suma como sigue: sume desplazando la manecilla de las horas en el sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, para sumar 5 y 2 en un reloj, primero mueva la manecilla 2 horas más en el sentido de las manecillas del reloj. La manecilla se detiene en el 7, por lo tanto,

$$5 + 2 = 7.$$

Este resultado concuerda con la suma tradicional. Sin embargo, la suma de dos números del sistema del reloj de 12 horas no siempre es lo que se esperaría, como muestran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Determine cada suma en aritmética del reloj.

(a) $8 + 9$

Mueva la manecilla de las horas al 8, como en la figura 3. Luego avance la manecilla en sentido de las manecillas del reloj 9 horas más. Se detiene en el 5, por lo que

$$8 + 9 = 5.$$

(b) $11 + 3$

Proceda como se muestra en la figura 4. Verifique que

$$11 + 3 = 2.$$ ■

Dado que existe una infinidad de números enteros no negativos, no es posible escribir una tabla completa de sumas para ese conjunto. Una tabla como ésa, para mostrar la suma de cada posible par de números enteros no negativos, tendría un número infinito de renglones y columnas, lo que imposibilitaría su construcción.

Por otra parte, el sistema del reloj sólo utiliza los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11. Una tabla de todas las posibles sumas para este sistema requiere de sólo 12 renglones y 12 columnas. La **tabla de adición** para el reloj de 12 horas se muestra en la tabla 5. Puesto que el sistema de 12 horas está constituido por un conjunto finito, se llama **sistema matemático finito**.

TABLA 5 Suma en el reloj de 12 horas

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Tras varios percances consecuencia de serios desastres marítimos vinculados a dificultades de la navegación, varios gobiernos europeos ofrecieron premios por un método efectivo para determinar la longitud. El premio mayor fue de 20,000 libras (equivalentes a varios millones de dólares de la actualidad) ofrecido por el Parlamento Británico en el Acta de la Longitud de 1714. Mientras que afamados científicos, académicos y políticos buscaban una respuesta en las estrellas, John Harrison, un relojero, emprendió la tarea de construir un reloj que pudiera mantener su precisión en el mar. Lo que resultó ser la clave, al final, el cronómetro de Harrison ganó el premio.

Para conocer una versión fascinante de este drama, así como la lucha que sostuvo Harrison para cobrar su premio monetario al gobierno, vea el libro *The Illustrated Longitude* de Dava Sobel y William J. H. Andrewes

EJEMPLO 2 Utilice la tabla de la adición del reloj de 12 horas para determinar cada suma.

(a) $7 + 11$

Localice el número 7 en el lado izquierdo de la tabla y el 11 en la parte superior. La intersección del renglón encabezado por el 7 y la columna encabezada por el 11 da el número 6. De esta forma, $7 + 11 = 6$.

(b) También de la tabla, $11 + 1 = 0$. ■

Hasta ahora, el sistema del reloj está compuesto por el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, junto con la operación de adición en un reloj. Ahora comprobaremos si el sistema tiene las propiedades de clausura, *conmutativa, asociativa, existencia de identidad* y *de inversos*, como se describió en la sección 4.4.

La tabla 5 muestra que la suma de dos números de la carátula de un reloj siempre es un número de la misma carátula. Esto es, si a y b son dos números cualquiera del reloj en el conjunto del sistema, entonces $a + b$ está también en el conjunto del sistema. Esta propiedad se llama **de clausura** para la suma en un reloj. (El conjunto del sistema se dice que es *cerrado* bajo la suma.)

Observe también que, en este sistema, $5 + 9$ y $9 + 5$ ambos dan 2. Como también $7 + 11$ y $11 + 7$ ambos dan 6. El orden de los elementos sumados no parece ser de importancia. De hecho, puede ver en la tabla 5 que la parte de la tabla *por arriba* de la línea diagonal en negritas es una imagen de espejo de la parte de *abajo* de la diagonal. Esto muestra que, para cualesquiera números del reloj a y b, $a + b = b + a$. El sistema tiene la **propiedad conmutativa**.

La siguiente pregunta es: cuando tres elementos se combinan en un orden dado, digamos $a + b + c$, ¿importa si primero se asocian el primero y el segundo elemento o si primero se asocian el segundo y el tercero? En otras palabras, ¿es cierto que, para cualesquiera a, b y c en el sistema $(a + b) + c = a + (b + c)$?

EJEMPLO 3 ¿Es asociativa la adición en el reloj de 12 horas?

Implicaría mucho trabajo demostrar que la relación requerida *siempre* se cumple. Pero unos cuantos ejemplos deberán ya sea rechazarla (por medio de un *contraejemplo*: un caso donde la relación no se cumple), o hacerla aceptable, al menos. Al usar los números del reloj 4, 5 y 9, vemos que

$$(4 + 5) + 9 = 9 + 9 \qquad 4 + (5 + 9) = 4 + 2$$
$$= 6 \qquad = 6.$$

De esta forma, $(4 + 5) + 9 = 4 + (5 + 9)$. Intente otro ejemplo:

$$(7 + 6) + 3 = 1 + 3 \qquad 7 + (6 + 3) = 7 + 9$$
$$= 4 \qquad = 4.$$

Así que, $(7 + 6) + 3 = 7 + (6 + 3)$. Cualquier otro ejemplo que se intente también funcionará. La suma en el reloj de 12 horas tiene la **propiedad asociativa**. ■

La siguiente pregunta es si la carátula del reloj tiene algún elemento (número) que, cuando se combina con cualquier otro elemento, produce el mismo elemento. Tal elemento (llámele e), debe satisfacer $a + e = a$ y $e + a = a$ para cualquier elemento a del sistema. Observe en la tabla 5 que $4 + 0 = 0 + 4 = 4$, $6 + 0 = 0 + 6 = 6$, y así sucesivamente. El número 0 es el *elemento identidad*. El sistema tiene la **propiedad de la identidad**.

Generalmente, si un sistema finito tiene un elemento identidad e, puede localizarse de forma fácil en la tabla de operaciones. Busque en el cuerpo de la tabla 5 una columna que sea idéntica a la primera columna del lado izquierdo de la tabla. Como



FIGURA 5

la columna bajo el 0 cumple con este requisito, $a + 0 = a$ se cumple para todos los elementos a del sistema. De este modo, 0 *posiblemente* es la identidad. Ahora, localice el 0 al lado izquierdo de la tabla. Como el renglón correspondiente es idéntico al renglón de la parte superior de la tabla, $0 + a = a$ también se cumple para todos los elementos a, lo cual es el otro requisito de un elemento identidad. Por lo tanto, 0 es *realmente* la identidad.

La sustracción puede realizarse sobre un reloj de 12 horas. La sustracción puede interpretarse sobre la carátula del reloj mediante un movimiento que siga el sentido opuesto al del reloj. Por ejemplo, para realizar la sustracción $2 - 5$, comience en el 2 y muévase 5 horas en sentido opuesto a las manecillas del reloj, terminado en el 9, como se muestra en la figura 5. Por consiguiente, en este sistema,

$$2 - 5 = 9.$$

En nuestro sistema usual, la sustracción puede ser verificada mediante la suma, y éste es también el caso en la aritmética del reloj. Para verificar que $2 - 5 = 9$, simplemente sume $9 + 5$. El resultado en la carátula del reloj es 2, lo cual verifica la precisión de esta sustracción.

El *inverso aditivo*, $-a$, de un elemento a en la aritmética del reloj, es aquel elemento que satisface la siguiente proposición: $a + (-a) = 0$ y $(-a) + a = 0$. El siguiente ejemplo examina esta idea.

EJEMPLO 4 Determine el inverso aditivo de 5 en la aritmética del reloj.

El inverso aditivo para el número 5 del reloj es un número x tal que

$$5 + x = 0.$$

El ir del 5 al 0 en la carátula del reloj requiere de 7 horas más, entonces

$$5 + 7 = 0.$$

Esto significa que el 7 es el inverso aditivo del 5. ■

El método utilizado en el ejemplo 4 puede servir para verificar que *todo* elemento del sistema tiene un inverso aditivo (también dentro del sistema). Así que el sistema tiene la **propiedad del inverso**.

Otra forma más fácil para verificar la propiedad del inverso, una vez que se tiene la tabla, es asegurarse de que el elemento identidad aparezca una sola vez en cada renglón y que el par de elementos que lo produce también lo produzca en el orden opuesto. (Esta última condición es automáticamente cierta, si la propiedad conmutativa se cumple para el sistema.) Por ejemplo, observe que en la tabla 5 el renglón 3 contiene un 0, debajo del 9, por lo que $3 + 9 = 0$ y que el renglón 9 contiene un 0, debajo del 3, por lo que también $9 + 3 = 0$. Por consiguiente, 3 y 9 son inversos.

La siguiente tabla lista los elementos y sus inversos aditivos. Note que un elemento, el 6, es su propio inverso aditivo.

Valor a en el reloj	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Inverso aditivo $-a$	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Utilizando el símbolo del inverso aditivo, podemos decir que en la aritmética del reloj,

$$-5 = 7, \qquad -11 = 1, \qquad -10 = 2,$$

y así sucesivamente.

Ahora hemos visto que el sistema del reloj de 12 horas, con la suma, tiene las cinco propiedades potenciales de un sistema matemático con una sola operación, como



Reloj de ajedrez El reloj doble se utiliza para medir el tiempo en los juegos de ajedrez, *backgammon* y *scrabble*. Al presionar un botón, uno de los relojes se detiene y, de manera simultánea, el otro comienza. Cuando el tiempo permitido para el jugador ha terminado, éste perderá si no ha realizado el número de movimientos requeridos.

Tanto las matemáticas y como el ajedrez implican relaciones estructuradas y demandan un pensamiento lógico. Un jugador de ajedrez puede depender más de la agudeza psicológica y del conocimiento del oponente que de los componentes matemáticos del juego.

Emanuel Lasker logró ser un maestro en ambos campos. Es reconocido como el campeón mundial de ajedrez durante 27 años, hasta 1921. También fue famoso en los círculos matemáticos por su trabajo acerca de la teoría de los ideales primos, analogías algebraicas de los números primos. Un resultado importante, el teorema de Lasker-Noether lleva su nombre junto con el de Emmy Noether, quien amplió el trabajo de Lasker. El padre de Emmy fue quien dirigió la tesis doctoral de Lasker.

se estudió en la sección 4.4. También pueden introducirse otras operaciones en el sistema aritmético del reloj. Ahora que se han estudiado los inversos aditivos, podemos dar una definición formal de la sustracción. Observe que la definición es la misma que para la sustracción ordinaria de los enteros.

Sustracción en un reloj

Si a y b son elementos en la aritmética del reloj, entonces la **diferencia**, $\boldsymbol{a - b}$, está definida como

$$\boldsymbol{a - b = a + (-b)}.$$

EJEMPLO 5 Determine cada una de las siguientes diferencias.

(a) $8 - 5 = 8 + (-5)$ Utilice la definición de sustracción.

$= 8 + 7$ El inverso aditivo de 5 es 7, de la tabla de inversos.

$8 - 5 = 3$

Este resultado concuerda con la aritmética tradicional. Verifique sumando 5 y 3; la suma es igual a 8.

(b) $6 - 11 = 6 + (-11)$

$= 6 + 1$

$6 - 11 = 7$ ■

Los números del reloj también pueden multiplicarse. Por ejemplo, determine el producto 5×4, sumando 4 un total de 5 veces:

$$5 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 8.$$

EJEMPLO 6 Determine cada producto, usando la aritmética del reloj.

(a) $6 \times 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 6$

(b) $3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 0$

(c) $6 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

(d) $0 \times 8 = 0$ ■

Algunas propiedades de los sistemas numéricos del reloj de 12 horas con la operación de la multiplicación serán estudiadas en los ejercicios 6 al 8.

Sistemas modulares Ahora extenderemos las ideas de la aritmética del reloj a los **sistemas modulares** en general. Recuerde que la aritmética del reloj de 12 horas estaba constituida de forma tal que las respuestas eran siempre números enteros positivos menores que 12. Por ejemplo, $8 + 6 = 2$. La suma tradicional, $8 + 6 = 14$, refleja el hecho de que mover la manecilla del reloj 8 horas hacia delante, desde el 0 y después otras 6 horas hacia adelante, equivale a moverla hacia adelante 14 horas en total. Pero, dado que la posición final de las manecillas del reloj es en el 2, vemos que 14 y 2 son, en cierto sentido, equivalentes. Más formalmente, decimos que 14 y 2 son **congruentes módulo** 12 (o **congruente mod** 12), lo cual se escribe así:

$$14 \equiv 2 \pmod{12}$$ (El signo $\equiv$ indica congruencia.)

Observando el movimiento de la manecilla del reloj, también puede verse que, por ejemplo,

$$26 \equiv 2 \pmod{12}, \qquad 38 \equiv 2 \pmod{12}, \qquad \text{y así sucesivamente.}$$

En cada caso, la congruencia es cierta, porque la diferencia de dos números congruentes es un múltiplo de 12:

$$14 - 2 = 12 = 1 \times 12, \quad 26 - 2 = 24 = 2 \times 12, \quad 38 - 2 = 36 = 3 \times 12.$$

Esto sugiere la siguiente definición.

Congruencia módulo m

Los enteros a y b son **congruentes módulo m** (donde m es un número mayor que 1 llamado **módulo**) si, y sólo si la diferencia $a - b$ es divisible entre m. Simbólicamente, esta congruencia se escribe

$$\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}.$$

Como el ser divisible entre m es lo mismo que ser un múltiplo de m, podemos decir que

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ si, y sólo si } a - b = km \text{ para algún entero } k.$$

EJEMPLO 7 Decida si cada proposición es *verdadera* o *falsa*.

(a) $16 \equiv 10 \pmod{2}$

La diferencia $16 - 10 = 6$ es divisible entre 2, por lo que $16 \equiv 10 \pmod{2}$ es verdadera.

(b) $49 \equiv 32 \pmod{5}$

Falso, pues $49 - 32 = 17$, que no es divisible entre 5.

(c) $30 \equiv 345 \pmod{7}$

Verdadera, pues $30 - 345 = -315$, que es divisible entre 7. (No importa, si indicamos $30 - 345$ o $345 - 30$.) ■

Existe otro método para determinar si dos números, a y b, son congruentes módulo m.

Criterio de congruencia

$a \equiv b \pmod{m}$ si, y sólo si se obtiene el mismo residuo al dividir a y b entre m.

Por ejemplo, sabemos que $27 \equiv 9 \pmod{6}$, porque $27 - 9 = 18$, que es divisible entre 6. Ahora, si 27 se divide entre 6, el cociente es igual a 4 y el residuo es 3. También, si 9 se divide entre 6, el cociente es 1 y el residuo es 3. De acuerdo con el criterio anterior, $27 \equiv 9 \pmod{6}$ ya que el residuo es el mismo en cada caso.

La adición, sustracción y multiplicación pueden realizarse en cualquier sistema modular, como con los números del reloj. Dado que las respuestas finales deberían ser números enteros positivos menores que el módulo, podemos primero determinar una respuesta mediante la aritmética ordinaria. Después, siempre y cuando la res-

puesta no sea negativa, simplemente divídalo entre módulo y conserve el residuo. Esto produce el número entero no negativo más pequeño que es congruente (módulo m) para la respuesta común.

EJEMPLO 8 Determine cada una de las siguientes sumas, diferencias y productos.

(a) $(9 + 14) \pmod 3$

Primero sume 9 y 14 para obtener 23. Luego divida 23 entre 3. El residuo es 2, por lo tanto, $23 \equiv 2 \pmod 3$ y

$$(9 + 14) \equiv 2 \pmod 3.$$

(b) $(27 - 5) \pmod 6$

$27 - 5 = 22$. Divida 22 entre 6, obteniendo 4 como residuo:

$$(27 - 5) \equiv 4 \pmod 6.$$

(c) $(50 + 34) \pmod 7$

$50 + 34 = 84$. Cuando 84 es dividido entre 7, se obtiene un residuo de 0:

$$(50 + 34) \equiv 0 \pmod 7.$$

(d) $(8 \times 9) \pmod{10}$

Como $8 \times 9 = 72$ y 72 deja un residuo de 2 cuando se divide entre 10,

$$(8 \times 9) \equiv 2 \pmod{10}.$$

(e) $(12 \times 10) \pmod 5$

$$(12 \times 10) = 120 \equiv 0 \pmod 5.$$ ■

Solución de problemas

Los sistemas modulares a menudo puede aplicarse a preguntas que incluyan cambios cíclicos. Por ejemplo, nuestro método de dividir el tiempo en semanas provoca que los días se repitan cíclicamente a través de un patrón de 7. Suponga que hoy es domingo y queremos saber qué día de la semana será dentro de 45 días, a partir de hoy. Como no nos importa cuántas semanas pasarán entre hoy y entonces, podemos descartar el número más grande de semanas que hay en 45 días y conservar el residuo. (Estamos determinando el número entero no negativo más pequeño que es congruente con el 45 módulo 7.) Al dividir 45 entre 7 deja un residuo de 3; por lo tanto, el día deseado es el tercero después del domingo, o sea, el *miércoles*.

EJEMPLO 9 Si hoy es jueves 12 de noviembre y el año *próximo* es año bisiesto, ¿qué día de la semana será dentro de un año?

Aquí se puede aplicar un sistema módulo 7, pero necesitamos saber el número de días entre hoy y un año, a partir de hoy. La fecha de hoy, 12 de noviembre, no tiene importancia excepto porque nos indica que estamos más próximos al fin de año que el final del mes de febrero y por consiguiente, el año próximo (a partir de hoy) tendrá 366 días. (Esto no sería así si hoy fuera, digamos, 12 de enero.) Ahora, dividiendo 366 entre 7 da como resultado 52, con un residuo de 2. Nuestra respuesta es dos días después del jueves. Esto es, en un año, a partir del día de hoy, será sábado. ■

Solución de problemas

Un sistema modular (mod m) sólo permite un conjunto fijo de valores para los residuos, 0, 1, 2, . . . , $m - 1$. Un enfoque práctico para resolver ecuaciones modulares, al menos cuando m es razonablemente pequeña, es el de tratar tan sólo con todos estos enteros. Para cada solución que se encuentre de esta manera, se pueden encontrar otras sumándole múltiplos del módulo.

EJEMPLO 10 Resuelva $(3 + x) \equiv 5 \pmod 7$.

En un sistema módulo 7, cualquier entero será congruente con uno de los enteros 0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Entonces, la ecuación $(3 + x) \equiv 5 \pmod 7$ puede resolverse intentando cada uno de los enteros como reemplazo para x.

$x = 0$: ¿Es verdad que $(3 + 0) \equiv 5 \pmod 7$? No
$x = 1$: ¿Es verdad que $(3 + 1) \equiv 5 \pmod 7$? No
$x = 2$: ¿Es verdad que $(3 + 2) \equiv 5 \pmod 7$? Sí

Intente $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$ y $x = 6$ para ver que ninguno de ellos funciona. De los enteros del 0 al 6, sólo el 2 es una solución de la ecuación $(3 + x) \equiv 5 \pmod 7$.

Como 2 es una solución, determine otras soluciones a esta ecuación módulo 7 sumando 7 de forma repetida:

$2 + 7 = 9$, $9 + 7 = 16$, $16 + 7 = 23$, y así sucesivamente.

El conjunto de todas las soluciones positivas de $(3 + x) \equiv 5 \pmod 7$ es

$$\{2, 9, 16, 23, 30, 37, \ldots\}.$$ ■

EJEMPLO 11 Resuelva la ecuación $5x \equiv 4 \pmod 9$.

Debido a que el módulo es 9, intente 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8:

¿Es verdad que $5 \times 0 \equiv 4 \pmod 9$? No
¿Es verdad que $5 \times 1 \equiv 4 \pmod 9$? No

Continúe intentando números. Debe encontrar que ninguno funciona excepto $x = 8$:

$$5 \times 8 = 40 \equiv 4 \pmod 9.$$

El conjunto de todas las soluciones positivas de la ecuación $5x \equiv 4 \pmod 9$ es

$$\{8, 8 + 9, 8 + 9 + 9, 8 + 9 + 9 + 9, \ldots\} \text{ o}$$
$$\{8, 17, 26, 35, 44, 53, \ldots\}.$$ ■

EJEMPLO 12 Resuelva la ecuación $6x \equiv 3 \pmod 8$.

Intente los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Debe encontrar que ninguno funciona. Por lo tanto, la ecuación $6x \equiv 3 \pmod 8$ no tiene solución alguna. Escriba el conjunto de todas las soluciones como el conjunto vacío, $\emptyset$.

Este resultado es razonable debido a que $6x$ siempre será par, independientemente de qué número entero positivo se utilice para x. Como $6x$ es par y 3 es impar, la diferencia $6x - 3$ será impar; por lo tanto, no es divisible entre 8. ■

EJEMPLO 13 Resuelva $8x \equiv 8 \pmod 8$.

Intente con los enteros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 muestre que *cualquier* entero funcionará. El conjunto solución es $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ■

Una ecuación como $8x \equiv 8 \pmod 8$ en el ejemplo 13 que es cierta para todos los valores de la variable (x, y, etc.) se llama **identidad**. Otros ejemplos de identidades (en el álgebra ordinaria) incluye $2x + 3x = 5x$ y $y^2 \cdot y^3 = y^5$.

Algunos problemas puede resolverse al escribir dos o más ecuaciones modulares y encontrar sus soluciones comunes. El ejemplo siguiente ilustra el proceso.

EJEMPLO 14 Julio quiere arreglar su colección de CD en grupos del mismo tamaño, pero después de tratar de hacer grupos de 4, grupos de 5 y grupos de 6, se da cuenta de que siempre le queda un disco fuera. Suponiendo que Julio tiene más de un CD, ¿cuál es el número mínimo posible de discos en su colección?

La información dada nos conduce a tres ecuaciones modulares,

$$x \equiv 1 \pmod 4, \quad x \equiv 1 \pmod 5, \quad x \equiv 1 \pmod 6,$$

cuyos conjuntos de soluciones positivas son, respectivamente,

$$\{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 53, 57, 61, 65, 69, \ldots\},$$
$$\{1, 6, 11, 16, 21, 31, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, \ldots\} \text{ y}$$
$$\{1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, \ldots\}.$$

La solución más pequeña común, mayor que 1, es 61; por lo tanto, el número de discos en la colección debe ser 61. ■

EJEMPLO 15 Un contratista ordena materiales para dar los acabados a un cuarto rectangular de 17 pies por 45 pies. Los paneles vienen en anchos de 4 pies. Muestre que, una vez que se aplican los paneles completos, las cuatro paredes requerirán tiras parciales adicionales del mismo ancho.

El ancho de cualquier tira necesaria será el residuo cuando la longitud de la pared se divida entre 4 (el ancho de cada panel). En términos de congruencia, debemos mostrar que $17 \equiv 45 \pmod 4$. Por el criterio dado anteriormente, vemos que esto es cierto, ya que tanto 17 como 45 dan el mismo residuo (a saber, 1) cuando se dividen entre 4. Una tira de 1 pie se requerirá para cada pared. (En este caso, de un solo panel, se pueden cortar cuatro tiras de 1 pie, de modo que no haya desperdicio.) ■

PARA REFLEXIONAR

Un truco con la baraja

Numerosos "trucos" con la baraja que han existido a lo largo de muchos años no son en realidad trucos, sino que están basados en propiedades matemáticas, que permiten que cualquier persona los ponga en práctica, sin ningún tipo de habilidad mágica. Uno de ellos está basado en la aritmética módulo 14.

En este truco, el palo de las barajas no importa. Cada baraja tiene un valor numérico: 1 para el as, 2 para el dos, ..., 11 para la sota, 12 para la reina y 13 para el rey. Se mezcla la baraja y se le da a un espectador, a quien se le indica que las coloque boca arriba en una mesa y que siga el procedimiento descrito: se saca una carta y se coloca a un lado volteada hacia arriba (la llamaremos la carta "inicial"). La carta inicial estará en la parte inferior del monte o grupo. A fin de construir un grupo, observe el valor de la carta inicial, y añada cartas a la parte superior del grupo hasta que contabilice 13. Por ejemplo, si la carta inicial es un seis, el grupo tendrá siete cartas encima de ella, si es una sota, agrega dos cartas y así sucesivamente.

(continúa)

Cuando se completa el primer grupo, se quita y se pone volteada hacia abajo. La siguiente carta se convierte en la carta inicial del siguiente grupo y el proceso se repite. Esto continúa hasta que se hayan utilizado todas las cartas o hasta que no haya cartas suficientes para completar el último grupo. Cualesquiera cartas que hayan sobrado se colocan a un lado para uso posterior. Nos referimos a ellas como el "sobrante".

El ejecutante, entonces pide que un espectador seleccione tres grupos al azar. Los grupos restantes se agregan al sobrante. Luego, se le indica al espectador que voltee cualesquiera de las dos cartas de la parte superior de los grupos. El ejecutante, entonces, puede determinar el valor de la tercera carta superior.

El secreto del truco es que el ejecutante suma los valores de las dos cartas que fueron volteadas, y le suma 10 a esta suma. El ejecutante entonces cuenta este número de cartas del sobrante. El número de cartas que quedan en el sobrante es el valor de la tercera carta superior!

Para análisis en grupo

1. Consiga un mazo de cartas y realice el "truco" como se describió anteriormente (al igual que muchas actividades, encontrará que hacerlo es más sencillo que describirlo). ¿Funciona?
2. Explique por qué este procedimiento funciona (si quiere ver cómo algunos lo han explicado con ayuda de la aritmética módulo 14 vea "An Old Card Trick Revisited", de Barry C. Felps, en el número de diciembre de 1976, de *The Mathematics Teacher*).

5.4 EJERCICIOS

Determine cada una de las siguientes diferencias en un reloj de 12 horas.

1. $8 - 3$ **2.** $4 - 9$

3. $2 - 8$ **4.** $0 - 3$

5. Complete la tabla de multiplicación para el reloj de 12 horas que se encuentra a continuación. Puede utilizar sumas repetidas y la tabla de la suma (por ejemplo, $3 \times 7) = 7 + 7 + 7 = 2 + 7 = 9$) o utilice las técnicas de multiplicación módulo 12, como en el ejemplo 8, incisos (d) y (e).

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10		2	4		8	
3	0	3	6	9	0	3	6			3	6	
4	0	4	8			8		4			4	8
5	0	5	10	3	8		6	11	4			
6	0	6	0		0	6	0	6		6		6
7	0	7	2	9				1			10	
8	0	8	4	0				8	4		8	4
9	0	9			0		6		0			
10	0	10	8			2						2
11	0	11										1

Consulte la tabla del ejercicio 5 para determinar cuáles de las propiedades siguientes se cumplen para el sistema numérico del reloj de 12 horas, con la operación de multiplicación.

6. clausura **7.** conmutativa

8. de la identidad

Un sistema del reloj de 5 horas utiliza el conjunto {0, 1, 2, 3, 4}, *y está relacionado con la carátula mostrada aquí.*



Reloj de 5 horas

9. Complete la tabla de suma para este reloj de 5 horas.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	
2	2	3	4		1
3	3	4			
4	4				3

¿Cuáles de las siguientes propiedades satisfacen los números del sistema del reloj de 5 horas con la operación de suma?

10. clausura **11.** conmutativa

12. de la identidad. (Si la cumple, ¿cuál es el elemento identidad?)

13. del inverso. (Si la cumple, identifique el inverso de cada elemento.)

14. Complete la tabla de multiplicación de este reloj de 5 horas.

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4		
3	0	3			
4	0	4			

¿Cuáles de las siguientes propiedades satisfacen los números del sistema del reloj de 5 horas con la operación de multiplicación?

15. clausura **16.** conmutativa

17. de la identidad. (Si la cumple, ¿cuál es el elemento de identidad?)

En la aritmética del reloj, como en la aritmética ordinaria, $a - b = d$ es verdadera si, y sólo si, $b + d = a$. De forma análoga, $a \div b = q$ si, y sólo si, $b \times q = a$.

Utilice esta idea y su tabla de multiplicación para el reloj de 5 horas del ejercicio 14 para encontrar los siguientes cocientes en un reloj de 5 horas.

18. $1 \div 3$ **19.** $3 \div 1$

20. $2 \div 3$ **21.** $3 \div 2$

22. ¿Es la división conmutativa en un reloj de 5 horas? Explique.

23. ¿Hay en el reloj de 5 horas una respuesta para $4 \div 0$? Encuéntrela o explique por qué no existe.

Los militares utilizan un reloj de 24 horas para evitar los problemas "A.M." y "P.M.". Por ejemplo, las 1100 horas *son las* 11 A.M., *mientras que las* 2100 horas *son las* 9 P.M. *(*12 del mediodía + 9 horas*). En estas designaciones los últimos dos dígitos representan minutos, y los dígitos de la izquierda representan las horas. Encuentre cada una de las siguientes sumas en el sistema del reloj de* 24 *horas.*



24. 1400 + 500 **25.** 1300 + 1800

26. 0750 + 1630 **27.** 1545 + 0815

28. *Explique cómo las tres preposiciones siguientes pueden ser todas verdaderas.* (*Una pista:* Piense en relojes.)

$$1145 + 1135 = 2280$$
$$1145 + 1135 = 1120$$
$$1145 + 1135 = 2320$$

Responda verdadero o falso a lo siguiente:

29. $5 \equiv 19 \pmod 3$ **30.** $35 \equiv 8 \pmod 9$

31. $5445 \equiv 0 \pmod 3$ **32.** $7021 \equiv 4202 \pmod 6$

Resuelva cada uno de los siguientes problemas en aritmética modular.

33. $(12 + 7) \pmod 4$ **34.** $(62 + 95) \pmod 9$

35. $(35 - 22) \pmod 5$ **36.** $(82 - 45) \pmod 3$

37. $(5 \times 8) \pmod 3$ **38.** $(32 \times 21) \pmod 8$

39. $[4 \times (13 + 6)] \pmod{11}$

40. $[(10 + 7) \times (5 + 3)] \pmod{10}$

41. El texto describió cómo hacer aritmética de módulo m cuando la respuesta ordinaria es no negativa. Explique qué hacer, cuando la respuesta ordinaria es negativa.

Resuelva cada uno de los problemas siguientes en aritmética modular.

42. $(3 - 27) \pmod 5$ **43.** $(16 - 60) \pmod 7$

44. $[(-8) \times 11] \pmod 3$ **45.** $[2 \times (-23)] \pmod 5$

En cada uno de los ejercicios 46 y 47:

(a) *Complete la tabla de suma dada.*

(b) *Decida si las propiedades de cerradura, conmutativa, de la identidad y del inverso se satisfacen.*

(c) *Si la propiedad del inverso se satisface, proporcione el inverso de cada número.*

46. módulo 4

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1				
2				
3				

47. módulo 7

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	
2							
3							
4							
5							
6							

En cada uno de los ejercicios del 48 al 51:
(a) *Complete la tabla de multiplicación dada.*
(b) *Decida si las propiedades de cerradura, conmutativa, de la identidad y del inverso se satisfacen.*
(c) *Para cada número distinto de cero, que tenga inverso, proporcione su inverso.*

48. módulo 2

×	0	1
0	0	0
1	0	

49. módulo 3

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	

50. módulo 4

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

51. módulo 9

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8			5	
3	0	3	6	0		6		3	6
4	0	4	8		7		6		5
5	0	5	1		2		3	8	
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5			8			2
8	0	8	7			4	3		1

52. Complete este enunciado: un sistema modular satisface la propiedad del inverso para la multiplicación sólo si se toma como módulo un número _____.

Determine todas las soluciones positivas para cada una de las ecuaciones siguientes. Tome nota de cualquier identidad que aparezca.

53. $x \equiv 3 \pmod 7$ **54.** $(2 + x) \equiv 7 \pmod 3$

55. $6x \equiv 2 \pmod 2$ **56.** $(5x - 3) \equiv 7 \pmod 4$

Resuelva cada problema.

57. ***Lectura en odómetros*** Durante muchos años, los odómetros de los automóviles mostraban números no negativos de cinco dígitos y un dígito para las décimas de milla. Para dichos odómetros (que muestran sólo números de cinco dígitos) los totales se registran en módulo, ¿qué número?

58. ***Distancia recorrida por un automóvil*** Si el odómetro de cinco dígitos de un automóvil muestra una lectura de 29,306, ¿cuántas millas podría haber recorrido el automóvil *en teoría*?

59. ***Montones de talonarios*** Lawrence Rosenthal encuentra que si clasifica los talonarios de sus boletos de los Medias Blancas en grupos de 10, grupos de 15 o grupos de 20, siempre sobran 2. ¿Cuál es el menor número de talonarios que podría tener? (Suponga que tiene más de 2 talonarios.)

60. ***Colección de cucharas de plata*** Roxana Paker tiene una colección de cucharas de planta de todo el mundo, y se percató de que puede acomodarlas en juegos de 7 y le quedan 6, en conjuntos de 8 y le queda 1, o en juegos de 15 y le quedan 3. Si Roxana tiene menos de 200 cucharas, ¿cuántas son?

61. ***Determinación del día de la semana*** Consulte el ejemplo 9 (recuerde que para el ejemplo el año *siguiente* es *bisiesto*). Suponga que hoy es jueves 12 de enero y responda las preguntas siguientes:
(a) Si contamos a partir de hoy, ¿cuántos días contendría el año siguiente?
(b) ¿En qué día de la semana ocurriría el siguiente 12 de enero?

62. ***Determinación de rango de fechas*** Nuevamente suponga, como en el ejemplo 9, que el año *siguiente* es un año bisiesto. Si el año siguiente (contando a partir de hoy) *no* contiene 366 días, ¿cuál es el rango de fechas posibles para hoy?

63. ***Programación de asistentes de vuelo*** Robin Strang y Kristyn Wasag, asistentes de vuelo en dos aerolíneas diferentes, son grandes amigas y les gusta estar juntas con la mayor frecuencia posible. Robin vuela con un itinerario que se repite cada 21 días (incluyendo días de descanso), mientras que Kristyn tiene un itinerario que se repite cada 30 días. Ambas aerolíneas planean paradas en Chicago, Nueva Orleans y San Francisco. La tabla siguiente muestra qué días de cada uno de sus itinerarios individuales están en esas ciudades. (Imagine que el primer día del ciclo es el día número 1.)

	Días en Chicago	Días en Nueva Orleans	Días en San Francisco
Robin	1, 2, 8	5, 12	6, 18, 19
Kristyn	23, 29, 30	5, 6, 17	8, 10, 15, 20, 25

Si hoy es 1 de julio y ambas están iniciando sus programaciones (día 1), liste los días durante julio y agosto que podrían verse en cada una de las tres ciudades.

La base del sistema de números complejos es el número "imaginario" i. Las potencias de i tienen un patrón cíclico que se repite, con sólo 4 valores distintos, como se muestra aquí:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$
$$i^5 = i, \quad \text{y así sucesivamente.}$$

Determine el valor de cada una de las potencias siguientes de i.

64. i^{16} **65.** i^{47} **66.** i^{98} **67.** i^{137}

La fórmula siguiente puede usarse para determinar el día de la semana en la que un año dado empieza. Aquí y representa el año (posterior a* 1582, *cuando nuestro calendario inicia). Primero calcule*

$$a = y + [\![(y - 1)/4]\!] - [\![(y - 1)/100]\!] + [\![(y - 1)/400]\!],$$

donde $[\![x]\!]$ *representa al mayor entero menor o igual a x. (Por ejemplo,* $[\![9.2]\!] = 9$ *y* $[\![\pi]\!] = 3$.*) Después de determinar a, encuentre el entero no negativo más pequeño b, tal que*

$$a \equiv b \pmod 7.$$

Entonces, b proporciona el día de la semana para el primero de enero, con $b = 0$, *que representa domingo,* $b = 1$ *lunes, y así sucesivamente.*

Determine el día de la semana en que ocurriría el 1 de enero, en los años siguientes.

68. 1812 **69.** 1865

70. 2002 **71.** 2020

Algunas personas creen que el viernes 13 es de mala suerte. La tabla siguiente muestra los meses que tendrán un viernes 13, si se conoce el primer día del año. Un año es bisiesto si es divisible entre* 4. *La única excepción a esta regla es que un año secular (por ejemplo,* 1900) *es año bisiesto sólo cuando es divisible entre* 400.

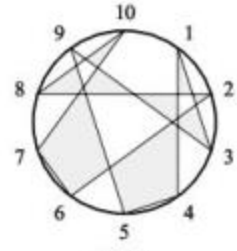
Primer día del año siesto	Año no bisiesto	Año bisiesto
Domingo	Ene., oct.	Ene., abril, julio
Lunes	Abr., jul.	Sept., dic.
Martes	Sept., dic.	Junio
Miércoles	Junio	Marzo, nov.
Jueves	Feb., mar., nov.	Feb., ago.
Viernes	Agosto	Mayo
Sábado	Mayo	Oct.

Utilice la tabla para determinar los meses que tienen un viernes 13 para los siguientes años.

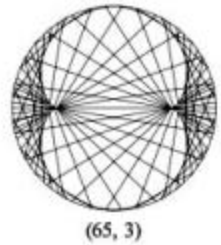
72. 2003 **73.** 2002

74. 2004 **75.** 2200

76. La aritmética modular puede utilizarse para crear **diseños de residuo**. Por ejemplo, los diseños (11, 3) y (65, 3) se muestran en la parte suprior de la columna siguiente.



(11, 3)



(65, 3)

Para ver cómo fueron creados tales diseños, construya un nuevo diseño, (11, 5), procediendo como sigue.

(a) Dibuje un círculo y divida la circunferencia en 10 partes iguales. Rotule los puntos de división como 1, 2, 3, … , 10.

(b) Como $1 \times 5 \equiv 5 \pmod{11}$, conecte 1 y 5. [Utilizamos 5 como multiplicador, ya que estamos haciendo un diseño (11, 5).]

(c) $2 \times 5 \equiv 10 \pmod{11}$
Por lo tanto, conecte 2 y _____.

(d) $3 \times 5 \equiv$ _____ $\pmod{11}$
Conecte 3 y _____.

(e) $4 \times 5 \equiv$ _____ $\pmod{11}$
Conecte 4 y _____.

(f) $5 \times 5 \equiv$ _____ $\pmod{11}$
Conecte 5 y _____.

(g) $6 \times 5 \equiv$ _____ $\pmod{11}$
Conecte 6 y _____.

(h) $7 \times 5 \equiv$ _____ $\pmod{11}$
Conecte 7 y _____.

(i) $8 \times 5 \equiv$ _____ $\pmod{11}$
Conecte 8 y _____.

(j) $9 \times 5 \equiv$ _____ $\pmod{11}$
Conecte 9 y _____.

(k) $10 \times 5 \equiv$ _____ $\pmod{11}$
Conecte 10 y _____.

(l) Podría sombrear algunas de las regiones, para construir un patrón interesante. Para información adicional, vea "Residue Designs" (Diseño de residuos), de Phil Locke, en *The Mathematics Teacher,* marzo de 1972, páginas 260 a 263.

*En "An Aid to the Superstitious", de G. L. Ritter, S. R. Lowry, H. B. Woodruff y T. L. Isenhour, *The Mathematics Teacher,* mayo de 1977, pp. 456 a 457.

Los números de identificación se utilizan de varias maneras para toda clase de productos diferentes. *Por ejemplo, a los libros se les asigna un ISBN (número estándar internacional para el libro), que es un número de 10 dígitos. Incluye un dígito verificador, el cual se determina con base en la aritmética modular. El ISBN de una de las ediciones en español de este libro es*

9-702-60752-3.

El primer dígito, 9, *identifica al libro como publicado en un país de habla hispana. Los siguientes dígitos,* 702, *identifican a la editorial, mientras que* 60752 *identifican a la edición en español de este libro en particular. El último número,* 3, *es un dígito verificador. Para determinar este dígito verificador, inicie desde la izquierda y multiplique los dígitos del número de ISBN por* 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, *respectivamente. Después sume estos productos. Para el libro que nos ocupa se obtiene*

$$(10 \times 9) + (9 \times 7) + (8 \times 0) + (7 \times 2) + (6 \times 6) + (5 \times 0) + (4 \times 7) + (3 \times 5) + (2 \times 2) = 250.$$

El dígito verificador es el número más pequeño que debe sumarse a este resultado para obtener un múltiplo de 11. *Como* $250 + 3 = 253$, *un múltiplo de 11, el dígito verificador es 3. (Es posible tener un "dígito" verificador" de 10; en lugar de éste se utiliza la letra* X.*) Cuando se recibe un pedido para este libro, el ISBN se introduce en la computadora, y se evalúa el dígito verificador. Si este resultado no coincide con el dígito verificador en el pedido, el pedido no será procesado. ¿Cuál de los siguientes ISBN tienen dígitos verificadores correctos?*

77. 0-399-13615-4 **78.** 0-691-02356-5

Determine los dígitos verificadores apropiados para cada uno de los ISBN siguientes.

79. *A Beautiful Mind*, de Sylvia Nasar, 0-684-81906-__

80. *Brunelleschi's Dome*, de Ross King, 0-802-71366-__

81. *Empire Falls*, de Richard Russo, 0-679-43247-__

82. *Longitudes and Attitudes*, de Thomas L. Friedman, 0-374-19066-__

5.5 La sucesión de Fibonacci y la razón áurea

La solución al problema de los conejos de Fibonacci se examinó en el capítulo 1, pp. 21-22.

La sucesión de Fibonacci Uno de los problemas más famosos en las matemáticas elementales proviene del libro *Liber Abaci*, escrito en 1202 por Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci. El problema se expresa como sigue:

> Un hombre coloca un par de conejos en una jaula. Durante el primer mes, los conejos no tienen crías, pero a partir de entonces cada mes procrean un par nuevo de conejos. Si cada par nuevo se reproduce de la misma manera, ¿cuántos pares de conejos habrá al final de un año?

La solución de este problema lleva a una sucesión de números, conocida como la **sucesión de Fibonacci**. Aquí están los primeros 15 términos de la sucesión de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.$$

Advierta el patrón establecido en la sucesión. Después de los dos primeros términos (ambos 1), cada término se obtiene añadiendo los dos términos previos. Por ejemplo, el tercer término se obtiene sumando 1 + 1 para obtener 2, el cuarto término se encuentra sumando 1 + 2 para obtener 3, etc. Esto puede describirse por medio de una fórmula matemática conocida como *fórmula de recurrencia*. Si F_n representa el número de Fibonacci en la n-ésima posición en la sucesión, entonces

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3.$$

La sucesión de Fibonacci presenta muchos patrones interesantes, y por razonamiento inductivo podemos hacer muchas conjeturas al respecto. Sin embargo, como ya hemos indicado muchas veces, observar tan sólo un número finito de ejemplos no

*Para un análisis general e interesante, vea "The Mathematics of Identification Numbers", de Joseph A. Gallian en *The College Mathematics Journal*, mayo de 1991, p. 194.

La **Asociación Fibonacci** es una organización académica dedicada a la investigación de la sucesión de Fibonacci y temas relacionados. Averigüe si su biblioteca tiene la publicación *Fibonacci Quarterly*. Los primeros dos números, publicados en 1963 contienen una introducción básica a la sucesión de Fibonacci.

proporciona la prueba de una proposición. Las pruebas de las propiedades de una sucesión de Fibonacci con frecuencia implican inducción matemática (que se estudia en los textos de álgebra). Aquí nosotros observaremos simplemente los patrones y no intentaremos proporcionar tales pruebas, las cuales podrían estar más allá de la formación del lector.

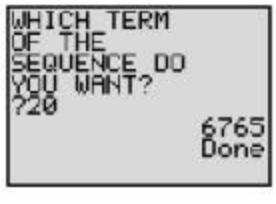
Como un ejemplo de una de las muchas propiedades de interés de la sucesión de Fibonacci, escoja cualquier término de la sucesión después del primero y elévelo al cuadrado. Después multiplique entre sí los términos que están a ambos lados de él y reste el resultado más pequeño del más grande. La diferencia siempre es 1. Por ejemplo, escoja el sexto término en la sucesión 8. El cuadrado de 8 es 64. Luego, multiplique los términos a cada lado de 8: $5 \times 13 = 65$. Reste 64 a 65 para obtener $65 - 64 = 1$. Este patrón continúa a lo largo de la sucesión.

EJEMPLO 1 Encuentre la suma de los cuadrados de los primeros n números de Fibonacci para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y examine el patrón. Generalice esta relación.

$$1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = F_1 \cdot F_2$$
$$1^2 + 1^2 = 2 = 1 \cdot 2 = F_2 \cdot F_3$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \cdot 3 = F_3 \cdot F_4$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \cdot 5 = F_4 \cdot F_5$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \cdot 8 = F_5 \cdot F_6$$

El programa siguiente para la TI-83 Plus utiliza la *Forma de Binet* del n-ésimo número de Fibonacci (vea los ejercicios 33-38) para determinar su valor.

```
PROGRAM: FIB
: Clr Home
: Disp "WHICH TERM"
: Disp "OF THE"
: Disp "SEQUENCE DO"
: Disp "YOU WANT?"
: Input N
: (1 + √(5))/2 → A
: (1 − √(5))/2 → B
: (A^N − B^N)
:       /√(5) → F
: Disp F
```



La pantalla indica que el vigésimo número de Fibonacci es 6765.

La suma de los cuadrados de los primeros n números de Fibonacci parece ser siempre el producto de F_n y F_{n+1}. La validez de esto se ha demostrado, en general, por inducción matemática. ■

Hay muchos otros patrones similares al examinado en el ejemplo 1 y algunos se analizarán en los ejercicios de esta sección. Una propiedad interesante del valor decimal del recíproco del número 89, es decir el undécimo número de la sucesión de Fibonacci, se examina en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Observe los pasos del proceso de la división larga utilizado para encontrar algunos de los primeros decimales de 1/89.

$$\begin{array}{r} .011235\ldots \\ 89\overline{)1.000000} \\ \underline{89} \\ 110 \\ \underline{89} \\ 210 \\ \underline{178} \\ 320 \\ \underline{267} \\ 530 \\ \underline{445} \\ 850\ldots \end{array}$$

Advierta que después del 0 en el lugar de las décimas, los siguientes cinco dígitos son los primeros cinco términos de la sucesión de Fibonacci. En suma, como se indicó en negritas en el proceso, los dígitos 1, 1, 2, 3, 5, 8 aparecen en los pasos de la división. Ahora, observe los siguientes dígitos en negritas, comenzando con el segundo "1"; éstos también son 1, 1, 2, 3, 5, … .

Si el proceso de división se continúa más allá del paso final presentado anteriormente, el patrón parece detenerse, después de 10 lugares decimales, $1/89 \approx .0112359551$. (La representación decimal empieza realmente a repetirse más tarde en el proceso, ya que $1/89$ es un número racional.) Sin embargo, la suma mostrada a continuación indica cómo los números de Fibonacci están realmente "ocultos" en este decimal.

$$
\begin{array}{l}
.01 \\
.001 \\
.0002 \\
.00003 \\
.000005 \\
.0000008 \\
.00000013 \\
.000000021 \\
.0000000034 \\
.00000000055 \\
\underline{.000000000089} \\
1/89 = .0112359550\ldots.
\end{array}
$$

■

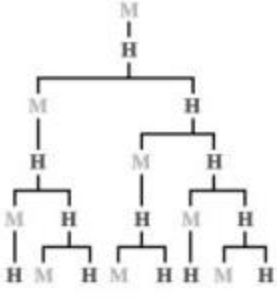
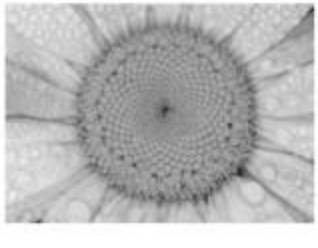


FIGURA 6

Los patrones Fibonacci se han encontrado en numerosos lugares de la naturaleza. Por ejemplo, las abejas obreras machos se incuban de huevos que no han sido fertilizados; así, una abeja macho tiene sólo un progenitor: una hembra. Por otro lado, las abejas obreras hembras se incuban de huevos fertilizados; así, una hembra tiene dos progenitores: un macho y una hembra. La figura 6 muestra varias generaciones de abejas obreras machos. (En este caso, trazamos las generaciones de *ancestros* hacia abajo, en lugar de generaciones de descendientes.)

Observe que en la primera generación hay una abeja, en la segunda hay una abeja, en la tercera hay dos abejas, etc. Éstos son los términos de la sucesión de Fibonacci. Además, a partir de la segunda generación, el número de abejas hembras forma la sucesión, y desde la tercera generación, el número de abejas machos también forma la sucesión.

Los términos sucesivos en la sucesión de Fibonacci aparecen también en las plantas. Por ejemplo, la fotografía que aparece abajo a la izquierda muestra la doble espiral de una margarita, con 21 espirales en el sentido de las manecillas del reloj y 34 en el sentido contrario. Estos números son términos sucesivos en la sucesión. Casi todas las piñas (vea la fotografía de la derecha) muestran la sucesión Fibonacci: cuente las espirales formadas por las "escalas" del cono, primero cuente de la parte más baja de la izquierda a la parte más alta de la derecha. Después cuente las espirales de la parte más baja de la derecha a la parte más alta de la izquierda. Debería encontrar que en una dirección obtuvo 8 espirales y en la otra obtuvo 13, una vez más términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci. Muchas piñas (de pino) muestran 5 y 8 espirales, y el cono de la secoya gigante tiene 3 y 5 espirales.





Continuación del análisis de la razón áurea Una fracción tal como

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}$$

se denomina *fracción continua*. Esta fracción continua puede evaluarse como sigue.

Sea $$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

Entonces $$x=1+\frac{1}{x}$$

$$x^2=x+1$$

$$x^2-x-1=0.$$

Por la fórmula cuadrática de álgebra,

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Observe que la solución positiva

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

es la razón áurea.

La razón áurea Si consideramos los cocientes de los números sucesivos de Fibonacci, surge un patrón.

$$\frac{1}{1}=1 \qquad \frac{13}{8}=1.625$$

$$\frac{2}{1}=2 \qquad \frac{21}{13}\approx 1.615384615$$

$$\frac{3}{2}=1.5 \qquad \frac{34}{21}\approx 1.619047619$$

$$\frac{5}{3}=1.666\ldots \qquad \frac{55}{34}\approx 1.617647059$$

$$\frac{8}{5}=1.6 \qquad \frac{89}{55}=1.618181818\ldots$$

Parece como si los cocientes se estuvieran aproximando a algún "valor límite" cercano a 1.618. Éste es verdaderamente el caso. Conforme más avanzamos en la sucesión, estos cocientes se aproximan al número

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

conocido como **razón áurea**, que se simboliza a menudo por la letra griega ϕ (phi).

La razón áurea aparece una y otra vez en el arte, la arquitectura, la música y la naturaleza. Su origen se remonta a la época de los antiguos griegos, quienes pensaban que el rectángulo cuyas dimensiones satisfacen la ecuación

$$\frac{\text{Longitud}}{\text{Ancho}}=\frac{\text{Longitud + Ancho}}{\text{Longitud}}$$

Si representamos con L a la longitud y con W al ancho, tenemos

$$\frac{L}{W}=\frac{L+W}{L}$$

$$\frac{L}{W}=\frac{L}{L}+\frac{W}{L}.$$

Como que $L/W=\phi$, $L/L=1$ y $W/L=1/\phi$, esta ecuación puede escribirse

$$\phi=1+\frac{1}{\phi}.$$

Multiplique ambos lados por ϕ para obtener

$$\phi^2=\phi+1.$$

Reste ϕ y 1 de ambos lados para obtener la ecuación cuadrática

$$\phi^2-\phi-1=0.$$

Si se utiliza la fórmula cuadrática del álgebra (la fórmula general), se descubre que la solución positiva de esta ecuación es $(1+\sqrt{5})/2\approx 1.618033989$, la razón áurea.



El rectángulo áureo en el arte El rectángulo que surge de delinear la figura de *San Jerónimo* realizada por Leonardo da Vinci es un ejemplo de un rectángulo áureo.

En la figura 7, se muestra el ejemplo de un rectángulo áureo. El Partenón (vea la fotografía), construido sobre la Acrópolis en la antigua Atenas durante el siglo V a.C., es un ejemplo de arquitectura que muestra muchos ejemplos de rectángulos áureos.



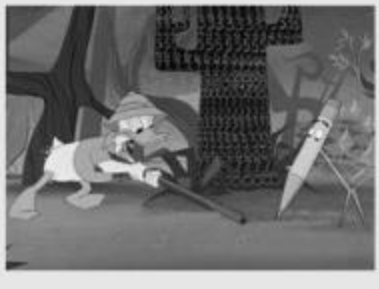


FIGURA 7

Para ver de qué modo se relacionan geométricamente los términos de la sucesión de Fibonacci a la razón áurea, se construye un rectángulo que mide 89 por 55 unidades. (Vea la figura 8, de la página siguiente.) Ésta es una aproximación muy cercana a un rectángulo áureo. Se construye después un cuadrado en el interior del rectángulo, de 55 unidades de lado. El rectángulo remanente se aproxima también a un rectángulo áureo, que mide 55 por 34 unidades. Cada vez que se repite este proceso, se forman un cuadrado y una aproximación de rectángulo áureo. Como se indica en la figura, los vértices del cuadrado pueden unirse por medio de una curva suave conoci-

PARA REFLEXIONAR

O quizá deberíamos decir "¿para ver con mayor amplitud?". La película animada de 1959 *Donald in Mathmagic Land* (*Donald en el país de las matemáticas*) se ha considerado como un clásico por más de 40 años. Ofrece un viaje de 30 minutos en compañía del pato Donald, guiado por el Espíritu de las Matemáticas a través del mundo de las matemáticas. Varios minutos de la película están dedicados a la razón áurea (o, como se denomina ahí, la sección áurea).



© The Walt Disney Company

Disney ofrece la animación para explicar la razón áurea en una forma que la palabra impresa simplemente no puede hacer. La razón áurea se encuentra en la arquitectura, en la naturaleza y el cuerpo humano. La película está disponible en video y puede comprarse o rentarse fácilmente. Si usted nunca ha visto esta película, o si quiere apreciarla de nuevo, véala, pues merece la pena por todo lo que significa.

Para análisis en grupo

1. Verifique los siguientes patrones de Fibonacci en la familia de las coníferas. Consiga una piña y cuente las espirales formadas por las "escalas" del cono, contando primero desde la parte izquierda más baja hasta la parte izquierda más alta. ¿Qué encontró?
2. Dos tamaños populares de tarjetas para archivo son 3" × 5" y 5" × 8". ¿Por qué cree usted que éstos sean los tamaños industriales estándar?
3. Dividida su estatura entre la altura a la que se encuentra su ombligo. Encuentre el promedio de grupo en la clase. ¿A qué valor se aproxima este promedio?

da como *espiral*. Esta espiral se asemeja al contorno de una sección transversal de la cubierta de la pared interior del nautilo, como se aprecia en la fotografía.

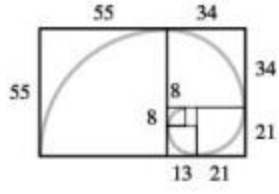




FIGURA 8

5.5 EJERCICIOS

Conteste cada una de las siguientes preguntas concernientes a la sucesión de Fibonacci o la razón áurea.

1. El decimosexto número de Fibonacci es 987 y el decimoséptimo es 1597. ¿Cuál es el décimo octavo número de Fibonacci?
2. Recuerde que F_n representa el número Fibonacci en la n-ésima posición de la sucesión. ¿Cuáles son los únicos dos valores de n tal que $F_n = n$?
3. $F_{23} = 28{,}657$ y $F_{25} = 75{,}025$. ¿Cuál es el valor de F_{24}?
4. Si dos términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci son impares, ¿el término siguiente es par o impar?
5. ¿Cuál es el valor exacto de la razón áurea?
6. ¿Cuál es el valor aproximado de la razón áurea a la milésima más cercana?

En los ejercicios 7 al 14, se establece un patrón que incluye términos de la sucesión de Fibonacci. Aplique razonamiento inductivo para conjeturar la ecuación que sigue en el patrón y después verifíquela. Tal vez desee comparar con los primeros términos de la sucesión dados en el texto.

7. $1 = 2 - 1$
   $1 + 1 = 3 - 1$
   $1 + 1 + 2 = 5 - 1$
   $1 + 1 + 2 + 3 = 8 - 1$
   $1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13 - 1$

8. $1 = 2 - 1$
   $1 + 3 = 5 - 1$
   $1 + 3 + 8 = 13 - 1$
   $1 + 3 + 8 + 21 = 34 - 1$
   $1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 89 - 1$

9. $1 = 1$
   $1 + 2 = 3$
   $1 + 2 + 5 = 8$
   $1 + 2 + 5 + 13 = 21$
   $1 + 2 + 5 + 13 + 34 = 55$

10. $1^2 + 1^2 = 2$
    $1^2 + 2^2 = 5$
    $2^2 + 3^2 = 13$
    $3^2 + 5^2 = 34$
    $5^2 + 8^2 = 89$

11. $2^2 - 1^2 = 3$
    $3^2 - 1^2 = 8$
    $5^2 - 2^2 = 21$
    $8^2 - 3^2 = 55$

12. $2^3 + 1^3 - 1^3 = 8$
    $3^3 + 2^3 - 1^3 = 34$
    $5^3 + 3^3 - 2^3 = 144$
    $8^3 + 5^3 - 3^3 = 610$

13. $1 = 1^2$
    $1 - 2 = -1^2$
    $1 - 2 + 5 = 2^2$
    $1 - 2 + 5 - 13 = -3^2$
    $1 - 2 + 5 - 13 + 34 = 5^2$

14. $1 - 1 = -1 + 1$
    $1 - 1 + 2 = 1 + 1$
    $1 - 1 + 2 - 3 = -2 + 1$
    $1 - 1 + 2 - 3 + 5 = 3 + 1$
    $1 - 1 + 2 - 3 + 5 - 8 = -5 + 1$

15. Todo número natural puede expresarse como una suma de números Fibonacci, donde un número no se usa más de una vez. Por ejemplo: $25 = 21 + 3 + 1$. Exprese cada uno de los siguientes de este modo.
    (a) 37 **(b)** 40 **(c)** 52

16. Se ha demostrado que si m divide a n, entonces F_m es un factor de F_n. Demuestre que esto es verdad para los siguientes valores de m y n.
    (a) $m = 2, n = 6$ **(b)** $m = 3, n = 9$
    (c) $m = 4, n = 8$

17. Se ha demostrado que si el mayor factor común entre m y n es r, entonces el mayor factor común de F_m y F_n es F_r. Demuestre que esto es verdadero para los siguientes valores de m y n.
(a) $m = 10, n = 4$ **(b)** $m = 12, n = 6$
(c) $m = 14, n = 6$

18. Para cualquier número primo p excepto 2 o 5, cualquiera de F_{p+1} o F_{p-1} es divisible entre p. Demuestre que esto se cumple para los valores siguientes de p.
(a) $p = 3$ **(b)** $p = 7$ **(c)** $p = 11$

19. Anteriormente vimos que si un término de la sucesión de Fibonacci se eleva al cuadrado y después se encuentra el producto de los términos dispuestos a cada lado del mismo, habrá siempre una diferencia de 1. Siga los pasos que se indican, escoja el séptimo número de Fibonacci, 13.
(a) Eleve 13 al cuadrado. Multiplique los términos de la sucesión alejados dos posiciones de 13 (es decir, 5 y 34). De los dos cálculos realizados anteriormente tome el resultado menor y réstelo del resultado mayor, y registre su respuesta.
(b) Eleve 13 al cuadrado. Multiplique los términos de la sucesión que están a tres posiciones de 13. Una vez más, reste el resultado menor del mayor y anote su respuesta.
(c) Repita el proceso moviéndose cuatro términos a partir de 13.
(d) Haga una conjetura acerca de lo que pasará cuando repita el proceso alejándose cinco términos. Verifique su respuesta.

20. Aquí hay un truco de números que usted puede realizar. Pida a alguien que escoja dos números al azar y los escriba uno inmediatamente abajo del otro. Solicite a la persona que determine un tercer número sumando el primero y segundo números, un cuarto número sumando el segundo y el tercero, etc., hasta determinar 10 números. Después invite a la persona a sumar esos 10 números. Usted será capaz de dar el resultado de la suma aún antes de que la persona complete la lista, porque la suma siempre será 11 veces el séptimo número de la lista. Verifique que esto es verdadero utilizando x y y como los primeros dos números arbitrarios escogidos. (*Una pista:* Recuerde la propiedad distributiva del álgebra.)

Otro tipo de sucesión de Fibonacci que ha sido estudiado por los matemáticos es la **sucesión de Lucas**, *llamada así en honor de un matemático francés del siglo XIX. Los primeros 10 términos de la sucesión de Lucas son*

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123.

Los ejercicios 21 al 26 se relacionan con la sucesión de Lucas.

21. ¿Cuál es el término decimoprimero de la sucesión de Lucas?

22. Escoja cualquier término de la sucesión de Lucas y elévelo al cuadrado. Luego multiplique entre sí los términos a ambos lados del que usted escogió. Reste el menor resultado del mayor. Repita esto para diferentes términos de la sucesión. ¿Obtiene usted el mismo resultado? Haga una conjetura sobre este patrón.

23. El primer término de la serie de Lucas es 1. Sume los términos primero y tercero. Escriba su respuesta. Luego sume los términos primero, tercero y quinto y registre su respuesta. Continúe este patrón: sume cada vez otro término que ocupe una posición *impar* en la serie. ¿Qué advierte con la relación a todos sus resultados?

24. El segundo término en la sucesión de Lucas es 3. Sume los términos segundo y cuarto. Anote su respuesta. Luego sume el segundo, cuarto y sexto términos y registre su respuesta. Continúe este patrón: sume cada vez otro término que esté en una posición *par* en la sucesión. ¿Qué advierte de todas sus sumas?

25. Existen muchos patrones interesantes entre los términos de las sucesiones de Fibonacci y de Lucas. Haga una hipótesis acerca de la siguiente ecuación que aparecería en cada una de las listas, y después verifíquela.

(a)
$1 \cdot 1 = 1$
$1 \cdot 3 = 3$
$2 \cdot 4 = 8$
$3 \cdot 7 = 21$
$5 \cdot 11 = 55$

(b)
$1 + 2 = 3$
$1 + 3 = 4$
$2 + 5 = 7$
$3 + 8 = 11$
$5 + 13 = 18$

(c)
$1 + 1 = 2 \cdot 1$
$1 + 3 = 2 \cdot 2$
$2 + 4 = 2 \cdot 3$
$3 + 7 = 2 \cdot 5$
$5 + 11 = 2 \cdot 8$

26. En el texto ilustramos que los cocientes de los términos sucesivos en la sucesión de Fibonacci se aproximan a la razón áurea. Haga una observación similar para los términos de la sucesión de Lucas, esto es, encuentre la aproximación decimal para los cocientes

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{7}, \frac{18}{11}, \frac{29}{18},$$

y así sucesivamente, con ayuda de una calculadora. Después haga una conjetura sobre lo que parece estar ocurriendo.

Recuerde el **teorema de Pitágoras** *de la geometría: si un triángulo rectángulo tiene lados de longitudes a y b e hipotenusa de longitud c, entonces $a^2 + b^2 = c^2$. Suponga que elegimos cualquiera de los cuatro*

términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci. Multiplique el primero por el cuarto. Duplique el producto del segundo por el tercero. Sume los cuadrados del segundo y el tercero. Los tres resultados obtenidos forman una terna pitagórica (tres números que satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$). Encuentre la terna pitagórica obtenida de esta manera mediante los cuatro términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci.

27. 1, 1, 2, 3 **28.** 1, 2, 3, 5

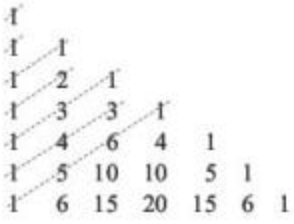
29. 2, 3, 5, 8

30. Observe los valores de la hipotenusa (c) en las respuestas a los ejercicios 27 a 29. ¿Qué advierte con relación a cada uno de ellos?

31. La disposición siguiente de números se llama **triángulo de Pascal**.

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5   10  10  5   1
    1   6   15  20  15  6   1
```

Esta disposición es importante en el estudio de las técnicas de conteo y probabilidad (vea los capítulos posteriores) y aparece en el álgebra en el teorema del binomio. Si la disposición triangular se escribe en forma diferente, como se muestra a continuación, y la suma a lo largo de las diagonales, como lo indican las líneas punteadas, ocurre algo interesante. ¿Qué encuentra cuando suma los números?



32. Redacte un párrafo en el que explique alguna de las ocurrencias de la sucesión de Fibonacci y la razón áurea en su entorno cotidiano.

Los ejercicios 33 al 38 exigen el uso de una calculadora científica.

33. La solución positiva de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ es $(1 + \sqrt{5})/2$, como se indica en el texto. La solución negativa es $(1 - \sqrt{5})/2$. Encuentre las aproximaciones decimales para ambas. ¿Qué semejanza advierte entre los dos decimales?

34. En algunos casos, quienes escriben sobre matemáticas definen la razón áurea como el *recíproco* de $(1 + \sqrt{5})/2$. Encuentre una aproximación decimal para el recíproco de $(1 + \sqrt{5})/2$. ¿Qué semejanza advierte usted entre los decimales para $(1 + \sqrt{5})/2$ y su recíproco?

Existe una relación notable entre las dos soluciones de $x^2 - x - 1 = 0$,

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad y \quad \bar{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

y los números de Fibonacci. Para encontrar el n-ésimo número de Fibonacci sin usar la fórmula de recurrencia, evalúe la expresión siguiente:

$$\frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}$$

con ayuda de una calculadora. Por ejemplo, para hallar el décimo tercer número de Fibonacci, evalúe

$$\frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{13} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{13}}{\sqrt{5}}.$$

Esta forma se conoce como **forma de Binet** *del n-ésimo número de Fibonacci. Utilice la forma de Binet y una calculadora para encontrar el n-ésimo número de Fibonacci para cada uno de los valores siguientes de n.*

35. $n = 14$ **36.** $n = 20$

37. $n = 22$ **38.** $n = 25$

Las ecuaciones en los ejercicios 7 a 14 son ejemplos de varias relaciones entre los términos de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo, de los patrones en los ejercicios 7 y 8 obtenemos, respectivamente,

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

y

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

(Puede consultar las listas de los términos de Fibonacci en el texto para verificar estos patrones.) Complete las fórmulas siguientes.

39. Del ejercicio 9:
$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} =$ _____

40. Del ejercicio 10:
$F_n^2 + F_{n+1}^2 =$ _____

41. Del ejercicio 11:
$F_n^2 - F_{n-2}^2 =$ _____

42. Del ejercicio 12:
$F_n^3 + F_{n-1}^3 - F_{n-2}^3 =$ _____

EXTENSIÓN

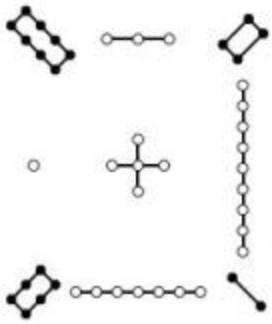


FIGURA 9

Cuadros mágicos

Cuenta la leyenda que, aproximadamente en el año 2200 a.C., el emperador chino Yu descubrió sobre el banco del Río Amarillo una tortuga cuya concha mostraba el diagrama de la figura 9. Este diagrama llamado *lo-shu,* es un primer ejemplo de **cuadrado mágico**. Si se cuenta el número de puntos y se ordenan en forma de cuadrado, se obtiene la disposición que se aprecia en la figura 10. Un cuadrado mágico es una disposición cuadrada de números con la propiedad de que la suma a lo largo de cada fila, columna y diagonal es la misma. Este valor en común se denomina "suma mágica". El **orden** de un cuadrado mágico es sencillamente el número de filas (y columnas) en el cuadrado. El de la figura 10 es un cuadrado mágico de orden 3.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

FIGURA 10

Por medio de la fórmula para la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética, puede demostrarse que si un cuadrado mágico de orden n tiene por entradas los números $1, 2, 3, \ldots, n^2$, entonces la suma de *todas las entradas* en el cuadrado es

$$\frac{n^2(n^2 + 1)}{2}.$$

Ya que hay n filas (y columnas), la suma mágica del cuadrado puede encontrarse si se divide la expresión anterior entre n. Esto da por resultado la regla siguiente para encontrar la suma mágica.

Fórmula para la suma mágica

Si un cuadrado mágico de orden n tiene por entradas los números $1, 2, 3, \ldots, n^2$, entonces la suma mágica SM se da con la fórmula

$$\mathrm{SM} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Con $n = 3$ en la fórmula previa encontramos que la suma mágica del cuadrado, que puede verificarse por suma directa, en la figura 10 es

$$\mathrm{SM} = \frac{3(3^2 + 1)}{2} = 15.$$

Hay un método para construir un cuadrado mágico de orden impar, atribuido a un enviado francés, *De la Loubere,* al que en ocasiones se hace referencia como el "método de escalera". El método se describe a continuación para un cuadrado en orden 5, con entradas $1, 2, 3, \ldots, 25$.

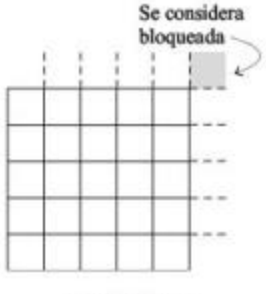


FIGURA 11

Comience por dibujar un cuadrado dividido en 25 celdas, en la que se escribirán los números del 1 al 25. Proceda como se describe a continuación, tome como referencia las figuras 11 y 12 para que sea más claro.

1. Escriba un 1 en la celda en medio del renglón superior.
2. Trate siempre de anotar números en sucesión en las celdas moviéndose diagonalmente desde la posición izquierda más baja hasta la posición derecha más alta. Hay dos excepciones a esta regla:
   (a) Si usted va hacia el exterior del cuadrado mágico, desplácese por toda la fila o columna para anotar el número. Después proceda a moverse diagonalmente.

	18	25	2	9	16
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

FIGURA 12

(b) Si usted se encuentra en una celda que ya está ocupada (esto es, usted está "bloqueado"), retroceda una celda a partir de la última entrada escrita e introduzca el siguiente número ahí. Después proceda a moverse diagonalmente.

3. Su última entrada, 25, estará en la celda de en medio del renglón inferior.

La figura 12 muestra el cuadrado mágico completo. Su suma mágica es 65.



Benjamin Franklin admitió que él se divertía durante la Asamblea de Pensilvania con cuadrados mágicos o círculos "o cualquier cosa que evitara el cansancio". Escribió sobre la utilidad de las matemáticas en el periódico *Gazette* en 1735, decía que ningún empleo puede administrarse sin ayuda de la aritmética, y ninguna invención mecánica sin geometría. También pensaba que las demostraciones matemáticas son mejores que la lógica académica para educar a la mente a razonar con exactitud y distinguir la verdad de la falsedad aún en campos ajenos a las matemáticas.

El cuadrado que aquí se presenta es uno de los que desarrolló Franklin. Tiene una suma de 2056 en cada renglón y diagonal, y, de acuerdo con su autor, cuenta con la propiedad adicional "de que si se hace un orificio de cuatro esquinas en una hoja de papel de dimensiones tales que al superponer al orificio con el cuadrado de Franklin, se abarquen justamente 16 de los pequeños



cuadrados, sólo entonces, al mirar por la parte visible del cuadrado mayor, la suma de los números que aparecen a través del orificio dará 2056". Sostenía que este cuadrado era "el cuadrado mágico con mayor magia que haya hecho nunca mago alguno".

Tal vez desee verificar la propiedad siguiente de este cuadrado mágico: la suma de cualesquiera de los cuatro números que están opuestos uno al otro y están a igual distancia del centro es 514 (lo cual corresponde a un cuarto de la suma mágica).

EJERCICIOS DE EXTENSIÓN

Dado un cuadrado mágico, pueden obtenerse otros cuadrados girando el primero. Por ejemplo, empezando con el cuadrado mágico de la figura 10, una rotación de 90° en el sentido de las manecillas del reloj proporciona el cuadrado mágico que se aprecia a la derecha.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Empiece con la figura 10 y haga el cuadrado mágico que se obtiene por cada rotación aquí descrita.

1. 180° en la dirección en que giran las manecillas del reloj.

2. 90° en dirección contraria a la que giran las manecillas del reloj.

Empiece con la figura 12 y haga el cuadrado mágico que se obtiene por cada rotación descrita.

3. 90° en la dirección en que giran las manecillas del reloj.

4. 180° en la dirección en que giran las manecillas del reloj.

5. 90° en dirección contraria a la que giran las manecillas del reloj.

6. Intente elaborar un cuadrado mágico de orden 2 que contenga las entradas 1, 2, 3, 4. ¿Qué ocurre?

Dado un cuadrado mágico, se pueden obtener otros cuadrados mágicos al sumar o restar un valor constante a cada entrada, al multiplicar cada entrada por un valor constante o al dividir cada entrada por un valor constante diferente de cero. En los ejercicios 7 a 10, empiece con el cuadrado mágico del que se indica el número de figura, y realice la operación descrita para encontrar un cuadrado mágico nuevo. Calcule la nueva suma mágica.

7. Figura 10, multiplicar por 3

8. Figura 10, sumar 7

9. Figura 12, dividir entre 2

10. Figura 12, restar 10

(continúa)



De acuerdo con una fantástica historia de Charles Trigg en Mathematics Magazine *(septiembre de 1976, p. 212), el emperador Carlomagno (742-814) ordenó que se construyera una fortaleza de cinco lados en un punto importante de su reino. Como amuletos de buena suerte, tenía cuadrados mágicos colocados en cada uno de los cinco lados de la fortaleza. Puso una condición para estos cuadrados mágicos: todos los números en ellos debían ser primos.*

Los cuadrados mágicos se dan en los ejercicios 11 a 15 con una entrada faltante. Encuentre la entrada que falta en cada cuadro.

11.

	71	257
47	269	491
281	467	59

12.

389		227
107	269	431
311	347	149

13.

389	227	191
71	269	
347	311	149

14.

401	227	179
47	269	491
359		137

15.

401	257	149
17		521
389	281	137

16. Compare las sumas mágicas en los ejercicios 11 a 15. Carlomagno había estipulado que cada suma mágica debería dar el año en que fue construida la fortaleza. ¿Cuál fue ese año?

Encuentre las entradas faltantes en cada cuadrado mágico.

17.

75	68	**(a)**
(b)	72	**(c)**
71	76	**(d)**

18.

1	8	13	**(a)**
(b)	14	7	2
16	9	4	**(c)**
(d)	**(e)**	**(f)**	15

19.

3	20	**(a)**	24	11
(b)	14	1	18	10
9	21	13	**(c)**	17
16	8	25	12	**(d)**
(e)	2	**(f)**	**(g)**	**(h)**

20.

3	36	2	35	31	4
10	12	**(a)**	26	7	27
21	13	17	14	**(b)**	22
16	**(c)**	23	**(d)**	18	15
28	30	8	**(e)**	25	9
(f)	1	32	5	6	34

21. Utilice el "método de escalera" para construir un cuadrado mágico de orden 7, que contenga las entradas 1, 2, 3, ..., 49.

El cuadrado mágico que se muestra en la fotografía es de un grabado en madera de Alberto Durero, titulado Melancolía.



Los dos números en el centro de la fila inferior dan 1514, *el año en que se realizó el grabado. Refiérase a este cuadrado mágico para dar respuesta a los ejercicios 22 a 30.*

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Cuadrado mágico de Durero

22. ¿Cuál es la suma mágica?

23. Verifique que la suma de las entradas en las cuatro esquinas es igual a la suma mágica.

24. Verifique que la suma de las entradas en cualquier cuadrado de 2 por 2, en una esquina del cuadrado mágico dado, es igual a la suma mágica.

25. Verifique que la suma de las entradas en las diagonales es igual a la suma de las entradas que no están en las diagonales.

26. Verifique que la suma de los cuadrados de las entradas en la diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las entradas que no pertenecen a las diagonales.

27. Verifique que la suma de los cubos de las entradas en las diagonales es igual a la suma de los cubos de las entradas que no están en las diagonales.

28. Verifique que la suma de los cuadrados de las entradas en las dos filas superiores es igual a la suma de los cuadrados de las entradas en las dos filas inferiores.

29. Verifique que la suma de los cuadrados de las entradas en los renglones primero y tercero es igual a la suma de los cuadrados de las entradas en el segundo y cuarto renglón.

30. Encuentre otra propiedad interesante el cuadrado mágico de Durero y enúnciela.

31. Un cuadrado mágico de orden 4 podría construirse como sigue. Trace una línea tenue que una las diagonales del cuadrado mágico en blanco comenzando por la parte superior izquierda. Muévase a lo largo de cada fila de izquierda a derecha y cuente las celdas según va moviéndose. Si la celda está en una diagonal, cuéntela pero no anote su número. Si no está en una diagonal, anote el número. Cuando haya terminado, invierta el procedimiento, empiece en la parte inferior derecha y muévase de derecha a izquierda. Mientras cuenta las celdas, anote el número si la celda no está ocupada. Si lo está, cuéntela pero no anote su número. Usted deberá obtener un cuadrado mágico similar al dado para los ejercicios 22 a 30. ¿En qué se diferencian?

Con valores escogidos para a, b y c, puede construirse un cuadrado mágico de orden 3, al sustituir estos valores en la forma generalizada que aquí se muestra.

$a+b$	$a-b-c$	$a+c$
$a-b+c$	a	$a+b-c$
$a-c$	$a+b+c$	$a-b$

Utilice los valores dados de a, b y c para construir un cuadrado mágico de orden 3, empleando esta forma generalizada.

32. $a = 5,\ b = 1,\ c = -3$

33. $a = 16,\ b = 2,\ c = -6$

34. $a = 5,\ b = 4,\ c = -8$

35. Puede demostrarse que si un cuadrado mágico de orden n tiene como menor entrada a k, y sus entradas son números naturales consecutivos, entonces su suma mágica está dada por la fórmula

$$\text{SM} = \frac{n(2k + n^2 - 1)}{2}.$$

Construya un cuadrado mágico de orden 7 cuya entrada menor sea 10, con el método de escalera. ¿Cuál es su suma mágica?

36. Use la fórmula del ejercicio 35 para encontrar las entradas que faltan en el siguiente cuadrado mágico cuya entrada menor es 24.

(a)	38	37	27
35	**(b)**	30	32
31	33	**(c)**	28
(d)	26	25	**(e)**

En una carta escrita en 1769 por Benjamin Franklin dirigida al señor Peter Collinson, se muestra el siguiente cuadrado mágico de orden 8.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

37. ¿Cuál es la suma mágica?

Verifique las propiedades siguientes de este cuadrado mágico.

38. La primera mitad de cada fila y la segunda mitad de cada fila son cada una igual a la mitad de la suma mágica.

39. Las cuatro entradas de las esquinas sumadas a las cuatro entradas del centro son iguales a la suma mágica.

40. Las "diagonales dobladas" que consisten en ocho entradas, yendo hacia arriba cuatro entradas de izquierda a derecha y cuatro entradas hacia abajo de izquierda a derecha, dan como resultado la suma mágica. (Por ejemplo, si se empieza con 16, una suma de diagonal doblada es 16 + 63 + 57 + 10 + 23 + 40 + 34 + 17.)

(continúa)

Si usamos un "movimiento de caballo" del ajedrez (2 hacia arriba, 1 a la derecha) una variación del método de escalera da como resultado el cuadrado mágico que se aprecia aquí. (Cuando se bloquea, nos movemos a la celda justo debajo de la entrada previa.)

10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15
4	12	25	8	16

Use un proceso similar para construir un cuadrado mágico de orden 5, empezando con 1 *en la celda descrita.*

41. cuarta fila, segunda columna (2 arriba, 1 a la derecha; cuando se bloquee, muévase a la celda justo debajo de la entrada).

42. tercera fila, tercera columna (1 arriba, 2 a la derecha; cuando esté boqueado, muévase a la celda justo a la izquierda de la entrada previa).

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

Investigación de una propiedad interesante de los números cuadrados

En la Extensión que aparece al final de este capítulo observamos cuadrados mágicos. Ahora, en esta actividad en grupo investigaremos otra propiedad de los cuadrados de los números. Empiece por formar grupos de tres o cuatro estudiantes. Cada estudiante deberá preparar un cuadrado de números como el que sigue:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Temas para análisis

1. Cada estudiante deberá hacer de manera individual lo siguiente:

Escoja cualquier número en la primera fila. Enciérrelo en un círculo y tache todas las entradas en la columna debajo de éste. (Por ejemplo, si encerró en un círculo el 4, tache 9, 14, 19 y 24.) Luego, encierre en un círculo cualquier número remanente en la segunda fila, y tache todas las entradas en la columna bajo él.

Repita este procedimiento para la tercera y la cuarta filas, y entonces encierre en un círculo los números restantes finales en la quinta fila.

Ahora cada estudiante deberá sumar los números circulados y comparar su suma con la de otros en el grupo. ¿Qué nota usted?

2. ¿Cómo compara la suma obtenida en el ejercicio 1 con la suma mágica para un cuadrado mágico de orden 5?

3. Suponga que el ejercicio 1 se realizó como se muestra a continuación:

1	(2)	3	4	5
6	~~7~~	(8)	9	10
11	~~12~~	~~13~~	14	(15)
(16)	~~17~~	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	~~23~~	(24)	~~25~~

Observe que la suma de las entradas encerradas en un círculo es como sumar $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, excepto que

$$3 \text{ es reemplazado con } 3 + 5,$$
$$5 \text{ es reemplazado con } 5 + 10,$$
$$1 \text{ es reemplazado con } 1 + 15,$$
$$4 \text{ es reemplazado con } 4 + 20.$$

Podemos expresar esto como

$$\begin{aligned} \text{suma} &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\ &\quad + (5 + 10 + 15 + 20) \\ &= 15 + 50 = 65. \end{aligned}$$

4. Explique por qué la suma siempre es la misma sin importar qué entradas de las diferentes filas elija encerrar en un círculo.

5. Prepare un cuadrado de los números naturales desde 1 hasta 36. Repita entonces el ejercicio 1. Analice sus resultados. ¿Cómo compara la suma con la suma mágica para un cuadrado mágico de orden 6?

6. En grupo, llene las entradas en esta ecuación para el cuadrado de 6 por 6.

suma = (__ + __ + __ + __ + __ + __)

+ (__ + __ + __ + __ + __ + __)

7. En grupo, prediga la suma de los números encerrados en círculos en un cuadrado de 7 por 7, expresándolo como sigue. (No construya el cuadrado.)

suma = (__ + __ + __ + __ + __ + __ + __) + (__ + __ + __ + __ + __ + __ + __)

¿Cómo compara la suma con la suma mágica para un cuadrado mágico de orden 7?

8. Cada integrante del grupo ahora debe preparar otro cuadrado de 5 por 5 y repetir el ejercicio 1, excepto que esta vez inicie con un número en la primera *columna* y tache los números restantes en las *filas*. Analice el resultado con otros miembros de su grupo.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 5

En los ejercicios del 1 al 5, decida si cada una de las proposiciones es verdadera *o* falsa.

1. Ningún par de números primos difiere en 1.
2. Existe un número infinito de números primos.
3. Si un número natural es divisible entre 9, entonces debe serlo también entre 3.
4. Si p y q son números primos diferentes, el número 1 es su mayor factor común y pq su menor múltiplo común.
5. Para todos los números naturales n, 1 es un factor de n y n es un múltiplo de n.
6. Use pruebas de divisibilidad para determinar si el número

331,153,470

es divisible por cada uno de los siguientes números:

(a) 2 **(b)** 3 **(c)** 4
(d) 5 **(e)** 6 **(f)** 8
(g) 9 **(h)** 10 **(i)** 12

7. Decida si cada uno de los números siguientes es primo, compuesto o ninguno de los anteriores.
(a) 93 **(b)** 1 **(c)** 59
8. Obtenga la descomposición como un producto de factores primos del número 1440.
9. Enuncie en sus propias palabras el teorema fundamental de la aritmética.
10. Decida cuál de los números que se presentan a continuación es perfecto, deficiente o abundante.
(a) 17 **(b)** 6 **(c)** 24
11. ¿Cuál de las proposiciones siguientes es falsa?
(a) No se conocen números perfectos impares.
(b) Todo número par perfecto debe terminar en 6 o 28.
(c) La conjetura de Goldbach para el número 8 se verifica por la ecuación $8 = 7 + 1$.
12. Proporcione un par de números primos relativos entre 40 y 50.
13. Encuentre el máximo factor común (máximo común divisor) de 270 y 450.
14. Encuentre el mínimo común múltiplo de 24, 36 y 60.
15. ***Día de descanso de los trabajadores de un restaurante de comida rápida*** Sherrie Firavich y Della Daniel trabajan en un restaurante de comida rápida. Sherrie tiene un día de descanso cada seis días y Della tiene su día de asueto cada cuatro. Si ambas descansan el miércoles de esta semana, ¿cuál será el próximo día de la semana en que coincidirán los descansos?
16. El vigésimo segundo número de Fibonacci es 17,711 y el vigésimo tercer número de Fibonacci es 28,657. ¿Cuál es el vigésimo cuarto?

17. Deduzca cuál es la ecuación que sigue en la lista y verifíquela.

$$8 - (1 + 1 + 2 + 3) = 1$$
$$13 - (1 + 2 + 3 + 5) = 2$$
$$21 - (2 + 3 + 5 + 8) = 3$$
$$34 - (3 + 5 + 8 + 13) = 5$$
$$55 - (5 + 8 + 13 + 21) = 8$$

18. Complete de forma correcta el enunciado siguiente: Si p es un número primo, entonces $2^p - 1$ es primo
A. nunca **B.** algunas veces **C.** siempre.

19. Calcule: $(12 + 16) \pmod 5$.

20. Determine todas las soluciones positivas para $(4x - 7) \equiv 2 \pmod 3$.

21. **(a)** Dé los primeros ocho términos de la sucesión tipo Fibonacci que tiene a los números 1 y 5 como primero y segundo términos, respectivamente.

(b) Escoja cualquier término después del primero en la sucesión que acaba de formar y elévelo al cuadrado. Multiplique entre sí los dos términos localizados a cada lado del número elegido. Reste el resultado menor del resultado mayor. Repita ahora el proceso con un término diferente. Haga una hipótesis acerca del resultado que dará el proceso para cualquier término de la sucesión.

22. ¿Cuál de los siguientes es el valor *exacto* de la razón áurea?
A. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ **C.** 1.6 **D.** 1.618

23. Escriba un párrafo corto explicando lo que dice el último teorema de Fermat y proporcione un informe de los descubrimientos recientes concernientes a él.

capítulo

6 El sistema de los números reales



El baño de sol constituye un pasatiempo popular. Sin embargo, una exposición excesiva a la luz ultravioleta puede causar daños tanto a la piel como a la vista; y la intensidad de esta luz varía con los cambios estacionales de la capa de ozono, la nubosidad y la hora del día. La siguiente tabla muestra la intensidad ultravioleta máxima, medida en miliwatts por metro cuadrado, para diferentes latitudes y fechas.

Latitud	21 de marzo	21 de junio	21 de septiembre	21 de diciembre
0°	325	254	325	272
10°	311	275	280	220
20°	249	292	256	143
30°	179	248	182	80
40°	99	199	127	34
50°	57	143	75	13

Si un estudiante de Seattle, localizado a 47.5° de latitud, pasa sus vacaciones de primavera en Hawai, a 20° de latitud, los rayos solares ultravioleta serán aproximadamente $249/57 \approx 4.37$ veces más intensos que en Seattle. En primavera, los rayos del sol en Hawai son aproximadamente $249/143 \approx 1.74$ veces más intensos que en Seattle durante el verano. Puesto que la luz ultravioleta se dispersa a causa de la reflexión, las nubes y la sombra no impiden por completo las quemaduras. Una persona sentada a la sombra puede recibir 40% de la luz ultravioleta que se produce en un área iluminada por el sol. Las nubes poco densas transmiten el 80% de la luz ultravioleta, en tanto que una persona que nada a $1\frac{1}{2}$ pies por debajo de la superficie del agua también recibe 80% de la radiación ultravioleta. De modo que, aun sentado a la sombra, nuestro estudiante de Seattle sentirá los rayos del sol más intensos en Hawai.

Los números reales son necesarios para cuantificar el efecto de la luz ultravioleta en los seres humanos y, por otra parte, las cantidades se describen mediante distintos tipos de números, como los números enteros, los decimales, las fracciones y los porcentajes. Además, se presentarán los números que son esenciales en la descripción de fenómenos reales.

Fuente: Williams, J. *The USA Today Weather Almanac 1995*, Vintage Books, Nueva York, 1994.

6.1 Orden y valor absoluto en los números reales

6.2 Operaciones, propiedades y aplicaciones de los números reales

6.3 Números racionales y representación decimal

6.4 Números irracionales y representación decimal

6.5 Aplicaciones de decimales y porcentajes

Extensión: Números complejos

Investigación en grupo: Presupuesto para la compra de un automóvil

Examen del capítulo 6

Conforme se desarrollaron las matemáticas, se descubrió que los *números naturales* o de *conteo* no satisfacían todas las exigencias de los matemáticos. En consecuencia, se crearon nuevos y más desarrollados sistemas de números. El matemático Leopoldo Kronecker (1823-1891) afirmó una vez lo siguiente: "Dios creó los enteros, el resto de los números es producto del hombre". En este capítulo estudiaremos los conjuntos que, según Kronecker, son obra de la humanidad.

6.1 Orden y valor absoluto en los números reales

Los orígenes del cero Los mayas de México y Centroamérica tenían uno de los primeros sistemas de numeración que incluían un símbolo para el cero. Antes, los babilonios utilizaron un sistema posicional, pero sólo colocaban un espacio entre los "dígitos" para indicar la potencia que faltaba. Cuando los griegos asimilaron la astronomía babilónica usaron la letra omicrón, o, de su alfabeto o bien $\overline{o}$ para representar algo en lo que "no hay potencia", o "cero". El sistema romano de numeración reemplazó gradualmente al sistema de numeración griego.

Así, el sistema de los romanos fue el más comúnmente utilizado en el continente europeo desde la época de Cristo hasta, tal vez, el año 1400 d.C. cuando el sistema indoarábigo empezó a sustituirlo. La palabra original india para el cero era *sunya*, que significa "vacío". Los árabes adoptaron esta palabra como *sifr* o "vacante". La palabra *sifr* pasó al latín como *zéphirum*, que con los años se convirtió en *zévero*, *zépiro* y por fin, *cero*.

Conjuntos de números reales

Los *números naturales* son los números con los que contamos objetos discretos. Al incluir el 0 en el conjunto, obtenemos el conjunto de los *números cardinales*.

Números naturales

$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ es el conjunto de los **números naturales**.

Números cardinales

$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de los **números cardinales**.

Estos números, junto con muchos otros, pueden representarse en una **recta numérica** como la que aparece en la figura 1. Dibujemos una recta numérica, ubiquemos cualquier punto sobre la línea y llamémosle 0. Seleccionemos cualquier punto a la derecha del 0 y denominémosle 1. La distancia entre 0 y 1 da una unidad de medición que se emplea para localizar otros puntos, como se aprecia en la figura 1. Los puntos marcados en esta figura, y los que continúan con el mismo patrón hacia la derecha, corresponden al conjunto de los números cardinales.

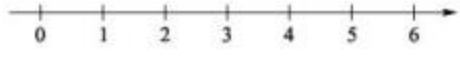


FIGURA 1

Todos los enteros no negativos que comienzan con 1 se localizan a la derecha del 0 en la recta numérica. Pero los números pueden colocarse también a la izquierda del 0. Éstos, los cuales se escriben como -1, -2, -3, etc., se ilustran en la figura 2. (El signo negativo se utiliza para indicar que los números están ubicados a la *izquierda* del 0.)

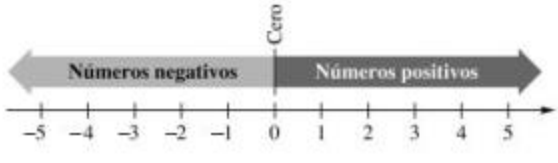


FIGURA 2

Los números a la *izquierda* del 0 son **números negativos**. Los que se encuentran a la *derecha* del 0 son **números positivos**. El 0 no es positivo ni negativo. Los números positivos y los negativos se denominan **números con signo**.

Los orígenes de los números negativos Los números negativos surgieron en China entre el año 200 a.C. y el 220 d.C. En un principio, los matemáticos consideraban a los números negativos como algo feo y desagradable, aunque los tenían en cuenta para resolver los problemas que surgían. Por ejemplo, un texto procedente de India, que data aproximadamente del año 1150 de nuestra era, da como solución de una ecuación la cifra de -5, y luego se mofa de algo tan inútil.

Leonardo de Pisa (Fibonacci), mientras trabajaba en un problema financiero, se vio forzado a concluir que la solución debía ser un número negativo (esto es, una pérdida financiera). En 1545 d.C., Girolamo Cardano publicó las reglas de operaciones gubernamentales con números negativos en su *Ars Magna* (*El gran arte*).

Hay muchas aplicaciones prácticas de los números negativos. En ocasiones, por ejemplo, las temperaturas del ambiente descienden por debajo del 0. La temperatura más baja consignada en los registros meteorológicos fue de $-128.6°F$ en Vostok, en la Antártida, el 22 de julio de 1983. Altitudes por debajo del nivel del mar, pueden representarse por medio de números negativos. La costa que rodea al Mar Muerto se ubica a 1312 pies por debajo del nivel del mar y se representa como -1312 pies.

El conjunto de los números marcados sobre la recta numérica en la figura 2, incluidos los enteros positivos, negativos y el 0, forma parte del conjunto de los *enteros*.

Enteros

$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de los **enteros**.

No todos los números son enteros. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ no lo es, pues se trata de un número que está a la mitad del camino entre los enteros 0 y 1, $3\frac{1}{4}$ tampoco es un entero. En la figura 3 *se grafican* varios números que no son enteros. La **gráfica** de un número es un punto sobre la recta numérica. Piense en la gráfica de un conjunto de números como la imagen del conjunto. Todos los números de la figura 3 pueden escribirse como cociente de enteros. Estos números son ejemplos de *números racionales*.

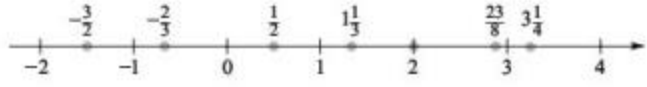


FIGURA 3

Observe que un entero, como 2, también es un número racional; por ejemplo, $2 = 2/1$.

Números racionales

$\{x | x$ es el cociente de dos enteros, con un denominador diferente de $0\}$ constituye el conjunto de los **números racionales**.

(La parte entre las llaves se lee como "el conjunto de todos los números x, de modo que x es el cociente de dos enteros, con un denominador diferente de cero".)

El simbolismo de conjuntos utilizado en la definición de números racionales,

$$\{x \mid x \text{ tiene cierta propiedad}\},$$

se llama **notación de construcción de conjuntos**. Conviene utilizar esta notación cuando no es posible indicar todos los elementos del conjunto.

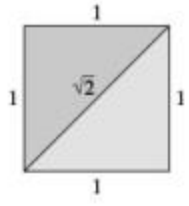


FIGURA 4

Aunque una gran cantidad de números son racionales, no todos lo son. Por ejemplo, un cuadrado que mide una unidad por lado tiene una diagonal cuya longitud es la raíz cuadrada de 2, se escribe $\sqrt{2}$. Vea la figura 4. Posteriormente se mostrará que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente de dos enteros. A consecuencia de esto, $\sqrt{2}$ no es racional; es *irracional*.

Números irracionales

$\{x | x$ es un número de la recta real, que no es racional$\}$ es el conjunto de los **números irracionales**.

Ejemplos de números irracionales incluyen a $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{10}$ y π, que es la razón de la distancia alrededor de un círculo (su *circunferencia*) a la distancia que lo cruza (su *diámetro*).

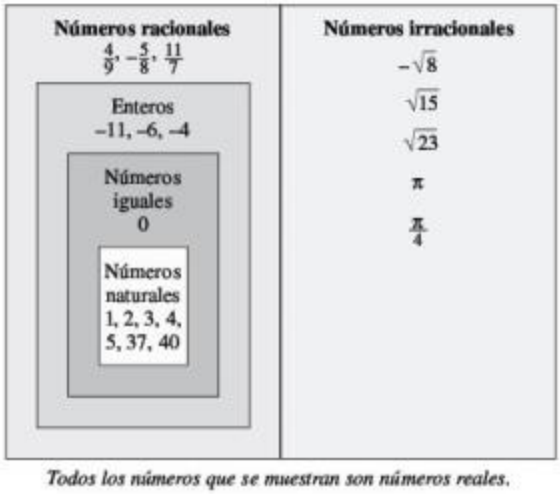
Todos los números que pueden representarse mediante puntos en la recta real se denominan *números reales*.

Números reales

$\{x \mid x$ es un número que puede representarse mediante un punto en la recta numérica$\}$ es el conjunto de los **números reales**.

Los números reales pueden escribirse como números decimales. Cualquier número racional puede escribirse como un decimal que llega a un fin (termina), o que se repite en un "bloque" fijo de dígitos. Por ejemplo, $2/5 = .4$ y $27/100 = .27$ son números racionales con decimales que terminan; $1/3 = .3333...$ y $3/11 = .27272727...$ son decimales que se repiten. La representación decimal de un número irracional nunca terminará ni se repetirá. Las representaciones decimales de los números racionales e irracionales se analizarán más adelante en este capítulo.

La figura 5 ilustra dos maneras de representar las relaciones entre los diferentes conjuntos de números reales.



Todos los números que se muestran son números reales.

(a)



(b)

FIGURA 5

EJEMPLO 1 Liste los números en el conjunto

$$\left\{-5, -\frac{2}{3}, 0, \sqrt{2}, \frac{13}{4}, 5, 5.8\right\}$$

que pertenecen a cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) números naturales

El único número natural en el conjunto es el 5.



La calculadora TI-83 Plus convertirá un decimal en una fracción. Vea el ejemplo 1(d).

(b) cardinales

Estos números consisten en los números naturales y el 0. Así que, los elementos del conjunto que son cardinales son 0 y 5.

(c) enteros

Los enteros en el conjunto son -5, 0 y 5.

(d) números racionales

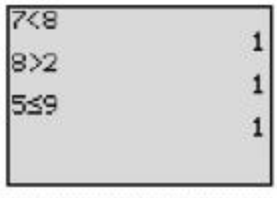
Los números racionales son -5, $-2/3$, 0, $13/4$, 5 y 5.8, ya que cada uno de éstos *puede* escribirse como el cociente de dos enteros. Por ejemplo, $5.8 = 58/10 = 29/5$.

(e) números irracionales

El único número irracional en el conjunto es $\sqrt{2}$.

(f) números reales

Todos los números en el conjunto son números reales. ■



La calculadora nos da un 1 para estos enunciados de desigualdad, lo que significa que cada uno de ellos es verdadero.

Orden Dos números reales se pueden comparar u ordenar utilizando las ideas de igualdad o desigualdad. Suponga que a y b representan dos números reales. Si sus gráficas en la recta numérica están en el mismo punto, son **iguales**. Si la gráfica de a está a la izquierda de b, entonces a es **menor que** b, y si la gráfica de a está a la derecha de b, entonces a es **mayor que** b. Utilizamos símbolos para representar estas ideas.

Cuando se lee de izquierda a derecha, el símbolo $<$ significa "es menor que", de modo que para decir que "7 es menor que 8" se escribe

$$7 < 8.$$

El símbolo $>$ significa "es mayor que". Escribimos "8 es mayor que 2" como

$$8 > 2.$$

Observe que el símbolo siempre apunta hacia el número más pequeño. Por ejemplo, escribimos "8 es menor que 15" apuntando el símbolo hacia el 8:

$$8 < 15.$$

El símbolo $\leq$ significa "es menor o igual a", de modo que

$$5 \leq 9$$

significa "5 es menor o igual que 9". Este enunciado es verdadero, ya que $5 < 9$ es verdadero. Si la parte $<$ o la parte $=$ es verdadera, entonces la desigualdad $\leq$ es verdadera.

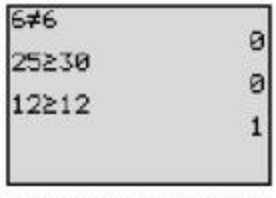
El símbolo $\geq$ significa "es mayor o igual que". Nuevamente,

$$9 \geq 5$$

es verdadero, ya que $9 > 5$ es verdadero. Además, $8 \leq 8$ es verdadero, ya que $8 = 8$ es verdadero. Pero, no es verdadero $13 \leq 9$, pues no son verdaderos el $13 < 9$ ni $13 = 9$.

El símbolo de igualdad, $=$, fue presentado por primera vez por el inglés Robert Recorde en su texto de álgebra de 1557, *The Whetstone of Witte*. Se sirvió de dos segmentos de líneas paralelas, pues según se afirmaba, no podía haber dos cosas que fueran más iguales.

Los símbolos de las relaciones de orden, $<$ y $>$, fueron introducidos por otro inglés, Thomas Harriot (1560-1621). Estos símbolos no fueron adoptados de manera inmediata por otros matemáticos.



Las desigualdades del ejemplo 2(a) y (d) son falsas, como se indica por medio del 0. El enunciado en el ejemplo 2(e) es verdadero.

EJEMPLO 2 Determine si cada proposición es *verdadera* o *falsa*.

(a) $6 \neq 6$ La proposición es falsa ya que 6 *es igual a 6*.

(b) $5 < 19$ Como 5 en realidad es menor que 19, esta proposición es verdadera.

(c) $15 \leq 20$ La proposición es verdadera, ya que $15 < 20$.

(d) $25 \geq 30$ Tanto $25 > 30$ como $25 = 30$ son falsas, así que $25 \geq 30$ es falsa.

(e) $12 \geq 12$ Como $12 = 12$, esta proposición es verdadera. ■

Inversos aditivos y valor absoluto Para cualquier número real x (excepto 0), hay exactamente un número sobre la recta numérica, que está a la misma distancia del 0 que x, pero en lado opuesto del 0. Por ejemplo, la figura 6 muestra que los números 3 y -3 están a la misma distancia a partir del 0, pero en lados opuestos del 0. Los números 3 y -3 se conocen como **inversos aditivos** o **simétricos** (u **opuestos**), uno del otro.

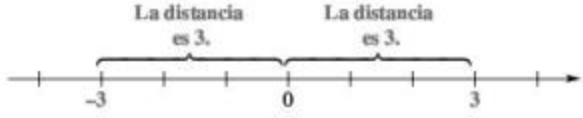


FIGURA 6

El inverso aditivo del número 0 es el 0 mismo. Esto hace que el 0 sea el único número real que es su propio inverso aditivo. Los demás inversos aditivos se dan por pares. Por ejemplo, 4 y -4, y también 5 y -5, son inversos aditivos uno del otro. En la figura 7 se aprecian varios pares de inversos aditivos.

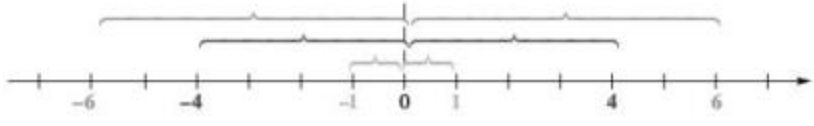


FIGURA 7

El inverso aditivo de un número puede indicarse escribiendo el símbolo $-$ precediendo al número. Con este símbolo, el inverso aditivo de 7 se escribe -7. El inverso aditivo de -4 se escribe $-(-4)$, y también puede leerse "el simétrico de -4", "el negativo de -4" o "el opuesto de -4". La figura 7 indica que 4 es el inverso aditivo de -4. Como un número sólo puede tener un inverso aditivo, los símbolos 4 y $-(-4)$ deben representar al mismo número, lo cual significa que

$$-(-4) = 4.$$

Esta idea puede generalizarse como sigue.

Regla del doble negativo

Para cualquier número real

$$-(-x) = x.$$

Número	Inverso aditivo
-4	$-(-4)$ o 4
0	0
19	-19
$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

El diagrama muestra varios números y sus inversos aditivos. Se estudiará con mayor detalle una propiedad importante de lo inversos aditivos en una sección posterior de este capítulo: $a + (-a) = (-a) + a = 0$ para todo número real a.

Como se mencionó, los inversos aditivos son números que están a la misma distancia del 0 sobre la recta numérica. Vea la figura 7. Esta idea también puede expresarse

diciendo que un número y su inverso aditivo tienen el mismo valor absoluto. El **valor absoluto** de un número real puede definirse como la distancia entre 0 y el número, en la recta numérica. El símbolo para el valor absoluto del número x es $|x|$, el cual se lee como "el valor absoluto de x". Por ejemplo, la distancia entre 2 y 0 en la recta numérica es de 2 unidades, de modo que

$$|2| = 2.$$

En virtud de que la distancia entre -2 y 0 en la recta numérica también es de 2 unidades.

$$|-2| = 2.$$

Como la distancia es una medida física, que nunca es negativa, **el valor absoluto de un número nunca es negativo.** Por ejemplo, $|12| = 12$ y $|-12| = 12$, ya que ambos, 12 y -12, están a una distancia de 12 unidades del 0 en la recta numérica. También, como 0 está a 0 unidades del 0,

$$|0| = 0.$$

En símbolos, el valor absoluto de x se define como sigue:

Definición formal de valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Con esta definición, si x es un número positivo o 0, entonces su valor absoluto es el mismo x. Por ejemplo, como 8 es un número positivo, $|8| = 8$. Sin embargo, si x es un número negativo, entonces su valor absoluto es el inverso aditivo de x. Por ejemplo, ya que -9 es un número negativo, $|-9| = -(-9) = 9$, pues el inverso aditivo de -9 es 9.

La definición formal de valor absoluto puede confundirse, si no se lee de manera cuidadosa. "$-x$" en la segunda parte de la definición *no* representa a un número negativo. Como, en la segunda parte, x es negativa, $-x$ representa al simétrico de un número negativo, es decir, a un número positivo. *El valor absoluto de un número nunca es negativo.*

EJEMPLO 3 Simplifique lo siguiente, elimine los símbolos de valor absoluto.

(a) $|5| = 5$ **(b)** $|-5| = -(-5) = 5$

(c) $-|5| = -(5) = -5$ **(d)** $-|-14| = -(14) = -14$

(e) $|8 - 2| = |6| = 6$ **(f)** $-|8 - 2| = -|6| = -6$ ■

La parte (e) del ejemplo 3 muestra que las barras de valor absoluto también son símbolos de agrupación. Debe realizar las operaciones que aparecen dentro de los símbolos de valor absoluto antes de determinar el valor absoluto.

Aplicaciones Una tabla de datos proporciona una manera concisa de relacionar información.

EJEMPLO 4 En la tabla se muestra la proyección de las tasas porcentuales anuales de cambio en el número de empleos en algunas de las industrias con mayor crecimiento y con disminución más rápida de 1994 a 2005.

Industria (1994-2005)	Porcentaje de la tasa de cambio
Servicios de salud	5.7
Servicios de cómputo y procesamiento de información	4.9
Estancias infantiles y guarderías	4.3
Calzado, excepto hule y plástico	−6.7
Equipos de audio y vídeos caseros	−4.2
Productos de piel, equipajes y bolsos de mano	−3.3

Fuente: Oficina de Estadística Laborales de Estados Unidos.

¿Qué industria de la lista se espera tenga el mayor cambio?, ¿y el menor cambio?

Nos referimos al mayor *cambio* sin considerar si se trata de un aumento o una disminución. Busque el número en la lista con el mayor valor absoluto. Ese número se encuentra en calzado, ya que $|-6.7| = 6.7$. De manera similar, el menor cambio es en la industria de productos de piel, equipaje y bolsos de mano: $|-3.3| = 3.3$. ■

6.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 6, proporcione un número que satisfaga la condición dada.

1. Un entero entre 3.5 y 4.5.
2. Un número racional entre 3.8 y 3.9.
3. Un número cardinal que no sea positivo y menor que 1.
4. Un número cardinal mayor a 4.5.
5. Un número irracional que esté entre $\sqrt{11}$ y $\sqrt{13}$.
6. Un número real que no sea negativo ni positivo.

En los ejercicios 7 a 10, decida cuál enunciado es verdadero y cuál es falso.

7. Todo número natural es positivo.
8. Cualquier número cardinal es positivo.
9. Todo número entero es un número racional.
10. Cualquier número racional es un número real.

En los ejercicios 11 y 12, haga una lista de todos los números de cada conjunto dado que pertenezcan a (a) *los números naturales* (b) *los números cardinales,* (c) *los enteros,* (d) *los números racionales,* (e) *los números irracionales y* (f) *los números reales.*

11. $\left\{-9, -\sqrt{7}, -1\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}, 0, \sqrt{5}, 3, 5.9, 7\right\}$
12. $\left\{-5.3, -5, -\sqrt{3}, -1, -\frac{1}{9}, 0, 1.2, 1.8, 3, \sqrt{11}\right\}$
13. Explique con sus palabras los diferentes conjuntos presentados en esta sección, y proporcione un ejemplo de cada uno.
14. ¿Cuáles dos posibles situaciones existen para la representación decimal de números racionales?

Utilice un entero para expresar cada número que representa un cambio en las aplicaciones siguientes.

15. ***Población de Michigan*** La población de Michigan aumentó 568,488 entre los años 1990 y 1999. (*Fuente:* Oficina de Censos de Estados Unidos.)

16. ***Altura de la Torre Sears*** La Torre Sears, en Chicago, tiene una altura de 1450 pies. (*Fuente:* Comisión sobre Edificios y Hábitat Urbano.)

17. ***Punto de ebullición del cloro*** El punto de ebullición del cloro es de 30° bajo 0° Fahrenheit, aproximadamente.

18. ***Altura del monte Arenal*** La altura del monte Arenal, un volcán activo en Costa Rica, es de 5436 pies sobre el nivel del mar. (*Fuente: Almanaque Mundial*, 1997, John W. Wright, editor general.)

19. ***Población en el distrito de Columbia*** La población del distrito de Columbia disminuyó 34,841 entre los años 1990 y 2000. (*Fuente:* Oficina del Censo de Estados Unidos.)

20. ***Producción de automóviles en Taiwán*** En un año reciente, Taiwán produjo 159,376 más automóviles de pasajeros más que vehículos comerciales. (*Fuente:* Asociación Americana de Fabricantes de Automóviles.)

21. ***Elevación de Nueva Orleans*** La ciudad de Nueva Orleans se encuentra 8 pies bajo el nivel del mar. (*Fuente:* Encuesta Geológica de Estados Unidos. *Elevations and Distancies in the United States*, 1990.)

22. ***Viento helado*** Cuando la velocidad del viento es de 20 millas por hora y la temperatura es de 25° Fahrenheit, el factor de congelación es 3° bajo 0° Fahrenheit. (Proporcione tres respuestas.)

23. ***Profundidad y altura de mares y montañas*** La siguiente tabla proporciona datos sobre la profundidad y la altura de algunos mares y montañas.

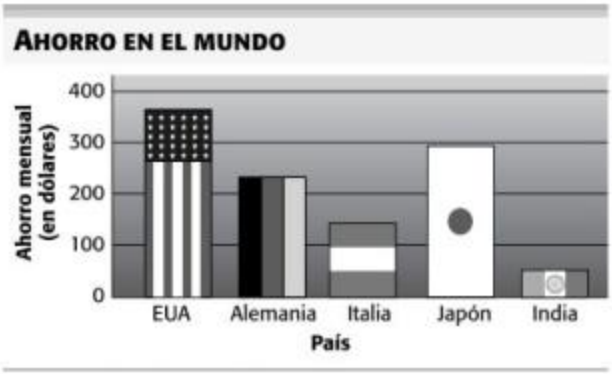
Mares	Promedio de profundidad en pies (como un número negativo)	Montañas	Altura en pies (como un número positivo)
Océano Pacífico	−12,925	McKinley	20,320
Mar del Sur de China	−4802	Point Success	14,150
Golfo de California	−2375	Matlalcuéyetl	14,636
Mar Caribe	−8448	Ranier	14,410
Océano Índico	−12,598	Steele	16,644

Fuente: Almanaque mundial y libro de hechos.

(a) Enumere los mares en orden, inicie con el más profundo y finalice con el menos profundo.
(b) Ordene las montañas, desde la más baja a la más alta.
(c) *Cierto o falso:* El valor absoluto de la profundidad del Océano Pacífico es mayor que el valor absoluto de la profundidad del Océano Índico.
(d) *Cierto o falso:* El valor absoluto de la profundidad del Golfo de California es mayor que el valor absoluto de la profundad del Mar Caribe.

24. ***Ahorro para planes de retiro*** La gráfica de barras compara los ahorros mensuales de cinco países e incluye los planes de retiro.

(a) ¿Cuál país tiene el mayor promedio de ahorro?
(b) ¿Cuáles países tienen un promedio mensual de ahorro mayor a $200?
(c) Estime el promedio mensual de ahorro para Japón e Italia.
(d) Determine la diferencia entre los promedios de ahorro mensuales en Japón e Italia.



Fuente: Taylor Nelson-Sofres para American Express.

Grafique cada grupo de números en una recta numérica.

25. $-2, -6, -4, 3, 4$

26. $-5, -3, -2, 0, 4$

27. $\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, -3\frac{4}{5}, -4, -1\frac{5}{8}$

28. $5\frac{1}{4}, 4\frac{5}{9}, -2\frac{1}{3}, 0, -3\frac{2}{5}$

29. Relacione cada expresión de la columna I con su valor en la columna II. Algunas opciones de la columna II, podrían no utilizarse.

I	II
(a) $\lvert -7\rvert$	**A.** 7
(b) $-(-7)$	**B.** -7
(c) $-\lvert -7\rvert$	**C.** ni A ni B
(d) $-\lvert -(-7)\rvert$	**D.** tanto A como B

30. Complete con los valores correctos. El opuesto de -2 es _____, mientras que el valor absoluto de -2 es _____. El inverso aditivo de -2 es _____, en tanto que el inverso aditivo del valor absoluto de -2 es _____.

Determine **(a)** *el inverso aditivo (simétrico) de cada número y* **(b)** *el valor absoluto de cada número.*

31. -2 **32.** -8 **33.** 6 **34.** 11

35. $7 - 4$ **36.** $8 - 3$ **37.** $7 - 7$ **38.** $3 - 3$

39. Utilice los resultados de los ejercicios 35 y 36 para completar lo siguiente: Si $a - b > 0$, entonces el valor absoluto de $a - b$ en términos de a y b es _____.

40. Con los resultados de los ejercicios 37 y 38 complete lo siguiente: Si $a - b = 0$, entonces el valor absoluto de $a - b$ en términos de $a - b$ es _____.

Seleccione el menor de los dos números dados,

41. $-12, -4$ **42.** $-9, -14$ **43.** $-8, -1$

44. $-15, -16$ **45.** $3, \lvert -4\rvert$ **46.** $5, \lvert -2\rvert$

47. $\lvert -3\rvert, \lvert -4\rvert$ **48.** $\lvert -8\rvert, \lvert -9\rvert$ **49.** $-\lvert -6\rvert, -\lvert -4\rvert$

50. $-\lvert -2\rvert, -\lvert -3\rvert$ **51.** $\lvert 5 - 3\rvert, \lvert 6 - 2\rvert$ **52.** $\lvert 7 - 2\rvert, \lvert 8 - 1\rvert$

Decida si cada enunciado es falso o verdadero.

53. $6 > -(-2)$ **54.** $-8 > -(-2)$ **55.** $-4 \leq -(-5)$

56. $-6 \leq -(-3)$ **57.** $\lvert -6\rvert < \lvert -9\rvert$ **58.** $\lvert -12\rvert < \lvert -20\rvert$

59. $-\lvert 8\rvert > \lvert -9\rvert$ **60.** $-\lvert 12\rvert > \lvert -15\rvert$ **61.** $-\lvert -5\rvert \geq -\lvert -9\rvert$

62. $-\lvert -12\rvert \leq -\lvert -15\rvert$ **63.** $\lvert 6 - 5\rvert \geq \lvert 6 - 2\rvert$ **64.** $\lvert 13 - 8\rvert \leq \lvert 7 - 4\rvert$

Índice de precios del fabricante *Para responder las preguntas de los ejercicios 65 al 68 consulte la tabla que proporciona los cambios en los índices de precios del fabricante para los últimos dos años.*

65. ¿Cuál bien y en qué año representa la mayor disminución?

66. ¿Cuál bien y en qué año se presenta el menor cambio?

67. ¿Cuál tiene el menor valor absoluto, el cambio para equipos de video/audio de 1995 a 1996, o bien de 1996 a 1997?

68. ¿Cuál tiene el mayor valor absoluto, el cambio en vestimenta de 1995 a 1996, o bien de 1996 a 1997?

Bien	Cambio de 1995 a 1996	Cambio de 1996 a 1997
Alimentos	4.9	4.0
Transporte	3.9	1.3
Vestimenta	−.5	.9
Equipo de video/audio	−2.6	−2.2
Alojamiento	5.3	5.3

Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales de Estados Unidos.

69. ***Comparación de datos de empleo*** Vea la tabla del ejemplo 4. Compare la industria de equipo de audio-/video caseros con los servicios de procesamiento de datos/cómputo, ¿cuál mostrará el mayor cambio (sin importar el signo)?

70. Con frecuencia los estudiantes dicen: "El valor absoluto siempre es positivo". ¿Es verdadero o falso? Explique su respuesta.

Proporcione tres números entre −6 y 6 que satisfagan cada condición.

71. Números reales positivos pero no enteros.

72. Números reales pero no números positivos.

73. Números reales pero no cardinales.

74. Números racionales pero no enteros.

75. Números reales pero no números racionales.

76. Números racionales pero no números negativos.

6.2 Operaciones, propiedades y aplicaciones de los números reales



Aritmética práctica Desde la época de los comerciantes egipcios y babilónicos, los aspectos prácticos de la aritmética complementaban tendencias místicas (o "pitagóricas"). Y así fue, en particular, en la época de Adam Riese (1489-1559), un influyente "maestro del cálculo", cuando el comercio creció en el norte de Europa. El retrato de Riese de la estampilla postal que encabeza esta nota proviene de la portada de uno de sus populares libros "*Rechnung*" (o cálculo). Riese abogó por nuevos métodos de cálculo que empleaban numerales indoarábigos y plumas de ave. (Los métodos romanos, entonces de uso común, se servían de cuentas que se desplazaban sobre una tabla.) Así, Riese hizo realidad los esfuerzos que Fibonacci había hecho 300 años antes, para sustituir los numerales y los métodos romanos.

Operaciones

La respuesta de un problema de adición se denomina **suma**.

Suma de números reales

Signos iguales Para sumar dos números con el *mismo* signo, deben sumarse sus valores absolutos. El signo de la suma (+ o −) es el mismo que el signo de los dos números.

Signos diferentes Para sumar dos números con signos *diferentes* debe restarse el valor absoluto más pequeño del más grande. La suma es positiva si el número positivo tiene el valor absoluto más grande. La suma es negativa si el número negativo posee el valor absoluto más grande.

Por ejemplo, para sumar -12 y -8, primero han de obtenerse sus valores absolutos:

$$|-12| = 12 \quad \text{y} \quad |-8| = 8.$$

Como estos números tienen el *mismo* signo, sume sus valores absolutos: $12 + 8 = 20$. Proporcione a la suma el signo de los dos números. Como ambos números son negativos, la suma es negativa y

$$-12 + (-8) = -20.$$

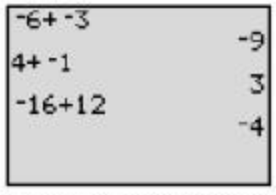
Determine $-17 + 11$ restando los valores absolutos, ya que estos números tienen signos diferentes.

$$|-17| = 17 \quad \text{y} \quad |11| = 11$$
$$17 - 11 = 6$$

Agregue al resultado el signo del número con mayor valor absoluto.

$$-17 + 11 = -6$$

↑ Negativo ya que $|-17| > |11|$



La calculadora confirma los resultados en el ejemplo 1(a), (c) y (e).

EJEMPLO 1 Determine cada una de las sumas siguientes:

(a) $(-6) + (-3) = -(6 + 3) = -9$

(b) $(-12) + (-4) = -(12 + 4) = -16$

(c) $4 + (-1) = 3$ **(d)** $-9 + 16 = 7$ **(e)** $-16 + 12 = -4$ ■

El resultado de la sustracción se conoce como **diferencia**. Así, la diferencia entre 7 y 5 es 2. Compare los dos enunciados siguientes.

$$7 - 5 = 2$$
$$7 + (-5) = 2$$

De manera similar, $9 - 3 = 9 + (-3)$.

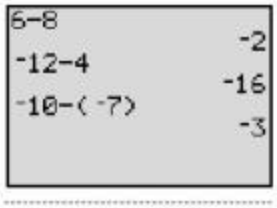
Esto es, para restar (sustraer) 3 de 9, sume el inverso aditivo de 3 a 9. Estos ejemplos sugieren la regla siguiente para la sustracción.

Definición de sustracción

Para todos los números reales a y b,

$$a - b = a + (-b).$$

(Cambie el signo del segundo número y sume.)



La calculadora confirma los resultados del ejemplo 2(a), (b) y (c). Observe cómo el signo *negativo* es diferente del signo *menos* (sustracción). Hay teclas distintas en la calculadora para estos propósitos.

EJEMPLO 2 Realice las operaciones indicadas.

(a) $6 - 8 = 6 + (-8) = -2$ (Cambiar a suma. Cambiar el signo del segundo número.)

(b) $-12 - 4 = -12 + (-4) = -16$ (Cambiar a suma. Signo cambiado.)

(c) $-10 - (-7) = -10 + [-(-7)]$ Este paso se puede omitir.
$= -10 + 7$
$= -3$

(d) $15 - (-3) - 5 - 12$

Realizar las sumas y las restas en orden de izquierda a derecha.

$$15 - (-3) - 5 - 12 = (15 + 3) - 5 - 12$$
$$= 18 - 5 - 2$$
$$= 13 - 12$$
$$= 1$$ ■

El **producto** es el resultado de un problema de multiplicación. Cualquier regla de multiplicación con números reales negativos debe ser consistente con las reglas comunes para la multiplicación de los números reales positivos y cero. Para obtener

de manera inductiva una regla para la multiplicación de un número real positivo y un número real negativo, observe el siguiente patrón de productos:

$$4 \cdot 5 = 20$$
$$4 \cdot 4 = 16$$
$$4 \cdot 3 = 12$$
$$4 \cdot 2 = 8$$
$$4 \cdot 1 = 4$$
$$4 \cdot 0 = 0$$
$$4 \cdot (-1) = ?$$

¿Qué número debe asignarse al producto $4 \cdot (-1)$, de modo que se mantenga el patrón? Los números justo a la izquierda del signo de igualdad disminuyen de 1 en 1, y los productos de la derecha decrecen de 4 en 4. Para mantener el patrón, el número a la derecha en la ecuación de abajo debe ser 4 menos que 0, que es -4, así que

$$4 \cdot (-1) = -4.$$

El patrón continúa con

$$4 \cdot (-2) = -8$$
$$4 \cdot (-3) = -12$$
$$4 \cdot (-4) = -16,$$

y así sucesivamente. De la misma manera,

$$-4 \cdot 2 = -8$$
$$-4 \cdot 3 = -12$$
$$-4 \cdot 4 = -16,$$

etc. Puede hacerse una observación similar acerca del producto de dos números negativos reales. Vea el patrón que sigue

$$-5 \cdot 4 = -20$$
$$-5 \cdot 3 = -15$$
$$-5 \cdot 2 = -10$$
$$-5 \cdot 1 = -5$$
$$-5 \cdot 0 = 0$$
$$-5 \cdot (-1) = ?$$

Los números que están justo a la izquierda de los signos de igualdad disminuyen en 1 cada vez. Los productos a la derecha aumentan 5 cada vez. Para conservar el patrón, el producto $-5 \cdot (-1)$ debe ser 5 más que 0, o

$$-5 \cdot (-1) = 5.$$

Si se continúa con este patrón se obtiene

$$-5 \cdot (-2) = 10$$
$$-5 \cdot (-3) = 15$$
$$-5 \cdot (-4) = 20,$$

y así sucesivamente. Estas observaciones conducen a las reglas siguientes para la multiplicación:

Las primeras formas de escribir los símbolos de las cuatro operaciones básicas eran muy diferentes a las de la actualidad. El símbolo de la adición que aparece abajo tuvo su origen en la palabra italiana *più* (más) en el siglo XVI. El signo + empleado en la actualidad es la contracción de la palabra latina *et* (y).



El símbolo para la sustracción que aparece abajo fue utilizado por Diofanto en Grecia entre los siglos II y III d.C. La actual raya de sustracción proviene quizás de la línea utilizada en la Edad Media por los comerciantes para marcar las diferencias en los pesos de los productos.



En el siglo XVII, Leibniz se sirvió del símbolo que se muestra a continuación para la multiplicación, para evitar el signo × ya que era demasiado similar a la "incógnita" x. El símbolo de multiplicación × proviene de la Cruz de San Andrés.



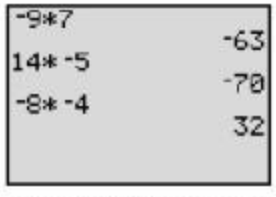
El símbolo para la división que se aprecia bajo esta nota fue usado por Gallimard en el siglo XVIII. El conocido símbolo ÷ quizá provenga de la raya de fracción, adornada con un punto arriba y otro abajo.



Multiplicación de números reales

Signos iguales Para multiplicar dos números con el *mismo* signo, multiplique sus valores absolutos. El producto es positivo.

Signos diferentes Para multiplicar dos números con signos *diferentes*, multiplique sus valores absolutos. El producto es negativo.



En esta pantalla, el asterisco (*) representa la multiplicación. La pantalla confirma los resultados del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Determine cada uno de siguientes productos:

(a) $-9 \cdot 7 = -63$ **(b)** $14 \cdot (-5) = -70$ **(c)** $-8 \cdot (-4) = 32$ ■

El resultado que se obtiene al dividir dos números reales se denomina **cociente**. Para los números reales a, b y c, donde $b \neq 0$, $a/b = c$ significa que $a = b \cdot c$. Para ilustrar esto, considere el problema de la división

$$\frac{10}{-2}.$$

El valor de este cociente se obtiene preguntado: "¿Cuál es el número que multiplicado por -2 da 10"? De nuestro estudio de la multiplicación, la respuesta a esta pregunta debe ser "-5". Por lo tanto,

$$\frac{10}{-2} = -5,$$

ya que $(-2) \cdot (-5) = 10$. Un razonamiento análogo conduce a los resultados siguientes.

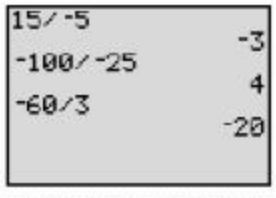
$$\frac{-10}{2} = -5 \quad \text{y} \quad \frac{-10}{-2} = 5$$

Estos hechos, junto con el caso de que el cociente de dos números positivos es positivo, lleva a las reglas siguientes para la división.

División de números reales

Signos iguales Para dividir dos números con el *mismo* signo, deben dividirse sus valores absolutos. El cociente es positivo.

Signos diferentes Para dividir dos números con signos *diferentes*, hay que dividir sus valores absolutos. El cociente es negativo.



La operación de división se representa por medio de una diagonal (/). Esta pantalla confirma los resultados del ejemplo 4.

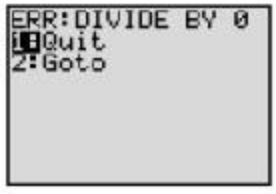
EJEMPLO 4 Determine cada uno de los siguientes cocientes:

(a) $\dfrac{15}{-5} = -3$ Esto es cierto ya que $-5 \cdot (-3) = 15$.

(b) $\dfrac{-100}{-25} = 4$ **(c)** $\dfrac{-60}{3} = -20$ ■

Si 0 se divide entre un número diferente de 0, el cociente es 0. Esto es

$$\frac{0}{a} = 0 \quad \text{para } a \neq 0.$$



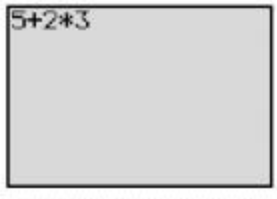
En la TI-83 Plus, una división entre cero tiene como resultado este mensaje.

Esto es verdadero, ya que $a \cdot 0 = 0$. Sin embargo, no podemos dividir entre 0. Hay una buena razón para esto. Siempre que se realiza una división, queremos obtener un solo cociente. Ahora, considere el problema de división.

$$\frac{7}{0}.$$

Nos debemos preguntar "¿qué número multiplicado por 0 da 7?" No existe tal número, ya que el producto de 0 y cualquier número es 0. Por otra parte, si consideramos el cociente

$$\frac{0}{0},$$



¿Qué resultado nos da la calculadora? El orden de las operaciones determina la respuesta. (Vea el ejemplo 5(a).)

existe un número infinito de respuestas a la interrogante "¿qué número multiplicado por 0 da 0?" Como la división entre 0 no da como resultado un *único* cociente, no se permite. Para resumir estas dos situaciones, expresamos el enunciado siguiente:

La división entre 0

La división entre 0 no está definida.

Orden de las operaciones Dado un problema como $5 + 2 \cdot 3$, ¿debe sumarse primero 5 y 2 o debe multiplicarse primero 2 por 3? Cuando un problema comprende más de una operación, utilizamos el siguiente **orden de operaciones**. (Éste es el orden utilizado por las computadoras y muchas calculadoras.)

La frase "Ponte en mi difícil situación, Reyna" se puede utilizar para recordar la regla del orden de las operaciones. Las letras P, E, M, D, S, R son las primeras letras de las palabras de la oración y significan *paréntesis, exponentes, multiplicación, división, suma y resta. (También recuerde que M y D tienen igual prioridad, así como S y R. Las operaciones con igual prioridad se realizan de izquierda a derecha.)*

Orden de las operaciones

Si hay paréntesis o corchetes:

Paso 1: Resuelva arriba y abajo de las **líneas de fracciones** por separado.

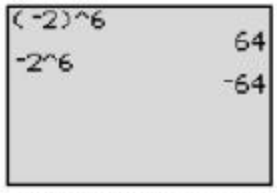
Paso 2: Utilice las reglas siguientes dentro de cada conjunto de **paréntesis o corchetes**. Comience con el conjunto más interno y trabaje hacia fuera.

Si no hay paréntesis o corchetes:

Paso 1: Aplique todos los **exponentes**.

Paso 2: Haga las **multiplicaciones o divisiones** en el orden en que aparezcan, trabajando de izquierda a derecha.

Paso 3: Haga las **sumas y restas** en el orden en que aparezcan, trabajando de izquierda a derecha.



Observe la diferencia en las dos expresiones. Esto confirma que $(-2)^6 \neq -2^6$.

Cuando se evalúa una expresión con exponentes que incluya un signo negativo, debemos estar conscientes de que $(-a)^n$ y $-a^n$ no necesariamente representan la misma cantidad. Por ejemplo, si $a = 2$ y $n = 6$,

$$(-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64 \qquad \text{La base es } -2.$$

mientras que $-2^6 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -64.$ La base es 2.

EJEMPLO 5 Utilice el orden de las operaciones para simplificar cada una de las operaciones siguientes:

(a) $5 + 2 \cdot 3$

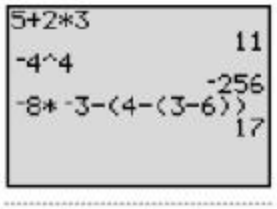
Primero multiplique y luego sume

$$\begin{aligned} 5 + 2 \cdot 3 &= 5 + 6 && \text{Multiplique.} \\ &= 11 && \text{Sume.} \end{aligned}$$

(b) $4 \cdot 3^2 + 7 - (2 + 8)$

Trabaje dentro del paréntesis

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3^2 + 7 - (2 + 8) &= 4 \cdot 3^2 + 7 - 10 \\ &= 4 \cdot 9 + 7 - 10 && \text{Aplique todos los exponentes.} \\ &= 36 + 7 - 10 && \text{Multiplique.} \\ &= 43 - 10 && \text{Sume.} \\ &= 33 && \text{Reste.} \end{aligned}$$



La calculadora confirma los resultados en el ejemplo 5(a), (d) y (f).

(c) $\dfrac{2(8-12)-11(4)}{5(-2)-3} = \dfrac{2(-4)-11(4)}{5(-2)-3}$ Trabaje de forma independiente las partes de arriba y de abajo de la línea de fracción.

$$= \frac{-8-44}{-10-3}$$

$$= \frac{-52}{-13} = 4$$

(d) $-4^4 = -(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = -256$ La base es 4.

(e) $(-4)^4 = (-4)(-4)(-4)(-4) = 256$ La base es -4.

(f)
$$\begin{aligned} (-8)(-3) - [4 - (3 - 6)] &= (-8)(-3) - [4 - (-3)] \\ &= (-8)(-3) - [4 + 3] \\ &= (-8)(-3) - 7 \\ &= 24 - 7 \\ &= 7 \end{aligned}$$

■

Propiedades de la suma y de la multiplicación de números reales En el cuadro siguiente se resumen varias propiedades de la suma y de la multiplicación de números reales, esenciales en el estudio de este capítulo.

Propiedades de la suma y de la multiplicación

Para los números reales, a, b y c, se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedades de clausura	**$a + b$ y ab son números reales.**
Propiedades conmutativas	$a + b = b + a \qquad ab = ba$
Propiedades asociativas	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(ab)c = a(bc)$
Propiedades de identidad	Existe un número real 0, tal que $a + 0 = a$ y $0 + a = a$. Existe un número real 1, tal que $a \cdot 1 = a$ y $1 \cdot a = a$.
Propiedades de los inversos	Para cada número real a, existe un solo número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$ y $(-a) + a = 0$. Para cada número real a, distinto de 0, existe un solo número real $1/a$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ y $\frac{1}{a} \cdot a = 1$.
Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma	$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ba + ca$

Se dice que el conjunto de números reales es cerrado respecto a las operaciones de suma y multiplicación. Esto significa que la suma de dos números reales y el producto de dos números reales son números reales. Las propiedades conmutativas establecen que dos números reales pueden sumarse o multiplicarse en cualquier orden sin afectar al resultado. Las propiedades asociativas nos permiten agrupar términos o factores en la forma que deseemos, sin afectar el resultado. El número 0 se conoce como **elemento identidad para la suma**, y puede sumarse a cualquier número real para obtener ese número real. De forma similar, 1 se conoce como **elemento identidad de la multiplicación**, y al multiplicar un número real por 1 siempre nos dará ese número real. Cada número real a tiene un **inverso aditivo**, $-a$, de manera que su suma es el elemento identidad de la suma, 0. Cada número real distinto de 0 tiene un **inverso multiplicativo**, o **recíproco**, $1/a$, de modo que su producto es el elemento identidad de la multiplicación, 1. La propiedad distributiva nos permite cambiar ciertos productos a sumas o ciertas sumas a productos.

```
X+Y=Y+X
                    1
X+(Y+Z)=(X+Y)+Z
                    1
5(X+Y)=5X+5Y
                    1
```

No importa qué valores estén almacenados en X, Y y Z, las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva nos aseguran que estos enunciados son verdaderos.

EJEMPLO 6 A continuación se muestran algunos ejemplos específicos de las propiedades de suma y multiplicación de números reales.

(a) $5 + 7$ es un número real. Propiedad de clausura de la suma.

(b) $5 + (6 + 8) = (5 + 6) + 8$ Propiedad asociativa de la suma.

(c) $8 + 0 = 8$ Propiedad de identidad de la suma.

(d) $-4\left(-\frac{1}{4}\right) = 1$ Propiedad del inverso de la multiplicación.

(e) $4 + (3 + 9) = 4 + (9 + 3)$ Propiedad conmutativa de la suma.

(f) $5(x + y) = 5x + 5y$ Propiedad distributiva. ■

Aplicaciones de los números reales Puede verse la utilidad de los números negativos si se consideran algunas situaciones que surgen en la vida diaria. Por ejemplo, necesitamos números negativos para expresar las temperaturas de enero, en Anchorage, Alaska, que con frecuencia descienden bajo cero. Vea el ejercicio 80, que explica las frases "en rojo" o "en negro". Y, por supuesto, ¿no hemos tenido todos alguna vez un saldo por debajo de cero en la cuenta de cheques y la esperanza de que nuestro depósito se acredite en el banco antes de que "rebote" un cheque pendiente?

Solución de problemas

Cuando los problemas tratan de pérdidas y ganancias, las ganancias pueden interpretarse como números positivos y las pérdidas como números negativos. Las temperaturas bajo 0° son negativas, y las que se encuentran por encima de 0° son positivas. Las altitudes sobre el nivel del mar se consideran positivas y las que están por debajo, negativas. El ejemplo siguiente muestra una aplicación de esta idea.

EJEMPLO 7 El Índice de Precios del Fabricante es la publicación periódica más antigua de la Oficina de Estadísticas Laborales. Mide los cambios promedio de los precios recibidos por los productores de todos los bienes manufacturados en Estados Unidos. La gráfica de barras en la figura 8 proporciona el Índice de Precios del Fabricante (IPF) para materiales de construcción entre 1993 y 2000.



Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales de Estados Unidos, Índices de Precios del Fabricante, mensual y anual.

FIGURA 8

(a) Utilice números con signo para representar el cambio en el IPF desde 1993 al 1994.

Para determinar este cambio, iniciamos con el número índice de 1994 y le restamos el número índice de 1993.

$$\underbrace{133.8}_{\text{Índice de 1994}} - \underbrace{128.6}_{\text{Índice de 1993}} = \underbrace{5.2}_{\text{Un número positivo indica un aumento.}}$$

(b) Utilice un número con signo para representar el cambio en el IPF de 1997 a 1998.

Utilice el mismo procedimiento que en la parte (a).

$$\underbrace{141.4}_{\text{Índice de 1998}} - \underbrace{142.1}_{\text{Índice de 1997}} = 141.4 + (-142.1) = \underbrace{-0.7}_{\text{Un número negativo indica una disminución.}}$$

■



FIGURA 9

EJEMPLO 8 El récord de la temperatura más alta en Estados Unidos, fue de 134° Fahrenheit y se registró en el Valle de la Muerte, California, en el año 1913. El récord de temperatura más baja fue de −80°F en Prospect Creek, Alaska, en 1971. ¿Cuál es la diferencia entre la temperatura más alta y la más baja? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts,* 2002.)

Debemos restar el valor de la temperatura más baja de la temperatura más alta.

$$\begin{aligned} 134 - (-80) &= 134 + 80 && \text{Utilice la definición de sustracción.} \\ &= 214 && \text{Sume.} \end{aligned}$$

La diferencia entre la temperatura más alta y la más baja es de 214°F. ■

6.2 EJERCICIOS

Complete con la respuesta correcta.

1. La suma de dos números negativos es siempre un número _____ . (negativo/positivo)
2. La suma de un número y su opuesto siempre será un número _____ .
3. Para simplificar la expresión $8 + [-2 + (-3 + 5)]$, debo empezar por sumar _____ y _____, según la regla del orden de las operaciones.
4. Si se está sumando un número positivo y un número negativo, y el negativo tiene el mayor valor absoluto, la suma será un número _____ . (negativo/positivo)
5. Explique en sus propias palabras cómo sumar números con signo. Considere los diferentes casos y proporcione ejemplos.
6. Explique en sus propias palabras cómo multiplicar números con signo.

Realice las operaciones indicadas, utilice el orden de las operaciones cuando sea necesario.

7. $-12 + (-8)$ **8.** $-5 + (-2)$ **9.** $12 + (-16)$

10. $-6 + 17$ **11.** $-12 - (-1)$ **12.** $-3 - (-8)$

13. $-5 + 11 + 3$ **14.** $-9 + 16 + 5$ **15.** $12 - (-3) - (-5)$

16. $15 - (-6) - (-8)$ **17.** $-9 - (-11) - (4 - 6)$ **18.** $-4 - (-13) + (-5 + 10)$

19. $(-12)(-2)$ **20.** $(-3)(-5)$ **21.** $9(-12)(-4)(-1)3$

22. $-5(-17)(2)(-2)4$ **23.** $\dfrac{-18}{-3}$ **24.** $\dfrac{-100}{-50}$

25. $\dfrac{36}{-6}$ **26.** $\dfrac{52}{-13}$ **27.** $\dfrac{0}{12}$

28. $\dfrac{0}{-7}$ **29.** $-6 + [5 - (3 + 2)]$ **30.** $-8[4 + (7 - 8)]$

31. $-8(-2) - [(4^2) + (7 - 3)]$ **32.** $-7(-3) - [(2^3) - (3 - 4)]$ **33.** $-4 - 3(-2) + 5^2$

34. $-6 - 5(-8) + 3^2$ **35.** $(-8 - 5)(-2 - 1)$ **36.** $\dfrac{(-10 + 4) \cdot (-3)}{-7 - 2}$

37. $\dfrac{(-6 + 3) \cdot (-4)}{-5 - 1}$ **38.** $\dfrac{2(-5 + 3)}{-2^2} - \dfrac{(-3^2 + 2)3}{3 - (-4)}$

39. $\dfrac{2(-5) + (-3)(-2^2)}{-6 + 5 + 1}$ **40.** $\dfrac{3(-4) + (-5)(-2)}{2^3 - 2 + (-6)}$

41. $-\dfrac{1}{4}[3(-5) + 7(-5) + 1(-2)]$ **42.** $\dfrac{5 - 3\left(\dfrac{-5 - 9}{-7}\right) - 6}{-9 - 11 + 3 \cdot 7}$

43. ¿Cuál de las siguientes expresiones no están definidas?

A. $\dfrac{8}{0}$ **B.** $\dfrac{9}{6 - 6}$ **C.** $\dfrac{4 - 4}{5 - 5}$ **D.** $\dfrac{0}{-1}$

44. Si no tiene dinero en su bolsillo y divide en partes iguales entre sus tres hijos, ¿cuánto le da a cada uno? Utilice este caso para explicar la división de 0 entre un número diferente de cero.

Identifique la propiedad ilustrada en cada una de las siguientes proposiciones:

45. $6 + 9 = 9 + 6$ **46.** $8 \cdot 4 = 4 \cdot 8$ **47.** $7 + (2 + 5) = (7 + 2) + 5$

48. $(3 \cdot 5) \cdot 4 = 4 \cdot (3 \cdot 5)$ **49.** $9 + (-9) = 0$ **50.** $12 + 0 = 12$

51. $9 \cdot 1 = 9$ **52.** $\left(\frac{1}{-3}\right) \cdot (-3) = 1$ **53.** $0 + 283 = 283$

54. $6 \cdot (4 \cdot 2) = (6 \cdot 4) \cdot 2$ **55.** $2 \cdot (4 + 3) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3$ **56.** $9 \cdot 6 + 9 \cdot 8 = 9 \cdot (6 + 8)$

57. $19 + 12$ es un número real. **58.** $19 \cdot 12$ es un número real.

Los ejercicios 59 al 68 están diseñados para explorar con mayor detalle las propiedades de los números reales.

59. **(a)** Evalúe $6 - 8$ y $8 - 6$.

(b) Con los resultados de la parte (a), podríamos concluir que la sustracción no es una operación _____.

(c) ¿Existen *algunos* números reales a y b para los cuales $a - b = b - a$? Si es así, dé un ejemplo.

60. **(a)** Evalúe $4 \div 8$ y $8 \div 4$.

(b) Con los resultados de la parte (a), podríamos concluir que la división no es una operación _____.

(c) ¿Existen *algunos* números reales a y b para los cuales $a \div b = b \div a$? Si es así, dé un ejemplo.

61. Muchos acontecimientos cotidianos pueden pensarse como operaciones que tienen opuestos o inversos. Por ejemplo, la operación inversa a "acostarse" es "levantarse". Para cada una de las actividades, especifique la actividad inversa.

(a) limpiar su cuarto

(b) ganar dinero

(c) subir el volumen de su reproductor de disco compacto

62. Muchas actividades cotidianas son conmutativas; lo que significa que el orden en que ocurren no afecta el resultado. Por ejemplo, "ponerse la camisa" y "ponerse los pantalones" son operaciones conmutativas. Decida si las actividades dadas son conmutativas.
(a) ponerse los zapatos; ponerse los calcetines
(b) vestirse; bañarse
(c) peinarse el cabello; cepillarse los dientes

63. La siguiente conversación se dio realmente entre uno de los autores de este texto y su hijo, Jack, cuando éste tenía cuatro años de edad.

Papá: "Jack, ¿cuánto es 3 + 0?"
Jack: "3"
Papá: "Jack, ¿cuánto es 4 + 0?"
Jack: "4... y papá, *algo* más cero es igual a *algo*! ¿Qué propiedad de la suma de números reales reconoció Jack?

64. La frase *mostrador de artículo defectuoso* es un ejemplo de un frase que tiene diferentes significados, dependiendo de cómo se agrupen las palabras (piense en las propiedades asociativas). Por ejemplo, *mostrador* (*de artículo defectuoso*) es el lugar donde se devuelven los productos vendidos con ciertos defectos de fábrica, mientras que (*mostrador de artículo*) *defectuoso* indica que el mostrador desde donde se vende o se compra la mercancía tiene imperfecciones. Para cada una de las frases siguientes, explique por qué no se cumple la propiedad asociativa.
(a) pregunta de examen difícil
(b) muñecas con zapatos de plástico
(c) perro del vecino que muerde

65. La propiedad distributiva se cumple para la multiplicación con respecto a la adición. ¿Se cumple la propiedad distributiva para la adición con respecto a la multiplicación? Esto es, ¿es $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ cierto para todos los valores de a, b y c? (*Una pista:* Sea $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$.)

66. Suponga que alguien afirma lo siguiente: La propiedad distributiva para la adición con respecto a la multiplicación (del ejercicio 65) es válida, y aquí se demuestra por qué: Sean $a = 2$, $b = -4$ y $c = 3$. Entonces, $a + (b \cdot c) = 2 + (-4 \cdot 3) = 2 + (-12) = -10$ y $(a + b) \cdot (a + c) = [2 + (-4)] \cdot [2 + 3] = -2 \cdot 5 = -10$. Como ambas expresiones son iguales, la propiedad debe ser válida. ¿Qué respondería a este razonamiento?

67. Suponga que un estudiante le muestra el trabajo siguiente.

$$-3(4 - 6) = -3(4) - 3(6) = -12 - 18 = -30$$

El estudiante ha cometido un error común en la aplicación de la propiedad distributiva. Escriba un párrafo que explique el error y resuelva el problema de forma correcta.

68. Resuelva el problema de dos formas, primero utilice el orden de las operaciones, y luego la propiedad distributiva: Evalúe $9(11 + 15)$.

Cada una de las expresiones en los ejercicios 69 al 76 es igual a 81 o −81. Decida cuál de éstos es el valor correcto.

69. -3^4 **70.** $-(3^4)$ **71.** $(-3)^4$ **72.** $-(-3^4)$
73. $-(-3)^4$ **74.** $[-(-3)]^4$ **75.** $-[-(-3)]^4$ **76.** $-[-(-3^4)]$

Resuelva cada problema evaluando la suma o diferencia de números reales.

77. ***Presupuesto de defensa*** La gráfica de barra muestra el presupuesto federal para la defensa nacional durante los años de 1990 a 2000. Utilice un número con signo para representar el cambio en el desembolso para cada uno de los periodos siguientes.
(a) 1991-1992
(b) 1993-1994
(c) 1996-1997
(d) 1997-1998



Fuente: Oficina de Administración y Presupuesto de Estados Unidos.

78. ***Alturas de montañas y profundidades de depresiones*** La tabla muestra las alturas, en pies, de ciertas montañas y la profundidad, en pies (como números negativos) de determinadas depresiones. Utilice la información dada para encontrar las respuestas en las partes (a) y (d).

Montaña	Altura	Depresión	Profundidad
Foraker	17,400	Filipinas	−32,995
Wilson	14,246	Caimán	−24,721
Pikes Peak	14,110	Java	−23,376

Fuente: The World Almanac and Book of Facts, 2002.

(a) ¿Qué diferencia hay entre la altura del monte Foraker y la profundidad de la fosa de las Filipinas?
(b) ¿Cuál es la diferencia entre la altura del monte Pikes y la profundidad de la fosa de Java?
(c) ¿Cuál es la diferencia en profundidad entre la fosa de Caimán y la fosa de Java?
(d) ¿Qué diferencia de profundidad hay entre la fosa de Filipinas y la de Caimán?

79. ***Finanzas en el Seguro Social*** La tabla muestra el ingreso de impuestos para el Seguro Social y el costo de los beneficios (en miles de millones de dólares).

Año	Ingreso por impuestos	Costo de los beneficios
2000	538	409
2010*	916	710
2020*	1479	1405
2030*	2041	2542

*Proyectado
Fuente: Oficina del Seguro Social.

(a) Determine la diferencia entre el ingreso por impuestos para el Seguro Social y el costo de los beneficios para cada año que se muestra en la tabla.
(b) Interprete su respuesta para 2030.



80. ***Ingresos y gastos de Yahoo*** La tabla proporciona el ingreso y los gastos (ambos en millones de dólares) de Yahoo, Inc., de tres años diferentes. Determine el valor absoluto de la diferencia entre el ingreso y los gastos para cada año, e indique si la compañía obtuvo una ganancia (*i.e.*, estuvo en "números negros") o experimentó una pérdida (*i.e.*, estuvo en "números rojos"). (Estas descripciones se remontan a los días en que los contadores utilizaban tinta negra para representar ganancias y tinta roja para representar pérdidas. Esta modalidad todavía está en uso. Por ejemplo, Yahoo y los corredores de la bolsa de valores muestran las ganancias de acciones en negro y las pérdidas en rojo.)

Año	Ingreso	Gastos
1996	19.07	21.39
1997	67.41	90.29
1998	203.20	177.61

Fuente: www.quote.com

(a) 1996 **(b)** 1997 **(c)** 1998

81. ***Balance en cuenta de cheques*** El saldo de la cuenta de cheques de Shalita es de $54.00. Luego se arriesga a expedir un cheque por $89.00. ¿Cuál es su nuevo saldo? (Exprese el saldo como un número con signo.)

82. ***Altitud de excursionistas*** La superficie, o borde, de un desfiladero está a una altitud 0. Un grupo de excursionistas que realiza un descenso se detiene a descansar a 130 metros por debajo de la superficie. Luego, continúan otros 54 metros. ¿Cuál es su nueva altitud? (Exprese la altitud como un número con signo.)

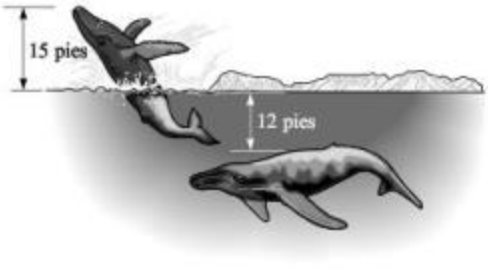
83. ***Cambio drástico de temperatura*** El 23 de enero de 1943, la temperatura alcanzó 49°F en dos minutos en Spearfish, Dakota del Sur. Si la temperatura inicial fue de −4°F, ¿cuál fue la temperatura dos minutos más tarde?

84. ***Temperaturas extremas en Little Rock*** La temperatura más baja registrada en Little Rock, Arkansas fue 15°F. La temperatura más alta registrada fue 117°F mayor que la mínima. ¿Cuál es esta temperatura? (*Fuente*: *The Guinness Book of World Almanac and Book of Facts,* 2002.)

85. ***Temperaturas bajas en Chicago y Hurón*** La menor temperatura registrada en Chicago, Illinois fue −27°F en 1985. El récord más bajo en Hurón, Dakota del Sur se estableció en 1994 y fue 14°F menos que −27°F. ¿De cuánto fue el registro más bajo en Hurón? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts,* 2002.)

86. ***Las ballenas jorobadas emergen*** Nadie sabe por qué las ballenas jorobadas impulsan sus 45 toneladas de peso en un salto fuera del agua, pero lo hacen. (Esta actividad es llamada "salto del agua".) Mark y Debbie, dos investigadores con base en la isla de Maui, observaron que una de sus ballenas favoritas,

"Pinneapple", saltó 15 pies por encima de la superficie del océano, mientras su compañero se encontraba 12 pies por debajo de la superficie. ¿Cuál es la diferencia entre estos dos niveles?



87. ***Diferencia de elevación*** La cima del monte Whitney, visible desde el Valle de la Muerte, tiene una altitud de 14,494 pies sobre el nivel del mar. El fondo del valle está a 282 pies, bajo el nivel del mar. Tome el 0 como nivel del mar y encuentre la diferencia entre estas dos elevaciones. (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts,* 2002.)

88. ***Punto más alto en Luisiana*** El punto más alto en Luisiana es la montaña Driskill, a una altitud de 535 pies. El punto más bajo está en Fuerte España, 8 pies bajo el nivel del mar. Tome el 0 como nivel del mar y encuentre la diferencia entre estas dos elevaciones. (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts,* 2002.)

89. ***Peso de un oso polar*** Una osa polar pesaba 660 libras cuando entró a su guarida de invierno. Perdió 45 libras en cada uno de los dos primeros meses de hibernación, perdió 45 libras y otras 205 libras antes de dejar la guarida con sus dos cachorros, en marzo. ¿Cuánto pesaba cuando dejó la guarida?



90. ***Profundidad al bucear*** Dean Baldus se divierte buceando. Se sumerge a 34 pies por debajo de la superficie de un lago. Su compañero, Jeff Balius, se sumerge a 40 pies por debajo de la superficie, pero luego asciende 20 pies. ¿Cuál es la distancia vertical entre Dean y Jeff?

91. ***Yardas por pase*** En tres jugadas consecutivas de pase, Peyton Manning ganó 6 yardas, fue atrapado y perdió 12 yardas y, finalmente, pasó para una ganancia de 43 yardas. ¿Qué número, positivo o negativo, representa su ganancia neta total de yardas para la serie de tres jugadas?

92. ***Altura de un avión*** Marty McDonald, piloto de una importante compañía aérea, anunció a sus pasajeros que su aeroplano, que estaba a 34,000 pies de altura, descendería 2500 pies para evitar la turbulencia, y luego ascendería 3000 pies, una vez pasaran el peligro. ¿Cuál sería su altura final?

93. ***Puntuación con triominos*** J.D. Patin se divierte jugando triominos cada miércoles por la noche. El pasado miércoles, en cuatro turnos sucesivos sus puntuaciones fueron -19, 28, -5 y 13. ¿Cuál fue su puntuación total para los cuatro turnos?

94. ***Fecha de nacimiento de un matemático griego*** Cierto matemático griego nació en el año 426 a.C. Su padre nació 43 años antes. ¿En que año nació su padre?

95. ***Saldo en MasterCard*** Kim Falgout tiene una deuda de \$870.00 en su cuenta de MasterCard. Devuelve dos artículos que cuestan \$35.90 y \$150.00 y recibe créditos por estas cuentas. Después, realiza una compra de \$82.50 y luego dos compras más de \$10.00 cada una. Realiza un pago de \$500.00 Después incurre en un cargo financiero de \$37.23. ¿Cuánto debe todavía?

96. ***Tiempo en descenso en esquí de una colina*** La campeona olímpica de descenso en esquí en 1988, Marina Kiehl de Alemania Occidental, terminó la carrera en 1 minuto, 25.86 segundos. El tiempo de la ganadora en 1994, Katja Seizinger de Alemania, aumentó 10.07 segundos. Seizinger ganó nuevamente en 1998. Su tiempo disminuyó 7.04 segundos. ¿Cuál fue el tiempo con que ganó Seizinger en 1998? (*Fuente: World Almanac and Book of Facts*, 1999.)

6.3 Números racionales y representación decimal

Propiedades y operaciones El conjunto de los números reales está compuesto de dos subconjuntos que son mutuamente excluyentes: los números racionales y los números irracionales. (Dos conjuntos son *mutuamente excluyentes* si no tienen elementos en común.)

Recuerde que, en la sección 6.1 se explicó que los cocientes de los enteros se denominan **números racionales**. Imagine a los números racionales compuestos por todas las fracciones (cocientes de enteros con denominador distinto de cero) y todos los enteros. Cualquier entero puede escribirse como el cociente de dos enteros. Por ejemplo, el entero 9 puede escribirse como el cociente de 9/1, o 18/2, o 27/3, etc. También, -5 puede expresarse como el cociente de enteros como $-5/1$ o $-10/2$, etc. (¿Cómo puede el 0 ser expresado como un cociente de enteros?) Puesto que tanto las fracciones como los enteros pueden escribirse como cocientes de enteros, el conjunto de los números racionales se define como sigue:

Números racionales

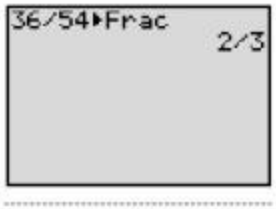
Números racionales $= \{x | x$ es un cociente de dos enteros con denominador distinto de $0\}$.

Se dice que un número racional está en su **mínima expresión** (o reducido a sus términos más simples) si el máximo común divisor del numerador (el número de arriba) y del denominador (el número de abajo) es 1. Los números racionales se escriben en su mínima expresión mediante la *propiedad fundamental de los números racionales.*

Propiedad fundamental de los números racionales

Si a, b y k son enteros con $b \neq 0$ y $k \neq 0$, entonces

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}.$$



La calculadora reduce 36/54 a su término más simple según se ilustra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Reduzca 36/54 a su mínima expresión.

Como el máximo común divisor de 36 y 54 es 18,

$$\frac{36}{54} = \frac{2 \cdot 18}{3 \cdot 18} = \frac{2}{3}.$$

■

En el ejemplo anterior se demostró que, $\frac{36}{54} = \frac{2}{3}$. Si multiplicamos el numerador de la fracción de la izquierda por el denominador de la fracción de la derecha, obtenemos $36 \cdot 3 = 108$. Ahora, si multiplicamos el denominador de la fracción de la izquierda por el numerador de la fracción de la derecha, obtenemos $54 \cdot 2 = 108$. El resultado es el mismo en ambos casos. Una manera de determinar si dos fracciones son iguales es realizar esta prueba. Si el producto de los "extremos" (36 y 3 en este caso) es igual al producto de los "medios" (54 y 2), las fracciones son iguales. Esta forma de verificar la igualdad de los números racionales se conoce como **método de los productos cruzados**, y se ilustra en el siguiente recuadro.



Benjamin Banneker
(1731-1806) pasó la primera mitad de su vida cuidando una granja en Maryland. Se hizo famoso en su localidad por sus habilidades mecánicas y su capacidad para resolver problemas matemáticos. En 1772, adquirió libros de astronomía de un vecino y se dedicó a su estudio. Observó el cielo y realizó cálculos. En 1789, pasó a formar parte del equipo que realizó la medición topográfica de lo que ahora es el distrito de Columbia.

Banneker publicó almanaques anuales de 1792 a 1802. Envió una copia de su primer almanaque a Tomás Jefferson junto con una apasionada carta en contra de la esclavitud. Posteriormente Jefferson defendió la causa de este primer matemático afroamericano.

Prueba de los productos cruzados para determinar la igualdad de números racionales

Para los números a/b y c/d, $b \neq 0$, $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si, y sólo si} \quad a \cdot d = b \cdot c.$$

La operación de suma de números racionales puede ilustrarse por medio de los dibujos en la figura 10. El rectángulo de la izquierda se dividió en tres partes iguales, una de ellas está sombreada. El rectángulo de la derecha se dividió en cinco partes iguales y dos de ellas han sido sombreadas.

El total de las áreas sombreadas se representa por medio de la suma

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}.$$

Para evaluar esta suma, las áreas sombreadas deben dibujarse en términos de una unidad común. Como el mínimo común múltiplo de 3 y 5 es 15, dibujamos nuevamente ambos rectángulos con 15 pares. Vea la figura 11. En la misma, 11 de los pequeños rectángulos están sombreados, de esta manera

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}.$$

En general, la suma

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

puede determinarse si se escribe a/b y c/d con el denominador común bd, conservando este denominador en la suma y sumando los numeradores:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

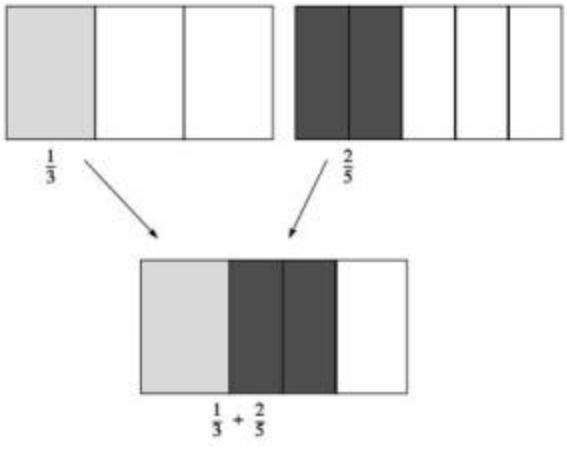


FIGURA 10

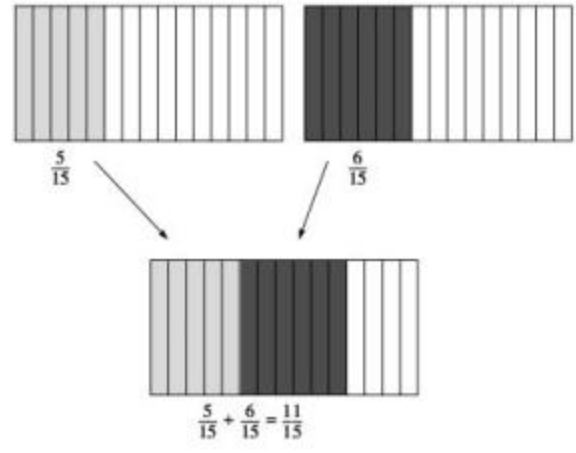


FIGURA 11

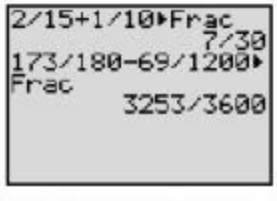
Puede plantearse un argumento análogo para la diferencia de números racionales. A continuación, aparece una definición formal de suma y sustracción de números racionales.

Suma y sustracción de números racionales

Si a/b y c/d son números racionales, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Esta definición formal rara vez se utiliza en la práctica. En problemas prácticos que implican adición y sustracción de números racionales, por lo regular reescribimos las fracciones con el mínimo común múltiplo de sus denominadores, denominado **mínimo común denominador**.



En esta pantalla se ilustran los resultados del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 **(a)** Sume: $\frac{2}{15} + \frac{1}{10}$.

El mínimo común múltiplo de 15 y 10 es 30. Ahora escriba 2/15 y 1/10 con denominadores de 30, y luego sume los numeradores. Proceda como sigue:

Como $30 \div 15 = 2$, $\quad \frac{2}{15} = \frac{2 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{4}{30}$,

y ya que $30 \div 10 = 3$, $\quad \frac{1}{10} = \frac{1 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{3}{30}$.

Por lo tanto, $\quad \frac{2}{15} + \frac{1}{10} = \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{7}{30}$.

(b) Reste: $\frac{173}{180} - \frac{69}{1200}$.

El mínimo común múltiplo de 180 y 1200 es 3600.

$$\frac{173}{180} - \frac{69}{1200} = \frac{3460}{3600} - \frac{207}{3600} = \frac{3460 - 207}{3600} = \frac{3253}{3600}$$

■

El producto de dos números racionales se define como sigue:

Multiplicación de números racionales

Si a/b y c/d son números racionales, entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

```
(3/4)*(7/10)▸Frac
                21/40
(5/18)*(3/10)▸Frac
                1/12
```

Para ilustrar los resultados del ejemplo 3, utilizamos paréntesis alrededor de los factores que son fracciones.

EJEMPLO 3 Determine cada uno de los siguientes productos:

(a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{10} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 10} = \frac{21}{40}$

(b) $\frac{5}{18} \cdot \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 3}{18 \cdot 10} = \frac{15}{180} = \frac{1 \cdot 15}{12 \cdot 15} = \frac{1}{12}$

En la práctica, un problema de multiplicación como éste con frecuencia se resuelve por medio de diagonales, con las que se indica que se ha dividido entre los factores comunes del numerador y del denominador.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{6}{\cancel{18}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

Se divide entre 3 los términos 3 y 18; se divide entre 5 a 5 y 10.

$$= \frac{1}{12}$$

■

PARA REFLEXIONAR

La influencia de las monedas españolas en los precios de las acciones

Hasta el 28 de agosto de 2000, cuando inició el uso del sistema decimal en el mercado de acciones de Estados Unidos, los precios del mercado eran reportados como fracciones que tenían como denominadores potencias de 2, tal como $17\frac{3}{4}$ y $112\frac{5}{8}$. ¿Por qué?

Durante los primeros años de Estados Unidos, circulaban libremente en los estados las monedas de 8 reales en los estados. Sus partes fraccionarias: 4 reales, 2 reales y 1 real se conocían como **piezas de ocho**, y se describían como tales en las historias tradicionales de piratas y tesoros. Cuando se fundó, en 1792 el Mercado de Acciones de Nueva York (NYSE, por sus siglas en inglés) se decidió utilizar el dólar español como precio base, en lugar de una base decimal como proponía Thomas Jefferson ese mismo año.

El artículo de Tom Delorey "The End of 'Pieces of Eight'", publicado en *COINage*, en la edición de septiembre de 1997, dio la siguiente versión:

Como el dólar español y sus fracciones continuaron siendo la moneda de curso legal en América junto con las monedas decimales hasta 1857, no era urgente cambiar el sistema, y en 1857, cuando la moneda española-americana fue retirada, el precio de las acciones en octavos de dólar (y no menos) era una tradición establecida. Como la organización era conservadora, el NYSE no veía la necesidad de componer algo que no estaba descompuesto.

Todos los precios en los mercados de acciones de Estados Unidos ahora se reportan en decimales. (*Fuente:* "Stock price tables go to decimal listings", *The Times Picayune*, 27 de junio de 2000.)

Para análisis en grupo

Considere lo siguiente: ¿alguna vez ha escuchado esta vieja ovación? "Dos bits, cuatro bits, seis bits, un dólar. Todo para él (equipo de casa), levántate y grita." El término **dos bits** se refiere a 25 centavos. Analice cómo esta ovación está basada en la moneda española de ocho reales.







Los primeros centavos y medios centavos de Estados Unidos utilizaban fracciones para denotar sus denominaciones. El medio centavo utilizaba $\frac{1}{200}$ y el centavo usaba $\frac{1}{100}$. (Vea en la fotografía del ejercicio 18 un interesante error en una de las monedas.)

Las monedas que se muestran fueron parte de la colección de Louis E. Eliasberg, padre, que fue subastada por Bowers and Merena, Inc., hace varios años. Louis Eliasberg fue el único en tener una colección completa de las monedas de Estados Unidos. El medio centavo que se muestra se vendió en $506,000 y el centavo en $27,500. El centavo que se muestra en el ejercicio 18 salió por sólo $2970.

En una fracción, la línea de la fracción indica la operación de división. Recuerde que, en la sección anterior, definimos el inverso multiplicativo, o recíproco, del número distinto de cero b. El inverso multiplicativo de b es $1/b$. Ahora, podemos definir la división utilizando inversos multiplicativos.

Definición de división

Si a y b son números reales, $b \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Probablemente haya escuchado la siguiente regla: "Para dividir fracciones, invierta el divisor y multiplique". Pero, ¿alguna vez se ha preguntado por qué funciona esta regla? Para ilustrarla, suponga que tiene 7/8 de un galón de leche y desea determinar cuántos cuartos tiene. Como un cuarto es 1/4 de un galón, debe preguntarse, "¿cuántos 1/4 hay en 7/8?". Esto se interpretaría como

$$\frac{7}{8} \div \frac{1}{4} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{4}}.$$

La propiedad fundamental de los números racionales estudiada anteriormente puede extenderse a los valores racionales de a, b y k. Con $a = 7/8$, $b = 1/4$ y $k = 4$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{\frac{7}{8} \cdot 4}{\frac{1}{4} \cdot 4} = \frac{\frac{7}{8} \cdot 4}{1} = \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{1}.$$

Ahora observe que empezamos con el problema de división $7/8 \div 1/4$ que, por medio de una serie de expresiones equivalentes, nos conduce al problema de multiplicación $(7/8) \cdot (4/1)$. Así, dividir entre 1/4 es equivalente a multiplicar por su recíproco, 4/1. Por medio de la definición de la multiplicación de fracciones,

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{1} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2},$$

y así hay $7/2$ o $3\frac{1}{2}$ cuartos en $\frac{7}{8}$ de galón.*

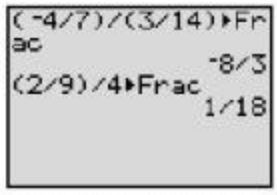
Ahora establezcamos la regla para la división de a/b entre c/d.

División de números racionales

Si a/b y c/d son números racionales, donde $c/d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

*$3\frac{1}{2}$ es un **número mixto**. Los números mixtos se estudian en los ejercicios de esta sección.



Esta pantalla confirma los resultados del ejemplo 4(b) y (c).

EJEMPLO 4 Determine cada uno de los cocientes que siguen.

(a) $\frac{3}{5} \div \frac{7}{15} = \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{7} = \frac{45}{35} = \frac{9 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{9}{7}$

(b) $\frac{-4}{7} \div \frac{3}{14} = \frac{-4}{7} \cdot \frac{14}{3} = \frac{-56}{21} = \frac{-8 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}$

(c) $\frac{2}{9} \div 4 = \frac{2}{9} \div \frac{4}{1} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{9} \cdot \frac{1}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{1}{18}$ ■

Entre dos enteros consecutivos, como 3 y 4, no hay enteros. Sin embargo, entre cualquier par de racionales siempre se puede encontrar un número racional. Por esta razón, se dice que el conjunto de los números racionales es *denso*.

Propiedad de densidad de los números racionales

Si r y t son números distintos, y si $r < t$, entonces existe un número racional s como

$$r < s < t$$

Para determinar la **media aritmética** o **promedio**, de n números, sumamos los números y luego dividimos la suma entre n. Para dos números, el número que se encuentra a la mitad de ellos es su promedio.

Año	Número (en miles)
1995	16,360
1996	16,269
1997	16,110
1998	16,211
1999	16,477
2000	16,258

Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales de Estados Unidos.

EJEMPLO 5

(a) Determine el número racional que está a la mitad entre 2/3 y 5/6.

Primero, determine su suma: $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Ahora divida entre 2:

$$\frac{3}{2} \div 2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

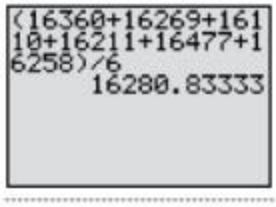
El número 3/4 está a la mitad de 2/3 y 5/6.

(b) La tabla al margen muestra el número de miembros en sindicatos o asociaciones de empleados, en miles, durante los años 1995-2000. ¿Cuál es el número promedio, en miles, para este periodo de seis años?

Para encontrar este promedio, divida la suma entre 6.

$$\frac{16{,}360 + 16{,}269 + 16{,}110 + 16{,}211 + 16{,}477 + 16{,}258}{6} = \frac{97{,}685}{6}$$
$$\approx 16{,}280.8$$

El promedio al entero de millares más cercano es 16,281. ■



Aquí se muestra el cálculo del ejemplo 5(b).



Simon Stevin (1548-1620) trabajó como tenedor de libros en Bélgica y se convirtió en ingeniero de la marina holandesa. A él se le atribuye el desarrollo de los decimales.

La aplicación repetida de la propiedad de densidad implica que entre dos números racionales dados hay *una infinidad* de números racionales. También es cierto que entre cualquier par de números *reales* existe una infinidad de números *reales*. Por lo tanto, podemos decir que el conjunto de los números reales es denso.

Forma decimal de los números racionales En esta sección hemos estudiado los números racionales en forma de cocientes de enteros. Los números racionales también se pueden expresar como decimales. Los numerales decimales tienen valores posicionales que son potencia de 10. Por ejemplo, el numeral decimal 483.039475 se lee "cuatrocientos ochenta y tres con treinta y nueve mil cuatrocientos setenta y cinco millonésimos". Los valores posicionales se muestran a continuación.

...	Centenas	Decenas	Unidades	Punto decimal	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diezmilésimos	Cienmilésimos	Millonésimos	...
	4	8	3	.	0	3	9	4	7	5	

Dado un número racional en la forma a/b, éste puede expresarse como un decimal de manera muy fácil si se introduce en la calculadora. Por ejemplo, para escribir 3/8 como un decimal, introduzca 3, luego la operación de división y después 8. Presione la tecla del signo igual para encontrar la equivalencia siguiente:

$$\frac{3}{8} = .375$$

```
 .375
8)3.000
 24
  60
  56
  40
  40
   0
```

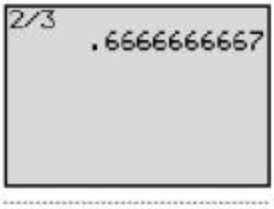
```
 .3636...
11)4.00000...
  33
  70
  66
  40
  33
  70
  66
  40
   .
    .
     .
```

Por supuesto, este mismo resultado puede obtenerse por medio de la división larga, como se aprecia al margen. A base de este resultado, el número racional 3/8 es el mismo que el número decimal .375. Un decimal como .375, que tiene un final, se conoce como **decimal terminal**. Otros ejemplos de decimales terminales son

$$\frac{1}{4} = .25, \quad \frac{7}{10} = .7 \quad \text{y} \quad \frac{89}{1000} = .089.$$

No todos los números racionales pueden representarse por medio de decimales terminales. Por ejemplo, convierta 4/11 a decimal dividiendo con una calculadora 4 entre 11. La pantalla muestra

.3636363636, o tal vez .363636364.



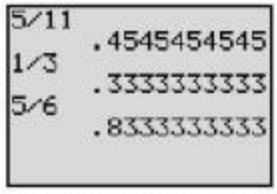
Mientras que 2/3 tiene una representación que se repite $(2/3 = .\overline{6})$, la calculadora redondea en último decimal que muestra.

Sin embargo, vemos que el proceso de división larga, que se muestra al margen, indica que realmente se obtiene .3636 . . . , con la característica de que los dígitos 36 se repiten una y otra vez indefinidamente. Para indicar esto, escribimos una raya (llamada *vínculo*) sobre el "bloque" de dígitos que se repiten. Por lo tanto, podemos escribir

$$\frac{4}{11} = .\overline{36}.$$

Un decimal como $.\overline{36}$, que continúa indefinidamente, se denomina **decimal que se repite**. Otros ejemplos de decimales que se repiten son

$$\frac{5}{11} = .\overline{45}, \quad \frac{1}{3} = .\overline{3} \quad \text{y} \quad \frac{5}{6} = .8\overline{3}.$$



Aunque sólo se muestran 10 decimales, las tres fracciones tienen decimales que se repiten sin terminar.

Por las limitaciones de la pantalla de una calculadora, y como algunos números racionales tienen decimales que se repiten, es importante poder interpretar los resultados de una calculadora adecuadamente cuando se obtengan decimales repetitivos.

Aunque en este libro distinguiremos entre decimales *que terminan* y decimales *que se repiten,* algunos matemáticos prefieren considerar todos los números racionales como decimales que se repiten. Esto puede justificarse, si se piensa de esta manera: si el proceso de división resulta en un residuo de 0, entonces los ceros se repiten de manera indefinida en forma decimal. Por ejemplo, podemos considerar la forma de 3/4 como sigue,

$$\frac{3}{4} = .75\overline{0}$$

Si consideramos los posibles residuos que pueden obtenerse cuando convertimos un cociente de enteros a decimal, podemos sacar una conclusión importante acerca de la forma decimal de los números racionales. Si el residuo nunca es 0, la división producirá un decimal repetitivo. Esto sucede porque cada paso del proceso de división debe producir un residuo que es menor al divisor. Como el número de posibles residuos diferentes es menor que el divisor, los residuos finalmente comenzarán a repetirse. Esto hace que los dígitos del cociente se repitan, y produzcan un decimal repetitivo.

Con la finalidad de determinar el promedio de bateo de un jugador de béisbol, dividimos el número de imparables entre el número de turnos al bate. Existe una sorprendente paradoja concerniente a los promedios; es posible que el jugador *A* tenga un promedio anual de bateo mayor que el del jugador *B* en dos años consecutivos; sin embargo, en el periodo de dos años, el jugador *B* puede tener un promedio total de bateo más alto. Vea la tabla.

Año	Jugador *A*	Jugador *B*
1998	$\frac{20}{40} = .500$	$\frac{90}{200} = .450$
1999	$\frac{60}{200} = .300$	$\frac{10}{40} = .250$
Total de los dos años	$\frac{80}{240} = .333$	$\frac{100}{240} = .417$

En cada uno de estos dos años, el jugador *A* tuvo un promedio mayor, pero en el periodo de dos años, el jugador *B* tuvo el promedio más alto. Éste es un ejemplo, en estadística de la *paradoja de Simpson.*

Decimal repetitivo o número racional

Cualquier número racional puede expresarse como un decimal terminal o bien como un decimal repetitivo.

Para determinar si la forma decimal de un cociente de enteros terminará o se repetirá utilice la regla siguiente.

Criterios para decimales terminales y decimales repetitivos

Un número racional a/b en sus términos más simples tiene como resultado un **decimal terminal** si los únicos factores primos del denominador son 2 o 5 (o ambos).

Un número racional a/b en sus términos más simples tiene como resultado un **decimal que se repite** si en la factorización en primos del denominador aparece un primo distinto de 2 o de 5.

La justificación de esta regla tiene como base el hecho de que los factores primos de 10 son 2 y 5, y el sistema decimal utiliza el 10 como base.

EJEMPLO 6 Sin hacer la división, determine si la forma decimal de los números racionales dados es terminal o se repite.

(a) $\frac{7}{8}$

Como 8 se factoriza como 2^3, la forma decimal será terminal. Ningún número primo distinto de 2 o 5 divide al denominador.

(b) $\dfrac{13}{150}$

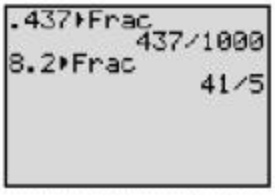
$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Como 3 aparece como uno de los factores primos del denominador, la forma decimal se repetirá.

(c) $\dfrac{6}{75}$

Antes de realizar la prueba es necesario reducir el número racional a sus términos más simples,

$$\frac{6}{75} = \frac{2}{25}$$

Como $25 = 5^2$, la forma decimal será terminal. ■



En esta pantalla se confirman los resultados del ejemplo 7.

Hemos visto que un número racional podrá ser representado por un decimal terminal o por un decimal que se repite. ¿Qué hay del proceso inverso? Esto es, ¿acaso un decimal terminal o un decimal que se repite debe representar un número racional? La respuesta es *sí*. Por ejemplo, el decimal terminal .6 representa un número racional.

$$.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

EJEMPLO 7 Escriba cada decimal terminal como un cociente de enteros.

(a) $.437 = \dfrac{437}{1000}$ **(b)** $8.2 = 8 + \dfrac{2}{10} = \dfrac{82}{10} = \dfrac{41}{5}$ ■

Los decimales que se repiten no pueden convertirse en cocientes de enteros de forma tan rápida. Los pasos para realizar esta conversión se dan en el ejemplo siguiente, el cual requiere álgebra básica.

EJEMPLO 8 Encuentre el cociente de dos enteros que es igual a $.\overline{85}$.

Paso 1: Sea $x = .\overline{85}$, de modo que $x = .858585\ldots$

Paso 2: Multiplique ambos lados de la ecuación $x = .858585\ldots$ por 100. (Utilice 100 ya que hay dos dígitos en la parte que se repite y $100 = 10^2$.)

$$\begin{aligned} x &= .858585\ldots \\ 100x &= 100(.858585\ldots) \\ 100x &= 85.858585\ldots \end{aligned}$$

Paso 3: Reste la expresión en el paso 1 de la expresión final en el paso 2.

$$\begin{array}{rl} 100x = & 85.858585\ldots \\ x = & .858585\ldots \\ \hline 99x = & 85 \end{array}$$

(Recuerde que $x = 1x$ y que $100x - x = 99x$.)

Paso 4: Resuelva la ecuación $99x = 85$ dividiendo ambos lados entre 99.

$$\begin{aligned} 99x &= 85 \\ \frac{99x}{99} &= \frac{85}{99} \\ x &= \frac{85}{99} \\ .\overline{85} &= \frac{85}{99} \qquad x = .\overline{85} \end{aligned}$$

$1 = .999999999\ldots$

¿Termina o se repite? Una de las verdades más desconcertantes de las matemáticas elementales es la siguiente:

$$1 = .9999\ldots.$$

La mayoría de las personas cree que $.\overline{9}$ tiene que ser menor a 1, pero no es así. El argumento siguiente muestra algo distinto. Sea $x = .9999\ldots$. Entonces

$$\begin{array}{rl} 10x = & 9.9999\ldots \\ x = & .9999\ldots \\ \hline 9x = & 9 \qquad \text{Restar.} \\ x = & 1. \end{array}$$

Por lo tanto, $1 = .9999\ldots$. De manera análoga, puede demostrarse que cualquier decimal que termina puede representarse como un decimal repetitivo con una ristra sinfín de nueves. Por ejemplo, $.5 = .49999\ldots$ y $2.6 = 2.59999\ldots$. Ésta es una manera de justificar que cualquier número racional puede representarse como un decimal repetitivo.

Vea los ejercicios 95 y 96 para más información sobre $.999\ldots = 1$.

Este resultado puede verificarse con una calculadora. Sin embargo, recuerde que sólo mostrará un número finito de lugares decimales, y puede que redondee el último decimal que muestre. ■

6.3 EJERCICIOS

Escoja la(s) expresión(es) que son equivalentes al número racional dado.

1. $\frac{4}{8}$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{8}{4}$ **C.** .5

D. $.5\overline{0}$ **E.** $.\overline{55}$

2. $\frac{2}{3}$

A. .67 **B.** $.\overline{6}$ **C.** $\frac{20}{30}$

D. .666... **E.** .6

3. $\frac{5}{9}$

A. .56 **B.** .55 **C.** $.\overline{5}$

D. $\frac{9}{5}$ **E.** $1\frac{4}{5}$

4. $\frac{1}{4}$

A. .25 **B.** $.24\overline{9}$ **C.** $\frac{25}{100}$

D. 4 **E.** $\frac{10}{400}$

Utilice la propiedad fundamental de los números racionales para escribir cada uno de los siguientes números en su mínima expresión.

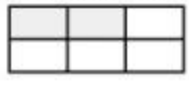
5. $\frac{16}{48}$ **6.** $\frac{21}{28}$ **7.** $-\frac{15}{35}$ **8.** $-\frac{8}{48}$

Utilice la propiedad fundamental para escribir cada una de las siguientes fracciones de tres formas distintas.

9. $\frac{3}{8}$ **10.** $\frac{9}{10}$ **11.** $-\frac{5}{7}$ **12.** $-\frac{7}{12}$

13. Para cada uno de los siguientes diagramas, escriba una fracción en los términos más simples que represente la porción de la figura que está sombreada.

(a)



(b)



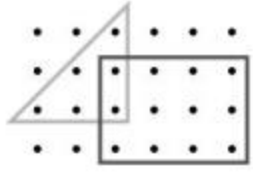
(c)



(d)



14. Para cada uno de los puntos siguientes, escriba una fracción en su término más simple que represente la región descrita.



(a) Los puntos dentro del rectángulo como una parte de los puntos en toda la figura.

(b) Los puntos dentro del triángulo como una parte de los puntos en toda la figura.

(c) Los puntos dentro del rectángulo como una parte de los puntos en la unión del triángulo y el rectángulo.

(d) Los puntos en la intersección del triángulo y del rectángulo como una parte de los puntos en la unión del triángulo y el rectángulo.

15. Consulte la figura del ejercicio 14 y escriba una descripción de la región que está representada por la fracción 1/12.

16. ***Promedio de bateo*** En la liga local de softball, los primeros seis juegos produjeron los resultados siguientes: Greg Tobin bateó 8 imparables en 20 turnos al bate, y Jason Jordan bateó 12 imparables en 30 turnos al bate. ¿Cuál jugador (si lo hay) tuvo el promedio de bateo más alto?

17. ***Promedios de bateo*** Después de 10 juegos en la liga local de softball, se obtuvieron las siguientes estadísticas.

Jugador	Turnos al bate	Hits (imparables)	Cuadrángulares
Anne Kelly	40	9	2
Christine O'Brien	36	12	3
Brenda Bravener	11	5	1
Otis Taylor	16	8	0
Carol Britz	20	10	2

Responda cada una de las siguientes preguntas utilizando la técnica de estimación cuando sea necesario.

(a) ¿Qué jugador(a) bateó un imparable en exactamente 1/3 de sus turnos al bate?

(b) ¿Qué jugador(a) bateó un imparable en menos de 1/2 de sus turnos al bate?

(c) ¿Qué jugador(a) bateó un cuadrangular en menos de 1/10 de sus turnos al bate?

(d) ¿Qué jugador(a) bateó un imparable en menos de 1/4 de sus turnos al bate?

(e) ¿Qué par de jugadores batearon imparables en exactamente la misma fracción de sus turnos al bate? ¿Cuál fue la parte fraccional, en su forma más simple?

18. Consulte la nota al margen para analizar el uso de fracciones comunes a principios de la acuñación de monedas de cobre en Estados Unidos. En la foto de la derecha se puede observar un error que ocurrió en la parte inferior de los primeros centavos. Analice el error y cómo representa una imposibilidad matemática.



Realice las operaciones indicadas y exprese las respuestas en su mínima expresión. Utilice el orden de las operaciones, de ser necesario.

19. $\frac{3}{8} + \frac{1}{8}$

20. $\frac{7}{9} + \frac{1}{9}$

21. $\frac{5}{16} + \frac{7}{12}$

22. $\frac{1}{15} + \frac{7}{18}$

23. $\frac{2}{3} - \frac{7}{8}$

24. $\frac{13}{20} - \frac{5}{12}$

25. $\frac{5}{8} - \frac{3}{14}$

26. $\frac{19}{15} - \frac{7}{12}$

27. $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{5}$

28. $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$

29. $-\frac{2}{3} \cdot -\frac{5}{8}$

30. $-\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{9}$

31. $\frac{5}{12} \div \frac{15}{4}$

32. $\frac{15}{16} \div \frac{30}{8}$

33. $-\frac{9}{16} \div -\frac{3}{8}$

34. $-\frac{3}{8} \div \frac{5}{4}$

35. $\left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6}$

36. $\frac{2}{5} \div \left(-\frac{4}{5} \div \frac{3}{10}\right)$

37. ***Receta para sémola*** La tabla siguiente aparece en un paquete de sémola Quaker.

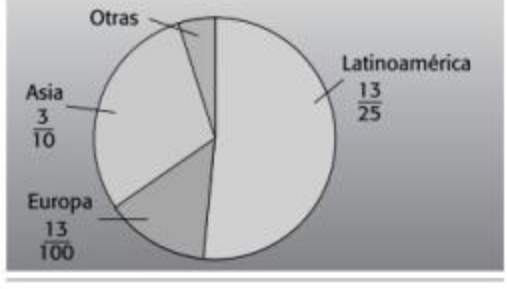
Microondas		Estufa		
Porciones	1	1	4	6
Agua	$\frac{3}{4}$ taza	1 taza	3 tazas	4 tazas
Sémola	3 cuch.	3 cuch.	$\frac{3}{4}$ taza	1 taza
Sal (opcional)	Una pizca	Una pizca	$\frac{1}{4}$ cuch.	$\frac{1}{2}$ cuch.

(a) En microondas, ¿cuántas tazas de agua serían necesarias para 6 porciones?

(b) En estufa, ¿cuántas tazas de sémola serían necesarias para 5 porciones? (*Una pista:* 5 está a la mitad de 4 y 6.)

38. ***Inmigrantes en Estados Unidos*** Más de 8 millones de inmigrantes fueron admitidos en Estados Unidos entre 1990 y 1997. El diagrama circular proporciona la fracción del lugar de procedencia de estos inmigrantes.

INMIGRANTES A ESTADOS UNIDOS POR REGIÓN DE NACIMIENTO



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

(a) ¿Qué fracción de la población son inmigrantes de otras regiones?

(b) ¿Qué fracción de la población provienen de Latinoamérica o Asia?

(c) ¿Cuántos millones son de Europa?

El **número mixto** $2\frac{5}{8}$ *representa la suma* $2 + \frac{5}{8}$. *Podemos convertir* $2\frac{5}{8}$ *a una fracción de la manera siguiente:*

$$2\frac{5}{8} = 2 + \frac{5}{8} = \frac{2}{1} + \frac{5}{8} = \frac{16}{8} + \frac{5}{8} = \frac{21}{8}.$$

La fracción 21/8 *puede convertirse de nuevo en un número mixto dividiendo* 21 *entre* 8. *El cociente es* 2 *y el residuo es* 5 *y el divisor es* 8.

Convierta cada número mixto a una fracción y convierta cada fracción a un número mixto en los siguientes ejercicios:

39. $4\frac{1}{3}$ **40.** $3\frac{7}{8}$ **41.** $2\frac{9}{10}$

42. $\frac{18}{5}$ **43.** $\frac{27}{4}$ **44.** $\frac{19}{3}$

Es posible sumar números mixtos, convirtiéndolos primero a fracciones, sumando y luego convirtiendo de nuevo la suma a un número mixto. Por ejemplo,

$$2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} = \frac{7}{3} + \frac{7}{2} = \frac{14}{6} + \frac{21}{6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}.$$

Las otras operaciones con números mixtos pueden realizarse de una manera análoga.

Realice cada operación y exprese su respuesta como un número mixto.

45. $3\frac{1}{4} + 2\frac{7}{8}$ **46.** $6\frac{1}{5} - 2\frac{7}{15}$

47. $-4\frac{7}{8} \cdot 3\frac{2}{3}$ **48.** $-4\frac{1}{6} \div 1\frac{2}{3}$

Resuelva cada problema.

49. ***Medidas de llaves*** Una ferretería vende un conjunto de 40 llaves. La medida de la llave más grande es $\frac{3}{4}$ pulgadas, mientras que la medida de la llave más pequeña es $\frac{3}{16}$ pulgadas. ¿Cuál es la diferencia entre estas medidas?



50. ***Tamaño de los agujeros de un queso suizo*** Bajo los estándares existentes, la mayoría de los agujeros en el queso suizo deben tener diámetros entre $\frac{11}{16}$ y $\frac{13}{16}$ pulgadas. Para adaptar una nueva máquina rebanadora de alta velocidad, el USDA necesita reducir el tamaño mínimo a $\frac{3}{8}$ pulgadas. ¿Qué tanto más pequeño es $\frac{3}{8}$ pulgada que $\frac{11}{16}$ pulgada? (*Fuente:* Departamento de Agricultura de Estados Unidos, USDA.)



Un cociente de fracciones (con denominador distinto de 0) se conoce como **fracción compleja**. *Hay dos métodos que se utilizan para simplificar una fracción compleja.*

Método 1: *Simplifique el numerador y el denominador de forma separada. Luego reescriba el problema como uno de división y proceda como cuando divide fracciones.*

Método 2: *Multiplique tanto el numerador como el denominador por el mínimo común denominador de todas las fracciones que aparecen en la fracción compleja. (Lo que significa, en realidad, es que se multiplica la fracción por* 1, *lo que no modifica su valor.) Aplique la propiedad distributiva, si es necesario, y simplifique.*

Utilice uno de los métodos anteriores para simplificar cada una de las siguientes fracciones complejas.

51. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}$ **52.** $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}$ **53.** $\dfrac{\frac{5}{8} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{4}}$

54. $\dfrac{\frac{3}{16} + \frac{1}{2}}{\frac{5}{16} - \frac{1}{8}}$ **55.** $\dfrac{\frac{7}{11} + \frac{3}{10}}{\frac{1}{11} - \frac{9}{10}}$ **56.** $\dfrac{\frac{11}{15} + \frac{1}{9}}{\frac{13}{15} - \frac{2}{3}}$

Las expresiones en los ejercicios 57 y 58 se denominan ***fracciones continuas****. Escriba cada una de las siguientes fracciones continuas en la forma p/q, reducida a su término más simple. (Una pista: Comience con la parte inferior y trabaje hacia arriba.)*

57. $2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$

58. $4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$

Encuentre el número racional que está a la mitad de la distancia entre los dos números racionales dados.

59. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ **60.** $\frac{1}{3}, \frac{5}{12}$ **61.** $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ **62.** $\frac{7}{12}, \frac{5}{8}$ **63.** $-\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}$ **64.** $-3, -\frac{5}{2}$

65. ***Ganancia por hora en la industria privada*** La tabla muestra los salarios promedio por hora de varios campos en la industria privada en un año reciente. Determine el promedio de estas cantidades.

Grupo de la industria privada	Salario por hora
Minería	$15.30
Construcción	15.08
Manufactura	12.37
Transporte y servicios públicos	14.23
Comercio al por mayor	12.43
Comercio al menudeo	7.69
Finanzas, seguros e hipotecario	12.33
Servicios	11.39

Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales de Estados.

66. ***Costo promedio de viviendas*** La tabla muestra los costos promedio anuales de vivienda en algunas ciudades en 1998. Determine el promedio de estas cantidades. (Los costos de la renta anual tienen como base una familia expatriada de Estados Unidos con dos ingresos de 75,000 dólares y que habitan una unidad de cuatro a seis habitaciones. El mantenimiento y el seguro de renta están incluidos.)

Ciudad	Costo de vivienda en 1998 (dólares)
Bombay, India	$63,418
Dusseldorf, Alemania	26,719
Hong Kong, China	143,378
Londres, Inglaterra	61,726
Madrid, España	30,638
Nueva York, N. Y.	58,425
París, Francia	35,551
San Francisco, CA	40,216
Singapur	73,386
Sidney, Australia	29,604
Tokio, Japón	78,848

Fuente: Runzheimer International.

En el número de marzo de 1973 de The Mathematics Teacher *apareció un artículo de Laurence Sherzer, un maestro de matemáticas de octavo grado, que inmortalizó a uno de sus estudiantes, Robert McKay. El grupo estaba estudiando la propiedad de la densidad, y Sherzer explicaba cómo encontrar un número racional entre dos números racionales positivos mediante la búsqueda del promedio. McKay hizo notar que no era necesario tanto trabajo para resolver el problema. Para encontrar un número (no necesariamente su promedio) entre dos números racionales positivos a/b y c/d, afirmó que bastaba con "sumar los numeradores y sumar los denominadores". Para gran sorpresa de Sherzer, este método realmente funcionaba. Por ejemplo, para encontrar un número racional entre* 1/3 *y* 1/4, *sume* $1 + 1 = 2$ *para obtener el numerador, y* $3 + 4 = 7$ *para obtener el denominador. Por lo tanto, por medio del* **teorema de McKay**, 2/7 *está entre* 1/3 *y* 1/4. *En el artículo Sherzer proporcionó la prueba de este método. Utilice el* teorema de McKay *para encontrar un número racional entre los dos números racionales dados.*

67. $\frac{5}{6}$ y $\frac{9}{13}$ **68.** $\frac{10}{11}$ y $\frac{13}{19}$

69. $\frac{4}{13}$ y $\frac{9}{16}$ **70.** $\frac{6}{11}$ y $\frac{13}{14}$

71. 2 y 3 **72.** 3 y 4

73. Aplique el teorema de McKay a cualquier par de números enteros consecutivos y haga una conjetura de lo que sucede en este caso.

74. Explique con sus propias palabras cómo encontrar un número racional que esté a un cuarto de la distancia que hay entre dos números racionales diferentes.

Convierta cada número racional en un decimal que se repite o en un decimal terminal. Si su profesor lo permite, utilice una calculadora.

75. $\frac{3}{4}$ **76.** $\frac{7}{8}$ **77.** $\frac{3}{16}$ **78.** $\frac{9}{32}$

79. $\frac{3}{11}$ **80.** $\frac{9}{11}$ **81.** $\frac{2}{7}$ **82.** $\frac{11}{15}$

Convierta cada decimal terminal en un cociente de enteros. Escriba cada uno en su forma más simple.

83. .4 **84.** .9 **85.** .85 **86.** .105 **87.** .934 **88.** .7984

Utilice el método del ejemplo 6 para decidir si cada uno de los siguientes números racionales será un decimal que se repite o uno que termina. (Una pista: Expréselo en su forma más simple antes de decidir.)

89. $\frac{8}{15}$ **90.** $\frac{8}{35}$ **91.** $\frac{13}{125}$ **92.** $\frac{3}{24}$ **93.** $\frac{22}{55}$ **94.** $\frac{24}{75}$

95. Realice, en orden, cada parte de este ejercicio.

(a) Encuentre el decimal para 1/3.

(b) Encuentre el decimal para 2/3.

(c) Sume las expresiones decimales obtenidas en las parte (a) y (b), obtenga una expresión decimal para $1/3 + 2/3 = 3/3 = 1$.

(d) ¿Le parece extraño el resultado? Lea la nota al margen sobre los decimales terminales y los decimales repetitivos en esta sección; trate esta idea.

96. Es un hecho que $1/3 = .333\ldots$. Multiplique ambos lados de esta ecuación por 3. ¿Su respuesta le preocupa? Vea la nota al margen sobre los decimales terminales y los decimales repetitivos en esta sección.

6.4 Números irracionales y representación decimal



Tsu Ch'ung-chih (hacia 500 d.C.), matemático chino en cuyo honor se expidió la estampilla postal que aparece arriba, investigó los dígitos de π.

Aryabhata, su contemporáneo hindú, dio 3.1416 como el valor para π.

Conceptos básicos En la sección anterior vimos que cualquier número racional tiene una forma decimal terminal o repetitiva. También, que todo decimal que se repite o termina representa un número racional. Sin embargo, algunos decimales ni se repiten ni son terminales. Por ejemplo, el decimal

.10200100020000010000020…

no es terminal ni se repite. (Es cierto que hay un patrón en este decimal, pero no hay un solo bloque de dígitos que se repitan de manera indefinida.)*

Un número representado por medio de un decimal que no se repite y no termina se denomina **número irracional**. Como su nombre lo indica, no puede representarse como un cociente de enteros. El número decimal anterior es un número irracional. Otros números irracionales incluyen $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ y π (la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro). Hay un número infinito de números irracionales.

La figura 12 ilustra cómo un punto con coordenada $\sqrt{2}$ puede ser localizado en una recta numérica.

El número irracional $\sqrt{2}$ fue descubierto por los pitagóricos hacia 500 a.C. Este descubrimiento fue un serio contratiempo a su filosofía, que todo lo basaba en los números cardinales. Los pitagóricos mantuvieron sus hallazgos en secreto y la leyenda dice que los miembros del grupo que divulgaban este descubrimiento eran abandonados en el mar, y de acuerdo con Proclus (410-485) "perecían en un naufragio".

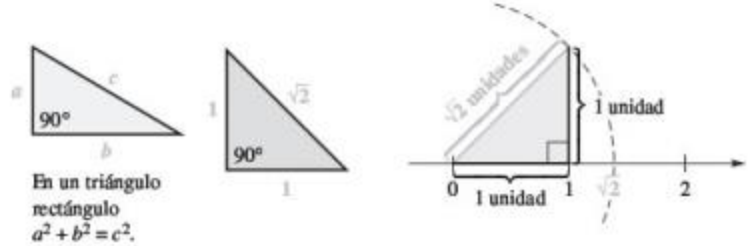
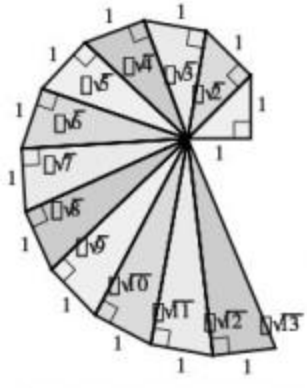


FIGURA 12

*En esta sección supondremos que los dígitos de un número como éste continúan de manera indefinida con el patrón establecido. Los siguientes dígitos serían 000000100000002, y así sucesivamente.

La demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional es un ejemplo clásico de una **demostración por contradicción**. Empezamos suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional y llegamos a una contradicción o absurdo. El método también se conoce como **reducción al absurdo** (o, en latín, *reductio ad absurdum*). Con la finalidad de entender la demostración, consideramos tres hechos preliminares:

1. Cuando un número racional se reduce a sus términos más simples (mínima expresión), el mayor factor común del numerador y del denominador es 1.
2. Si un entero es par, entonces tiene al 2 como factor y puede escribirse en la forma $2k$, donde k es un entero.
3. Si un cuadrado perfecto es par, entonces su raíz cuadrada es par.



Una manera interesante de representar las longitudes correspondientes a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, etc., es el que se muestra en esta figura. Utilice el teorema de Pitágoras para verificar las longitudes.

Teorema $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Demostración: Suponga que $\sqrt{2}$ es un número racional. Entonces, por definición,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{para algunos enteros } p \text{ y } q.$$

Además, suponga que p/q es la forma de $\sqrt{2}$ que está reducida a su forma más simple, de modo que el mayor factor común de p y q es 1. Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación obtenemos

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

y multiplicando todo por q^2 se obtiene

$$2q^2 = p^2.$$

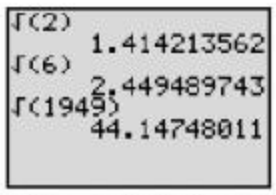
Esta ecuación demuestra que 2 es factor de p^2. Así, p^2 es par, y por lo tanto p también es par. Como p es par, puede escribirse de la forma $2k$, donde k es un entero.

Ahora, sustituya $2k$ por p en la última ecuación y simplifique:

$$2q^2 = (2k)^2$$
$$2q^2 = 4k^2$$
$$q^2 = 2k^2.$$

Como 2 es un factor de q^2, q^2 debe ser par; por lo tanto, q debe ser par. Sin embargo, esto lleva a una contradicción: p y q no pueden ser al mismo tiempo pares, ya que tendrían un factor común 2, a pesar de que supusimos que su factor común más grande era 1.

Por consiguiente, como la suposición original de que $\sqrt{2}$ es racional llevó a una contradicción, debe concluirse que $\sqrt{2}$ es irracional. ■



Éstas son aproximaciones de calculadora de números irracionales.

Una calculadora con tecla para la raíz cuadrada puede dar aproximaciones de raíces cuadradas de números que no son cuadrados perfectos. Para demostrar que son aproximaciones, utilizamos el símbolo $\approx$ para indicar que "es aproximadamente igual a". Las aproximaciones en algunas calculadoras son:

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562, \quad \sqrt{6} \approx 2.449489743 \quad \text{y} \quad \sqrt{1949} \approx 44.14748011.$$

No todas las raíces cuadradas son irracionales. Por ejemplo,

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{36} = 6 \quad \text{y} \quad \sqrt{100} = 10$$

son números racionales. Sin embargo, si n es un entero positivo que no es el cuadrado de un entero, entonces $\sqrt{n}$ es un número irracional. La tabla siguiente muestra algunos ejemplos de números racionales y números irracionales.

Números racionales	Números irracionales
$\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$
.64	.23233233323333...
$.\overline{74}$	$\sqrt{5}$
$\sqrt{16}$	π
1.618	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
2.718	e

Valor exacto de la razón áurea.

Un número importante en matemáticas superiores, vea la nota al margen.

El número *e* es un número fundamental en nuestro universo. Por esta razón, e, al igual que π, se conoce como *constante universal*. Si existen seres inteligentes en alguna otra parte, también tendrán que emplear e para trabajar con matemáticas superiores.

La letra e se utiliza en honor de Leonardo Euler, quien publicó amplios resultados sobre este número en el año 1748. Los primeros dígitos del valor decimal de e son 2.7182818. Como es un número irracional, su expresión decimal nunca termina y nunca se repite.

Las propiedades de e son muy utilizadas en cálculo y en matemáticas superiores.

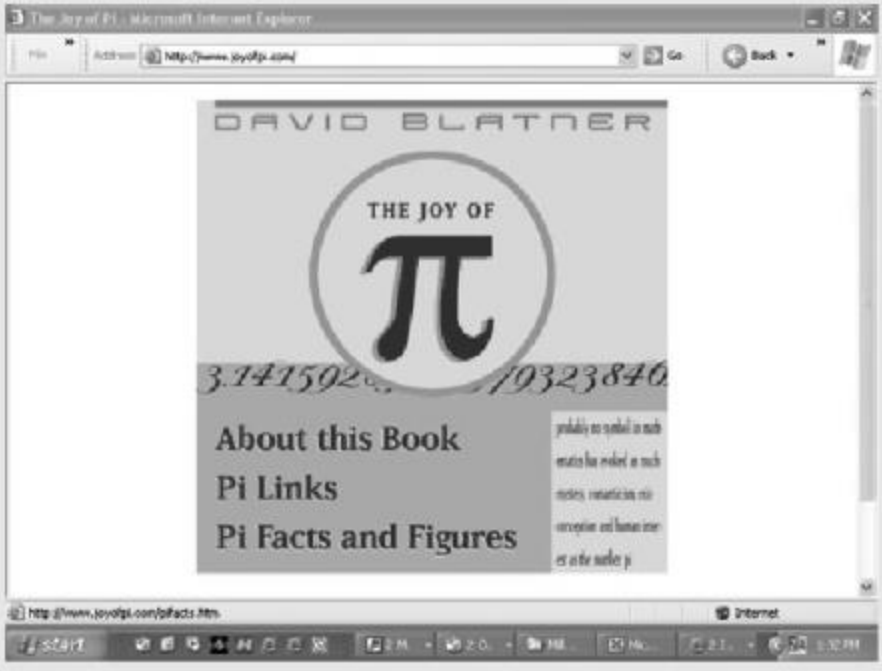
Uno de los números irracionales más útiles es π, la razón de la circunferencia al diámetro de un círculo. (Muchas fórmulas de la geometría incluyen a π, como las fórmulas para el área de un círculo, $A = \pi r^2$.) Durante 4000 años los matemáticos han encontrado cada vez mejores aproximaciones para π. Los antiguos egipcios se servían de un método para determinar el área de un círculo que es equivalente a un valor de 3.1605 para π. Los babilonios empleaban números que dan $3\frac{1}{8}$ para π. En la *Biblia* (Reyes I, 7:23), hay un versículo que describe un estanque circular en el templo del rey Salomón, hacia el año 1000 a.C. Se dice que el estanque tenía 10 codos del uno al otro lado, y que "ceñíalo en derredor un cordón de 30 codos". Esto implica un valor de 3 para π.

El símbolo para π que se utiliza actualmente es una letra griega. Se usó por primera vez en la Inglaterra de principios del XVIII. En 1859, el profesor Benjamin Peirce, de Harvard, propuso para π el símbolo que se ilustra arriba.

PARA REFLEXIONAR

En 2002, el científico especialista en cómputo, Yasumasa Kanada y sus colegas del Centro de Tecnología Informática de la Universidad de Tokio, anunciaron el cálculo de 1,241,100,000,000 dígitos decimales de pi, con lo que rebasaron por más de seis veces su propio récord de 206,158,430,000 dígitos, establecido anteriormente, en 1999. De acuerdo con "The π Pages" en el sitio web http://www.cecm.sfu.ca, "el cálculo de pi es virtualmente el único tema de la matemática antigua que aún es de interés serio para la investigación matemática moderna". Una visita a http://www.joyofpi.com lo llevará a interesantes enlaces acerca de este fascinante número.

(continúa)



Fuente: David Blatner, *The Joy of Pi*, www.joyofpi.com.

Una de las razones para calcular tantos dígitos es determinar con qué frecuencia aparece cada dígito e identificar algún patrón interesante. Dos matemáticos estadounidenses, Gregory y David Chudnovsky, han dedicado una gran cantidad de tiempo y esfuerzo a buscar patrones en los dígitos. Por ejemplo, la aparición relativamente rápida de seis números 9 consecutivos en la representación decimal, dentro de los primeros 800 lugares decimales. Y después de 500 millones apareció la sucesión 123456789. Una hipótesis acerca de π se basa en lo que los matemáticos llaman "normalidad". La conjetura de normalidad indica que todos los dígitos aparecen con la misma frecuencia promedio. De acuerdo con Gregory, "no hay duda alguna de que π es un número 'normal'. No lo hemos podido probar aún y ni siquiera sabemos cómo *intentarlo*".

El cálculo de π ha fascinado a matemáticos y legos durante siglos. En el siglo XIX, el matemático británico William Shanks invirtió muchos años de su vida en el cálculo de π con 707 lugares decimales. Resultó que sólo los primeros 527 eran correctos.

En 1767 J.H. Lambert demostró que π es irracional (y por lo tanto, sus decimales nunca terminarán ni se repetirán). Sin embargo, la legislatura de 1897 del estado de Indiana consideró la promulgación de un proyecto de ley para *legislar* el valor de π. En una parte de dicha ley, el valor se estableció en 4, y en otra parte en 3.2. Sorprendentemente, la propuesta pasó a la Cámara, pero el Senado pospuso de manera indefinida el proceso!

Las siguientes expresiones son algunas de las que pueden usarse para calcular π a más y más decimales.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \ldots}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Petr Beckman en su libro *A History of Pi* narra la fascinante historia de pi.

Para análisis en grupo

1. Que cada miembro del grupo le pregunte a alguien ajeno a la clase "¿qué es π?". Después, como grupo, analicen las respuestas obtenidas.
2. Como con el monte Everest, algunas personas se divierten escalando la montaña de π, simplemente porque allí está. ¿Ha emprendido usted algún proyecto, simplemente por decir "lo logré"? Comparta sus experiencias con el grupo.
3. Divida la clase en tres grupos, y con calculadora en mano, haga que dediquen unos cuantos minutos a calcular las expresiones anteriores para aproximar π. Compare sus resultados para ver cuál de las expresiones convergen a π más rápido.
4. Un **recurso mnemotécnico** es un esquema por medio del cual uno es capaz de recordar hechos memorizando algo completamente ajeno a los hechos. Una manera de aprender los primeros decimales de π es memorizar una oración (o varias oraciones) y contar las letras en cada palabra de la oración. Por ejemplo, "Vea y vaya a ellas", dará los primeros dígitos de π: "Vea" tiene 3 letras, "y" tiene 1 letra, "vaya" tiene 4 letras, "a" tiene 1 letra, y "ellas" tiene 5 letras. Por lo que los primeros 5 dígitos son 3.1415.

   Verifique que los siguientes recursos mnemotécnicos funcionan. (Vea la nota al margen en la página siguiente para 31 decimales de π.)
   (a) "Oye a esos, y diles oraciones de afecto."
   (b) "Sal y masa a todos agradarán, si puedes traer."
   (c) " Epa!, a Lety y Dulce salúdalas, ¿no tienes miedo del dolor sembrado, Heriberto?"

Raíces cuadradas En el trabajo matemático diario casi todos nuestros cálculos están relacionados con los números racionales, generalmente en forma decimal. Sin embargo, en nuestro *estudio* de las diferentes ramas de las matemáticas, algunas veces necesitamos realizar operaciones con números irracionales, y en muchas ocasiones, los números irracionales son raíces cuadradas. Recuerde que $\sqrt{a}$, para $a \geq 0$, es el número no negativo cuyo cuadrado es a; esto es $(\sqrt{a})^2 = a$. Ahora veremos algunas operaciones sencillas con raíces cuadradas.

Observe que

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$

y

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6.$$

Por tanto, $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9}$. Éste es un caso particular de la siguiente regla del producto:

Regla del producto para raíces cuadradas

Para números reales no negativos a y b,

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}.$$

Al igual que todo número racional, a/b puede reducirse a su forma más simple, o mínima expresión (mediante la propiedad fundamental de los números racionales); también toda raíz cuadrada tiene una forma más simple. Una raíz cuadrada está en su **forma más simple** si se cumplen las tres condiciones siguientes:

Forma simplificada de un radical de raíz cuadrada

1. El número dentro del radical (**radicando**) no tiene factores (excepto 1) que sean cuadrados perfectos.
2. El radicando no tiene fracciones.
3. Ningún denominador tiene radicales.

EJEMPLO 1 Simplifique $\sqrt{27}$.

Como 9 es un factor de 27 y 9 es un cuadrado perfecto $\sqrt{27}$ no está en forma simplificada. No se cumple la primera condición del cuadro anterior. Simplificamos como sigue

$$\begin{aligned}\sqrt{27} &= \sqrt{9 \cdot 3} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} && \text{Utilice la regla del producto.} \\ &= 3\sqrt{3} && \sqrt{9} = 3, \text{ ya que } 3^2 = 9.\end{aligned}$$

■

Expresiones como $\sqrt{27}$ y $3\sqrt{3}$ se llaman *valores exactos* de la raíz cuadrada de 27. Si utilizamos la tecla de la raíz cuadrada de una calculadora, encontramos

$$\sqrt{27} \approx 5.196152423.$$

Si buscamos $\sqrt{3}$ y luego multiplicamos el resultado por 3, obtenemos

$$3\sqrt{3} \approx 3(1.732050808) \approx 5.196152423.$$

Observe que estas aproximaciones son iguales, como esperaríamos. (Debido a los diferentes métodos para calcular, puede haber discrepancia en el último dígito del cálculo.) Sin embargo, entienda que las aproximaciones de la calculadora realmente no *prueban* que los dos números sean iguales, sino que sólo sugieren de una manera muy convincente la igualdad. El trabajo realizado en el ejemplo 1 realmente proporciona la justificación matemática de que los resultados son iguales de verdad.

Existe una regla análoga a la multiplicación para cocientes.

Regla del cociente para raíces cuadradas

Para números reales no negativos a y números positivos b,

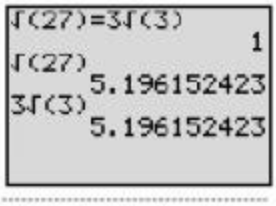
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Este poema, dedicado a Arquímedes ("el inmortal siracusano") nos permite aprender, en inglés, los primeros 31 dígitos de la representación decimal de π. Reemplazando cada palabra con el número de letras que contiene, y con un punto decimal a continuación del 3 inicial, se determina el decimal. El poema fue escrito por A.C. Orr, y apareció en *Literary Digest* en 1906.

Now I, even I, would celebrate
In rhymes unapt, the great
Immortal Syracusan, rivaled
nevermore,
Who in his wondrous lore
Passed on before,
Left men his guidance
How to circles mensurate.

De este poema, podemos determinar los siguientes dígitos de π:
3.14159265358979323846264338
3279.

Arquímedes fue capaz de utilizar círculos inscritos y circunscritos por polígonos para determinar que el valor de π está entre 223/71 y 22/7.



El 1 después de la primera línea indica que la igualdad es verdadera. La calculadora también muestra las mismas aproximaciones para $\sqrt{27}$ y $3\sqrt{3}$ en la segunda y tercera respuestas.



El símbolo del radical anterior tiene su origen en la palabra latina *radix* (raíz). La utilizó por primera vez Leonardo de Pisa (Fibonacci) en 1220. El símbolo alemán del siglo xvi que se emplea en la actualidad probablemente también se derive de la letra r.

EJEMPLO 2 Simplifique cada radical.

(a) $\sqrt{\frac{25}{9}}$

Esta expresión radical no está simplificada porque el radicando tiene una fracción. (Vea la condición 2 en el recuadro que precede al ejemplo 1.) Utilice la regla del cociente como sigue.

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

(b) $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Esta expresión no está en forma simplificada, ya que no se cumple la condición 3. Para obtener una expresión equivalente sin radicales en el denominador, utilizamos un procedimiento denominado **racionalización del denominador**. Multiplique $1/\sqrt{2}$ por $\sqrt{2}/\sqrt{2}$, que es una forma del 1, el elemento identidad para la multiplicación.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

La forma simplificada de $\sqrt{1/2}$ es $\sqrt{2}/2$. ■

¿Es cierto que $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{4+9}$? Un sencillo cálculo muestra que la respuesta es "no", ya que $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$, mientras que $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, y $5 \neq \sqrt{13}$. Sin embargo, pueden sumarse los radicales con raíces cuadradas si tienen el mismo radicando. Tales radicales son **radicales semejantes**. Sumamos (y restamos) radicales semejantes con la propiedad distributiva, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Sume o reste según se indique.

(a) $3\sqrt{6} + 4\sqrt{6}$

Como en ambos términos aparece $\sqrt{6}$, se trata de radicales semejantes, y pueden combinarse.

$$\begin{aligned} 3\sqrt{6} + 4\sqrt{6} &= (3+4)\sqrt{6} && \text{Propiedad distributiva} \\ &= 7\sqrt{6} && \text{Sume.} \end{aligned}$$

(b) $\sqrt{18} - \sqrt{32}$

A primera vista se observa que no podemos restar estos términos. Sin embargo, si primero simplificamos $\sqrt{18}$ y $\sqrt{32}$, entonces podremos hacerlo.

$$\begin{aligned} \sqrt{18} - \sqrt{32} &= \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} && \text{Regla del producto} \\ &= 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} && \text{Obtenga raíces cuadradas.} \\ &= (3-4)\sqrt{2} && \text{Propiedad distributiva} \\ &= -1\sqrt{2} && \text{Reste.} \\ &= -\sqrt{2} && -1 \cdot a = -a \end{aligned}$$

■

Del ejemplo 3, inferimos que radicales semejantes pueden sumarse o restarse, sumando o restando sus coeficientes (los números por los que éstos se multiplican) y se conserva el radical. Por ejemplo,

$$9\sqrt{7} + 8\sqrt{7} = 17\sqrt{7} \quad \text{(ya que } 9 + 8 = 17\text{)}$$
$$4\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = -8\sqrt{3} \quad \text{(ya que } 4 - 12 = -8\text{)},$$

y así sucesivamente.

En los enunciados de las reglas del producto y del cociente para raíces cuadradas, los radicandos no pueden ser negativos. Por ejemplo, mientras $-\sqrt{2}$ es un número real, $\sqrt{-2}$ no lo es; no existe número real cuyo cuadrado sea -2. Lo mismo puede decirse para cualquier radicando negativo. A fin de manejar esta situación, los matemáticos han ampliado nuestro sistema numérico para incluir los *números complejos*, los cuales se estudian en la sección Extensión, al final del capítulo.

6.4 EJERCICIOS

Identifique cada uno de los siguientes números como racional *o* irracional.

1. $\frac{4}{9}$ **2.** $\frac{7}{8}$ **3.** $\sqrt{10}$ **4.** $\sqrt{14}$ **5.** .37

6. .91 **7.** $.\overline{41}$ **8.** $.\overline{32}$ **9.** π **10.** 0

11. .878778777877778... **12.** .434334333433334... **13.** 3.14159 **14.** $\frac{22}{7}$

15. (a) Determine la suma siguiente.

$$\begin{array}{r} .272772777277772\ldots \\ +.616116111611116\ldots \\ \hline \end{array}$$

(b) Con base en el resultado de la parte (a), podemos concluir que la suma de dos números _____ puede ser un número _____.

16. (a) Realice la suma siguiente.

$$\begin{array}{r} .010110111011110\ldots \\ +.252552555255552\ldots \\ \hline \end{array}$$

(b) Con base en el resultado de la parte (a), podemos concluir que la suma de dos números _____ puede ser un número _____.

Utilice una calculadora para encontrar una aproximación racional, en forma decimal, para cada uno de los siguientes números irracionales. Proporcione tantos lugares decimales como muestre su calculadora.

17. $\sqrt{39}$ **18.** $\sqrt{44}$ **19.** $\sqrt{15.1}$ **20.** $\sqrt{33.6}$

21. $\sqrt{884}$ **22.** $\sqrt{643}$ **23.** $\sqrt{\frac{9}{8}}$ **24.** $\sqrt{\frac{6}{5}}$

Utilice los métodos de los ejemplos 1 y 2 para simplificar cada una de las expresiones dadas. Luego, utilice una calculadora para aproximar tanto la expresión dada como la expresión simplificada (ambas deben ser iguales).

25. $\sqrt{50}$ **26.** $\sqrt{32}$ **27.** $\sqrt{75}$ **28.** $\sqrt{150}$ **29.** $\sqrt{288}$ **30.** $\sqrt{200}$

31. $\frac{5}{\sqrt{6}}$ **32.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$ **33.** $\sqrt{\frac{7}{4}}$ **34.** $\sqrt{\frac{8}{9}}$ **35.** $\sqrt{\frac{7}{3}}$ **36.** $\sqrt{\frac{14}{5}}$

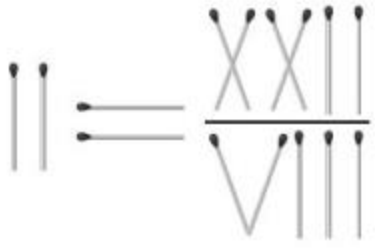
Utilice el método del ejemplo 3 para realizar las operaciones indicadas.

37. $\sqrt{17} + 2\sqrt{17}$ **38.** $3\sqrt{19} + \sqrt{19}$ **39.** $5\sqrt{7} - \sqrt{7}$ **40.** $3\sqrt{27} - \sqrt{27}$

41. $3\sqrt{18} + \sqrt{2}$ **42.** $2\sqrt{48} - \sqrt{3}$ **43.** $-\sqrt{12} + \sqrt{75}$ **44.** $2\sqrt{27} - \sqrt{300}$

Cada uno de los ejercicios siguientes se relaciona con π. Cuando sea necesario utilice una calculadora.

45. Mueva una fósforo para hacer la ecuación, aproximadamente verdadera. (*Fuente:* http://www.joyofpi.com)



46. Determine la raíz cuadrada de 2143/22 por medio de una calculadora. Luego determine la raíz cuadrada de ese resultado. Compárelo con el decimal para π de la nota al margen. ¿Qué observa?

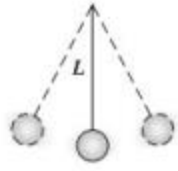
47. Determine los primeros 8 dígitos de 355/113. Compare el resultado con el decimal para π de la nota al margen. ¿Qué observa?

48. Puede haber visto los enunciados "utilice 22/7 para π" y "utilice 3.14 para π". Como 22/7 es el cociente de dos enteros y 3.14 es un decimal que termina, ¿acaso estos enunciados sugieren que π es racional?

Resuelva cada problema. Cuando sea necesario utilice una calculadora y proporcione las aproximaciones, al décimo más cercano, a menos que se especifique otra cosa.

49. ***Periodo de un péndulo*** El periodo en segundos de un péndulo depende de su longitud en pies, L, y está dado por la fórmula

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}.$$



Si un péndulo tiene 5.1 pies de largo, ¿cuál es su periodo? Utilice 3.14 para π.

50. ***Radio de una lata de aluminio*** El radio de la tapa o de la parte inferior de una lata de aluminio con área de superficie S y altura h está dada por

$$r = \frac{-h + \sqrt{h^2 + .64S}}{2}.$$

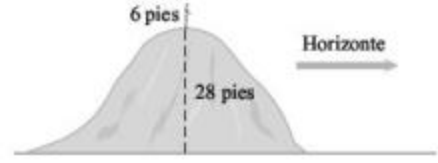


¿Cuál es el radio que debe utilizarse para fabricar una lata con altura de 12 pulgadas y área de superficie de 400 pulgadas cuadradas?

51. ***Distancia al horizonte*** De acuerdo con un artículo de *The World Scanner Report* (agosto de 1991), la distancia, D, en millas, al horizonte desde el punto de vista de un observador sobre el agua o tierra "plana" se da por

$$D = \sqrt{2H},$$

donde H es la altura desde el punto de visión, en pies. Si una persona cuyos ojos están a 6 pies sobre el nivel del suelo está parada en lo alto de una colina de 28 pies sobre suelo "plano", ¿aproximadamente qué tan lejos hacia el horizonte podrá ver esta persona? Redondee su respuesta al décimo de milla más cercano.



52. ***Fórmula de electrónica*** La fórmula

$$I = \sqrt{\frac{2P}{L}}$$

relaciona el coeficiente de autoinducción, L (en "henrys"), la energía P almacenada en un circuito electrónico (en "joules") y la corriente I (en "amperes"). Determine I, si $P = 120$ joules y $L = 80$ "henrys".

53. ***Área del Triángulo de las Bermudas*** La *fórmula de Herón* proporciona un método para determinar el área de un triángulo, si se conocen las longitudes de sus lados. Suponga que a, b y c son las longitudes de los lados. Sea s la mitad del perímetro del triángulo (denominado *semiperímetro*); esto es,

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Entonces el área A del triángulo está dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

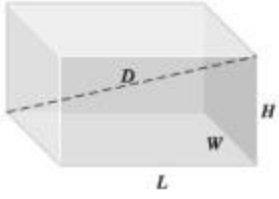
Determine el área del Triángulo de las Bermudas, si los "lados" de este triángulo miden aproximadamente 850 millas, 925 millas y 1300 millas. Dé su respuesta al milésimo de milla cuadrada más cercano.

54. ***Área encerrada por el Monumento a los veteranos de Vietnam*** El Monumento a los veteranos de Vietnam en Washington, D.C., tiene la forma de un triángulo isósceles abierto. Con lados iguales de longitud 246.75 pies. Si el triángulo estuviese cerrado, el tercer lado tendría una longitud de 438.14 pies. Utilice la fórmula de Herón, del ejercicio anterior, para determinar el área encerrada, aproxime a la centena de pies cuadrado más cercana. (*Fuente:* Información de los folletos obtenidos en el Monumento a los veteranos de Vietnam.)

55. *Diagonales de una caja* La longitud de la diagonal de una caja está dada por

$$D = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2},$$

donde L, W y H son el largo, el ancho y la altura de la caja, respectivamente. Determine la longitud de la diagonal, D, de una caja que tiene 4 pies de largo, 3 de altura y 2 pies de ancho. Dé el valor exacto y luego redondee al décimo de pie más cercano.



56. *Tasa de rendimiento de una inversión* Si una inversión de P dólares crece a A dólares en dos años, la tasa de rendimiento anual sobre la inversión está dada por

$$r = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{P}}{\sqrt{P}}.$$

Primero racionalice el denominador y luego determine la tasa de rendimiento anual (como un decimal) si \$50,000 crecen a \$58,320.

57. *Reconstrucción de un accidente* En ocasiones, la policía utiliza el siguiente procedimiento para estimar la velocidad a la que un automóvil viajaba al instante de un accidente. Un oficial conduce el automóvil implicado en el accidente bajo condiciones similares a las del accidente y luego se resbala hasta detenerse. Si el automóvil es conducido a 30 millas por hora, entonces la velocidad en el instante del accidente está dada por

$$s = 30\sqrt{\frac{a}{p}},$$

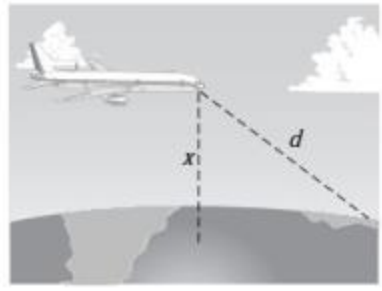
donde a es la longitud de la marca de deslice que deja al instante del accidente y p es la longitud de la marca de deslice en la prueba. Determine s para los valores siguientes de a y p.

(a) $a = 862$ pies; $p = 156$ pies
(b) $a = 382$ pies; $p = 96$ pies
(c) $a = 84$ pies; $p = 26$ pies

58. *Distancia al horizonte* Una fórmula para calcular la distancia, d, la cual se puede ver desde un aeroplano al horizonte en un día despejado es

$$d = 1.22\sqrt{x},$$

donde x es la altitud, en pies, del aeroplano y d está dada en millas.



¿Cuán lejos se puede ver al horizonte en un aeroplano que vuela a las siguientes altitudes? Redondee al décimo más cercano.

(a) 15,000 pies
(b) 18,000 pies
(c) 24,000 pies

El concepto de raíz cuadrada (segunda) puede extenderse a ***raíz cúbica (tercera)***, ***raíz cuarta***, *etc. Si* $n \geq 2$ *y* a *es un número no negativo,* $\sqrt[n]{a}$ *representa el número no negativo cuya n-ésima potencia es* a. *Por ejemplo,*

$\sqrt[3]{8} = 2$ *ya que* $2^3 = 8$,
$\sqrt[3]{1000} = 10$ *ya que* $10^3 = 1000$,
$\sqrt[4]{81} = 3$ *ya que* $3^4 = 81$,

y así sucesivamente. Determine cada una de las siguientes raíces.

59. $\sqrt[3]{64}$ **60.** $\sqrt[3]{125}$
61. $\sqrt[3]{343}$ **62.** $\sqrt[3]{729}$
63. $\sqrt[3]{216}$ **64.** $\sqrt[3]{512}$
65. $\sqrt[4]{1}$ **66.** $\sqrt[4]{16}$
67. $\sqrt[4]{256}$ **68.** $\sqrt[4]{625}$
69. $\sqrt[4]{4096}$ **70.** $\sqrt[4]{2401}$

Utilice una calculadora para aproximar cada raíz. Provea tantos lugares como muestre su calculadora.

71. $\sqrt[3]{43}$ **72.** $\sqrt[3]{87}$
73. $\sqrt[3]{198}$ **74.** $\sqrt[4]{2107}$
75. $\sqrt[4]{10{,}265.2}$ **76.** $\sqrt[4]{863.5}$

Resuelva cada problema.

77. *Umbral de peso* El umbral de peso, T, para una persona, es el peso que no debe excederse pues de lo contrario, el riesgo de morir aumenta en gran medida. En un caso, un investigador descubrió que el umbral de peso, en libras, para hombres de 40 a 49 años está relacionado con la estatura, h, en pulgadas, por medio de la ecuación

$$h = 12.3\sqrt[3]{T}.$$

¿Qué estatura corresponde a un umbral de 180 libras para un hombre de 43 años de edad?

78. ***Ley de tensiones*** En el estudio del sonido, una versión de la ley de tensiones es

$$f_1 = f_2\sqrt{\frac{F_1}{F_2}}.$$

Determine f_1 a la unidad más cercana, si $F_1 = 300$, $F_2 = 60$ y $f_2 = 260$.

Los ejercicios 79 y 80 estudian el concepto de ***exponentes racionales.***

79. En álgebra, la expresión $a^{1/2}$ se define como $\sqrt{a}$ para valores no negativos de a. Utilice una calculadora con una tecla para evaluar potencias para evaluar cada uno de los siguientes y compare con el valor obtenido mediante la tecla de raíz cuadrada. (Ambos deben ser iguales.)

(a) $2^{1/2}$ **(b)** $7^{1/2}$ **(c)** $13.2^{1/2}$ **(d)** $25^{1/2}$

80. Basado en los ejercicios del 59 a 76, responda lo siguiente.

(a) ¿Cómo cree que la expresión $a^{1/3}$ se define como radical?

(b) Utilice una calculadora con tecla para raíz cúbica para aproximar $\sqrt[3]{16}$.

(c) Utilice una calculadora con una tecla para evaluar potencias para aproximar $16^{1/3}$.

Los ejercicios 81 y 82 investigan al número irracional e.

81. Utilice una calculadora con tecla para evaluar potencias con el fin de determinar los siguientes valores: $(1.1)^{10}$, $(1.01)^{100}$, $(1.001)^{1000}$, $(1.0001)^{10,000}$ y $(1.00001)^{100,000}$. Compare sus resultados con la aproximación dada para el número irracional e en la nota al margen de esta sección. ¿Qué encuentra?

82. Utilice una calculadora con una tecla para potencias de e, para determinar lo siguiente:

(a) e^2 **(b)** e^3 **(c)** $\sqrt{e}$

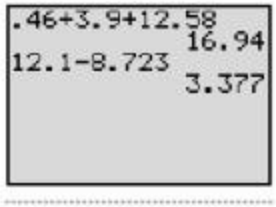
6.5 Aplicaciones de decimales y porcentajes

Tal vez el uso más frecuente de las matemáticas en la vida diaria corresponda a las operaciones con números decimales y con el concepto de porcentaje. Al emplear dólares y centavos, operamos con números decimales. El impuesto sobre las compras que realizamos en un almacén se calcula por medio de porcentajes. El consumidor instruido debe tener un vasto conocimiento de las operaciones con decimales y porcentajes, en todo lo relacionado con el dinero. Hojee cualquier periódico y verá incontables referencias al tanto por ciento y a los porcentajes.

Operaciones con decimales Debido a que en la mayoría de los casos las calculadoras han reemplazado los métodos con lápiz y papel en el cálculo de operaciones con decimales y porcentajes, sólo mencionaremos estos últimos de manera breve. *Sugerimos que para la realización del trabajo de esta sección se disponga de una calculadora.*

Suma y resta de decimales

Para sumar o restar números decimales, alinee el punto decimal en una columna y realice la operación.



La pantalla confirma los resultados del ejemplo 1.

EJEMPLO 1

(a) Para calcular la suma .46 + 3.9 + 12.58, utilice el método siguiente:

$$\begin{array}{r} .46 \\ 3.9 \\ +12.58 \\ \hline 16.94 \end{array}$$

Alinee los puntos decimales.

← Suma

Contrario al temor de muchos, la disponibilidad de calculadoras y computadoras ha ampliado las capacidades de los estudiantes para realizar cálculos. No existe evidencia que indique que las calculadoras hagan a los estudiantes dependientes de ellas para realizar cálculos sencillos. Los estudiantes deben ser capaces de decidir cuándo necesitan calcular, y si requieren un valor exacto o una respuesta aproximada. Tienen que ser capaces de seleccionar y utilizar la herramienta más apropiada. Deben tener un enfoque balanceado para calcular, ser capaces de seleccionar los procedimientos apropiados, determinar respuestas y juzgar la validez de las mismas.

Tomado de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM), p. 9.

(b) Para calcular la diferencia $12.1 - 8.723$, utilice el siguiente método:

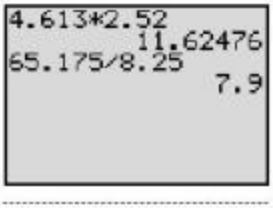
$$\begin{array}{rl} 12.100 & \text{Añada ceros.} \\ -\ 8.723 & \\ \hline 3.377 & \leftarrow \text{Diferencia} \end{array}$$

■

Recuerde que, cuando se multiplican dos números, éstos se denominan *factores*, y la respuesta, *producto*. Cuando dos números se dividen, el número que será dividido se denomina *dividendo*, el número por el cual se divide se conoce como *divisor* y la respuesta se llama *cociente*.

Multiplicación y división de decimales

1. Para multiplicar decimales, realice la multiplicación de la misma manera en que se multiplican los enteros. El número de lugares decimales a la derecha del punto decimal en el producto es la *suma* del número de lugares a la derecha de los puntos decimales en los factores.
2. Para dividir decimales, mueva el punto decimal a la derecha el mismo número de lugares en el divisor y en el dividendo, de modo que obtenga un número cardinal en el divisor. Realice la división del mismo modo en que se dividen los enteros. El número de lugares decimales a la derecha del punto decimal, en el cociente, es el mismo que el número de lugares a la derecha en el dividendo.



Esta pantalla confirma los resultados en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2

(a) Para encontrar el producto 4.613×2.52, utilice el método siguiente:

$$\begin{array}{rl} 4.613 & \leftarrow \text{3 lugares decimales} \\ \times\ 2.52 & \leftarrow \text{2 lugares decimales} \\ \hline 9226 & \\ 23065 & \\ 9226 & \\ \hline 11.62476 & \leftarrow 3 + 2 = 5 \text{ lugares decimales} \end{array}$$

(b) Para encontrar el cociente $65.175 \div 8.25$, siga estos pasos:

$$\begin{array}{rl} & 7.9 \\ 8.25\overline{)65.175} \longrightarrow & 825\overline{)6517.5} \\ & \underline{5775} \\ & 7425 \\ & \underline{7425} \\ & 0 \end{array}$$

■

Cómo redondear decimales Las operaciones con decimales con frecuencia tienen por resultado una larga ristra de dígitos en los lugares decimales. Como todos estos dígitos no se necesitan en un problema práctico, es común *redondear* un decimal al número de lugares decimales necesarios. Por ejemplo, al preparar el impuesto



Aquí, la calculadora TI-83 Plus se configura para redondear a dos lugares decimales.

federal, las cantidades de dinero se redondean al dólar más cercano. Redondee como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Redondee 3.917 a la centésima más cercana.

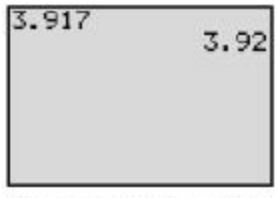
El lugar de los centésimos en 3.917 tiene el dígito 1.

3.917
↑ Lugar de los centésimos

Para redondear este decimal, localice 3.91 y 3.92 sobre la recta numérica como en la figura 13.



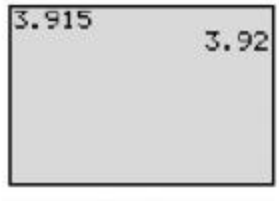
FIGURA 13



La calculadora redondea 3.917 al centésimo más cercano.

La distancia de 3.91 a 3.92 se dividió en 10 partes iguales. La séptima de estas 10 partes ubica al número 3.917. Como muestra la recta numérica, 3.917 está más cerca de 3.92 que de 3.91, de modo que 3.917, redondeado al centésimo más cercano, es 3.92. ■

Si el método de la recta numérica del ejemplo 3 se utilizara para redondear 3.915 al centésimo más cercano, se tiene un problema: el número 3.915 se encuentra exactamente a la mitad entre 3.91 y 3.92. Entonces se hace una decisión arbitraria redondear *hacia arriba*: 3.915 redondeado al centésimo más cercano es 3.92.



La calculadora redondea 3.915 *hasta* 3.92.

Reglas para redondear decimales

Paso 1: Localice el **lugar** al que se redondeará el número.

Paso 2: Vea el siguiente **dígito a la derecha** del lugar al que se redondeará el número.

Paso 3A: Si este dígito es **menor que 5**, elimine todos los dígitos a la derecha del lugar al que se redondeará el número. *No cambie* el dígito al que se redondeará el número.

Paso 3B: Si este dígito es **5 o mayor**, elimine todos los dígitos a la derecha del lugar al que será redondeado el número. *Sume uno* al dígito del lugar al que habrá de redondearse el número.

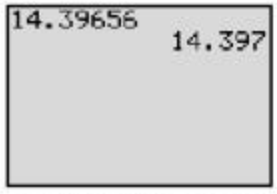
EJEMPLO 4 Redondee 14.39656 a la milésima más cercana.

Paso 1: Utilice una flecha para ubicar el lugar en el que se redondeará el número

14.39656
↑ Lugar de las milésimas

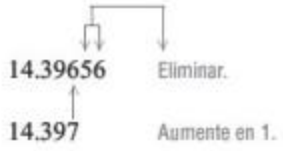
Paso 2: Verifique si el primer dígito a la derecha de la flecha es 5 o mayor.

14.396 ⑤ 6 El dígito a la derecha de la flecha es 5.
↑



Con la calculadora configurada para redondear a tres decimales, se confirma el resultado del ejemplo 4.

Paso 3 Si el dígito a la derecha de la flecha es 5 o mayor, aumente en 1 el dígito al que apunta la flecha. Elimine todos los dígitos a la derecha de la flecha.



Por último, 14.39656 redondeado a la milésima más cercana es 14.397. ■

PARA REFLEXIONAR

¿Tiene usted el "don"? Todos nacemos con diferentes habilidades. Esto es lo que nos hace individuos únicos. Algunas personas cuentan con talentos musicales, mientras que otras no son capaces de afinar. Ciertos individuos pueden reparar automóviles, coser o construir algo, mientras que otros no poseen habilidades para ninguna de estas actividades. Algunos tienen facilidad para los porcentajes, mientras que otros se quedan completamente perplejos ante las operaciones. ¿Tiene usted ese don?

Por ejemplo, suponga que necesita calcular el 20% de 50. Si usted utiliza uno de estos métodos, tiene el don:

1. Usted piensa: "Bien, 20% significa 1/5; para calcular 1/5 de algo, divido entre 5, por lo tanto 50 dividido entre 5 es 10. La respuesta es 10".
2. Usted piensa que "20% es dos veces 10% y para determinar el 10% de algo, desplazo el punto decimal un lugar hacia la izquierda. Así, 10% de 50 es 5, y 20% es dos veces 5, o 10. La respuesta es 10".

Si usted no tiene el don, probablemente buscará una calculadora cada vez que necesite determinar un porcentaje, y esperará ansioso poder resolverlo correctamente. Sin embargo, tenga presente algo: no hay nada de qué avergonzarse si no posee el don para el cálculo.

Los métodos que se explican en esta sección le permitirán aprender cómo calcular porcentajes mediante métodos matemáticos seguros y probados. El hecho de que usted no tenga el don, no significa que no puede tener éxito en matemáticas o no pueda aprender otros conceptos. Una habilidad en un área no necesariamente asegura el éxito en otra disciplina que parezca semejante. Veamos este caso:



Obtuve 6 por ciento en matemáticas, ¿es bueno o malo?

En el siglo XIX, Germán Zacarías Dase fue un rapidísimo experto en cálculo que lograba hazañas como la de multiplicar, mentalmente, 79,532,853 por 93,758,479 en menos de un minuto y sin poseer concepto alguno de las matemáticas teóricas!

Para análisis en grupo

Haga que los miembros de su clase compartan sus experiencias de cómo calculan porcentajes.

El signo de porcentaje, %, evolucionó probablemente de un manuscrito italiano de 1425. En lugar de "per 100", "P 100" o "P cento", que era lo común en esa época, el autor utilizó "P$\overline{\text{o}}$." Alrededor de 1650, el símbolo P$\overline{\text{o}}$ se transformó en $\frac{0}{0}$, de modo que "per $\frac{0}{0}$ se usó con frecuencia. Finalmente, la palabra "per" fue eliminada, dejando $\frac{0}{0}$ o %.

Tomado de *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, el trigésimo primer libro del año del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM), 1969.

Porcentaje Una de las principales aplicaciones de los decimales consiste en problemas que implican el uso de **porcentajes**. En las matemáticas del consumidor, las tasas de interés y los descuentos frecuentemente se dan en porcentajes. La palabra *porcentaje* se deriva de "por ciento". El símbolo % representa "por ciento".

Porcentaje

$$1\% = \frac{1}{100} = .01$$

EJEMPLO 5 Convierta cada porcentaje en decimal.

(a) $98\% = 98(1\%) = 98(.01) = .98$

(b) $3.4\% = .034$ **(c)** $.2\% = .002$ ■

EJEMPLO 6 Convierta cada decimal en porcentaje.

(a) $.13 = 13(.01) = 13(1\%) = 13\%$

(b) $.532 = 53.2(.01) = 53.2(1\%) = 53.2\%$

(c) $2.3 = 230\%$ ■

De los ejemplos 5 y 6, concluimos que cuando se hacen conversiones entre porcentajes y decimales pueden usarse los procedimientos siguientes:

Cómo realizar conversiones entre decimales y porcentajes

1. *Para convertir un porcentaje en decimal,* quite el signo % y mueva el punto decimal dos lugares a la izquierda, insertando ceros que ocupen los lugares que falten, si es necesario.
2. *Para convertir un decimal en un porcentaje,* mueva el punto decimal dos lugares a la derecha, y añada ceros para ocupar los lugares que falten, si es necesario; a continuación, añada el signo %.

EJEMPLO 7 Convierta cada fracción en porcentaje.

(a) $\frac{3}{5}$

Primero escriba 3/5 como un decimal. Al dividir 3 entre 5 obtiene $3/5 = 6 = 60\%$.

(b) $\frac{14}{25} = .56 = 56\%$ ■

A continuación, se resume el procedimiento del ejemplo 7.

Cómo convertir una fracción en porcentaje

Para pasar una fracción a porcentaje, convierta la fracción en un decimal y luego el decimal en porcentaje.



Matemáticas para bicicleta Algunos experimentos realizados en Inglaterra, cuyos sujetos eran ciclistas de carreras montados en bicicletas estacionarias, demuestran que la altura del asiento más eficaz es 109% de la medida de la parte interna de la pierna del ciclista. Usted puede obtener el mayor millaje del trabajo de sus piernas con sólo seguir estas instrucciones:

1. Párese derecho, sin zapatos. Pida a alguien que le mida la parte interna de la pierna (desde el piso hasta la entrepierna).
2. Multiplique esta longitud por 109% (esto es, por 1.09), para obtener una medida R.
3. Ajuste su asiento, de modo que la medida R sea igual a la distancia entre la parte superior del asiento y el vástago del pedal inferior, cuando los pedales están en la posición que se presenta en la ilustración.

En los ejemplos siguientes se incluyen porcentajes, se muestran tres métodos. El segundo de ellos implica, en cada caso, el método de productos cruzados. El tercero incluye la tecla de porcentaje de una calculadora.

EJEMPLO 8 Determine 18% de 250.

Método 1: La palabra clave aquí es "de". La palabra "de" se traduce como "veces", "multiplicado por" o simplemente "por", con 18% de 250 dado por

$$(18\%)(250) = (.18)(250) = 45.$$

Método 2: Piense "¿18 es para 100 como (x) es para 250?". Esto se traduce en la ecuación

$$\frac{18}{100} = \frac{x}{250}$$

$100x = 18 \cdot 250$ $a/b = c/d$ si, y sólo si $ad = bc$.

$$x = \frac{18 \cdot 250}{100} = 45.$$ Divida entre 100 y simplifique.

Método 3: Utilice la tecla de porcentaje de una calculadora con la siguiente secuencia de tecleo:

[2] [5] [0] [×] [1] [8] [%] **45**.

Con cualquiera de estos métodos, encontramos que 18% de 250 es 45. ■

EJEMPLO 9 ¿Qué porcentaje de 500 es 75?

Método 1: La frase "qué porcentaje" puede representarse por $x \cdot 1\%$ o $.01x$. Nuevamente la palabra "de" se traduce como "por", mientras que "es" se traduce como "igual a". Por lo tanto,

$.01x \cdot (500) = 75$

$5x = 75$ Multiplique en el lado izquierdo.

$x = 15.$ Divida entre 5 ambos miembros.

Método 2: Piense "¿es (x) a 100 lo que 75 es a 500?". Esto se traduce como

$$\frac{x}{100} = \frac{75}{500}$$

$$500x = 7500$$

$$x = 15.$$

Método 3: [7] [5] [÷] [5] [0] [0] [%] **15**.

En cada caso, 15 es el porcentaje, de modo que podemos concluir que 75 es el 15% de 500. ■

EJEMPLO 10 38 es el 5%, ¿de qué número?

Método 1: $38 = .05x$

$$x = \frac{38}{.05}$$

$$x = 760$$

Método 2: Piense "¿38 es a qué número (x) lo que 5 es a 100?".

$$\frac{38}{x} = \frac{5}{100}$$
$$5x = 3800$$
$$x = 760$$

Método 3: 3 8 ÷ 5 % 760.

Cada método nos muestra que 38 es el 5% de 760. ■

Solución de problemas

Cuando aplicamos porcentajes, es una buena idea reformular el problema dado como una pregunta similar a la que se encuentra en los ejemplos precedentes, y luego proceder a responder esa pregunta. Una estrategia para resolver problemas consiste en solucionar un problema similar pero más sencillo.

EJEMPLO 11 El diagrama circular de la figura 14 muestra la división de porcentajes aproximados, en un año reciente, por grupos de edades que compran artículos para practicar deportes en equipo. De acuerdo con la Asociación Nacional de Bienes Deportivos, se gastaron alrededor de $15,691 millones ese año en artículos deportivos.



Fuente: Asociación Nacional de Bienes Deportivos.

FIGURA 14

¿Cuánto gastaron los compradores menores de 14 años?

La parte del círculo que representa al grupo de menores de 14 años es 48% del círculo. Por tanto, debemos determinar 48% de $15,691 millones:

$$\underbrace{0.48}_{48\%} \underbrace{\times}_{\text{de}} \underbrace{\$15{,}691 \text{ millones}}_{\text{Monto total}} = \underbrace{\$7351.68 \text{ millones.}}_{\text{Monto gastado por el grupo de menores de 14 años}}$$

■

En muchos problemas prácticos se nos pide determinar el porcentaje de aumento o disminución de una cantidad a otra. Las siguientes guías resumen cómo hacerlo.

Cómo determinar el porcentaje de aumento o disminución

1. Para determinar el porcentaje de aumento de a a b, donde $b > a$, reste a de b, y divida este resultado entre a. Convierta en porcentaje.

Ejemplo: El porcentaje de aumento de 4 a 7 es $\frac{7-4}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$.

2. Para determinar el porcentaje de disminución de a a b, donde $b < a$, reste b de a, y divida el resultado entre a. Convierta en porcentaje.

Ejemplo: El porcentaje de disminución de 8 a 6 es $\frac{8-6}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$.

EJEMPLO 12 Las Vegas, Nevada, tiene la tasa más alta de crecimiento de todas las ciudades de Estados Unidos. En 1990, la población de su área metropolitana era de 852,646 habitantes. En 1998 había aumentado a 1,321,546. (*Fuente:* Oficina de Censos de Estados Unidos.)



(a) Estime el porcentaje de aumento en este periodo.

Si redondeamos las cantidades a 850,000 y 1,300,000, respectivamente, podremos determinar con facilidad que el aumento en la población es aproximadamente 1,300,000 − 850,000 = 450,000. Entonces, debemos contestar la pregunta "¿Qué porcentaje de 850,000 (la población *original*) es 450,000?" Como 450,000/850,000 es poco menos que 9/17, el porcentaje de aumento es poco mayor que 50%. Por lo tanto, el aumento de población fue de un poco más de 50%.

(b) Determine el porcentaje de aumento real, al décimo de por ciento más cercano.

Debemos calcular la diferencia entre las dos poblaciones y luego determinar qué porcentaje de 852,646 es esta diferencia.

$$\underbrace{1{,}321{,}546}_{\text{Población en 1998}} - \underbrace{852{,}646}_{\text{Población en 1990}} = \underbrace{468{,}900}_{\text{Aumento en la población}}$$

Ahora resolvamos el problema "¿Qué porcentaje de 852,646 es 468,900?" Éste es similar al problema del ejemplo 9. Cualquiera de los métodos explicados allí demostrará que la respuesta es aproximadamente 55.0%. ■

PARA REFLEXIONAR

El uso erróneo del punto decimal con un símbolo de centavos (¢) se ve a diario. Piense sobre eso. . . $.99 representa 99/100 de un dólar o 99 centavos, mientras que 99¢ también representa 99 centavos (ya que ¢ es el símbolo para centavos). Por lo tanto, ¿qué representa .99¢? Correcto, 99/100 de un centavo!

Ahora vea las fotografías tomadas por los autores. En un establecimiento de comida, una botella de 2 litros de Pepsi se anuncia en .99¢. ¿Qué cree que pasaría si le diera al dependiente 10 centavos y le pide 10 botellas de 10 litros? Lo más probable es que lo dejaría sin habla. Tal vez obtendría una respuesta similar si pide 24 onzas de Bud, que, de acuerdo con la fotografía también cuestan .99¢. Pasar la aspiradora a su automóvil, cuesta .50¢. . . sólo medio centavo! Una copia a color cuesta .65¢, sólo un poco más de medio centavo. Durante años, el aire para los neumáticos se ofrecía de manera gratuita, ahora cuesta .50¢ por neumático, de acuerdo con el letrero. Y ¿qué productos serán anunciados por .39¢ en la panadería?

Es tiempo de finalizar el abuso del punto decimal.













Es bastante obvio lo que cada uno de estos anuncios significa en realidad, pero por ahora, suponga que los productos en realidad se venden a los precios erróneos que se anuncian. Responda las preguntas siguientes.

Para análisis en grupo

1. ¿Cuántas botellas de dos litros de Pepsi obtendría por $1.00? ¿Cuánto cambio le deberían?
2. ¿Cuánto debería costar una onza de Bud?
3. Si usted deposita dos monedas de 25 centavos en la aspiradora para automóviles, ¿cuántas veces debería poder utilizar la aspiradora?
4. ¿Cuántas copias a color debería obtener con $6.50?
5. Si le han puesto aire a sus neumáticos, en total, ¿cuánto debe?
6. Suponga que encuentra el artículo que se anuncia en la panadería y tiene 39 centavos. ¿Cuántos podría comprar?

6.5 EJERCICIOS

Decida si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera *o* falsa.

1. 300% de 12 es 36.
2. 25% de una cantidad es lo mismo que 1/4 de la cantidad.
3. Cuando 759.367 se redondea al centésimo más cercano, la respuesta es 759.40.
4. Cuando 759.367 se redondea a la centena más cercana, la respuesta es 759.37.
5. Para determinar el 50% de una cantidad, podemos simplemente dividir la cantidad entre 2.
6. Un equipo de fútbol que gana 12 juegos y pierde 8 tiene un porcentaje de triunfos de 60%.
7. Si 70% es la calificación mínima para aprobar una prueba que tiene 50 preguntas, entonces, al responder más de 35 preguntas correctamente usted asegurará la calificación mínima de aprobación.
8. 30 es más grande que el 40% de 120.
9. .99¢ = 99 centavos.
10. Si un artículo cuesta $70.00 y se descuenta el 10%, el precio de venta es $7.00.

Trabaje cada una de las siguientes operaciones con ayuda de una calculadora o con papel y lápiz, según lo indique su profesor.

11. $8.53 + 2.785$
12. $9.358 + 7.2137$
13. $8.74 - 12.955$
14. $2.41 - 3.997$
15. $25.7 \times .032$
16. 45.1×8.344
17. $1019.825 \div 21.47$
18. $-262.563 \div 125.03$
19. $\dfrac{118.5}{1.45 + 2.3}$
20. $2.45(1.2 + 3.4 - 5.6)$

Cambio en la población La tabla muestra el cambio de porcentaje anual en la población de 1990 a 1999 para algunas de las ciudades más grandes de Estados Unidos.

Ciudad	Cambio porcentual
Nueva York	1.4
Los Ángeles	4.2
Chicago	.6
Filadelfia	−10.6
Houston	8.7
Detroit	−6.1

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

21. ¿Cuál ciudad tuvo el mayor cambio porcentual? ¿Cuál fue ese cambio? ¿Fue de aumento o de disminución?
22. ¿Cuál ciudad tuvo el menor cambio porcentual? ¿Cuál fue este cambio? ¿Fue de aumento o disminución?

Precio de estampillas de correo *Revise las sección Para reflexionar sobre el abuso del punto decimal. En algún momento, el servicio postal de Estados Unidos vendió fajos de estampillas de 33 centavos que tenían unas frambuesas. Abajo, a la izquierda, se muestra una de esas estampillas y, a su derecha, se encuentra una foto con el precio, que se encontraba en la envoltura de tales fajos.*





23. Mire la segunda línea en la información del precio. De acuerdo con el precio que se detalla *por estampilla*, ¿cuántas estampillas debería poder comprar con un centavo?
24. El precio total detallado es el monto que realmente cobra el servicio postal. Si multiplicara el precio detallado *por estampilla* por el número de éstas, ¿cuál debería ser el precio total?

(Moraleja de los ejercicios 23 y 24. Incluso el gobierno de Estados Unidos es culpable del abuso del punto decimal.)

Resuelva cada problema.

25. ***Impuestos sobre propiedades*** Para determinar el impuesto sobre sus propiedades, los residentes del condado de Linn, Iowa, en el distrito Cedar Rapids Community School, pueden utilizar la fórmula

$$\text{Impuestos} = \frac{(\text{valor de la casa} \times .5485 - 4850)}{1000} \times 31.44.$$

(*Fuente: The Gazette*, 19 de agosto de 2000.)



Utilice esa expresión matemática para calcular, al dólar más cercano, el monto de los impuestos a la propiedad que debería pagar el propietario de una casa con cada uno de los siguientes valores.

(a) $100,000 **(b)** $150,000 **(c)** $200,000

26. ***Transacciones bancarias*** El saldo bancario de la librería de Polly, el 1 de octubre fue $1856.12. Durante octubre, Polly depositó $1742.18 que obtuvo de la venta de bienes, $9271.94 pagados por los clientes en cuentas y un reembolso de impuestos por $28.37. Pagó $7195.14 por mercancía, $511.09 por salarios y $1291.03 de otros gastos.

(a) ¿Cuánto depositó durante octubre?

(b) ¿Cuánto pagó?

(c) Al final de octubre, ¿cuál fue su saldo bancario?

Los ejercicios del 27 al 30 están basados en fórmulas que aparecen en Auto Math Handbook: Mathematical Calculations, Theory, and Formulas for Automotive Enthusiasts, *by John Lawlor (1991, HP Books).*

27. ***Concentración de alcohol en la sangre*** La concentración de alcohol en la sangre (CAS) en una persona que ha bebido se calcula por medio de la fórmula

$$\text{CAS} = \frac{(\text{onzas} \times \text{por ciento de alcohol} \times .075}{\text{peso corporal en libras}} - (\text{horas de estar bebiendo} \times .015).$$

Suponga que un policía detiene a un hombre de 190 libras que en dos horas ingirió cuatro cervezas de 12 onzas cada una, cada cerveza contiene 3.2% de alcohol. La fórmula sería

$$\text{CAS} = \frac{[(4 \times 12) \times 3.2 \times .075]}{190} - (2 \times .015).$$

(a) Encuentre esta CAS.

(b) Encuentre la CAS para una mujer de 135 libras que en tres horas ingirió tres cervezas, de 12 onzas cada una, y cada una contenía 4.0% de concentración de alcohol.

28. ***Velocidad aproximada de un automóvil*** La velocidad aproximada de un automóvil en millas por hora (MPH) puede determinarse en términos de las revoluciones por minuto del motor (rpm), el diámetro del neumático en pulgadas y la relación total de engranaje, por medio de la fórmula

$$\text{MPH} = \frac{\text{rpm} \times \text{diámetro del neumático}}{\text{relación de engranaje} \times 336}.$$

Si cierto automóvil tiene 5600 rpm, un diámetro de los neumáticos de 26 pulgadas y una relación de engranaje de 3.12, ¿cuál es su velocidad aproximada en MPH?

29. ***Caballos de fuerza de un motor*** Los caballos de fuerza pueden determinarse a partir de la presión media efectiva (pme) en libras por pulgada cuadrada, el desplazamiento del motor en pulgadas cúbicas y las revoluciones por minuto (rpm), mediante la fórmula

$$\text{Caballos de fuerza} = \frac{\text{pme} \times \text{desplazamiento} \times \text{rpm}}{792{,}000}.$$

Suponga que un motor tiene un desplazamiento de 302 pulgadas cúbicas y una presión media efectiva de 195 libras por pulgada cuadrada con 4000 revoluciones por minuto (rpm). ¿Cuáles son sus caballos de fuerza aproximados?

30. ***Aproximación al par de torsión*** Para determinar el par de torsión a un valor dado de rpm, se aplica la fórmula siguiente:

$$\text{Par de torsión} = \frac{5252 \times \text{caballos de fuerza}}{\text{rpm}}$$

Si los caballos de fuerza de cierto vehículo son de 400 a 4500 rpm, ¿cuál es el par de torsión aproximado?

Redondee cada uno de los números siguientes **(a)** *a décimas,* **(b)** *a centésimas. Siempre redondee el número original.*

31. 78.414 **32.** 3689.537

33. .0837 **34.** .0658

35. 12.68925 **36.** 43.99613

Convierta cada decimal a un porcentaje.

37. .42 **38.** .87

39. .365 **40.** .792

41. .008 **42.** .0093

43. 2.1 **44.** 8.9

Convierta cada fracción en un porcentaje.

45. $\frac{1}{5}$ **46.** $\frac{2}{5}$

47. $\frac{1}{100}$ **48.** $\frac{1}{50}$

49. $\frac{3}{8}$ **50.** $\frac{5}{6}$

51. $\frac{3}{2}$ **52.** $\frac{7}{4}$

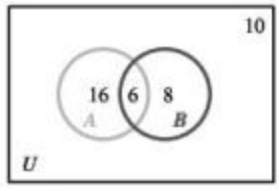
53. Explique la diferencia entre el 1/2 de una cantidad y el $\frac{1}{2}$% de la misma.

54. En el grupo I hay algunos porcentajes comunes que se encuentran en situaciones cotidianas. En el grupo II están las equivalencias fraccionarias de estos porcentajes. Relacione las fracciones del grupo I con sus porcentajes equivalentes en el grupo II.

I		II	
(a) 25%	(b) 10%	A. $\frac{1}{3}$	B. $\frac{1}{50}$
(c) 2%	(d) 20%	C. $\frac{3}{4}$	D. $\frac{1}{10}$
(e) 75%	(f) $33\frac{1}{3}\%$	E. $\frac{1}{4}$	F. $\frac{1}{5}$

55. Llene cada espacio con la respuesta numérica apropiada.
(a) 5% significa _____ en cada 100.
(b) 25% significa 6 en cada _____.
(c) 200% significa _____ por cada 4.
(d) .5% significa _____ en cada 100.
(e) _____% significa 12 por cada 2.

56. El siguiente diagrama de Venn muestra el número de elementos en las cuatro regiones que se forman.

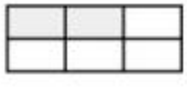


(a) ¿Qué porcentaje de los elementos en el universo está en $A \cap B$?
(b) ¿Qué porcentaje de los elementos en el universo está en A pero no en B?
(c) ¿Qué porcentaje de los elementos en $A \cup B$ está en $A \cap B$?
(d) ¿Qué porcentaje de los elementos en el universo no está en A ni en B?

57. ***Descuentos y aumentos*** Suponga que el precio normal de un artículo es de \$60.00 y se le descuenta 20%. Si luego se le aumenta el 20%, ¿es \$60.00 el precio resultante? Si no es así, ¿cuál es?

58. A continuación se reproducen las figuras del ejercicio 13 de la sección 6.3. Exprese en porcentaje las partes fraccionarias que representan las áreas sombreadas.

(a)



(b)



(c)



(d)



Los ejercicios 59 y 60 aplican el porcentaje logrado en las posiciones de equipos deportivos.

59. ***Registro de ganados y perdidos*** Las posiciones de la División Central de la Liga Americana al inicio del juego del 25 de septiembre de 2002 son las que se muestran. El porcentaje de ganados (Pct.) por lo regular se expresa como un decimal redondeado al milésimo más cercano. Para determinar este porcentaje de un equipo, divida el número de ganados (G) entre el total de juegos jugados (G + P). Determine el porcentaje de triunfos de cada equipo.
(a) Minnesota **(b)** Chicago **(c)** Cleveland

Equipo	G	P	Pct.
Minnesota	90	66	___
Chicago	79	78	___
Cleveland	70	87	___
Kansas City	61	96	.389
Detroit	54	102	.346

60. ***Registro de ganados y perdidos*** Repita el ejercicio 59 para las posiciones siguientes, de la División Este de la Liga Nacional.
(a) Atlanta **(b)** Florida **(c)** Nueva York

Equipo	G	P	Pct.
Atlanta	97	58	___
Montreal	79	78	.503
Filadelfia	79	78	.503
Florida	76	81	___
Nueva York	74	82	___

Resuelva cada uno de los problemas siguientes, los cuales incluyen porcentajes.

61. ¿Cuál es el 26% de 480?

62. Encuentre el 38% de 12.

63. Encuentre el 10.5% de 28.

64. ¿Cuál es el 48.6% de 19?

65. ¿Qué porcentaje de 30 es 45?

66. ¿Qué porcentaje de 48 es 20?

67. ¿150 es el 25% de qué número?

68. ¿3600 es el 12% de qué número?

69. ¿Qué porcentaje de 28 es .392?

70. ¿Qué porcentaje de 292 es 78.84?

Resuelva mentalmente las preguntas de los ejercicios 71 al 74. Evite utilizar papel, lápiz o calculadora.

71. ***Aumento de mesada*** La mesada de Dierdre Lynch aumentó de \$4.00 semanales a \$5.00 semanales. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento?
A. 25% **B.** 20% **C.** 50% **D.** 30%

72. ***Compra y venta de un barco*** Jane Gunton compró un barco hace cinco años en $5000 y lo vendió este año en $2000. ¿Qué porcentaje de su compra original perdió en la venta?
A. 40% **B.** 50% **C.** 20% **D.** 60%

73. ***Población de Alabama*** El censo del 2000 de Estados Unidos demostró que la población de Alabama era de 4,447,000 habitantes, 26.0% de los cuales eran afroamericanos. ¿Cuál es la mejor estimación de la población afroamericana de Alabama? (*Fuente:* Oficina de Censos de Estados Unidos.)
A. 500,000 **B.** 1,500,000
C. 1,100,000 **D.** 750,000

74. ***Población de Hawai*** El censo del 2000 de Estados Unidos demostró que la población de Hawai era de 1,212,000, 21.4% de los cuales eran hispanos. ¿Cuál es la mejor estimación de la población hispana en Hawai? (*Fuente:* Oficina de Censos de Estados Unidos.)
A. 240,000 **B.** 300,000
C. 21,400 **D.** 24,000

Precios de gasolina *La gráfica de líneas muestra el precio promedio, ajustado por la inflación, que los estadounidenses han pagado por un galón de gasolina para algunos años desde 1970.*

PRECIOS PROMEDIO DE GASOLINA



Fuente: Instituto Americano del Petróleo; investigación de la AP.

75. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento de 1970 a 1980?

76. ¿Cuál fue el porcentaje de disminución de 1980 a 1990?

77. ***Cambio en el precio de las acciones*** La información siguiente apareció en la sección financiera del *Times Picayune* de Nueva Orleans el jueves 20 de enero de 2000:

(De Associated Press)

Nueva York. El índice compuesto Nasdaq alcanzó un nuevo récord el miércoles, a la vez que los inversionistas penalizaron a Microsoft por un informe de ganancias que, aunque alcanzó los estimados que ya habían sido publicados, no impresionó a ciertos analistas de Wall Street.

El Nasdaq subió de 20.48 *a* 4151.29, *su primer nuevo récord desde el cierre en* 4131.15 *el 3 de enero. El Dow Jones industrial cayó de* 71.36 *a* 11,489.36, *una disminución que provino casi en su totalidad de Microsoft.*

(a) ¿En qué porcentaje subió el Nasdaq?
(b) ¿En qué porcentaje bajó el Dow Jones industrial?

78. ***Sindicatos*** En 1999, el número de miembros de sindicatos en Estados Unidos fue de 16.5 millones, un aumento de 265,000 respecto al año previo. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento? (*Fuente:* Oficina de Estadísticas Laborales de Estados Unidos.)

79. ***Deuda de los consumidores*** Hace varios años, se reportó que la "carga de la deuda en los consumidores" de Estados Unidos era de 16.4%. Esto significa que el ciudadano promedio tenía deudas al consumo, tales como facturas de tarjetas de crédito, préstamos de automóviles, etc., que alcanzaban un total del 16.4% de su sueldo neto. Suponga que José Valdevielso tiene un sueldo neto de $8450 mensuales. ¿Cuál es el 16.4% de su sueldo neto mensual?

80. ***Valor de una moneda de 10 centavos de 1916*** El *dime* (moneda de 10 centavos de dólar) de 1916 acuñado en Denver es muy raro. En 1979, su valor era de $625 si se encontraba en condiciones "excelentes". Su valor en el año 2002 se ha incrementado a $2500. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento en el valor de la moneda? (*Fuentes: A Guide Book of United States Coins; Coin Woel Trends.*)



81. ***Valor de un dólar Morgan de 1903*** En 1963, el valor del dólar Morgan de 1903, acuñado en Nueva Orleans, fue de $1500, en condiciones de no circulación. Debido al descubrimiento de una gran colección de estos dólares al final de ese año, el valor se desplomó. Su valor listado en la edición de 2002 de *A Guide Book of United States Coins* fue de $340. ¿Qué porcentaje de su valor de 1963 fue su valor de 2002? (*Fuentes: A Guide Book of United States Coins; Coin World Trends.*)

82. ***Precio del Chevrolet Camaro 2002*** Un vendedor de automóviles tiene un precio de lista de $26,410 para un Chevrolet Camaro 2002. Un cliente regateó y obtuvo 5.5% de descuento. ¿Cuánto pagó?



Procedimiento en las propinas *Es costumbre en nuestra sociedad dar "propina" a los camareros y camareras cuando cenamos en restaurantes. El porcentaje común de la propina es de* 15%. *Una forma rápida de calcular una propina que dará una aproximación cercana al* 15% *es como sigue:*

1. *Redondee la cuenta al dólar más cercano.*
2. *Determine el* 10% *de esta cantidad moviendo el punto decimal un lugar a la izquierda.*
3. *Obtenga la mitad de la cantidad resultante en el paso 2 y súmela al resultado del paso 2.*

Esto le dará aproximadamente 15% *de la cuenta. La cantidad obtenida en el paso 3 es de* 5% *y*

$$10\% + 5\% = 15\%.$$

Utilice el método descrito para encontrar una aproximación del 15% *de cada una de las siguientes cuentas de restaurante.*

83. $29.57 **84.** $38.32

85. $5.15 **86.** $7.89

Suponga que recibió un servicio extraordinariamente bueno y decide dar una propina de 20%. *Puede utilizar los primeros dos pasos listados, y luego en el paso 3, duplique la cantidad que obtuvo en el paso 2. Utilice este método para determinar una aproximación de* 20% *para cada una de las siguientes cuentas de restaurante.*

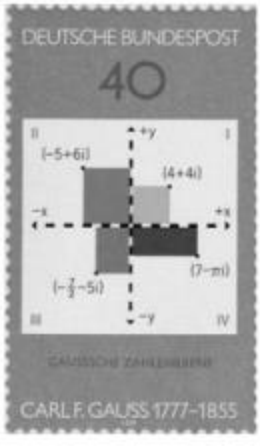
87. $59.96 **88.** $40.24

89. $180.43 **90.** $199.86

91. Un reportero de televisión le preguntó a un jugador profesional de lucha qué porcentaje de su deporte era físico y qué porcentaje era mental. El atleta respondió "Yo diría que 50% es físico y 90% mental". Comente esta respuesta.

92. Con frecuencia oímos decir "Dio el 110%". Comente esta afirmación. ¿Piensa que esto realmente es posible?

EXTENSIÓN



Números complejos

Los antiguos matemáticos llamaban números imaginarios a los números como $\sqrt{-5}$ y $\sqrt{-16}$, y no permitieron que esta clase de números fuera utilizada como solución a los problemas. Sin embargo, gradualmente, se descubrieron aplicaciones que exigen su uso, lo que hizo necesario extender el conjunto de los números reales para formar el conjunto de los **números complejos**.

Considere la ecuación $x^2 + 1 = 0$. No tiene solución en los números reales, ya que cualquier solución debe ser un número cuya raíz cuadrada es -1. Dentro del conjunto de los números reales todas las raíces cuadradas son números no negativos, debido a que el producto, ya sea de dos números positivos o de dos números negativos, es positivo. Para dar una solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$, un nuevo número i se define de modo que

$$i^2 = -1.$$

Esto es, i es un número cuya raíz cuadrada es -1. Esta definición de i permite establecer la raíz cuadrada de cualquier número negativo como sigue:

Para cualquier número real positivo b, $\sqrt{-b} = i\sqrt{b}$

Gauss y los números complejos La estampilla postal que aparece en la página anterior honra la gran cantidad de contribuciones hechas por Gauss a nuestra comprensión de los números complejos. Alrededor de 1831, fue capaz de demostrar que los números de la forma $a + bi$ pueden representarse en el plano (como lo muestra la estampilla) al igual que los números reales. Comparten esta contribución con Robert Argand, un tenedor de libros de París, quien escribió un ensayo sobre la geometría de los números complejos en 1806. En esa época esto pasó inadvertido.

EJEMPLO 1 Escriba cada número como un producto de un número real e i.

(a) $\sqrt{-100} = i\sqrt{100} = 10i$

(b) $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i = i\sqrt{2}$.

Es fácil confundir $\sqrt{2}i$ con $\sqrt{2i}$, con la i dentro del radical. Por esta razón, es común escribir $\sqrt{2}i$ como $i\sqrt{2}$. ■

Al determinar un producto comos $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$, no se puede aplicar la regla de la multiplicación de radicales, pues es válida únicamente cuando ambos radicales representan números reales. Por esta razón, cambie siempre $\sqrt{-b}$ $(b > 0)$ a la forma $i\sqrt{b}$ antes de realizar cualquier multiplicación o división. Por ejemplo,

$$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = i\sqrt{4} \cdot i\sqrt{9} = i \cdot 2 \cdot i \cdot 3 = 6i^2.$$

Como $i^2 = -1$,

$$6i^2 = 6(-1) = -6.$$

Una aplicación *incorrecta* de la propiedad de la multiplicación de radicales conducirá a una respuesta errónea.

$$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{36} = 6 \quad \text{Incorrecta}$$

EJEMPLO 2 Multiplique.

(a) $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-7} = i\sqrt{3} \cdot i\sqrt{7} = i^2\sqrt{3 \cdot 7} = (-1)\sqrt{21} = -\sqrt{21}$

(b) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} = i\sqrt{2} \cdot i\sqrt{8} = i^2\sqrt{2 \cdot 8} = (-1)\sqrt{16} = (-1)4 = -4$

(c) $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{6} = i\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = i\sqrt{30}$ ■



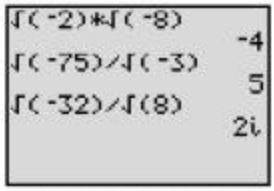
Cuando la calculadora TI-83 Plus está en modo complejo, denotado por $a + bi$, realizará las operaciones en aritmética de números complejos.

Los métodos utilizados para determinar productos también pueden utilizarse para determinar cocientes, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Divida:

(a) $\dfrac{\sqrt{-75}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{i\sqrt{75}}{i\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

(b) $\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{8}} = \dfrac{i\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = i\sqrt{\dfrac{32}{8}} = i\sqrt{4} = 2i$ ■



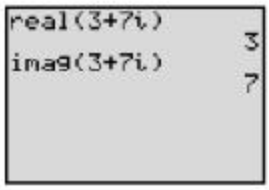
Esta pantalla confirma los resultados en los ejemplos 2(b), 3(a) y 3(b).

El conjunto de los *números complejos* se define como sigue:

Números complejos

Si a y b son números reales, entonces cualquier número de la forma $a + bi$ se llama **número complejo**.

(continúa)



La calculadora TI-83 Plus identifica las partes real e imaginaria de $3 + 7i$.

En el número complejo $a + bi$, el número a representa la **parte real** y b representa la **parte imaginaria**.* Cuando $b = 0$, $a + bi$ es un número real, por lo tanto los números reales son un subconjunto de los números complejos. Los números complejos con $b \neq 0$ son llamados **números imaginarios**. A pesar de su nombre, los números imaginarios son muy útiles en ciertas aplicaciones, particularmente al trabajar con la electricidad.

En la figura 15 se aprecian las relaciones entre los diversos conjuntos de números estudiadas en este capítulo.

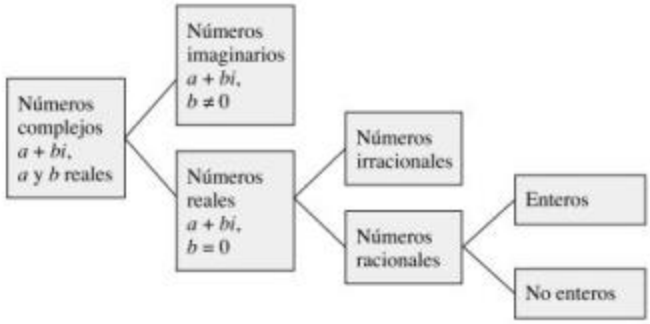


FIGURA 15

Un patrón interesante aparece cuando consideramos varias potencias de i. Por definición, $i^0 = 1$ e $i^1 = i$. Hemos visto que $i^2 = -1$ y las potencias mayores de i pueden determinarse como se muestra en la siguiente lista.

$$i^3 = i \cdot i^2 = i(-1) = -i \qquad i^6 = i^2 \cdot i^4 = (-1) \cdot 1 = -1$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \qquad i^7 = i^3 \cdot i^4 = (-i) \cdot 1 = -i$$
$$i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i \qquad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$



La calculadora calcula potencias de i. Compare con las potencias del recuadro.

A continuación, se listan algunas potencias de i.

Potencias de i

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$	$i^{13} = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$	$i^{14} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$	$i^{15} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$	$i^{16} = 1$

Como sugieren estos ejemplos, las potencias de i rotan a través de los cuatro números i, -1, $-i$ y 1. Las potencias más grandes de i pueden simplificarse con sólo basarse en el hecho de que $i^4 = 1$. Por ejemplo,

$$i^{75} = (i^4)^{18} \cdot i^3 = 1^{18} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i.$$

*En algunos textos, bi se denomina la parte imaginaria.

Simplificación de potencias grandes de i

Paso 1: Divida el exponente entre 4.

Paso 2: Observe el residuo obtenido en el paso 1. La potencia grande de i es la misma que i elevada a la potencia determinada por este residuo. Consulte la tabla de anterior para completar la simplificación. (Si el residuo es 0, la potencia se simplifica a $i^0 = 1$.)

EJEMPLO 4 Determine cada potencia de i.

(a) $i^{12} = (i^4)^3 = 1^3 = 1$

(b) i^{39}

$$4\overline{)39}\quad \begin{array}{r} 9 \\ 36 \\ \hline 3 \end{array} \leftarrow \text{Residuo}$$

Comience por dividir 39 entre 4 (paso 1). El residuo es 3. Por lo tanto, $i^{39} = i^3 = -i$ (paso 2).

Otra forma de simplificar i^{39} es la siguiente.

$$i^{39} = i^{36} \cdot i^3 = (i^4)^9 \cdot i^3 = 1^9 \cdot (-i) = -i$$ ■

EJERCICIOS DE EXTENSIÓN

Utilice el método de los ejemplos 1 al 3 para escribir cada expresión como un número real o como el producto de un número real e i.

1. $\sqrt{-144}$ **2.** $\sqrt{-196}$ **3.** $-\sqrt{-225}$ **4.** $-\sqrt{-400}$

5. $\sqrt{-3}$ **6.** $\sqrt{-19}$ **7.** $\sqrt{-75}$ **8.** $\sqrt{-125}$

9. $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-5}$ **10.** $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3}$ **11.** $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-36}$

12. $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-81}$ **13.** $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-100}$ **14.** $\sqrt{-81} \cdot \sqrt{-121}$

15. $\dfrac{\sqrt{-200}}{\sqrt{-100}}$ **16.** $\dfrac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-2}}$ **17.** $\dfrac{\sqrt{-54}}{\sqrt{6}}$

18. $\dfrac{\sqrt{-90}}{\sqrt{10}}$ **19.** $\dfrac{\sqrt{-288}}{\sqrt{-8}}$ **20.** $\dfrac{\sqrt{-48} \cdot \sqrt{-3}}{\sqrt{-2}}$

21. ¿Por qué al multiplicar $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12}$ es incorrecto utilizar la regla del producto para radicales?

22. Con sus propias palabras, describa la relación entre los números complejos y los números reales.

Utilice el método del ejemplo 4 para determinar cada potencia de i.

23. i^8 **24.** i^{16} **25.** i^{42} **26.** i^{86}

27. i^{47} **28.** i^{63} **29.** i^{101} **30.** i^{141}

31. Explique la diferencia entre $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{1}$. ¿Cuál de éstos está definido como i?

32. ¿Es posible dar un ejemplo de un número real que no sea un número complejo? ¿Por qué?

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

Presupuesto para la compra de un automóvil

Usted va a comprar un automóvil deportivo y tiene reservada cierta cantidad de dinero para pagar cada mensualidad. Su profesor le asignará el monto. Después de ver una variedad de fuentes, ha reducido sus opciones a los automóviles que se listan en la tabla.

Año/Marca/Modelo	Precio de venta	Capacidad del tanque de gasolina (en galones)	Millas por galón (en la ciudad)	Millas por galón (en autopista)
2002 Ford Mustang	$28,645	15.5	18	26
2002 Ford Thunderbird	$35,140	18.0	17	23
2002 Toyota MR2 Spyder	$24,515	12.7	25	30
2002 Mazda MX-5 Miata	$25,755	12.7	22	28
2002 Honda S2000	$32,400	13.2	20	26
2002 Chevrolet Camaro	$26,410	16.8	19	31

Fuente: http://autos.excite.com

En grupo, realice los pasos siguientes para determinar cuál automóvil puede permitirse comprar.

A. Decida qué automóviles cree que están dentro de su presupuesto.

B. Seleccione uno de los automóviles identificados en la parte A. Cada miembro del grupo tiene que calcular el pago mensual para este automóvil utilizando diferentes opciones de financiamiento. Utilice la fórmula dada a continuación, donde P es el capital, r es la tasa de interés y m es el número de pagos mensuales, junto con la tabla de opciones de financiamiento.

Opciones de financimiento	
Tiempo (en años)	**Tasa de interés**
4	7.0%
5	8.5%
6	10.0%

$$\text{Pago mensual} = \frac{\frac{Pr}{12}}{1 - \left(\frac{12}{12 + r}\right)^m}$$

C. Cada integrante del grupo debe determinar la cantidad de dinero pagado en intereses durante el periodo del préstamo para su opción de financiamiento.

D. Considere los gastos de combustible.

1. Suponga que viajará un promedio de 75 millas en la ciudad y 400 millas en la autopista por semana. ¿Cuántos galones de gasolina necesitará comprar cada mes?
2. Utilice los precios de gasolina comunes en el área donde vive en este momento, ¿cuánto dinero necesitará tener disponible para comprar gasolina?

E. Repita las partes B-D tantas veces como sea necesario hasta que su grupo pueda llegar a un consenso sobre el automóvil que comprará y la opción de financiamiento que utilizará. Escriba un párrafo para explicar sus opciones.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 6

1. Considere el conjunto $\{-4, -\sqrt{5}, -3/2, -.5, 0, \sqrt{3}, 4.1, 12\}$. Haga una lista de los elementos del conjunto que pertenecen a los siguientes:
   (a) números naturales **(b)** números cardinales **(c)** enteros
   (d) números racionales **(e)** números irracionales **(f)** números reales

2. Relaciones los conjuntos dados en la columna I con la descripción de notación de construcción de conjuntos en la columna II.

I	II
(a) $\{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$	**A.** $\{x \mid x$ es un entero con valor absoluto menor o igual a $12\}$
(b) $\{3, 4, 5, 6, \ldots\}$	**B.** $\{x \mid x$ es un entero mayor que $2.5\}$
(c) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	**C.** $\{x \mid x$ es un entero no negativo$\}$
(d) $\{-12, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 12\}$	**D.** $\{x \mid x$ es un positivo cardinal$\}$

3. Decida si cada proposición es verdadera o falsa.
   (a) El valor absoluto de un número siempre es positivo.
   (b) $|-7| = -(-7)$
   (c) $2/5$ es un ejemplo de un número real que no es un entero.
   (d) Todo número real es positivo o negativo.

Realice las operaciones indicadas. Cuando sea necesario, utilice las reglas para el orden de las operaciones.

4. $6^2 - 4(9 - 1)$

5. $(-3)(-2) - [5 + (8 - 10)]$

6. $\dfrac{(-8 + 3) - (5 + 10)}{7 - 9}$

7. ***Exportaciones de California*** Utilice la gráfica de las exportaciones de California para responder lo siguiente.



Fuente: USA Today, 23 de junio de 1998.

   (a) ¿Cuál es la diferencia entre los cambios de enero y febrero?
   (b) ¿Cuál es la diferencia entre los cambios en abril y mayo?
   (c) ¿Cuál es la mejor estimación de la diferencia entre los cambios de octubre y noviembre?
   A. −6000 **B.** −6500
   C. −7000 **D.** −7500
   (d) ¿Cuál es la mejor estimación de la diferencia entre los cambios de noviembre y diciembre?
   A. 17,000 **B.** 18,000
   C. 19,000 **D.** 20,000

8. ***Altura de un aeroplano*** La superficie del Mar Muerto tiene una altura de 1299 pies bajo el nivel del mar. Un piloto acrobático vuela a 80 pies por encima de esa superficie. ¿Cuánta altura debe ganar para librar un desfiladero de 3852 pies por 225 pies? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).

9. ***Negocios en quiebra en Estados Unidos*** En la tabla se muestra el número de negocios en quiebra en Estados Unidos entre los años 1990-1996. Determine, por sustracción, el cambio de un año al siguiente para cada año indicado con un espacio en blanco. Por ejemplo, de 1991 a 1992, el cambio fue 97,069 − 88,140 = 8929.

Año	Número de negocios en quiebra	Cambio
1990	60,747	
1991	88,140	27,393
1992	97,069	_____
1993	86,133	_____
1994	71,558	_____
1995	71,128	_____
1996	71,931	_____

Fuente: Dun & Bradstreet.

10. Relacione cada uno de los enunciados de (a) a (f) con la propiedad, de la A a la F, que lo justifique.

(a) $7 \cdot (8 \cdot 5) = (7 \cdot 8) \cdot 5$
(b) $3x + 3y = 3(x + y)$
(c) $8 \cdot 1 = 1 \cdot 8 = 8$
(d) $7 + (6 + 9) = (6 + 9) + 7$
(e) $9 + (-9) = -9 + 9 = 0$
(f) $5 \cdot 8$ es un número real.

A. Propiedad distributiva
B. Propiedad de la identidad
C. Propiedad de clausura
D. Propiedad conmutativa
E. Propiedad asociativa
F. Propiedad del inverso

11. ***Estadísticas de tiros de baloncesto*** Los cinco jugadores titulares del equipo de baloncesto de la preparatoria local tuvieron las siguientes estadísticas:

Jugador	Intentos de tiros de campo	Tiros de campo acertados
Ed Moura	40	13
Jack Pritchard	10	4
Chuck Miller	20	8
Ben Whitney	6	4
Charlie Dawkins	7	2

Responda cada una de las siguientes preguntas, utilice técnicas de estimación conforme sea necesario.

(a) ¿Qué jugador acertó en más de la mitad de sus intentos?
(b) ¿Qué jugadores acertaron en poco menos de 1/3 de sus intentos?
(c) ¿Qué jugador acertó exactamente en 2/3 de sus intentos?
(d) ¿Qué pareja de jugadores hizo la misma parte fraccionaria de sus intentos? ¿Cuál fue la parte fraccionaria, reducida a sus términos más simples?

Realice cada una de las operaciones. Simplifique su respuesta en los términos más simples.

12. $\frac{3}{16} + \frac{1}{2}$ **13.** $\frac{9}{20} - \frac{3}{32}$

14. $\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{16}{15}\right)$ **15.** $\frac{7}{9} \div \frac{14}{27}$

16. Convierta cada número en un decimal que termina o en un decimal que se repite. Si su profesor lo permite, utilice calculadora.

(a) $\frac{9}{20}$ **(b)** $\frac{5}{12}$

17. Convierta cada decimal en un cociente de enteros, reduzca a su forma más simple.

(a) .72 **(b)** $.\overline{58}$

18. Identifique cada número como racional o irracional.

(a) $\sqrt{10}$ **(b)** $\sqrt{16}$ **(c)** .01
(d) $.\overline{01}$ **(e)** .0101101110...

Para cada uno de los siguientes **(a)** *utilice una calculadora para determinar una aproximación decimal y* **(b)** *simplifique el radical, de acuerdo con lo explicado en este capítulo.*

19. $\sqrt{150}$ **20.** $\frac{13}{\sqrt{7}}$ **21.** $2\sqrt{32} - 5\sqrt{128}$

22. Un estudiante que hace uso de su potente calculadora establece que el valor *exacto* de $\sqrt{65}$ es 8.062257748. ¿Es cierto? Si no, explique por qué.

23. Realice cada una de las siguientes operaciones, ya sea con calculadora o con papel y lápiz, según lo indicado por su profesor.

(a) $4.6 + 9.21$ **(b)** $12 - 3.725 - 8.59$
(c) $86(.45)$ **(d)** $236.439 \div (-9.73)$

24. Redondee 9.0449 a:
(a) centésimas **(b)** milésimas

25. **(a)** Determine el 18.5% de 90.
(b) ¿Qué número es el 145% de 70?

26. Observe la figura.

(a) ¿Qué porcentaje del número total de las figuras son círculos?
(b) ¿Qué porcentaje del número total de las figuras no son estrellas?

27. ***Ventas de libros*** Utilice técnicas de estimación para responder: en 2001, Dave Noyes vendió $300,000 en libros y en 2002, vendió $900,000. Su ventas en 2002 fueron _____ de sus ventas en 2001.

A. 30% **B.** $33\frac{1}{3}\%$

C. 200% **D.** 300%

28. ***Comodidades*** Recientemente un grupo de adultos fueron encuestados acerca de los productos de los que no podrían prescindir a partir de una lista de "artículos diarios" que con frecuencia tomamos por sentado. Complete los resultados que se muestran en la tabla, si se encuestó a 500 adultos.

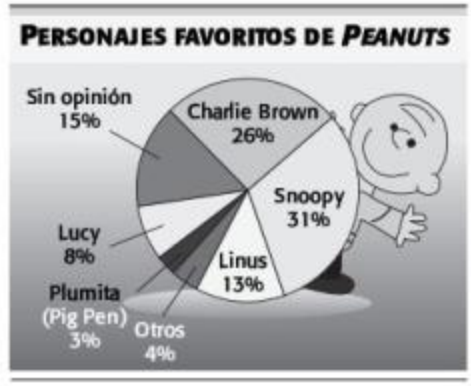
Artículo	Porcentaje que no podría prescindir de él	Número de personas que no podría prescindir de él
Papel de baño	69%	____
Cremalleras	42%	____
Alimentos congelados	____	190
Notas autoadheribles	____	75

(Otros artículos incluidos en la lista fueron cintas, fijador para el cabello, pantimedias, sujeta papeles y Velcro.)
Fuente: Mercado de hechos para Kleenex Cottonelle.

29. ***Personajes favoritos de Peanuts*** El 13 de febrero de 2000, los fanáticos de *Peanuts* dijeron adiós a la versión original de esta popular historieta. La gráfica circular muestra los resultados de una encuesta a adultos para determinar sus personajes favoritos.

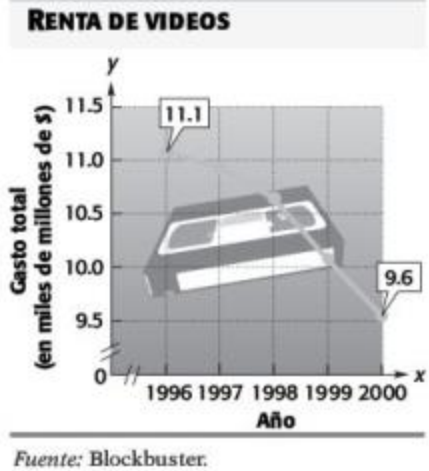
(a) Si una muestra aleatoria de 2500 adultos respondieron la encuesta, ¿cuántos mencionaron a Lucy como su personaje favorito?

(b) Si cierta muestra resultó en que 45 personas mencionaron a Linus como su favorito, ¿aproximadamente cuántos esperaríamos que mencionen a Charlie Brown (Carlitos) como su favorito? ¿Por qué?



Fuente: USA Today/CNN/Encuesta Gallup realizada en Estados Unidos, del 4 al 6 de febrero de 2000.

30. ***Renta de videos*** La gráfica muestra el gasto total, en miles de millones de dólares, en renta de videos en Estados Unidos de 1996 a 2000. ¿En qué porcentaje disminuyó el número de rentas de 1996 a 2000?



Fuente: Blockbuster.

capítulo

7 Los conceptos básicos del álgebra



El primer evento deportivo mundial fueron los Juegos Olímpicos de Verano que se celebraron en 1896 en Atenas, Grecia. Se reunieron para competir 311 hombres de 13 naciones. Más de 100 años después, en la Olimpiada de Verano del año 2000, en Sydney, Australia, estuvieron presentes 10,651 competidores —6582 hombres y 4069 mujeres, de 199 naciones. (*Fuente:* www.olympics.org.) En la tabla siguiente se dan los resultados de una justa olímpica de natación femenina de 1968 a 2000 (los tiempos ganadores se dan en minutos y segundos, redondeados a la centésima más cercana).

200 metros libres	Tiempo
1968 Deborah Meyer, Estados Unidos	2:10.50
1972 Shane Gould, Australia	2:03.56
1976 Kornelia Ender, Alemania Oriental	1:59.26
1980 Barbara Krause, Alemania Oriental	1:58.33
1984 Mary Wayte, Estados Unidos	1:59.23
1988 Heike Friederich, Alemania Oriental	1:57.65
1992 Nicole Haislett, Estados Unidos	1:57.90
1996 Claudia Poll, Costa Rica	1:58.16
2000 Susie O'Neill, Australia	1:58.24

Fuente: World Almanac and Book of Facts, 2002.

La tabla proporciona los tiempos que hicieron los nadadores e indica la distancia en ese evento: 200 metros. ¿Cómo podremos encontrar la tasa de cada nadador? Es posible responder esta pregunta usando la fórmula que relaciona distancia, tasa y tiempo y por medio de ciertas técnicas para resolver ecuaciones. Este capítulo presenta algunos de los fundamentos del álgebra, entre ellos la manera de resolver ecuaciones y desigualdades, operaciones con polinomios y factorización.

7.1 Ecuaciones lineales

7.2 Aplicaciones de las ecuaciones lineales

7.3 Razón, proporción y variación

7.4 Desigualdades lineales

7.5 Propiedades de los exponentes y notación científica

7.6 Polinomios y factorización

7.7 Ecuaciones cuadráticas y sus aplicaciones

Investigación en grupo: ¿Cómo se compara su velocidad de caminata con la de los caminantes olímpicos?

Examen del capítulo 7

7.1 Ecuaciones lineales

Solución de ecuaciones lineales

Una **expresión algebraica** involucra las operaciones básicas de la suma, resta, multiplicación o división (excepto entre 0), la elevación a alguna potencia o la extracción de raíces aplicadas a cierto conjunto de variables y números. Algunos ejemplos de operaciones algebraicas son los siguientes:

$$8x + 9, \qquad \sqrt{y} + 4 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^3y^8}{z}.$$

Una **ecuación** es la afirmación de que dos expresiones algebraicas son iguales. Una ecuación lineal en una variable sólo incluye números reales y una variable. Algunos ejemplos son:

$$x + 1 = -2, \qquad y - 3 = 5 \qquad \text{y} \qquad 2k + 5 = 10.$$

Ecuación lineal en una variable

Una ecuación en la variable x es **lineal** si puede escribirse en la forma

$$\boldsymbol{ax + b = c},$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Una ecuación lineal en una variable también se llama **ecuación de primer grado**, ya que la potencia más grande de la variable es uno.

Si en una ecuación se reemplaza la variable por un número real que haga que el enunciado sea verdadero, entonces dicho número es una **solución** de la ecuación. Por ejemplo, 8 es una solución de la ecuación $x - 3 = 5$, ya que al sustituir la x con 8 el enunciado es verdadero. Una ecuación se **resuelve** si se encuentra su **conjunto solución**, que es el conjunto de todas las soluciones. El conjunto solución de la ecuación $x - 3 = 5$ es $\{8\}$.

Las **ecuaciones equivalentes** son aquellas que tienen el mismo conjunto solución. Por lo general, las ecuaciones se resuelven comenzando con una ecuación inicial dada y generando una serie de ecuaciones más sencillas o equivalentes. Por ejemplo,

$$8x + 1 = 17, \qquad 8x = 16 \qquad \text{y} \qquad x = 2$$

son ecuaciones equivalentes, ya que cada una tiene el mismo conjunto solución, $\{2\}$. Para producir ecuaciones equivalentes se usan las propiedades de adición y multiplicación de la igualdad.

Propiedades de adición y multiplicación de la igualdad

Propiedad de adición de la igualdad Para todos los números reales, a, b y c, las ecuaciones

$$\boldsymbol{a = b} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{a + c = b + c}$$

son equivalentes (puede sumarse el mismo número en ambos lados de una ecuación y el conjunto solución no cambia).

Propiedad de multiplicación de la igualdad Para todos los números reales a, b y c, donde $c \neq 0$, las ecuaciones

$$\boldsymbol{a = b} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{ac = bc}$$

son equivalentes (puede multiplicarse ambos lados de una ecuación por el mismo número sin que el conjunto solución cambie).

al-jabr, algebrista, álgebra
La palabra *álgebra* proviene del trabajo desarrollado por el árabe Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârizmî en el siglo IX, y que lleva por título *Hisâb al-jabr w'al muquâbalah*. Este nombre se traduce como *la ciencia de la reunión y la reducción*, o, más en general, *la ciencia de la transposición y la cancelación*.

En el título del libro escrito por Khowârizmî, el vocablo *jabr* (restauración) alude al traspaso de cantidades negativas hacia el otro lado del signo de igualdad durante el proceso de solución de ecuaciones. A partir de las versiones en latín del texto de Khowârizmî, el término *al-jabr* se amplió hasta convertirse en el arte de resolver ecuaciones (el prefijo *al* significa *la*).



En España, durante el dominio de los musulmanes, la palabra *algebrista* se refería a la persona que restauraba (renovaba) huesos rotos. El exterior de las barberías ostentaba los signos *Algebrista* y *Sangrador* (restaurador de huesos y extractor de sangre). Dichos servicios eran parte del oficio de barbero. El cilindro tradicional de las barberías, con franjas blancas y rojas, simboliza la sangre y las vendas.

Debido a que la sustracción y la división se definen respectivamente en términos de la adición y de la multiplicación, las propiedades de suma y multiplicación se pueden extender: se puede restar el mismo número en ambos lados de una ecuación, y dividir los dos lados entre el mismo número, diferente de 0, sin que se afecte el conjunto solución.

La propiedad distributiva permite combinar los *términos semejantes* tales como $4y$ y $2y$. Por ejemplo, $4y - 2y = (4 - 2)y = 2y$.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $4x - 2x - 5 = 4 + 6x + 3$.

En primer lugar hay que combinar los términos semejantes, por separado, en ambos lados de la ecuación, con lo que se obtiene lo siguiente:

$$2x - 5 = 7 + 6x.$$

A continuación, se usa la propiedad de la adición para colocar los términos que contienen x en un lado de la ecuación y los restantes (los números) en el otro lado. Una forma de hacerlo es sumar primero 5 en ambos lados, así:

$$2x - 5 + 5 = 7 + 6x + 5 \qquad \text{Sumar 5.}$$
$$2x = 12 + 6x$$

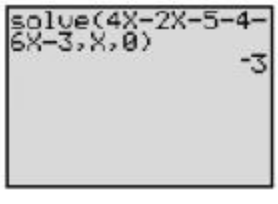
Ahora se resta $6x$ en ambos lados:

$$2x - 6x = 12 + 6x - 6x \qquad \text{Restar } 6x.$$
$$-4x = 12$$

Por último, se divide ambos lados entre -4 para obtener el término x en el izquierdo.

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{12}{-4} \qquad \text{Dividir entre } -4.$$

$$x = -3$$



Las calculadoras gráficas resuelven ecuaciones de la forma

expresión en X = 0.

El modelo TI-83 requiere que el usuario introduzca la expresión, la variable para la que desea resolverla y una *suposición*, todo separado por comas. La pantalla que se ilustra en la parte superior muestra la forma de resolver la ecuación del ejemplo 1.

Para asegurarse de que la solución es –3, se comprueba sustituyendo este valor en la ecuación *original* (*no* en una intermedia).

$$4x - 2x - 5 = 4 + 6x + 3 \qquad \text{Ecuación original}$$
$$4(-3) - 2(-3) - 5 = 4 + 6(-3) + 3 \qquad ? \qquad \text{Sea } x = -3.$$
$$-12 + 6 - 5 = 4 - 18 + 3 \qquad ? \qquad \text{Multiplicar.}$$
$$-11 = -11 \qquad \text{Verdadero}$$

Como se obtuvo un enunciado verdadero, la solución sí es –3. El conjunto solución es $\{-3\}$. ■

Los pasos que se usan para resolver una ecuación lineal en una variable son los siguientes (no todas las ecuaciones requieren todos los pasos):

Solución de una ecuación lineal en una variable

Paso 1: **Eliminar todas las fracciones.** Elimine cualquier fracción multiplicando ambos lados de la ecuación por un denominador común.

Paso 2: **Simplificar cada lado por separado.** Simplifique cada lado de la ecuación tanto como sea posible, por medio de la propiedad distributiva, para eliminar los paréntesis y agrupar términos semejantes, según se requiera.

(continúa)

Paso 3: **Colocar en un solo lado los términos que contengan la variable.** Utilice la propiedad de la adición de la igualdad para hacer que todos los términos en los que haya una variable queden en un lado de la ecuación y en el otro lado todos los números.

Paso 4: **Transforme, de tal manera que el coeficiente de la variable sea 1.** Utilice la propiedad de la multiplicación de la igualdad para obtener una ecuación que sólo contenga la variable (con coeficiente de 1) en un lado.

Paso 5: **Comprobar.** Compruebe sustituyendo en la ecuación original.

En el ejemplo 1 no se utilizó el paso 1 ni la propiedad distributiva del paso 2 como se menciona en el método anterior. Sin embargo, muchas otras ecuaciones requerirán uno de dichos pasos o ambos.

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación $2(k - 5) + 3k = k + 6$.

Como en esta ecuación no existen fracciones, no se aplica el paso 1. Comience utilizando la propiedad distributiva para simplificar y combinar los términos del lado izquierdo de la ecuación (paso 2).

$$2(k - 5) + 3k = k + 6$$

$$2k - 10 + 3k = k + 6 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$5k - 10 = k + 6 \qquad \text{Agrupar términos semejantes.}$$

A continuación, se suma 10 a ambos lados (paso 3).

$$5k - 10 + 10 = k + 6 + 10 \qquad \text{Sumar 10.}$$

$$5k = k + 16$$

Ahora se resta k de ambos lados.

$$5k - k = k + 6 - k \qquad \text{Restar } k.$$

$$4k = 16 \qquad \text{Combinar los términos semejantes.}$$

Dividir ambos lados entre 4 (paso 4).

$$\frac{4k}{4} = \frac{16}{4} \qquad \text{Dividir entre 4.}$$

$$k = 4$$

Compruebe que el conjunto solución es $\{4\}$ sustituyendo 4 por k en la ecuación original (paso 5). ■

En los ejemplos que siguen en esta sección, no se identificarán los pasos por su número.

Si en las ecuaciones aparecen fracciones o decimales como coeficientes, el trabajo será más fácil si se multiplica ambos lados por el mínimo común denominador de todas las fracciones. Ésta es una aplicación de la propiedad de multiplicación de la igualdad y produce una ecuación equivalente con coeficientes enteros.

La estrategia de solución de problemas por ensayo y error, que se estudió en el capítulo 1, fue realmente usada por los antiguos egipcios para resolver ecuaciones. Este método, denominado **Regla de la falsa posición,** consistía en elegir un valor inicial como una solución de la ecuación, para después hacer un ajuste en el caso de que la elección fuera incorrecta. Por ejemplo (con el empleo de nuestra notación moderna), si fuera a resolverse la ecuación

$$6x + 2x = 32$$

la selección inicial puede ser $x = 3$. Al sustituir x por el valor de 3, se obtiene

$$6(3) + 2(3) = 32 \quad ?$$
$$18 + 6 = 32 \quad ?$$
$$24 = 32. \quad \text{Falso}$$

La selección, 3 arroja un valor (24) que es más pequeño que el deseado (32). Como 24 es 3/4 de 32, el valor elegido, 3, es 3/4 de la solución real. Por tanto, la solución real debe ser 4, porque 3 es 3/4 de 4.

Utilice los métodos que se explican en esta sección para verificar este resultado.



François Viète (1540-1603), abogado de la corte de Enrique IV de Francia y estudioso de las ecuaciones. Simplificó la notación del álgebra y fue de los primeros que usaron letras para representar números. Durante siglos, el álgebra y la aritmética se expresaron con palabras rebuscadas y símbolos ocasionales. Desde la época de Viète el álgebra ha ido más allá de la solución de ecuaciones; la naturaleza abstracta del álgebra superior deriva de su lenguaje simbólico.

EJEMPLO 3 Resuelva $\frac{x+7}{6} + \frac{2x-8}{2} = -4$.

Comience eliminando las fracciones. Multiplique ambos lados por 6.

$$6\left(\frac{x+7}{6} + \frac{2x-8}{2}\right) = 6 \cdot (-4)$$

$$6\left(\frac{x+7}{6}\right) + 6\left(\frac{2x-8}{2}\right) = 6(-4) \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$x + 7 + 3(2x - 8) = -24$$

$$x + 7 + 6x - 24 = -24 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$7x - 17 = -24 \qquad \text{Agrupar términos.}$$

$$7x - 17 + 17 = -24 + 17 \qquad \text{Sumar 17.}$$

$$7x = -7$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{-7}{7} \qquad \text{Dividir entre 7.}$$

$$x = -1$$

Compruebe el lector que $\{-1\}$ sea el conjunto solución. ■

PARA REFLEXIONAR

Los axiomas de la igualdad

Al resolver una ecuación debemos estar seguros de que permanezca *balanceada* —es decir, cualquier operación que se realice en un lado de ella también debe llevarse a cabo en el otro, con el fin de garantizar que el conjunto de soluciones continúe siendo el mismo.

En la base de las reglas para resolver ecuaciones se encuentran cuatro axiomas de igualdad, que se mencionan a continuación. Para todos los números reales a, b y c,

1. **Axioma reflexivo** $a = a$
2. **Axioma simétrico** Si $a = b$, entonces $b = a$.
3. **Axioma transitivo** Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.
4. **Axioma de sustitución** Si $a = b$, entonces es posible reemplazar b en cualquier enunciado sin que se afecte su veracidad o falsedad.



La relación, como lo es la igualdad, que satisface los tres primeros axiomas (reflexivo, simétrico y transitivo) se denomina *relación de equivalencia.*

Para análisis en grupo

1. Proporcionen un ejemplo de una relación cotidiana que no satisfaga el axioma simétrico.
2. ¿Se cumple el axioma transitivo en los deportes de competencia con las derrotas?
3. Den un ejemplo de relación que no satisfaga el axioma transitivo.

El **álgebra** se remonta a los babilonios del 2000 a.C. Los egipcios también trabajaron con problemas de álgebra, pero éstos no eran tan complejos como los que descifraban los babilonios. Hacia el siglo VI, los hindúes desarrollaron métodos para resolver problemas relacionados con intereses, descuentos y sociedades.

Muchas obras hindúes y griegas que versaban sobre matemáticas se preservaron gracias a las traducciones de estudiosos musulmanes de entre los años 750 a 1250. Los árabes retomaron el trabajo de los griegos e hindúes y lo incrementaron. Por ejemplo, Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî escribió libros de álgebra y del sistema de numeración (el que hoy usamos) que tuvieron una enorme influencia en Europa Occidental; su nombre se rememora en nuestros días en la palabra *algoritmo*.

Solución de problemas

En la sección siguiente se resuelven problemas relacionados con tasas de interés y concentración de soluciones. Involucran porcentajes que se convierten a números en forma decimal. Las ecuaciones que se emplean para resolverlos implican coeficientes decimales. Éstos se eliminan con la multiplicación por la potencia de 10 más grande que sea necesario para obtener coeficientes enteros. El ejemplo que sigue muestra la manera de hacerlo.

EJEMPLO 4 Resuelva $.06x + .09(15 - x) = .07(15)$.

Como todos los números decimales están en centésimas, hay que multiplicar ambos lados de la ecuación por 100 (esto se realiza desplazando los puntos decimales dos lugares a la derecha).

$$\begin{aligned}
.06x + .09(15 - x) &= .07(15) \\
.06x + .09(15 - x) &= .07(15) && \text{Multiplicar por 100.} \\
6x + 9(15 - x) &= 7(15) \\
6x + 9(15) - 9x &= 105 && \text{Propiedad distributiva} \\
-3x + 135 &= 105 && \text{Agrupar términos semejantes.} \\
-3x + 135 - 135 &= 105 - 135 && \text{Restar 135.} \\
-3x &= -30 \\
\frac{-3x}{-3} &= \frac{-30}{-3} && \text{Dividir entre } -3. \\
x &= 10
\end{aligned}$$

Compruebe que el conjunto solución es $\{10\}$. ■

En el ejemplo 4, al multiplicar el término $.09(15 - x)$ por 100 no hay que multiplicar .09 ni $15 - x$ por 100. Este paso no es una aplicación de la propiedad distributiva sino de la asociativa. El procedimiento correcto es el siguiente:

$$\begin{aligned}
100[.09(15 - x)] &= [100(.09)](15 - x) && \text{Propiedad asociativa} \\
&= 9(15 - x). && \text{Multiplicar.}
\end{aligned}$$

Tipos especiales de ecuaciones lineales Cada una de las ecuaciones anteriores tenía un conjunto solución constituido por un elemento; por ejemplo $2x + 1 = 13$ tiene el conjunto solución $\{6\}$, con solo el número 6. Una ecuación con un número finito (distinto de 0) de elementos en el conjunto solución, es una **ecuación condicional**. A veces una ecuación no tiene soluciones. En este caso se trata de una **contradicción** y su conjunto solución es el $\emptyset$. También es posible que una ecuación tenga un número infinito de soluciones. Una ecuación que se satisfaga con cada número para los que ambos lados están definidos se denomina una **identidad**. El ejemplo siguiente muestra la manera de identificar estos tipos de ecuaciones.



Sofía Kovalevskaya (1850-1891) fue la matemática rusa mas conocida en las postrimerías del siglo XIX. La mayor parte de su trabajo versa sobre la teoría de ecuaciones diferenciales —invaluables para expresar tasas de cambio. Por ejemplo, en biología, la tasa de crecimiento de una población, digamos de microbios, se expresa con precisión por medio de ecuaciones diferenciales.

Kovalevskaya recibió educación privada porque las clases públicas no estaban abiertas para las mujeres. Finalmente se le concedió un título (1874) de la Universidad de Gotinga, Alemania. En 1884 se convirtió en catedrática de la Universidad de Estocolmo y posteriormente fue nombrada profesora de matemáticas avanzadas.

Kovalevskaya fue una escritora reconocida. Además de novelas acerca de la vida rusa, sobre todo *Las hermanas Rajevski* y *Vera Vorontzoff*, escribió *Recuerdos de niñez*, que ha sido traducido al inglés.

EJEMPLO 5 Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones. Decida si se trata de una ecuación condicional, identidad o contradicción.

(a) $5x - 9 = 4(x - 3)$

$$\begin{aligned} 5x - 9 &= 4x - 12 && \text{Propiedad distributiva} \\ 5x - 9 - 4x &= 4x - 12 - 4x && \text{Restar } 4x. \\ x - 9 &= -12 && \text{Agrupar términos semejantes.} \\ x - 9 + 9 &= -12 + 9 && \text{Sumar 9.} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

El conjunto solución, $\{-3\}$, tiene un elemento, por lo que $5x - 9 = 4(x - 3)$ es una *ecuación condicional.*

(b) $5x - 15 = 5(x - 3)$

$$5x - 15 = 5x - 15 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

Ambos lados de la ecuación son *exactamente lo mismo*, por lo que cualquier número real haría que la ecuación sea verdadera. Por esta razón, el conjunto solución es el de todos los números reales y la ecuación $5x - 15 = 5(x - 3)$ es una *identidad.*

(c) $5x - 15 = 5(x - 4)$

$$\begin{aligned} 5x - 15 &= 5x - 20 && \text{Propiedad distributiva} \\ 5x - 15 - 5x &= 5x - 20 - 5x && \text{Restar } 5x. \\ -15 &= -20 && \text{Falso} \end{aligned}$$

Como el resultado $-15 = -20$ es *falso*, la ecuación no tiene solución. El conjunto solución es el $\emptyset$. La ecuación $5x - 15 = 5(x - 4)$ es una *contradicción.* ■

Fórmulas Es frecuente que la solución de un problema de álgebra dependa del uso de un enunciado matemático o **fórmula** en la que se utilice más de una letra para expresar una relación. Algunos ejemplos de fórmulas son los siguientes:

$$d = rt, \qquad I = prt \qquad \text{y} \qquad P = 2L + 2W.$$

En ciertas aplicaciones, la fórmula necesaria se resuelve para una de sus variables, que tal vez no sea el número desconocido que deba encontrarse. Los ejemplos que siguen muestran la manera de resolver una fórmula para una de sus variables. Este proceso se denomina **solución para una variable especificada**. Observe que los pasos que se usan en estos ejemplos son muy parecidos a los que se emplean para resolver una ecuación lineal. Recuerde que *al resolver para una variable especificada, hay que tratar a ésta como si fuera la única existente, y a todas las demás como si fueran números.*

Solución para una variable especificada

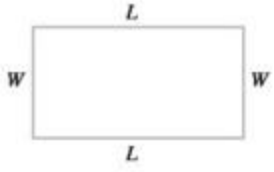
Paso 1: Use la propiedad de adición o multiplicación, según sea necesario, para que todos los términos que contienen la variable especificada queden en un lado de la ecuación.

Paso 2: Todos los términos que no contienen la variable especificada deben quedar en el otro lado de la ecuación.

(continúa)

Paso 3 De ser necesario, utilice la propiedad distributiva para escribir el lado donde está la variable especificada como el producto de ésta por una suma de términos.

En general, siga todos los pasos que se mencionaron antes para resolver ecuaciones lineales.



El perímetro, P, que es la suma de las longitudes de los lados de un rectángulo, está dado por la ecuación

$$P = 2L + 2W.$$

FIGURA 1

EJEMPLO 6 Resuelva la fórmula $P = 2L + 2W$ para W.

Esta fórmula proporciona la relación que hay entre el perímetro de un rectángulo, P, el largo, L, y el ancho, W. Vea la figura 1.

Resuelva la fórmula para W, para ello deje sólo W a un lado del signo de igualdad. Para comenzar, se resta $2L$ en ambos lados.

$$P = 2L + 2W$$

$$P - 2L = 2L + 2W - 2L \qquad \text{Restar } 2L.$$

$$P - 2L = 2W$$

$$\frac{P - 2L}{2} = \frac{2W}{2} \qquad \text{Dividir entre 2.}$$

$$\frac{P - 2L}{2} = W \quad \text{o} \quad W = \frac{P - 2L}{2}$$ ■

Modelos A veces las ecuaciones se utilizan para pronosticar datos futuros que se basan en datos del pasado. Ecuaciones como éstas se llaman **modelos**. Por supuesto, deben usarse con cuidado, porque es frecuente que no haya ninguna garantía de que las tendencias pasadas continúen en el futuro.



EJEMPLO 7 Al estudiar los tiempos de los ganadores de la competencia de 500 metros de patinaje de velocidad en los Juegos Olímpicos de 1900, se encontró que los tiempos ganadores que habían hecho los hombres podían representarse, aproximadamente, con la ecuación

$$M = 46.338 - .097x,$$

donde M es el tiempo, en segundos, necesario para ganar en la categoría masculina y x es el año de la Olimpiada, con $x = 0$ para 1900 (por ejemplo, los tiempos ganadores en 1994 serían estimados con la sustitución de x por el valor: $1994 - 1900 = 94$). La ecuación que corresponde a las mujeres es la siguiente:

$$W = 57.484 - .196x.$$

(a) Encuentre el año para el que $M = 42.458$.

$$M = 46.338 - .097x \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$42.458 = 46.338 - .097x \qquad \text{Sea } M = 42.458.$$

$$-3.88 = -.097x \qquad \text{Restar } 46.338.$$

$$x = 40 \qquad \text{Dividir entre } -.097.$$

Al valor de $x = 40$ corresponde el año 1940.

(b) Pronostique el tiempo ganador para las mujeres, en el año 2006.

El año 2006 corresponde a un valor de $x = 106$.

$$W = 57.484 - .196x \quad \text{Ecuación dada}$$
$$W = 57.484 - .196(106) \quad \text{Sea } x = 106.$$
$$W = 36.708$$

Este modelo pronostica que el tiempo ganador estaría apenas por debajo de los 37 segundos. ■

7.1 EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales en la variable x?

A. $3x + x - 1 = 0$ **B.** $8 = x^2$

C. $6x + 2 = 9$ **D.** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{x} = 0$

2. ¿Cuáles de las ecuaciones del ejercicio 1 no son ecuaciones lineales en x? Explique por qué.

3. Diga si 6 es una solución de $3(x + 4) = 5x$, sustituyendo 6 por x. Si no lo es, explique por qué.

4. Use la sustitución para decidir si –2 es una solución de $5(x + 4) - 3(x + 6) = 9(x + 1)$. Si no lo es, explique por qué.

5. Si dos ecuaciones son equivalentes, tienen la misma _____.

6. La ecuación $4[x + (2 - 3x)] = 2(4 - 4x)$ es una identidad. Sea x el número de letras de su apellido. ¿Es dicho número una solución de esta ecuación? Compruebe su respuesta.

7. La expresión $.06(10 - x)(100)$ es equivalente a:

A. $.06 - .06x$ **B.** $60 - 6x$

C. $6 - 6x$ **D.** $6 - .06x$

8. Describa, en sus propias palabras, los pasos que se usan para resolver una ecuación lineal.

Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes.

9. $7k + 8 = 1$

10. $5m - 4 = 21$

11. $8 - 8x = -16$

12. $9 - 2r = 15$

13. $7x - 5x + 15 = x + 8$

14. $2x + 4 - x = 4x - 5$

15. $12w + 15w - 9 + 5 = -3w + 5 - 9$

16. $-4t + 5t - 8 + 4 = 6t - 4$

17. $2(x + 3) = -4(x + 1)$

18. $4(x - 9) = 8(x + 3)$

19. $3(2w + 1) - 2(w - 2) = 5$

20. $4(x - 2) + 2(x + 3) = 6$

21. $2x + 3(x - 4) = 2(x - 3)$

22. $6x - 3(5x + 2) = 4(1 - x)$

23. $6p - 4(3 - 2p) = 5(p - 4) - 10$

24. $-2k - 3(4 - 2k) = 2(k - 3) + 2$

25. $-[2z - (5z + 2)] = 2 + (2z + 7)$

26. $-[6x - (4x + 8)] = 9 + (6x + 3)$

27. $-3m + 6 - 5(m - 1) = -(2m - 4) - 5m + 5$

28. $4(k + 2) - 8k - 5 = -3k + 9 - 2(k + 6)$

29. $-[3x - (2x + 5)] = -4 - [3(2x - 4) - 3x]$

30. $2[-(x - 1) + 4] = 5 + [-(6x - 7) + 9x]$

31. $-(9 - 3a) - (4 + 2a) - 4 = -(2 - 5a) - a$

32. $(2 - 4x) - (3 - 4x) + 4 = -(-3 + 6x) + x$

33. $(2m - 6) - (3m - 4) = -(-4 + m) - 4m + 6$

34. Para resolver la ecuación lineal

$$.05x + .12(x + 5000) = 940,$$

se pueden multiplicar ambos lados por una potencia de 10 de modo que todos los coeficientes sean enteros. ¿Cuál es la potencia de 10 más pequeña con la que se cumpliría dicho objetivo?

35. Suponga que al resolver la ecuación

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}x,$$

se comienza multiplicando ambos lados por 12, en lugar de hacerlo por el *mínimo* común denominador. ¿De cualquier modo, se llegará a la solución correcta? Explique su respuesta.

Resuelva cada una de las ecuaciones que siguen.

36. $\frac{3x}{4} + \frac{5x}{2} = 13$ **37.** $\frac{8x}{3} - \frac{2x}{4} = -13$

38. $\frac{x-8}{5} + \frac{8}{5} = -\frac{x}{3}$ **39.** $\frac{2r-3}{7} + \frac{3}{7} = -\frac{r}{3}$

40. $\frac{4t+1}{3} = \frac{t+5}{6} + \frac{t-3}{6}$

41. $\frac{2x+5}{5} = \frac{3x+1}{2} + \frac{-x+7}{2}$

42. $.05x + .12(x + 5000) = 940$

43. $.09k + .13(k + 300) = 61$

44. $.02(50) + .08r = .04(50 + r)$

45. $.20(14{,}000) + .14t = .18(14{,}000 + t)$

46. $.05x + .10(200 - x) = .45x$

47. $.08x + .12(260 - x) = .48x$

48. La ecuación $x + 2 = x + 2$ se denomina _____, porque su conjunto solución es {todos los números reales}. La ecuación $x + 1 = x + 2$ se llama _____, debido a que su conjunto solución es $\emptyset$.

49. ¿Cuál de las que siguen es una ecuación condicional?

A. $2x + 1 = 3$ **B.** $x = 3x - 2x$

C. $3x + 1 = 3x$ **D.** $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$

50. Explique las diferencias entre una ecuación condicional, una identidad y una contradicción.

Diga si cada una de las siguientes ecuaciones es condicional, identidad o contradicción. Proporcione el conjunto solución.

51. $-2p + 5p - 9 = 3(p - 4) - 5$

52. $-6k + 2k - 11 = -2(2k - 3) + 4$

53. $6x + 2(x - 2) = 9x + 4$

54. $-4(x + 2) = -3(x + 5) - x$

55. $-11m + 4(m - 3) + 6m = 4m - 12$

56. $3p - 5(p + 4) + 9 = -11 + 15p$

57. $7[2 - (3 + 4r)] - 2r = -9 + 2(1 - 15r)$

58. $4[6 - (1 + 2m)] + 10m = 2(10 - 3m) + 8m$

59. Cuando una fórmula se resuelve para una variable en particular, es posible que existan varias formas equivalentes distintas.

Si se resuelve $A = \frac{1}{2}bh$ para h, una posible respuesta correcta es

$$h = \frac{2A}{b}.$$

¿Cuál de las siguientes *no* es equivalente a ésta?

A. $h = 2\left(\frac{A}{b}\right)$ **B.** $h = 2A\left(\frac{1}{b}\right)$

C. $h = \frac{A}{\frac{1}{2}b}$ **D.** $h = \frac{\frac{1}{2}A}{b}$

60. Un recurso para fórmulas geométricas establece el perímetro de un rectángulo como $P = 2L + 2W$, mientras que otro afirma que es $P = 2(L + W)$. ¿Son equivalentes? Si lo fueran, ¿qué propiedad justifica su equivalencia?

Fórmulas matemáticas *Resuelva cada fórmula para la variable que se especifica.*

61. $d = rt$; para t (distancia)

62. $I = prt$; para r (interés simple)

63. $A = bh$; para b (área de un paralelogramo)

64. $P = 2L + 2W$; para L (perímetro de un rectángulo)

65. $P = a + b + c$; para a (perímetro de un triángulo)

66. $V = LWH$; para W (volumen de un sólido regular)

67. $A = \frac{1}{2}bh$; para h (área de un triángulo)

68. $C = 2\pi r$; para r (circunferencia de un círculo)

69. $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$; para h (área de la superficie de un cilindro recto circular)

70. $A = \frac{1}{2}(B + b)h$; para B (área de un trapezoide)

71. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$; para F (conversión de grados Fahrenheit a Celsius)

72. $F = \frac{9}{5}C + 32$; para C (conversión de grados Celsius a Fahrenheit)

73. $A = 2HW + 2LW + 2LH$; para H (área de la superficie de un sólido rectangular)

74. $V = \frac{1}{3}Bh$; para h (volumen de una pirámide recta)

Resuelva cada uno de los siguientes problemas. (Cuando sea necesario, redondée al año más cercano.)

75. ***Venta de boletos en Broadway*** El modelo matemático

$$y = .61x - 48.3$$

permite obtener el número de boletos que se vendieron en Broadway de 1990 a 1999. En el modelo, el valor de $x = 90$ corresponde a la temporada 1990-1991, el de $x = 91$ es el de la temporada 1991-1992, etc., y y es el número de boletos vendidos, en millones. (*Fuente:* League of American Theaters and Producers.)



(a) Basado en dicho modelo, ¿cuántos boletos se vendieron en 1995-1996? (*Una pista:* 1995-1996 corresponde a $x = 95$.)

(b) ¿En qué temporada, el número de boletos vendidos fue de 7.9 millones? (*Una pista:* El número de boletos vendidos, expresado en millones, corresponde a y.)

76. ***Venta de boletos de teatro*** La siguiente tabla muestra el número de boletos (en millones) vendidos a los aficionados menores de 18 años.

Temporada	Millones de boletos
1990-1991	.5
1996-1997	1.1

Fuente: League of American Theaters and Producers.

Si $x = 90$ corresponde a la temporada 1990-1991, y así sucesivamente, el modelo

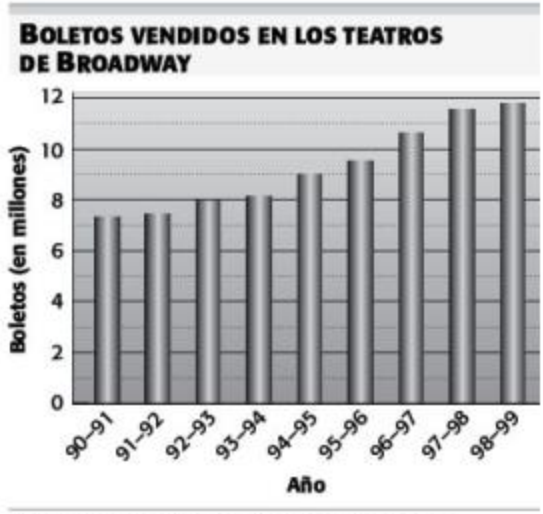
$$y = .1x - 8.5$$

proporciona el número (en millones) de aficionados, menores de 18 años, que acudieron al teatro.

(a) Use el modelo para calcular el número de jóvenes que asistió en 1993-1994.

(b) ¿En qué temporada la venta de boletos fue de .75 millones?

77. ***Venta de boletos en Broadway*** Esta gráfica indica el número de boletos vendidos para las funciones en Broadway en la década de 1990. Para el periodo que cubre la gráfica, ¿entre cuáles dos temporadas las ventas de boletos se incrementaron al máximo?



Fuente: League of American Theaters and Producers.

78. ***Venta de boletos de teatro*** Utilice el modelo del ejercicio 75 para encontrar el número de boletos vendidos en 1994-1995. ¿Es la respuesta obtenida una buena aproximación al número que muestra la gráfica en el ejercicio 77?

7.2 Aplicaciones de las ecuaciones lineales

En un capítulo anterior se introdujo el procedimiento de solución de problemas de Polya. En esta sección se aplica dicho procedimiento para resolver, en forma algebraica, problemas prácticos.

Traducción al álgebra Cuando se usa álgebra para resolver aplicaciones prácticas, se deben traducir las descripciones verbales del problema a enunciados matemáticos.

Solución de problemas

En la descripción verbal de un problema, por lo general, existen palabras y frases que son clave para traducirlo a expresiones matemáticas que involucran suma, resta, multiplicación y división. Algunas de las expresiones más comunes que se usan son las siguientes:

Traducción de palabras a expresiones matemáticas

Expresión verbal	Expresión matemática (donde x y y son números)
Suma	
La **suma** de un número con 7	$x + 7$
6 **más que** un número	$x + 6$
3 **más** 8	$3 + 8$
24 **sumado a** un número	$x + 24$
Un número **incrementado en** 5	$x + 5$
La **suma** de dos números	$x + y$
Resta	
2 **menos que** un número	$x - 2$
12 **menos** un número	$12 - x$
Un número **disminuido en** 12	$x - 12$
La **diferencia de** dos números	$x - y$
Un número **restado de** 10	$10 - x$
Multiplicación	
16 **veces** un número	$16x$
Un número **multiplicado por** 6	$6x$
2/3 **de** un número (se usa sólo con fracciones y porcentajes)	$\frac{2}{3}x$
El **doble** (2 veces) de un número	$2x$
El **producto** de dos números	xy
División	
El **cociente** de 8 y un número	$\frac{8}{x}$ $(x \neq 0)$
Un número **dividido entre** 13	$\frac{x}{13}$
La **razón** de dos números o el **cociente** de dos números	$\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$

Es frecuente que la palabra *es*, indique el símbolo de igualdad, =. De hecho, como las expresiones matemáticas iguales representan nombres diferentes para el mismo número, las palabras que transmiten la idea de *igualdad* se traducen como =. Por ejemplo:

Si el producto de un número y 12 se disminuye en 7, el resultado es 105,

se traduce a la ecuación matemática siguiente:

$$12x - 7 = 105,$$

donde x representa el número desconocido (¿por qué sería incorrecto escribir $7 - 12x = 105$?)

Aplicaciones Si bien no existe un método que permita resolver todos los tipos de problemas, son útiles los seis pasos siguientes:

El **procedimiento de solución de problemas de George Polya** se adapta a las aplicaciones del álgebra como se aprecia en el recuadro. Los pasos 1 y 2 constituyen las dos primeras etapas del procedimiento de Polya (*comprensión del problema*), el paso 3 es la segunda etapa (*desarrollo de un plan*), el paso 4 comprende la tercera etapa (*ejecución del plan*) y los pasos 5 y 6 constituyen la última etapa (*recapitulación*).

Solución de un problema práctico

Paso 1: **Leer** el problema con cuidado hasta comprender qué información tenemos y qué información habrá que encontrar.

Paso 2: **Asignar una variable** que represente el valor desconocido utilizando diagramas o tablas según sea necesario. Escribir lo que dicha variable representa. Si fuera necesario, expresar cualesquiera otros valores desconocidos en términos de la variable.

Paso 3: **Escribir una ecuación** por medio de la(s) expresión(es) variable(s).

Paso 4: **Resolver** la ecuación.

Paso 5: **Enunciar la respuesta.** ¿Parece razonable?

Paso 6: **Comprobar** la respuesta en palabras del problema *original*.

Con frecuencia, el paso más difícil es el tercero. Para traducir el problema a una ecuación hay que escribir las frases dadas como expresiones matemáticas. Como las expresiones matemáticas de igualdad son nombres del mismo número, traduzca cualquier palabra que signifique *igual* o *mismo*, como =. El signo = conduce a una ecuación por resolver.

Solución de problemas

Un problema común es el que involucra el cálculo de dos cantidades cuando se conoce la suma de ellas. En general, para resolver este tipo de problemas, elija una variable que represente una de las incógnitas y después, represente la otra cantidad en términos de la misma variable utilizando la información que haya obtenido del problema. Después, escriba una ecuación que se base en las palabras de éste.

EJEMPLO 1 En las Olimpiadas de 2000, los competidores de Estados Unidos ganaron 14 medallas de oro más que medallas de plata. En total, ganaron 64 medallas de oro y plata. ¿Cuántas medallas de cada tipo obtuvieron? (*Fuente:* Comité Olímpico de Estados Unidos.)



Paso 1: **Lea** el problema. Se da información acerca del número total de medallas de oro y plata, y se pide encontrar el número de cada tipo.

Paso 2: **Asignar una variable.**

Sea x = número de medallas de plata.
Entonces $x + 14$ = número de medallas de oro.

A continuación se presenta una aplicación de ecuaciones lineales, tomada de **Greek Anthology** (hacia 500 d.C.), que es un grupo de 46 problemas numéricos.

Demócrito vivió una cuarta parte de su vida como niño, una quinta parte como joven, una tercera parte como adulto, y pasó 13 años en su vejez. ¿Qué edad tiene?

(Respuesta: 60 años)

Paso 3: **Escribir una ecuación.**

El total	es	el número de las de plata	más	el número de las de oro.
↓	↓	↓	↓	↓
64	=	x	+	$(x + 14)$

Paso 4: **Resolver** la ecuación.

$$64 = 2x + 14 \qquad \text{Agrupar términos.}$$
$$64 - 14 = 2x + 14 - 14 \qquad \text{Restar 14.}$$
$$50 = 2x \qquad \text{Agrupar términos.}$$
$$25 = x \qquad \text{Dividir entre 2.}$$

Paso 5: **Enunciar la respuesta.** Debido a que x representa el número de medallas de plata, los atletas de Estados Unidos ganaron 25 medallas de plata. Como $x + 14$ representa el número de medallas de oro, ellos ganaron $25 + 14 = 39$ medallas de oro.

Paso 6: **Comprobar.** Como hubo 39 medallas de oro y 25 de plata, el número total de preseas fue de $39 + 25 = 64$. Como $39 - 25 = 14$, hubo 14 medallas de oro más que de plata. Esta información concuerda con la que se da en el problema, por lo que las respuestas coinciden. ■

El problema del ejemplo 1 también podría resolverse si x representara el número de medallas de oro. Entonces, $x - 14$ representaría el número de las medallas de plata. La ecuación sería la siguiente:

$$64 = x + (x - 14).$$

La solución es 39, que es el número de medallas de oro. Entonces, el número de las medallas de plata sería $39 - 14 = 25$. Las respuestas son las mismas con cualquier enfoque que se utilice.

EJEMPLO 2 Las instrucciones para un trabajo en madera especifican que se requieren tres piezas de dicho material. La más larga de ellas debe tener el doble de longitud que la de tamaño medio y la más corta debe ser 10 pulgadas más corta que la mediana. María González posee una pieza de 70 pulgadas que quiere utilizar. ¿De qué longitud debe ser cada pieza?

Paso 1: **Leer** el problema. Habrá tres respuestas.

Paso 2: **Asignar una variable.** Como la pieza de tamaño medio aparece en los dos pares de comparaciones, se hará que x represente la longitud, en pulgadas, de dicha pieza. Se tiene:

$x =$ longitud de la pieza de tamaño medio,
$2x =$ longitud de la pieza más larga, y
$x - 10 =$ longitud de la pieza más corta.

En este caso nos ayudaremos de un dibujo. Vea la figura 2.

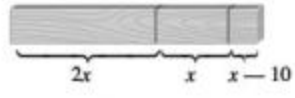


FIGURA 2

Paso 3: **Escribir una ecuación.**

La más larga		La de tamaño medio		La más corta	es	La longitud total
$2x$	+	x	+	$(x - 10)$	=	70

Paso 4: **Resolver.**

$$4x - 10 = 70 \qquad \text{Agrupar términos.}$$
$$4x - 10 + 10 = 70 + 10 \qquad \text{Sumar 10 a cada lado.}$$
$$4x = 80 \qquad \text{Agrupar términos.}$$
$$x = 20 \qquad \text{Dividir cada lado entre 4.}$$

Paso 5: **Enunciar la respuesta.** La pieza de tamaño medio mide 20 pulgadas de largo, la más larga tiene $2(20) = 40$ pulgadas de longitud y la más corta mide $20 - 10 = 10$ pulgadas.

Paso 6: **Comprobar.** La suma de las longitudes es 70 pulgadas. Se cumplen todas las condiciones del problema. ■

Solución de problemas

Es frecuente usar porcentajes en los problemas que involucran diferentes concentraciones de una sustancia o tasas de interés distintas. En cada caso, para obtener la cantidad de la sustancia pura o el interés, se multiplica así:

Problemas de mezclas				**Problemas de interés (anual)**			
base	**×**	**tasa (%)**	**= porcentaje**	**principal**	**×**	**tasa (%)**	**= interés**
b	×	r	= p	p	×	r	= I

En una ecuación, el porcentaje debe escribirse en forma decimal. Por ejemplo, 35% se escribe como .35 y 7% es .07 y no 7.

EJEMPLO 3

(a) Si un químico tiene 40 litros de una solución ácida al 35%, entonces la cantidad de ácido puro presente en la solución es:

40	×	.35	=	14 litros.
↑		↑		↑
Cantidad de solución		Tasa de concentración		Cantidad de ácido puro

(b) Si se invierte \$1300 durante un año, al 7% de interés simple, la cantidad de interés que se gana durante el año es:

\$1300	×	.07	=	\$91.
↑		↑		↑
Principal		Tasa de interés		Interés que se gana

■

Solución de problemas

En los ejemplos que se presentan a continuación se usan tablas para organizar la información de los problemas. Una tabla permite plantear, con más facilidad, la ecuación del problema, paso que por lo general, es el más difícil.

EJEMPLO 4 Un químico necesita mezclar 20 litros de una solución ácida al 40% con otra al 70%, a fin de obtener una mezcla también ácida al 50%. ¿Cuántos litros debe usar de la solución ácida al 70%?

Paso 1: **Leer** el problema. Observe el porcentaje de cada solución y el de la mezcla.

Paso 2: **Asignar una variable.**

Sea x = número de litros que se necesitan de la solución ácida al 70%.

Recuerde que en el ejemplo 3(a) se comentó que la cantidad de ácido puro de la solución está dada por el resultado de multiplicar el porcentaje de concentración y el número de litros de solución, es decir:

$$\text{litros de ácido puro en } x \text{ litros de solución al } 70\% = .70x.$$

La cantidad de ácido puro en los 20 litros de solución al 40% es

$$\text{litros de ácido puro en la solución al } 40\% = .40(20) = 8.$$

La solución nueva contendrá $(x + 20)$ litros de solución al 50%. La cantidad de ácido puro en esta solución es:

$$\text{litros de ácido puro en la solución al } 50\% = .50(x + 20).$$

La figura 3 ilustra esta información, que se resume en la tabla.

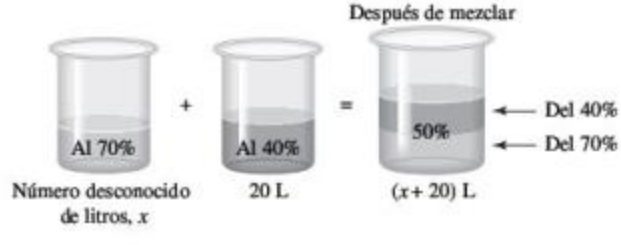


FIGURA 3

Litros de solución	Tasa (en forma decimal)	Litros de ácido puro
x	.70	$.70(x)$
20	.40	$.40(20) = 8$
$x + 20$	.50	$.50(x + 20)$

Deben sumar lo mismo

Paso 3: **Escribir una ecuación.** El número de litros de ácido puro en la solución al 70% sumado al número de litros de ácido puro en la que está al 40% será igual al número de litros de ácido puro en la mezcla resultante, por lo que la ecuación es la siguiente:

Ácido puro al 70%		ácido puro al 40%		ácido puro al 50%.
↓	más ↓	↓	es ↓	↓
$.70x$	$+$	$.40(20)$	$=$	$.50(x + 20)$.

Paso 4: **Resolver la ecuación.** Eliminar paréntesis y después multiplicar por 100 para eliminar los decimales.

$$.70x + .40(20) = .50x + .50(20) \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$70x + 40(20) = 50x + 50(20) \quad \text{Multiplicar por 100.}$$
$$70x + 800 = 50x + 1000$$
$$20x + 800 = 1000 \quad \text{Restar } 50x.$$
$$20x = 200 \quad \text{Restar 800.}$$
$$x = 10 \quad \text{Dividir entre 20.}$$

Paso 5: **Enunciar la respuesta.** El químico necesita usar 10 litros de solución al 70%.

Paso 6: **Comprobar.** Como

$$.70(10) + .40(20) = 7 + 8 = 15$$

y

$$.50(10 + 20) = .50(30) = 15,$$

la respuesta concuerda. ■

Cuando iba camino de Amberes
encontré a un hombre
y sus 7 mujeres;
cada una de ellas con 7 sacos,
y por cada minino, 7 gatitos.
Gatos, gatitos, sacos, mujeres.
¿Cuántos se dirigían al puerto de Amberes?

¿Conoce el *truco* que hay en la respuesta de esta canción infantil? Estos versos se inspiran en una aplicación antigua encontrada en el papiro Rhind, manuscrito egipcio que se remonta al 1650 a.C., aproximadamente. Leonardo de Pisa (Fibonacci) también incluyó un problema similar en *Liber Abaci* en 1202.

La respuesta a esta pregunta es 1. Sólo yo *iba* camino de Amberes.

En el siguiente ejemplo se usa la fórmula de interés simple, $I = prt$. Hay que recordar que cuando $t = 1$, la fórmula se convierte en $I = pr$, como se ve en el recuadro de Solución de problemas, antes del ejemplo 3. Aquí, de nuevo, se aplica la idea de multiplicar la cantidad total (principal) por la tasa (de interés) para obtener el porcentaje (monto del interés).

EJEMPLO 5 Elizabeth Lemulle recibe una herencia. Planea invertir una parte de ésta al 9% y $2000 más que la cantidad anterior en una inversión menos segura que da el 10%. ¿Cuánto debe invertir en cada tasa para ganar $1150 al año, por concepto de interés?

Paso 1: **Leer** el problema de nuevo.

Paso 2: **Asignar una variable.**

Sea $x =$ la cantidad invertida al 9% (en dólares);
entonces $x + 2000 =$ la cantidad invertida al 10% (en dólares).

Utilice una tabla para ordenar la información que se da en el problema.

Cantidad invertida en dólares	Tasa de interés	Interés por un año
x	.09	$.09x$
$x + 2000$	.10	$.10(x + 2000)$

Paso 3: **Escribir una ecuación.** Para obtener el interés que se gana se multiplica la cantidad por la tasa. Como el interés total ha de ser \$1150, la ecuación es

Interés al 9%		interés al 10%		interés total.
↓	↓	↓	↓	↓
$.09x$	$+$	$.10(x + 2000)$	$=$	$1150.$
	más		es igual al	

Paso 4: **Resuelva** la ecuación. Elimine los paréntesis; después elimine los decimales.

$$.09x + .10x + .10(2000) = 1150 \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$9x + 10x + 10(2000) = 115{,}000 \quad \text{Multiplicar por 100.}$$
$$9x + 10x + 20{,}000 = 115{,}000 \quad \text{Multiplicar.}$$
$$19x + 20{,}000 = 115{,}000 \quad \text{Agrupar términos.}$$
$$19x = 95{,}000 \quad \text{Restar 20,000.}$$
$$x = 5000 \quad \text{Dividir entre 19.}$$

Paso 5: **Enunciar la respuesta.** Ella debe invertir \$5000 al 9%, y \$5000 + \$2000 = \$7000 al 10%.

Paso 6: **Comprobar.** Si se invierten \$5000 al 9% y \$7000 al 10%, se obtiene un interés total de .09(\$5000) + .10(\$7000) = \$450 + \$700 = \$1150, como lo requiere el problema original. ■

Solución de problemas

Los problemas que involucran denominaciones diferentes de moneda o artículos con valores monetarios distintos son muy parecidos a los del tipo de mezcla e interés.

Problemas de moneda

Número × valor de uno = valor total

Por ejemplo, si una urna contiene 37 monedas de 25 centavos, la cantidad de dinero que hay es

37	×	\$.25	=	\$9.25.
↑		↑		↑
Número de monedas		Denominación		Valor monetario

EJEMPLO 6 Un empleado bancario tiene 25 billetes más de 5 dólares que billetes de 10 dólares. El total del dinero es \$200. ¿Cuánto dinero tiene en billetes de cada denominación?

Paso 1: **Leer** el problema. Se debe encontrar el número de billetes de cada denominación que tiene el empleado.

Paso 2: **Asignar una variable.**

Sea x = número de billetes de 10 dólares;
entonces $x + 25$ = número de billetes de 5 dólares.

La información que se da se organiza en una tabla.

Número de billetes	Denominación	Valor total
x	10	$10x$
$x + 25$	5	$5(x + 25)$

Paso 3: **Escribir una ecuación.** El valor monetario se obtiene con la multiplicación del número de billetes por su denominación. El valor de los de 5 más el valor de los de 10 debe ser \$200:

Valor de los de 5 → $5(x + 25)$ | más → $+$ | valor de los de 10 → $10x$ | es igual a → $=$ | \$200. → $200.$

Paso 4: **Resolver.**

$$\begin{aligned} 5x + 125 + 10x &= 200 && \text{Propiedad distributiva} \\ 15x + 125 &= 200 && \text{Agrupar términos.} \\ 15x &= 75 && \text{Restar 125.} \\ x &= 5 && \text{Dividir entre 15.} \end{aligned}$$

Paso 5: **Enunciar la respuesta.** Como x representa el número de billetes de 10, el empleado tiene 5 de 5 y $5 + 25 = 30$ de 5.

Paso 6: **Comprobar.** El empleado tiene $30 - 5 = 25$ billetes más de 5 que de 10, y el total es $5(\$10) + 30(\$5) = \$200$, como se requiere. ■

¿Es posible promediar promedios? Un carro viaja de A a B a 40 millas por hora y regresa a 60 millas por hora. ¿Cuál es su velocidad promedio para todo el viaje?

La respuesta correcta no es de 50 millas por hora, como tal vez se esperaría. Si se recuerda la relación distancia-tiempo promedio y sea x = distancia entre A y B, podremos simplificar una fracción compleja para encontrar la respuesta correcta.

$$\begin{aligned} \text{Velocidad promedio para todo el viaje} &= \frac{\text{Distancia total}}{\text{tiempo total}} \\ &= \frac{x + x}{\frac{x}{40} + \frac{x}{60}} \\ &= \frac{2x}{\frac{3x}{120} + \frac{2x}{120}} \\ &= \frac{2x}{\frac{5x}{120}} \\ &= 2x \cdot \frac{120}{5x} \\ &= 48 \end{aligned}$$

La velocidad promedio para el viaje completo es de 48 millas por hora.

Si un automóvil viaja a una velocidad promedio de 50 millas por hora durante dos horas, entonces viaja $50 \times 2 = 100$ millas. Éste es un ejemplo de la relación fundamental que existe entre la distancia, la velocidad y el tiempo:

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo},$$

dada por la fórmula $d = rt$. A su vez, si se resuelve ésta para r y t, se obtienen otras dos formas equivalentes. A continuación se presentan las tres formas.

Relación entre distancia, velocidad y tiempo

$$d = rt \qquad r = \frac{d}{t} \qquad t = \frac{d}{r}$$

Los ejemplos que siguen ilustran los usos de estas fórmulas.

EJEMPLO 7

(a) A nivel del mar y a una temperatura de 32° F, la velocidad del sonido es de 1088 pies por segundo. En estas condiciones, en 5 segundos el sonido viaja:

$$\underset{\text{Velocidad}}{1088} \times \underset{\text{Tiempo}}{5} = \underset{\text{Distancia}}{5440 \text{ pies.}}$$

Aquí se encontró la distancia, gracias a que conocíamos la velocidad y el tiempo, por medio de $d = rt$.

(b) El ganador de la primera carrera de las 500 millas de Indianápolis (en 1911) fue Ray Harroun, al volante de un Marmon UASP, con una velocidad promedio de 74.59 millas por hora. (*Fuente: The Universal Almanac, 1997*, John W. Wright, Editor General.) Completar las 500 millas le tomó:

$$\begin{matrix}\text{Distancia} \rightarrow \\ \text{Velocidad} \rightarrow\end{matrix} \frac{500}{74.59} = 6.70 \text{ horas} \quad \text{(con redondeo).} \quad \leftarrow \text{Tiempo}$$

Aquí, se encontró el tiempo una vez que nos fueron dadas la velocidad y la distancia, con $t = d/r$. Para convertir .70 horas a minutos hay que multiplicar por 60 para obtener $.70(60) = 42$ minutos. A Harroun le tomó 6 horas y 42 minutos terminar la carrera.

(c) En los Juegos Olímpicos de 2000 en Sydney, Australia, la nadadora holandesa Inge de Bruijn ganó la competencia de 50 metros en estilo libre femenino con un tiempo de 24.32 segundos. (*Fuente:* www.olympics.com)



Su velocidad promedio fue

$$\text{Velocidad} = \frac{\begin{matrix}\text{Distancia} \rightarrow \\ \text{Tiempo} \rightarrow\end{matrix} \frac{50}{24.32}}{} = 2.06 \text{ metros por segundo} \quad \text{(con redondeo).} \quad \blacksquare$$

Solución de problemas

El ejemplo anterior muestra cómo resolver una aplicación común de la fórmula $d = rt$. Se continuará utilizando el método de los seis pasos, pero ahora, en el paso 2, también se incluirán un dibujo y una tabla que ayudarán a plantear la ecuación.

EJEMPLO 8 Al mismo tiempo salen dos automóviles de Baton Rouge, Luisiana, y viajan hacia el este por la carretera interestatal 12. Uno viaja a velocidad constante de 55 millas por hora y el otro a una velocidad, también constante, de 63 millas por hora. ¿En cuántas horas la distancia entre ellos será de 24 millas?

Paso 1: **Leer** el problema. Se trata de calcular el tiempo en el que la distancia entre los automóviles será de 24 millas.

Paso 2: **Asignar una variable.** Como se busca el tiempo, se hará que t = número de horas que transcurre hasta que la distancia entre los autos sea de 24 millas. El dibujo que se aprecia en la figura 4 ilustra lo que ocurre en el problema.

Ahora, construya una tabla como la siguiente. Llénela con la información que se da en el problema, y denote con t el tiempo que viaja cada automóvil. Multiplique la velocidad por el tiempo para obtener las expresiones para las distancias que viajan.



	Velocidad × Tiempo = Distancia		
Auto más rápido	63	t	$63t$
Auto más lento	55	t	$55t$

La diferencia es 24 millas.

FIGURA 4

Las cantidades $63t$ y $55t$ representan las dos distancias. Consulte la figura 4 y observe que la diferencia entre la distancia más grande y la más pequeña es de 24 millas.

Paso 3: **Escriba una ecuación.**

$$63t - 55t = 24$$

Paso 4: **Resuelva.**

$$8t = 24 \qquad \text{Agrupar términos semejantes.}$$
$$t = 3 \qquad \text{Dividir entre 8.}$$

Paso 5: **Enunciar la respuesta.** A los automóviles les tomará 3 horas llegar a una separación de 24 millas.

Paso 6: **Comprobar.** Después de 3 horas, el carro más rápido habrá viajado $63 \times 3 = 189$ millas, y el más lento lo habrá hecho $55 \times 3 = 165$ millas. Como $189 - 65 = 24$, se satisfacen las condiciones del problema. ■

En problemas que implican movimiento como el del ejemplo 8, una vez que se haya completado dos partes de la información de cada fila de la tabla, la tercera debe completarse en forma automática utilizando la expresión apropiada de la fórmula que relaciona distancia, velocidad y tiempo. Basado en el dibujo, establezca la ecuación con la información de la tabla.

7.2 EJERCICIOS

Decida si cada uno de los siguientes enunciados se traduce en una expresión o una ecuación.

1. la suma de un número y 6
2. 75% de un número
3. $\frac{2}{3}$ de un número es 12.
4. 7 es 3 más que un número.
5. la razón de un número y 5
6. 15 dividido entre un número es 3.
7. Vuelva a resolver el ejemplo 6, haga que la variable represente el número de billetes de 5 dólares. ¿La respuesta del problema es la misma?
8. Explique por qué $13 - x$ *no* es la traducción correcta de la frase *13 menos que cierto número.*

Traduzca cada frase verbal en una expresión matemática. Utilice x *para representar el número desconocido.*

9. un numero disminuido en 18

10. 12 más que un número

11. el producto de 9 menos que un número y 6 más que dicho número

12. el cociente de un número y 6

13. la razón de 12 y un número distinto de 0

14. $\frac{6}{7}$ de un número

15. Escriba unas cuantas oraciones que describan los seis pasos para resolver problemas.

16. ¿Cuál de las siguientes *no* es una traducción válida de *30% de un número*?

A. $.30x$ **B.** $.3x$ **C.** $\frac{3x}{10}$ **D.** .30

Sea que x *represente un número y escriba una ecuación para cada oración. No las resuelva.*

17. Si el cociente de un número y 6 se suma al doble del número, el resultado es 8 menos que el número.

18. Si el producto de un número y –4 se resta del número, el resultado es 9 más que el número.

19. Cuando $\frac{2}{3}$ de un número se resta de 12, el resultado es 10.

20. Si el 75% de un número se suma a 6, el resultado es 3 más que el número.

Use los métodos de los ejemplos 1 y 2, o el suyo propio, para resolver cada problema. (En el ejercicio 21 se bosqueja el método de los seis pasos.)

21. ***Las cifras de los que compran libros*** En el último año, los dos lugares más populares donde los lectores adquirieron sus libros fueron las grandes cadenas de librerías y las librerías independientes o pequeñas cadenas. En una muestra de compradores, los que acudieron a una cadena grande fueron 70 más que los que compraron en una pequeña cadena o una librería independiente. Un total de 442 lectores los obtuvieron en estos dos tipos de tienda. Complete los pasos para la solución de problemas a fin de determinar cuántas personas compraron en cada tipo de librería. (*Fuente:* Book Industry Study Group.)

Paso 1: Sea x = número de compradores en una cadena grande de librerías

Paso 2: Entonces, $x - 70 =$ _____ .

Paso 3: _____ + _____ = 442

Paso 4: $x =$ _____

Paso 5: Hubo _____ compradores en librerías de cadenas grandes y _____ compradores en cadenas pequeñas o librerías independientes.

Paso 6: El número de _____ fue _____ más que el número de _____ y el número total de estos dos tipos de librería fue _____ .

22. ***Ingresos de conciertos*** La banda de rock U2 generó los ingresos máximos en la temporada de 2001. U2 y el segundo lugar, *NSYNC, juntos vendieron boletos por $196.5 millones. Si *NSYNC vendió $22.9 millones menos que U2, ¿cuánto generó cada grupo? (*Fuente:* Pollstar.)



23. ***Ventas de automóviles*** El Toyota Camry fue el auto de pasajeros más vendido en Estados Unidos en el año 2000, seguido por el Honda Accord. Las ventas de este último fueron por 15,000 menos que las del Toyota Camry y se vendió un total de 828,000 unidades de ambos modelos. ¿Qué cantidad se vendió de cada vehículo? (*Fuente:* Ward's Communications.)

24. ***Resultados de la NBA*** En la temporada regular 2001-2002 de la NBA, los Sacramento Kings ganaron 2 partidos menos del triple de los que perdieron. Los Kings jugaron 82 partidos. ¿Cuántos triunfos y derrotas tuvo el equipo? (*Fuente:* nba.com)

25. ***Imparables de Ruth y Hornsby*** Babe Ruth y Rogers Hornsby fueron dos grandes bateadores. Juntos anotaron 5803 hits durante sus carreras. Hornsby hizo 57 más que Ruth. ¿Cuántos realizó cada uno? (*Fuente:* David S. Neft y Richard M. Cohen, *The Sports Encyclopedia: Baseball, 1997.* St. Martins Griffin; Nueva York.)

26. ***Votos en la campaña presidencial de 2000*** En la elección presidencial de 2000, George W. Bush y Al Gore obtuvieron juntos 537 votos electorales. Bush obtuvo 5 votos más que Gore. ¿Cuántos votos tuvo cada candidato? (*Fuente: World Almanac and Book of Facts,* 2002.)

Ingresos por renta de videos* vs. *ingresos por su venta
Consulte la gráfica adjunta para responder las preguntas de los ejercicios 27 y 28.



Fuente: Paul Kagan Associates, Inc.

27. En 1990, el ingreso por renta de videos fue $.27 mil millones más que el doble de los ingresos provenientes de su venta. Juntos, ambos conceptos alcanzaron la cantidad de $9.81 mil millones. ¿De cuánto fue el ingreso por cada origen?

28. En un año posterior, las rentas de videos fueron $.15 mil millones más que las ventas. En esa ocasión, los ingresos combinados fueron de $14.83 mil millones. ¿En qué año sucedió y cuál fue el ingreso de cada fuente?

29. ***Cine al aire libre*** El número de cines al aire libre en Estados Unidos ha disminuido en forma consistente desde la década de 1960. En 2001, California y Nueva York fueron dos de los estados en los que quedaban más cines al aire libre. California tenía 11 más que Nueva York y en total había 107 en ambos estados. ¿Cuántos cines al aire libre había en cada estado? (*Fuente:* National Association of Theatre Owners).

30. ***Debes ver televisión*** La noche del jueves es la noche en que se ve más televisión a través de las cadenas más importantes (ABC, CBS, NBC y Fox): hay 20 millones más de televidentes que el sábado en la noche, momento en que menos personas la ven. El total de ambas noches es de 102 millones de televidentes. ¿Cuántos de ellos hay en cada noche? (*Fuente:* Nielsen Media Research.)



Use el método que se estudió en el texto, o el suyo propio, para resolver cada problema.

31. ***Mezcla ácida*** ¿Cuánto ácido puro hay en 250 mililitros de una solución al 14%?

32. ***Mezcla de alcohol*** ¿Cuánto alcohol puro hay en 150 litros de una solución al 30%?

33. ***Interés ganado*** Si se invierten $10,000 durante un año, al 3.5% de interés simple, ¿cuánto se gana en intereses?

34. ***Interés ganado*** Si se invierten $25,000 al 3% simple durante 2 años, ¿qué cantidad de intereses se gana?

35. ***Valor monetario de monedas*** ¿Cuál es el valor monetario de 283 monedas de 5 centavos?

36. ***Valor monetario de monedas*** ¿Cuál es el valor monetario de 35 monedas de medio dólar?

Use el método del ejemplo 4, o el suyo propio, para resolver cada problema.

37. ***Mezcla de alcohol*** En una clase de química deben mezclarse 12 litros de una solución de alcohol al 12% con otra al 20% a fin de obtener una solución al 14%. ¿Cuántos litros se necesita de la solución al 20%?

Concentración	Litros de solución	Litros de alcohol
12%	12	
20%		
14%		

38. ***Mezcla de alcohol*** ¿Cuántos litros de una solución de alcohol al 10% deben mezclarse con 40 litros de otra al 50% para obtener una solución al 40%?

Concentración	Litros de solución	Litros de alcohol
	x	
	40	
40%		

39. ***Mezcla de alcohol en un aerosol de primeros auxilios*** El 78% del volumen de un aerosol de primeros auxilios, que está a la venta, es alcohol. Si el fabricante tiene 50 litros del aerosol que contienen 70% de alcohol, ¿cuánto alcohol puro debe agregarse a fin de que la mezcla resultante contenga el 78% de alcohol que se requiere? (*Una pista:* El alcohol puro es alcohol al 100%.)

40. ***Mezcla de insecticida*** ¿Cuánta agua debe agregarse a 3 galones de una solución de insecticida al 4% a fin de reducir ésta al 3%? (*Una pista:* El agua es insecticida al 0%.)

41. ***Mezcla anticongelante*** Es necesario que en el radiador de cierto automóvil haya una solución anticongelante al 40%. Ahora, el radiador contiene 20 litros de solución al 20%. ¿Cuántos litros de ésta deben drenarse y reemplazarse con anticongelante al 100% para obtener la concentración que se desea? (*Una pista:* El número de litros que se drene es igual al número de litros que se reemplace.)

42. ***Mezcla química*** Un tanque contiene 80 litros de una solución química. Actualmente, la solución tiene una concentración de 30%. ¿Cuánto de ésta debe drenarse y sustituirse con una solución al 70% a fin de obtener una concentración final al 40%?

Use el método del ejemplo 5, o el suyo propio, para resolver cada problema.

43. ***Inversiones a tasas diferentes*** Dezneil Jones ganó $12,000 el año pasado por impartir clases de tenis. Invirtió una parte de esa cifra al 3% de interés simple, y el resto al 4%. Por concepto de intereses ganó un total de $440. ¿Cuánto invirtió con cada tasa?

Porcentaje en forma decimal	Cantidad invertida	Interés en un año
.03		
.04		
	12,000	440

44. ***Inversiones a tasas diferentes*** Cherelle Allen ganó $60,000 en una máquina tragamonedas en Las Vegas. Invirtió una parte al 2% de interés simple, y el resto al 3%. Ganó un total de $1600 en intereses. ¿De cuánto fue su inversión con cada tasa?

Porcentaje en forma decimal	Cantidad invertida	Interés en un año
.02	x	$.02x$
	$60{,}000 - x$	
		1600

45. ***Inversiones a tasas diferentes*** Amado Carrillo invirtió algún dinero al 4.5% de interés simple, y al 3% invirtió $1000 menos que el doble de aquella cantidad. Su ingreso anual total por los intereses fue de $1020. ¿Cuál fue su inversión con cada tasa?

46. ***Inversiones a tasas diferentes*** Kari Heen invirtió algún dinero al 3.5% de interés simple y $5000 más que el triple de esa cantidad al 4%. Ganó $1440 por concepto de intereses. ¿De cuánto fue la inversión que hizo con cada tasa?

47. ***Inversiones a tasas diferentes*** Ed Moura tiene $29,000 invertidos en acciones que pagan el 5%. ¿Cuánto dinero adicional debe invertir en certificados de depósito que generan el 2%, de modo que el rendimiento promedio de las dos inversiones sea el 3%?

48. ***Inversiones a tasas diferentes*** Terry McGinnis depositó $15,000 en una cuenta que paga el 6%. ¿Cuánto dinero adicional debe depositar al 4% de modo que el rendimiento promedio de las dos inversiones sea de 5.5%?

Use el método del ejemplo 6, o el suyo propio, para resolver cada problema.

49. ***Mezcla de monedas*** Sam Abo-zahrah tiene una caja de monedas que usa cuando juega póquer con sus amigos. Actualmente la caja contiene 44 de las siguientes denominaciones: centavos, 10 centavos y 25 centavos. El número de monedas de centavo es igual al número de las de 10 centavos y el valor total es de $4.37. ¿Cuántas monedas de cada denominación tiene en la caja?

Número de monedas	Denominación	Valor
x	.01	$.01x$
x		
	.25	

50. ***Mezcla de monedas*** Amber Allen encontró algunas monedas entre los cojines de su sofá. Había tantas monedas de cinco centavos como de 25 centavos y el doble de 50 centavos que de 25. Si entre todas encontró $2.60, ¿cuántas había de cada denominación?

Número de monedas	Denominación	Valor
x	.05	$.05x$
x		
$2x$	.25	

51. ***Asistencia a una obra escolar*** La producción escolar de *Our Town* fue un gran éxito. Se vendieron 410 boletos en la noche de la primera presentación. Los estudiantes pagaron $3 por cada uno, en tanto que los que no lo eran pagaron $7 cada uno. Si se obtuvo un total de $1650, ¿cuántos estudiantes y cuántos que no lo eran asistieron?

52. ***Asistencia a un concierto*** A un concierto de Boston Pops acudió un total de 550 personas. Los boletos de piso costaron $40 cada uno, mientras que los de galería tuvieron un costo de $28. Si se obtuvo un total de $20,800, ¿cuántos boletos se vendieron de cada tipo?

53. ***Asistencia a un evento deportivo*** En los juegos de los Sacramento Monarchs en su localidad, los asientos de la fila 1 cuestan $35, y los de la fila 2, $30. Se vendieron los 105 asientos en la temporada. El total de ingresos fue de $3420. ¿Cuántos asientos de cada tipo se vendieron? (*Fuente:* Sacramento Monarchs.)

54. ***Mezcla de monedas*** En el siglo XIX, Estados Unidos emitió monedas de dos y tres centavos. Lee Ann Spahr tiene el triple de monedas de tres centavos que de dos centavos, y el valor nominal de éstas es de $1.21. ¿Cuántas monedas de cada denominación tiene?

55. ***Mezcla de monedas*** Dave Bowers colecciona monedas de oro de Estados Unidos. Tiene una colección de 80. Algunas son de $10 y el resto de $20. Si el valor nominal de las monedas es de $1060, ¿cuántas tiene de cada denominación?



56. En el siglo XIX, Estados Unidos acuñó monedas de medio centavo. ¿Qué número decimal (en dólares) representaría esta denominación?

Carreras de autos *En los ejercicios 57 a 60, encuentre el tiempo basado en la información que se proporciona. Use una calculadora y redondee las respuestas al milésimo más cercano.* (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts,* 2002.)

	Evento y año	Participante	Distancia	Velocidad
57.	Indianápolis 500, 2001	Helio Castroneves (Reynard-Honda)	500 millas	131.294 mph
58.	Daytona 500, 2001	Michael Waltrip (Chevrolet)	500 millas	161.794 mph
59.	Indianápolis 500, 1980	Johnny Rutherford (Hy-Gain McLaren/Goodyear)	255 millas*	148.725 mph
60.	Indianápolis 500, 1975	Bobby Unser (Jorgensen Eagle)	435 millas*	149.213 mph

*interrumpida por lluvia

Resultados olímpicos *En los ejercicios 61 a 64, calcule la velocidad basado en la información que se proporciona. Use una calculadora y redondee las respuestas al centésimo más cercano. Todos los eventos son de las Olimpiadas de 2000 con sede en Sydney, Australia.* (*Fuente:* http://espn.go.com/oly/summer00)

	Evento	Participante	Distancia	Tiempo
61.	100 m con obstáculos, mujeres, Kazajstán	Olga Shishigina, Kazajstán	100 m	12.65 segundos
62.	400 m con obstáculos, mujeres, Rusia	Irina Privalova, Rusia	400 m	53.02 segundos
63.	400 m con obstáculos, hombres, Estados Unidos	Angelo Taylor, EUA	400 m	47.50 segundos
64.	400 m con obstáculos, hombres, Estados Unidos	Michael Johnson, EUA	400 m	43.84 segundos

65. ***Distancia entre ciudades*** Un conductor promedió 53 millas por hora y le tomó 10 horas viajar de Memphis a Chicago. ¿Cuál es la distancia entre estas dos metrópolis?

66. ***Distancia entre ciudades*** Un aeroplano pequeño viajó de Varsovia a Roma a un promedio de 164 millas por hora. El viaje le llevó dos horas. ¿Cuál es la distancia entre estas dos capitales?

67. Suponga que un automóvil promedia 45 millas por hora y viaja durante 30 minutos. ¿La distancia recorrida es de $45 \times 30 = 1350$ millas? Si no lo fuera, explique por qué y diga la distancia correcta.

68. ¿Cuál de las elecciones siguientes es la mejor *estimación* de la velocidad promedio de un viaje de 405?

A. 50 millas por hora **B.** 30 millas por hora
C. 60 millas por hora **D.** 40 millas por hora

Use el método del ejemplo 8, o el suyo propio, para resolver cada problema.

69. *Tiempos de viaje de trenes* Un tren sale de Little Rock, Arkansas, y viaja al norte a 85 kilómetros por hora. Otro tren sale al mismo tiempo y se dirige al sur a 95 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que los separe una distancia de 315 kilómetros?

	Velocidad	Tiempo	Distancia
Primer tren	85	t	
Segundo tren			

70. *Tiempos de viaje de barcos de vapor* Dos barcos de vapor dejan un puerto fluvial al mismo tiempo, en direcciones opuestas. Cada uno viaja a 22 millas por hora. ¿Cuánto tiempo les tomará estar a 110 millas uno del otro?

	Velocidad	Tiempo	Distancia
Primer barco		t	
Segundo barco	22		

71. *Tiempos de viaje de trasbordo* Nancy y Mark trasbordan para ir al trabajo en direcciones opuestas. Nancy sale de casa a las 8:00 A.M. y viaja a 35 millas por hora. Mark sale a las 8:15 A.M. y se mueve a 40 millas por hora. ¿A qué hora estarán separados por una distancia de 140 millas?

72. *Tiempos de viaje de ciclistas* Jeff sale de su casa a las 8:30 A.M. en bicicleta y viaja a un promedio de 5 millas por hora. Su esposa, Joan, sale a las 9:00 A.M., por la misma ruta y a 8 millas por hora, en promedio. ¿A qué hora alcanzará Joan a Jeff?

73. *Distancia recorrida rumbo al trabajo* Cuando Trini conduce su auto al trabajo, el recorrido le toma 30 minutos. Si viaja en autobús, le lleva 45 minutos. La velocidad promedio del autobús es de 12 millas por hora menos que su velocidad cuando maneja. Encuentre la distancia que recorre rumbo al trabajo.

74. *Distancia a la escuela* Si se va en bicicleta, Latoya llega a su escuela en 15 minutos. Caminar le toma 45 minutos. Cuando camina, su velocidad es de 10 millas por hora menos que su velocidad en bicicleta. ¿Qué distancia recorre camino de su escuela?

75. *Tiempo recorrido en una embarcación* Una embarcación en el río Mississippi viajó de Baton Rouge a Nueva Orleans con una escala en White Castle. En la primera parte de su viaje, el bote se movió a una velocidad promedio de 20 millas por hora. De White Castle a Nueva Orleans la velocidad fue de 15 millas por hora. Todo el recorrido fue de 100 millas. ¿Cuánto tiempo duraría el viaje completo si las dos partes se hicieran en el mismo número de horas?

76. *Tiempo recorrido en una visita* Steve sale de Nashville para visitar a su primo David en Napa, a 80 millas. Viaja a una velocidad promedio de 50 millas por hora. Media hora después, David sale para visitar a Steve viajando a una velocidad promedio de 60 millas por hora. ¿Cuánto tiempo habrá pasado después de la partida de David, cuando se encuentren?

7.3 Razón, proporción y variación

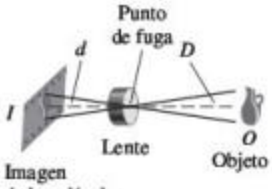
Razón Uno de los conceptos matemáticos que se usa con más frecuencia en la vida cotidiana es la razón. El promedio de bateo de un pelotero, en realidad, es una razón. La pendiente o inclinación del techo de una edificación se expresa como una razón. Las razones son una manera de comparar dos números o cantidades.

Razón

Una **razón** es el cociente de dos cantidades. La razón del número a al número b se escribe como sigue:

$$a \text{ a } b, \qquad \frac{a}{b} \qquad \text{o} \qquad a:b.$$

Si las razones se usan para comparar unidades de medida, las unidades deben ser las mismas. Esto se ilustra en el ejemplo 1.



Cuando se mira una carretera o vía férrea recta a todo lo largo de su longitud, pareciera que se angosta hasta desvanecerse en la distancia. El punto en el que sus lados parecen tocarse se denomina **punto de fuga**. En el lente de una cámara ocurre lo mismo, como se aprecia en la figura. Suponga que I representa la longitud de la imagen, O la longitud del objeto, d la distancia entre el lente y la película y D la distancia de la lente al objeto. Entonces:

$$\frac{\text{Longitud de la imagen}}{\text{Longitud del objeto}} = \frac{\text{Distancia a la imagen}}{\text{Distancia al objeto}}$$

o bien, $\dfrac{I}{O} = \dfrac{d}{D}$.

Dada la longitud de la imagen en la película y su distancia desde el lente, entonces la longitud del objeto determina cuán lejos debe estar el lente del objeto para que ajuste en la película.

EJEMPLO 1 Escriba una razón para cada frase escrita.

(a) la razón de 5 horas a 3 horas

Esta razón se escribe como $5/3$.

(b) la razón de 5 horas a 3 días

Primero hay que convertir 3 días a horas: $3 \text{ días} = 3 \cdot 24 = 72 \text{ horas}$. Por tanto, la razón de 5 horas a 3 días es de $5/72$. ■

Proporción Ahora se definirá un tipo especial de ecuación llamada *proporción*.

Proporción

Una **proporción** es un enunciado que afirma que dos razones son iguales.

Por ejemplo,

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

es una proporción que establece que las razones de $3/4$ y $15/20$ son iguales. En la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

a, b, c y d son los **términos** de la proporción. Los términos a y d se denominan **extremos** y b y c se llaman **medios**. La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se lee "a es a b como c es a d". Si se comienza por multiplicar ambos lados de esta proporción por el denominador común bd, resulta:

$$bd \cdot \frac{a}{b} = bd \cdot \frac{c}{d}$$

$$ad = bc.$$

Es decir, el producto de los extremos es igual al producto de los medios. También se obtienen los productos ad y bc si se multiplica en forma diagonal, así:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad bc, \quad ad$$

Esto se denomina **multiplicación cruzada** y ad y bc se llaman **productos cruzados**.

Productos cruzados

Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces los productos cruzados ad y bc son iguales.

Asimismo, si $ad = bc$, entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ (en tanto $b \neq 0$ y $d \neq 0$).

De la regla que se dio en la página 340, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$. Sin embargo, si $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, entonces $ad = cb$, o $ad = bc$. Esto significa que las dos proporciones son equivalentes y que:

$$\text{la proporción } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ también puede escribirse como } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

A veces es más conveniente trabajar con una forma que con la otra.

En una proporción se usan cuatro números. Si se conocen tres números cualesquiera de ellos, es posible encontrar el cuarto.

EJEMPLO 2 Resuelva cada proporción.

(a) $\frac{63}{x} = \frac{9}{5}$

Los productos cruzados deben ser iguales.

$$\begin{aligned} 63 \cdot 5 &= 9x && \text{Productos cruzados} \\ 315 &= 9x \\ 35 &= x && \text{Dividir entre 9.} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{35\}$.

(b) $\frac{8}{5} = \frac{12}{r}$

$$\begin{aligned} 8r &= 5 \cdot 12 && \text{Hacer iguales los productos cruzados.} \\ 8r &= 60 \\ r &= \frac{60}{8} = \frac{15}{2} && \text{Dividir entre 8; expresarlo en los términos mínimos.} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{15}{2}\right\}$. ■

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación

$$\frac{m-2}{5} = \frac{m+1}{3}.$$

Encuentre los productos cruzados e iguálelos.

$$\begin{aligned} 3(m-2) &= 5(m+1) && \text{Asegúrese de usar paréntesis.} \\ 3m - 6 &= 5m + 5 && \text{Propiedad distributiva} \\ 3m &= 5m + 11 && \text{Sumar 6.} \\ -2m &= 11 && \text{Restar } 5m. \\ m &= -\frac{11}{2} && \text{Dividir entre } -2. \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{11}{2}\right\}$. ■

Si bien el método del producto cruzado es útil para resolver ecuaciones como las de los ejemplos 2 y 3, no puede usarse en forma directa si hay más de un término en cualquiera de los lados. Por ejemplo, no es posible emplearlo para resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{4}{x} + 3 = \frac{1}{9},$$

porque hay dos términos en el lado izquierdo.



EJEMPLO 4 Los biólogos usan el álgebra para estimar el número de peces en un lago. Primero capturan una muestra de peces y marcan a cada espécimen con una etiqueta inofensiva. Unas semanas después capturan una muestra similar de los peces de las mismas áreas del lago y determinan la proporción de peces marcados previamente que hay en la muestra nueva. Se calcula la población total de peces con base en la suposición de que la proporción de peces marcados en la muestra nueva es la misma que la proporción de peces marcados en el lago entero.

Suponga que el 1 de mayo los biólogos marcaron 100 peces. Regresan el 1 de junio y toman una muestra nueva de 400 peces, entre los que había 5 marcados. Calcule el número de peces que hay en el lago.

Sea que x representa el número de peces en el lago. Se plantea una proporción y se resuelve.

Peces marcados el 1 de mayo → $\frac{300}{x} = \frac{5}{400}$ ← Peces marcados en la muestra del 1 de junio

Total de peces en el lago → ← Número total en la muestra del 1 de junio

$$5x = 120{,}000$$

$$x = 24{,}000$$

Aproximadamente hay 24,000 peces en el lago. ■

Para establecer *precios por unidad* —decidir cuál de los distintos tamaños en que se ofrece un artículo produce el mejor precio unitario— se usan proporciones. Suponga que se compran 36 onzas de concentrado para panqueques en $3.89. Para calcular el precio unitario se plantea y resuelve una proporción.

$$\frac{36 \text{ onzas}}{1 \text{ onza}} = \frac{3.89}{x}$$

$$36x = 3.89 \quad \text{Productos cruzados}$$

$$x = \frac{3.89}{36} \quad \text{Dividir entre 36.}$$

$$x \approx .108 \quad \text{Se usa una calculadora.}$$

Así, el precio por 1 onza es $.108 o casi 11 centavos. Observe que el precio por unidad es la razón del costo por 36 onzas, $3.89, al número de onzas, 36, lo que significa que el precio por unidad, por un artículo, se obtiene con la división del costo entre el número de unidades.

Tamaño	Precio
36 onzas	$3.89
24 onzas	$2.79
12 onzas	$1.89

EJEMPLO 5 Además del tamaño de 36 onzas que ya se analizó, el supermercado elabora otros dos tamaños de una marca conocida de almíbar para panqueques, cuyos precios se muestran en la tabla. ¿Cuál tamaño es una mejor compra? Es decir, ¿cuál es el tamaño con el precio por unidad más bajo?

Para encontrar la mejor compra, hay que dividir el precio entre el número de unidades para obtener el precio por onza. Cada resultado de los que aparecen en la

tabla siguiente se encontró por medio de una calculadora y el redondeo de la respuesta a tres decimales.

Tamaño	Costo por unidad (dólares por onza)	
36 onzas	$\frac{\$3.89}{36} = \$.108$	← La mejor compra
24 onzas	$\frac{\$2.79}{24} = \$.116$	
12 onzas	$\frac{\$1.89}{12} = \$.158$	

Como el tamaño de 36 onzas produce el precio por unidad más bajo, sería la mejor compra. (*Cuidado:* A veces el contenedor más grande *no* produce el precio por unidad más bajo.) ■

Número de cuartos	Costo del trabajo
1	$ 22.50
2	$ 45.00
3	$ 67.50
4	$ 90.00
5	$112.50

Variación Suponga que un servicio de limpieza cobra $22.50 por lavar una alfombra por habitación. La tabla al margen muestra la relación entre el número de habitaciones que se limpian y el costo del trabajo total para un número de 1 a 5.

Si se divide el costo del trabajo entre el número de habitaciones, en cada caso se obtiene el cociente o razón, 22.50 (dólares por habitación). Suponga que x representa el número de habitaciones y que y es el costo de la limpieza de dicho número. Entonces, la relación entre x y y está dada por la ecuación

$$\frac{y}{x} = 22.50$$

o bien

$$y = 22.50x.$$

Esta relación entre x y y es un ejemplo de *variación directa.*

Variación directa

y varía directamente con x, o lo que es lo mismo, **es directamente proporcional a x**, si existe una constante k diferente de 0, tal que

$$y = kx$$

o en forma equivalente,

$$\frac{y}{x} = k.$$

La constante k es un valor numérico denominado **constante de variación.**

EJEMPLO 6 Suponga que y varía directamente con x, y que $y = 50$ cuando $x = 20$. Encuentre el valor de y cuando $x = 14$.

Como y varía directamente con x, existe una constante k tal que $y = kx$. Se encuentra k si se reemplaza y con 50 y x con 20.

$$y = kx$$
$$50 = k \cdot 20$$
$$\frac{5}{2} = k$$

Como $y = kx$ y $k = 5/2$,

$$y = \frac{5}{2}x.$$

Ahora se determina y cuando $x = 14$.

$$y = \frac{5}{2} \cdot 14 = 35$$

El valor de y es 35 cuando $x = 14$. ■

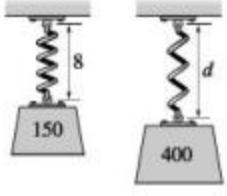


FIGURA 5

EJEMPLO 7 La ley de Hooke para un resorte elástico establece que la distancia que éste se alarga es directamente proporcional a la fuerza que se aplica. Si una fuerza de 150 libras provoca que cierto resorte se alargue 8 centímetros, ¿cuánto alargará al resorte una fuerza de 400 libras? Consulte la figura 5.

Si d es la longitud que el resorte se alarga y f la fuerza que se aplica, entonces $f = kf$ para cierta constante k. Como una fuerza de 150 libras alarga 8 centímetros al resorte,

$$d = kf \qquad \text{Fórmula}$$
$$8 = k \cdot 150 \qquad d = 8,\ f = 150$$
$$k = \frac{8}{150} = \frac{4}{75}, \qquad \text{Encontrar } k.$$

y $d = \frac{4}{75}f$. Para una fuerza de 400 libras,

$$d = \frac{4}{75}(400) = \frac{64}{3}. \qquad \text{Se hace } f = 400.$$

El resorte se alargará 64/3 centímetros si se aplica una fuerza de 400 libras. ■

En resumen, para resolver un problema de variación se siguen estos pasos:

Solución de un problema de variación

Paso 1: Escribir la ecuación de variación.

Paso 2: Sustituir los valores iniciales y resolver para k.

Paso 3: Volver a escribir la ecuación de variación con el valor de k que se obtuvo en el paso 2.

Paso 4: Sustituir los valores restantes, resolver para la incógnita y encontrar la respuesta que se requiere.

En ciertos casos, una cantidad variará directamente con la *potencia* de otra.

Variación directa con la potencia

y* varía directamente como la *n*-ésima potencia de *x si existe un número real k tal que

$$y = kx^n.$$



$A = \pi r^2$

Un ejemplo de variación directa como una potencia involucra el área de un círculo. La fórmula para el área de un círculo es la siguiente:

$$A = \pi r^2,$$

donde π es la constante de variación y el área varía en forma directa con el cuadrado del radio.

EJEMPLO 8 La distancia que un cuerpo cae a partir del reposo varía de manera directa con el cuadrado del tiempo durante el que cae (ignoraremos la resistencia del aire). Si un paracaidista cae 64 pies en 2 segundos, ¿cuánto habrá caído pasados 8 segundos?

Paso 1: Si d representa la distancia que el paracaidista cae y t el tiempo que esto le toma, entonces d es una función de t, y

$$d = kt^2$$

para alguna constante k.

Paso 2: Para encontrar el valor de k nos basamos en el hecho de que el objeto cae 64 pies en 2 segundos.

$$\begin{aligned} d &= kt^2 && \text{Fórmula} \\ 64 &= k(2)^2 && \text{Sea } d = 64 \text{ y } t = 2. \\ k &= 16 && \text{Encontrar } k. \end{aligned}$$

Paso 3: Con este resultado, la ecuación de variación se convierte en:

$$d = 16t^2.$$

Paso 4: Ahora, sea $t = 8$ para encontrar el número de pies que el paracaidista cae en 8 segundos.

$$d = 16(8)^2 = 1024 \qquad \text{Sea } t = 8.$$

El paracaidista caerá 1024 pies en 8 segundos. ■

En la variación directa donde $k > 0$, cuanto más incrementa x, también incrementa y, y en forma similar, si x disminuye, también lo hace y. Otro tipo de variación es la *variación inversa*.

Variación inversa

y varía inversamente con x si existe un número real k tal que

$$y = \frac{k}{x},$$

o de manera equivalente,

$$xy = k.$$

Asimismo, **y varía inversamente con la n-ésima potencia de x** si existe un número real k tal que

$$y = \frac{k}{x^n}.$$

Johann Kepler (1571-1630) estableció la importancia de la elipse en 1609 cuando descubrió que las órbitas de los planetas que giran alrededor del Sol son elípticas, no circulares. Las órbitas de los planetas son casi circulares.

El cometa Halley, que se ha estudiado desde el año 467 a.C., sigue una órbita elíptica que es alargada y angosta y tiene un eje mucho mayor que el otro. Este cometa recibió su nombre por el astrónomo y matemático Edmund Halley (1656-1742), quien predijo su regreso después de observarlo en 1682. El cometa aparece, en forma regular, una vez cada 76 años.

EJEMPLO 9 El peso de un objeto sobre la Tierra varía inversamente con el cuadrado de la distancia a que está del centro de ésta. Un vehículo espacial con órbita elíptica tiene una distancia máxima desde el centro de la Tierra (apogeo) de 6700 millas. Su distancia mínima desde el centro (perigeo) es 4090 millas. Vea la figura 6 (no está a escala). Si un astronauta dentro del vehículo pesa 57 libras en el apogeo, ¿cuánto pesará en el perigeo?

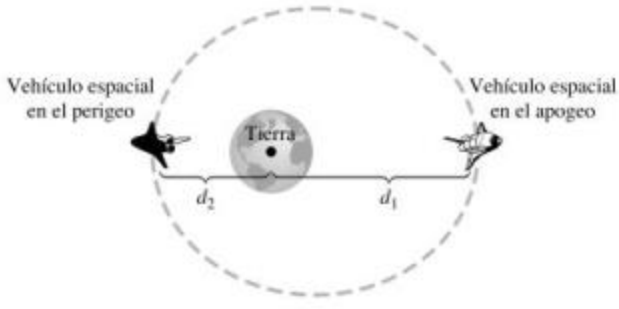


FIGURA 6

Si w es el peso y d la distancia desde el centro de la Tierra, entonces

$$w = \frac{k}{d^2}$$

para una determianda constante k. En el apogeo, el astronauta pesa 57 libras y la distancia desde el centro de la Tierra es de 6700 millas. Utilice estos valores para calcular k.

$$57 = \frac{k}{(6700)^2} \qquad \text{Sea } w = 57 \text{ y } d = 6700.$$

$$k = 57(6700)^2$$

Entonces, el peso en el perigeo con $d = 4090$ millas es

$$w = \frac{57(6700)^2}{(4090)^2} \approx 153 \text{ libras.} \qquad \text{Use una calculadora.}$$ ■

Es común que una variable dependa de otras. Por ejemplo, si una variable cambia con el producto de otras (quizá elevadas a algunas potencias), se dice que la primera de ellas **varía en forma conjunta** con las demás.

EJEMPLO 10 La resistencia de una viga rectangular varía en forma conjunta con el ancho y el cuadrado de su profundidad. Si la resistencia de una viga de 2 pulgadas de ancho por 10 de profundidad es de 1000 libras por pulgada cuadrada, ¿cuál es la resistencia de una viga de 4 pulgadas de ancho y 8 de profundidad?

Si S representa la resistencia, w el ancho y d la profundidad, entonces

$$S = kwd^2$$

para una constante k. Como $S = 1000$ si $w = 2$ y $d = 10$,

$$1000 = k(2)(10)^2. \qquad \text{Sea } S = 1000,\ w = 2 \text{ y } d = 10.$$

Al resolver esta ecuación para k se obtiene

$$1000 = k \cdot 2 \cdot 100$$
$$1000 = 200k$$
$$k = 5,$$

por tanto, $S = 5wd^2$.

Se encuentra S cuando $w = 4$ y $d = 8$, por sustitución en $S = 5wd^2$.

$$S = 5(4)(8)^2 = 1280 \qquad \text{Sea } w = 4 \text{ y } d = 8.$$

La resistencia de la viga es 1280 libras por pulgada cuadrada. ■

Hay muchas combinaciones de variación directa e inversa. El ejemplo final ilustra un problema frecuente de **variación combinada**.



Carga = 8 toneladas métricas

FIGURA 7

EJEMPLO 11 La carga máxima que puede soportar una columna con sección circular varía en forma directa con la cuarta potencia del diámetro de ésta e inversamente proporcional con el cuadrado de su altura. Una columna de 9 metros de altura y diámetro de 1 metro, soportará 8 toneladas métricas. Vea la figura 7. ¿Cuántas toneladas métricas soportará una columna de 12 metros de alto y diámetro de 2/3 de metro?

Sea que L represente la carga, d el diámetro y h la altura. Entonces,

$$L = \frac{kd^4}{h^2}. \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{La carga varía directamente con la cuarta potencia del diámetro.} \\ \leftarrow \text{La carga varía inversamente con el cuadrado de la altura.} \end{array}$$

Ahora se determina k. Sean $h = 9$, $d = 1$ y $L = 8$.

$$8 = \frac{k(1)^4}{9^2} \qquad h = 9,\ d = 1,\ L = 8$$

$$8 = \frac{k}{81}$$

$$k = 648$$

Se sustituye k por 648 en la primera ecuación, queda:

$$L = \frac{648d^4}{h^2}$$

Ahora se encuentra L cuando $h = 12$ y $d = 2/3$.

$$L = \frac{648\left(\frac{2}{3}\right)^4}{12^2} = \frac{648\left(\frac{16}{81}\right)}{144} = 648 \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{144} = \frac{8}{9} \qquad \text{Sea } h = 12,\ d = \frac{2}{3}.$$

La carga máxima es de 8/9 toneladas métricas. ■

7.3 EJERCICIOS

Determine la razón y escríbala en sus términos simplificados.

1. 25 pies a 40 pies
2. 16 millas a 48 millas
3. 18 dólares a 72 dólares
4. 300 personas a 250 personas
5. 144 pulgadas a 6 pies
6. 60 pulgadas a 2 yardas
7. 5 días a 40 horas
8. 75 minutos a 2 horas
9. ¿Cuál de las razones siguientes no es la misma que la razón 2 a 5?
   A. .4 **B.** 4 a 10 **C.** 20 a 50 **D.** 5 a 2
10. Dé tres razones que sean equivalentes a la razón 4 a 3.
11. Explique la diferencia entre *razón* y *proporción*. Dé algunos ejemplos.
12. Suponga que alguien le dice que emplee productos cruzados a fin de multiplicar fracciones. ¿Cómo le explicaría lo erróneo de su razonamiento?

Decida si cada proporción es verdadera *o* falsa.

13. $\frac{5}{35} = \frac{8}{56}$
14. $\frac{4}{12} = \frac{7}{21}$
15. $\frac{120}{82} = \frac{7}{10}$
16. $\frac{27}{160} = \frac{18}{110}$
17. $\frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10}$
18. $\frac{\frac{1}{3}}{6} = \frac{1}{18}$

Resuelva cada ecuación.

19. $\frac{k}{4} = \frac{175}{20}$
20. $\frac{49}{56} = \frac{z}{8}$
21. $\frac{x}{6} = \frac{18}{4}$
22. $\frac{z}{80} = \frac{20}{100}$
23. $\frac{3x - 2}{5} = \frac{6x - 5}{11}$
24. $\frac{2p + 7}{3} = \frac{p - 1}{4}$

Resuelva cada problema por medio del planteamiento y resolución de una proporción.

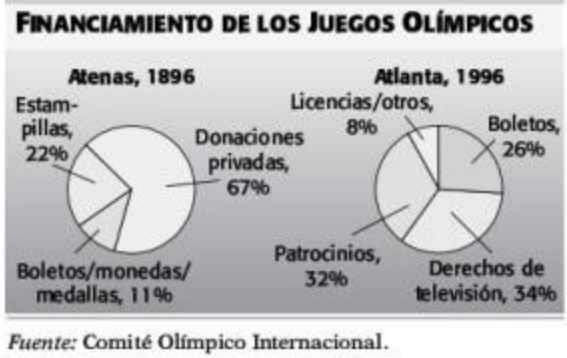
25. ***Mezcla de aceite para una sierra de cadena*** Una sierra de cadena requiere una mezcla de aceite y gasolina para su motor de 2 tiempos. De acuerdo con las instrucciones de un envase de *Oregon 2-cycle Engine Oil*, para una especificación de razón de 50 a 1, se requiere aproximadamente 2.5 onzas de fluido de aceite para 1 galón de gasolina. Para 2.75 galones, ¿cuántas onzas de fluido se requerirán?
26. ***Mezcla de aceite para una sierra de cadena*** Las instrucciones en el envase mencionado en el ejercicio 25 indican que si la especificación de la razón es de 24 a 1, se requiere aproximadamente 5.5 onzas de aceite para un galón de gasolina. Si la gasolina ha de mezclarse con 22 onzas de aceite, ¿cuánta se empleará?
27. ***Tasa de cambio (Estados Unidos y Reino Unido)*** En un año reciente, el tipo de cambio promedio entre dólares de Estados Unidos y libras del Reino Unido era de 1 libra por 1.6762 dólares. Margaret fue a Londres y cambió sus dólares por libras y recibió 400 de éstas. ¿Cuánto dinero estadounidense cambió? (*Nota:* Gran Bretaña y Suiza se encuentran entre las naciones europeas que no utilizan el euro.)
28. ***Tasa de cambio (Estados Unidos y Suiza)*** Si 3 dólares estadounidenses se cambian por 4.5204 francos suizos, ¿cuántos de éstos se obtienen con $49.20? (Redondee al centésimo más cercano.)
29. ***Costo de llenar el tanque de gasolina*** Si 6 galones de gasolina *premium* sin plomo cuestan $3.72, ¿cuánto costará llenar por completo un tanque de 15 galones?
30. ***Impuesto sobre la venta*** Si el impuesto sobre la venta de un disco de que cuesta $16.00 es de $1.32, ¿de cuánto sería dicho gravamen por un reproductor de DVD de $120?
31. ***Distancia entre ciudades*** La distancia entre Kansas City, Missouri y Denver, es de 600 millas, lo que se representa en cierto mapa mural con una longitud de 2.4 pies. En el mural, ¿cuántos pies habría entre Memphis y Filadelfia, dos ciudades que en la vida real se encuentran a 1000 millas una de la otra?
32. ***Distancia entre ciudades*** La distancia entre Singapur y Tokio es de 3300 millas. En cierto mapa mural esta medida se representa con 11 pulgadas. La distancia real entre la Ciudad de México y El Cairo es de 7700 millas. ¿Qué tan lejos quedarían en el mismo mapa?

33. ***Marcar peces para estimar su población*** El 5 de octubre, un grupo de biólogos marcó 250 peces en el río False. En una fecha posterior hallaron 7 de ellos en una muestra de 350. Calcule el número total de peces de este río, a la centena más cercana.



34. ***Marcar peces para calcular su población*** El 13 de mayo algunos investigadores marcaron 420 peces en el lago Argyle. Al regresar, semanas más tarde, su muestra de 500 peces contenía 9 con marca. Proporcione una cifra aproximada de la población de peces en este lago, a la centena más cercana.

Financiamiento de las Olimpiadas *El Comité Olímpico depende cada vez más de los derechos por transmisiones televisivas y de grandes patrocinadores corporativos para financiar los juegos. Las gráficas circulares muestran los planes para obtener fondos para las primeras Olimpiadas en Atenas y las de 1996 en Atlanta, 100 años después. Use proporciones y las figuras para responder las preguntas que se plantean en los ejercicios 35 y 36.*



Fuente: Comité Olímpico Internacional.

35. En las Olimpiadas de 1996 se tuvo un ingreso total de $350 millones. Hubo 10 patrocinadores principales.

(a) Escriba una proporción para encontrar el monto del ingreso proveniente de boletos. Resuélvala.

(b) ¿Qué cantidad aportaron los patrocinadores? Si se supone que éstos contribuyeron por igual, ¿cuánto dio cada uno?

(c) ¿Qué cantidad se recibió por derechos de televisión?

36. Suponga que el monto de los ingresos obtenidos en la Olimpiada de 1896 fue equivalente a los $350 millones de 1996.

(a) Escriba una proporción para el monto del ingreso aportado por las estampillas y resuélvala.

(b) ¿Qué cantidad (en dólares) provino de donativos privados?

Precios de mercancía *Se estudió un supermercado para ver los precios que se cobran por artículos de tamaños distintos. Encuentre la mejor compra (con base en el precio por unidad) de cada artículo en particular.*

37. Bolsas de basura

paquete de 20:	$3.09
paquete de 30:	$4.59

38. Pimienta negra

1 onza:	$.99
2 onzas:	$1.65
4 onzas:	$4.39

39. Cereal para el desayuno

15 onzas	$2.99
25 onzas	$4.49
31 onzas	$5.49

40. Mezcla de cacao

8 onzas:	$1.39
16 onzas:	$2.19
32 onzas:	$2.99

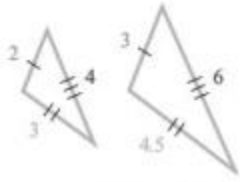
41. Salsa de tomate

14 onzas:	$.89
32 onzas:	$1.19
64 onzas:	$2.95

42. Ejotes

8 onzas:	$.45
16 onzas:	$.49
50 onzas:	$1.59

Dos triángulos son **semejantes** *si tienen la misma forma (pero no necesariamente el mismo tamaño). Los triángulos semejantes tienen lados que son proporcionales. La figura muestra dos triángulos semejantes.*



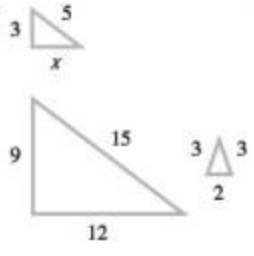
Observe que las razones de los lados correspondientes son todas igual a $\frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \qquad \frac{4.5}{3} = \frac{3}{2} \qquad \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Si se sabe que dos triángulos son semejantes es posible plantear una proporción que resuelva la longitud de un lado desconocido.

Use una proporción para encontrar la longitud **x**, *dado que el par de triángulos son semejantes.*

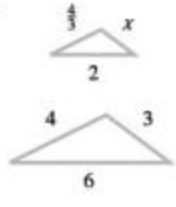
43.



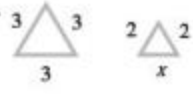
44.



45.



46.



Para los problemas de los ejercicios 47 y 48, **(a)** *haga un dibujo que consista en dos triángulos rectángulos que ilustre la situación descrita y* **(b)** *resuelva el problema. (Fuente:* The Guinness Book of World Records.)

47. ***La silla de George Washington*** Una réplica amplificada de la silla que ocupó George Washington durante la Convención Constituyente proyecta una sombra de 18 pies de largo, al mismo tiempo que una varilla vertical de 12 pies de alto proyecta otra cuya longitud es de 4 pies. ¿Cuál es la altura de la silla?

48. ***Vela en una exhibición*** En la Exhibición de Estocolmo de 1897 se presentó una de las velas más largas que se hayan elaborado jamás. Si su sombra tenía una longitud de 5 pies y al mismo tiempo que una varilla vertical de 32 pies de alto proyectaba una sombra de 2 pies de longitud, ¿qué altura tenía la vela?

Índices de precios al consumidor *El Índice de precios al consumidor publicado por la Oficina de Estadísticas Laborales de Estados Unidos proporciona un medio para determinar el poder de compra del dólar estadounidense de un año al siguiente. A continuación se presentan dichos índices para los años de 1990 a 2000, con el periodo de 1982 a 1984 como base igual a* 100.0.

Año	Índice de precios al consumidor
1990	130.7
1992	140.3
1994	148.2
1996	156.9
1998	163.0
1999	166.6
2000	172.2

Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales.

Para emplear el Índice de precios al consumidor a fin de pronosticar un precio en un año en particular, se plantea una proporción y se compara con un precio conocido de otro año, como se muestra:

$$\frac{\text{Precio en el año } A}{\text{Índice en el año } A} = \frac{\text{Precio en el año } B}{\text{Índice en el año } B}$$

Use las cifras del Índice de precios al consumidor que aparecen en la tabla para calcular el monto que se cobraría por usar la misma cantidad de electricidad que costó $225 *en 1990. Proporcione su respuesta aproximada al dólar más cercano.*

49. En 1992 **50.** En 1994

51. En 1996 **52.** En 1998

53. En 1999 **54.** En 2000

Resuelva cada problema que presenta variaciones.

55. Si x varía directamente con y y $x = 27$ cuando $y = 6$, encuentre x cuando $y = 2$.

56. Si z varía en forma directa con x y $z = 30$ cuando $x = 8$, calcule z cuando $x = 4$.

57. Si m varía directamente con p^2 y $m = 20$ cuando $p = 2$, encuentre m cuando $p = 5$.

58. Si a varía directamente con b^2 y $a = 48$ cuando $b = 4$, calcule el valor de a cuando $b = 7$.

59. Si p varía inversamente con q^2, y $p = 4$ cuando $q = \frac{1}{2}$, encuentre p cuando $q = \frac{3}{2}$.

60. Si z varía en forma inversa a x^2, y $z = 9$ cuando $x = \frac{2}{3}$, obtenga z cuando $x = \frac{5}{4}$.

61. ***Interés sobre una inversión*** El interés sobre una inversión varía directamente con la tasa de interés. Si el interés es de $48 cuando la tasa es de 5%, haga el cálculo a una tasa de 4.2%.

62. ***Área de un triángulo*** Dada la base, el área de un triángulo varía en forma directa con su altura. Encuentre el área de un triángulo con altura de 6 pulgadas, si el área es de 10 pulgadas cuadradas para una altura de 4 pulgadas.

63. ***Velocidad de un automóvil*** En una distancia específica, la velocidad varía inversamente con el tiempo. Si un auto recorre cierta distancia en media hora a 30 millas por hora, ¿qué velocidad se necesita para recorrer la misma distancia en tres cuartos de hora?

64. ***Largo de un rectángulo*** Para un área constante, el largo de un rectángulo varía inversamente con el ancho. El largo de un rectángulo es de 27 pies cuando el ancho es de 10 pies. Calcule el largo de un rectángulo con la misma área si el ancho es de 18 pies.

65. ***Peso de un alce*** El peso de un objeto en la Luna varía directamente con el peso del objeto en la Tierra. De acuerdo con *The Guiness Book of World Records*, la cabra "Shad", propiedad de una pareja de California, es la más grande que se conoce y pesa 352 libras. En la Luna, Shad sólo pesaría 59 libras. En Canadá se cazó el alce macho más grande del que se tengan noticias, pesaba 1800 libras. ¿Cuánto hubiera pesado en la Luna?

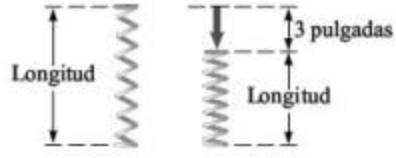
66. ***Viaje en un bote de pedales*** De acuerdo con *The Guiness Book of World Records*, el viaje más largo registrado en un bote de pedales es de 2226 millas en 103 días, mediante el impulso de la fuerza de las piernas de dos navegantes, río abajo del Mississippi. Si se supone una tasa constante, ¿qué tan lejos habrían ido si hubieran viajado 120 días? (La distancia varía en forma directa con el tiempo.)

67. ***Presión ejercida por un líquido*** La presión que ejerce cierto líquido en un punto dado varía directamente con la profundidad del punto bajo la superficie del líquido. La presión a una profundidad de 10 pies es de 50 libras por pulgada cuadrada. ¿Cuál es la presión a una profundidad de 20 pies?

68. ***Presión de un gas en un contenedor*** Si el volumen es constante, la presión de un gas en un contenedor varía directamente con la temperatura. Si la presión es de 5 libras por pulgada cuadrada a una temperatura de 200 grados Kelvin, ¿cuál es la presión a una temperatura de 300 grados Kelvin?

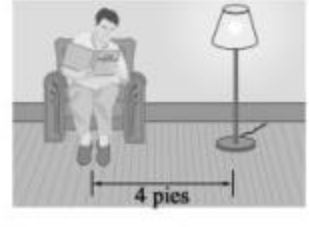
69. ***Presión de un gas en un contenedor*** Si la temperatura es constante, la presión de un gas en un recipiente varía inversamente con el volumen de éste. Si la presión es de 10 libras por pulgada cuadrada en un recipiente de 3 pies cúbicos, ¿cuál es la presión en uno de 1.5 pies cúbicos?

70. ***Fuerza requerida para comprimir un resorte*** La fuerza que se requiere para comprimir un resorte varía directamente con el cambio de su longitud. Si se requiere una fuerza de 12 libras para comprimir 3 pulgadas un resorte, ¿cuánta fuerza se requiere para comprimirlo 5 pulgadas?



71. ***Cuerpo que cae*** Para un cuerpo que cae desde el reposo (ignore la resistencia del aire), la distancia que desciende varía directamente con el cuadrado del tiempo. Si se suelta un objeto desde lo alto de una torre de 400 pies y llega al suelo en 5 segundos, ¿cuánto cayó durante los 3 primeros segundos?

72. ***Iluminación con una fuente de luz*** La iluminación que produce una fuente de luz varía en forma inversa con el cuadrado de la distancia. Si la iluminación producida a 4 pies de la fuente es de 75 pie-candelas, calcule la iluminación que se produce a 9 pies de ella.



73. ***Índice de masa corporal*** Los médicos utilizan el índice de masa corporal, o IMC, para evaluar el nivel de obesidad de una persona. Un IMC de 10 a 25 se considera ideal. El IMC varía directamente con el peso en libras del individuo e inversamente con el cuadrado de su estatura expresada en pulgadas. Una persona cuyo peso es de 118 libras y mide 64 pulgadas tiene un IMC de 20 (el IMC se redondea al número entero más cercano). Calcule el IMC de una persona que pesa 165 libras y mide 70 pulgadas.

74. *Automóvil que resbala* La fuerza necesaria para impedir que un auto resbale en una curva varía inversamente con el radio de la curva y, en conjunto, con el peso del vehículo y el cuadrado de su velocidad. Si 242 libras de fuerza evitan que resbale un auto de cuyo radio es de 500 pies, ¿cuál es la fuerza necesaria para impedir que el mismo auto resbale en una curva con radio de 750 pies a 50 millas por hora?



Estimación del peso de los peces *Los ejercicios 75 y 76 describen las fórmulas que durante años han usado los pescadores para estimar el peso. El resultado que se obtiene al medir en torno al cuerpo del pez se denomina* circunferencia. *(Fuente:* Sacramento Bee, 9 de noviembre de 2000.*)*

75. El peso de una lobina varía directamente con su circunferencia y el cuadrado de su longitud. Una lobina que ganó un premio pesó 22.7 libras y midió 36 pulgadas de largo, tenía una circunferencia de 21 pulgadas. ¿Cuánto pesaría una lobina de 28 pulgadas de largo con circunferencia de 18 pulgadas?

76. El peso de una trucha varía en conjunto con su longitud y el cuadrado de su circunferencia. Un pescador atrapó una que pesó 10.5 libras y midió 26 pulgadas de largo, con circunferencia de 18 pulgadas. Encuentre el peso de una trucha que mide 22 pulgadas de largo y 15 de circunferencia.

7.4 Desigualdades lineales



En esta estampilla italiana aparece **Arquímedes,** uno de los matemáticos más importantes de la Antigüedad. Nació en la ciudad griega de Siracusa, hacia el año 287 a.C.

Una evocadora anécdota acerca de Arquímedes relata su reacción ante uno de sus descubrimientos. Mientras tomaba un baño, observó que si un objeto sumergido era más pesado que el fluido en que se encontraba, *descendería al fondo y si se pesara al estar dentro del fluido sería más ligero que su peso verdadero, en la misma medida que el peso del líquido que desplazara. Este descubrimiento lo entusiasmó tanto que corrió por las calles gritando Eureka! (Lo encontré!),* sin molestarse en vestirse…

Arquímedes encontró su muerte durante el saqueo de Siracusa a la edad de 75 años. Usaba una charola de arena para dibujar figuras geométricas cuando un soldado romano llegó hasta él. Ordenó al soldado que se quitara de sus *círculos* y éste lo mató.

Una *desigualdad lineal en una variable* es como éstas:

$$x + 5 < 2, \qquad y - 3 \geq 5 \qquad \text{o} \qquad 2k + 5 \leq 10.$$

Desigualdad lineal en una variable

Una **desigualdad lineal en una variable** puede escribirse de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{ax + b < c,}$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

(En esta sección las definiciones y reglas se dan solo para el caso de $<$, pero también son válidas para $>$, $\leq$ y $\geq$.)

Solución de desigualdades lineales Una desigualdad se resuelve al encontrar todos los números que permiten que ésta se cumpla. Por lo general, una desigualdad tiene un número infinito de soluciones. Éstas, igual que las de las ecuaciones, se encuentran al producir una serie de desigualdades equivalentes más sencillas. Las **desigualdades equivalentes** son las que tienen el mismo conjunto solución. Tales desigualdades se obtienen con las propiedades de la suma y multiplicación de la desigualdad.

Propiedad de la suma de la desigualdad

Para todos los números reales, a, b y c, las desigualdades

$$\boldsymbol{a < b} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{a + c < b + c}$$

son equivalentes (puede sumarse el mismo número en ambos lados de una desigualdad sin que cambie el conjunto solución).

Igual que con las ecuaciones, la propiedad de la adición se usa para *restar* el mismo número en ambos lados de una desigualdad.

EJEMPLO 1 Resuelva $x - 7 < -12$.

$$x - 7 < -12$$
$$x - 7 + 7 < -12 + 7 \qquad \text{Sumar 7 en ambos lados.}$$
$$x < -5$$

Por medio de la notación de conjuntos, el conjunto solución de esta desigualdad se escribiría como $\{x | x < -5\}$. ■

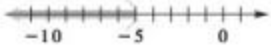
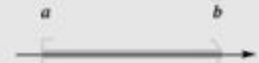
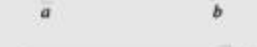


FIGURA 8

Es costumbre expresar conjuntos solución de desigualdades con gráficas de rectas numéricas. El conjunto solución del ejemplo 1 se muestra en la recta numérica de la figura 8. El conjunto de números menores que –5 es un ejemplo de **intervalo** en la recta. Para escribir intervalos se usa la **notación de intervalos**. Por ejemplo, si se usara esta notación, el intervalo de todos los números menores que –5 se escribiría $(-\infty, -5)$. El símbolo negativo de infinito, $-\infty$, no indica un número. Se usa para mostrar que el intervalo incluye todos los números reales menores que –5. Igual que en la recta numérica, el paréntesis indica que el –5 no queda incluido en el conjunto solución.

En la tabla siguiente se presentan algunos ejemplos de otros conjuntos escritos con notación de intervalos. En éstos, se supone que $a < b$. Observe que siempre se usa un paréntesis con los símbolos $-\infty$ y ∞.

Tipo de intervalo	Conjunto	Notación de intervalos	Gráfica
Intervalo abierto	$\{x \mid a < x\}$	(a, ∞)	
	$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	
	$\{x \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$	
Intervalo semiabierto	$\{x \mid a \le x\}$	$[a, \infty)$	
	$\{x \mid a < x \le b\}$	$(a, b]$	
	$\{x \mid a \le x < b\}$	$[a, b)$	
	$\{x \mid x \le b\}$	$(-\infty, b]$	
Intervalo cerrado	$\{x \mid a \le x \le b\}$	$[a, b]$	

A veces se usa $(-\infty, \infty)$ para representar el conjunto de todos los números reales.

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $14 + 2m \leq 3m$. Dé el conjunto solución en la forma de intervalo y construya la gráfica del conjunto solución.

$$14 + 2m \leq 3m$$
$$14 + 2m - 2m \leq 3m - 2m \quad \text{Restar } 2m.$$
$$14 \leq m \quad \text{Agrupar términos semejantes.}$$



FIGURA 9

La desigualdad $14 \leq m$ (14 es menor o igual que m) también puede escribirse como $m \geq 14$ (m es mayor o igual que 14). Observe que en cada caso, el símbolo de desigualdad apunta hacia el número más pequeño, 14. El conjunto solución, en notación de intervalo es $[14, \infty)$. En la figura 9 se muestra la gráfica. ■

Es frecuente que hayan errores al graficar desigualdades en las que el término variable está en el lado derecho (es probable que esto se deba al hecho de que leemos de izquierda a derecha). Para guardarse de estos errores es una buena idea reescribir las desigualdades, de modo que la variable esté en el lado izquierdo, como se analizó en el ejemplo 2.

Una desigualdad del tipo $3x \leq 15$ se resuelve al dividir ambos lados entre 3. Esto se lleva a cabo con la propiedad de la multiplicación de la desigualdad, que es un poco más elaborada que la propiedad correspondiente para las ecuaciones. Para ver cómo funciona dicha propiedad, comience con el siguiente enunciado verdadero:

$$-2 < 5.$$

Multiplique ambos lados por 8, por ejemplo.

$$-2(8) < 5(8) \quad \text{Multiplicar por 8.}$$
$$-16 < 40 \quad \text{Verdadero}$$

Esto nos da un enunciado verdadero. Comience de nuevo con $-2 < 5$ y esta vez multiplique ambos lados por -8.

$$-2(-8) < 5(-8) \quad \text{Multiplicar por } -8.$$
$$16 < -40 \quad \text{Falso}$$

El resultado, $16 < -40$, es falso. Para hacerlo verdadero, hay que cambiar la dirección del símbolo de desigualdad para obtener

$$16 > -40. \quad \text{Verdadero}$$

Como indican estos ejemplos, multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número *negativo*, obliga a invertir la dirección del símbolo. Lo mismo ocurre para la división entre un número negativo, ya que ésta se define en términos de la multiplicación.

Propiedad de la multiplicación de la desigualdad

Para todos los números reales a, b y c, donde $c \neq 0$,

(a) las desigualdades

$$a < b \quad \text{y} \quad ac < bc$$

son equivalentes si $c > 0$;

(b) las desigualdades

$$a < b \quad \text{y} \quad ac > bc$$

son equivalentes si $c < 0$ (ambos lados de una desigualdad pueden multiplicarse o dividirse por un número *positivo* sin que cambie la dirección del símbolo de desigualdad. **Si se multiplica o divide por un número *negativo*, se requiere invertir el símbolo de la desigualdad**).

EJEMPLO 3 Resuelva $-3(x + 4) + 2 \geq 8 - x$. Encuentre el conjunto solución en la forma de intervalo así como en la gráfica.

$$\begin{aligned} -3(x + 4) + 2 &\geq 8 - x \\ -3x - 12 + 2 &\geq 8 - x && \text{Propiedad distributiva} \\ -3x - 10 &\geq 8 - x \\ -3x - 10 + x &\geq 8 - x + x && \text{Sumar } x. \\ -2x - 10 &\geq 8 \\ -2x - 10 + 10 &\geq 8 + 10 && \text{Sumar 10.} \\ -2x &\geq 18 \end{aligned}$$

Dividir ambos lados entre -2. Hay que tener cuidado. La división entre un número negativo requiere que se cambie $\geq$ por $\leq$.

$$\begin{aligned} \frac{-2x}{-2} &\leq \frac{18}{-2} && \text{Dividir entre } -2\text{; invertir el símbolo de desigualdad.} \\ x &\leq -9 \end{aligned}$$

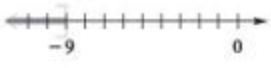


FIGURA 10

La figura 10 muestra la gráfica del conjunto solución, $(-\infty, -9]$. ■

La mayoría de las desigualdades lineales, como la del ejemplo 3, requieren que se usen ambas propiedades, la de adición y la de multiplicación. A continuación se resumen los pasos a seguir al resolver una desigualdad lineal.

Solución de una desigualdad lineal

Paso 1: Simplifique cada lado de la desigualdad, tanto como sea posible, utilizando la propiedad distributiva para eliminar paréntesis y mediante la combinación de términos semejantes, según se necesite.

Paso 2: Utilice la propiedad de la adición de la desigualdad para cambiar la desigualdad de modo que todos los términos que contengan variables queden de un lado y todos los que no las contengan estén en el otro lado.

Paso 3: Use la propiedad de la multiplicación para cambiar la desigualdad a la forma $x < k$ (o $x > k$, o $x \leq k$, o $x \geq k$).

Recuerde: La dirección del símbolo de desigualdad se invierte sólo si se multiplican o si se dividen ambos lados por un número negativo.

Desigualdades de tres partes Las desigualdades pueden utilizarse para expresar el hecho de que una cantidad se ubica entre otras dos cantidades. Por ejemplo,

$$2 < 4 < 7$$

dice que $2 < 4$ *y* $4 < 7$. Este enunciado es una *conjunción* y es verdadero porque las dos partes que lo componen son verdaderas. La desigualdad de tres partes

$$3 < x + 2 < 8$$

es verdadera si la expresión $x+2$ está entre 3 y 8. Para resolver esta desigualdad hay que restar 2 de cada una de las tres partes de la desigualdad, obteniendo lo siguiente:

$$3-2<x+2-2<8-2$$
$$1<x<6.$$



FIGURA 11

En la figura 11 se observa la gráfica del conjunto solución, $(1, 6)$.

Al usar desigualdades con tres partes, como la anterior, es importante que los números ocupen las posiciones correctas. Sería un *error* escribir la desigualdad como $8 < x + 2 < 3$, ya que esto implicaría que $8 < 3$ y este enunciado es falso. En general, las desigualdades de tres partes se escriben de modo que los símbolos apunten en la misma dirección, y ambos hacia el número más pequeño.

EJEMPLO 4 Resuelva $-2 \le 3k - 1 \le 5$ y trace la gráfica del conjunto solución.

Sume 1 a cada una de las tres partes para que el término con la variable quede despejado en la parte del medio.

$$-2+1 \le 3k-1+1 \le 5+1 \qquad \text{Sumar 1.}$$
$$-1 \le 3k \le 6$$
$$\frac{-1}{3} \le \frac{3k}{3} \le \frac{6}{3} \qquad \text{Dividir entre 3.}$$
$$-\frac{1}{3} \le k \le 2$$

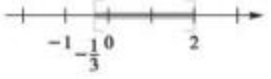


FIGURA 12

En la figura 12 se muestra la gráfica del conjunto solución, $[-1/3, 2]$. ■

Aplicaciones Además de las expresiones familiares, *menor que* y *mayor que*, existen algunas tales como *no es mayor que*, *al menos*, entre otras, que también indican desigualdad. La tabla que sigue presenta la interpretación de dichas expresiones.

Expresión verbal	Interpretación	Expresión verbal	Interpretación
a es al menos b	$a \ge b$	a es a lo más b	$a \le b$
a no es menos de b	$a \ge b$	a no es más de b	$a \le b$

No confunda un enunciado como *5 es más que un número* con la frase *5 más que un número*. El primero es un enunciado que se escribe $5 > x$, mientras que la segunda es una expresión que se escribe como la suma $x + 5$.

Solución de problemas

El siguiente ejemplo ilustra una aplicación del álgebra que es importante para cualquiera que haya preguntado *¿qué puntuación debo sacar en el próximo examen para obtener (una calificación en particular) en este curso?* Requiere calcular el promedio de cierto número de calificaciones. En general, para encontrar el promedio de n números, éstos se suman y se dividen entre n.

EJEMPLO 5 Christopher Michael obtuvo las puntuaciones de 86, 88 y 78 en sus tres primeros exámenes de geometría. Si desea obtener un promedio de al menos 80 después del cuarto examen, ¿qué posibles puntuaciones debería obtener en el cuarto examen?

Sea x = puntuación de Christopher en su cuarto examen. Para calcular este promedio después de 4 exámenes, hay que sumar las puntuaciones y dividir entre 4.

Promedio es al menos 80.

$$\frac{86 + 88 + 78 + x}{4} \geq 80$$

$$\frac{252 + x}{4} \geq 80 \qquad \text{Sumar las puntuaciones conocidas.}$$

$$4\left(\frac{252 + x}{4}\right) \geq 4(80) \qquad \text{Multiplicar por 4.}$$

$$252 + x \geq 320$$

$$252 - 252 + x \geq 320 - 252 \qquad \text{Restar 252.}$$

$$x \geq 68 \qquad \text{Agrupar términos.}$$

En el cuarto examen debe sacar 68 o más para obtener un promedio de *al menos* 80. ■

EJEMPLO 6 Una compañía de arrendamientos cobra \$15 por alquilar una sierra de cadena, más \$2.00 por hora. Mamie Zwettler no puede gastar más de \$35.00 para retirar algunos troncos de su patio. ¿Cuál es el periodo máximo de tiempo que podría utilizar la sierra rentada?

Sea h = número de horas que puede rentar la sierra. Debe pagar \$15.00 más $\$2.00h$, para rentar la sierra durante h horas, y esta cantidad *no debe ser más de* \$35.00.

Costo de la renta — no es más de — 35 dólares.

$$15 + 2h \leq 35$$

$$15 + 2h - 15 \leq 35 - 15 \qquad \text{Restar 15.}$$

$$2h \leq 20$$

$$h \leq 10 \qquad \text{Dividir entre 2.}$$

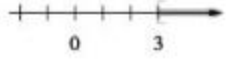
Mamie puede usar la sierra por un máximo de 10 horas (por supuesto, podría utilizarla por menos tiempo, como lo indica la desigualdad $h \leq 10$). ■

7.4 EJERCICIOS

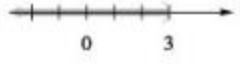
Relacione cada desigualdad de los ejercicios 1 a 6 con la gráfica correcta o la notación de intervalos de los incisos A a F. Consulte el ejemplo 1.

1. $\{x \mid x \leq 3\}$
2. $\{x \mid x > 3\}$
3. $\{x \mid x < 3\}$
4. $\{x \mid x \geq 3\}$
5. $\{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$
6. $\{x \mid -3 < x < 3\}$

A.



B.



C. $(3, \infty)$ **D.** $(-\infty, 3]$

E. $(-3, 3)$ **F.** $[-3, 3]$

7. Explique cómo determinar si se emplean paréntesis o corchetes en la gráfica del conjunto solución de una desigualdad.

8. Describa los pasos que se usan para resolver una desigualdad lineal. Explique cuándo es necesario invertir el símbolo de desigualdad.

Resuelva cada desigualdad. Proporcione el conjunto solución tanto en forma de intervalo como de gráfica.

9. $4x + 1 \geq 21$

10. $5t + 2 \geq 52$

11. $\frac{3k - 1}{4} > 5$

12. $\frac{5z - 6}{8} < 8$

13. $-4x < 16$

14. $-2m > 10$

15. $-\frac{3}{4}r \geq 30$

16. $-1.5x \leq -\frac{9}{2}$

17. $-1.3m \geq -5.2$

18. $-2.5x \leq -1.25$

19. $\frac{2k - 5}{-4} > 5$

20. $\frac{3z - 2}{-5} < 6$

21. $x + 4(2x - 1) \geq x$

22. $m - 2(m - 4) \leq 3m$

23. $-(4 + r) + 2 - 3r < -14$

24. $-(9 + k) - 5 + 4k \geq 4$

25. $-3(z - 6) > 2z - 2$

26. $-2(x + 4) \leq 6x + 16$

27. $\frac{2}{3}(3k - 1) \geq \frac{3}{2}(2k - 3)$

28. $\frac{7}{5}(10m - 1) < \frac{2}{3}(6m + 5)$

29. $-\frac{1}{4}(p + 6) + \frac{3}{2}(2p - 5) < 10$

30. $\frac{3}{5}(k - 2) - \frac{1}{4}(2k - 7) \leq 3$

31. $3(2x - 4) - 4x < 2x + 3$

32. $7(4 - x) + 5x < 2(16 - x)$

33. $8\left(\frac{1}{2}x + 3\right) < 8\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

34. $10x + 2(x - 4) < 12x - 10$

35. Un estudiante resolvió la desigualdad $5x < -20$ dividiendo ambos lados entre 5 y cambiando la dirección del símbolo de desigualdad. Su razonamiento fue que como -20 es un número negativo el cambio de la dirección era necesario. ¿Es correcto lo que hizo? Explique.

36. Relacione cada conjunto en notación de intervalos con su descripción.

(a) $(0, \infty)$	**A.** números reales positivos
(b) $[0, \infty)$	**B.** números reales negativos
(c) $(-\infty, 0]$	**C.** números reales no positivos
(d) $(-\infty, 0)$	**D.** números reales no negativos

Resuelva cada desigualdad. Debe dar el conjunto solución tanto en forma de intervalo como de gráfica.

37. $-4 < x - 5 < 6$

38. $-1 < x + 1 < 8$

39. $-9 \leq k + 5 \leq 15$

40. $-4 \leq m + 3 \leq 10$

41. $-6 \leq 2z + 4 \leq 16$

42. $-15 < 3p + 6 < -12$

43. $-19 \leq 3x - 5 \leq 1$

44. $-16 < 3t + 2 < -10$

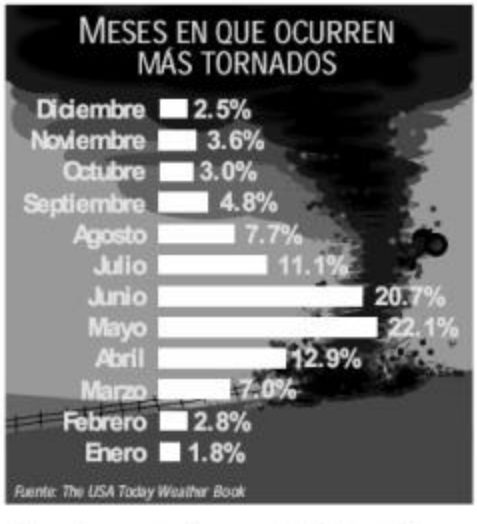
45. $-1 \leq \frac{2x - 5}{6} \leq 5$

46. $-3 \leq \frac{3m + 1}{4} \leq 3$

47. $4 \leq 5 - 9x < 8$

48. $4 \leq 3 - 2x < 8$

Actividad de los tornados *Responda las preguntas de los ejercicios 49 a 52 basado en la siguiente gráfica:*



49. ¿En cuáles meses el porcentaje de tornados excedió 7.7%?

50. ¿En qué meses el porcentaje de tornados fue de al menos 12.9%?

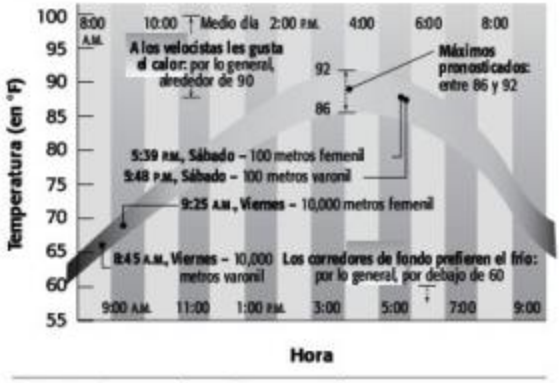
51. Los datos que se usaron para construir la gráfica se basaron en el número de tornados vistos en Estados Unidos durante un periodo de 20 años. Se reportaron un total de 17,252. ¿En cuáles meses se reportaron menos de 1500?

52. ¿Cuántos tornados más ocurrieron en marzo que en octubre? (Use el total que se indica en el ejercicio 51.)

Preferencias de temperatura olímpica *En la figura se muestran los pronósticos de temperatura para distintas horas del día 14 de julio, para las pruebas de pista y campo de las Olimpiadas de 2000 con sede en Estados Unidos, que se llevaron a cabo del 14 al 23 de julio de 2000 en Sacramento, California. Utilice la gráfica para resolver los ejercicios 53 a 56.*

SEGUIMIENTO DEL CALOR

Pronóstico para distintas horas del día de las pruebas de pista y campo de las Olimpiadas celebradas del 14 al 23 de julio en Estados Unidos (la temperatura promedio en esta época del año tiene un máximo de 93.5 y un mínimo de 60.5).



Fuente: Accuweather, Bcc research.

53. Los velocistas prefieren temperaturas cercanas a los 90° Fahrenheit. Si usa el límite superior del pronóstico, ¿en qué periodo se espera que la temperatura sea al menos de 90° F?

54. Los corredores de fondo prefieren las temperaturas frías. ¿Durante qué periodo las temperaturas pronosticadas no son más de 70° F? Utilice el límite inferior del pronóstico.

55. ¿Qué rango de temperaturas se pronostica para la competencia de 100 metros femenil?

56. ¿Qué rango de temperaturas se predice para la competición de 10,000 metros varonil?

Resuelva cada problema.

57. ***Tarifas de taxis*** En una ciudad del medio oeste, los taxis cobran \$1.50 por el primer $\frac{1}{5}$ milla y \$.25 por cada $\frac{1}{5}$ milla adicional. Dantrell Davis tiene sólo \$3.75 en el bolsillo. ¿Cuál es la distancia máxima que puede viajar (sin incluir propina para el taxista)?

58. ***Tarifas de taxis*** Hace 12 años las tarifas de los taxis en la ciudad que se menciona en el ejercicio 57 eran de \$.90 por el primer $\frac{1}{7}$ milla y \$.10 por cada $\frac{1}{7}$ milla adicional. Si se toma como base la información que se da en aquel ejercicio y su respuesta, ¿qué tan lejos hubiera podido viajar Dantrell Davis en aquella época?

59. ***Promedio de calificaciones*** Margaret Westmoreland obtuvo puntuaciones de 90 y 82 en sus dos primeros exámenes de literatura inglesa. ¿Qué puntuación debe obtener en el tercer examen a fin de lograr un promedio de 84 o más?

60. ***Promedio de calificaciones*** Susan Carsten obtuvo 92 y 96 en sus dos primeros exámenes de métodos de enseñanza del arte. ¿Qué puntuación debe obtener en el tercero para que su promedio sea de 90 o más?

61. ***Renta de automóviles*** Una pareja desea rentar un carro durante un día de sus vacaciones. Avis pide \$35.00 por día y 14¢ por milla, en tanto que Downtown Toyota desea \$34.00 por día y 16¢ por milla. ¿Después de cuántas millas el precio de la renta en Downtown Toyota excedería el de Avis?



62. ***Renta de automóviles*** Jane y Terry Brandsma fueron a Mobile, Alabama, por una semana. Necesitaban rentar un carro, por lo que cotizaron en dos compañías arrendadoras. Avis quería \$28 por día, sin tarifa por distancia. Downtown Toyota pedía \$108 por semana y 14¢ por milla. ¿Cuántas millas tendrían que manejar antes de que el precio de Avis fuera menor que el de Toyota?

63. ***Índice de masa corporal*** Un IMC (índice de masa corporal) entre 19 y 25 se considera saludable. Use la fórmula

$$\text{IMC} = \frac{704 \times (\text{peso en libras})}{(\text{estatura en pulgadas})^2}$$

para calcular el rango del peso p, redondeado a la libra más cercana, que produzca un IMC saludable para cada estatura. (*Fuente: Washington Post.*)

(a) 72 pulgadas **(b)** La estatura del lector, en pulgadas

64. *Tasa objetivo del ritmo cardiaco* A fin de lograr el beneficio máximo por hacer ejercicio, el ritmo cardiaco, en latidos por minuto, debe estar en la zona objetivo cardiaca (ZOC). Para una persona de edad A, la fórmula es

$$.7(220 - A) \le \text{ZOC} \le .85(220 - A).$$

Calcule la ZOC al número entero más cercano para cada edad. (*Fuente:* Hockey, Robert V., *Physical Fitness: The Pathway to Healthful Living.* Times Mirror/Mosby College Publishing, 1989.)

(a) 35

(b) La edad del lector

Análisis beneficio/costo *Un producto generará una utilidad sólo si el ingreso* R *por su venta excede el costo* C *de producirlo. En los ejercicios 65 y 66 calcule el número entero más pequeño de unidades* x *que deben venderse para que el negocio obtenga un beneficio por el artículo que se describe.*

65. Peripheral Visions, Inc., sabe que el costo de producir x cintas de video con calidad de estudio es $C = 20x + 100$, y que el ingreso que genera su venta es $R = 24x$ (C y R se expresan en dólares).

66. Speedy Delivery sabe que el costo de realizar x entregas es $C = 3x + 2300$, en tanto que el ingreso generado por ellas está dado por $R = 5.50x$ (C y R, en dólares).

7.5 Propiedades de los exponentes y notación científica

Exponentes Los *exponentes* se usan para escribir productos de factores repetidos. Por ejemplo, el producto $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ se escribe

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{4 factores de 3}} = 3^4. \leftarrow \text{Exponente}$$
$$\uparrow \text{Base}$$

El número 4 indica que el 3 aparece como factor cuatro veces. El número 4 es el **exponente** y el 3 es la **base**. La cantidad 3^4 se denomina **expresión exponencial**. 3^4 se lee como "3 a la cuarta potencia" o "3 a la cuarta". De la multiplicación de los cuatro números 3 se obtiene:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

$10^{10^{100}}$

El término **googol**, que significa 10^{100}, fue acuñado por el profesor Edward Kasner, de Columbia University. Un googol consiste en un 1 seguido de 100 números 0. Esta cantidad supera la de los electrones que se estima existen en el universo, que es de 10^{79}.

Google, el buscador de la web, recibió su nombre por el googol. Sergey Brin, presidente y cofundador de Google, Inc., fue un gran matemático. Eligió el nombre Google para describir la vasta riqueza de su buscador. (*Fuente: The Gazette*, 2 de marzo de 2001.)

Si un googol no le parece suficientemente grande, intente con un **googolplex:**

$$\text{googolplex} = 10^{\text{googol}}.$$

Expresión exponencial

Si a es un número real y n es un número natural, entonces, la expresión exponencial a^n se define como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}.$$

El número a es la *base* y n es el exponente.

EJEMPLO 1 Evalúe cada expresión exponencial.

(a) $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$ 7^2 se lee como "7 al cuadrado".

(b) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ 5^3 se lee como "5 al cubo".

(c) $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$

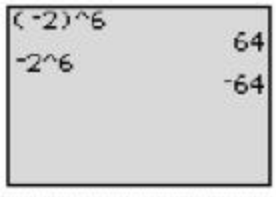
(d) $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

(e) $5^1 = 5$ ■

En la expresión exponencial $3z^7$, la base del exponente 7 es z, *no* $3z$. Es decir,

$$3z^7 = 3 \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \qquad \text{La base es } z.$$

Mientras que $(3z)^7 = (3z)(3z)(3z)(3z)(3z)(3z)(3z)$. La base es $3z$.



Esta pantalla muestra los resultados que preceden al ejemplo 2

Para evaluar $(-2)^6$, el paréntesis que encierra al -2 indica que la base es -2, por tanto:

$$(-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64. \qquad \text{La base es } -2.$$

En la expresión -2^6 la base es 2, *no* -2. El signo $-$ dice que se encuentre el negativo, o inverso aditivo, de 2^6. Actúa como un símbolo para el factor -1.

$$-2^6 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -64 \qquad \text{La base es 2.}$$

Por tanto, como $64 \neq -64$, $(-2)^6 \neq -2^6$.

EJEMPLO 2 Evalúe cada expresión exponencial.

(a) $-4^2 = -(4 \cdot 4) = -16$ **(b)** $-8^2 = -(8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) = -4096$

(c) $-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$ ■

Existen varias reglas útiles que simplifican el trabajo con exponentes. Por ejemplo, el producto $2^5 \cdot 2^3$ se simplifica como sigue:

$$2^5 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^8 \qquad (5 + 3 = 8)$$

Este resultado se generaliza como la **regla del producto de exponentes**: los productos de expresiones exponenciales con la misma base se obtienen con la suma de los exponentes.

Regla del producto de exponentes

Si m y n son números naturales y a es cualquier número real, entonces

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

EJEMPLO 3 Aplique la regla del producto de exponentes para cada uno de los casos que siguen:

(a) $3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$ **(b)** $5^3 \cdot 5 = 5^3 \cdot 5^1 = 5^{3+1} = 5^4$

(c) $y^3 \cdot y^8 \cdot y^2 = y^{3+8+2} = y^{13}$

(d) $(5y^2)(-3y^4) = 5(-3)y^2y^4$ Propiedades asociativa y conmutativa
$= -15y^{2+4}$
$= -15y^6$

(e) $(7p^3q)(2p^5q^2) = 7(2)p^3p^5qq^2 = 14p^8q^3$ ■

Hasta aquí se han estudiado sólo exponentes positivos. ¿Cómo podría definirse un exponente 0? Suponga que se multiplicara 4^2 por 4^0. Según la regla del producto,

$$4^2 \cdot 4^0 = 4^{2+0} = 4^2.$$

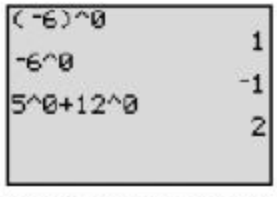
Para que la regla del producto siga siendo verdadera, 4^0 debe ser igual a 1, por lo que a^0 se define así para cualquier número a real distinto de 0.

Exponente cero

Si a es cualquier número real distinto de 0, entonces

$$a^0 = 1.$$

La expresión 0^0 es indefinida.*



Esta pantalla apoya los resultados de los incisos (b), (c) y (d) del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Evalúe cada una de las expresiones siguientes.

(a) $12^0 = 1$

(b) $(-6^0) = 1$ La base es -6.

(c) $-6^0 = -(6^0) = -1$ La base es 6.

(d) $5^0 + 12^0 = 1 + 1 = 2$

(e) $(8k)^0 = 1, \quad k \neq 0$ ■

¿Cómo debe definirse un exponente negativo? De nuevo, con el uso de la regla del producto,

$$8^2 \cdot 8^{-2} = 8^{2+(-2)} = 8^0 = 1.$$

Esto indica que 8^{-2} es el recíproco de 8^2. Pero el recíproco de 8^2 e $\frac{1}{8^2}$ y un número sólo puede tener un recíproco. Por tanto, es razonable concluir que $8^{-2} = \frac{1}{8^2}$. Es posible generalizar y obtener la siguiente definición:

Exponente negativo

Para cualquier número natural n y cualquier número real a,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Con esta definición y las que se explicaron antes para exponentes positivos y negativos, la expresión a^n tiene significado para cualquier exponente entero n y cualquier número a real distinto de 0.

EJEMPLO 5 Escriba las siguientes expresiones sólo con exponentes positivos.

(a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(c) $6^{-1} = \frac{1}{6^1} = \frac{1}{6}$

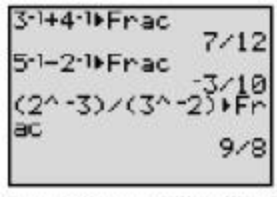
(d) $(5z)^{-3} = \frac{1}{(5z)^3}, \quad z \neq 0$

*En estudios más avanzados, a 0^0 se le denomina una *forma indeterminada*.

(e) $5z^{-3} = 5\left(\frac{1}{z^3}\right) = \frac{5}{z^3}, \quad z \neq 0$ **(f)** $(5z^2)^{-3} = \frac{1}{(5z^2)^3}, \quad z \neq 0$

(g) $-m^{-2} = -\frac{1}{m^2}, \quad m \neq 0$ **(h)** $(-m)^{-4} = \frac{1}{(-m)^4}, \quad m \neq 0$ ■

EJEMPLO 6 Evalúe cada una de las siguientes expresiones:



Esta pantalla confirma los resultados de los incisos (a), (b) y (d), del ejemplo 6.

(a) $3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$ $3^{-1} = \frac{1}{3}$ y $4^{-1} = \frac{1}{4}$

(b) $5^{-1} - 2^{-1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{10} - \frac{5}{10} = -\frac{3}{10}$

(c) $\frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{2^3}} = 1 \div \frac{1}{2^3} = 1 \cdot \frac{2^3}{1} = 2^3 = 8$

(d) $\frac{2^{-3}}{3^{-2}} = \frac{\frac{1}{2^3}}{\frac{1}{3^2}} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3^2}{1} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$ ■

Los incisos (c) y (d) del ejemplo 6 sugieren las generalizaciones que siguen:

Reglas especiales para exponentes negativos

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces, $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ y $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$.

Un cociente, tal como a^8/a^3, se simplifica en forma muy parecida al producto (en todos los cocientes de este tipo hay que suponer que el denominador no es 0). Al usar la definición de exponente, queda:

$$\frac{a^8}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5.$$

Observe que $8 - 3 = 5$. Del mismo modo,

$$\frac{a^3}{a^8} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}.$$

Aquí, $3 - 8 = -5$. Estos ejemplos sugieren la siguiente **regla del cociente de exponentes**.

Regla del cociente de exponentes

Si a es cualquier número real distinto de 0 y m y n son enteros diferentes de 0, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

EJEMPLO 7 En cada caso de los que siguen aplique la regla del cociente para exponentes.

(a) $\dfrac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$

Exponente del numerador; Exponente del denominador; Signo menos

(b) $\dfrac{p^6}{p^2} = p^{6-2} = p^4, \quad p \neq 0$

(c) $\dfrac{12^{10}}{12^9} = 12^{10-9} = 12^1 = 12$

(d) $\dfrac{7^4}{7^6} = 7^{4-6} = 7^{-2} = \dfrac{1}{7^2}$

(e) $\dfrac{k^7}{k^{12}} = k^{7-12} = k^{-5} = \dfrac{1}{k^5}, \quad k \neq 0$

■

EJEMPLO 8 Escriba cada cociente sólo con exponentes positivos.

(a) $\dfrac{2^7}{2^{-3}} = 2^{7-(-3)} = 2^{10}$

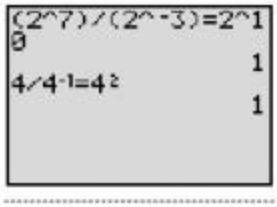
(b) $\dfrac{8^{-2}}{8^5} = 8^{-2-5} = 8^{-7} = \dfrac{1}{8^7}$

(c) $\dfrac{6^{-5}}{6^{-2}} = 6^{-5-(-2)} = 6^{-3} = \dfrac{1}{6^3}$

(d) $\dfrac{4}{4^{-1}} = \dfrac{4^1}{4^{-1}} = 4^{1-(-1)} = 4^2$

(e) $\dfrac{z^{-5}}{z^{-8}} = z^{-5-(-8)} = z^3, \quad z \neq 0$

■



Esta pantalla apoya los resultados de los incisos (a) y (d) del ejemplo 8.

La expresión $(3^4)^2$ se simplifica como $(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^{4+4} = 3^8$, donde $4 \cdot 2 = 8$. Este ejemplo ilustra la primera de las **reglas de potencia para exponentes**; las otras dos partes se demuestran con ejemplos similares.

Reglas de potencia para exponentes

Si a y b son números reales y m y n son enteros, entonces

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^m = a^m b^m \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0).$$

En los enunciados de las reglas de los exponentes siempre se supone que el 0 nunca aparecerá elevado a una potencia negativa o a la 0.

EJEMPLO 9 Use una regla de potencia para los casos que siguen:

(a) $(p^5)^3 = p^{5 \cdot 3} = p^{24}$

(b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$

(c) $(3y)^4 = 3^4 y^4 = 81y^4$

(d) $(6p^7)^2 = 6^2 p^{7 \cdot 2} = 6^2 p^{14} = 36p^{14}$

(e) $\left(\dfrac{-2m^5}{z}\right)^3 = \dfrac{(-2)^3 m^{5 \cdot 3}}{z^3} = \dfrac{(-2)^3 m^{15}}{z^3} = \dfrac{-8m^{15}}{z^3}, \quad z \neq 0$

■

Observe que

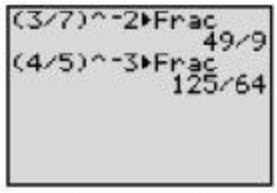
$$6^{-3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-3} = \frac{1}{216} \quad \text{y} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}.$$

Éstos son ejemplos de dos reglas especiales para exponentes negativos que se aplican cuando se trabaja con fracciones.

Reglas especiales para exponentes negativos

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n} \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$



Esta pantalla apoya los resultados del ejemplo 10.

EJEMPLO 10 Escriba las expresiones que siguen sólo con exponentes positivos y después resuélvalas.

(a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{2} = \frac{49}{9}$ **(b)** $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3} = \frac{125}{64}$ ■

A continuación se resumen las definiciones y reglas de esta sección.

Definiciones y reglas de los exponentes

Las siguientes reglas se aplican a todos los enteros m y n y todos los números reales a y b.

Regla del producto $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Regla del cociente $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$

Exponente cero $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

Exponente negativo $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$

Reglas de potencias $(a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^m = a^m b^m$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$$

Reglas especiales para exponentes negativos

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n \quad (a \neq 0) \qquad \frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n} \quad (a, b \neq 0)$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n} \quad (a \neq 0)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} \quad (a, b \neq 0)$$

EJEMPLO 11 Simplifique cada expresión de modo que en el resultado final no aparezcan exponentes negativos. Suponga que todas las variables representan números reales diferentes de 0.

(a) $3^2 \cdot 3^{-5} = 3^{2+(-5)} = 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3}$ o $\dfrac{1}{27}$

(b) $x^{-3} \cdot x^{-4} \cdot x^2 = x^{-3+(-4)+2} = x^{-5} = \dfrac{1}{x^5}$

(c) $(4^{-2})^{-5} = 4^{(-2)(-5)} = 4^{10}$

(d) $(x^{-4})^6 = x^{(-4)6} = x^{-24} = \dfrac{1}{x^{24}}$

(e)
$$\frac{x^{-4}y^2}{x^2y^{-5}} = \frac{x^{-4}}{x^2} \cdot \frac{y^2}{y^{-5}}$$
$$= x^{-4-2} \cdot y^{2-(-5)}$$
$$= x^{-6}y^7$$
$$= \frac{y^7}{x^6}$$

(f)
$$(2^3x^{-2})^{-2} = (2^3)^{-2} \cdot (x^{-2})^{-2}$$
$$= 2^{-6}x^4$$
$$= \frac{x^4}{2^6} \text{ o } \frac{x^4}{64}$$

■

Notación científica Muchos de los números que se utilizan en la ciencia son muy grandes, por ejemplo, el número de organismos unicelulares que alimentan a una ballena durante unas cuantas horas: 400,000,000,000,000. Otros números son muy pequeños, como la longitud de la onda más corta de la luz visible, de aproximadamente .0000004 metros. La escritura de estos números se simplifica si se emplea la *notación científica*.

Notación científica

Un número está escrito en notación científica si está expresado en la siguiente forma:

$$a \times 10^n,$$

donde $1 \leq |a| < 10$, y n es un entero.

Según se ha establecido en la definición, la notación científica requiere que el número se escriba como el producto de un número entre 1 y 10 (o -1 y -10) y alguna potencia entera de 10 (se permite 1 y -1 como valores de a, pero 10 y -10 no). Por ejemplo, como

$$8000 = 8 \cdot 1000 = 8 \cdot 10^3,$$

el número 8000 se escribe en notación científica así

$$8000 = 8 \times 10^3.$$

Al usar notación científica, para denotar la multiplicación se acostumbra usar $\times$ en lugar de un punto.

A continuación se presentan los pasos necesarios para la escritura de un número en notación científica (si el número es negativo, ignore el signo menos, ejecute los pasos y después agregue el signo negativo al resultado).

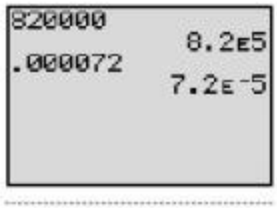
Conversión a notación científica

Paso 1: **Colocar el punto decimal.** Dibuje un separador, ∧, a la derecha del primer dígito distinto de 0, donde se colocará el punto decimal.

Paso 2: **Determine el numeral del exponente.** Cuente el número de dígitos entre el punto decimal y el separador. Este número da el valor absoluto del exponente del 10.

Paso 3: **Determine el signo del exponente.** Decida si la multiplicación por 10^n debe hacer que el resultado del paso 1 sea más grande o más pequeño. El exponente debe ser positivo para que el resultado sea mayor, y negativo para que el resultado sea más pequeño.

Es útil recordar que para $n \geq 1$, $10^{-n} < 1$ y $10^n \geq 10$.



Si una calculadora gráfica se fija en modo de notación científica, dará resultados como los que se muestran aquí. E5 significa *por* 10^5 y E-5 significa *por* 10^{-5}. Compare con los resultados del ejemplo 12.

EJEMPLO 12 Convierta cada número de notación estándar a científica.

(a) 820,000

Se coloca un separador a la derecha del 8 (primer dígito diferente de 0) para que señale la nueva localización del punto decimal.

$$8\wedge 20{,}000$$

Se cuenta a partir del punto decimal, se sobreentiende que está después del último 0, hacia el separador.

$$8\underbrace{\wedge 20{,}000.}_{\text{La cuenta da 5 lugares.}} \leftarrow \text{Punto decimal}$$

Como el número 8.2 va a hacerse más grande, el exponente del 10 es positivo.

$$820{,}000 = 8.2 \times 10^5$$

(b) .000072

Se cuenta de izquierda a derecha.

$$.00007\underbrace{\wedge 2}_{5 \text{ lugares}}$$

Como el número 7.2 ha de hacerse más pequeño, el exponente del 10 es negativo.

$$.000072 = 7.2 \times 10^{-5}$$ ■

Para convertir un número escrito en notación científica a notación estándar, se trabaja a la inversa.

Conversión de notación científica a notación estándar

Si se multiplica un número por una potencia positiva de 10 lo hará más grade, por lo que hay que mover el punto decimal a la derecha si n es positivo en 10^n.

Al multiplicar un número por una potencia negativa de 10 se hará más pequeño, por lo que el punto decimal se moverá a la izquierda si n es negativo.

Si n es igual a 0, se deja el punto decimal donde está.

EJEMPLO 13 Escriba cada número en notación estándar.

(a) $6.93 \times 10^5 = 6.93\underbrace{000}_{\text{5 lugares}}$

El punto decimal se movió 5 lugares a la derecha (fue necesario agregar 3 ceros).

$$6.93 \times 10^5 = 693{,}000$$

(b) $4.7 \times 10^{-6} = \underbrace{000004}_{\text{6 lugares}}.7$ Se agregan los 0 que se necesiten.

El punto decimal se movió 6 lugares a la izquierda. Por tanto,

$$4.7 \times 10^{-6} = .0000047.$$

(c) $-1.083 \times 10^0 = -1.083$ ■

Con objeto de simplificar cálculos se utiliza notación científica y las reglas de los exponentes.

EJEMPLO 14 Evaluar $\dfrac{1{,}920{,}000 \times .0015}{.000032 \times 45{,}000}$ utilizando notación científica.

En primer lugar, se expresan todos los números en notación científica.

$$\begin{aligned}
\frac{1{,}920{,}000 \times .0015}{.000032 \times 45{,}000} &= \frac{1.92 \times 10^6 \times 1.5 \times 10^{-3}}{3.2 \times 10^{-5} \times 4.5 \times 10^4} \\
&= \frac{1.92 \times 1.5 \times 10^6 \times 10^{-3}}{3.2 \times 4.5 \times 10^{-5} \times 10^4} && \text{Propiedades conmutativa y asociativa} \\
&= \frac{1.92 \times 1.5}{3.2 \times 4.5} \times 10^4 && \text{Reglas del producto y del cociente} \\
&= .2 \times 10^4 && \text{Se simplifica.} \\
&= (2 \times 10^{-1}) \times 10^4 \\
&= 2 \times 10^3 \\
&= 2000
\end{aligned}$$

■



EJEMPLO 15 En 1990, el gasto nacional en salud fue de $695,000 millones. En 2000, esta cifra había aumentado en un factor de 1.9; es decir, casi se duplicó en sólo 10 años. (*Fuente:* Centros de Medicare y Medicaid Services.)

(a) Escriba el gasto en salud de 1990, con el uso de notación científica.

$$\begin{aligned} 695.6 \text{ mil millones} &= 695.6 \times 10^9 = (6.956 \times 10^2) \times 10^9 \\ &= 6.956 \times 10^{11} \qquad \text{Regla del producto} \end{aligned}$$

En 1990, el gasto en salud fue de $\$6.956 \times 10^{11}$.

(b) ¿Cuál fue el gasto en 2000?

Multiplique el resultado del inciso (a) por 1.9.

$$\begin{aligned} (6.956 \times 10^{11}) \times 1.9 &= (1.9 \times 6.956) \times 10^{11} \qquad \text{Propiedades conmutativa y asociativa} \\ &= 13.216 \times 10^{11} \qquad \text{Redondear a tres cifras decimales.} \end{aligned}$$

El gasto en 2000 fue de $1,321,600,000,000, más de $1000 billones. ■

7.5 EJERCICIOS

Relacione las expresiones exponenciales de los ejercicios 1 a 6 con sus equivalentes en los incisos A a F. Es posible que se usen una vez, más de una vez, o bien, ninguna.

1. $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ **2.** $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ **3.** $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **4.** $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}$ **5.** $-\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ **6.** $-\left(-\frac{5}{3}\right)^2$

A. $\frac{25}{9}$ **B.** $-\frac{25}{9}$ **C.** $\frac{9}{25}$ **D.** $-\frac{9}{25}$ **E.** ninguno de los anteriores **F.** todos los anteriores

Calcule cada expresión exponencial.

7. 5^4 **8.** 10^3 **9.** $(-2)^5$ **10.** $(-5)^4$

11. -2^3 **12.** -3^2 **13.** $-(-3)^4$ **14.** $-(-5)^2$

15. 7^{-2} **16.** 4^{-1} **17.** -7^{-2} **18.** -4^{-1}

19. $\frac{2}{(-4)^{-3}}$ **20.** $\frac{2^{-3}}{3^{-2}}$ **21.** $\frac{5^{-1}}{4^{-2}}$ **22.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

23. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ **24.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ **25.** $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$ **26.** $3^{-1} + 2^{-1}$

27. $4^{-1} + 5^{-1}$ **28.** 8^0 **29.** 12^0 **30.** $(-23)^0$

31. $(-4)^0$ **32.** -2^0 **33.** $3^0 - 4^0$ **34.** $-8^0 - 7^0$

35. A fin de elevar una fracción a una potencia negativa, se cambia la fracción a su _____ y se cambia el exponente a la _____ _____ del exponente original.

36. Explique en sus propias palabras cómo elevar una potencia a otra potencia.

37. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es correcta?

A. $-\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ **B.** $\frac{3^{-1}}{4^{-1}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$

C. $\frac{3^{-1}}{4} = \frac{3}{4^{-1}}$ **D.** $\frac{3^{-1}}{4^{-1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

38. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es correcta?

A. $(3r)^{-2} = 3^{-2}r^{-2}$ **B.** $3r^{-2} = (3r)^{-2}$

C. $(3r)^{-2} = \frac{1}{(3r)^2}$ **D.** $(3r)^{-2} = \frac{r^{-2}}{9}$

Use las reglas del producto, cociente y potencia para simplificar cada expresión. Escriba las respuestas sólo con exponentes positivos. Suponga que todas las variables representan números reales distintos de 0.

39. $x^{12} \cdot x^4$ **40.** $\frac{x^{12}}{x^4}$ **41.** $\frac{5^{17}}{5^{16}}$ **42.** $\frac{3^{12}}{3^{13}}$

43. $\frac{3^{-5}}{3^{-2}}$ **44.** $\frac{2^{-4}}{2^{-3}}$ **45.** $\frac{9^{-1}}{9}$ **46.** $\frac{12}{12^{-1}}$

47. t^5t^{-12} **48.** p^5p^{-6} **49.** $(3x)^2$ **50.** $(-2x^{-2})^2$

51. $a^{-3}a^2a^{-4}$ **52.** $k^{-5}k^{-3}k^4$ **53.** $\frac{x^7}{x^{-4}}$ **54.** $\frac{p^{-3}}{p^5}$

55. $\frac{r^3r^{-4}}{r^{-2}r^{-5}}$ **56.** $\frac{z^{-4}z^{-2}}{z^3z^{-1}}$ **57.** $7k^2(-2k)(4k^{-5})$ **58.** $3a^2(-5a^{-6})(-2a)$

59. $(z^3)^{-2}z^2$ **60.** $(p^{-1})^3p^{-4}$ **61.** $-3r^{-1}(r^{-3})^2$ **62.** $2(y^{-3})^4(y^6)$

63. $(3a^{-2})^3(a^3)^{-4}$ **64.** $(m^5)^{-2}(3m^{-2})^3$ **65.** $(x^{-5}y^2)^{-1}$ **66.** $(a^{-3}b^{-5})^2$

67. Cuál de las expresiones que siguen *no* representa el recíproco de x ($x \neq 0$)?

A. x^{-1} **B.** $\frac{1}{x}$ **C.** $\left(\frac{1}{x^{-1}}\right)^{-1}$ **D.** $-x$

68. ¿Cuál de las expresiones siguientes *no* está en notación científica?

A. 6.02×10^{23} **B.** 14×10^{-6}

C. 1.4×10^{-5} **D.** 3.8×10^3

Convierta cada número de notación estándar a notación científica.

69. 230 **70.** 46,500 **71.** .02 **72.** .0051

Convierta cada número de notación científica a notación estándar.

73. 6.5×10^3 **74.** 2.317×10^5 **75.** 1.52×10^{-2} **76.** 1.63×10^{-4}

Utilice notación científica para realizar cada uno de los siguientes cálculos. Exprese las respuestas en notación científica.

77. $\frac{.002 \times 3900}{.000013}$ **78.** $\frac{.009 \times 600}{.02}$ **79.** $\frac{.0004 \times 56{,}000}{.000112}$

80. $\frac{.018 \times 20{,}000}{300 \times .0004}$ **81.** $\frac{840{,}000 \times .03}{.00021 \times 600}$ **82.** $\frac{28 \times .0045}{140 \times 1500}$

Resuelva cada uno de los problemas.

83. ***Presupuesto de la NASA*** El presupuesto proyectado de la NASA (Administración Nacional de la Aeronáutica y el Espacio) para 2003 es de $13,757,400,000. Escriba esta cifra en notación científica. (*Fuente:* U.S. National Aeronautics and Space Administration.)

84. ***Registros de vehículos de motor*** En 1997, en Estados Unidos hubo 207,754,000 registros de vehículos. Escriba esta cantidad en notación científica. (*Fuente:* Federal Highway Administration.)

85. ***Presupuesto de Estados Unidos*** En 1917, el presupuesto aprobado de Estados Unidos fue de $1,000,000,000. En 1987, es decir, 70 años después, excedió $1,000,000,000,000 por primera vez. La solicitud del presidente George Bush para el presupuesto fiscal de 2003 fue de $2,128,000,000,000. Si esta cantidad se reuniera en billetes de 1 dólar, ocuparía 144,419 millas, casi dos tercios de la distancia a la Luna. Escriba estos cuatro números en notación científica. (*Fuente: The Gazette,* 5 de febrero de 2002.)

86. ***Empleados de Wal-Mart*** En 1970, Wal-Mart tenía 1500 empleados. En 1997 se convirtió en el empleador privado más grande de Estados Unidos, con 680,000 trabajadores. En 1999, con 1,100,000 empleados se convirtió en el más grande del mundo. Para 2007, la compañía espera tener 2,200,000 trabajadores. Escriba estos cuatro números en notación científica. (*Fuente:* Wal-Mart.)

Datos astronómicos *Cada una de las siguientes afirmaciones proviene de* Astronomy! A Brief Edition, *por James B. Kaler (Addison-Wesley, 1997). Si el número en la afirmación se encuentra en notación científica, escríbalo en notación estándar sin usar exponentes. Si estuviera en notación estándar, escríbalo en notación científica.*

87. Multiplicar esta vista para todo el cielo lleva a una cuenta de galaxias de más de *10 billones* (p. 496).

88. La circunferencia de la órbita solar es ____, aproximadamente 4.7 millones de kilómetros… (en referencia a la órbita de Júpiter, p. 395).

89. La luminosidad solar requiere que 2×10^9 kilogramos de masa se conviertan en energía cada segundo (p. 327).

90. Como máximo, una partícula de rayo cósmico —núcleo atómico de sólo 10^{-13} cm de sección transversal— puede contener la energía de una pelota de béisbol lanzada por un profesional (p. 445).

Resuelva cada problema.

91. ***Velocidad de las computadoras*** El 28 de octubre de 1998, IBM anunció una computadora capaz de realizar 3.9×10^8 operaciones por segundo. Era 15,000 veces más rápida que una computadora de escritorio normal de esa época. ¿Cuál era el número de operaciones que la máquina de escritorio normal podía ejecutar? (*Fuente:* IBM.)

92. ***Lotería Powerball*** En los primeros años de la lotería *Powerball*, un jugador tenía que escoger cinco números entre 1 y 49 y otro de 1 a 42. Puede demostrarse que existen aproximadamente 8.009×10^7 maneras diferentes de hacer esto. Suponga que un grupo de 2000 personas decidió comprar boletos para todos esos números y que cada boleto costaba $1.00. ¿Cuánto hubiera pagado cada persona? (*Fuente:* www.powerball.com)



93. ***Distancia de Urano al Sol*** Un pársec, unidad de longitud que se usa en astronomía, equivale a 8.009×10^7 millas. La distancia media de Urano al Sol es de 1.8×10^7 millas. ¿Cuántos pársecs hay de Urano al Sol?

94. ***Número de pulgadas en una milla*** Una pulgada equivale aproximadamente a 1.57828×10^{-5} millas. Encuentre el recíproco de este número para determinar el número de pulgadas que hay en una milla.

95. ***Velocidad de la luz*** La velocidad de la luz es de aproximadamente 3×10^{10} centímetros por segundo. ¿Cuánto tiempo le tomará viajar 9×10^{12} centímetros?

96. ***Cohete de la Tierra al Sol*** La distancia promedio de la Tierra al Sol es de 9.3×10^7 millas. ¿Cuánto tiempo le tomaría a un cohete, que viaje a 2.9×10^3 millas por hora, llegar al Sol?

97. ***Millas en un año luz*** Un *año luz* es la distancia que viaja la luz en un año. Encuentre el número de millas en un año luz si ésta viaja 1.86×10^5 millas por segundo.

98. ***Tiempo de viaje de la luz*** Utilice la información de los dos ejercicios anteriores para calcular el número de minutos necesario para que la luz del Sol alcance la Tierra.

99. ***Cohete de Venus a Mercurio*** El planeta Mercurio está a una distancia promedio del Sol de 3.6×10^7 millas, mientras que la distancia media de Venus al Sol es de 6.7×10^7 millas. ¿Cuánto tiempo le tomaría a una nave espacial que viaje 1.55×10^3 millas por hora, trasladarse de Venus a Mercurio? Suponga que el tiempo de duración del viaje pudiera medirse de modo que su principio y su fin ocurrieran cuando los dos planetas estuvieran a una distancia promedio y en la misma dirección del Sol (dé su respuesta en horas, sin notación científica).

100. ***Distancia de un objeto a la Luna*** Cuando la distancia entre los centros de la Luna y la Tierra es de 4.60×10^8 metros, un objeto que esté en la línea entre sus centros ejerce la misma fuerza gravitacional sobre cada uno cuando se encuentra a 4.14×10^8 metros del centro de la Tierra. ¿Qué tan lejos del centro de la Luna está el objeto en dicho punto?



Información sobre ataques cardiacos *La gráfica muestra el número estimado de estadounidenses, por edad y sexo, que sufren ataques al corazón.*

Utilice notación científica para representar los números de personas en las siguientes categorías:

101. Hombres, 29-44

102. Mujeres, 29-44

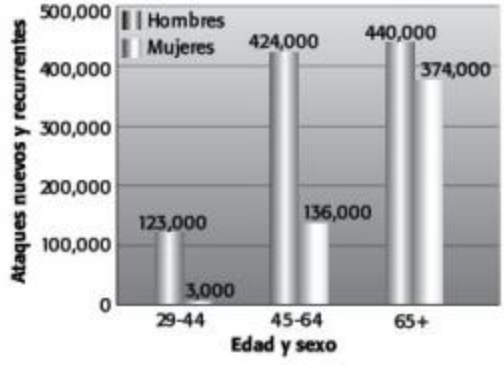
103. Hombres, 45-64

104. Mujeres, 45-64

105. Hombres, 65 o más

106. Mujeres, 65 o más

NÚMERO ESTIMADO ANUAL DE ESTADOUNIDENSES QUE SUFREN ATAQUES AL CORAZÓN



Fuente: American Heart Association and Framingham Heart Study, 24-year follow-up.

7.6 Polinomios y factorización

Terminología básica Un **término** o **monomio** se define como un número, variable o producto de números y variables. Un **polinomio** es un término o suma finita o diferencia de términos con sólo exponentes enteros no negativos en las variables. Si los términos de un polinomio sólo contienen la variable x, entonces el polinomio se denomina **polinomio en x** (los polinomios en otras variables se definen en forma similar). Los siguientes son algunos ejemplos de polinomios:

$$5x^3 - 8x^2 + 7x - 4, \quad 9p^5 - 3, \quad 8r^2 \quad \text{y} \quad 6.$$

La expresión $9x^2 - 4x - \frac{6}{x}$ no es un polinomio debido a la presencia de $-\frac{6}{x}$. Los términos de un polinomio no pueden tener variables en el denominador.

El exponente más grande de un polinomio en una variable es el **grado** del polinomio. Se dice que una constante distinta de 0 tiene grado 0 (l polinomio 0 no tiene grado). Por ejemplo, $3x^6 - 5x^2 + 2x + 3$ es un polinomio de grado 6.

Un polinomio puede tener más de una variable. Un término que contenga más de una variable tiene grado igual a la suma de todos los exponentes que aparezcan en las variables en el término. Por ejemplo, $-3x^4y^3z^5$ es de grado $4 + 3 + 5 = 12$. El grado de un polinomio en más de una variable es igual al grado más alto de cualquier término que aparezca en el polinomio. Según esta definición, el polinomio

$$2x^4y^3 - 3x^5y + x^6y^2$$

es de grado 8 debido al término x^6y^2.

Un polinomio que contenga exactamente tres términos se denomina **trinomio**, y uno con exactamente dos términos es un **binomio**. Por ejemplo, $7x^9 - 8x^4 + 1$ es un trinomio de grado 9. La tabla muestra varios polinomios y proporciona el grado y tipo de cada uno.

Polinomio	Grado	Tipo
$9p^7 - 4p^3 + 8p^3$	7	Trinomio
$29x^{11} + 8x^{15}$	15	Binomio
$-10r^6s^8$	14	Monomio
$5a^3b^7 - 3a^6b^5 + 4a^3b^9 - a^{10}$	11	Ninguno de los anteriores

Suma y resta Como las variables que se usan en los polinomios representan números reales, un polinomio representa un número real. Esto significa que todas las propiedades de los números reales que se mencionan en este libro se cumplen para los polinomios. En particular, se cumple la propiedad distributiva, así:

$$3m^5 - 7m^5 = (3 - 7)m^5 = -4m^5.$$

Los **términos semejantes** son aquellos que tienen exactamente los mismos factores variables. De esta manera, los polinomios se suman con la adición de los coeficientes de los términos semejantes; los polinomios se restan con la sustracción de los coeficientes de los términos semejantes.

EJEMPLO 1 Sumar o restar, según se indique.

(a) $(2y^4 - 3y^2 + y) + (4y^4 + 7y^2 + 6y)$
$= (2 + 4)y^4 + (-3 + 7)y^2 + (1 + 6)y$
$= 6y^4 + 4y^2 + 7y$

(b) $(-3m^3 - 8m^2 + 4) - (m^3 + 7m^2 - 3)$
$= (-3 - 1)m^3 + (-8 - 7)m^2 + [4 - (-3)]$
$= -4m^3 - 15m^2 + 7$

(c) $8m^4p^5 - 9m^3p^5 + (11m^4p^5 + 15m^3p^5) = 19m^4p^5 + 6m^3p^5$

(d) $4(x^2 - 3x + 7) - 5(2x^2 - 8x - 4)$
$= 4x^2 + 4(3x) + 4(7) - 5(2x^2) - 5(-8x) - 5(-4)$ Propiedad distributiva
$= 4x^2 - 12x + 28 - 10x^2 + 40x + 20$ Propiedad asociativa
$= -6x^2 + 28x + 48$ Sumar términos semejantes. ■

Como se aprecia en los incisos (a), (b) y (d) del ejemplo 1, los polinomios en una variable con frecuencia se escriben con sus términos en **potencias decrecientes**; de manera que el término con el grado más alto se coloca primero, el que le sigue en grado va en segundo lugar y así sucesivamente.

Multiplicación Las propiedades asociativa y distributiva, junto con las propiedades de los exponentes, también se usan para encontrar el producto de dos polinomios. Por ejemplo, para encontrar el producto de $3x - 4$ y $2x^2 - 3x + 5$, considere a $3x - 4$ como una sola expresión y use la propiedad distributiva del modo siguiente:

$$(3x - 4)(2x^2 - 3x + 5) = (3x - 4)(2x^2) - (3x - 4)(3x) + (3x - 4)(5)$$

Ahora se usa la propiedad distributiva tres veces consecutivas a la derecha del símbolo de igualdad, para obtener:

$$\begin{aligned}(3x-4)(2x^2-3x+5)&=(3x)(2x^2)-4(2x^2)-(3x)(3x)-(-4)(3x)+(3x)5-4(5)\\&=6x^3-8x^2-9x^2+12x+15x-20\\&=6x^3-17x^2+27x-20.\end{aligned}$$

A veces es más conveniente escribir dicho producto en forma vertical, como sigue:

$$\begin{array}{rl} 2x^2-3x+5 & \\ \hline 3x-4 & \\ \hline -8x^2+12x-20 & \leftarrow -4(2x^2-3x+5)\\ 6x^3-9x^2+15x & \leftarrow 3x(2x^2-3x+5)\\ \hline 6x^3-17x^2+27x-20 & \text{Sumar en columnas.}\end{array}$$

EJEMPLO 2 Multiplicar $(3p^2-4p+1)(p^3+2p-8)$.

Multiplique cada término del segundo polinomio por cada término del primero y sume estos productos. Con polinomios de más de dos términos, es más eficiente trabajar en forma vertical, para lo que los términos semejantes se escriben en columnas.

$$\begin{array}{rl} 3p^2-4p+1 & \\ \hline p^3+2p-8 & \\ \hline -24p^2+32p-8 & \text{Multiplicar } 3p^2-4p+1 \text{ por } -8.\\ 6p^3-8p^2+2p & \text{Multiplicar } 3p^2-4p+1 \text{ por } 2p.\\ 3p^5-4p^4+p^3 & \text{Multiplicar } 3p^2-4p+1 \text{ por } p^3.\\ \hline 3p^5-4p^4+7p^3-32p^2+34p-8 & \text{Sumar en columnas.}\end{array}$$

■

El método PADU es una forma conveniente de calcular el producto de dos binomios. El recurso nemotécnico que llamamos PADU (Primero, Afuera, Dentro, Último) señala los pares de términos que deben multiplicarse para obtener el producto, como se muestra en los ejemplos siguientes.

El producto especial

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

se usa para resolver algunos problemas de multiplicación. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}51\times 49&=(50+1)(50-1)\\&=50^2-1^2\\&=2500-1\\&=2499\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}102\times 98&=(100+2)(100-2)\\&=100^2-2^2\\&=10{,}000-4\\&=9996.\end{aligned}$$

Una vez que se identifican estos patrones, las multiplicaciones de este tipo se pueden hacer mentalmente.

EJEMPLO 3 Obtenga cada producto.

P A D U

(a) $(6m+1)(4m-3)=(6m)(4m)+(6m)(-3)+1(4m)+1(-3)$
$=24m^2-14m-3$

(b) $(2x+7)(2x-7)=4x^2-14x+14x-49$
$=4x^2-49$

■

En el inciso (a) del ejemplo 3, el producto de dos binomios fue un trinomio, mientras que en el inciso (b) el producto de dos binomios fue otro binomio. El producto de dos binomios de la forma $x+y$ y $x-y$ siempre es un binomio. Compruebe con una multiplicación que lo siguiente es verdadero.

Producto de la suma y la diferencia de dos términos

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

Este producto se denomina la **diferencia de dos cuadrados**. Como los productos de este tipo son frecuentes, es importante reconocer cuándo debe usarse este patrón.

EJEMPLO 4 Calcule cada producto.

(a) $(3p + 11)(3p - 11)$

Con el uso del patrón anterior, reemplace x con $3p$ y y con 11.

$$(3p + 11)(3p - 11) = (3p)^2 - 11^2 = 3p^2 - 121$$

(b) $(5m^3 - 3)(5m^3 + 3) = (5m^3)^2 - 3^2 = 25m^6 - 9$

(c) $(9k - 11r^3)(9k + 11r^3) = (9k)^2 - (11r^3)^2 = 81k^2 - 121r^6$ ■

Los **cuadrados de un binomio** también son productos especiales.

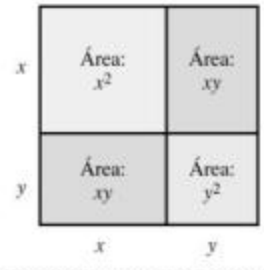
Cuadrado de un binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

EJEMPLO 5 Calcule cada producto.

(a) $(2m + 5)^2 = (2m)^2 + 2(2m)(5) + (5)^2$
$= 4m^2 + 20m + 25$

(b) $(3x - 7y^4)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(7y^4) + (7y^4)^2$
$= 9x^2 - 42xy^4 + 49y^8$ ■



El producto especial

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

se ilustra en forma geométrica por medio del diagrama que se aprecia. Cada lado del cuadrado grande tiene una longitud de $x + y$, por lo que el área del cuadrado es

$$(x + y)^2.$$

El cuadrado grande está constituido por dos cuadrados más pequeños y dos rectángulos congruentes. La suma de las áreas de dichas figuras es

$$x^2 + 2xy + y^2.$$

Como estas expresiones representan la misma cantidad, deben ser iguales, lo que nos da el patrón para elevar al cuadrado un binomio

Como se observó en el ejemplo 5, el cuadrado de un binomio tiene tres términos. Es frecuente que los estudiantes cometan el error de tomar $x^2 + y^2$ como equivalente del producto $(x + y)^2$. Hay que tener cuidado de evitar esta equivocación.

El proceso de encontrar los polinomios cuyo producto es igual a un polinomio dado se denomina **factorización**. Por ejemplo, puesto que $4x + 12 = 4(x + 3)$, tanto 4 como $x + 3$ se llaman **factores** de $4x + 12$. Asimismo, $4(x + 3)$ se llama **forma factorizada** de $4x + 12$. Un polinomio que no pueda escribirse como el producto de dos polinomios con coeficientes enteros es un **polinomio primo**. Un polinomio está **factorizado por completo** cuando está escrito como producto de polinomios primos con coeficientes enteros.

Factorización del máximo factor común Algunos polinomios se factorizan por medio de la propiedad distributiva. Por ejemplo, para factorizar $6x^2y^3 + 9xy^4 + 18y^5$, se busca un monomio que sea el máximo factor común de todos los términos del polinomio. Para este caso, el máximo factor común es $3y^3$. De acuerdo con la propiedad distributiva,

$$6x^2y^3 + 9xy^4 + 18y^5 = (3y^3)(2x^2) + (3y^3)(3xy) + (3y^3)(6y^2)$$
$$= 3y^3(2x^2 + 3xy + 6y^2).$$

EJEMPLO 6 Factorice el máximo factor común de cada polinomio.

(a) $9y^5 + y^2 = y^2 \cdot 9y^3 + y^2 \cdot 1$ El máximo común multiplicador es y^2.
$= y^2(9y^3 + 1)$

(b) $6x^2t + 8xt + 12t = 2t(3x^2 + 4x + 6)$

(c) $14m^4(m + 1) - 28m^3(m + 1) - 7m^2(m + 1)$

El máximo factor común es $7m^2(m + 1)$. Se usa la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} &14m^4(m + 1) - 28m^3(m + 1) - 7m^2(m + 1) \\ &= [7m^2(m + 1)](2m^2 - 4m - 1) \\ &= 7m^2(m + 1)(2m^2 - 4m - 1) \end{aligned}$$

■

Factorización por agrupación Cuando un polinomio tiene más de tres términos a veces se factoriza según un método que se denomina **factorización por agrupación**. Por ejemplo, para factorizar

$$ax + ay + 6x + 6y,$$

se reúnen los términos en dos grupos de modo que cada grupo tenga un factor común.

$$ax + ay + 6x + 6y = (ax + ay) + (6x + 6y)$$

Se factoriza cada grupo para obtener:

$$ax + ay + 6x + 6y = a(x + y) + 6(x + y).$$

La cantidad $(x + y)$ ahora es un factor común, que se factoriza y produce:

$$ax + ay + 6x + 6y = (x + y)(a + 6).$$

No siempre es obvio cuáles términos deben agruparse. La experiencia y la práctica que dan los muchos intentos son las herramientas más confiables para factorizar por agrupación.

EJEMPLO 7 Factorice por agrupación.

(a) $mp^2 + 7m + 3p^2 + 21 = (mp^2 + 7m) + (3p^2 + 21)$ Agrupar los términos.
$= m(p^2 + 7) + 3(p^2 + 7)$ Se factoriza cada grupo.
$= (p^2 + 7)(m + 3)$ $p^2 + 7$ es un factor común.

(b) $2y^2 - 2z - ay^2 + az = (2y^2 - 2z) + (-ay^2 + az)$
$= 2(y^2 - z) + a(-y^2 + z)$ Se factoriza cada grupo.

La expresión $-y^2 + z$ es el negativo de $y^2 - z$, por lo que se factoriza $-a$ en lugar de a.

$= 2(y^2 - z) - a(y^2 - z)$ Factorizar $-a$.
$= (y^2 - z)(2 - a)$ Factorizar $y^2 - z$.

■

Factorización de trinomios Factorizar es lo opuesto de multiplicar. Como el producto de dos binomios por lo general es un trinomio, se espera que los trinomios favorables (los que tienen términos sin factor común) tengan dos factores con forma de binomio. Así, la factorización de trinomios requiere el empleo del método PADU mencionado antes.

EJEMPLO 8 Factorice cada trinomio.

(a) $4y^2 - 11y + 6$

Para factorizar este polinomio, deben hallarse enteros a, b, c y d, tales que

$$4y^2 - 11y + 6 = (ay + b)(cy + d).$$

Con el empleo de PADU se observa que $ac = 4$ y $bd = 6$. Los factores positivos de 4 son 4 y 1, o 2 y 2. Como el término del medio es negativo, se consideran sólo los factores negativos de 6. Las posibilidades son -2 y -3 o -1 y -6. Ahora se prueba con varios arreglos de estos factores hasta que se encuentre uno que dé el coeficiente correcto de y.

$$(2y - 1)(2y - 6) = 4y^2 - 14y + 6 \quad \text{Incorrecto}$$
$$(2y - 2)(2y - 3) = 4y^2 - 10y + 6 \quad \text{Incorrecto}$$
$$(y - 2)(4y - 3) = 4y^2 - 11y + 6 \quad \text{Correcto}$$

El último intento da la factorización correcta.

(b) $6p^2 - 7p - 5$

De nuevo, se prueban varias posibilidades. Los factores positivos de 6 pueden ser 2 y 3 o 1 y 6. Como factores de -5 solo se tiene a -1 y 5 o -5 y 1. Se intenta con combinaciones diferentes de estos factores hasta que se encuentra la correcta.

$$(2p - 5)(3p + 1) = 6p^2 - 13p - 5 \quad \text{Incorrecto}$$
$$(3p - 5)(2p + 1) = 6p^2 - 7p - 5 \quad \text{Correcto}$$

Así, la expresión $6p^2 - 7p - 5$ se factoriza como $(3p - 5)(2p + 1)$. ■

Cada uno de los patrones especiales de multiplicación que se estudiaron se usa a la inversa para obtener un patrón de factorización. Los trinomios cuadrados perfectos se factorizan como sigue:

Trinomios cuadrados perfectos

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

EJEMPLO 9 Factorice cada polinomio.

(a) $16p^2 - 40pq + 25q^2$

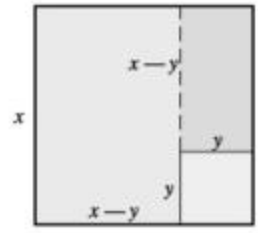
Como $16p^2 = (4p)^2$ y $25q^2 = (5q)^2$, se usa el segundo patrón de los que se muestran arriba con $4p$ que sustituye a x y $5q$ que reemplaza a y, para obtener

$$16p^2 - 40pq + 25q^2 = (4p)^2 - 2(4p)(5q) + (5q)^2$$
$$= (4p - 5q)^2.$$

Hay que asegurarse que el término del medio del trinomio que se factoriza, en este caso $-40pq$, es el doble del producto de los dos términos del binomio $4p - 5q$.

$$-40pq = 2(4p)(-5q)$$

(b) $169x^2 + 104xy^2 + 16y^4 = (13x + 4y^2)^2$, ya que $2(13x)(4y^2) = 104xy^2$. ■



En la parte superior se aprecia una demostración geométrica de la propiedad de la diferencia de cuadrados (la demostración sólo es válida para $x > y > 0$).

$$x^2 - y^2 = x(x - y) + y(x - y)$$
$$= (x - y)(x + y)$$

En el segundo paso se factoriza $x - y$.

Factorización de binomios El patrón para el producto de la suma y resta de dos términos da la factorización siguiente:

Diferencia de cuadrados

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

EJEMPLO 10 Factorice cada uno de los siguientes polinomios.

(a) $4m^2 - 9$

En primer lugar, se reconoce que $4m^2 - 9$ es una diferencia de cuadrados, ya que $4m^2 = (2m)^2$ y $9 = 3^2$. Se usa el patrón para la diferencia de cuadrados con $2m$ que sustituye a x y 3 que reemplaza a y. Al hacer esto se obtiene:

$$\begin{aligned} 4m^2 - 9 &= (2m)^2 - 3^2 \\ &= (2m + 3)(2m - 3). \end{aligned}$$

(b) $256k^4 - 625m^4$

Se usa dos veces el patrón de la diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned} 256k^4 - 625m^4 &= (16k^2)^2 - (25m^2)^2 \\ &= (16k^2 + 25m^2)(16k^2 - 25m^2) \\ &= (16k^2 + 25m^2)(4k + 5m)(4k - 5m) \end{aligned}$$

(c) $x^2 - 6x + 9 - y^4$

Se agrupan los tres términos para obtener un trinomio cuadrado perfecto. Después se usa el patrón de la diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 - y^4 &= (x^2 - 6x + 9) - y^4 \\ &= (x - 3)^2 - (y^2)^2 \\ &= [(x - 3) + y^2][(x - 3) - y^2] \\ &= (x - 3 + y^2)(x - 3 - y^2) \end{aligned}$$

■

A continuación se presentan dos resultados especiales de la factorización. Cada uno se comprueba si se multiplica el lado derecho de la ecuación.

Suma y diferencia de cubos

Suma de cubos $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Diferencia de cubos $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

EJEMPLO 11 Factorice cada polinomio.

(a) $x^3 + 27$

Observe que $27 = 3^3$, de modo que la expresión es una suma de cubos. Se usa el primero de los patrones que se expusieron antes.

$$x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

(b) $m^3 - 64n^3 = m^3 - (4n)^3$
$= (m - 4n)[m^2 + m(4n) + (4n)^2]$
$= (m - 4n)(m^2 + 4mn + 16n^2)$

(c) $8q^6 + 125p^9 = (2q^2) + (5p^3)^3$
$= (2q^2 + 5p^3)[(2q^2)^2 - (2q^2)(5p^3) + (5p^3)^2]$
$= (2q^2 + 5p^3)(4q^4 - 10q^2p^3 + 25p^6)$ ■

7.6 EJERCICIOS

Encuentre cada una de las siguientes sumas y restas.

1. $(3x^2 - 4x + 5) + (-2x^2 + 3x - 2)$

2. $(4m^3 - 3m^2 + 5) + (-3m^3 - m^2 + 5)$

3. $(12y^2 - 8y + 6) - (3y^2 - 4y + 2)$

4. $(8p^2 - 5p) - (3p^2 - 2p + 4)$

5. $(6m^4 - 3m^2 + m) - (2m^3 + 5m^2 + 4m) + (m^2 - m)$

6. $-(8x^3 + x - 3) + (2x^3 + x^2) - (4x^2 + 3x - 1)$

7. $5(2x^2 - 3x + 7) - 2(6x^2 - x + 12)$

8. $8x^2y - 3xy^2 + 2x^2y - 9xy^2$

Encuentre cada uno de los siguientes productos.

9. $(x + 3)(x - 8)$

10. $(y - 3)(y - 9)$

11. $(4r - 1)(7r + 2)$

12. $(5m - 6)(3m + 4)$

13. $4x^2(3x^3 + 2x^2 - 5x + 1)$

14. $2b^3(b^2 - 4b + 3)$

15. $(2m + 3)(2m - 3)$

16. $(8s - 3t)(8s + 3t)$

17. $(4m + 2n)^2$

18. $(a - 6b)^2$

19. $(5r + 3t^2)^2$

20. $(2z^4 - 3y)^2$

21. $(2z - 1)(-z^2 + 3z - 4)$

22. $(k + 2)(12k^3 - 3k^2 + k + 1)$

23. $(m - n + k)(m + 2n - 3k)$

24. $(r - 3s + t)(2r - s + t)$

25. $(a - b + 2c)^2$

26. $(k - y + 3m)^2$

27. ¿Cuál de los siguientes es un trinomio en potencias decrecientes, con grado 6?
A. $5x^6 - 4x^5 + 12$ **B.** $6x^5 - x^6 + 4$
C. $2x + 4x^2 - x^6$ **D.** $4x^6 - 6x^4 + 9x + 1$

28. Proporcione un ejemplo de polinomio de cuatro términos en la variable x, con grado 5, escrito en potencias decrecientes y que carezca de un término de cuarto grado.

29. El exponente en la expresión 6^3 es 3. Explique por qué el grado de 6^3 no es 3. ¿Cuál es su grado?

30. Explique en sus propias palabras, cómo elevar un binomio al cuadrado.

Factorice el máximo factor común de cada polinomio.

31. $8m^4 + 6m^3 - 12m^2$

32. $2p^5 - 10p^4 + 16p^3$

33. $4k^2m^3 + 8k^4m^3 - 12k^2m^4$

34. $28r^4s^2 + 7r^3s - 35r^4s^3$

35. $2(a + b) + 4m(a + b)$

36. $4(y - 2)^2 + 3(y - 2)$

37. $2(m - 1) - 3(m - 1)^2 + 2(m - 1)^3$

38. $5(a + 3)^3 - 2(a + 3) + (a + 3)^2$

Factorice cada uno de los polinomios siguientes con el método de agrupación.

39. $6st + 9t - 10s - 15$

40. $10ab - 6b + 35a - 21$

41. $rt^3 + rs^2 - pt^3 - ps^2$

42. $2m^4 + 6 - am^4 - 3a$

43. $16a^2 + 10ab - 24ab - 15b^2$

44. $15 - 5m^2 - 3r^2 + m^2r^2$

45. $20z^2 - 8zx - 45zx + 18x^2$

46. Considere el polinomio $1 - a + ab - b$. Una forma factorizada aceptable es $(1 - a)(1 - b)$. Sin embargo, existen otras formas también aceptables. ¿Cuál de las siguientes *no* es una forma factorizada de dicho polinomio?

A. $(a - 1)(b - 1)$
B. $(-a + 1)(-b + 1)$
C. $(-1 + a)(-1 + b)$
D. $(1 - a)(b + 1)$

Factorice cada trinomio.

47. $x^2 - 2x - 15$ **48.** $r^2 + 8r + 12$ **49.** $y^2 + 2y - 35$ **50.** $x^2 - 7x + 6$

51. $6a^2 - 48a - 120$ **52.** $8h^2 - 24h - 320$ **53.** $3m^3 + 12m^2 + 9m$

54. $9y^4 - 54y^3 + 45y^2$ **55.** $6k^2 + 5kp - 6p^2$ **56.** $14m^2 + 11mr - 15r^2$

57. $5a^2 - 7ab - 6b^2$ **58.** $12s^2 + 11st - 5t^2$ **59.** $9x^2 - 6x^3 + x^4$

60. $30a^2 + am - m^2$ **61.** $24a^4 + 10a^3b - 4a^2b^2$ **62.** $18x^5 + 15x^4z - 75x^3z^2$

63. Cuando durante un examen se dio a una estudiante el polinomio

$$4x^2 + 2x - 20$$

para que lo factorizara, perdió algunos puntos porque dio la respuesta $(4x + 10)(x - 2)$. Se quejó con su maestra porque el producto $(4x + 10)(x - 2)$ sí es $4x^2 + 2x - 20$. ¿Piensa usted que la maestra tenía razón en no darle el total de puntos? Explique su respuesta.

64. Diga por qué la mayoría de las personas encontraría que es más difícil factorizar

$$36x^2 - 44x - 15$$

que

$$37x^2 - 183x - 10.$$

Factorice cada una de las expresiones siguientes, con el método de factorización de un trinomio cuadrado perfecto. Tal vez sea necesario que primero se factorice un factor común.

65. $9m^2 - 12m + 4$ **66.** $16p^2 - 40p + 25$ **67.** $32a^2 - 48ab + 18b^2$

68. $20p^2 - 100pq + 125q^2$ **69.** $4x^2y^2 + 28xy + 49$ **70.** $9m^2n^2 - 12mn + 4$

Factorice cada diferencia de cuadrados.

71. $x^2 - 36$ **72.** $t^2 - 64$ **73.** $y^2 - w^2$ **74.** $25 - w^2$ **75.** $9a^2 - 16$

76. $16q^2 - 25$ **77.** $25s^4 - 9t^2$ **78.** $36z^2 - 81y^4$ **79.** $p^4 - 625$ **80.** $m^4 - 81$

Factorice cada suma o diferencia de cubos.

81. $8 - a^3$ **82.** $r^3 + 27$ **83.** $125x^3 - 27$

84. $8m^3 - 27n^3$ **85.** $27y^9 + 125z^6$ **86.** $27z^3 + 729y^3$

Cada una de las expresiones que siguen se factoriza por medio de alguno de los métodos descritos en esta sección. Decida cuál utilizar y luego factorice por completo el polinomio.

87. $x^2 + xy - 5x - 5y$ **88.** $8r^2 - 10rs - 3s^2$ **89.** $p^4(m - 2n) + q(m - 2n)$

90. $36a^2 + 60a + 25$ **91.** $4z^2 + 28z + 49$ **92.** $6p^4 + 7p^2 - 3$

93. $1000x^3 + 343y^3$ **94.** $b^2 + 8b + 16 - a^2$ **95.** $125m^6 - 216$

96. $q^2 + 6q + 9 - p^2$ **97.** $12m^2 + 16mn - 35n^2$ **98.** $216p^3 + 125q^3$

99. Por lo general, la suma de cuadrados no puede factorizarse. Por ejemplo $x^2 + y^2$ es primo. Observe que

$$x^2 + y^2 \neq (x + y)(x + y).$$

Si se elige $x = 4$ y $y = 2$, se demuestra que la desigualdad anterior se cumple.

100. El binomio

$$9x^2 + 36$$

es una suma de cuadrados. ¿Puede factorizarse? Si es así, factorícelo.

7.7 Ecuaciones cuadráticas y sus aplicaciones

Ecuaciones cuadráticas Recuerde que una ecuación lineal es aquella que puede escribirse en la forma $ax + b = c$, donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$.

Ecuación cuadrática

Una ecuación que pueda escribirse en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$, es una **ecuación cuadrática**.

(¿Por qué es necesaria la restricción $a \neq 0$?) Una ecuación cuadrática escrita como $ax^2 + bx + c = 0$ está en **forma estándar**.

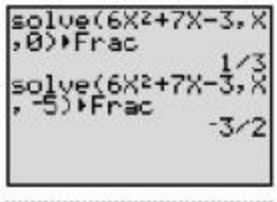
El método más simple de resolver una ecuación cuadrática, pero que no siempre se aplica con facilidad, es por factorización. Este método depende de la siguiente propiedad.

Propiedad de factor cero

Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, o ambos.

EJEMPLO 1 Resuelva $6x^2 + 7x = 3$.

$$\begin{aligned} 6x^2 + 7x &= 3 \\ 6x^2 + 7x - 3 &= 0 && \text{Forma estándar} \\ (3x - 1)(2x + 3) &= 0 && \text{Factorizar.} \end{aligned}$$



La herramienta *solve* da las dos soluciones de la ecuación del ejemplo 1. Observe que la elección de 0 conduce a la solución 1/3, mientras que la elección de −5 lleva a la solución −3/2. Compare lo anterior con el ejemplo 1.

De acuerdo con la propiedad del factor 0, el producto $(3x - 1)(2x + 3)$ es igual a 0 sólo si

$$\begin{aligned} 3x - 1 = 0 \quad &\text{o} \quad 2x + 3 = 0 \\ 3x = 1 \quad &\text{o} \quad 2x = -3 \\ x = \frac{1}{3} \quad &\text{o} \quad x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Se comprueba con la sustitución de $\frac{1}{3}$ y después de $-\frac{3}{2}$ en la ecuación original. El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right\}$. ■

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = k$, $k \geq 0$, puede resolverse por factorización.

$$\begin{aligned} x^2 &= k \\ x^2 - k &= 0 \\ \left(x + \sqrt{k}\right)\left(x - \sqrt{k}\right) &= 0 \\ x + \sqrt{k} = 0 \quad &\text{o} \quad x - \sqrt{k} = 0 \\ x = -\sqrt{k} \quad &\text{o} \quad x = \sqrt{k} \end{aligned}$$

Esto demuestra la propiedad de la raíz cuadrada para resolver ecuaciones.

Propiedad de la raíz cuadrada

Si $k \geq 0$, entonces las soluciones de $x^2 = k$ son $x = \pm\sqrt{k}$.

Si $k > 0$, la ecuación $x^2 = k$ tiene dos soluciones reales. Si $k = 0$, sólo existe una solución. Si $k < 0$, no hay soluciones reales (sin embargo, en este caso, *sí hay* soluciones imaginarias). Los números imaginarios se estudian brevemente en la Extensión acerca de números complejos, al final del capítulo 6.

EJEMPLO 2 Use la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación cuadrática para las soluciones reales.

(a) $x^2 = 25$

Como $\sqrt{25} = 5$, el conjunto solución es $\{5, -5\}$, que se abrevia como $\{\pm 5\}$.

(b) $r^2 = 18$

$r = \pm\sqrt{18}$ Propiedad de la raíz cuadrada

$r = \pm\sqrt{9 \cdot 2}$

$r = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}$ Regla del producto para raíces cuadradas

$r = \pm 3\sqrt{2}$ $\sqrt{9} = 3$

El conjunto solución es $\{\pm 3\sqrt{2}\}$.

(c) $z^2 = -3$

Como $-3 < 0$, no hay raíces reales, y el conjunto solución es el $\emptyset$.

(d) $(x - 4)^2 = 12$

Se usa una generalización de la propiedad de la raíz cuadrada, como sigue:

$$(x - 4)^2 = 12$$
$$x - 4 = \pm\sqrt{12}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{12}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{4 \cdot 3}$$
$$x = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

El conjunto solución es $\{4 \pm 2\sqrt{3}\}$. ■

La fórmula cuadrática Con el uso de un procedimiento denominado *completar el cuadrado* (vea la nota al margen), es posible obtener una de las fórmulas más importantes del álgebra, la *fórmula cuadrática*. Se comienza con la ecuación cuadrática estándar:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{Dividir entre } a.$$

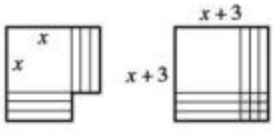
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Sumar } -\frac{c}{a}.$$

Completar el cuadrado, usado al derivar la fórmula cuadrática, tiene aplicaciones importantes en el álgebra. Para transformar la expresión $x^2 + kx$ en el cuadrado de un binomio, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x; es decir, $[(1/2)k]^2 = k^2/4$. Luego se obtiene

$$x^2 + kx + \frac{k^2}{4} = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2.$$

Por ejemplo, para hacer que $x^2 + 6x$ sea el cuadrado de un binomio, se suma 9, ya que $9 = [(1/2)6]^2$. Esto da origen al trinomio $x^2 + 6x + 9$, que es igual a $(x + 3)^2$.

Los griegos tenían un método para completar el cuadrado en forma geométrica. Por ejemplo, para completar el cuadrado de $x^2 + 6x$, se comienza con un cuadrado de lado x. Se suman tres rectángulos de ancho igual a 1 y largo igual a x al lado derecho y en la parte inferior. Cada rectángulo tiene un área de $1x$ o x, por lo que el área total de la figura ahora es $x^2 + 6x$. Para llenar la esquina (es decir, para *completar el cuadrado*), se suman nueve cuadrados de 1 por 1, como se ilustra.



El cuadrado nuevo y más grande tiene lados cuya longitud es $x + 3$ y área

$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

El polinomio en el lado izquierdo será el cuadrado de un binomio si se suma $b^2/(4a^2)$ a ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$ Factorizar el lado izquierdo; agrupar términos en el derecho.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$ Propiedad de la raíz cuadrada

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$ Regla del cociente para raíces cuadradas

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Restar $\frac{b}{2a}$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Agrupar términos.

Durante varios siglos los matemáticos trataron de encontrar una fórmula que pudiera resolver ecuaciones cúbicas (de tercer grado). Cierta anécdota de la Italia del siglo VI tiene dos protagonistas, **Girolamo Cardano** y **Niccolo Tartaglia**. En aquellos días, era frecuente que los matemáticos participaran en concursos. Tartaglia había desarrollado un método para resolver una ecuación cúbica de la forma $x^3 + mx = n$ y lo había usado en uno de dichos concursos. Cardano le rogó que lo dejara conocer su método con la promesa de guardar el secreto. No obstante, Cardano publicó el método de Tartaglia en su obra *Ars Magna*, de 1545 (si bien le dio el crédito a Tartaglia).

La fórmula para encontrar una solución real de la ecuación anterior es la siguiente:

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}.$$

Intente hallar una solución de la ecuación $x^3 + 9x = 26$ por medio de esta fórmula (la solución que resulta es 2).

Fórmula cuadrática

Las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Observe que la barra de fracción de la fórmula cuadrática se extiende al término $-b$ del numerador.

EJEMPLO 3 Resuelva $x^2 - 4x + 2 = 0$.

Aquí, $a = 1$, $b = -4$ y $c = 2$. Sustituya estos valores en la fórmula cuadrática para obtener:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)2}}{2(1)}$$ $a = 1, b = -4, c = 2$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$ $\sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$x = \frac{2(2 \pm \sqrt{2})}{2}$$ Se factoriza en 2 en el numerador.

$$x = 2 \pm \sqrt{2}.$$ Términos más pequeños

El conjunto solución es $\{2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$, en forma abreviada es $\{2 \pm \sqrt{2}\}$. ■

EJEMPLO 4 Resuelva $2x^2 = x + 4$.

Para encontrar los valores de a, b y c, primero se escribe la ecuación en forma estándar como $2x^2 - x - 4 = 0$. Después se observa que $a = 2$, $b = -1$ y $c = -4$. Según la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 32}}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}\right\}$. ■

Aplicaciones Al resolver problemas prácticos de los que surgen ecuaciones cuadráticas, tal vez se obtenga una solución que no satisfaga las restricciones físicas. Por ejemplo, si x representara el ancho y las dos soluciones de la ecuación cuadrática fueran –9 y 1, debería rechazarse el valor de –9, ya que el ancho debe ser un número positivo.

EJEMPLO 5 Al mismo tiempo, dos automóviles abandonan una intersección, uno hacia el norte y el otro al oeste. Poco tiempo después, están separados exactamente por 100 millas. El que iba hacia el norte ha avanzado 20 millas más que el que se dirigía al oeste. ¿Cuánto ha viajado cada vehículo?

Paso 1: **Lea** el problema con cuidado.

Paso 2: **Asigne una variable.** Sea x la distancia recorrida por el auto que iba hacia el oeste. Entonces, $(x + 20)$ es la distancia que ha viajado el que se dirigía al norte. Vea la figura 13. Los carros están separados por una distancia de 100 millas, por lo que la hipotenusa del triángulo rectángulo mide 100.

Paso 3: **Escribir una ecuación.** Se usa el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$100^2 = x^2 + (x + 20)^2$$

Paso 4: **Resolver.**

$$10{,}000 = x^2 + x^2 + 40x + 400 \quad \text{Desarrollar el cuadrado del binomio.}$$

$$0 = 2x^2 + 40x - 9600 \quad \text{Obtener 0 en un lado.}$$

$$0 = 2(x^2 + 20x - 4800) \quad \text{Factorizar el factor común.}$$

$$0 = x^2 + 20x - 4800 \quad \text{Dividir ambos lados entre 2.}$$

Se usa la fórmula cuadrática para obtener x.

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4(1)(-4800)}}{2} \quad a = 1,\ b = 20,\ c = -4800$$

$$= \frac{-20 \pm \sqrt{19{,}600}}{2}$$

$$x = 60 \quad \text{o} \quad x = -80 \quad \text{Usar la calculadora.}$$

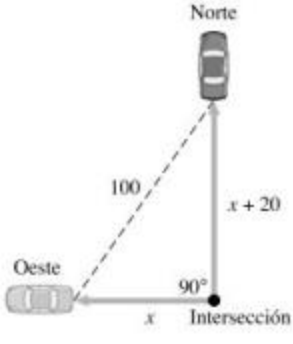


FIGURA 13

Un alejamiento radical de otros métodos para evaluar la razón áurea Recuerde que en un capítulo anterior se mencionó que la razón áurea se encuentra con mucha frecuencia en las matemáticas, el arte y la naturaleza. En una nota al margen, se demostró que

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

es igual a la proporción áurea, $(1 + \sqrt{5})/2$. Ahora considere el siguiente radical *anidado*:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}.$$

Haga que x represente este radical. Debido a que aparece *dentro de sí mismo*, puede escribirse como

$$x = \sqrt{1 + x}$$

$$x^2 = 1 + x \quad \text{Se eleva al cuadrado ambos lados.}$$

$$x^2 - x - 1 = 0. \quad \text{Escrito en forma estándar.}$$

Con el uso de la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = -1$ y $c = -1$, se demuestra que la solución positiva de esta ecuación, y por tanto el valor del radical anidado, es ... (¡adivinó!) la proporción áurea.

Paso 5: **Enunciar la respuesta.** Como la distancia no puede ser negativa, se descarta la solución negativa. Las distancias que se requiere son 60 millas y $60 + 20 = 80$ millas.

Paso 6: **Comprobar.** Como $60^2 + 80^2 = 100^2$, la respuesta es correcta. ■

EJEMPLO 6 Si en la Tierra se lanza una roca hacia arriba desde un edificio de 144 pies, con velocidad inicial de 112 pies por segundo, su posición (en pies sobre el terreno) está dada por $s = -16t^2 + 112t + 144$, donde t es el tiempo en segundos después de que se lanzó, ¿en qué momento golpea el suelo?

Cuando la roca llega al piso, su distancia sobre éste es de 0. Encuentre t cuando s es 0 con la solución de la ecuación

$$0 = -16t^2 + 112t + 144. \qquad \text{Sea } s = 0.$$

$$0 = t^2 - 7t - 9 \qquad \text{Dividir ambos lados entre } -16.$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 36}}{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{85}}{2}$$

$$t \approx 8.1 \quad \text{o} \quad t \approx -1.1 \qquad \text{Usar calculadora.}$$

Como el tiempo no puede ser negativo, se descarta la solución negativa. La roca golpeará el suelo 8.1 segundos después de haberla lanzado. ■

7.7 EJERCICIOS

Llene los espacios en blanco con la respuesta correcta.

1. Para la ecuación cuadrática $4x^2 + 5x - 9 = 0$, los valores de a, b y c, son, respectivamente _____, _____ y _____.

2. Para resolver la ecuación $3x^2 - 5x = -2$ en la fórmula cuadrática, el primer paso es sumar _____ a ambos lados de la ecuación.

3. Cuando se usa la fórmula cuadrática, si $b^2 - 4ac$ es positivo, la ecuación tiene _____ solución(es) real(es). (¿cuántas?)

4. Si a, b y c, son enteros en $ax^2 + bx + c = 0$ y $b^2 - 4ac = 17$, entonces la ecuación tiene _____ solución(es) irracional(es). (¿cuántas?)

Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes por medio de la propiedad del factor 0.

5. $(x + 3)(x - 9) = 0$
6. $(m + 6)(m + 4) = 0$
7. $(2t - 7)(5t + 1) = 0$
8. $(7x - 3)(6x + 4) = 0$
9. $x^2 - x - 12 = 0$
10. $m^2 + 4m - 5 = 0$
11. $x^2 + 9x + 14 = 0$
12. $15r^2 + 7r = 2$
13. $12x^2 + 4x = 1$
14. $x(x + 3) = 4$
15. $(x + 4)(x - 6) = -16$
16. $(w - 1)(3w + 2) = 4w$

Cada una de las ecuaciones siguientes por medio de la propiedad de la raíz cuadrada. Solo dé soluciones de números reales.

17. $x^2 = 64$
18. $w^2 = 16$
19. $x^2 = 24$
20. $x^2 = 48$
21. $r^2 = -5$
22. $x^2 = -10$
23. $(x - 4)^2 = 3$
24. $(x + 3)^2 = 11$
25. $(2x - 5)^2 = 13$
26. $(4x + 1)^2 = 19$

Resuelva cada una de las ecuaciones que siguen por medio de la fórmula cuadrática. Sólo proporcione soluciones con números reales.

27. $4x^2 - 8x + 1 = 0$ **28.** $m^2 + 2m - 5 = 0$ **29.** $2x^2 = 2x + 1$

30. $9r^2 + 6r = 1$ **31.** $q^2 - 1 = q$ **32.** $2p^2 - 4p = 5$

33. $4k(k + 1) = 1$ **34.** $4r(r - 1) = 19$ **35.** $(g + 2)(g - 3) = 1$

36. $(x - 5)(x + 2) = 6$ **37.** $m^2 - 6m = -14$ **38.** $x^2 = 2x - 2$

39. ¿Puede usarse la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $2x^2 - 5 = 0$? Explique su respuesta, y si es *sí*, resuélvala.

40. ¿Es posible utilizar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $4x^2 + 3x = 0$? Explique su respuesta, y resuélvala si ésta es afirmativa.

41. Explique por qué la fórmula cuadrática no puede usarse para resolver la ecuación $2x^3 + 3x - 4 = 0$.

42. Un estudiante dio la fórmula cuadrática incorrectamente como sigue: $x = -b \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. ¿Qué es lo que está equivocado?

La expresión $b^2 - 4ac$, el radicando de la fórmula cuadrática, se denomina **discriminante** *de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. Si se evalúa, es posible determinar, sin tener que resolver la ecuación, el número y naturaleza de las soluciones de la ecuación. Suponga que* a, b *y* c *son enteros. Entonces, la siguiente tabla muestra cómo puede usarse el discriminante para analizar las soluciones.*

Discriminante	Soluciones
Positivo y es el cuadrado de un entero	Dos soluciones racionales diferentes
Positivo, pero no es el cuadrado de un entero	Dos soluciones irracionales diferentes
Cero	Una solución racional (una solución doble)
Negativo	No existen soluciones reales

En los ejercicios 43 a 48, evalúe el discriminante, y después determine si la ecuación tiene (a) *dos soluciones racionales diferentes,* (b) *dos soluciones irracionales distintas,* (c) *una solución racional (una solución doble) o* (d) *no hay soluciones reales.*

43. $x^2 + 6x + 9 = 0$ **44.** $4x^2 + 20x + 25 = 0$ **45.** $6x^2 + 7x - 3 = 0$

46. $2x^2 + x - 3 = 0$ **47.** $9x^2 - 30x + 15 = 0$ **48.** $2x^2 - x + 1 = 0$

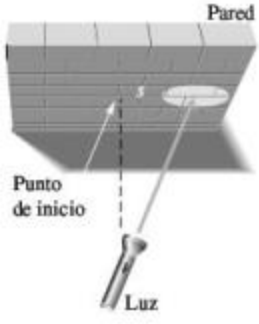
Resuelva cada problema utilizando la ecuación cuadrática. Si es necesario utilice una calculadora, y redondee la respuesta a la décima más cercana.

49. ***Altura de un proyectil*** El hotel Mart en Dallas, Texas, tiene 400 pies de alto. Suponga que se lanza una pelota hacia arriba desde la azotea, y su posición s respecto al suelo está dada por la ecuación $s = -16t^2 + 45t + 400$, donde t es el número de segundos transcurridos. ¿Cuánto tiempo tomará a la pelota alcanzar una altura de 200 pies sobre el piso? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts.*)

50. ***Altura de un proyectil*** El Toronto Dominion Center en Winnipeg, Manitoba, tiene 407 pies de altura. Suponga que se lanza una pelota hacia arriba desde la azotea del Center, y que su posición por arriba del piso está dada por la ecuación $s = -16t^2 + 75t + 407$, donde t es el número de segundos transcurridos. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la pelota llegue a una altura de 450 pies sobre el terreno? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts.*)

51. ***Altura de un proyectil*** Consulte las ecuaciones de los ejercicios 49 y 50. Suponga que en la primera oración de cada uno no se da la altura del edificio. ¿Cómo podría utilizarse la ecuación para determinarla?

52. *Posición de un haz de luz* Un rayo de luz se mueve en forma horizontal hacia delante y atrás sobre una pared, con la distancia de la luz desde un punto inicial a t minutos representado por $s = 100t^2 - 300t$. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que la luz regrese al punto de regreso?



53. *Altura de un proyectil* Se proyecta un objeto directamente hacia arriba desde el piso. Después de t segundos, su distancia en pies sobre el terreno es $s = 144t - 16t^2$.

(a) ¿Después de cuántos segundos estará el objeto a 128 pies por arriba del piso? (*Una pista:* Busque un factor común antes de resolver la ecuación.)

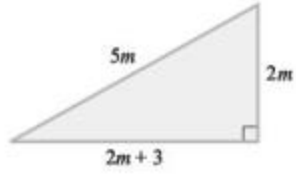
(b) ¿En qué momento golpea el objeto el piso?



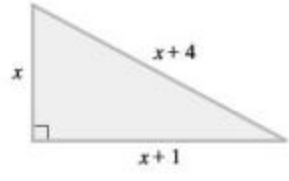
54. *Distancia de frenado* La fórmula $D = 100t - 13t^2$ representa la distancia en pies que resbalará un automóvil que va a 68 millas por hora, aproximadamente, en t segundos. Calcule el tiempo que le tomará resbalar 190 pies. (*Una pista:* La respuesta debe ser menor que el tiempo que le toma al auto detenerse, que es de 3.8 segundos.)



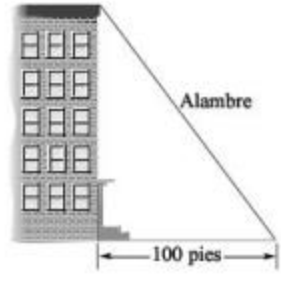
55. *Longitudes de los lados de un triángulo* Encuentre las longitudes de los lados del triángulo que se muestra.



56. *Longitudes de los lados de un triángulo* Encuentre las longitudes de los lados del triángulo que se muestra.

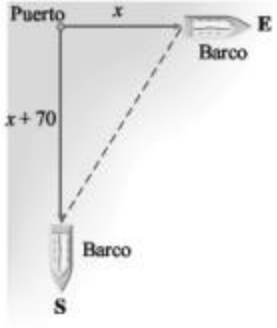


57. *Longitud de un alambre* Consulte el ejercicio 49. Suponga que se ata un alambre a la azotea del *Mart* y se tira de él. Está amarrado en el piso, a 100 pies de la base del edificio, como se ilustra en la figura. ¿Cuál es la longitud del alambre?

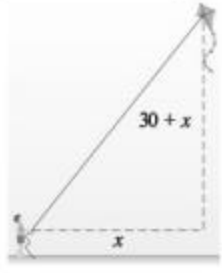


58. *Longitud de un alambre* Consulte el ejercicio 50. Suponga que se amarra un alambre a la parte superior del Center, y se tira de él. La longitud del alambre es el doble de la distancia entre la base del edificio y el punto del piso en donde se encuentra atado. ¿Qué tan largo es el alambre?

59. *Distancias recorridas por barcos* Dos navíos zarpan de un puerto al mismo tiempo, uno rumbo al sur y el otro hacia el este. Siete horas más tarde, se encuentran separadas por una distancia de 170 millas. Si el barco que va al sur viaja 70 millas más que el otro, ¿cuántas millas viaja cada embarcación?



60. *Altura de una cometa* Kim Hobbes eleva una cometa que está por arriba de su mano 30 pies más que la distancia horizontal entre ella y el juguete. La cuerda entre su mano y la cometa mide 150 pies de largo. ¿Qué tan lejos está la cometa por arriba de su mano?



61. *Tamaño de un componente de juguete* Un fabricante de juguetes necesita una pieza de plástico en forma de triángulo rectángulo, el lado más largo debe medir 2 centímetros más que el doble del lado más corto y la hipotenusa debe ser 1 centímetro más larga que el lado más largo. ¿Qué longitud deben tener los tres lados de la pieza triangular?

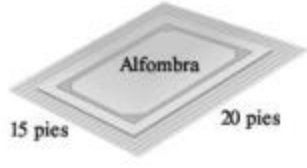
62. *Tamaño de la propiedad* Michael Fuentes, un constructor inmobiliario, posee un terreno delimitado por calles en tres de sus lados, lo que le da la forma de un triángulo rectángulo. La hipotenusa es 8 metros más larga que el costado más largo, y el costado más corto tiene 9 metros menos que la hipotenusa. Calcule las longitudes de los tres lados del terreno.

63. *Dimensiones de las piezas de un rompecabezas* Un gran rompecabezas de madera tiene dos piezas que se ajustan y forman un triángulo rectángulo cuya altura es 1 centímetro menos que el doble de la base. La diagonal, donde se encuentran las dos piezas, mide 2.5 centímetros de longitud. Calcule la altura y la base del rectángulo.

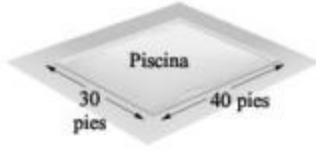
64. *Escalera inclinada* Una escalera de 13 pies está apoyada contra una casa. La distancia entre la parte inferior de la escalera y la casa es 7 pies menos que la distancia de la parte superior de la escalera al piso. ¿Qué tan lejos se encuentra la base de la escalera de la casa?



65. *Dimensiones de una franja de piso alrededor de una alfombra* Catarina y José quieren comprar una alfombra para una habitación que mide 15 pies por 20 pies. Desean dejar una franja del piso sin cubrir alrededor de la alfombra. ¿Qué tan ancha debe ser esta franja si compraron una alfombra cuya área es de 234 pies cuadrados?

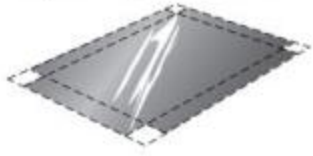


66. *Dimensiones del borde de una piscina* La piscina de un club mide 30 pies de ancho y 40 de largo. Los miembros del club quieren una banqueta en forma de franja de ancho uniforme alrededor de la piscina. Tienen material suficiente para 296 pies cuadrados. ¿Qué tan ancha debe ser la franja?



67. *Dimensiones de un jardín* El patio de Arif mide 20 metros por 30 metros. Él desea construir un jardín de flores en el centro, con una franja de césped de ancho uniforme, alrededor del jardín. Arif debe tener 184 metros cuadrados de césped. En estas condiciones, ¿de qué largo y ancho debe ser el jardín?

68. ***Dimensiones de una pieza de lámina metálica*** Una pieza rectangular de lámina metálica tiene una longitud de 4 pulgadas menos que el doble del ancho. En cada esquina se corta una pieza cuadrada de 2 pulgadas por lado. Luego, se doblan los lados hacia arriba para formar una caja descubierta cuyo volumen es 256 pulgadas cúbicas. Encuentre el largo y ancho de la pieza original de metal.



69. ***Tasa de interés*** La fórmula $A = P(1 + r)^2$ proporciona la cantidad A en dólares en que se incrementarán P dólares en dos años, con una tasa de interés r (donde r está dada como decimal), y con interés compuesto. ¿Qué tasa de interés hará que \$2000 se conviertan en \$2142.25, en dos años?

70. ***Dimensiones de una caja de cartón*** Si de una pieza cuadrada de cartón se cortan cuadrados de 3 pulgadas desde sus esquinas, y después se doblan las aletas para que formen una caja abierta por arriba, el volumen de la caja está dado por la fórmula $V = 3(x - 6)^2$, donde x es la longitud de cada lado de la pieza original de cartón, en pulgadas. ¿Cuál sería la longitud original que haría que el volumen de la caja fuera de 432 pulgadas cúbicas?

71. ***Oferta y demanda de panqués de salvado*** Cierta panadería descubrió que la demanda diaria de panqués de cereal es $\frac{3200}{p}$, donde p es el precio de un panqué, en centavos. La oferta diaria es de $3p - 200$. Calcule el precio donde la oferta y la demanda son iguales.

72. ***Oferta y demanda de discos compactos*** En cierta región, la demanda de discos compactos es de $\frac{700}{P}$ por día, donde P es el precio por disco en dólares. El suministro es de $5P - 1$ por día. ¿A qué precio la oferta es igual a la demanda?

Número de Froude *William Froude fue un arquitecto naval del siglo XIX que utilizó la expresión* $\frac{v^2}{g\ell}$ *para constuir barcos. Esta expresión conocida como el* número de Froude, *también fue usada por R. McNeill Alexander en su investigación sobre dinosaurios (vea* How Dinosaurs Ran, *en* Scientific American, *abril de 1991, pp. 130 a 136).*



En los ejercicios 73 a 74, calcule el valor de v *(en metros por segundo) dado que* g = 9.8 *metros por segundo al cuadrado.*

73. Rinoceronte: $\ell = 1.2$; Número de Froude = 2.57

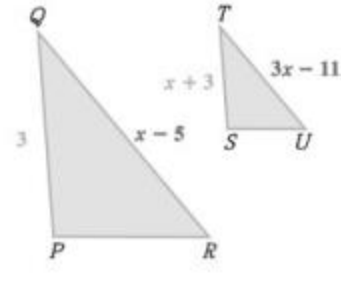
74. Triceratops: $\ell = 2.8$; Número de Froude = .16

Recuerde que los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales (consulte la sección 7.3, ejercicios 43 a 46). Utilice este hecho para calcular las longitudes de los lados que se indican de cada par de triángulos semejantes. Compruebe todas las soluciones posibles en ambos triángulos. Los lados de un triángulo no pueden ser negativos.

75. Lado AC



76. Lado RQ



INVESTIGACIÓN EN GRUPO

¿Cómo se compara su velocidad de caminata con la de los caminantes olímpicos?

Caminar a velocidades superiores a 8 millas por hora es un deporte de competencia de larga distancia y de alto impacto. La tabla que se presenta a continuación muestra a los ganadores de la medalla de oro en competencias olímpicas de caminata.

A. Complete la tabla con la aplicación de la proporción que se da enseguida, para calcular los pasos por minuto de un caminante. **Use la equivalencia de 10 km ≈ 6.21 millas.** (Redondee todas las respuestas al milésimo más cercano, excepto aquellas de pasos por minuto. Los pasos por minuto redondéelos al número entero más cercano.)

$$\frac{70 \text{ pasos por minuto}}{2 \text{ millas por hora}} = \frac{x \text{ pasos por minuto}}{y \text{ millas por hora}}$$

Evento	Ganador de la medalla de oro	País	Tiempo en horas: Minutos: Segundos	Tiempo en minutos	Tiempo en horas	y millas por hora	x pasos por minuto
Caminata de 10 km, femenil	Yelena Nikolayeva	Rusia	0:41:49				
Caminata de 20 km, varonil	Jefferson Perez	Ecuador	1:20:07				
Caminata de 50 km, varonil	Robert Korzeniowski	Polonia	3:43:30				

Fuente: The World Almanac and Book of Facts.

B. Midan cuántos pasos da cada miembro del grupo en un minuto mientras camina a paso normal utilizando un cronómetro. Registren sus resultados en la tabla que sigue. Después háganlo de nuevo a paso veloz. Registren los resultados.

C. Usen la proporción del inciso A para convertir los números del inciso B a millas por hora y completar la tabla.

1. Calculen la velocidad promedio para el grupo a paso normal y a paso veloz.
2. ¿Cuál es el número mínimo de pasos por minuto que tendrían que dar para convertirse en un caminante de competencia?
3. A paso veloz, ¿alguien del grupo camina suficientemente rápido como para ser un caminante de competencia? Explique lo que hayan decidido.

	Paso normal		Paso rápido	
Nombre	x pasos por minuto	y millas por hora	x pasos por minuto	y millas por hora

EXAMEN DEL CAPÍTULO 7

Resuelva cada ecuación.

1. $5x - 3 + 2x = 3(x - 2) + 11$

2. $\frac{2p - 1}{3} + \frac{p + 1}{4} = \frac{43}{12}$

3. Decida si la ecuación

$$3x - (2 - x) + 4x = 7x - 2 - (-x)$$

es condicional, identidad o contradicción. Proporcione el conjunto solución.

4. Resuelva para v: $S = vt - 16t^2$.

Resuelva cada una de las aplicaciones siguientes.

5. ***Áreas de las islas hawaianas*** Las tres islas más grandes en el archipiélago de Hawai son Hawai (la Isla Grande), Maui y Kauai. Juntas, sus áreas alcanzan un total de 5300 millas cuadradas. La isla de Hawai es 3293 millas cuadradas más grande que la de Maui y ésta a su vez es 177 millas cuadradas mayor que Kauai. ¿Cuál es el área de cada isla?

6. ***Mezcla química*** ¿Cuántos litros de una solución al 20% de un producto químico debe mezclar Michelle Jennings con 10 litros de una solución al 10% para obtener una mezcla al 40% del producto químico?

7. ***Velocidad de trenes*** Un tren de pasajeros y otro de carga salen de una ciudad al mismo tiempo y viajan en direcciones opuestas. Sus velocidades son de 60 mph y 75 mph, respectivamente. ¿Cuánto tiempo pasará para que se encuentren separados por una distancia de 297 millas?

8. ***Precios de mercancía*** ¿Cuál es la mejor compra para las rebanadas de queso: 8 rebanadas por \$2.19, o 12 por \$3.30?

9. ***Distancia entre ciudades*** La distancia entre Milwaukee y Boston es de 1050 millas. En cierto mapa se representa esta distancia con 21 pulgadas. En el mismo mapa, Seattle y Cincinnati se encuentran a 46 pulgadas una de otra. ¿Cuál es la distancia real entre Seattle y Cincinnati?

10. ***Corriente en un circuito*** La corriente en un circuito eléctrico simple es inversamente proporcional a la resistencia. Si la corriente es de 80 amperes cuando la resistencia es de 30 ohms, encuentre la corriente cuando la resistencia es de 12 ohms.

Resuelva cada desigualdad. Escriba la solución tanto en forma de intervalo como de gráfica.

11. $-4x + 2(x - 3) \geq 4x - (3 + 5x) - 7$

12. $-10 < 3k - 4 \leq 14$

13. ¿Cuál de las desigualdades siguientes equivale a $x < -3$?
   A. $-3x < 9$
   B. $-3x > -9$
   C. $-3x > 9$
   D. $-3x < -9$

14. ***Promedio de calificaciones*** Brian Kivi obtuvo 83, 76 y 79 en sus tres primeros exámenes de Matemáticas 1031 (Panorama de las Matemáticas). Si quiere obtener un promedio de al menos 80 después de su cuarto examen, ¿cuáles son los posibles resultados que debe lograr?

Evalúe cada expresión exponencial.

15. $\left(\frac{4}{3}\right)^2$

16. $-(-2)^6$

17. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

18. $-5^0 + (-5)^0$

Utilice las propiedades de los exponentes para simplificar cada expresión. Escriba respuestas con exponentes positivos, solamente. Suponga que todas las variables representan números reales distintos de 0.

19. $9(4p^3)(6p^{-7})$

20. $\frac{m^{-2}(m^3)^{-3}}{m^{-4}m^7}$

21. Use notación científica para evaluar

$$\frac{(2{,}500{,}000)(.00003)}{(.05)(5{,}000{,}000)}.$$

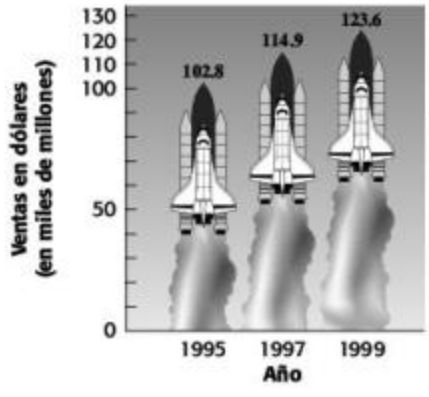
Escriba la respuesta en notación científica.

Resuelva cada problema.

22. ***Tiempo que viaja una señal de radio*** La distancia media de la Tierra a Plutón es de 4.58×10^9 kilómetros. En abril de 1983, la nave *Pioneer 10* trasmitió señales de radio de Plutón a la Tierra a la velocidad de la luz, 3.00×10^5 kilómetros por segundo. ¿Cuánto tiempo tomó a las señales (en segundos) para que alcanzaran la Tierra?

23. ***Ventas de la industria aeroespacial*** La gráfica que se adjunta muestra las ventas de la industria aeroespacial en dólares. Las cifras en la parte superior de las barras representan miles de millones de dólares. Escriba cada una de ellas por medio de notación científica.

VENTAS EN LA INDUSTRIA AEROESPACIAL



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Current Industrial Reports.

Ejecute las operaciones indicadas.

24. $(3k^3 - 5k^2 + 8k - 2) - (3k^3 - 9k^2 + 2k - 12)$

25. $(5x + 2)(3x - 4)$

26. $(4x^2 - 3)(4x^2 + 3)$

27. $(x + 4)(3x^2 + 8x - 9)$

28. Dé un ejemplo de polinomio en la variable t, tal que sea de quinto grado, en potencias decrecientes de la variable, con exactamente seis términos y que tenga coeficiente negativo en su término de segundo grado.

Factorice por completo cada polinomio.

29. $2p^2 - 5pq + 3q^2$

30. $100x^2 - 49y^2$

31. $27y^3 - 125x^3$

32. $4x + 4y - mx - my$

Resuelva cada ecuación cuadrática.

33. $6x^2 + 7x - 3 = 0$

34. $x^2 - x = 7$

35. ***Tiempo que un objeto tarda en descender*** La ecuación

$$s = 16t^2 + 15t$$

proporciona la distancia s en pies que un objeto soltado de un edificio desciende en t segundos. Calcule el tiempo t para el que ha descendido 25 pies. Emplee una calculadora y redondee la respuesta al centésimo más cercano.

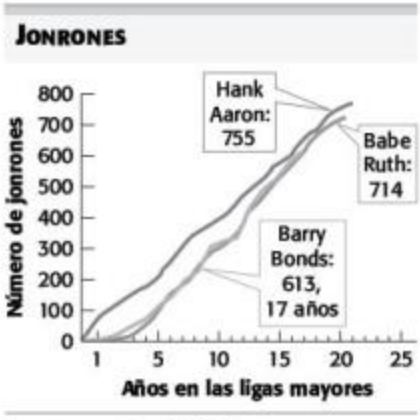


capítulo

8 Gráficas, funciones y sistemas de ecuaciones y desigualdades



En 1998, con 70 jonrones, Mark McGwire hizo añicos el récord de 61 que alcanzó en el año 1961 Roger Maris, para anotaciones en una sola temporada. Pero el de McGwire no duró mucho. En 2001, Barry Bonds logró el récord casi inimaginable de 73. El líder de todos los tiempos de jonrones anotados en su carrera es Hank Aaron, con 755, seguido por el inmortal Babe Ruth con 714. En 17 temporadas, Bonds tenía 613. En las gráficas siguientes se compara el total de jonrones de los tres jugadores con base en los años que jugaron en las ligas mayores.



Fuente: www.Baseball-Reference.com.

La presentación de varias gráficas en el mismo conjunto de ejes permite comparar al mismo tiempo tendencias diferentes. Es la razón de ser de un *sistema de ecuaciones,* el cual estudiaremos en la sección 8.7. Este capítulo introduce los conceptos básicos de *graficación,* uno de los procedimientos fundamentales en el estudio del álgebra.

8.1 Sistema de coordenadas rectangulares y círculos

8.2 Rectas y sus pendientes

8.3 Ecuaciones de rectas y modelos lineales

8.4 Introducción a las funciones: funciones lineales, aplicaciones y modelos

8.5 Funciones cuadráticas, aplicaciones y modelos

8.6 Funciones exponencial y logarítmica, aplicaciones y modelos

8.7 Sistemas de ecuaciones y sus aplicaciones

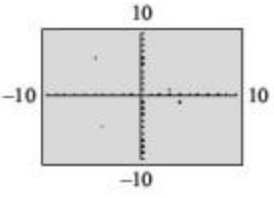
Extensión: Uso de operaciones sobre las filas de una matriz para resolver sistemas

8.8 Desigualdades lineales, y programación lineal

Investigación en grupo: Vivir con Sida

Examen del capítulo 8

8.1 Sistema de coordenadas rectangulares y círculos



Los puntos de la figura 2 aparecen graficados en esta pantalla de calculadora. ¿Por qué no está visible $E(-5, 0)$?

Cada pareja de números $(1, 2)$, $(-1, 5)$ y $(3, 7)$ es ejemplo de un **par ordenado**; es decir, una pareja de números escritos entre paréntesis en la que su orden es importante. Los dos números constituyen las **componentes** de un par ordenado. Se grafica con dos líneas que se intersecan en ángulo recto en los puntos 0, como se aprecia en la figura 1. El punto común 0 se denomina el **origen.** La línea horizontal, **eje x**, representa al primer número de un par ordenado, y la vertical, **eje y**, al segundo. El eje x y el eje y forman el **sistema de coordenadas rectangulares** (o **cartesianas**). Los ejes forman cuatro **cuadrantes**, con números I, II, III y IV, como se ve en la figura 2 (un punto que se encuentre sobre un eje no se considera que esté en alguno de los cuatro cuadrantes).

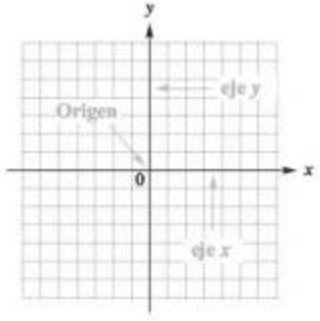


FIGURA 1

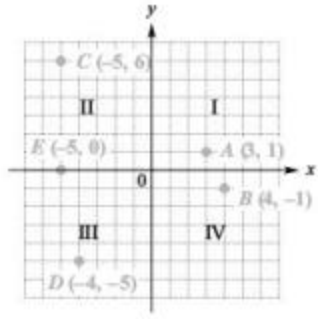


FIGURA 2



René Descartes Después de que el servicio postal francés emitió la estampilla que se observa en la parte superior en honor de René Descartes, hubo ojos observadores que se percaron de un error en el título del libro más famoso de Descartes. Por ello, se lanzó una segunda estampilla (vea la página opuesta) con el nombre correcto. El libro en cuestión, *Discurso del método*, apareció en 1637. En él, Descartes rechazaba la filosofía aristotélica tradicional, y proponía un sistema universal de conocimiento que aspiraba a tener la certeza de las matemáticas. Para Descartes, *método* significaba *análisis*, e iba paso a paso desde verdades evidentes por sí mismas hasta otras más generales y distantes. Una de éstas era su tan famoso enunciado *pienso, luego existo* (Thomas Jefferson, quien también era un racionalista, comenzó la *Declaración* con las palabras *encontramos estas verdades evidentes por sí mismas*.

En la gráfica se localiza o **traza** el punto que corresponda al par ordenado $(3, 1)$ con la medición de tres unidades que vayan desde el 0 a la derecha, a lo largo del eje x, y después una unidad hacia arriba, en paralelo con el eje y. El punto correspondiente a la pareja ordenada $(3, 1)$ se rotula con A, según se observa en la figura 2. Es frecuente que la frase "el punto correspondiente a la par ordenado $(3, 1)$", se abrevie como "el punto $(3, 1)$". Los números de un par ordenado se denominan **coordenadas** del punto correspondiente.

Los paréntesis que se usan para representar un par ordenado también se utilizan para representar un intervalo abierto (que se estudió en un capítulo anterior). En general, no debe haber confusión entre estos símbolos porque el contexto en que ocurra el análisis dirá si se habla de par ordenado o intervalos abiertos.

Fórmula de la distancia Suponga que se desea calcular la distancia entre dos puntos, por ejemplo $(3, -4)$ y $(-5, 3)$. El teorema de Pitágoras permite hacerlo. En la figura 3, en la página siguiente, se observa que la línea vertical a partir del punto $(-5, 3)$ y la horizontal que sale de $(3, -4)$ se intersecan en el punto $(-5, -4)$. Entonces, el punto $(-5, -4)$ se convierte en el ángulo recto de un triángulo rectángulo. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa, d, del triángulo rectángulo de la figura 3, es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados, a y b, así:

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

El lado a es la distancia entre los extremos de aquel. Como la coordenada x de ambos puntos es -5, el lado es vertical, y se encuentra a con la diferencia entre las coordenadas y. Al restar -4 de 3 se obtiene un valor positivo de a,

$$a = 3 - (-4) = 7$$

De manera similar, b se encuentra con la resta de –5 de 3.

$$b = 3 - (-5) = 8$$

Si se sustituyen estos valores en la fórmula, se tiene:

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + b^2 \\ d^2 &= 7^2 + 8^2 \qquad \text{Sea } a = 7 \text{ y } b = 8. \\ d^2 &= 49 + 64 \\ d^2 &= 113 \\ d &= \sqrt{113}. \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada, } d > 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la distancia entre (–5, 3) y (3, –4) es $\sqrt{113}$.

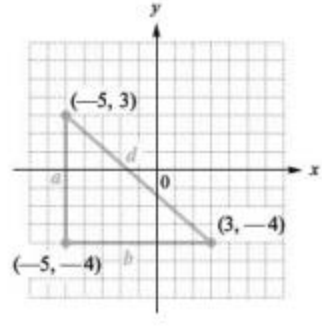


FIGURA 3

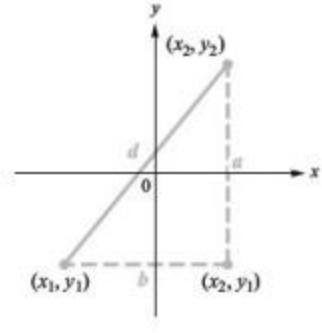


FIGURA 4



Descartes escribió su *Geometría* como una aplicación de su método; se publicó como apéndice del *Discurso del método*. Sus intentos por unificar el álgebra y la geometría contribuyeron a la creación de lo que se convertiría en la geometría analítica, e influyeron en el desarrollo del cálculo, logrado por Newton y Leibniz, una generación después.

En 1649, se trasladó a Suecia como tutor de la reina Cristina. La soberana prefería trabajar muy de mañana en el castillo sin calefacción; Descartes estaba acostumbrado a permanecer en la cama hasta el mediodía. Los rigores del invierno sueco fueron demasiado para él, y murió en menos de un año.

Este resultado se puede generalizar. La figura 4 muestra dos puntos diferentes (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Para hallar una fórmula de la distancia d entre estos dos puntos, observe que la distancia entre (x_2, y_2) y (x_2, y_1) está dada por $a = y_2 - y_1$, y la distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_1) es $b = x_2 - x_1$. Según el teorema de Pitágoras,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

y con el uso de la propiedad de la raíz cuadrada, se obtiene la fórmula de la distancia.

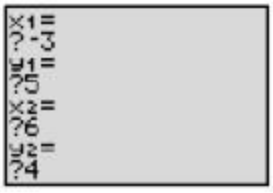
Fórmula de la distancia

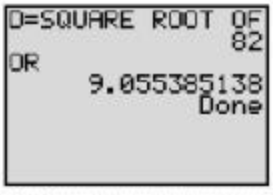
La distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Este resultado se denomina **fórmula de la distancia**.

Los números pequeños 1 y 2 en los pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se llaman *subíndices*. El símbolo x_1 se lee como "x subíndice 1". Los subíndices se emplean para distinguir entre valores diferentes de una variable que tengan una propiedad en común. Por ejemplo, en los pares ordenados (–3, 5) y (6, 4), el –3 se designa como x_1 y el 6 como x_2. Su propiedad común es que ambos son componentes x de pares ordenados. Esto es lo que se ilustra en el ejemplo que sigue.





Puede escribirse un programa para la fórmula de la distancia. El que se muestra sustenta resultado del ejemplo 1, puesto que $\sqrt{82} \approx 9.055385138$.

EJEMPLO 1 Calcule la distancia entre (–3, 5) y (6, 4).

Cuando se emplee la fórmula de la distancia para calcular la separación entre dos puntos, su designación como (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es arbitraria. Se elige $(x_1, y_1) = (-3, 5)$ y $(x_2, y_2) = (6, 4)$.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(6 - (-3))^2 + (4 - 5)^2} \qquad x_2 = 6,\ y_2 = 4,\ x_1 = -3,\ y_1 = 5 \\ &= \sqrt{9^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{82} \end{aligned}$$

■

Fórmula del punto medio El **punto medio** de un segmento de línea es aquel que es equidistante a ambos extremos. Si contamos con las coordenadas de los dos puntos extremos de un segmento de línea, no es difícil hallar las coordenadas de su punto medio.

Fórmula del punto medio

Las coordenadas del punto medio del segmento con extremos en (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Dicho con palabras, las coordenadas del punto medio de un segmento de línea se encuentran al calcular los promedios de las coordenadas x y y de los extremos.

EJEMPLO 2 Calcule las coordenadas del punto medio del segmento de línea con extremos en (8, –4) y (–9, 6).

Con el empleo de la fórmula del punto medio, se encuentra que las coordenadas del punto medio son las siguientes:

$$\left(\frac{8 + (-9)}{2}, \frac{-4 + 6}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

■

EJEMPLO 3 La figura 5, en la página siguiente ilustra la manera en que ha disminuido el poder de compra del dólar entre 1900 y 2000, con base en los cambios en el Índice de precios al consumidor. En este modelo, el periodo base es 1982-1984. Por ejemplo, en 1990 habría costado \$1.00 comprar algo que en el periodo base hubiera tenido un costo de \$.766; con el uso de la gráfica, estime el poder de compra del dólar en 1995, y compárelo con la cifra real actual de \$.656.

El año de 1995 se ubica a la mitad de 1990 y 2000, por lo que deben encontrarse las coordenadas del punto medio del segmento que tiene como extremos a (1990, .766) y (2000, .581). Éste queda definido por

$$\left(\frac{1990 + 2000}{2}, \frac{.766 + .581}{2}\right) = (1995, .6735).$$

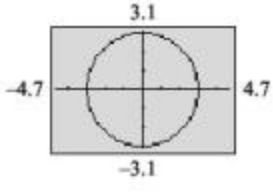
Así, con base en este procedimiento, el poder de compra del dólar redondeado a la milésima más cercana fue de $.674 en 1995. Ésta es una muy buena aproximación a la cifra real de $.656.



Fuente: Oficina de estadísticas laborales de Estados Unidos

FIGURA 5

Círculos Una aplicación de la fórmula de la distancia conduce a una de las formas más familiares de la geometría, el círculo. Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos en un plano que se encuentran a una distancia fija de otro punto fijo. El punto fijo se llama **centro** y la distancia fija, **radio**.



Para graficar $x^2 + y^2 = 9$, se resuelve para y y se obtiene $y_1 = \sqrt{9 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{9 - x^2}$. Después se grafican ambas en una ventana cuadrada.

EJEMPLO 4 Encuentre la ecuación del círculo con radio 3 y centro en (0, 0), y grafique el círculo.

Si el punto (x, y) está sobre el círculo, la distancia (x, y) al centro $(0, 0)$ es 3, como se ve en la figura 6. Según la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d$$
$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = 3 \qquad x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = x,\ y_2 = y$$
$$x^2 + y^2 = 9. \qquad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

Una ecuación de este círculo es $x^2 + y^2 = 9$. Se grafica con la localización de todos los puntos a tres unidades a partir del origen. ■

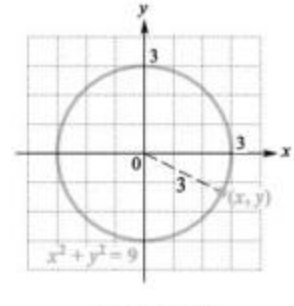


FIGURA 6

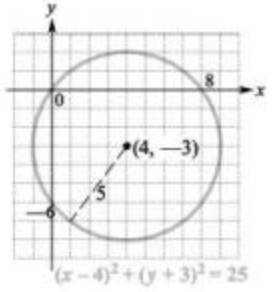


FIGURA 7

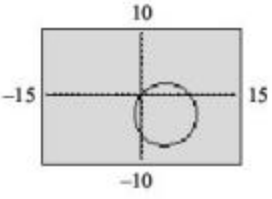
EJEMPLO 5 Encuentre una ecuación para el círculo que tiene su centro en el punto $(4, -3)$ y radio de 5, y grafíquelo.

De nuevo se usa la fórmula de la distancia.

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} = 5$$
$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25 \quad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

En la figura 7 se muestra la gráfica de este círculo. ■

Los ejemplos 4 y 5 pueden generalizarse para obtener la ecuación de un círculo con radio r y centro en (h, k). Si (x, y) es un punto del círculo, la distancia del centro (h, k) al punto (x, y) es r. Entonces, de acuerdo con la fórmula de la distancia, $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$. Al elevar al cuadrado ambos lados se obtiene la siguiente ecuación de un círculo.



Con el uso del comando apropiado se puede dibujar un círculo. Se introducen las coordenadas del centro y el radio. Compare con el ejemplo 5 y la figura 7.

Ecuación de un círculo

La ecuación de un círculo de radio r con centro en (h, k), es la siguiente:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

En particular, un círculo de radio r con centro en el origen tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

EJEMPLO 6 Encuentre la ecuación del círculo con centro en el punto $(-1, 2)$ y radio de 4.

En la ecuación general que se mencionó se hace $h = -1$, $k = 2$ y $r = 4$, con lo que se obtiene

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$[x-(-1)]^2 + (y-2)^2 = 4^2$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16. \quad ■$$

En la ecuación que se encontró en el ejemplo 5, al multiplicar $(x-4)^2$ y $(y+3)^2$, y después agrupar los términos semejantes, queda lo siguiente

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 25$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0.$$

Este resultado sugiere que una ecuación tiene términos tanto de x^2 y y^2 que podrían representar un círculo. El ejemplo siguiente muestra cómo distinguirlo, con el método de completar el cuadrado.

EJEMPLO 7 Haga una gráfica con $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$.

Como la ecuación tiene términos de x^2 y y^2 con coeficientes iguales, su gráfica tal vez sea la de un círculo. Para encontrar el centro y el radio, hay que completar los cuadrados de x y y, como sigue (consulte el capítulo anterior, en el que se estudió la técnica de completar el cuadrado).

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y = 15 \quad \text{Sumar 15 en ambos lados.}$$
$$(x^2 + 2x \quad) + (y^2 + 6y \quad) = 15 \quad \text{Agrupar con fines de completar el cuadrado.}$$
$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 15 + 1 + 9 \quad \text{Completar los cuadrados tanto en } x \text{ como en } y.$$
$$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 25 \quad \text{Factorizar a la izquierda y sumar a la derecha.}$$

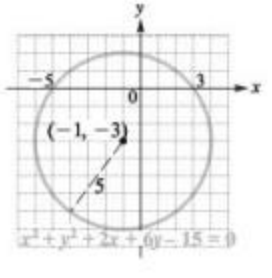


FIGURA 8

La ecuación final muestra que la gráfica es un círculo con centro en el punto $(-1, -3)$ y radio de 5. En la figura 8 se aprecia la gráfica. ■

El ejemplo final de esta sección ilustra cómo se utilizan las ecuaciones de círculos para localizar el epicentro de un terremoto.



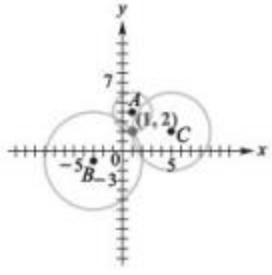


FIGURA 9

EJEMPLO 8 Los sismólogos ubican el epicentro de un terremoto al determinar la intersección de tres círculos. El radio de éstos representa la distancia del epicentro a cada una de las estaciones receptoras de las ondas sísmicas. Los centros de los círculos representan dichas estaciones.

Suponga que las estaciones receptoras A, B y C se localizan en un plano cartesiano en los puntos $(1, 4)$, $(-3, -1)$ y $(5, 2)$. Sean dos unidades, cinco unidades y cuatro unidades, las distancias del epicentro del sismo a las estaciones, respectivamente. Vea la figura 9. En el plano cartesiano, ¿dónde se localiza el epicentro?

En forma gráfica, parece que el centro se ubica en $(1, 2)$. Para comprobar esto con álgebra, determine la ecuación de cada círculo y sustituya $x = 1$ y $y = 2$.

Estación A:

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$$
$$(1 - 1)^2 + (2 - 4)^2 = 4$$
$$0 + 4 = 4$$
$$4 = 4$$

Estación B:

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$$
$$(1 + 3)^2 + (2 + 1)^2 = 25$$
$$16 + 9 = 25$$
$$25 = 25$$

Estación C:

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 16$$
$$(1 - 5)^2 + (2 - 2)^2 = 16$$
$$16 + 0 = 16$$
$$16 = 16$$

Así, hay la certeza de que el epicentro se encuentra en el punto $(1, 2)$. ■

8.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 y 2, responda cada pregunta con la ubicación de pares ordenados en la gráfica.

1. La gráfica muestra el porcentaje de mujeres dedicadas a profesiones de matemáticas o ciencias de la computación, desde 1970.

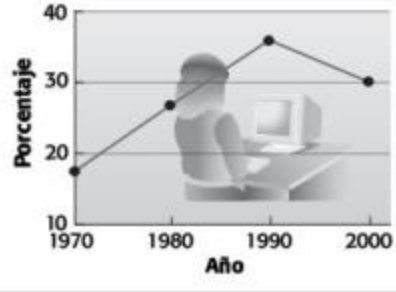
(a) Si (x, y) representa un punto en la gráfica, ¿qué representa la x? ¿Y la y, qué representa?

(b) ¿En qué decenio disminuyó el porcentaje de mujeres en las profesiones de matemáticas o ciencias de la computación?

(c) ¿Cuándo alcanzó un máximo el porcentaje de mujeres en dichas profesiones?

(d) ¿En qué año fue de aproximadamente 27% el porcentaje de mujeres en las profesiones mencionadas?

LAS MUJERES EN LAS PROFESIONES DE MATEMÁTICAS O CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN



Fuente: Oficina de Censos y Oficina de estadísticas laborales de Estados Unidos.

2. La gráfica representa los ingresos del gobierno federal por concepto de impuestos, en miles de millones de dólares.



Fuente: Oficina de administración y presupuesto de Estados Unidos.

(a) Si (x, y) representa un punto de la gráfica, ¿qué representa x? ¿La y, que representa?
(b) ¿Cuál fue el ingreso en 1996?
(c) ¿En qué año el ingreso fue de \$1,700,000 millones?

Llene los espacios en blanco con la respuesta correcta.

3. Para cualquier valor de x, el punto $(x, 0)$, se localiza en el eje _____.

4. Para cualquier valor de y, el punto $(0, y)$ se ubica en el eje _____.

5. El círculo $x^2 + y^2 = 9$ tiene su centro en el punto _____.

6. El punto (_____, 0) es el centro del círculo $(x - 2)^2 + y^2 = 16$.

Mencione el cuadrante, si lo hubiera, en el que se ubica cada uno de los siguientes puntos.

7. **(a)** $(1, 6)$ **(b)** $(-4, -2)$ **(c)** $(-3, 6)$ **(d)** $(7, -5)$ **(e)** $(-3, 0)$

8. **(a)** $(-2, -10)$ **(b)** $(4, 8)$ **(c)** $(-9, 12)$ **(d)** $(3, -9)$ **(e)** $(0, -8)$

9. Utilice la información que se da para determinar los posibles cuadrantes en que se ubica el punto (x, y)
(a) $xy > 0$ **(b)** $xy < 0$
(c) $\frac{x}{y} < 0$ **(d)** $\frac{x}{y} > 0$

10. ¿Qué es lo que debe cumplirse acerca de las coordenadas de cualquier punto que quede sobre un eje?

Localice los puntos siguientes en el sistema de coordenadas rectangulares, por medio de una gráfica similar a la de la figura 2.

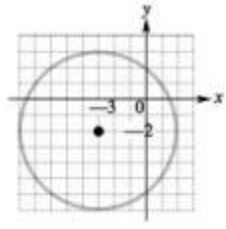
11. $(2, 3)$ **12.** $(-1, 2)$
13. $(-3, -2)$ **14.** $(1, -4)$
15. $(0, 5)$ **16.** $(-2, -4)$
17. $(-2, 4)$ **18.** $(3, 0)$
19. $(-2, 0)$ **20.** $(3, -3)$

Calcule **(a)** *la distancia entre los pares de puntos, y* **(b)** *las coordenadas del punto medio del segmento que tiene a los puntos como sus extremos.*

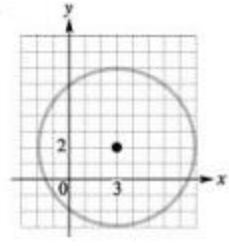
21. $(3, 4)$ y $(-2, 1)$ **22.** $(-2, 1)$ y $(3, -2)$
23. $(-2, 4)$ y $(3, -2)$ **24.** $(1, -5)$ y $(6, 3)$
25. $(-3, 7)$ y $(2, -4)$ **26.** $(0, 5)$ y $(-3, 12)$

En los ejercicios 27 a 30, relacione cada ecuación con la gráfica correcta.

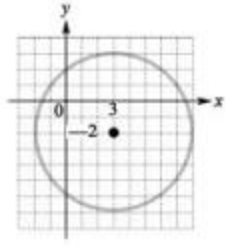
A.



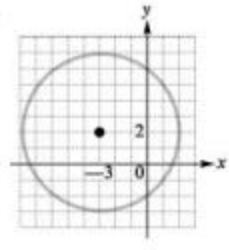
B.



C.



D.



27. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$
28. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$
29. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$
30. $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$

Escriba la ecuación del círculo con el centro y radio que se da.

31. $(0, 0)$; $r = 6$ **32.** $(0, 0)$; $r = 5$
33. $(-1, 3)$; $r = 4$ **34.** $(2, -2)$; $r = 3$
35. $(0, 4)$; $r = \sqrt{3}$ **36.** $(-2, 0)$; $r = \sqrt{5}$

37. Suponga que un círculo tiene una ecuación de la forma $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$. ¿Cuál es el centro del círculo? ¿Cuál es el radio del círculo?

38. **(a)** ¿Cuántos puntos hay en la gráfica de $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 0$? Explique su respuesta.

(b) ¿Cuántos puntos hay en la gráfica de $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = -1$? Explique su respuesta.

Encuentre el centro y radio de cada círculo. (Una pista: En los ejercicios 43 y 44 divida ambos lados entre el máximo factor común.)

39. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

40. $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 3 = 0$

41. $x^2 + y^2 + 10x - 14y - 7 = 0$

42. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

43. $3x^2 + 3y^2 - 12x - 24y + 12 = 0$

44. $2x^2 + 2y^2 + 20x + 16y + 10 = 0$

Trace la gráfica cada círculo.

45. $x^2 + y^2 = 36$

46. $x^2 + y^2 = 81$

47. $(x - 2)^2 + y^2 = 36$

48. $x^2 + (y + 3)^2 = 49$

49. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$

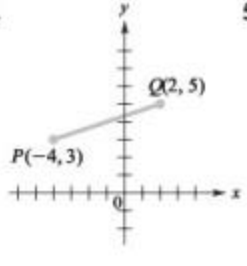
50. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

51. $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 36$

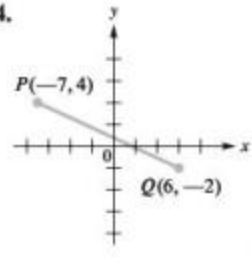
52. $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 49$

Calcule **(a)** *la distancia entre P y Q, y* **(b)** *las coordenadas del punto medio del segmento que une a P y Q.*

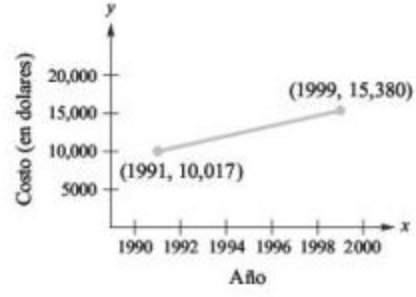
53.



54.



55. ***(Modelado) Inscripción y colegiaturas*** Durante el periodo escolar 1991-1999, el costo promedio anual (en dólares) de la inscripción y de las colegiaturas en colegios privados por estudiar cuatro años, se elevó en forma aproximadamente lineal. La gráfica ilustra dicho crecimiento por medio de un segmento rectilíneo. Emplee la fórmula del punto medio para calcular el costo durante el año 1995.



Fuente: The College Board.

56. ***(Modelado) Matrícula en colegios de dos años de duración*** En la tabla siguiente se muestra la matrícula en los colegios de dos años de duración, para los años 1980, 1990 y 2000. Utilice la fórmula del punto medio para calcular las altas en 1985 y 1995.

Año	Matrícula (en millones)
1980	4.5
1990	5.2
2000	5.8

Fuente: Almanaque estadístico de Estados Unidos.

57. ***(Modelado) Disminución del nivel de la pobreza según los ingresos*** La tabla muestra las disminuciones del nivel de la pobreza según los ingresos para una familia de cuatro miembros, desde el año 1960. Utilice la fórmula del punto medio para obtener las disminuciones de la pobreza según los ingresos en 1965 y 1985.

Año	Ingreso (en dólares)
1960	3022
1970	3968
1980	8414
1990	13,359
1999	17,184

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

58. Una presentación alternativa de la fórmula de la distancia es la siguiente:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

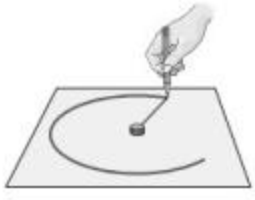
Compárela con la que se da en esta sección y explique por qué ambas formas son equivalentes.

59. Se pidió a un estudiante que calculara la distancia entre los puntos (5, 8) y (2, 14), y escribió lo siguiente:

$$d = \sqrt{(5 - 8)^2 + (2 - 14)^2}.$$

Explique por qué es incorrecto lo que hizo.

60. Puede dibujarse un círculo sobre una hoja si se sujeta a ésta un cordel, se ata una pluma al cordel, y se traza la curva como se muestra en la figura que sigue. Explique por qué funciona este método.



61. ***Carrera de cangrejos*** En la figura se aprecia la forma en que se lleva a cabo la carrera de cangrejos, en el Festival del cangrejo, en Breaux Bridge, Luisiana. Explique por qué es apropiada una *pista de carreras* circular para un evento como ese.



62. ***Epicentro de un terremoto*** Demuestre en forma algebraica que si tres estaciones receptoras ubicadas en (1, 4), (–6, 0) y (5, –2), registran distancias al epicentro de un terremoto, de cuatro unidades, 5 y 10, respectivamente, el epicentro se ubicaría en (–3, 4).

63. ***Epicentro de un terremoto*** El terremoto fue registrado por tres estaciones receptoras. Sus ubicaciones y distancias al epicentro están contenidas en las tres ecuaciones siguientes: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$, $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$ y $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Trace la gráfica de los círculos y determine la ubicación del epicentro.

64. Sin dibujarlas, diga si las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 25$ se intersecan. Explique su respuesta.

65. ¿Puede un círculo tener su centro en (2, 4), y ser tangente a ambos ejes? (*Tangente* significa que los toca en un punto.) Explique.

66. Suponga que los extremos de un segmento de recta tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

(a) Demuestre que la distancia entre (x_1, y_1) y $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ es la misma que la distancia entre (x_2, y_2) y $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

(b) Demuestre que la suma de las distancias entre (x_1, y_1) y $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, y (x_2, y_2) y $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ es igual a la distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

(c) ¿A qué conclusión nos conducen los resultados de los incisos (a) y (b)?

67. Si las coordenadas de un extremo de un segmento de recta son (3, –8), y las coordenadas del punto medio del segmento son (6, 5), ¿cuáles son las coordenadas del otro extremo?

68. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes tiene gráfica como un círculo?

A. $x^2 - y^2 = 9$ **B.** $x^2 = 9 - y^2$
C. $y^2 - x^2 = 9$ **D.** $-x^2 - y^2 = 9$

69. En el ejercicio 63, para las tres opciones que no son círculos explique la razón de ello.

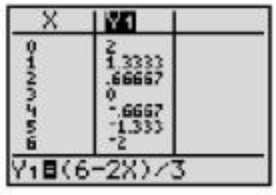
8.2 Rectas y sus pendientes

Ecuaciones lineales en dos variables En el capítulo anterior se estudiaron las ecuaciones lineales en una sola variable. La solución de una ecuación así es un número real. Una ecuación lineal en *dos* variables tendrá soluciones que se escriben como pares ordenados. A diferencia de las ecuaciones lineales en una sola variable, las que contienen dos tendrán, en general, un número infinito de soluciones.

Para encontrar pares ordenados que satisfagan la ecuación, seleccione cualquier número como valor de una de las variables, sustitúyalo en la ecuación en lugar de la variable, y después resuelva para la otra. Por ejemplo, suponga que en la ecuación $2x + 3y = 6$, $x = 0$. Entonces,

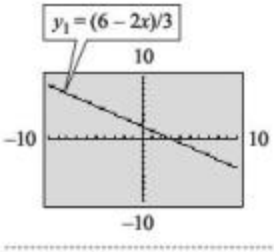
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 2(0) + 3y &= 6 \qquad \text{Con } x = 0. \\ 0 + 3y &= 6 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2, \end{aligned}$$

lo que da el par ordenado $(0, 2)$. Otros pares ordenados que satisfacen $2x + 3y = 6$ son $(6, -2)$, $(3, 0)$, $(-3, 4)$ y $(9, -4)$.



Las calculadoras gráficas generan tablas de pares ordenados. Aquí se presenta un ejemplo para $2x + 3y = 6$. Se debe resolver para $Y_1 = (6 - 2X)/3$ antes de generar la tabla.

La ecuación $2x + 3y = 6$ se traza la gráfica al dibujar, primero, todas los pares ordenados que se mencionaron. Se muestran en la figura 10(a). Los puntos resultantes parecen quedar sobre una línea recta. Si se trazara la gráfica de todas los pares ordenados que satisfacen la ecuación $2x + 3y = 6$, formarían una recta. En realidad, la gráfica de cualquier ecuación de primer grado en dos variables es una línea recta. La gráfica de $2x + 3y = 6$ es la que se aprecia en la figura 10(b).



Se aprecia la gráfica que genera una calculadora para la recta de la figura 10(b).

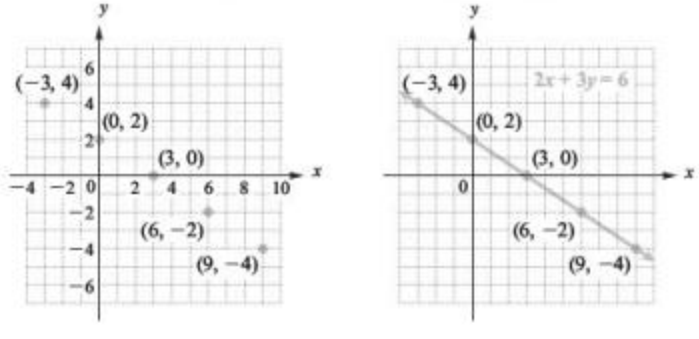


FIGURA 10

Ecuaciones lineales en dos variables

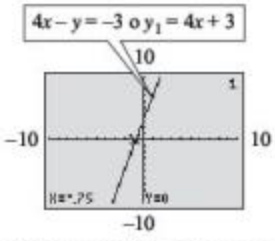
Una ecuación que puede escribirse en la forma

$$Ax + By = C \quad (\text{Con } A \text{ y } B \text{ diferentes de } 0)$$

es una **ecuación lineal en dos variables**. Esta forma se denomina **forma estándar**.

Todas las ecuaciones de primer grado con dos variables tienen líneas rectas por gráfica. Como una línea recta se determina si se conoce dos puntos cualesquiera de ella, para trazar una gráfica basta con encontrar dos puntos diferentes.

Las intersecciones con los ejes x y y son dos puntos útiles para elaborar las gráficas de rectas. La **intersección con el eje x** es el punto (si lo hubiera) en que la recta cruza dicho eje, y la **intersección con el eje y** es el punto (si hay alguno) donde la recta cruza este eje. (*Nota:* En muchos textos, las intersecciones se definen como números



El letrero en la parte inferior de la pantalla sustenta el hecho de que (–3/4, 0) es la intersección de la recta de la figura 11 con el eje *x*. Aquella con el eje *y* podría encontrarse en una forma similar.

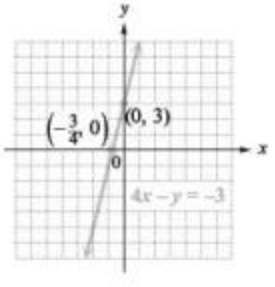
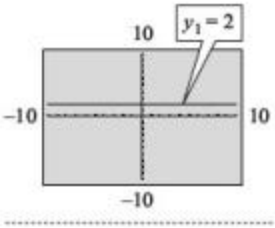
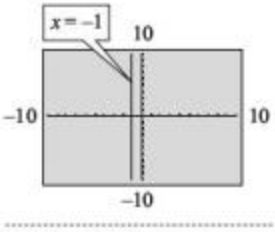


FIGURA 11



Compare esta gráfica con la de la figura 12(a).



Esta línea vertical no es un ejemplo de *función* (vea la sección 8.4), por lo que debe emplearse el comando *draw* para obtenerla. Compárela con la figura 12(b).

y no como puntos. Sin embargo, en este libro se hará referencia a ellas como puntos.) Se obtienen las intersecciones de la siguiente manera:

Intersecciones

Para encontrar la intersección de la gráfica con el eje x, considere $y = 0$.
Para hallar la intersección con el eje y, hay que establecer $x = 0$.

EJEMPLO 1 Calcule las intersecciones con los ejes x y y, de $4x - y = -3$, y trace la gráfica de la ecuación.

Para encontrar la intersección con el eje x, determine $y = 0$.

$$4x - 0 = -3 \quad \text{Con } y = 0.$$
$$4x = -3$$
$$x = -\frac{3}{4} \quad \text{La intersección con el eje } x \text{ es } \left(-\frac{3}{4}, 0\right).$$

Para encontrar la del eje y, establezca $x = 0$.

$$4(0) - y = -3 \quad \text{Con } x = 0.$$
$$-y = -3$$
$$y = 3 \quad \text{La intersección con el eje } y \text{ es } (0, 3).$$

Las intersecciones son los dos puntos $(-3/4, 0)$ y $(0, 3)$. Utilícelos para dibujar la gráfica, como se aprecia en la figura 11. ■

Una línea podría no tener intersección con el eje x, o no tenerla con el eje y.

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de cada recta.

(a) $y = 2$

Al escribir $y = 2$ como $0x + 1y = 2$, se observa que cualquier valor que se dé a x, inclusive $x = 0$, produce $y = 2$, lo que hace que la intersección con el eje y sea $(0, 2)$. Como y siempre vale 2, no hay ningún valor de x que corresponda a $y = 0$, y por ello la gráfica no tiene intersección con el eje x. La gráfica, como se observa en la figura 12(a), es una recta horizontal.

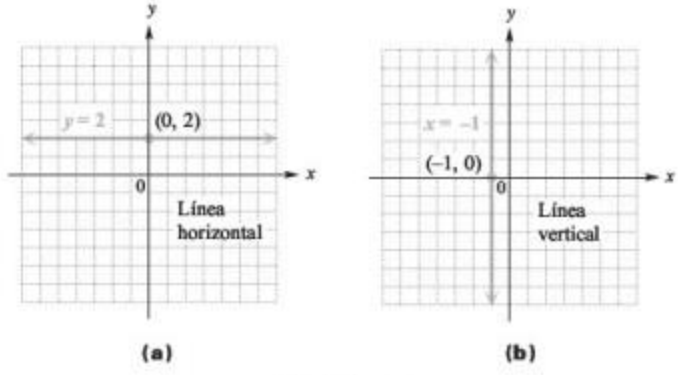


FIGURA 12

(b) $x = -1$

La forma $1x + 0y = -1$ muestra que cualquier valor de y conduce a $x = -1$, por lo que ningún valor de y hace que $x = 0$. Por tanto, la gráfica no tiene intersección con el eje y. El único modo en que una línea recta no tenga intersección con el eje y, es que sea vertical, como se aprecia en la figura 12(b). ■

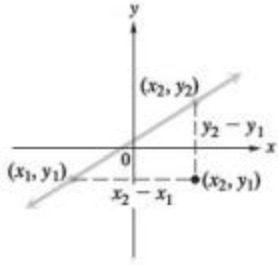


FIGURA 13

Pendiente Una recta se determina por dos puntos diferentes. También queda determinada por uno de sus puntos y alguna medida de su *inclinación*. La medida de la inclinación de una recta se denomina *pendiente*. Una forma de medir la inclinación de la recta es comparar su cambio vertical (la *elevación*) con el cambio horizontal (el *avance*) cuando se avanza a lo largo de la recta de un punto fijo hacia otro.

Suponga que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos distintos de una recta. Entonces, al ir sobre la recta de (x_1, y_1) a (x_2, y_2), el valor de y cambia de y_1 a y_2, en una cantidad igual a $y_2 - y_1$. Conforme y cambia de y_1 a y_2, el valor de x cambia de x_1 a x_2 en una cantidad de $x_2 - x_1$. Vea la figura 13. La razón del cambio en y al cambio en x, se denomina **pendiente** de la recta. Para denotarla se emplea la letra m.

Pendiente

Si $x_1 \neq x_2$, la pendiente de la recta a través de los puntos diferentes (x_1, y_1) y (x_2, y_2), es la siguiente:

$$m = \frac{\textbf{devación}}{\textbf{avance}} = \frac{\textbf{cambio en } y}{\textbf{cambio en } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

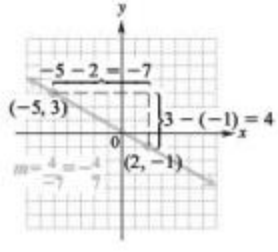


FIGURA 14

EJEMPLO 3 Calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos (2, –1) y (–5, 3).

Si $(2, -1) = (x_1, y_1)$ y $(-5, 3) = (x_2, y_2)$, entonces

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-1)}{-5 - 2} = \frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}.$$

Vea la figura 14. Por otro lado, si $(2, -1) = (x_2, y_2)$ y $(-5, 3) = (x_1, y_1)$, la pendiente sería

$$m = \frac{-1 - 3}{2 - (-5)} = \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7},$$

la misma respuesta. Este ejemplo indica que la pendiente es la misma sin importar cuál punto se considere en primer lugar. Asimismo, con el empleo del concepto geométrico de triángulos semejantes, se demuestra que la pendiente es la misma no importa cuáles sean los dos puntos diferentes que se elija de la recta. ■

Si se aplica la fórmula de la pendiente a una línea vertical u horizontal, se encuentra que el numerador o el denominador de la fracción valdrían 0.

EJEMPLO 4 Calcule la pendiente, si fuera posible, de cada una de las rectas siguientes.

(a) $x = -3$

Tras una primera observación, se tiene que (–3, 5) y (–3, –4) son dos puntos que satisfacen la ecuación $x = -3$. Utilice estos puntos para encontrar la pendiente.

$$m = \frac{-4 - 5}{-3 - (-3)} = \frac{-9}{0}$$ Pendiente indefinida

Como la división entre 0 es indefinida, la pendiente también lo es. Ésta es la razón por la que la definición de pendiente incluye la restricción de que $x_1 \neq x_2$.



La **pendiente de las carreteras** se mide en porcentaje. Por ejemplo, una pendiente de 8% significa que la carretera gana 8 pies de alto por cada 100 pies que se extienda la vía en la horizontal. Las carreteras interestatales no pueden exceder una pendiente de 6%. Aunque, al parecer, este valor no es demasiado para una pendiente, es probable que haya tramos de carreteras interestatales difíciles para un corredor de fondo.

(b) $y = 5$

La pendiente se calcula con la selección de dos puntos diferentes de la recta, tales como $(3, 5)$ y $(-1, 5)$, y con el empleo de la definición de pendiente.

$$m = \frac{5 - 5}{3 - (-1)} = \frac{0}{4} = 0$$ Pendiente igual a 0 ■

En el ejemplo 2, $x = -1$ tiene como gráfica una recta vertical, y $y = 2$ tiene una horizontal por gráfica. Si se generalizaran estos resultados y los del ejemplo 4, se pueden hacer las siguientes afirmaciones acerca de las rectas verticales y horizontales.

Rectas verticales y horizontales

Una recta vertical tiene una ecuación de la forma $x = a$, donde a es un número real, y su pendiente es indefinida. Una línea horizontal tiene una ecuación de la forma $y = b$, donde b es un número real y su pendiente es de 0.

Si se conoce la pendiente de una línea y un punto contenido en ella, entonces es posible trazar la gráfica de la línea con el método que se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la recta que tiene pendiente de 2/3 y pasa por el punto $(-1, 4)$.

En primer lugar, hay que localizar el punto $(-1, 4)$ en una gráfica, como se muestra en la figura 15. Después, con la definición de pendiente,

$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{2}{3}.$$

Hay que moverse dos unidades hacia *arriba* en la dirección y, y después tres unidades a la *derecha* en la dirección x, para ubicar otro punto de la gráfica (denotado con P). La recta que pasa por $(-1, 4)$ y P, es la gráfica que se pide.

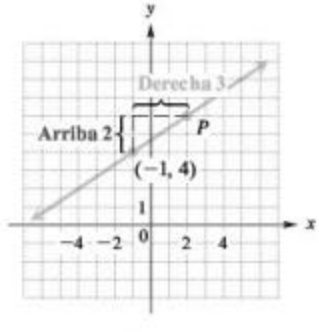


FIGURA 15 ■

La recta que aparece en la figura 14 tiene pendiente negativa, –4/7, y va hacia abajo de izquierda a derecha. Por el contrario, la recta cuya gráfica se muestra en la

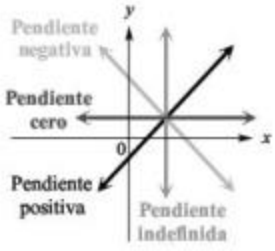


FIGURA 16

figura 15 tiene pendiente positiva, 2/3, y va hacia arriba de izquierda a derecha. Estos son casos particulares de un enunciado general acerca de las pendientes (la figura 16 ilustra rectas con pendientes positiva, pendiente 0, negativa e indefinida).

Pendientes positiva y negativa

Una recta con pendiente positiva va hacia arriba (asciende) de izquierda a derecha, en tanto que una con pendiente negativa va hacia abajo (cae) de izquierda a derecha.

Rectas paralelas y perpendiculares Las pendientes de un par de rectas paralelas o perpendiculares tienen una relación especial. La pendiente de una recta mide su inclinación. Como las rectas paralelas tienen la misma inclinación, sus pendientes también deben ser iguales. Asimismo, las rectas que tengan la misma pendiente son paralelas.

Pendientes de rectas paralelas

Dos rectas no verticales con la misma pendiente son paralelas; dos rectas paralelas no verticales tienen la misma pendiente. Además, todas las rectas verticales son paralelas.

EJEMPLO 6 ¿Son paralelas las rectas L_1 que pasa por $(-2, 1)$ y $(4, 5)$, y L_2, que pasa por $(3, 0)$ y $(0, -2)$?

La pendiente de L_1 es

$$m_1 = \frac{5 - 1}{4 - (-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

La pendiente de L_2 es

$$m_2 = \frac{-2 - 0}{0 - 3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

Puesto que las pendientes son iguales, las rectas son paralelas. ■

Las rectas perpendiculares son aquellas que se intersecan en ángulo recto. Puede demostrarse que las pendientes de las rectas perpendiculares tienen un producto igual a -1, siempre que ninguna de ellas sea vertical. Por ejemplo, si la pendiente de una recta es de 3/4, entonces cualquier otra perpendicular a ella tiene pendiente de –4/3, porque $(3/4)(-4/3) = -1$.

Pendientes de rectas perpendiculares

Si dos rectas son perpendiculares y ninguna vertical, tienen pendientes recíprocas negativas; es decir, su producto es -1. Asimismo, dos rectas con pendientes recíprocas negativas son perpendiculares. Toda recta vertical es perpendicular a toda recta horizontal.

EJEMPLO 7 ¿Son perpendiculares las rectas L_1 que pasa por $(0, -3)$ y $(2, 0)$, y L_2 que toca $(-3, 0)$ y $(0, -2)$?

La pendiente de L_1 es

$$m_1 = \frac{0 - (-3)}{2 - 0} = \frac{3}{2}.$$

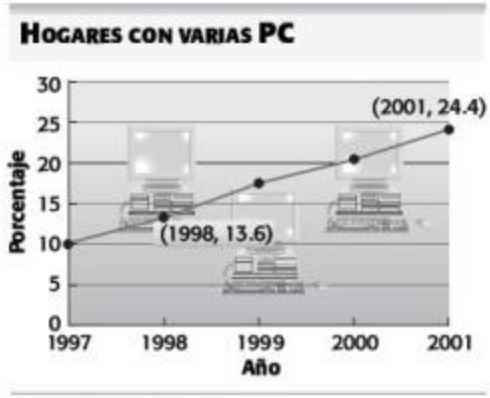
La pendiente de L_2 es

$$m_2 = \frac{-2 - 0}{0 - (-3)} = -\frac{2}{3}.$$

Puesto que el producto de las pendientes de las dos líneas es $(3/2)(-2/3) = -1$, las rectas son perpendiculares. ■

Tasa promedio de cambio Se ha visto que la pendiente de una recta es la razón de cambio de y (cambio vertical) al cambio de x (cambio horizontal). Esta idea se extiende a ideas de la vida real, como se verá enseguida: la pendiente da la tasa promedio de cambio de y por unidad de cambio de x, donde el valor de y *depende del valor de* x. El ejemplo siguiente ilustra la idea de tasa promedio de cambio. Se supone que existe una relación lineal entre x y y.

EJEMPLO 8 La gráfica de la figura 17 aproxima el porcentaje de hogares estadounidenses en los que había varias computadoras personales, en los años 1997 a 2001. Calcule la tasa promedio de cambio en porcentaje por año, para los años 1998 a 2001.



Fuente: The Yankee Group.

FIGURA 17

Para emplear la fórmula de la pendiente se necesitan dos pares de datos. De la gráfica se obtiene que si $x = 1998$, entonces $y = 13.6$, y si $x = 2001$, entonces $y = 24.4$, por lo que se tiene los pares ordenados (1998, 13.6) y (2001, 24.4). Según la fórmula de la pendiente:

$$\text{tasa promedio de cambio} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{24.4 - 13.6}{2001 - 1998} = \frac{10.8}{3} = 3.6.$$

Esto significa que el número de hogares estadounidenses que poseen varias computadoras se *incrementó* en 3.6%, en promedio, cada año del periodo de va de 1998 a 2001. ■

8.2 EJERCICIOS

Complete los pares ordenados para cada ecuación. Después grafique la ecuación.

1. $2x + y = 5$; $(0, \ ), (\ , 0), (1, \ ), (\ , 1)$
2. $3x - 4y = 24$; $(0, \ ), (\ , 0), (6, \ ), (\ , -3)$
3. $x - y = 4$; $(0, \ ), (\ , 0), (2, \ ), (\ , -1)$
4. $x + 3y = 12$; $(0, \ ), (\ , 0), (3, \ ), (\ , 6)$
5. $4x + 5y = 20$; $(0, \ ), (\ , 0), (3, \ ), (\ , 2)$
6. $2x - 5y = 12$; $(0, \ ), (\ , 0), (\ , -2), (-2, \ )$
7. $3x + 2y = 8$

x	y
0	
	0
2	
	-2

8. $5x + y = 12$

x	y
0	
	0
	-3
2	

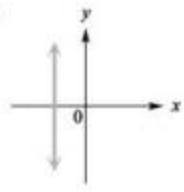
9. Explique cómo se calcula la intersección con el eje x de una ecuación lineal en dos variables.
10. Diga cómo se encuentra la intersección con el eje y de una ecuación lineal en dos variables.
11. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene una recta horizontal como gráfica?
    A. $2y = 6$ **B.** $2x = 6$
    C. $x - 4 = 0$ **D.** $x + y = 0$
12. ¿Cuál es el número mínimo de puntos que deben determinarse a fin de trazar la gráfica de una ecuación lineal en dos variables?

Para cada ecuación, proporcione las intersecciones con los ejes x y y. Después trace la gráfica de la ecuación.

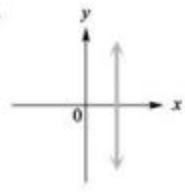
13. $3x + 2y = 12$
14. $2x + 5y = 10$
15. $5x + 6y = 10$
16. $3y + x = 6$
17. $2x - y = 5$
18. $3x - 2y = 4$
19. $x - 3y = 2$
20. $y - 4x = 3$
21. $y + x = 0$
22. $2x - y = 0$
23. $3x = y$
24. $x = -4y$
25. $x = 2$
26. $y = -3$
27. $y = 4$
28. $x = -2$

En los ejercicios 29 a 36, relacione la ecuación con la figura que se parezca más a su gráfica.

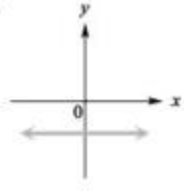
A.



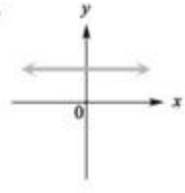
B.



C.



D.

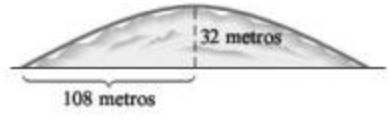


29. $y + 2 = 0$
30. $y + 4 = 0$
31. $x + 3 = 0$
32. $x + 7 = 0$
33. $y - 2 = 0$
34. $y - 4 = 0$
35. $x - 3 = 0$
36. $x - 7 = 0$

37. ¿Cuál es la pendiente (o inclinación) de este techo?

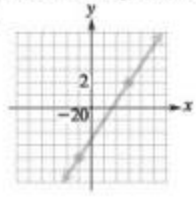


38. ¿Cuál es la pendiente (o grado) de esta colina?

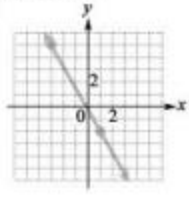


39. Utilice las coordenadas de los puntos que se indican para calcular la pendiente de cada recta.

(a)

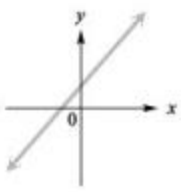


(b)

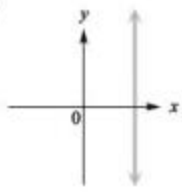


40. Diga si la pendiente de la recta que se da es pendiente 0, positiva, negativa o indefinida.

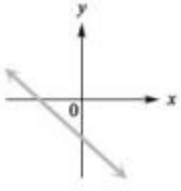
(a)



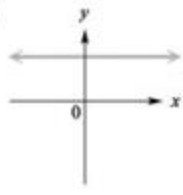
(b)



(c)



(d)



Encuentre la pendiente de la recta que pasa por cada pareja de puntos, por medio de la fórmula correspondiente para ello.

41. $(-2, -3)$ y $(-1, 5)$

42. $(-4, 3)$ y $(-3, 4)$

43. $(8, 1)$ y $(2, 6)$

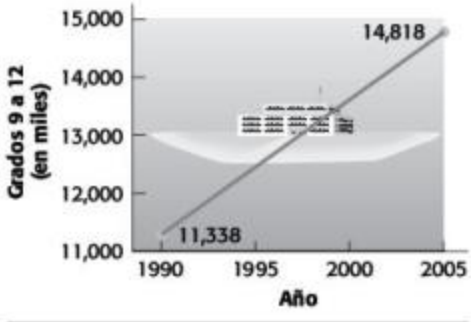
44. $(13, -3)$ y $(5, 6)$

45. $(2, 4)$ y $(-4, 4)$

46. $(-6, 3)$ y $(2, 3)$

47. ***Datos de escuelas públicas*** La figura A ilustra la matrícula en las escuelas públicas (en miles), en los grados 9 a 12, de Estados Unidos. En la columna siguiente, la figura B proporciona el número (promedio) de estudiantes de escuelas públicas por computadora.

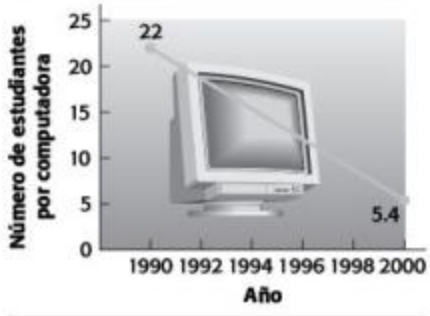
MATRÍCULA EN ESCUELAS PÚBLICAS



Fuente: Compendio de estadísticas educativas, anual; y *Proyecciones de estadísticas educativas,* anual.

FIGURA A

NÚMERO DE ESTUDIANTES POR COMPUTADORA



Fuente: Quality Education Data.

FIGURA B

(a) Utilice los pares ordenados (1990, 11,338) y (2005, 14,818), para encontrar la pendiente de la recta de la figura A.

(b) La pendiente de la recta de la figura A es _____ . (positiva/negativa)
Esto significa que durante el periodo representado, la matrícula _____ . (aumentó/disminuyó)

(c) La pendiente de una recta representa su *tasa de cambio.* Con base en la figura A diga, ¿cuál fue el incremento en estudiantes *por año* durante el periodo que se ilustra?

(d) Emplee los pares ordenados que se proporcionan para calcular la pendiente de la recta de la figura B.

(e) La pendiente de la recta de la figura B es _____ . (positiva/negativa)
Lo que significa que durante el periodo que se representa el número de estudiantes por computadora _____ . (aumentó/disminuyó)

(f) Con base en la figura B diga, ¿cuál fue la disminución en el rubro estudiantes por computadora *por año* durante el periodo que se muestra?

48. Use los resultados del ejercicio 47 para establecer una relación entre el signo de la pendiente de una recta y el aumento o disminución en la cantidad que representa y.

Utilice el método del ejemplo 5 para trazar la gráfica de cada una de las rectas siguientes.

49. $m = \frac{1}{2}$, pasa por (–3, 2)

50. $m = \frac{2}{3}$, pasa por (0, 1)

51. $m = -\frac{5}{4}$, pasa por (–2, 1)

52. $m = -\frac{3}{2}$, pasa por $(-1, -2)$

53. $m = -2$, pasa por $(-1, -4)$

54. $m = 3$, pasa por $(1, 2)$

55. $m = 0$, pasa por $(2, -5)$

56. pendiente indefinida, pasa por $(-3, 1)$

Determine si las rectas descritas son paralelas, perpendiculares, *o* ninguno de estos tipos.

57. L_1 que pasa por $(4, 6)$ y $(-8, 7)$, y L_2 que pasa por $(7, 4)$ y $(-5, 5)$

58. L_1 que pasa por $(9, 15)$ y $(-7, 12)$, y L_2 que pasa por $(-4, 8)$ y $(-20, 5)$

59. L_1 que pasa por $(2, 0)$ y $(5, 4)$, y L_2 que pasa por $(6, 1)$ y $(2, 4)$

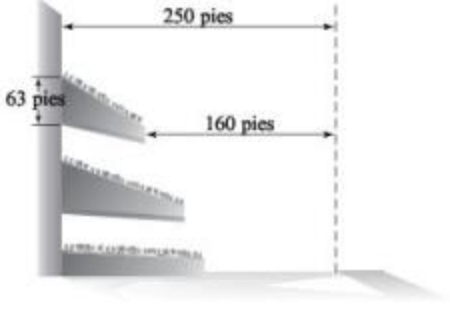
60. L_1 que pasa por $(0, -7)$ y $(2, 3)$, y L_2 que pasa por $(0, -3)$ y $(1, -2)$

61. L_1 que pasa por $(0, 1)$ y $(2, -3)$, y L_2 que pasa por $(10, 8)$ y $(5, 3)$

62. L_1 que pasa por $(1, 2)$ y $(-7, -2)$, y L_2 que pasa por $(1, -1)$ y $(5, -9)$

Utilice el concepto de pendiente para resolver cada problema.

63. ***Inclinación de una tribuna superior*** La tribuna superior en *Comiskey Park*, en Chicago, ha generado entre otras quejas, el disgusto por su inclinación. Se le ha comparado con el salto en esquí. Hay 160 pies desde la parte frontal al comienzo de la plataforma superior, y 250 pies del borde frontal al posterior. La parte alta de la plataforma superior se encuentra a 63 pies por arriba del inferior. ¿Cuál es su pendiente?



64. ***Grado (pendiente) de una rampa*** Cuando se diseñó la arena nueva del *FleetCenter* de Boston, para sustituir al antiguo *Boston Garden*, los arquitectos tuvieron cuidado de diseñar las rampas que llevan a las entradas de modo que los elefantes fueran capaces de subir por ellas. El grado (o pendiente) máximo que un elefante subiría es de 13%. Suponga que se construyó una rampa así con un recorrido horizontal de 150 pies. ¿Cuál sería la elevación vertical máxima que los arquitectos podrían emplear?



Utilice la idea de tasa promedio de cambio para resolver cada problema.

65. ***Investigación farmacéutica*** En años recientes, los gastos en investigación y desarrollo (en millones de dólares) de la compañía farmacéutica Merck, se acercan mucho a los de la gráfica.

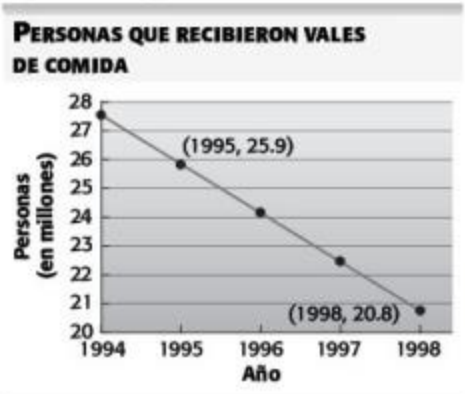


Fuente: Reporte anual de Merck & Co., Inc. 1999.

(a) Emplee los pares ordenados que se proporcionan para determinar la tasa promedio de cambio en dichos gastos por año.

(b) Explique cómo se interpreta una tasa de cambio positiva en esta situación.

66. ***Personas que reciben vales de comida*** La gráfica proporciona una buena aproximación del número de personas que recibieron vales de comida (en millones) durante el periodo de 1994 a 1998.



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

(a) Utilice los pares ordenados proporcionados para calcular la tasa promedio de cambio en los recipientes con etiqueta de comida por año durante el periodo mencionado.

(b) Interprete el significado que tiene una pendiente negativa en esta situación.

67. ***Ventas de libros*** En la tabla se presentan las ventas en dólares netos de los editores de libros, para el periodo de 1995 a 2000.

Ventas netas de libros	
Año	**Ventas (en millones)**
1995	19,000
1996	20,000
1997	21,000
1998	22,000
1999	23,000
2000	24,000

Fuente: Book Industry Study Group.

(a) Encuentre la tasa promedio de cambio para los periodos 1995-1996; 1995-1999; 1998-2000. ¿Qué es lo que se observa en las respuestas? ¿Qué le dice esto?

(b) Calcule las tasas de cambio del inciso (a) como porcentajes. ¿Qué observa?

68. ***Suscriptores de teléfonos celulares*** En la tabla se muestra el número de suscriptores de teléfonos celulares (en miles) de 1994 a 1999.

Suscriptores de teléfonos celulares	
Año	**Suscriptores (en miles)**
1994	24,134
1995	33,786
1996	44,043
1997	55,312
1998	69,209
1999	86,047

Fuente: Asociación de la industria de telecomunicaciones celulares, Washington, D.C. *State of the cellular industry* (anual).

(a) Determine la tasa promedio de cambio de los suscriptores para los periodos 1994-1995, 1995-1996, y subsecuentes.

(b) ¿Es aproximadamente la misma tasa promedio de cambio en años sucesivos? Si se trazara la gráfica de los pares ordenados de la tabla, ¿se dibujaría una línea recta aproximada a través de ellos?

69. Explique el significado de *pendiente*. Proporcione ejemplos que muestren casos de pendiente 0, positiva, negativa e indefinida.

70. Explique cómo se corresponde el *grado* de una autopista con el concepto de pendiente.

8.3 Ecuaciones de rectas y modelos lineales

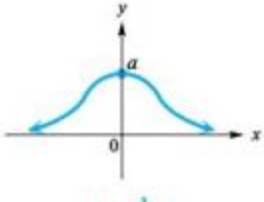
Ecuaciones de rectas Si se conoce la pendiente de una recta y un punto en particular de ésta, es posible determinar la ecuación de la recta. Suponga que la pendiente es m, y (x_1, y_1) es un punto. Sea (x, y) cualquier otro punto. Entonces, de acuerdo con la definición de pendiente se tiene que:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$



Maria Gaetana Agnesi (1719-1799) realizó gran parte de su obra matemática sobre la geometría analítica. Creció en una atmósfera académica; su padre fue matemático en la facultad, en la Universidad de Bolonia. En un sentido amplio fue heredera de la gran tradición de los matemáticos italianos.

A los 13 años, Maria Agnesi hablaba con fluidez varios idiomas, pero prefirió las matemáticas a la literatura. La curva que se muestra enseguida, llamada la *bruja de Agnesi*, se estudia en los cursos de geometría analítica.



$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$

Al multiplicar ambos lados por $x - x_1$ se obtiene la *forma punto-pendiente* de la ecuación de la recta.

Forma punto-pendiente

La ecuación de la recta que pasa por (x_1, y_1) y que tiene pendiente m, se escribe en la **forma punto-pendiente**, así:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

EJEMPLO 1 Obtenga la forma estándar de la ecuación de la recta que tiene pendiente de 1/3 y que pasa por el punto (–2, 5).

Se utiliza la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con $(x_1, y_1) = (-2, 5)$ y $m = 1/3$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{1}{3}[x - (-2)] \qquad \text{Con } y_1 = 5,\ m = \frac{1}{3},\ x_1 = -2.$$

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x + 2)$$

$$3y - 15 = x + 2 \qquad \text{Multiplicar por 3.}$$

$$x - 3y = -17 \qquad \text{Forma estándar}$$

■

Si se conocen dos puntos de una recta, es posible obtener la ecuación de la recta. En primer lugar, se encuentra la pendiente con la fórmula de ésta, y después se utiliza su valor en la forma punto-pendiente con uno de los puntos dados.

EJEMPLO 2 Obtenga la forma estándar de la ecuación de la recta que pasa por los puntos (–4, 3) y (5, –7).

En primer lugar se obtiene la pendiente, por medio de la definición.

$$m = \frac{-7 - 3}{5 - (-4)} = -\frac{10}{9}$$

Como (x_1, y_1) puede usarse cualquiera de (–4, 3) o (5, –7), en la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta. Si se emplea (–4, 3), entonces $-4 = x_1$ y $3 = y_1$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -\frac{10}{9}[x - (-4)] \qquad \text{Con } y_1 = 3,\ m = \frac{10}{4} \text{ y } x_1 = 4.$$

$$y - 3 = -\frac{10}{9}(x + 4)$$

$$9(y - 3) = -10(x + 4) \qquad \text{Se multiplica por 9.}$$

$$9y - 27 = -10x - 40 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$10x + 9y = -13 \qquad \text{Forma estándar}$$

■

Suponga que se conoce la pendiente m de una recta, y que la intersección con el eje y tiene las coordenadas $(0, b)$. Entonces, al sustituirse en la forma punto-pendiente, se obtiene

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - b &= m(x - 0) && x_1 = 0,\ y_1 = b \\ y - b &= mx \\ y &= mx + b. && \text{Sumar } b \text{ en ambos lados.} \end{aligned}$$

Este último resultado se conoce como la *forma pendiente-intercepto** de la ecuación de la recta.

Forma pendiente-intercepto

La ecuación de una recta con pendiente m e intercepto en y $(0, b)$ se escribe en la **forma pendiente-intercepto**, así:

$$y = mx + b.$$

Pendiente — La intercepto en y es $(0, b)$.

La importancia de la forma pendiente-intercepto de una ecuación lineal nunca es exagerada. En primer lugar, toda ecuación lineal (de una recta no vertical) tiene una forma *única* (una y sólo una) pendiente-intercepto. En segundo lugar, en la sección siguiente se estudiarán las *funciones lineales*, en cuya definición es necesaria la forma pendiente-intercepto.

EJEMPLO 3

(a) Escriba la ecuación de la recta que se describe en el ejemplo 1, en la forma pendiente-intercepto.

Se determinó que la forma estándar de la ecuación de la recta es

$$x - 3y = -17.$$

Al resolver para y se obtiene la forma pendiente-intercepto.

$$\begin{aligned} -3y &= -x - 17 && \text{Restar } x. \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{17}{3} && \text{Multiplicar por } -\tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

La pendiente es $1/3$ y la intersección con el eje y es $(0, 17/3)$.

(b) Escriba la ecuación de la recta descrita en el ejemplo 2 en la forma pendiente-intercepto.

$$\begin{aligned} 10x + 9y &= -13 && \text{Forma estándar} \\ 9y &= -10x - 13 \\ y &= -\frac{10}{9}x - \frac{13}{9} \end{aligned}$$

La pendiente es $-10/9$, y la intersección con el eje y es $(0, -13/9)$. ■

Si se conoce la forma pendiente-intercepto de la ecuación de una recta, es posible emplear el método de trazar gráfica que se describió en el ejemplo 5 de la sección anterior.

* N. del Ed.: El término *pendiente-intercepto* se conoce también como *ordenada al origen*.

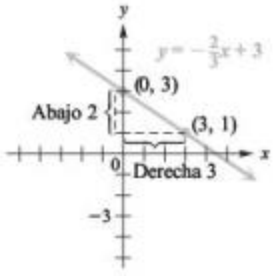
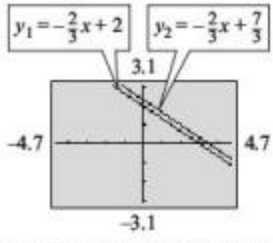


FIGURA 18

EJEMPLO 4 Trace la gráfica de la recta cuya ecuación es $y = -\frac{2}{3}x + 3$.

Puesto que la ecuación está dada en la forma pendiente-intercepto, es fácil ver que la pendiente es $-\frac{2}{3}$ y la intersección con el eje y es (0, 3). Se localiza el punto (0, 3), y después, con el empleo de la interpretación de *subida durante el avance* para la pendiente, se avanza dos unidades *hacia abajo* (debido al –2 en el numerador de la pendiente) y tres unidades hacia la *derecha* (por el tres en el denominador). Así, se llega al punto (3, 1). Se localiza el punto (3, 1) y se unen los dos puntos por medio de una recta, como se muestra en la figura 18 (también hubiera podido interpretarse a $\frac{-2}{3}$ como $\frac{2}{-3}$ para obtener un segundo punto diferente; sin embargo, la recta sería la misma). ■

Como se mencionó en la sección anterior, las rectas paralelas tienen la misma pendiente, y las perpendiculares poseen pendientes que son recíprocas negativas una de la otra.



Esta pantalla apoya el resultado del ejemplo 5(a).

EJEMPLO 5 Encuentre la forma pendiente-intercepto de la ecuación de cada recta.

(a) La recta paralela a la gráfica de $2x + 3y = 6$, que pasa por el punto (–4, 5).

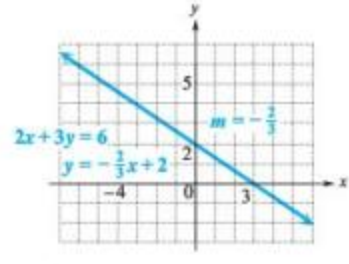
La pendiente de la línea $2x + 3y = 6$ se obtiene al resolver para y.

$$2x + 3y = 6$$

$$3y = -2x + 6 \qquad \text{Restar } 2x.$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2 \qquad \text{Dividir entre 3.}$$

↑ Pendiente



La pendiente está dada por el coeficiente de x, por lo que $m = -\frac{2}{3}$. Vea la figura. La ecuación que se requiere de la recta que pasa por (–4, 5) y que es paralela a $2x + 3y = 6$ también debe tener pendiente de $-\frac{2}{3}$. Para obtener esta ecuación, se usa la forma punto-pendiente, con $(x_1, y_1) = (-4, 5)$ y $m = -\frac{2}{3}$.

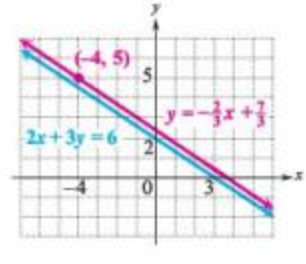
$$y - 5 = -\frac{2}{3}[x - (-4)] \qquad y_1 = 5,\ m = -\frac{2}{3},\ x_1 = -4$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x + 4)$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} + \frac{15}{3} \qquad \text{Sumar } 5 = \frac{15}{3}.$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \qquad \text{Agrupar términos semejantes.}$$



Aquí no se eliminan las fracciones después de sustituir porque se desea que la ecuación esté en la forma pendiente-intercepto, es decir, resuelta para y. En la figura se muestran ambas rectas.

(b) La recta perpendicular a la gráfica de $2x + 3y = 6$, que pasa por el punto $(-4, 5)$

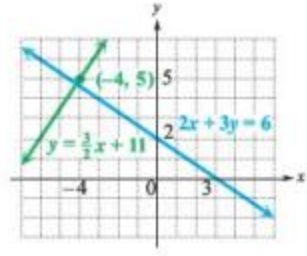
Para que una recta sea perpendicular a $2x + 3y = 6$, debe tener una pendiente que sea el recíproco negativo de $-\frac{2}{3}$, el cual es $\frac{3}{2}$. Para obtener la ecuación de la recta perpendicular que se muestra en la figura, se emplea el punto $(-4, 5)$ y pendiente de $\frac{3}{2}$ en la forma punto-pendiente.

$$y - 5 = \frac{3}{2}[x - (-4)] \qquad y_1 = 5,\ m = \frac{3}{2},\ x_1 = -4$$

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x + 4)$$

$$y - 5 = \frac{3}{2}x + 6 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$y = \frac{3}{2}x + 11 \qquad \text{Sumar 5.}$$



A continuación se presenta el resumen de las formas distintas de las ecuaciones lineales.

Resumen de las formas de las ecuaciones lineales

$Ax + By = C$	**Forma estándar** (Ni A ni B son 0).
$x = a$	**Recta vertical** Pendiente indefinida; la intersección con el eje x es $(a, 0)$.
$y = b$	**Recta horizontal** La pendiente es 0; la intersección con el eje y es $(0, b)$.
$y = mx + b$	**Forma pendiente-intercepto** La pendiente es m; la intersección con el eje y es $(0, b)$.
$y - y_1 = m(x - x_1)$	**Forma punto-pendiente** La pendiente es m; la recta pasa por (x_1, y_1).

Modelo lineal En los ejemplos y ejercicios anteriores se utilizaron ecuaciones que describían datos reales. Ahora se mostrará cómo pueden encontrarse dichas ecuaciones. El proceso de escribir una ecuación para que se ajuste a una gráfica se conoce como *ajuste de curvas*. El ejemplo siguiente ilustra este concepto para el caso de una línea recta. La ecuación que resulta se denomina un **modelo lineal**.

EJEMPLO 6 En la gráfica de la figura 19, en la página siguiente, se presenta el gasto al centavo (en miles de millones de dólares) en surtir recetas de medicinas en Estados Unidos.

(a) Escriba una ecuación que modele los datos.

Los datos que se muestran en la gráfica de barras se incrementan en forma lineal; es decir, podría dibujarse una línea recta que tocara los extremos superiores de dos barras cualesquiera y pasaría cerca de los de todas las barras. Se pueden usar los

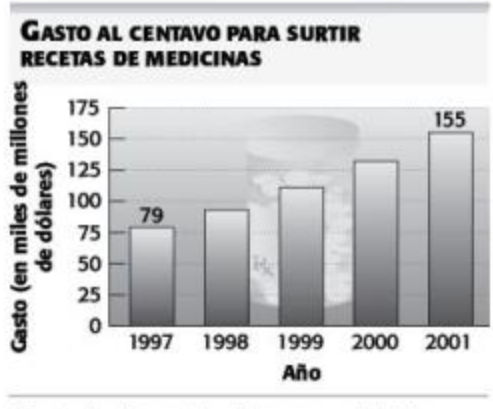
datos y la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta a fin de obtener una ecuación que modele la relación entre el año x y el gasto y en surtir recetas de medicinas. Si se hace que $x = 7$ represente a 1997, $x = 8$ represente a 1998, y así sucesivamente, pueden escribirse los datos dados en forma de pares ordenados (7, 79) y (11, 155). La pendiente de la recta que pasa por los dos puntos es:

$$m = \frac{155 - 79}{11 - 7} = \frac{76}{4} = 19.$$

Así, el gasto al centavo para surtir las recetas de medicinas aumentó en cerca de \$19,000 millones por año. Con el empleo de esta pendiente, uno de los puntos, por ejemplo (7, 79), y la forma punto-pendiente, se obtiene

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Forma punto-pendiente} \\ y - 79 &= 19(x - 7) && (x_1, y_1) = (7, 79);\ m = 19 \\ y - 79 &= 19x - 133 && \text{Propiedad distributiva} \\ y &= 19x - 54. && \text{Forma pendiente-intercepto} \end{aligned}$$

Así, el gasto al centavo y (en miles de millones de dólares) para surtir las recetas de medicinas en Estados Unidos en el año x, se obtiene con la ecuación $y = 19x - 54$.





Fuente: Instituto estadounidense para análisis de investigación, a partir de los datos de Scott-Levin.

FIGURA 19

(b) Utilice la ecuación que se obtuvo en el inciso (a) para pronosticar el gasto al centavo que se hará en Estados Unidos en el año 2004 (para esto, suponga una tasa constante de cambio).

Como $x = 7$ representa a 1997 y 2004 ocurre 7 años después de dicho año, $x = 14$ representa a 2004. En la ecuación se sustituye 14 en lugar de x.

$$y = 19x - 54 = 19(14) - 54 = 212$$

De acuerdo con el modelo, en 2004 se gastarán \$212,000 millones para surtir las recetas de medicinas. ■

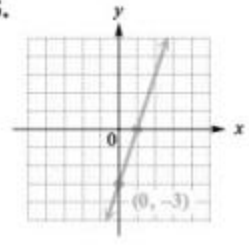
8.3 EJERCICIOS

Relacione la ecuación correcta de la columna I con la descripción apropiada de la columna II.

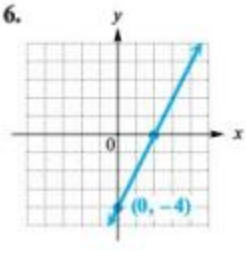
I	II
1. $y = 4x$	**A.** pendiente = –2, pasa por el punto (4, 1)
2. $y = \frac{1}{4}x$	**B.** pendiente = –2, intercepto con el eje y en (0, 1)
3. $y = -2x + 1$	**C.** pasa por los puntos (0, 0) y (4, 1)
4. $y - 1 = -2(x - 4)$	**D.** pasa por los puntos (0, 0) y (1, 4)

*Utilice la interpretación geométrica de la pendiente (*elevación *dividida entre el* avance*) para obtener la pendiente de cada recta. Después, al identificar en la gráfica el intercepto con el eje* y*, escriba la forma pendiente-intercepto de la ecuación de la recta.*

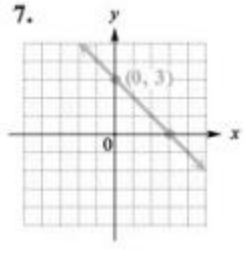
5.



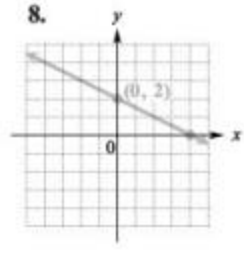
6.



7.

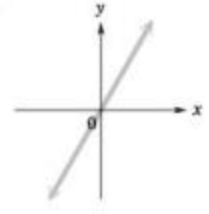


8.

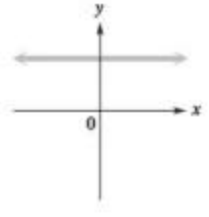


En los ejercicios 9 a 16, relacione cada ecuación con la gráfica de las opciones A a D, que la represente con mayor exactitud. (Una pista: Le ayudará determinar los signos de m *y* b *en la toma de su decisión.)*

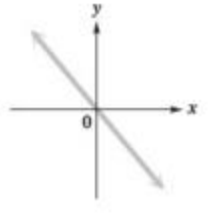
A.



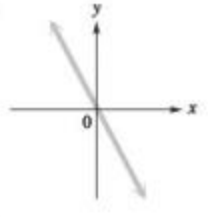
B.



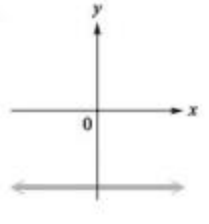
C.



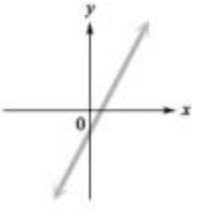
D.



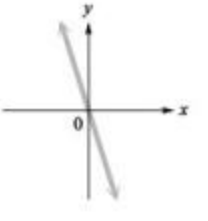
E.



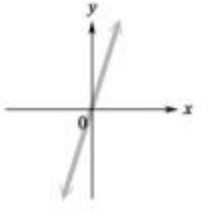
F.



G.



H.



9. $y = 2x + 3$	**10.** $y = -2x + 3$	**11.** $y = -2x - 3$	**12.** $y = 2x - 3$
13. $y = 2x$	**14.** $y = -2x$	**15.** $y = 3$	**16.** $y = -3$

Escriba la forma pendiente-intercepto, de la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

17. Pasa por (–2, 4); pendiente de $-\frac{3}{4}$

18. Pasa por (–1, 6); pendiente de $-\frac{5}{6}$

19. Pasa por (5, 8); pendiente de –2

20. Pasa por (12, 10); pendiente de 1

21. Pasa por (–5, 4); pendiente de $\frac{1}{2}$

22. Pasa por (7, −2); pendiente de $\frac{1}{4}$

23. Intercepto en el eje x en (3, 0); pendiente de 4

24. Intercepto en el eje x en (–2, 0); pendiente de –5

Escriba una ecuación que satisfaga las condiciones que se exponen.

25. Pasa por (9, 5); pendiente de 0

26. Pasa por (–4, –2); pendiente de 0

27. Pasa por (9, 10); pendiente indefinida

28. Pasa por (–2, 8); pendiente indefinida

29. Pasa por (.5, .2); vertical

30. Pasa por $\left(\frac{5}{8}, \frac{2}{9}\right)$; vertical

31. Pasa por (–7, 8); horizontal

32. Pasa por (2, 7); horizontal

Escriba la forma pendiente-intercepto (si fuera posible) de la ecuación que pasa por los dos puntos.

33. (3,4) y (5,8)

34. (5, −2) y (−3, 14)

35. (6, 1) y (−2, 5)

36. (−2,5) y (−8, 1)

37. $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

38. $\left(\frac{3}{4}, \frac{8}{3}\right)$ y $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

39. (2,5) y (1,5)

40. (−2,2) y (4,2)

41. (7,6) y (7, −8)

42. (13,5) y (13, −1)

43. (1, −3) y (−1, −3)

44. (−4,6) y (5,6)

Escriba la ecuación en la forma pendiente-intercepto, de la recta que satisface las condiciones que se exponen.

45. $m = 5$; $b = 15$

46. $m = -2$; $b = 12$

47. $m = -\frac{2}{3}$; $b = \frac{4}{5}$

48. $m = -\frac{5}{8}$; $b = -\frac{1}{3}$

49. Pendiente de $\frac{2}{5}$; intercepto en el eje y en (0, 5)

50. Pendiente de $-\frac{3}{4}$; intercepto en el eje y en (0, 7)

51. Explique por qué la forma punto-pendiente de una ecuación no puede usarse para encontrar la ecuación de una recta vertical.

52. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes está en forma estándar, de acuerdo con la definición de forma estándar que se da en este texto?

A. $3x + 2y - 6 = 0$ **B.** $y = 5x - 12$

C. $2y = 3x + 4$ **D.** $6x - 5y = 12$

(a) *Escriba cada ecuación en la forma pendiente-intercepto,* **(b)** *diga la pendiente de la recta y* **(c)** *proporcione la intersección con el eje* y.

53. $x + y = 12$

54. $x - y = 14$

55. $5x + 2y = 20$

56. $6x + 5y = 40$

57. $2x - 3y = 10$

58. $4x - 3y = 10$

Escriba la ecuación en la forma pendiente-intercepto, de la recta que satisface las condiciones dadas.

59. Pasa por (7, 2); paralela a $3x - y = 8$

60. Pasa por (4, 1); paralela a $2x + 5y = 10$

61. Pasa por (–2, –2); paralela a $-x + 2y = 10$

62. Pasa por (–1, 3); paralela a $-x + 3y = 12$

63. Pasa por (8,5); perpendicular a $2x - y = 7$

64. Pasa por (2, −7); perpendicular a $5x + 2y = 18$

65. Pasa por (−2,7); perpendicular a $x = 9$

66. Pasa por (8,4); perpendicular a $x = -3$

Resuelva cada problema.

67. ***Costos de colegios privados por cuatro años*** La tabla presenta el costo promedio anual (en dólares) de la inscripción y colegiaturas en colegios privados con duración de cuatro años, para ciertos años, en donde el año 1 representa a 1991, el año 3 a 1993, etcétera.

Costo de los colegios privados	
Año	**Costo (en dólares)**
1	10,017
3	11,025
5	12,432
7	13,785
9	15,380

Fuente: The College Board.

(a) Trace la gráfica de los cinco pares ordenados (año, costo). ¿Los puntos quedan en una línea recta, aproximadamente?

(b) Utilice los pares ordenados (3, 11,025) y (9, 15,380) para calcular la ecuación de la recta que aproxima los datos. Escriba la ecuación en la forma pendiente-intercepto (redondee el valor de la pendiente a la décima más cercana).

(c) Emplee la ecuación del inciso (b) para estimar el costo promedio anual en colegios privados por cuatro años, para 2003. (*Una pista:* ¿Cuál es el valor de x para 2003?)

68. ***Desechos nucleares*** La tabla proporciona los desechos nucleares de metales pesados (en miles de toneladas métricas) del combustible utilizado de los reactores, que se almacenan en forma temporal en sus instalaciones, en espera de almacenamiento permanente. (*Fuente:* "Burial of Radioactive Nuclear Waste under the Seabed", *Scientific American*, enero de 1998, p. 62.)

Desechos nucleares de metales pesados	
Año x	**Desechos** y
1995	32
2000*	42
2010*	61
2020*	76

*Estimaciones del Departamento de Energía de Estados Unidos.

Sea que $x = 0$ represente a 1995, $x = 5$ represente a 2000 (ya que $2000 - 1995 = 5$), y así sucesivamente.

(a) Trace la gráfica de los pares ordenados (x, y). ¿Los puntos quedan en una recta, aproximadamente?

(b) Emplee los pares ordenados (0, 32) y (25, 76) para obtener la ecuación de la recta que aproxima a las demás pares ordenados. Emplee la forma $y = mx + b$.

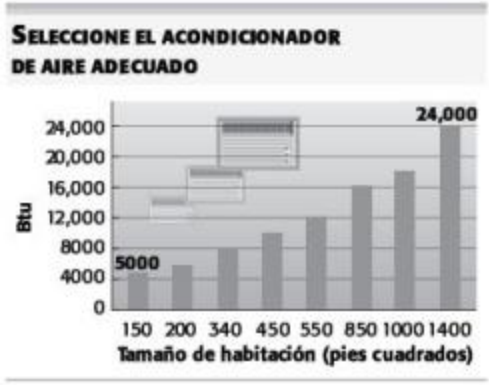
(c) Utilice la forma de la ecuación del inciso (b) para calcular la cantidad de los desechos nucleares en 2005.

69. ***Oficinas postales de Estados Unidos*** El número de oficinas postales estadounidenses ha venido disminuyendo. Emplee la información que se da en la gráfica de barras para los años de 1994 a 1998, con $x = 0$ que representa a 1990 y y que representa el número de oficinas postales. Encuentre la ecuación lineal que modela los datos. Escríbala en la forma pendiente-intercepto.



Fuente: Servicio Postal Estadounidense. *Informe anual del director general de correos.*

70. ***Selección de acondicionadores de aire*** La gráfica presenta el tamaño recomendable de acondicionadores de aire (en unidades térmicas británicas, Btu) para ciertos tamaños de habitación, en pies cuadrados. Use la información que se da para recintos de 150 pies cuadrados y 1400 pies cuadrados. Sea que x represente el número de pies cuadrados y que y represente las Btu correspondientes del acondicionador de aire. Encuentre la ecuación lineal que modela los datos. Escríbala en la forma pendiente-intercepto.



Fuente: Carey, Morris y James, *Home Improvement for Dummies*, IDG Books.

71. ***Mediana del ingreso de los afroamericanos*** La mediana del ingreso doméstico de los afroamericanos se incrementó en años recientes, como se observa en la gráfica.



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

(a) Emplee la información que se da para los años 1993 y 1997, con $x = 3$ que representa a 1993, $x = 7$ representa a 1997 y y representa a la mediana del ingreso, para escribir la ecuación en la forma pendiente-intercepto que modele la mediana del ingreso doméstico.

(b) Utilice la ecuación para aproximar la mediana del ingreso para 1995. ¿Cómo se compara el resultado con el valor real de $23,583?

72. ***Mediana del ingreso de los hispanos*** La gráfica de barras muestra la mediana del ingreso doméstico para los hispanos.

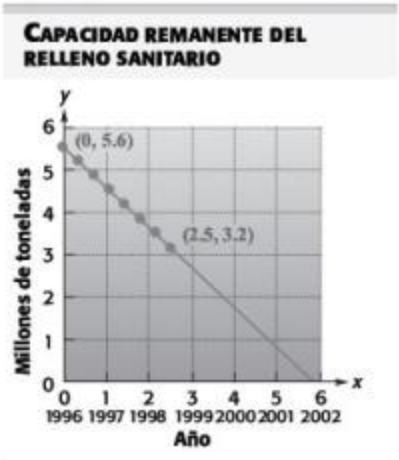


Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

(a) Use la información para los años 1995 y 1997 para escribir la ecuación en la forma pendiente-intercepto. Sea que $x = 5$ represente a 1995, $x = 7$ represente a 1997, y y represente la mediana del ingreso.

(b) Con base en la gráfica, ¿es de esperarse que la ecuación que se obtuvo en el inciso (a) arroje una buena aproximación para los ingresos en 1993 y 1994? ¿La ecuación proporcionaría una aproximación razonable para 1998? Explique su respuesta.

73. ***Capacidad de rellenos sanitarios*** La División de administración de los desechos y reciclaje del Condado de Sacramento es responsable de administrar la eliminación de desechos sólidos, lo que incluye la operación de un relleno sanitario. La gráfica muestra la capacidad remanente (en millones de toneladas) en el relleno del condado en años pasados. Estos puntos parecen quedar sobre una recta.



Fuente: División de administración de los desechos y reciclaje, Agencia de Servicios Públicos del Condado de Sacramento, Reporte de 1998.

(a) Escriba la ecuación en la forma pendiente-intercepto de la recta que se muestra y que pasa por los puntos (0, 5.6) y (2.5, 3.2).

(b) Emplee la ecuación del inciso (a) para estimar la capacidad remanente del relleno en 2001.

(c) Con base en la gráfica, ¿cuándo se utilizará la capacidad del relleno sanitario? (*Una pista:* Encuentre el punto de la gráfica en el que y es igual a 0; es decir, el intercepto en el eje x.) Estime el mes en que ocurrirá eso.

74. ***Relación Fahrenheit-Celsius*** Si se consideran pares ordenados de la forma (C, F), entonces, las dos escalas más comunes para medir la temperatura, Celsius y Fahrenheit, se relacionan como sigue: si C = 0, F = 32, y si C = 100, F = 212. Este ejercicio explica cómo utilizar esta información para encontrar la fórmula que relaciona ambas escalas de temperatura.

(a) Existe una relación lineal entre las temperaturas en grados Celsius y Fahrenheit. Si C = 0°, F = _____°, y si C = 100°, F = _____°.

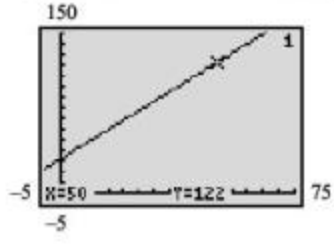
(b) Considere pares ordenados de temperaturas (C, F), donde C y F representen las temperaturas correspondientes en grados Celsius y Fahrenheit. La ecuación que relaciona ambas escalas tiene una gráfica de línea recta que contiene los dos puntos determinados en el inciso (a). ¿Cuáles son dichos puntos?

(c) Calcule la pendiente de la recta que se describe en el inciso (b).

(d) Ahora piense en la forma punto-pendiente de la ecuación en términos de C y F, donde C sustituye a x y F reemplaza a y. Utilice la pendiente que obtuvo en el inciso (c) y uno de los puntos determinados en forma previa, y obtenga la ecuación que da F en términos de C.

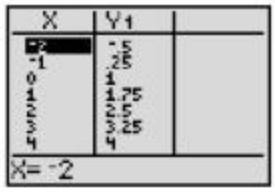
(e) Para obtener otra expresión de la fórmula, emplee la ecuación que encontró en el inciso (d) y resuélvala para C en términos de F.

(f) La ecuación que se obtuvo en el inciso (d) aparece graficada en la pantalla de calculadora que se muestra aquí. Observe los letreros en la parte inferior e interprételos en el contexto de este ejercicio.

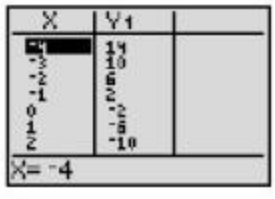


75. A continuación se presenta una tabulación de puntos, generados por una calculadora gráfica, para una recta Y_1. Use dos puntos cualesquiera para encontrar la ecuación de cada recta en la forma pendiente-intersección.

(a)



(b)



8.4 Introducción a las funciones: funciones lineales, aplicaciones y modelos

Es frecuente que se describa una cantidad en términos de otra; por ejemplo, el crecimiento de una planta se asocia a la cantidad de luz que recibe, hay una relación entre la demanda de un producto y su precio, el costo de un viaje está ligado a la distancia que se recorre, etc. Para representar cantidades correspondientes se usan pares ordenados.



Por ejemplo, suponga que es el momento de llenar el tanque de su automóvil. En la estación de la localidad, la gasolina de 89 octanos se vende a \$1.70 por galón. La experiencia le ha enseñado que el precio final que paga está determinado por el número de galones que compra multiplicado por el precio por galón (en este caso, \$1.70). Conforme se bombea la gasolina, dos conjuntos de números cambian: el número de galones que se despachan y el precio por dicho número. La tabla que sigue utiliza pares ordenados para ilustrar esta situación.

Número de galones bombeados	Precio por este número de galones
0	\$0.00 = 0(\$1.70)
1	\$1.70 = 1(\$1.70)
2	\$3.40 = 2(\$1.70)
3	\$5.10 = 3(\$1.70)
4	\$6.80 = 4(\$1.70)

Si x denota el número de galones bombeados, entonces el precio y en dólares se encuentra mediante la ecuación lineal $y = 1.70x$. En teoría, hay un número infinito

de pares ordenados (x, y) que satisfacen esta ecuación, pero esta aplicación se limita a valores no negativos de x, ya que un número de galones negativo es imposible. También hay un valor máximo práctico para la x de esta situación, que varía de un automóvil a otro. ¿Qué es lo que determina este valor máximo?

En este ejemplo, el precio total depende de la cantidad de gasolina bombeada. Por esta razón, el precio se denomina *variable dependiente*, y el número de galones se llama *variable independiente*. En general, si el valor de la variable y depende del valor de x, entonces y es la **variable dependiente** y x es la **variable independiente**.

Variable independiente → x, y ← Variable dependiente

(x, y)

Relaciones y funciones Como las cantidades relacionadas se escriben con el uso de pares ordenados, el concepto de *relación* se define como sigue.

Relación

Una **relación** es un conjunto de pares ordenados.

Por ejemplo, los conjuntos

$$F = \{(1, 2), (-2, 5), (3, -1)\} \quad \text{y} \quad G = \{(-4, 1), (-2, 1), (-2, 0)\}$$

son ambos relaciones. Existe un tipo especial de relación, que se denomina *función*, que es muy importante en matemáticas, así como sus aplicaciones.

Función

Una **función** es una relación en la que para cada valor del primer componente de pares ordenados hay *exactamente un valor* del segundo componente.

De los dos ejemplos de relación que se expusieron, solo el conjunto F es una función, debido a que para cada valor de x hay exactamente un valor de y. En el conjunto G, los dos últimos pares ordenados tienen el mismo valor de x al que corresponden dos valores diferentes de y, por lo que G es relación pero no función.

$F = \{(1, 2), (-2, 5), (3, -1)\}$ Función

Diferentes valores de x

$G = \{(-4, 1), (-2, 1), (-2, 0)\}$ No es función

Mismos valores de x

En una función, hay *exactamente un* valor de la variable dependiente, segunda componente, para cada valor de la variable independiente, primer componente. Esto es lo que hace que las funciones sean tan importantes en cuanto a sus aplicaciones.

Otra manera de pensar en una relación funcional es concebir a la variable independiente como una entrada, y a la variable dependiente como una salida. Por ejemplo, una calculadora es una máquina de entradas y salidas. Para calcular 8^2 se debe introducir 8, oprimir la tecla para elevar al cuadrado, y observar que la salida es 64. Las entradas y salidas también se determinan a partir de una gráfica o una tabla.

Una tercera forma de describir una función es enunciar una regla que diga cómo determinar la variable dependiente para un valor específico de la independiente. Suponga que se da una regla con palabras que dicen *la variable dependiente es el doble de la variable independiente*. En forma de ecuación esto se escribe así:

$$\underset{\text{Variable dependiente}}{y} = 2\underset{\text{Variable independiente}}{x}.$$

EJEMPLO 1 Para cada una de las situaciones siguientes, determine cuáles son las variables independiente y dependiente. Proporcione un ejemplo de pares ordenados que pertenezcan a la función.

(a) Los ganadores de medallas en las Olimpiadas de verano de 2000, en baloncesto varonil fueron {(oro, Estados Unidos), (plata, Francia), (bronce, Lituania)}. (*Fuente:* espn.go.com/oly/summer00/)



La variable independiente (la primera componente de cada par ordenado) es el tipo de medalla; la variable dependiente (segunda componente) es el país que la recibió. Cualquiera de los tres pares ordenados es un ejemplo.



(b) Una calculadora que encuentra raíces cuadradas

La variable dependiente (la entrada) es un número real no negativo, ya que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. La variable dependiente es la raíz cuadrada no negativa. Por ejemplo, (81, 9) pertenece a esta función.

(c) La gráfica de la figura 20, que muestra la relación entre el número de galones de agua en una alberca pequeña y el tiempo en horas



FIGURA 20

La variable independiente es el tiempo, en horas, y la variable dependiente es el número de galones de agua en la alberca. Un par ordenado es (25, 3000).

Importaciones de petróleo de Estados Unidos	
Año	**Importaciones**
1994	9.00
1995	8.83
1996	9.40
1997	10.16
1998	10.71

Fuente: Departamento de energía de Estados Unidos.

(d) La tabla de importaciones de petróleo en millones de barriles al día para ciertos años

La variable independiente es el año; la variable dependiente es el número de millones de barriles de petróleo. Un ejemplo de un par ordenado es (1994, 9.00).

(e) $y = 3x + 4$

La variable independiente es x, y la variable dependiente es y. Un par ordenado es (1/3, 5). ■

Dominio y rango

Dominio y rango

En una relación, el conjunto de todos los valores de la variable independiente (x) es el **dominio**; el conjunto de todos los valores de la variable dependiente (y) es el **rango**.

EJEMPLO 2 Diga cuál es el dominio y rango de cada función del ejemplo 1.

(a) El dominio es el conjunto de tipos de medallas, {oro, plata, bronce}, y el rango es el conjunto de países ganadores {Estados Unidos, Francia, Lituania}.

(b) Aquí, el dominio se restringe a números no negativos: $[0, \infty)$. El rango también es $[0, \infty)$.

(c) El dominio son todos los valores posibles de t, el tiempo en horas, que es el intervalo [0, 100]. El rango es el número de galones en el tiempo t, el intervalo [0, 3000].

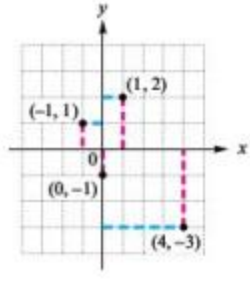
(d) El dominio es el conjunto de años, {1994, 1995, 1996, 1997, 1998}; el rango es el conjunto de importaciones (en millones de barriles diarios), {9.00, 8.83, 9.40, 10.16, 10.71}.

(e) En la ecuación (o regla) que se define, $y = 3x + 4$, x puede ser cualquier número real, por lo que el dominio es $\{x | x \text{ es un número real}\}$ o $(-\infty, \infty)$. Como todo número real y puede ser producido por algún valor de x, el rango también es el conjunto $\{y | y \text{ es un número real}\}$ o $(-\infty, \infty)$. ■

Gráficas de relaciones La **gráfica de una relación** es la gráfica de pares ordenados. La gráfica ilustra la relación, que puede emplearse para determinar su dominio y rango.

EJEMPLO 3 Diga cuál es el dominio y rango de cada relación.

(a)



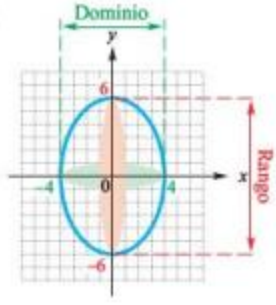
El dominio es el conjunto de valores de x,

$$\{-1, 0, 1, 4\}.$$

El rango es el conjunto de valores de y,

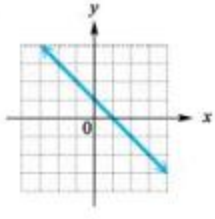
$$\{-3, -1, 1, 2\}.$$

(b)



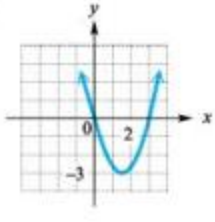
Los valores de x de los puntos de la gráfica incluyen todos los números entre –4 y 4, inclusive. Los valores de y incluyen todos los números entre –6 y 6, inclusive. Con el uso de la notación de intervalos, el dominio es $[-4, 4]$; el rango es $[-6, 6]$.

(c)



Las puntas de la flecha indican que la recta se extiende en forma indefinida hacia izquierda y derecha, así como hacia arriba y abajo. Por consiguiente, tanto el dominio como el rango son el conjunto de todos los números reales, lo que se escribe como $(-\infty, \infty)$.

(d)



Las puntas de la flecha indican que la recta se extiende en forma indefinida hacia izquierda y derecha, así como hacia arriba. El dominio es $(-\infty, \infty)$. Debido a que hay un valor mínimo de y, que es –3, el rango incluye a todos los números reales mayores o iguales que –3, lo que se escribe como $[-3, \infty)$. ■

Es frecuente que las relaciones se definan por medio de ecuaciones, como $y = 2x + 3$ y $y^2 = x$. A veces es necesario determinar el dominio de una relación a partir de su ecuación. En este libro, se adopta el acuerdo siguiente acerca del dominio.

Acuerdo sobre el dominio

Se supondrá que el dominio de una relación está constituido por todos los números reales que produzcan números reales si se les sustituye como variable independiente.

Para ilustrar este acuerdo se verá lo siguiente: como todo número real puede utilizarse para sustituir a x en $y = 2x + 3$, el dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales. Otro ejemplo: la función definida por $y = 1/x$ tiene como dominio a todos los números reales excepto el 0, ya que y queda indefinida si $x = 0$. En general, el dominio de una función definida por una expresión algebraica es todos los números reales, excepto aquellos que conduzcan a una división entre 0 o a alguna raíz impar de un número negativo.

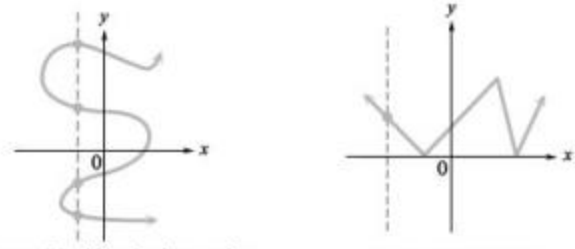
Identificación de funciones La mayoría de relaciones que se han visto en los ejemplos son funciones: es decir, a cada valor de x corresponde exactamente un valor de y. Ahora se estudiarán formas para determinar si una relación dada, definida en forma algebraica, es una función.

En una función cada valor de x produce a un solo valor de y, por lo que cualquier línea vertical que se dibuje a través de la gráfica de una función debe intersecarla como máximo en un punto. Ésta es la **prueba de la línea vertical para una función**.

Prueba de la línea vertical

Si una línea vertical interseca la gráfica de una relación en más de un punto, entonces la relación no es una función.

Por ejemplo, la gráfica que se muestra en la figura 21(a) no corresponde a la de una función, ya que una línea vertical la interseca en más de un punto, mientras que la gráfica de la figura 21(b) sí representa una función.



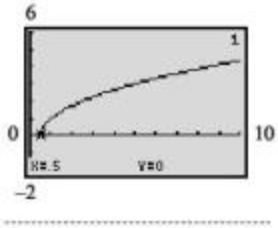
No es una función: el mismo valor de x corresponde a cuatro valores diferentes de y

Función: cada valor de x corresponde a un solo valor de y

(a) **(b)**

FIGURA 21

La prueba de la línea vertical es un método sencillo para identificar una función definida por una gráfica. Es más difícil decidir si una relación definida por una ecuación es una función. El ejemplo siguiente proporciona algunas recomendaciones que ayudan.



La gráfica de $y = \sqrt{2x - 1}$ apoya el resultado del ejemplo 4(a). El dominio es $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

EJEMPLO 4 Decida si cada una de las expresiones que siguen definen una función, y diga cuál sería su dominio.

(a) $y = \sqrt{2x - 1}$

En este caso, para cualquier elección de x en el dominio, hay exactamente un valor correspondiente de y (el radical es un número no negativo), por lo que la ecuación define una función. Como el radicando no puede ser negativo, entonces:

$$2x - 1 \geq 0$$

$$2x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{2}.$$

El dominio es $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

(b) $y^2 = x$

Los pares ordenados (16, 4) y (16, –4) satisfacen esta ecuación. Como hay un valor de x que corresponde a dos valores de y, 4 y –4, esta ecuación no define una función. Al resolver para y se obtiene $y = \sqrt{x}$ o $y = -\sqrt{x}$, lo que muestra que hay dos valores de y que corresponden a cada valor positivo de x. Debido a que x es igual al cuadrado de y, los valores de x siempre deben ser no negativos. El dominio de la relación es $[0, \infty)$.

(c) $y \le x - 1$

Por definición, y es una función de x si cada valor de x genera exactamente un valor de y. En este ejemplo, un valor particular de x, por ejemplo 1, corresponde a muchos valores de y. Los pares ordenados (1, 0), (1, –1), (1, –2), (1, –3), etc., satisfacen todas la desigualdad. Por esta razón, la desigualdad no define una función. Puede usarse cualquier número para x, por lo que el dominio es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$.

(d) $y = \dfrac{5}{x - 1}$

Dado cualquier resultado de x en el dominio, se encuentra y al restar 1 y después dividir el resultado entre 5. Este proceso genera exactamente un valor de y para cada valor en el dominio, por lo que esta ecuación define una función. El dominio incluye todos los números reales excepto aquellos que hacen que el denominador sea 0. Dichos números se encuentran al igualar el denominador a 0 y resolver para x.

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Así, el dominio incluye todos los números reales excepto 1. En notación de intervalos esto se escribe así:

$$(-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$ ■

En resumen, a continuación se dan tres variantes de la definición de función.

Variantes de la definición de función

1. Una **función** es una relación en la que para cada valor del primer componente del par ordenado hay exactamente un valor del segundo componente.
2. Una **función** es un conjunto de pares ordenados en la que no se repite ninguno del primer componente.
3. Una **función** es una regla o correspondencia que asigna exactamente un rango de valores a cada valor del dominio.

Notación de función Cuando una función f se define con una regla o ecuación en la que se usa x y y para denotar las variables independiente y dependiente, se dice que *y es función de x*, para hacer énfasis en que *y depende de x*. Se utiliza la notación

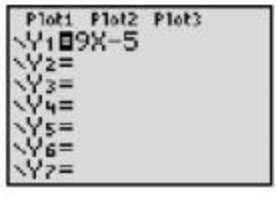
$$y = f(x),$$

que se denomina **notación de función**, para expresar esto, y $f(x)$ se lee "f de x" (en esta notación, los paréntesis no indican multiplicación). La letra f denota *función*. Por ejemplo, si $y = 2x - 7$, se escribe:

$$f(x) = 2x - 7.$$

Observe que $f(x)$ sólo es otro nombre de la variable dependiente y. Por ejemplo, si $y = f(x) = 9x - 5$ y $x = 2$, entonces se encuentra y, o $f(2)$, con la sustitución de x por 2.

$$\begin{aligned} y &= f(2) \\ y &= 9 \cdot 2 - 5 \\ &= 18 - 5 \\ &= 13. \end{aligned}$$

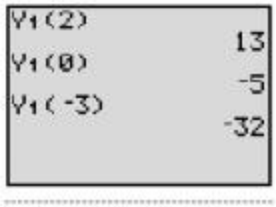


La proposición "si $x = 2$, entonces $x = 13$", se abrevia por medio de la notación de función como:

$$f(2) = 13.$$

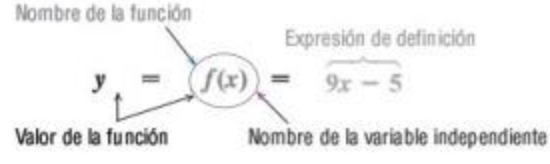
Se lee $f(2)$ como "f de 2". Asimismo,

$$f(0) = 9 \cdot 0 - 5 = -5, \quad \text{y} \quad f(-3) = 9(-3) - 5 = -32.$$



En el caso de $Y_1 = 9X - 5$, la capacidad de notación de función de la calculadora TI-83 Plus, sustenta el análisis que se hace aquí.

Estas ideas y los símbolos que se usan para representarlas se explican como sigue.



EJEMPLO 5 Sea $f(x) = -x^2 + 5x - 3$. Encuentre lo que se pide a continuación.

(a) $f(2)$

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 5x - 3 \\ f(2) &= -2^2 + 5 \cdot 2 - 3 \qquad \text{Sustituir } x \text{ con } 2. \\ &= -4 + 10 - 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

(b) $f(-1) = -(-1)^2 + 5(-1) - 3 = -1 - 5 - 3 = -9$

(c) $f(2x) = -(2x)^2 + 5(2x) - 3 \qquad$ Sustituir x con $2x$.
$= -4x^2 + 10x - 3$ ■

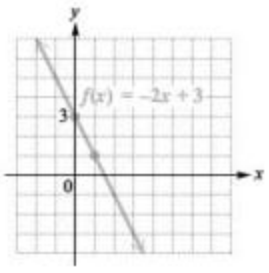
Funciones lineales Un tipo importante de función elemental es la *función lineal*.

Función lineal

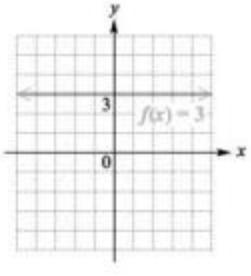
Una función que puede escribirse en la forma

$$f(x) = mx + b$$

para números reales m y b, es una **función lineal**.

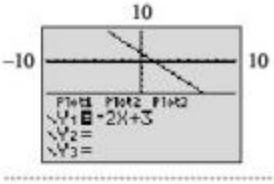


(a)

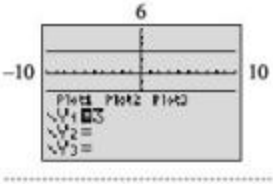


(b)

FIGURA 22



Compare con el ejemplo 6(a) y la figura 22(a).



Compare con el ejemplo 6(b) y la figura 22(b).

Observe que la forma $f(x) = mx + b$ que define una función lineal es la misma que la forma pendiente-intercepto de la ecuación de la recta, que se vio al principio de la sección anterior. Se sabe que la gráfica de $f(x) = mx + b$ será una recta con pendiente m e intersección con el eje y en $(0, b)$.

EJEMPLO 6 Trace la gráfica de cada función lineal.

(a) $f(x) = -2x + 3$

Para trazar la gráfica de la función, ubique la intersección con y, $(0, 3)$. Desde este punto, use la pendiente $-2 = \frac{-2}{1}$ para ir dos unidades hacia abajo y una a la derecha. Este segundo punto se emplea para obtener la gráfica de la figura 22(a).

(b) $f(x) = 3$

Por la sección anterior, se sabe que la gráfica de $y = 3$ es una recta horizontal. Por tanto, la gráfica de $f(x) = 3$ es una recta horizontal que interseca al eje y en $(0, 3)$, como se muestra en la figura 22(b). ■

La función que se define en el ejemplo 6(b) y se grafica en la figura 22(b), ilustra una función constante. Una **función constante** es una función lineal de la forma $f(x) = b$, donde b es un número real. El dominio de cualquier función lineal es $(-\infty, \infty)$. El rango de una función lineal no constante (como la del ejemplo 6(a)) también es $(-\infty, \infty)$, mientras que el rango de la función constante $f(x) = b$ es $\{b\}$.

Modelos de costo e ingresos Es posible expresar como funciones lineales al costo en que incurre una compañía por producir un artículo y el ingreso que obtiene por venderlo. La idea del **análisis del punto de equilibrio** se explica por medio de las gráficas de dichas funciones. Si el costo es mayor que el ingreso que se percibe, la compañía pierde dinero; si el costo es menor que el ingreso, la empresa gana dinero; y si el costo es igual al ingreso, la compañía está en equilibrio.

EJEMPLO 7 Peripheral Visions Inc., produce cintas de audio con calidad de estudio de conciertos en vivo. La compañía publica un anuncio en un boletín comercial. El costo del anuncio es de \$100. Producir cada cinta cuesta \$20, y la compañía cobra \$24 por cada una.

(a) Exprese el costo C como función de x, el número de cintas producidas.

El *costo fijo* es de \$100, y por cada cinta que se produce el *costo variable* es de \$20. Por tanto, el costo C se expresa como función de x, el número de cintas que se produce:

$$C(x) = 20x + 100 \quad (C \text{ en dólares}).$$

(b) Exprese el ingreso R como función de x, el número de cintas vendidas.

Puesto que cada cinta se vende en \$24, el ingreso R está dado por $R(x) = 24x$ (R en dólares).

(c) Para qué valor de x el ingreso es igual al costo?

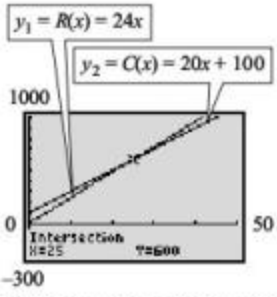
La compañía estará en equilibrio (sin utilidad ni pérdida) mientras el ingreso iguale al costo, es decir $R(x) = C(x)$. Esto es verdad siempre y cuando

$$\begin{aligned} R(x) &= C(x) \\ 24x &= 20x + 100 \qquad \text{Sustituir } R(x) \text{ y } C(x). \\ 4x &= 100 \\ x &= 25. \end{aligned}$$

Si se producen y venden 25 cintas, la compañía estará en equilibrio.

(d) Trace la gráfica de $C(x) = 20x + 100$ y $R(x) = 24x$ en el mismo sistema de coordenadas, e interprete la gráfica.

La figura 23 muestra las gráficas de las dos funciones. En el punto de equilibrio, se observa que si se producen y se venden 25 cintas, tanto el costo como el ingreso es de \$600. Si se producen y se venden menos de 25 cintas (es decir, si $x < 25$), la compañía pierde dinero. En el caso de más de 25 cintas (es decir, si $x > 25$) hay una utilidad.



Como se indica en la parte inferior de la pantalla, el punto de equilibrio es (25, 600). La calculadora puede encontrar el punto de intersección de las gráficas.

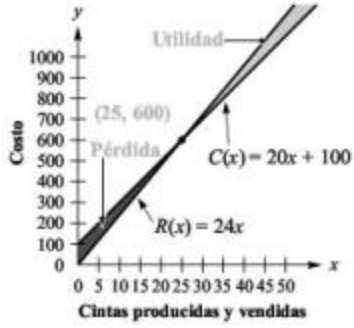
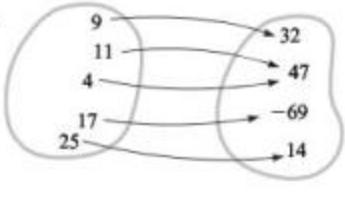


FIGURA 23

8.4 EJERCICIOS

1. Defina *función* en sus propias palabras, y dé un ejemplo.
2. En sus propias palabras, defina *dominio de una función* y proporcione un ejemplo.
3. En un par ordenado de una relación, ¿el primer elemento es un valor de la variable independiente o de la dependiente?

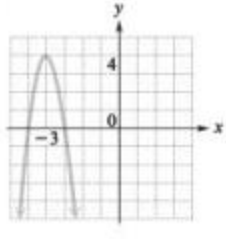
Para cada una de las relaciones siguientes, decida si se trata de una función, y proporcione el dominio y el rango.

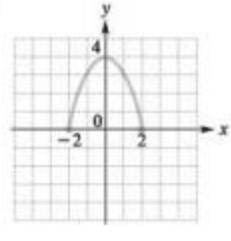
4. $\{(1,1),(1,-1),(2,4),(2,-4),(3,9),(3,-9)\}$
5. $\{(2,5),(3,7),(4,9),(5,11)\}$
6. El conjunto que contiene a ciertos países y sus estimaciones pronosticadas de esperanza de vida para personas nacidas en 2050, es {(Estados Unidos, 83.9), (Japón, 90.91), (Canadá, 85.26), (Inglaterra, 83.79), (Francia, 87.01), (Alemania, 83.12), (Italia, 82.26)}. (*Fuente: Shripad Tuljapurkar, Montain View Research, Los Altos, California.*)
7. Una máquina acepta como entrada números reales positivos, y las salidas son sus raíces cuadradas positiva y negativa.
8. 

9.

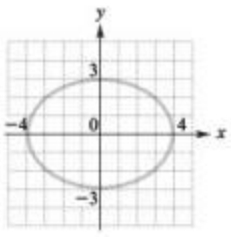
Población en edad de votar en Estados Unidos, en 2000 (en millones)	
Hispanos	21.3
Nativos estadounidenses	1.6
Estadounidenses asiáticos	8.2
Afroamericanos	24.6
Blancos	152.0

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

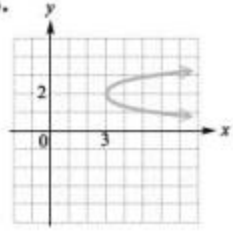
10. $\{(x,y) \mid x = |y|\}$
11. 

12. 

13.



14.



Decida si la relación dada define a y *como una función de* x. *Diga cuál es el dominio.*

15. $y = x^2$ **16.** $y = x^3$

17. $x = y^2$ **18.** $x = y^4$

19. $x + y < 4$ **20.** $x - y < 3$

21. $y = \sqrt{x}$ **22.** $y = -\sqrt{x}$

23. $xy = 1$ **24.** $xy = -3$

25. $y = \sqrt{4x + 2}$ **26.** $y = \sqrt{9 - 2x}$

27. $y = \dfrac{2}{x - 9}$ **28.** $y = \dfrac{-7}{x - 16}$

29. ***Nivel del agua en una alberca*** Consulte el ejemplo 1 y la figura 20, para responder las preguntas que siguen:

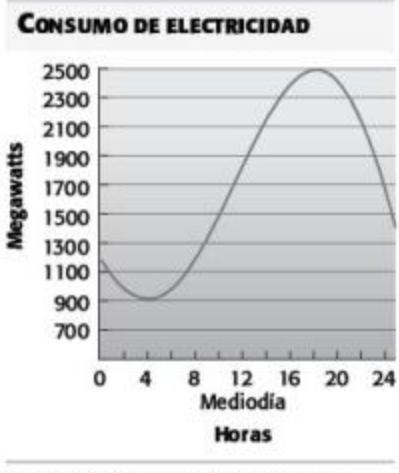
(a) ¿Cuáles números son valores posibles de la variable dependiente?

(b) ¿Por cuánto tiempo se incrementa el nivel del agua? ¿Y por cuánto tiempo disminuye?

(c) Después de 90 horas, ¿cuántos galones hay en la alberca?

(d) Llame f a esta función. ¿Cuánto es $f(0)$? ¿Qué significa en el ejemplo?

30. ***Consumo de electricidad*** La gráfica muestra los megawatts de electricidad que se usaron en un día de verano que rompió los récords, en Sacramento, California.



Fuente: Servicios públicos municipales del distrito de Sacramento.

(a) ¿Es ésta la gráfica de una función?

(b) ¿Cuál es el dominio?

(c) Calcule el número de megawatts a las 8 A.M.

(d) ¿A qué hora se usó el máximo de electricidad? ¿Y el mínimo?

31. Dé un ejemplo de función tomado de la vida cotidiana. (*Una pista*: Llene los espacios en blanco: _____ depende de _____, por tanto _____ es función de _____.)

32. Elija la respuesta correcta. La notación $f(3)$ significa que

A. la variable f multiplicada por 3, es decir $3f$.

B. el valor de la variable dependiente cuando el de la independiente es 3.

C. el valor de la variable independiente cuando el valor de la dependiente es 3.

D. f es igual a 3.

Sea $f(x) = 3 + 2x$ *y* $g(x) = x^2 - 2$. *Calcule el valor de cada función.*

33. $f(1)$ **34.** $f(4)$ **35.** $g(2)$

36. $g(0)$ **37.** $g(-1)$ **38.** $g(-3)$

39. $f(-8)$ **40.** $f(-5)$

Dibuje la gráfica de cada función lineal. Diga el dominio y rango.

41. $f(x) = -2x + 5$ **42.** $g(x) = 4x - 1$

43. $h(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$ **44.** $F(x) = -\dfrac{1}{4}x + 1$

45. $G(x) = 2x$ **46.** $H(x) = -3x$

47. $f(x) = 5$ **48.** $g(x) = -4$

Se da una ecuación que define a y *como función de* x. (***a***) *Resuelva para* y *en términos de* x, *y sustituya* y *con la notación de función* $f(x)$. (**b**) *Calcule* $f(3)$.

49. $y + 2x^2 = 3$ **50.** $y - 3x^2 = 2$

51. $4x - 3y = 8$ **52.** $-2x + 5y = 9$

53. Llene los espacios en blanco con las respuestas correctas.

La ecuación $2x + y = 4$ tiene por gráfica a una ___ recta. Un punto que se encuentra sobre la recta es (3, _____). Si se resuelve la ecuación para y y se emplea la notación de función, se tiene una función lineal $f(x)$ = _____. Para esta función, $f(3)$ = _____, lo que significa que el punto (_____, _____) está en la gráfica de la función.

54. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes define una función lineal?

A. $y = \dfrac{x - 5}{4}$ **B.** $y = \dfrac{1}{x}$

C. $y = x^2$ **D.** $y = \sqrt{x}$

55. ***Tarifas de taxis***

(a) Suponga que una taxista cobra \$1.50 por milla. Complete la tabla con la respuesta correcta para el precio $f(x)$ que cobra por un viaje de x millas.

x	$f(x)$
0	
1	
2	
3	

(b) La función lineal que da una regla para la cantidad que cobra es $f(x) =$ _____ .

(c) Trace la gráfica de esta función para el dominio $\{0, 1, 2, 3\}$.

56. ***Costo de enviar un paquete por correo*** Suponga que el envío de un paquete que pesa x libras tiene un costo de $f(x)$ dólares a una localidad dada, donde

$$f(x) = 2.75x.$$

(a) ¿Cuál es el valor de $f(3)$?

(b) Describa el significado de 3 y el valor $f(3)$ del inciso (a), con el empleo de los términos *variable independiente* y *variable dependiente*.

(c) ¿Cuánto costaría enviar un paquete de 5 libras? Escriba la respuesta por medio de la notación de funciones.

57. ***Estudios forenses*** Los científicos forenses usan las longitudes de la tibia (t), el hueso que va del talón a la rodilla, y el fémur (r), hueso que une la rodilla con la cavidad pélvica, para calcular la estatura de una persona. La estatura (h) de la persona se determina a partir de las longitudes de dichos huesos por medio de funciones definidas por las fórmulas siguientes. Todas las medidas están en centímetros.

Para los hombres:

$$h(r) = 69.09 + 2.24r$$

o bien $h(t) = 81.69 + 2.39t$

Para las mujeres:

$$h(r) = 61.41 + 2.32r$$

o bien $h(t) = 72.57 + 2.53t$

(a) Encuentre la estatura de un hombre cuyo fémur mide 56 centímetros.

(b) Calcule la estatura de un varón cuya tibia mide 40 centímetros.

(c) Obtenga la estatura de una mujer cuyo fémur mide 50 centímetros.

(d) Determine la estatura de una mujer cuya tibia que mide 36 centímetros.

58. ***Dimensiones de un acuario para nutrias marinas*** Las regulaciones federales establecen estándares para el tamaño de los alojamientos para mamíferos marinos. Un acuario que albergue nutrias marinas debe tener un volumen del *cuadrado de la longitud promedio (en metros) de una nutria adulta multiplicado por 3.14 y por .91 metros*. Si x representa la longitud promedio de una nutria adulta y $f(x)$ es el volumen del acuario correspondiente, la fórmula se escribe así:

$$f(x) = (.91)(3.14)x^2.$$



Calcule el volumen del acuario para cada una de las longitudes siguientes de especimenes adultos (en metros). Redondee las respuestas a la centésima más cercana.

(a) .8 **(b)** 1.0 **(c)** 1.2 **(d)** 1.5

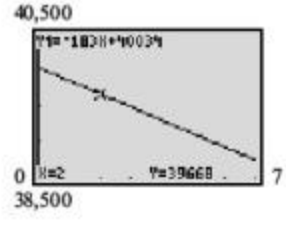
59. ***Número de oficinas postales*** La función lineal

$$f(x) = -183x + 40{,}034$$

es un modelo para el número de oficinas postales de Estados Unidos para el periodo 1990-1995, donde $x = 0$ corresponde a 1990, $x = 1$ corresponde a 1991, y así sucesivamente. Utilice este modelo para dar el número aproximado de oficinas postales durante los años siguientes. (*Fuente:* Servicio Postal Estadounidense, Informe anual del director general de correos y Declaración integral de las operaciones postales.)

(a) 1991 **(b)** 1993 **(c)** 1995

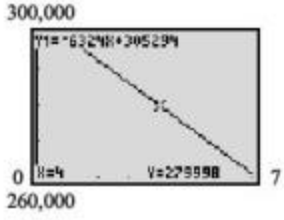
(d) La pantalla de calculadora gráfica muestra una parte de la gráfica de $y = f(x)$ con las coordenadas de un punto de la gráfica en la parte inferior. Interprete su significado en el contexto de esta aplicación.



60. ***Presupuesto para la defensa de Estados Unidos*** La función lineal $f(x) = -6324x + 305{,}294$ es un modelo de los presupuestos para la defensa de Estados Unidos, en millones de dólares, de 1992 a 1996, donde $x = 0$ corresponde a 1990, $x = 2$ corresponde a 1992, y así sucesivamente. Emplee este modelo para aproximar el presupuesto de la defensa para los años siguientes. (*Fuente:* Oficina de administración y presupuesto de Estados Unidos.)

(a) 1993 **(b)** 1995 **(c)** 1996

(d) Se muestra una parte de la gráfica de $y = f(x)$ en la pantalla de una calculadora, y en su parte inferior aparecen las coordenadas de un punto. Interprete lo que significa en el contexto de esta aplicación.



Modelos de costo e ingreso *En cada uno de los ejercicios siguientes* **(a)** *exprese el costo C como función de x, donde x representa la cantidad de artículos dada;* **(b)** *exprese el ingreso R como función de x;* **(c)** *determine el valor de x para el que el ingreso es igual al costo;* **(d)** *trace la gráfica de $y = C(x)$ y $y = R(x)$ en los mismos ejes, e interprete la gráfica.*

61. Perian Herring inserta comunicados dentro de sus sobres, para obtener un ingreso adicional durante su tiempo libre. Su costo inicial por obtener la información necesaria para el trabajo fue de $200.00. Cada sobre le cuesta $.02 y le pagan $.04 por sobre ya preparado. Considere que x representa el número de sobres ya preparados.

62. Tony Motton administra un servicio de copiado en su casa. Pagó $3500 por la copiadora y un contrato de servicio de por vida. Cada hoja de papel que utiliza cuesta $.01, y recibe un pago de $.05 por cada copia que elabora. Determine que x represente el número de copias que hace.

63. Eugene Smith se encarga de la operación de un servicio de reparto en una ciudad sureña. Sus costos iniciales fueron de $2300. Él estima que cada reparto le cuesta (por concepto de gasolina, uso y mantenimiento de su auto, etc.) $3.00. Cobra $5.50 por reparto. Determine que x represente el número de repartos que hace.

64. Lisa Ventura hace pasteles y los vende en las ferias de la localidad. Su costo inicial para la feria Washington Parish fue de $40.00 en 1996. Calcula que la elaboración de cada pastel le cuesta $2.50, y los vende a $6.50 cada uno. Sea que x represente el número de pasteles vendidos. (Suponga que no hubo pasteles sobrantes.)

8.5 Funciones cuadráticas, aplicaciones y modelos

En la sección anterior se estudiaron las funciones lineales, aquellas que están definidas por polinomios de primer grado. En esta sección se analizarán las *funciones cuadráticas*, que son las definidas por polinomios de segundo grado.

Función cuadrática

Una función f es **cuadrática** si

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.

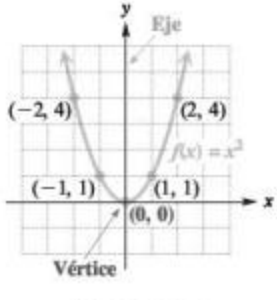
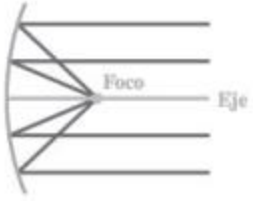


FIGURA 24

La función cuadrática más sencilla está definida por $f(x) = x^2$. En esta función se traza la gráfica encontrando pares ordenados que satisfagan la ecuación: por ejemplo, (0, 0), (1, 1), (−1, 1), (2, 4), (−2, 4), (1/2, 1/4), (−1/2, 1/4), (3/2, 9/4) y (−3/2, 9/4). Si se grafican estos puntos y se dibuja una curva suave que los una se obtiene la gráfica que se aprecia en la figura 24. Esta gráfica se denomina **parábola**. Toda función cuadrática tiene por gráfica una parábola.

Las parábolas son simétricas respecto de una línea (en la figura 24, el eje y). Es posible adelantar que esto significa que si se plegara la gráfica sobre la línea de simetría, los dos lados coincidirían. La línea de simetría de una parábola se denomina **eje**. El punto donde el eje interseca la parábola se llama **vértice**, éste es el punto más bajo (o más alto) de una parábola vertical.



Reflector parabólico

FIGURA 25

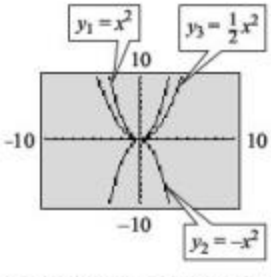
Las parábolas tienen muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, los reflectores de los hornos solares y las linternas se fabrican haciendo girar una parábola sobre su eje. El **foco** de una parábola es el punto sobre el eje que determina la curvatura. Vea la figura 25. Si se apunta hacia el Sol el reflector parabólico de un horno solar, los rayos de luz incidirán en el reflector y los reunirán en el foco, lo que creará un calor intenso en ese punto. Por el contrario, si se coloca una bombilla en el foco de un reflector parabólico, los rayos de luz se reflejan hacia fuera en forma paralela al eje.

Trazo de la gráfica de funciones cuadráticas El primer ejemplo muestra la manera en que la constante a afecta la gráfica de una función de la forma $g(x) = ax^2$.

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de las funciones que se definen como sigue.

(a) $g(x) = -x^2$

Para un valor dado de x, el valor correspondiente de $g(x)$ será el negativo de lo que sería para $f(x) = x^2$ (vea la tabla de valores con la figura 26(a)). Debido a esto, la gráfica de $g(x) = -x^2$ tiene la misma forma que la de $f(x) = x^2$ pero se abre hacia abajo. Vea la figura 26(a). Por lo general esto se cumple; la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se abre hacia abajo siempre que $a < 0$.



La pantalla ilustra las tres gráficas que se consideran en el ejemplo 1 y las figuras 26(1) y 26(b).

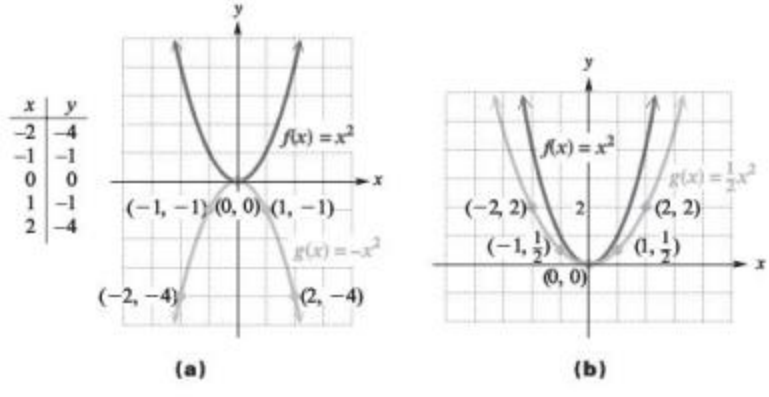


FIGURA 26

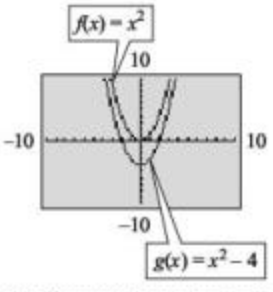
(b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

Elija un valor de x y después encuentre $g(x)$. El coeficiente 1/2 hará que el valor resultante de $g(x)$ sea más pequeño que para $f(x) = x^2$, lo que hará que la parábola sea más amplia que la gráfica de $f(x) = x^2$. Vea la figura 26(b). En las dos parábolas de este ejemplo, el eje es la línea vertical $x = 0$, y el vértice es el origen (0, 0). ■

Los ejemplos selectos que se presentan a continuación muestran los resultados que tienen los cambios horizontales y verticales, que se denominan **traslaciones**, de la gráfica de $f(x) = x^2$.

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $g(x) = x^2 - 4$.

Si se compara las tablas de valores de $g(x) = x^2 - 4$ y $f(x) = x^2$ que se muestran en la figura 27, se verá que para valores correspondientes de x, los valores de y de g son cuatro unidades menos que los de f. Así, la gráfica de $g(x) = x^2 - 4$ es la misma que la de $f(x) = x^2$ pero trasladada cuatro unidades hacia abajo. Vea la figura 27. El vértice de esta parábola (en este caso el punto más bajo) está en $(0, -4)$. El eje de la parábola es la línea vertical $x = 0$.



Compare con la figura 27.

$g(x) = x^2 - 4$

x	y
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0

$f(x) = x^2$

x	y
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4

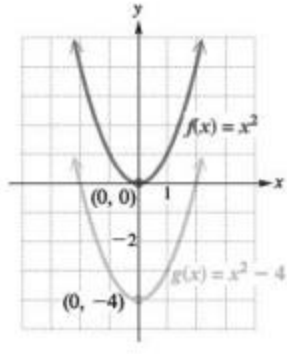
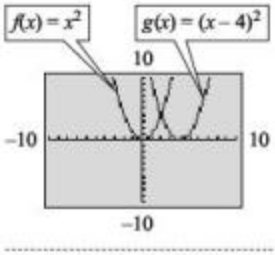


FIGURA 27 ■

EJEMPLO 3 Trace la gráfica de $g(x) = (x - 4)^2$.

Al comparar las tablas de valores que aparecen en la figura 28, se observa que la gráfica de $g(x) = (x - 4)^2$ es la misma que la de $f(x) = x^2$ pero trasladada cuatro unidades a la derecha. El vértice está en $(4, 0)$. Como se ve en la figura 28, el eje de esta parábola es la línea vertical $x = 4$.



Compare con la figura 28.

$g(x) = (x - 4)^2$

x	y
2	4
3	1
4	0
5	1
6	4

$f(x) = x^2$

x	y
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4

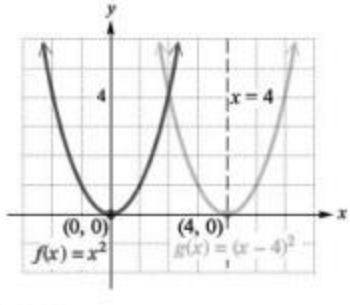


FIGURA 28 ■

Es frecuente que se cometan errores cuando se involucran cambios horizontales. Para determinar la dirección y magnitud de éstos, calcule el valor que haría que la expresión $x - h$ fuera igual a 0. Por ejemplo, la gráfica de $f(x) = (x - 5)^2$ estaría desplazada cinco unidades a la *derecha*, porque sería $+5$ el que haría que $x - 5$ fuera igual a 0. Por otro lado, la gráfica de $f(x) = (x + 4)^2$ estaría desplazada cuatro unidades a la *izquierda*, porque -4 haría a $x + 4$ igual a 0.

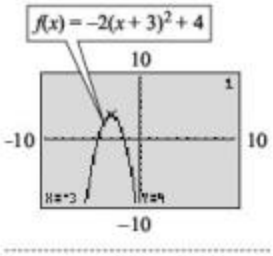
Al trazar la gráfica de las funciones de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, se aplica los principios generales siguientes.

Principios generales para trazar la gráfica de funciones cuadráticas

1. La gráfica de la función cuadrática definida por
$$f(x) = a(x - h)^2 + k, \quad a \neq 0,$$
es una parábola con vértice en (h, k), y tiene como eje la línea vertical $x = h$.
2. La gráfica se abre hacia arriba si a es positiva, y hacia abajo si a es negativa.
3. La gráfica es más amplia que la de $f(x) = x^2$ si $0 < |a| < 1$. La gráfica es más angosta que la de $f(x) = x^2$ si $|a| > 1$.

EJEMPLO 4 Grafique $f(x) = -2(x + 3)^2 + 4$.

La parábola se abre hacia abajo (porque $a < 0$), y es más angosta que la gráfica de $f(x) = x^2$, toda vez que $a = -2$ y $|-2| > 1$. Esta parábola tiene su vértice en $(-3, 4)$, como se aprecia en la figura 29. Para elaborar la gráfica, se localizan los pares ordenados $(-4, 2)$ y $(-2, 2)$.



Compare con la figura 29. El vértice es $(-3, 4)$.

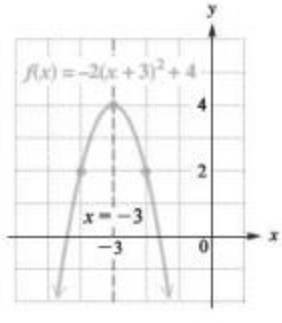
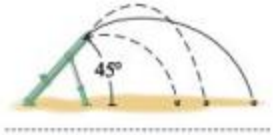


FIGURA 29

Si la ecuación de la parábola se da en la forma de $f(x) = ax^2 + bx + c$, es necesario localizar el vértice a fin de dibujar su gráfica con exactitud. Esto puede hacerse de dos modos. El primero es por medio de completar el cuadrado, como se ilustra en el ejemplo 5. El segundo es con una fórmula que se obtiene al completar el cuadrado.



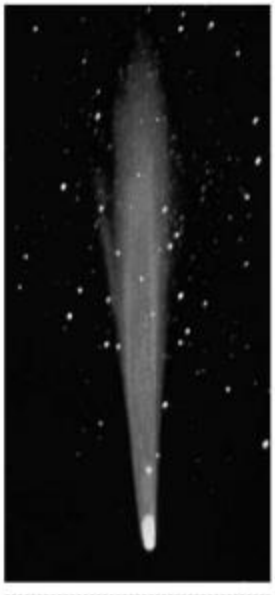
La trayectoria de un proyectil disparado por un cañón es una **parábola**. Para lograr el alcance máximo con un cañón, el cálculo demuestra que el ángulo de disparo debe ser de 45°. Si el ángulo es mayor que 45°, el proyectil asciende mucho y cae muy pronto. Si el ángulo es menor que 45°, el proyectil cae a tierra antes de tiempo atraído por la gravedad.

EJEMPLO 5 Encuentre el vértice de la gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Para obtener el vértice es necesario expresar $x^2 - 4x + 5$ en la forma $(x - h)^2 + k$. Esto se logra al completar el cuadrado (vea el capítulo anterior). Para simplificar la notación se reemplazará $f(x)$ por y.

$$\begin{aligned}
y &= x^2 - 4x + 5 \\
y - 5 &= x^2 - 4x && \text{Transformar de modo que el término constante quede en el lado izquierdo.} \\
y - 5 + 4 &= x^2 - 4x + 4 && \text{La mitad de } -4 \text{ es } -2;\ (-2)^2 = 4. \text{ Sumar 4 en ambos lados.} \\
y - 1 &= (x - 2)^2 && \text{Agrupar términos en el lado izquierdo y factorizar en el derecho.} \\
y &= (x - 2)^2 + 1 && \text{Sumar 1 en ambos lados.}
\end{aligned}$$

Ahora se escribe la ecuación original como $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. Como ya se dijo, el vértice de la parábola está en $(2, 1)$.



Johann Kepler (1571-1630) estableció la importancia de una curva denominada **elipse**, en 1609, cuando descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del Sol eran elípticas y no circulares. La órbita del cometa Halley, que se presenta aquí, también es elíptica.

Vea el recuadro *Para reflexionar* al final de esta sección, para saber más de las elipses.

Se obtiene una fórmula para el vértice de la gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ si se completa el cuadrado para la forma general de la ecuación. Para hacer esto, se comienza con la división entre a, ya que el coeficiente de x^2 debe ser 1.

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \qquad \text{Dividir entre } a.$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x \qquad \text{Restar } \frac{c}{a}.$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \qquad \text{Sumar } \frac{b^2}{4a^2}.$$

$$\frac{y}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{Agrupar términos en el lado izquierdo y factorizar en el derecho.}$$

$$\frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \text{Transformar de modo que el término con } y \text{ quede sólo en el lado izquierdo.}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad \text{Multiplicar por } a.$$

$$y = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{h} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{k}$$

La ecuación final muestra que el vértice (h, k) puede expresarse en términos de a, b y c. Sin embargo, no es necesario memorizar la expresión para k, toda vez que se obtiene al sustituir a x con $-\frac{b}{2a}$. Al emplear la notación de función, si $y = f(x)$, el valor de y del vértice es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

EJEMPLO 6 Utilice la fórmula del vértice para encontrar el de la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - x - 6.$$

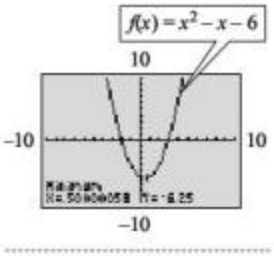
Para esta función, $a = 1$, $b = -1$ y $c = -6$. La coordenada x del vértice de la parábola está dada por

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2}.$$

La coordenada y es $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4}$$

Por último, el vértice es $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. ■



Observe la pequeña discrepancia cuando se pide a la calculadora que encuentre el vértice (en este caso, un *mínimo*). Esto refuerza el hecho de que *se deben entender los conceptos y no depender por completo de la tecnología!*

A continuación se presenta un enfoque general para trazar la gráfica de funciones cuadráticas con el empleo de las intersecciones y el vértice.

Trazo de la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$

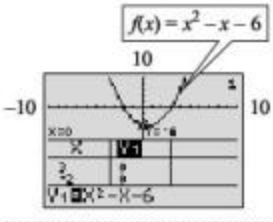
Paso 1: **Decidir si la gráfica se abre hacia arriba o hacia abajo.** A fin de auxiliar en el proceso de graficación, determine si la gráfica se abre hacia arriba (si $a > 0$) o hacia abajo (si $a < 0$).

Paso 2: **Encontrar la intersección con el eje *y*.** Encuentre la intersección con el eje y con el cálculo de $f(0)$.

Paso 3: **Determinar las intersecciones con el eje *x*.** Obtenga las intersecciones con el eje x, si las hubiera, con la solución de $f(x) = 0$.

Paso 4: **Obtener el vértice.** Obtenga el vértice ya sea con el uso de la fórmula o por medio de completar el cuadrado.

Paso 5: ***Trazar la gráfica.*** De ser necesario, encuentre y localice puntos adicionales con el aprovechamiento de la simetría respecto del eje.



Este recuadro de la pantalla ilustra que los puntos (0, –6), (3, 0) y (–2, 0) están en la gráfica de $f(x) = x^2 - x - 6$. Compare con la figura 30.

EJEMPLO 7 Trace la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - x - 6$.

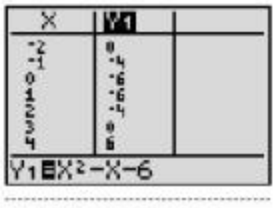
Debido a que $a > 0$, la parábola se abrirá hacia arriba. Ahora se obtiene la intersección con el eje y.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x - 6 \\ f(0) &= 0^2 - 0 - 6 \qquad \text{Encontrar } f(0). \\ f(0) &= -6 \end{aligned}$$

La intersección con el eje y es $(0, -6)$. Ahora encuentre cualquier intersección con el eje x.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x - 6 \\ 0 &= x^2 - x - 6 && \text{Sea } f(x) = 0 \\ 0 &= (x - 3)(x + 2) && \text{Factorizar.} \\ x - 3 = 0 \quad &\text{o} \quad x + 2 = 0 && \text{Hacer cada factor igual a 0 y resolver.} \\ x = 3 \quad &\text{o} \quad x = -2 \end{aligned}$$

Las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-2, 0)$. El vértice, que se encontró en el ejemplo 6, es $(1/2, -25/4)$. Localice los puntos encontrados hasta este momento, y otros adicionales si fuera necesario. En este caso es de ayuda la simetría de la curva. La gráfica se muestra en la figura 30.



Esta tabla proporciona otros puntos de la gráfica de

$$Y_1 = X^2 - X - 6.$$

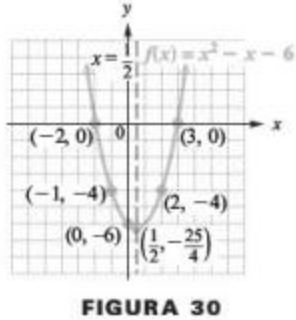


FIGURA 30

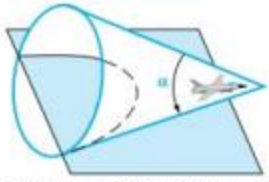


Galileo Galilei (1564-1642) murió el año en que nació Newton; su trabajo fue importante para que Newton lograra desarrollar el cálculo. La idea de *función* está implícita en el análisis de Galileo sobre la trayectoria de un proyectil, en el que la altura y alcance son funciones (con nuestra terminología) del ángulo de elevación y la velocidad inicial.

De acuerdo con la leyenda, el científico italiano soltó objetos de pesos distintos desde lo alto de la torre de Pisa, a fin de desacreditar el punto de vista aristotélico de que los objetos más pesados caerían más rápido que los más ligeros. Desarrolló una fórmula para los objetos en caída libre:

$$d = 16t^2,$$

en la que d es la distancia en pies que un objeto dado cae (sin tomar en cuenta la resistencia del aire) en un tiempo dado t, en segundos, sin que importe su peso.



Un estallido supersónico es un sonido muy fuerte, como de explosión, ocasionado por la onda de choque que acompaña a una aeronave que viaja a la velocidad del sonido. La onda de choque del estallido supersónico tiene la forma de un cono, e interseca la tierra con una proyección que tiene la forma de una curva que se llama **hipérbola**. Todo aquel que se encuentre en tierra sobre la curva hiperbólica escucha el sonido al mismo tiempo.

Vea el recuadro *Para reflexionar* al final de esta sección para saber más sobre las hipérbolas.

Un modelo de optimización

Como se vio, el vértice de una parábola vertical es ya sea el punto más alto o el más bajo de la parábola. El valor y del vértice expresa el valor máximo o mínimo de y, mientras que el valor x dice dónde ocurre el máximo o mínimo. Es frecuente que pueda construirse un modelo de modo que se *optimice* y.

Solución de problemas

En ciertos problemas prácticos se desea conocer el valor más grande o más pequeño de alguna cantidad. Si la cantidad se expresa por medio de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, como en el ejemplo que sigue, se usa el vértice para **obtener el valor que se desea.**

EJEMPLO 8 Un granjero tiene 120 pies de material para cercar. Quiere levantar una valla de tres lados en un terreno rectangular, el cuarto lado sería la pared de un establo. Calcule el área máxima que puede confinar. ¿Cuáles son las dimensiones de esta área?

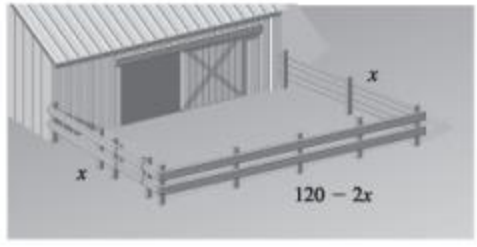


FIGURA 31

La figura 31 muestra la distribución. Sea que x represente el ancho. Entonces, como hay 120 pies de material para la cerca,

$$\begin{aligned} x + x + \text{largo} &= 120 && \text{La suma de los tres lados de la cerca es igual a 120 pies.} \\ 2x + \text{largo} &= 120 && \text{Agrupar términos.} \\ \text{largo} &= 120 - 2x. && \text{Restar } 2x. \end{aligned}$$

El área se modela con el producto del largo por el ancho, es decir,

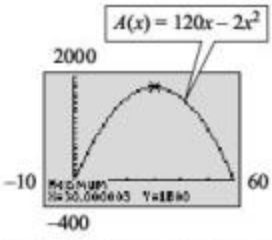
$$A(x) = (120 - 2x)x = 120x - 2x^2.$$

Para hacer que el área (y por tanto $120x - 2x^2$) sea lo más grande posible, en primer lugar se obtiene el vértice de la gráfica de la función $A(x) = 120x - 2x^2$.

$$A(x) = -2x^2 + 120x \qquad \text{Forma estándar}$$

Aquí se tiene que $a = -2$ y $b = 120$. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{120}{2(-2)} = 30.$$



El vértice está en (30, 1800), lo que respalda el resultado analítico del ejemplo 8.

El vértice es el punto máximo (ya que $a < 0$), por lo que la superficie máxima que el granjero puede confinar es

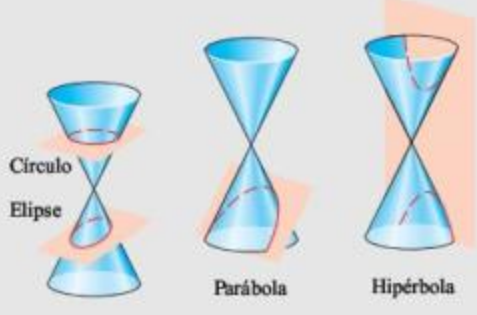
$$A(30) = -2(30)^2 + 120(30) = 1800 \text{ pies cuadrados.}$$

El granjero puede cercar un área máxima de 1800 pies cuadrados, con forma de rectángulo de 30 pies de ancho y largo igual a $120 - 2(30) = 60$ pies. ■

Como se vio en el ejemplo 8, hay que tener cuidado al interpretar el significado de las coordenadas del vértice en los problemas que involucren valores máximo o mínimo. La primera coordenada, x, da el valor para el que el *valor de la función* es un máximo o un mínimo. Debe leerse el problema con cuidado para determinar si se pide encontrar el valor de la variable independiente, el de la dependiente (es decir, el valor de la función), o el de ambas.

PARA REFLEXIONAR

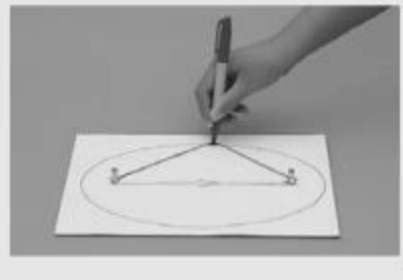
El círculo (que se explicó en la primera sección de este capítulo), la parábola, la elipse y la hipérbola, se conocen como las **secciones cónicas**. Como se ve en la figura adjunta, cada una de esas tres formas geométricas se obtiene con la intersección de un plano y un cono infinito (formado por dos *figuras opuestas*).



El geómetra griego Apolonio (c. 225, a.C.) fue también astrónomo, e investigó dichas figuras a profundidad en su obra clásica *Las secciones cónicas*. Apolonio es el autor de los nombres de *elipse*, *parábola* e *hipérbola*. Las notas al margen de esta sección ilustran la manera en que estas figuras aparecen en el mundo que nos rodea.

Para análisis en grupo

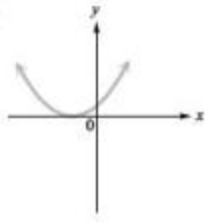
1. Los términos *elipse*, *parábola* e *hipérbola* son similares a *elipsis*, *parábola* (o *alegoría*) e *hipérbole*. ¿Qué significan estos tres últimos términos? Tal vez haya que hacer un poco de investigación acerca de las semejanzas entre la terminología matemática y estos vocablos relacionados con el lenguaje.
2. Mencione algunos lugares del mundo en los que aparezcan las secciones cónicas.
3. La figura que sigue muestra la forma en que puede dibujarse una elipse con el empleo de tachuelas y un cordel. Haga que un voluntario del grupo pase al pizarrón y por medio de cordel y tiza modifique el método para dibujar un círculo. Después haga que dos miembros del grupo dibujen una elipse. (*Una pista:* Es necesario presionar fuertemente con la tiza.)



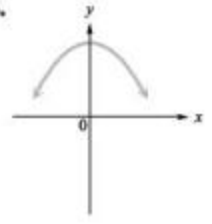
8.5 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 6, relacione cada ecuación con la figura que se parezca más a su gráfica.

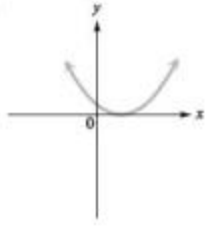
A.



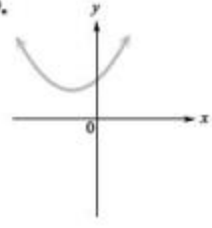
B.



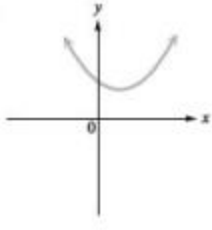
C.



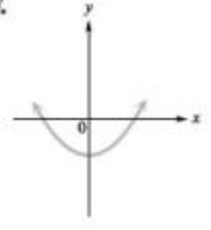
D.



E.



F.



1. $g(x) = x^2 - 5$ **2.** $h(x) = -x^2 + 4$

3. $F(x) = (x - 1)^2$ **4.** $G(x) = (x + 1)^2$

5. $H(x) = (x - 1)^2 + 1$ **6.** $K(x) = (x + 1)^2 + 1$

7. Explique en sus propias palabras el significado de cada término.
(a) vértice de una parábola **(b)** eje de una parábola

8. Explique por qué el eje de la gráfica de una función cuadrática no puede ser una línea horizontal.

Identifique el vértice de la gráfica de cada función cuadrática.

9. $f(x) = -3x^2$ **10.** $f(x) = -.5x^2$

11. $f(x) = x^2 + 4$ **12.** $f(x) = x^2 - 4$

13. $f(x) = (x - 1)^2$ **14.** $f(x) = (x + 3)^2$

15. $f(x) = (x + 3)^2 - 4$ **16.** $f(x) = (x - 5)^2 - 8$

17. Describa la manera en que se traslada la gráfica de cada parábola de los ejercicios 15 y 16, en comparación con la gráfica de $y = x^2$.

Diga si la gráfica de cada función cuadrática se abre hacia arriba o hacia abajo, y si es más amplia, angosta o igual que la gráfica de $f(x) = x^2$.

18. $f(x) = -2x^2$ **19.** $f(x) = -3x^2 + 1$

20. $f(x) = .5x^2$ **21.** $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4$

22. ¿Qué implica el valor de a en $f(x) = a(x - h)^2 + k$ sobre la gráfica de la función, en comparación con la de $y = x^2$?

23. Para $f(x) = a(x - h)^2 + k$, ¿en qué cuadrante estaría el vértice si:
(a) $h > 0, k > 0$; **(b)** $h > 0, k < 0$;
(c) $h < 0, k > 0$; **(d)** $h < 0, k < 0$?

24. **(a)** ¿Cuál es el valor de h si la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ tiene su vértice sobre el eje y?
(b) ¿Cuál es el valor de k si la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ tiene su vértice sobre el eje x?

Dibuje la gráfica de cada función cuadrática por medio de los métodos que se describen en esta sección. Indique dos puntos de cada gráfica.

25. $f(x) = 3x^2$ **26.** $f(x) = -2x^2$

27. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ **28.** $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

29. $f(x) = x^2 - 1$ **30.** $f(x) = x^2 + 3$

31. $f(x) = -x^2 + 2$ **32.** $f(x) = -x^2 - 4$

33. $f(x) = 2x^2 - 2$ **34.** $f(x) = -3x^2 + 1$

35. $f(x) = (x - 4)^2$ **36.** $f(x) = (x - 3)^2$

37. $f(x) = 3(x + 1)^2$ **38.** $f(x) = -2(x + 1)^2$

39. $f(x) = (x + 1)^2 - 2$ **40.** $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

Dibuje la gráfica de cada función cuadrática. Diga las coordenadas del vértice de la gráfica.

41. $f(x) = x^2 + 8x + 14$ **42.** $f(x) = x^2 + 10x + 23$

43. $f(x) = x^2 + 2x - 4$ **44.** $f(x) = 3x^2 - 9x + 8$

45. $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$ **46.** $f(x) = -5x^2 - 10x + 2$

Resuelva cada uno de los problemas siguientes.

47. ***Dimensiones de una pista para ejercicios*** Gina Linko cuenta con 100 metros de material para cercar una pista rectangular para ejercitar a su perro. ¿Qué ancho deberá tener para que encierre el área máxima?

48. ***Dimensiones de un estacionamiento*** La tienda de departamentos *Morgan* quiere construir un estacionamiento rectangular en un terreno limitado en uno de sus lados por una autopista. Tiene 280 pies de material para la construcción de tres lados. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del estacionamiento a fin de que la superficie confinada sea la máxima? ¿Cuál es el área máxima?

49. ***Altura de un objeto lanzado*** Si se lanza un objeto a partir de la Tierra, con velocidad inicial de 32 pies por segundo, entonces su altura después de t segundos está dada por

$$h(t) = 32t - 16t^2.$$

Encuentre la altura máxima que alcanza y el número de segundos que toma llegar a dicha altura.

50. ***Altura de un objeto lanzado*** Se lanza un proyectil desde la Tierra hacia arriba y en línea recta, de modo que su distancia (en pies) sobre el suelo después de t segundos está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 400t.$$

Determine la altura máxima que alcanza y el número de segundos que le toma hacerlo.

51. ***Altura de un objeto lanzado*** Si se ignora la resistencia del aire, un proyectil que se dispare de la Tierra hacia arriba y con trayectoria rectilínea con velocidad inicial de 40 metros por segundo, estará a una altura s en metros dada por la función

$$s(t) = -4.9t^2 + 40t,$$

donde t es el número de segundos transcurridos desde su lanzamiento. ¿Después de cuántos segundos llegará a su altura máxima, y cuál es ésta? Redondee sus respuestas a la décima más cercana.

52. ***Altura de un objeto lanzado*** Un robot espacial se lanza desde la Luna, su distancia en pies está dada por

$$f(x) = 1.727x - .0013x^2$$

donde x es el tiempo en segundos. Encuentre la altura máxima que el robot puede alcanzar y el tiempo que le toma hacerlo. Redondee las respuestas a la décima más cercana.

53. ***Pagos de farmacias*** El incremento anual del porcentaje de la cantidad que las farmacias pagaron a los mayoristas por concepto de medicamentos en los años de 1990 a 1999, se modela con la función cuadrática definida por

$$f(x) = .228x^2 - 2.57x + 8.97,$$

donde $x = 0$ representa a 1990, $x = 1$ a 1991, y así sucesivamente. (*Fuente: IMS Health*, Retail and Provider Perspective.)

(a) Puesto que el coeficiente de la x^2 en el modelo es positivo, la gráfica de esta función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba. El valor y del vértice de la gráfica, ¿será un máximo o un mínimo?

(b) ¿En qué año ocurrió el incremento porcentual mínimo? (redondee al año más cercano). Utilice el valor real de la x del vértice, a la décima más cercana, para calcular este incremento.

54. ***Pesca de ostras en Estados Unidos*** La pesca nacional de ostras en Estados Unidos (en millones) para los años de 1990 a 1998 se aproxima con la función cuadrática definida por

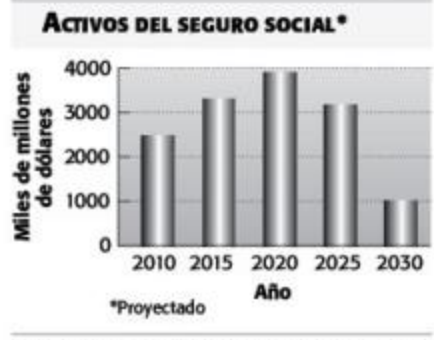
$$f(x) = -.566x^2 + 5.08x + 29.2,$$

donde $x = 0$ representa a 1990, $x = 1$ a 1991, y así sucesivamente. (*Fuente:* National Marine Fisheries Services.)

(a) Como el coeficiente de x^2 en el modelo es negativo, la gráfica de esta función cuadrática es una parábola que se abre hacia abajo. El valor y del vértice de esta gráfica, ¿será un máximo o un mínimo?

(b) ¿En qué año ocurrió la pesca máxima nacional de ostras? (redondee al año más cercano). Emplee el valor real de la x del vértice, redondeada a la décima más cercana, para encontrar cuál fue dicha pesca.

55. ***Activos del seguro social*** La gráfica muestra la manera en que se espera cambien los activos del Seguro Social conforme se incrementa el número de pensionados.



Fuente: Administración del Seguro Social de Estados Unidos.

La gráfica sugiere que una función cuadrática se ajustaría bien a los datos. Éstos se aproximan por la función definida por

$$f(x) = -20.57x^2 + 758.9x - 3140.$$

En el modelo, $x = 10$ representa al año 2010, $x = 15$ a 2015, y así sucesivamente, y $f(x)$ se expresa en miles de millones de dólares.

(a) Explique por qué es negativo el coeficiente de x^2 en el modelo, con base en la gráfica.

(b) Determine en forma algebraica el vértice de la gráfica, con las coordenadas expresadas con cuatro dígitos significativos.

(c) Interprete la respuesta del inciso (a) a la luz de esta aplicación.

56. ***Mezclas de un portafolio de inversiones*** La gráfica, que parece ser parte de una parábola que se abre a la *derecha*, muestra el rendimiento de un portafolios de inversión con mezclas diferentes de inversiones en Estados Unidos y en el extranjero, para el periodo del 1 de enero de 1971 al 31 de diciembre de 1996.



Fuente: Financial Ink Newsletter, Investment Management and Research, Inc., Feb. de 1998. Se agradece a David Van Geffen por esta información.

Use la gráfica para responder las preguntas que siguen.

(a) ¿Se trata de la gráfica de una función? Explique su respuesta.

(b) ¿Cuál mezcla de inversiones de las que se muestra en la gráfica parece representar al vértice? ¿Qué cantidad de riesgo relativo representa dicho punto? ¿Qué rendimiento genera sobre la inversión?

(c) ¿Cuál punto de la gráfica representa la mezcla de inversiones más riesgosa? ¿Qué rendimiento sobre la inversión proporciona?

57. ***Ingreso máximo de una aerolínea*** Un vuelo fletado cobra una tarifa de \$200 por persona, más \$4 por persona por cada asiento que no se venda en el avión. Si éste es para 100 pasajeros y x representa al número de asientos no vendidos, encuentre lo siguiente:

(a) Una expresión para el ingreso total $R(x)$ que se recibe por el vuelo. (*Una pista:* Hay que multiplicar el número de personas que vuelan, $100 - x$, por el precio del boleto.)

(b) La gráfica para la función del inciso (a).

(c) El número de asientos no vendidos que producirá el ingreso máximo.

(d) El ingreso máximo.

58. ***Ingreso máximo por tarifas de autobús*** Una compañía que fleta autobuses cobra \$48 por persona, más \$2 por persona por cada asiento no vendido en el vehículo, por el viaje a un centro vacacional. Si el camión tiene 42 asientos y x representa el número de asientos no vendidos, obtenga lo siguiente:

(a) Una expresión que defina el ingreso total, $R(x)$, por el viaje. (*Una pista*: Multiplique el número total de viajeros, $42 - x$, por el precio del boleto, $48 + 2x$.)

(b) La gráfica de la función del inciso (a).

(c) El número de asientos no vendidos que produce el ingreso máximo.

(d) El ingreso máximo.

8.6 Funciones exponenciales y logarítmicas, aplicaciones y modelos

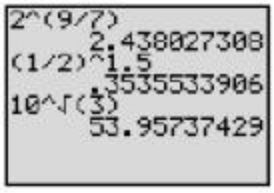
Funciones exponenciales En esta sección se introducen dos nuevos tipos de funciones. La primera de ellas es la función exponencial.

Función exponencial

Una función exponencial con base b, con $b > 0$ y $b \neq 1$, tiene la forma siguiente:

$$f(x) = b^x,$$

donde x es cualquier número real.



Compare con el análisis del libro.

Hasta aquí, sólo se han definido exponentes enteros. En la definición de función exponencial se permite que x adopte cualquier valor de número real. Con métodos que no se estudian en este libro, es posible aproximar funciones tales como

$$2^{9/7}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{1.5} \qquad \text{y} \qquad 10^{\sqrt{3}}$$

una calculadora científica o gráfica es capaz de determinar aproximaciones para estos números. Vea la pantalla que se ilustra en el margen.

Observe que en la definición de función exponencial, la base b se restringe a números positivos, con $b \neq 1$.

EJEMPLO 1 En la figura 32(a), (b) y (c) se muestran las gráficas de $f(x) = 2^x$, $g(x) = (1/2)^x$ y $h(x) = 10^x$. En cada caso se proporciona una tabla de puntos seleccionados, que se unen por medio de una curva suave, común en las gráficas de funciones exponenciales. Observe que para cada gráfica, la curva se acerca pero no interseca al eje x. Por esta razón, el eje x se denomina la **asíntota horizontal** de la gráfica.

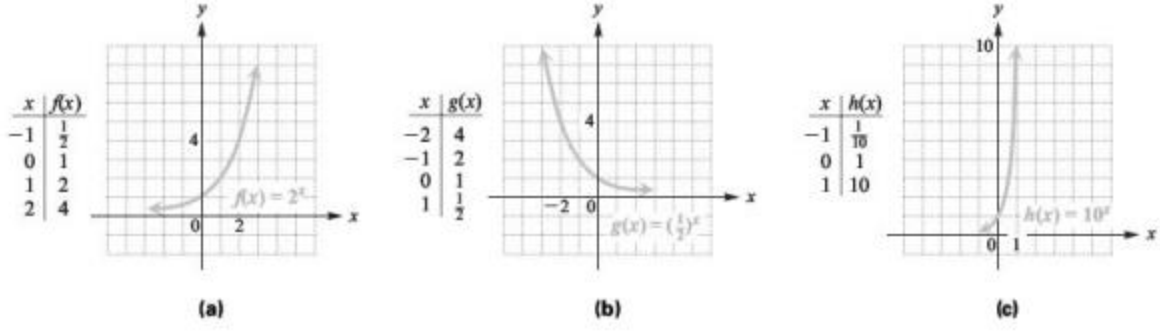
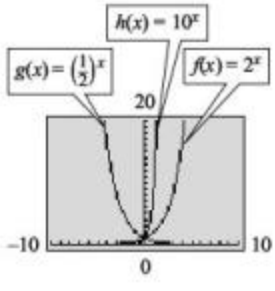


FIGURA 32



Compare con la figura 32.

El ejemplo 1 ilustra los siguientes hechos sobre la gráfica de una función exponencial.

Gráfica de $f(x) = b^x$

1. La gráfica siempre contendrá al punto $(0, 1)$, ya que $b^0 = 1$.
2. Si $b > 1$, la gráfica *crecerá* de izquierda a derecha (como en el ejemplo para $b = 2$ y $b = 10$). Si $0 < b < 1$, la gráfica *caerá* de izquierda a derecha (como en el ejemplo para $b = 1/2$).
3. El eje x es la asíntota horizontal.
4. El dominio es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $(0, \infty)$.

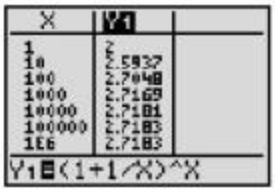
Es probable que la función exponencial más importante sea la que tiene la base e. El número e se llama así en honor de Leonhard Euler (1707-1783), y es 2.718281828, aproximadamente. Es un número irracional, y su valor lo aproxima la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

conforme n adopta valores cada vez mayores. Se escribe

en la medida que $n \to \infty$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2.718281828$.

Vea la tabla siguiente.



Esta tabla presenta valores seleccionados de $Y_1 = \left(1 + \frac{1}{X}\right)^X$.

n	Valor aproximado de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.25
5	2.48832
10	2.59374
25	2.66584
50	2.69159
100	2.70481
500	2.71557
1000	2.71692
10,000	2.71815
1,000,000	2.71828

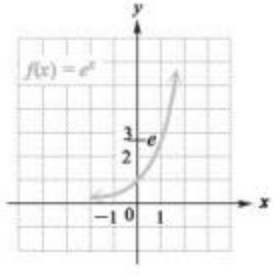


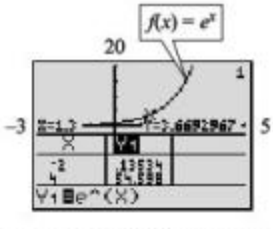
FIGURA 33

En una calculadora científica o gráfica se pueden obtener las potencias de e. Algunas de las que produce una de dichas máquinas son:

$$e^{-2} \approx .1353352832, \qquad e^{1.3} \approx 3.669296668, \qquad e^4 \approx 54.59815003.$$

En la figura 33 se muestra la gráfica de la función $f(x) = e^x$.

Aplicaciones de las funciones exponenciales Una aplicación real de las funciones exponenciales lo constituye el cálculo del interés compuesto.



En el recuadro de la gráfica de $f(x) = e^x$ que muestra esta pantalla se aprecian los valores aproximados de e^{-2}, $e^{1.3}$ y e^4.

Fórmula de interés compuesto

Suponga que se invierte un capital de P dólares a una tasa de interés anual de r (en porcentaje, expresado en forma decimal), capitalizable n veces por año. Entonces, la cantidad A acumulada después de t años, está dada por la fórmula:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

EJEMPLO 2 Suponga que se invierte \$1000 a una tasa anual de 8%, capitalizable en forma trimestral (cuatro veces por año). Calcule la cantidad total que habrá en la cuenta después de 10 años, si no se hicieran retiros.

Se usa la fórmula del interés compuesto, con $P = 1000$, $r = .08$, $n = 4$ y $t = 10$.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 1000\left(1 + \frac{.08}{4}\right)^{4 \cdot 10}$$

$$A = 1000(1.02)^{40}$$

Por medio de una calculadora, con la tecla de cálculo exponencial, se obtiene que $1.02^{40} \approx 2.20804$. Se multiplica por 1000 para obtener

$$A = 2208.04.$$

Al final de 10 años, en la cuenta habría \$2208.04. ■

La fórmula de interés compuesto que se dio se aplica si la institución financiera capitaliza el interés durante un número finito de periodos de capitalización anual. En teoría, el número de periodos de capitalización por año puede ser cada vez mayor (trimestral, mensual, diario, etc.), y si se permite que n se acerque al infinito, se dice que el interés se capitaliza en *forma continua*. Puede demostrarse que la fórmula de la **capitalización continua** involucra al número e.

Fórmula de capitalización continua

Suponga que se invierte un capital de P dólares a una tasa de interés anual r (en porcentaje, expresado en forma decimal), capitalizable continuamente. Entonces, la cantidad A que se acumula después de t años está dada por la fórmula

$$A = Pe^{rt}.$$

EJEMPLO 3 Suponga que se invierte \$5000 con una tasa anual de 6.5% de interés con capitalización continua. Encuentre la cantidad total que habrá en la cuenta después de cuatro años si no se hace ningún retiro.

En este caso se aplica la fórmula de capitalización continua, con $P = 5000$, $r = .065$ y $t = 4$.

$$A = Pe^{rt}$$
$$A = 5000e^{.065(4)}$$
$$A = 5000e^{.26}$$

Con la tecla de cálculo exponencial e^x de una calculadora se encuentra que $e^{.26} \approx 1.29693$, de modo que $A \approx 5000(1.29693) = 6484.65$. Después de cuatro años, en la cuenta habrá \$6484.65. ■

La fórmula de capitalización continua es un ejemplo de **función de crecimiento exponencial**. Puede demostrarse que en situaciones que involucran crecimiento o decaimiento de una cantidad, la cantidad o número existente en el momento t con frecuencia se aproxima mucho por una función de la forma

$$A(t) = A_0e^{kt},$$

donde A_0 representa la cantidad o número presente en el momento $t = 0$, y k es una constante. Si $k > 0$, existe crecimiento exponencial; si $k < 0$, hay decaimiento exponencial.

Funciones logarítmicas

Considere la ecuación exponencial

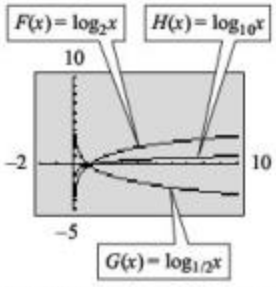
$$2^3 = 8.$$

Aquí se observa que 3 es el exponente (o potencia) a que debe elevarse el 2 para obtener 8. El exponente 3 se denomina el *logaritmo* de 8 en base 2, y se escribe así:

$$3 = \log_2 8.$$

En general, se tiene la relación siguiente:

Para $b > 0$, $b \neq 1$, si $b^y = x$, entonces, $y = \log_b x$.



Compare con la figura 34, de la página siguiente. Las gráficas de funciones logarítmicas con bases diferentes de 10 y e, se elaboran con la regla del álgebra para el cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

En forma alternativa, se *dibujan* por medio de la herramienta que permite que el usuario obtenga la gráfica de la inversa.

La tabla siguiente ilustra la relación que hay entre las ecuaciones exponenciales y las logarítmicas.

Ecuación exponencial	Ecuación logarítmica
$3^4 = 81$	$4 = \log_3 81$
$(1/2)^{-4} = 16$	$-4 = \log_{1/2} 16$
$10^0 = 1$	$0 = \log_{10} 1$

El concepto de funciones inversas (que se estudia en cursos más avanzados de álgebra) lleva a la definición de la función logarítmica en base b.

Función logarítmica

Una función logarítmica en base b, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, es una función de la forma

$$g(x) = \log_b x,$$

donde $x > 0$.

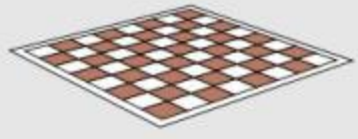
PARA REFLEXIONAR

El 5 de febrero de 1989, en el programa televisivo *Parade*, Carl Sagan relató una antigua leyenda acerca del **crecimiento exponencial** citada en el artículo *El secreto del tablero de ajedrez persa*. Había una vez un rey persa que deseaba agradecer a su funcionario en jefe, el Gran Visir, por medio del regalo que eligiera. El Gran Visir le dijo que le gustaría utilizar su tablero de ajedrez para acumular trigo. Recibiría un solo grano de trigo por el primer cuadro del ajedrez, dos granos por el segundo, cuatro por el tercero, y así sucesivamente, duplicando el número de granos en cada uno de los 64 cuadrados del tablero. Este procedimiento de duplicación es un ejemplo de crecimiento exponencial, y se define por medio de la función exponencial

$$f(x) = 2^{x-1}$$

donde x corresponde al número del cuadrado del tablero de ajedrez, y $f(x)$ representa el número de granos de trigo que corresponde a dicho cuadrado.

¿Cuántos granos de trigo se acumularía? Por extraño que parezca, el número de granos sería por un total de 18.5 trillones! Aun con los métodos de producción actuales, producir esta cantidad tomaría 150 años. Es evidente que el Gran Visir sabía matemáticas.

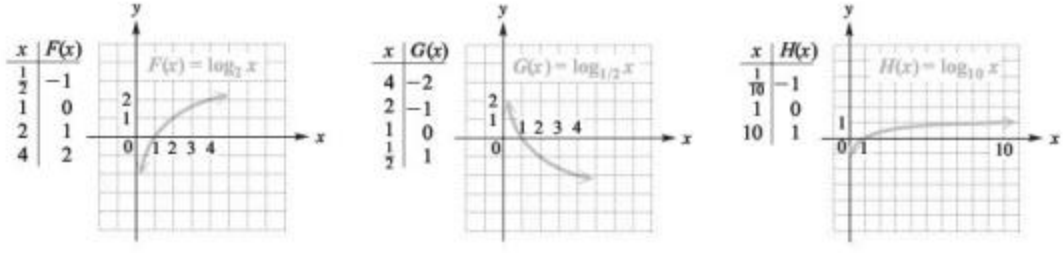


Para análisis en grupo

1. Si un lirio duplica su tamaño cada día, y cubre un estanque después de ocho días de crecimiento, ¿cuándo estará cubierta la mitad del estanque? ¿Y la cuarta parte?
2. Haga que cada miembro del grupo estime la respuesta de este problema.
   Si gana 1¢ el 1 de enero, 2¢ el 2 de enero, 4¢ el 3 de enero, 8¢ el 4 de enero, y así sucesivamente, si duplica su salario cada día, ¿cuánto ganará a fin de mes?
   Como ejercicio de calculadora, determine la respuesta y vea quién fue capaz de estimar la respuesta con mayor exactitud.

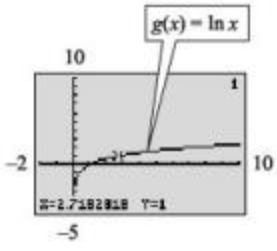
La gráfica de la función $g(x) = \log_b x$ se encuentra con el intercambio de los papeles de x y y en la función $f(x) = b^x$. Geométricamente, esto se realiza reflejando la gráfica de $f(x) = b^x$ sobre la línea $y = x$.

EJEMPLO 4 En la figura 34(a), (b) y (c), se muestran las gráficas de $F(x) = \log_2 x$, $G(x) = \log_{1/2} x$ y $H(x) = \log_{10} x$. En cada caso se presenta una tabla de los puntos seleccionados. Se obtienen estos puntos con el intercambio de los papeles de x y y en las tablas de puntos que se proporciona en la figura 32. Los puntos se unen por medio de una curva suave, común en las gráficas de funciones logarítmicas. Observe que para cada gráfica la curva se acerca al eje y pero no lo toca. Por esta razón, el eje y se denomina la **asíntota vertical** de la gráfica.



(a) (b) (c)

FIGURA 34



Observe que cuando

$x = e \approx 2.7182818$,

$y = \ln e = 1$.

El ejemplo 4 ilustra los hechos siguientes acerca de la gráfica de una función logarítmica.

Gráfica de $g(x) = \log_b x$

1. La gráfica siempre contendrá al punto (1, 0) puesto que $\log_b 1 = 0$.
2. Si $b > 1$, la gráfica *crecerá* de izquierda a derecha, del cuarto cuadrante al primero (como en el ejemplo para $b = 2$ y $b = 10$). Si $0 < b < 1$, la gráfica *caerá* de izquierda a derecha, del primer cuadrante al cuarto (como en el ejemplo para $b = 1/2$).
3. El eje y es la asíntota vertical.
4. El dominio es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$.

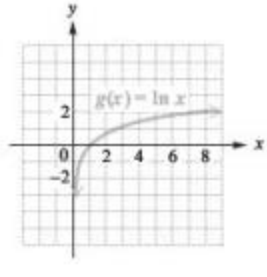


FIGURA 35

Una de las funciones logarítmicas más importantes es la función en base e. Si se cambian los papeles de x y y en la gráfica $f(x) = e^x$ (vea la figura 33), se obtiene la gráfica de $g(x) = \log_e x$. Existe un símbolo especial para $\log_e x$, se trata de $\ln x$. Es decir:

$$\ln x = \log_e x.$$

La figura 35 muestra la gráfica de $g(x) = \ln x$, llamada la **función logaritmo natural**.

La expresión

$$\ln e^k$$

es el exponente al que hay que elevar la base e para obtener e^k. Sólo existe un número para que lo consiga, y es la misma k. Por tanto, se establece el importante enunciado que sigue:

> Para todos los números reales k.
>
> $$\ln e^k = k.$$

Este hecho se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Suponga que se invierte cierta cantidad P a una tasa anual de 6.5%, capitalizable continuamente. ¿Cuánto tiempo tomará que la cantidad se triplique?

Se desea encontrar el valor de t en la fórmula de capitalización continua que hará que la cantidad A sea igual a $3P$ (ya que se desea que la inversión inicial, P, se triplique). Se usa la fórmula $A = Pe^{rt}$, con $3P$ que se sustituye en lugar de A y .065 que reemplaza a r.

$$A = Pe^{rt}$$
$$3P = Pe^{.065t}$$
$$3 = e^{.065t} \quad \text{Dividir ambos lados entre } P.$$

Ahora se toma el logaritmo natural en ambos lados.

$$\ln 3 = \ln e^{.065t}$$
$$\ln 3 = .065t \quad \text{Se emplea el hecho de que } \ln e^k = k.$$

Se resuelve para t y ambos lados se dividen entre .065.

$$t = \frac{\ln 3}{.065}$$

En una calculadora se obtiene que $\ln 3 \approx 1.098612289$. Al dividir esto entre .065 resulta que

$$t \approx 16.9$$

hasta la décima más cercana. Por tanto, se requeriría alrededor de 16.9 años para que una inversión inicial P se triplique en tales condiciones. ■

Modelos exponenciales

EJEMPLO 6 El *efecto invernadero* se refiere al fenómeno en que gases como el bióxido de carbono, metano y clorofluorocarbonos (CFC) tienen el potencial de alterar el clima de la Tierra y destruir la capa de ozono. Las concentraciones de CFC-12, que se emplean en la tecnología de refrigeración, en partes por mil millones (ppb) se modelan con la función exponencial definida por

$$f(x) = .48e^{.04x},$$

donde $x = 0$ representa a 1990, $x = 1$ representa a 1991, y así sucesivamente. Utilice esta función para aproximar la concentración en 1998.

El **número *e*** se llama así en honor de Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo muy prolífico. El valor de e se expresa como una serie infinita.

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

También se expresa de dos modos con el empleo de fracciones continuas:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\ddots}}}}}$$

Puesto que $x = 0$ representa a 1990, entonces $x = 8$ representa a 1998. Se evalúa $f(8)$ con una calculadora.

$$f(8) = .48e^{.04(8)} = .48e^{.32} \approx .66$$

En 1998, la concentración de CFC-12 fue de aproximadamente .66 ppb. ■

Los materiales radiactivos se desintegran de acuerdo con funciones de decaimiento exponencial. La **vida media** de una cantidad que diminuye de manera exponencial es el tiempo en que cualquier cantidad inicial se reduce a la mitad de su valor.

EJEMPLO 7 El carbono 14 es una forma radiactiva de carbono que se encuentra en todas las plantas y animales vivos. Una vez que el ser muere, el carbono radiactivo comienza a desintegrarse. Los científicos determinan la edad de los residuos por medio de la comparación de la cantidad presente de carbono 14 con la cantidad que se encuentra en las plantas y animales vivos. La cantidad de carbono 14 presente después de t años se modela con la ecuación exponencial siguiente:

$$y = y_0 e^{-.0001216t},$$

donde y_0 representa la cantidad inicial. ¿Cuál es la vida media del carbono 14?

Para encontrar la vida media, sea $y = \frac{1}{2}y_0$ en la ecuación.

$$\frac{1}{2}y_0 = y_0 e^{-.0001216t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-.0001216t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -.0001216t$$

$$t \approx 5700 \qquad \text{Usar calculadora.}$$

La vida media del carbono 14 es aproximadamente de 5700 años. ■

PARA REFLEXIONAR

¿Qué significa el botón de la calculadora que dice *log*? En breve se responderá esta pregunta. Antes regresemos a 1624, cuando el matemático inglés Henry Briggs publicó lo que en ese momento era el avance más grande para hacer cálculos: las tablas de logaritmos comunes. Un logaritmo común, o en base 10, de un número positivo x es el exponente al que debe elevarse 10 a fin de obtener x. En forma simbólica, sólo se escribe log x para denotar $\log_{10} x$.

Como los logaritmos son exponentes, sus propiedades son las mismas que las de los exponentes, lo que permitió que los usuarios de las tablas de logaritmos comunes multiplicaran por medio de sumar, dividieran a través de la resta, y sacaran raíces con la división. Por ejemplo, para multiplicar 534.4 por 296.7, el usuario buscaría en la tabla el valor de log 534.4, después el de log 296.7 y sumaría dichos valores. Luego, con la lectura a la inversa de la tabla, el usuario buscaría el *antilogaritmo* de la suma con objeto de encontrar el producto de los dos números originales. Asimismo, era posible realizar operaciones más complicadas.

(continúa)

La fotografía ilustra un problema de tarea que se pidió el 15 de mayo de 1930. Se encontró en una hoja de papel plegada y bien conservada dentro de un antiguo texto de matemáticas adquirido en una librería de viejo en Nueva Orleáns. ¿No le da gusto que hoy usemos calculadoras?



Entonces, ¿por qué incluir en las calculadoras una tecla de logaritmos en base 10? Los logaritmos comunes se utilizan en ciertas aplicaciones de la ciencia. Por ejemplo, el pH de una sustancia es el negativo del logaritmo común de la concentración del ión de hidrógeno en moles por litro. El valor del pH es una medida de la acidez o alcalinidad de una solución. Si el pH > 7.0, la solución es alcalina, si el pH < 7.0, es ácida. La escala de Richter, que se emplea para medir la intensidad de los terremotos, se base en los logaritmos, y la intensidad de los sonidos, que se mide en decibeles, también tiene una base logarítmica.

Para análisis en grupo

1. Divida la clase en dos grupos pequeños, y use la tecla *log* de una calculadora científica para multiplicar 458.3 por 294.6. Recuerde que una vez que se suman los logaritmos es necesario elevar 10 a esa potencia a fin de obtener el producto.
2. Pregunte a alguien que haya estudiado cálculo con logaritmos en algún curso de álgebra o trigonometría antes del advenimiento de las calculadoras científicas, cómo se las arreglaba. Después transmita estos recuerdos a la clase.
3. ¿Qué es una regla de cálculo? Pida que alguien busque una en algún ático o clóset y la lleve a clase. La regla de cálculo fue una herramienta popular para hacer cálculos durante la década de 1960.

8.6 EJERCICIOS

Llene los espacios en blanco con la respuesta correcta.

1. Para una función exponencial $f(x) = a^x$, si $a > 1$, la gráfica _____ de izquierda a derecha. Si (crece/decrece)
   $0 < a < 1$, la gráfica _____ de izquierda a derecha. (crece/decrece)
2. La intersección de la gráfica de $y = a^x$ con el eje y es _____.
3. La gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ _____ interseca al eje x. (sí/no)
4. El punto (2, _____) está en la gráfica de $f(x) = 3^{4x-3}$.
5. Para una función logarítmica $g(x) = \log_a x$, si $a > 1$, la gráfica _____ de izquierda a derecha. Si (crece/decrece)
   $0 < a < 1$, la gráfica _____ de izquierda a derecha. (crece/decrece)
6. La intersección de la gráfica de $y = \log_a x$ con el eje x es _____.
7. La gráfica de la función exponencial $g(x) = \log_a x$ _____ interseca al eje y. (sí/no)
8. El punto (98, _____) se encuentra en la gráfica de $g(x) = \log_{10}(x + 2)$.

Utilice una calculadora para encontrar una aproximación de cada uno de los números siguientes. Proporcione tantos dígitos como muestre la calculadora.

9. $9^{3/7}$
10. $14^{2/7}$
11. $(.83)^{-1.2}$
12. $(.97)^{3.4}$
13. $(\sqrt{6})^{\sqrt{3}}$
14. $(\sqrt{7})^{\sqrt{3}}$
15. $\left(\frac{1}{3}\right)^{9.8}$
16. $\left(\frac{2}{5}\right)^{8.1}$

Dibuje la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

17. $f(x) = 3^x$ **18.** $f(x) = 5^x$

19. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **20.** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Emplee una calculadora para encontrar lo que se pide. Dé tantos dígitos como muestre la calculadora.

21. e^3 **22.** e^4

23. e^{-4} **24.** e^{-3}

En los ejercicios 25 a 28 replantee la ecuación exponencial como logarítmica. En los ejercicios 29 a 32 replantee la ecuación logarítmica como exponencial.

25. $4^2 = 16$ **26.** $5^3 = 125$

27. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$ **28.** $\left(\frac{1}{10}\right)^{-4} = 10{,}000$

29. $5 = \log_2 32$ **30.** $3 = \log_4 64$

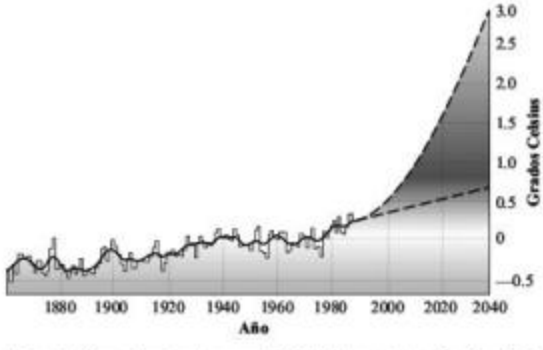
31. $1 = \log_3 3$ **32.** $0 = \log_{12} 1$

Utilice una calculadora para encontrar lo que se pide. Proporcione tantos dígitos como muestre la calculadora.

33. ln 4 **34.** ln 6

35. ln .35 **36.** ln 2.45

Calentamiento global *La figura que se muestra se publicó en el artículo* Is Our World Warming?, *que apareció en la edición de octubre de 1990 en* National Geographic. *Muestra las proyecciones de los incrementos de temperatura por medio de dos gráficas: con una curva de tipo exponencial y con una lineal. A partir de la figura, aproxime el incremento* **(a)** *para la curva exponencial, y* **(b)** *para la gráfica lineal, para cada uno de los años que se pide.*



Fuente: "Zero Equals Average Global Temperature for the Period 1950-1979", por Dale D. Glasgow, tomado de *National Geographic*, octubre de 1990. Reimpreso con permiso de National Geographic Society.

37. 2000 **38.** 2010

39. 2020 **40.** 2040

Dibuje la gráfica de cada una de las funciones siguientes. (Una pista: Emplee las gráficas de las funciones exponenciales de los ejercicios 17 a 20, a fin de facilitar el trabajo.)

41. $g(x) = \log_3 x$ **42.** $g(x) = \log_5 x$

43. $g(x) = \log_{1/4} x$ **44.** $g(x) = \log_{1/3} x$

Inversión *Determine la cantidad de dinero que se acumulará en una cuenta que paga interés compuesto, a partir del capital inicial con las condiciones que se mencionan.*

45. $4292 al 6% de capitalización anual durante 10 años.

46. $8906.54 al 5% de capitalización semestral durante nueve años.

47. $56,780 al 5.3% de capitalización trimestral durante 23 años.

48. $45,788 al 6% de capitalización diaria (ignore los años bisiestos) durante 11 años de 365 días.

49. ***Inversión*** Karen Guardino invierte $25,000 de una herencia en un fondo que paga el 5% por año capitalizable en forma continua. ¿Cuál será la cantidad depositada después de cada uno de los periodos siguientes?
(a) 1 año **(b)** 5 años **(c)** 10 años

50. ***Inversión*** Ron Hampton, quien trabaja por su cuenta, desea invertir $60,000 en un plan de pensión. Una inversión ofrece 7% capitalizable trimestralmente. Otra asegura 6.75% capitalizable de manera continua. ¿Cuál inversión generará más interés en 5 años? ¿Cuánto más producirá el plan mejor?

Resuelva cada problema, se involucra una función exponencial o logarítmica.

51. ***Emisiones de monóxido de carbono*** Con base en las cifras de 1970 a 1998, el número de emisiones mundiales de monóxido de carbono, en miles de toneladas, se aproxima por medio de la función exponencial definida por

$$f(x) = 132{,}359(1.0124)^{-x},$$

donde $x = 0$ corresponde a 1970, $x = 5$ a 1975, y así sucesivamente. (*Fuente:* Agencia para la protección del medio ambiente; *Tendencias nacionales de la emisión de contaminantes del aire.*)

(a) Emplee este modelo para aproximar las emisiones en 1970.

(b) Repita el inciso (a) para 1995.

(c) En 1998, la cantidad real de emisiones fue de 89,454 millones de toneladas. ¿Cómo se compara esto con el número que proporciona el modelo?

52. ***Desechos sólidos municipales*** Con base en las cifras de 1980 a 1999, los desechos sólidos municipales generados, en millones de toneladas, se aproximan con la función exponencial definida como

$$f(x) = 157.28(1.0204)^x,$$

donde $x = 0$ corresponde a 1980, $x = 5$ a 1985, y así sucesivamente. (*Fuente:* Agencia para la protección del medio ambiente, *Caracterización de los desechos tóxicos municipales en Estados Unidos: 1999.)*

(a) Utilice este modelo para aproximar el número de toneladas de estos desperdicios en 1980.

(b) Emplee el modelo para aproximar el número de toneladas de esta clase de desechos en 1985.

(c) En 1999, el número real de millones de toneladas de estos desperdicios fue de 229.9. ¿Cómo se compara esto con el número que proporciona el modelo?

53. ***Población de Brasil*** La Oficina de censos de Estados Unidos estima que la población aproximada de Brasil crecerá de acuerdo con la función

$$f(x) = 176{,}000(2)^{.008x},$$

donde $x = 0$ representa el año 2000, $x = 25$ al año 2025 y $x = 50$ al año 2050.



(a) De acuerdo con este modelo, ¿cuál fue la población de Brasil en 2000?

(b) ¿Cuál será la población en 2025?

(c) ¿Cómo se compara la población en 2025 con la de 2000?

54. ***Población de Pakistán*** La Oficina de censos de Estados Unidos estima que la población aproximada de Pakistán crecerá de acuerdo con la función

$$f(x) = 146{,}250(2)^{.0176x},$$

donde $x = 0$ representa al año 2000, $x = 25$ a 2025 y $x = 50$ a 2050.

(a) De acuerdo con este modelo, ¿cuál fue la población de Pakistán en 2000?

(b) ¿Cuál será la población en 2025?

(c) ¿Cómo se compara la población en 2025 con la de 2000?

55. ***Venta de libros*** Con base en cifras seleccionadas obtenidas durante las décadas de 1980 y 1990, los gastos de los lectores de todo tipo de libros en Estados Unidos se modelan con la función definida por

$$B(x) = 8768e^{.072x},$$

donde $x = 0$ representa a 1980, $x = 1$ a 1981, y así sucesivamente, y $B(x)$ está en millones de dólares. Aproxime los gastos de los lectores para 1998. (*Fuente:* Book Industry Study Group.)



56. ***Grados de licenciatura obtenidos*** Con base en cifras seleccionadas durante las décadas de 1970, 1980 y 1990, el número total de grados de licenciatura concedidos en Estados Unidos se modelan por medio de la función definida por

$$D(x) = 815{,}427e^{.0137x},$$

donde $x = 1$ corresponde a 1971, $x = 10$ a 1980, y así sucesivamente. Aproxime el número de grados de bachiller concedidos en 1994. (*Fuente:* U.S. National Center for Education Statistics.)

57. ***Muestreo de yacimientos radiactivos*** La cantidad de material radiactivo presente en un yacimiento está dada por la función definida por

$$A(t) = 100(3.2)^{-.5t},$$

donde $A(t)$ es la cantidad presente, en gramos, de la muestra t meses después de la medición inicial.

(a) ¿Cuánto había al hacer la medición inicial? (*Una pista:* $t = 0$.)

(b) ¿Cuánto había dos meses después?

(c) ¿Cuánto había 10 meses más tarde?

58. ***Valor de una máquina copiadora*** Un negocio pequeño estima que el valor $V(t)$ de una máquina copiadora disminuye de acuerdo con la función definida por

$$V(t) = 5000(2)^{-.15t},$$

donde t es el número de años transcurridos desde la adquisición de la máquina, y $V(t)$ está en dólares.

(a) ¿Cuál fue el valor original de la máquina?

(b) ¿Cuál es el valor de la máquina cinco años después de haberla comprado?

(c) ¿Cuál es el valor de la máquina 10 años después de su compra? Redondee su respuesta al dólar más cercano.



59. ***Sitios para desperdicios peligrosos*** De acuerdo con cifras seleccionadas de 1981 a 1995, el número de sitios muy profundos para desechos peligrosos en Estados Unidos se aproxima con la función definida por

$$f(x) = 11.34 + 317.01 \log_2 x,$$

donde $x = 1$ corresponde a 1981, $x = 2$ a 1982, y así sucesivamente. (*Fuente:* Agencia para la protección del medio ambiente.)

(a) Use la función para aproximar el número de sitios en 1984.

(b) Utilice la función para aproximar el número de sitios en 1988.

60. ***Consumo de gas natural seco*** De acuerdo con cifras seleccionadas de 1980 a 1993, el número de billones de pies cúbicos de gas natural seco consumido en todo el mundo, se aproxima por medio de la función definida por

$$f(x) = 51.47 + 6.044 \log_2 x,$$

donde $x = 1$ corresponde a 1980, $x = 2$ a 1981, y así sucesivamente. (*Fuente: Administración de información de energía.*)

(a) Emplee la función para aproximar el consumo en 1980.

(b) Utilice la función para obtener el consumo en 1987.

Intensidad de los terremotos *En Estados Unidos, la intensidad de un terremoto se mide con la escala de Richter. Esta forma de medir la intensidad* x *está dada por*

$$R = \log_{10} \frac{x}{x_0},$$

donde x_0 *es la intensidad de un terremoto de cierta magnitud (pequeña). La figura muestra mediciones en la escala de Richter para terremotos grandes en el sur de California, desde 1920. Como se observa, un terremoto nunca se presenta solo y la década de 1990 fue una temporada especialmente prolífica.*



Fuente: Caltech; U.S. Geological Survey.

Si se escribe la ecuación logarítmica anterior en forma exponencial, se obtiene:

$$10^R = \frac{x}{x_0} \quad \text{o} \quad x = 10^R x_0.$$

El terremoto de 1994 en Northridge tuvo una magnitud en la escala de Richter de 6.7; el de Landers, de 7.3.

61. ¿Cuántas veces más poderoso fue el terremoto de Landers en comparación con el de Northridge?

62. Compare el terremoto más pequeño de la gráfica (de 4.8) con el de Landers. ¿Cuántas veces más poderoso fue el de Landers?

8.7 Sistemas de ecuaciones y sus aplicaciones

Sistemas lineales en dos variables

La participación en el mercado mundial de la computación personal ha cambiado para los diversos fabricantes, uno y después otro obtienen una participación mayor. Como se aprecia en la figura 36, la participación de Hewlett-Packard creció de 1995 a 1998, mientras que la de Packard Bell, NEC, vio disminuir la suya. Las gráficas se intersecan en el punto en que las dos compañías tenían la misma porción del mercado.



Fuente: Intelliquest; IDC.

FIGURA 36

Podría emplearse una ecuación lineal para modelar la gráfica de la participación de Hewlett-Packard en el mercado, y otra ecuación lineal para la de Packard Bell, NEC. Un conjunto de ecuaciones como el descrito se denomina **sistema de ecuaciones**. El punto donde las gráficas de la figura 36 se intersecan es la solución de cada ecuación individual. También es la solución del sistema de ecuaciones.

La definición de ecuación lineal dada antes se extiende a más variables. Cualquier ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

para números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (no todos los cuales son 0), y b, es una **ecuación lineal en n variables**. Si todas las ecuaciones de un sistema son lineales, el sistema es un **sistema de ecuaciones lineales**, o **sistema lineal**.

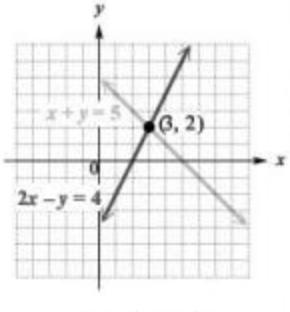
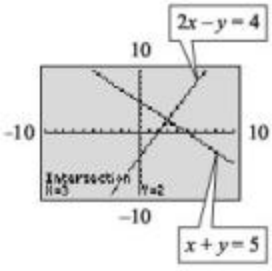


FIGURA 37

En la figura 37, las dos ecuaciones lineales $x + y = 5$, y $2x - y = 4$ están graficadas en el mismo sistema de coordenadas. Observe que se intersecan en el punto (3, 2). Como (3, 2) es el único par ordenado que satisface ambas ecuaciones al mismo tiempo, se dice que $\{(3, 2)\}$ es el conjunto solución del sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 4. \end{aligned}$$

Como la gráfica de una ecuación lineal es una línea recta, hay tres posibilidades para el número de soluciones en el conjunto solución de un sistema formado por dos ecuaciones lineales, como se ve en la figura 38, en la página siguiente.

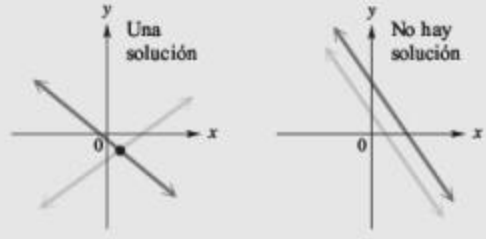


Una calculadora gráfica sustenta la afirmación que sostiene que (3, 2) es la solución del sistema

$$x + y = 5$$
$$2x - y = 4.$$

Gráficas de un sistema lineal (las tres posibilidades)

1. Las dos gráficas se intersecan en un punto único. Las coordenadas de este punto dan la única solución del sistema. En este caso, el sistema es **consistente**, y las ecuaciones son **independientes**. Éste es el caso más común. Vea la figura 38(a).



(a) (b)

FIGURA 38

2. Las gráficas son rectas paralelas. En este caso, el sistema es **inconsistente**; es decir, no hay una solución común para ambas ecuaciones del sistema, y el conjunto solución es $\emptyset$. Vea la figura 38(b).
3. Las gráficas están en la misma recta. En este caso las ecuaciones son **dependientes**, ya que cualquier solución de una ecuación del sistema también es solución de la otra. El conjunto solución es un infinito de pares ordenados que representan los puntos sobre la recta. Vea la figura 38(c).



(c)

FIGURA 38

En la mayoría de los casos, no se puede depender de la graficación para resolver sistemas. Hay tres métodos algebraicos para hacerlo, y en los ejemplos siguientes se explica uno de ellos, llamado **método de eliminación**. Involucra la combinación de las dos ecuaciones del sistema de modo que se elimine una variable. Esto se logra con base en el siguiente hecho:

$$\text{Si } a = b \text{ y } c = d, \text{ entonces } a + c = b + d.$$

A continuación se resume el método general para resolver un sistema por eliminación.



La solución de sistemas de ecuaciones de gráficas es más complicada que las líneas rectas. Ésta es el principio que subyace al fundamento del **mattang** (que se muestra en esta estampilla), tabla adhesiva que usan los pobladores de las Islas Marshall en el Pacífico. Un mattang está hecho de raíces atadas con fibras de coco, y muestra los patrones del oleaje con que se encuentra quien se aproxima a una isla.

Solución de sistemas lineales por eliminación

Paso 1: **Escribir en la forma estándar.** Escriba ambas ecuaciones en la forma

$$Ax + By = C.$$

Paso 2: **Hallar los opuestos de los coeficientes de un par de términos.** Multiplique una o ambas ecuaciones por números apropiados de modo que la suma de los coeficientes de x o de y sea 0.

Paso 3: **Sumar.** Sume las ecuaciones nuevas para eliminar una variable. La suma debe resultar en una ecuación con solo una variable.

Paso 4: **Resolver.** Resuelva la ecuación que resultó en el paso 3.

Paso 5: **Encontrar el otro valor.** Sustituya el resultado del paso 4 en cualquiera de las ecuaciones dadas y resuelva para la otra variable.

Paso 6: **Encontrar el conjunto solución.** Verifique la solución en las dos ecuaciones dadas. Después, escriba el conjunto solución.

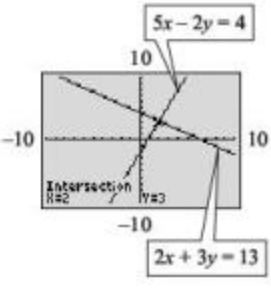
EJEMPLO 1 Resuelva el sistema siguiente.

$$5x - 2y = 4 \quad (1)$$
$$2x + 3y = 13 \quad (2)$$

Paso 1: Ambas ecuaciones ya están en forma estándar.

Paso 2: Nuestra meta es sumar las dos ecuaciones de modo que se elimine una variable. Suponga que se desea eliminar la variable x. Como los coeficientes de x *no* son opuestos, primero debe transformarse una o ambas ecuaciones de modo que *sí* lo sean. Después, al combinar las ecuaciones, el término con x tendrá un coeficiente de 0, y podrá resolverse para y. Se comienza por multiplicar la ecuación (1) por 2, y la ecuación (2) por -5.

$$10x - 4y = 8 \quad \text{2 por cada lado de la ecuación (1)}$$
$$-10x - 15y = -65 \quad \text{−5 por cada lado de la ecuación (2)}$$



Se ilustra la solución del ejemplo 1 en una calculadora gráfica. Se resuelve cada ecuación para y, se traza la gráfica de ambas y se encuentra el punto de intersección de las dos rectas: (2, 3).

Paso 3: Ahora se suman las dos ecuaciones para eliminar a x.

$$\begin{array}{rl} 10x - 4y = & 8 \\ -10x - 15y = & -65 \\ \hline -19y = & -57 \end{array} \quad \text{La suma.}$$

Paso 4: Resolver la ecuación que resulta del paso 3 conduce a $y = 3$.

Paso 5: Para encontrar x, se sustituye y por 3 en cualquiera de las ecuaciones originales. Al sustituirse en la ecuación (2) resulta:

$$\begin{array}{rll} 2x + 3y = & 13 & (2) \\ 2x + 3(3) = & 13 & \text{Con } y = 3 \\ 2x + 9 = & 13 & \\ 2x = & 4 & \text{Restar 9.} \\ x = & 2. & \text{Dividir entre 2.} \end{array}$$

Paso 6: La solución parece ser $(2,3)$. Para comprobarlo se sustituye la x por 2 y y por 3 en las dos ecuaciones originales.

$5x - 2y = 4$	(1)	$2x + 3y = 13$	(2)
$5(2) - 2(3) = 4$	?	$2(2) + 3(3) = 13$	?
$10 - 6 = 4$	?	$4 + 9 = 13$	?
$4 = 4$	Verdadero	$13 = 13$	Verdadero

El conjunto solución es $\{(2, 3)\}$. ■

Los sistemas lineales también se resuelven por el **método de sustitución**, el cual es más útil para resolver aquellos sistemas en los que una variable tiene el coeficiente de 1 o –1. Como se estudia en cursos más avanzados de álgebra, el método de sustitución es la mejor elección para resolver muchos sistemas *no lineales*.

El método de resolver un sistema por sustitución se resume como sigue:

Resolución de sistemas lineales por sustitución

Paso 1: **Resolver para una variable en términos de la otra.** Resuelva una de las ecuaciones para cualquier variable (si una de las variables tiene coeficiente de 1 o –1, elíjala, ya que por lo general el método de sustitución resulta más fácil de este modo).

Paso 2: **Sustituir.** Sustituya esa variable en la otra ecuación. El resultado debe ser una ecuación con solo una variable.

Paso 3: **Resolver.** Resuelva la ecuación del paso 2.

Paso 4: **Encontrar el otro valor.** Sustituya el resultado del paso 3 en la ecuación del paso 1 para encontrar el valor de la otra variable.

Paso 5: **Encontrar el conjunto solución.** Compruebe la solución en las dos ecuaciones dadas. Después escriba el conjunto solución.

El ejemplo que sigue ilustra este método.

EJEMPLO 2 Resuelva el sistema siguiente:

$$3x + 2y = 13 \quad (1)$$
$$4x - y = -1 \quad (2)$$

Paso 1: Para usar el método de sustitución, primero se resuelve una de las ecuaciones ya sea para x o para y. Como el coeficiente de y en la ecuación (2) es –1, es la más fácil de resolver para y en la ecuación (2).

$$-y = -1 - 4x \quad (2)$$
$$y = 1 + 4x$$

Paso 2: Sustituya $1 + 4x$ para y en la ecuación (1) a fin de obtener una ecuación en x.

$$3x + 2y = 13 \quad (1)$$
$$3x + 2(1 + 4x) = 13 \quad \text{Sea } y = 1 + 4x$$

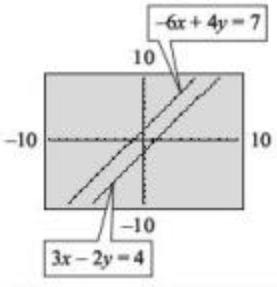
Paso 3: Resuelva para x en la ecuación que acaba de obtenerse.

$$3x + 2 + 8x = 13 \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$11x = 11 \quad \text{Agrupar términos; restar 2.}$$
$$x = 1 \quad \text{Dividir entre 11.}$$

Paso 4: Ahora resuelva para y. Como $y = 1 + 4x$, $y = 1 + 4(1) = 5$.

Paso 5: Compruebe para demostrar que el par ordenado $(1, 5)$ satisface ambas ecuaciones. El conjunto solución es $\{(1, 5)\}$. ■

El ejemplo que sigue ilustra casos especiales que resultan al resolver sistemas (se usará el método de eliminación, pero se sacan las mismas conclusiones si se emplea el de sustitución).



Las gráficas de las ecuaciones del ejemplo 3(a) son paralelas. No hay soluciones.

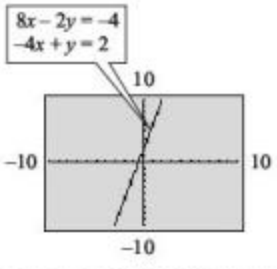
EJEMPLO 3 **(a)** Resuelva el sistema

$$3x - 2y = 4 \quad (1)$$
$$-6x + 4y = 7. \quad (2)$$

La variable x se elimina con la multiplicación de ambos lados de la ecuación (1) por 2 para después sumar las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{rl} 6x - 4y = & 8 \quad \text{2 por la ecuación (1)} \\ -6x + 4y = & 7 \quad (2) \\ \hline 0 = & 15 \quad \text{Falso} \end{array}$$

En este caso se eliminan ambas variables, lo que resulta en el enunciado falso de que $0 = 15$, lo cual indica que estas dos ecuaciones no tienen soluciones en común. El sistema es inconsistente y el conjunto solución es $\emptyset$.



Las gráficas de las ecuaciones del ejemplo 3(b) coinciden. Se observa una sola recta. Hay un infinito de soluciones.

(b) Resuelva el sistema

$$-4x + y = 2 \quad (1)$$
$$8x - 2y = -4. \quad (2)$$

Se elimina x con la multiplicación de ambos lados de la ecuación (1) por 2, y después se suma el resultado a la ecuación (2).

$$\begin{array}{rl} -8x + 2y = & 4 \quad \text{2 por la ecuación (1)} \\ 8x - 2y = & -4 \quad (2) \\ \hline 0 = & 0 \quad \text{Verdadero} \end{array}$$

Este enunciado verdadero, $0 = 0$, indica que la solución de una ecuación también lo es de la otra, por lo que el conjunto solución es un conjunto infinito de pares ordenados. Las dos ecuaciones son dependientes.

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones dependientes se escribirá como un conjunto de pares ordenados en el que x se expresa en términos de y, como sigue. Se elige cualquier ecuación y se resuelve para x. Si se escoge la ecuación (1) se obtiene

$$-4x + y = 2$$
$$x = \frac{2 - y}{-4} = \frac{y - 2}{4}.$$

El conjunto solución se escribe como:

$$\left\{\left(\frac{y - 2}{4}, y\right)\right\}.$$

Se encuentran pares ordenados individuales del conjunto solución por medio de seleccionar valores para y y calcular los valores correspondientes de x. Por ejemplo, si $y = -2$, $x = (-2 - 2)/4 = -1$, y una solución es el par ordenado $(-1, -2)$. ■

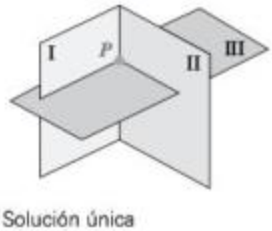
Sistemas lineales en tres variables Una solución de una ecuación en tres variables, tal como $2x + 3y - z = 4$ se denomina un **trío ordenado**, y se escribe (x, y, z). Por ejemplo, los tríos ordenados $(1, 1, 1)$ y $(10, -3, 7)$ son ambos soluciones de $2x + 3y - z = 4$, ya que sus números satisfacen la ecuación si se utilizan para reemplazar x, y y z, respectivamente. Los métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos variables se extienden a la solución de sistemas de ecuaciones con tres variables, tales como el siguiente:

$$\begin{aligned} 4x + 8y + z &= 2 \\ x + 7y - 3z &= -14 \\ 2x - 3y + 2z &= 3. \end{aligned}$$

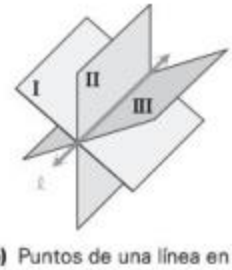
En teoría, un sistema de este tipo se puede resolver trazando sus gráficas. Sin embargo, la gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un *plano* y no una recta. Como la gráfica de cada ecuación del sistema es un plano, lo que requiere graficar en tres dimensiones, este método no resulta práctico. Sin embargo, ilustra el número de soluciones posibles, como se aprecia en la figura 39.

Gráficas de sistemas lineales en tres variables

1. Los tres planos se encuentran en un punto único en común que forma el conjunto solución del sistema. Vea la figura 39(a).
2. Los tres planos tienen en común los puntos de una recta, de modo que el conjunto de puntos a lo largo de ésta constituyen el conjunto solución del sistema. Vea la figura 39(b).
3. Los planos no tienen puntos en común a ninguno de los tres, por lo que no hay solución para el sistema. Vea la figura 39(c).
4. Los tres planos coinciden de modo que el conjunto solución del sistema es el conjunto solución de todos los puntos del plano. Vea la figura 39(d).



(a) Solución única



(b) Puntos de una línea en común



(c) Un caso en que no hay puntos en común



(d) Todos los puntos en común

FIGURA 39

Existen otros ejemplos de los casos que se mencionan. Por ejemplo, dos de los planos se intersecan en una línea, en tanto que el tercero es paralelo a alguno de los dos, lo que resulta de nuevo en que no hay puntos en común para los tres planos. En la figura 39 sólo se da un ejemplo de cada caso.

Como es impráctico trazar gráficas para encontrar la solución de un sistema de tres ecuaciones en tres variables, éstos se resuelven con una extensión del método de eliminación, que se resume a continuación.

Solución de sistemas lineales en tres variables, por eliminación

Paso 1: **Eliminar una variable.** Use el método de eliminación para deshacerse de una variable de cualquiera de dos de las ecuaciones. El resultado es una ecuación en dos variables.

Paso 2: **Eliminar la misma variable otra vez.** Elimine la *misma* variable de cualquiera de las *otras* de dos ecuaciones. El resultado es una ecuación en las mismas dos variables que la del paso 1.

Paso 3: **Eliminar una variable diferente y resolver.** Utilice el método de eliminación para eliminar una segunda variable de las dos ecuaciones en dos variables que resultan de los pasos 1 y 2. El resultado es una ecuación en una variable que da el valor de ésta.

Paso 4: **Encontrar un segundo valor.** Sustituya el valor de la variable que se encontró en el paso 3 en cualquiera de las ecuaciones en dos variables, a fin de hallar el valor de la segunda variable.

Paso 5: **Encuentre un tercer valor.** Use los valores de las dos variables de los pasos 3 y 4 con objeto de hallar el valor de la tercera a través de sustituir en cualquiera de las ecuaciones originales.

Paso 6: **Encontrar el conjunto solución.** Compruebe la solución en todas las ecuaciones originales. Después escriba el conjunto solución.

EJEMPLO 4 Resuelva el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 4x + 8y + z &= 2 && (1)\\ x + 7y - 3z &= -14 && (2)\\ 2x - 3y + 2z &= 3 && (3) \end{aligned}$$

Paso 1: Igual que antes, el método de eliminación implica el deshacerse de una variable de la suma de dos ecuaciones. La elección de cuál variable elegir es arbitraria. Suponga que se decide comenzar con la eliminación de z. Para hacer esto, hay que multiplicar ambos lados de la ecuación (1) por 3, y después sumar el resultado a la ecuación (2).

$$\begin{array}{rl} 12x + 24y + 3z = 6 & \text{Multiplicar ambos lados de la ecuación (1) por 3.}\\ x + 7y - 3z = -14 & (2)\\ \hline 13x + 31y = -8 & \text{Sumar.} \end{array}$$

Paso 2: La ecuación nueva sólo tiene dos variables. Para obtener otra ecuación sin z, se multiplican ambos lados de la ecuación (1) por -2 y se suma el resultado a la ecuación (3). En este punto es esencial *eliminar la misma variable, z.*

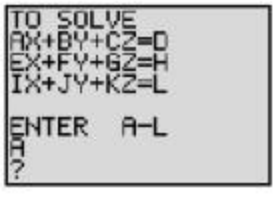
$$\begin{aligned} -8x - 16y - 2z &= -4 && \text{Multiplicar ambos lados de la ecuación (1) por } -2. \\ 2x - 3y + 2z &= 3 && (3) \\ \hline -6x - 19y &= -1 && \text{Sumar.} \end{aligned}$$

Paso 3: Ahora se resuelve el sistema de ecuaciones de los pasos 1 y 2 para x y para y (esto sólo es posible si se eliminó la *misma* variable en los dos primeros pasos).

$$\begin{aligned} 78x + 186y &= -48 && \text{Multiplicar ambos lados de } 13x + 31y = 28 \text{ por 6.} \\ -78x - 247y &= -13 && \text{Multiplicar ambos lados de } -6x - 19y = -1 \text{ por 13.} \\ \hline -61y &= -61 && \text{Sumar.} \\ y &= 1 \end{aligned}$$

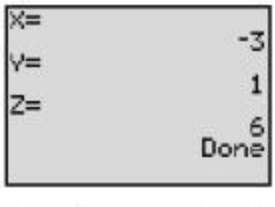
Paso 4: Sustituir y por 1 en cualquier ecuación de los pasos 1 y 2. Se elige a $-6x - 19y = -1$ y se obtiene:

$$\begin{aligned} -6x - 19y &= -1 \\ -6x - 19(1) &= -1 && \text{Sea } y = 1. \\ -6x - 19 &= -1 \\ -6x &= 18 \\ x &= -3. \end{aligned}$$



Paso 5: Sustituir x por -3 y y por 1 en cualquiera de las tres ecuaciones con objeto de encontrar z. Al escoger la ecuación (1) queda:

$$\begin{aligned} 4x + 8y + z &= 2 \\ 4(-3) + 8(1) + z &= 2 && \text{Sea } x = -3 \text{ y } y = 1. \\ z &= 6. \end{aligned}$$



Puede *programarse* una calculadora gráfica para que resuelva un sistema como el del ejemplo 4. Compare el resultado que se obtiene aquí con la solución del texto.

Paso 6: Parece que la única solución del sistema es el trío $(-3, 1, 6)$. Se comprueba que la solución satisfaga a las tres ecuaciones del sistema. Aquí se mostrará sólo la comprobación para la ecuación (1).

$$\begin{aligned} 4x + 8y + z &= 2 && (1) \\ 4(-3) + 8(1) + 6 &= 2 && ? \\ -12 + 8 + 6 &= 2 && ? \\ 2 &= 2 && \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Debido a que $(-3, 1, 6)$ también satisface a las ecuaciones (2) y (3), el conjunto solución es $\{(-3, 1, 6)\}$. ■

Aplicaciones de los sistemas lineales

Solución de problemas

Muchos problemas involucran más de una cantidad desconocida. Aunque se pueden resolver algunos problemas con dos incógnitas usando sólo una variable, muchas veces es más fácil usar dos variables. Para solucionar un problema con dos incógnitas, se escriben dos ecuaciones que relacionen las cantidades desconocidas; luego, se resuelve el sistema que se forma con una pareja de ecuaciones con el empleo de los métodos descritos en esta sección.

Los pasos siguientes, que se basan en el método de seis pasos para resolver problemas que se estudió al principio del capítulo 7, proporcionan una estrategia para solucionar los que involucran más de una variable.

A continuación se presenta una forma de calcular la edad de una persona y la fecha de su nacimiento. Pida a la persona que haga lo siguiente:

1. Multiplique el número del mes de su nacimiento por *100*.
2. Sume la fecha del mes.
3. Multiplique la suma por *2*.
4. Sume *8*.
5. Multiplique este resultado por *5*.
6. Sume *4*.
7. Multiplique por *10*.
8. Sume *4*.
9. A esto sume la edad de la persona.

Pregunte a la persona el número que obtuvo. Usted debe restar 444 del número que le digan. Las dos cifras finales dan la edad, la siguiente cifra (o cifras) identifican la fecha del mes, y la primera cifra (o cifras) dicen el número del mes.

Solución de un problema al aplicar un sistema de ecuaciones

Paso 1: **Leer** el problema con cuidado hasta entender con qué información se cuenta y cuál se pide encontrar.

Paso 2: **Asignar variables** que representen los valores desconocidos, con el empleo de los diagramas o tablas que se necesite. *Anotar* lo que representa cada variable.

Paso 3: **Escribir un sistema de ecuaciones** que relacione las incógnitas.

Paso 4: **Resolver** el sistema de ecuaciones.

Paso 5: **Enunciar la respuesta** del problema. ¿Parece razonable?

Paso 6: **Comprobar** la respuesta en las palabras del problema original.

Los problemas acerca del perímetro de una figura geométrica con frecuencia involucran dos incógnitas y se resuelven por medio de sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 5 A diferencia del futbol americano, en que las dimensiones del campo de juego no pueden variar, uno rectangular para soccer puede tener un ancho de entre 50 y 100 yardas y longitud de entre 50 y 100 yardas. Suponga que un campo en particular tiene un perímetro de 320 yardas. Su longitud mide 40 yardas más que su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de este campo? (*Fuente: Microsoft Encarta Enciclopedia 2000.*)

Paso 1: **Lea el problema de nuevo.** Se pide encontrar las dimensiones del campo.

Paso 2: **Asigne variables.** Sea L = longitud y W = ancho. La figura 40, en la página siguiente, muestra un campo de soccer con la longitud representada como L y el ancho como W.

Paso 3: **Escriba un sistema de ecuaciones.** Ya que el perímetro es de 320 yardas, se encuentra una ecuación con el empleo de la fórmula del perímetro:

$$2L + 2W = 320.$$

Debido a que la longitud es 40 yardas mayor que el ancho, se tiene:

$$L = W + 40.$$

Por tanto, el sistema es:

$$2L + 2W = 320 \quad (1)$$
$$L = W + 40. \quad (2)$$

Paso 4: **Resuelva** el sistema de ecuaciones. Como la ecuación (2) está resuelta para L, se usa el método de sustitución. En la ecuación (1) se sustituye a L por $W + 40$, y se resuelve para W.

$$\begin{aligned} 2L + 2W &= 320 && (1)\\ 2(W + 40) + 2W &= 320 && L = W + 40\\ 2W + 80 + 2W &= 320 && \text{Propiedad distributiva}\\ 4W + 80 &= 320 && \text{Agrupar términos semejantes.}\\ 4W &= 240 && \text{Restar 80.}\\ W &= 60 && \text{Dividir entre 4.} \end{aligned}$$

Sea $W = 60$ en la ecuación $L = W + 40$ para encontrar L.

$$L = 60 + 40 = 100$$

Paso 5: **Enuncie la respuesta.** La longitud es de 100 yardas, y el ancho es de 60 yardas. Ambas dimensiones están dentro de los rangos que plantea el problema.

Paso 6: **Compruebe.** El perímetro de este campo de soccer es el siguiente:

$$2(100) + 2(60) = 320 \text{ yardas},$$

y la longitud, 100 yardas, en efecto es 40 yardas mayor que el ancho, ya que

$$100 - 40 = 60.$$

La respuesta es correcta.

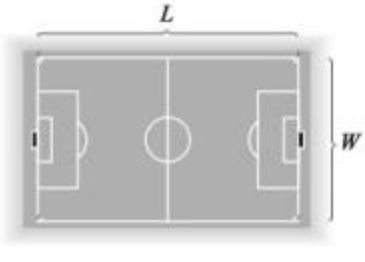




FIGURA 40 ■

Los precios de los boletos para deportes profesionales se incrementan anualmente. Los precios promedio por boleto en tres de los cuatro deportes principales (futbol, baloncesto y hockey) ahora pasan de $30.00.



EJEMPLO 6 Durante las últimas temporadas de la Liga Nacional de Hockey y la Asociación Nacional de Baloncesto, dos boletos de hockey y uno de baloncesto que se comprara a su precio promedio habrían costado $110.40. Un boleto para el hockey y dos para el baloncesto l habrían costado $106.32. ¿Cuáles fueron los precios promedio para los dos deportes? (*Fuente:* Team Marketing Report, Chicago.)

Paso 1: **Lea** el problema otra vez. Hay dos incógnitas.

Paso 2: **Asigne variables.** Sea que h represente el precio promedio de un boleto para el hockey y b represente el precio promedio de uno para el baloncesto.

Paso 3: **Escriba un sistema de ecuaciones.** Como dos boletos para el hockey y uno para el baloncesto cuestan un total de $110.40, una de las ecuaciones del sistema es

$$2h + b = 110.40.$$

Con un razonamiento similar, la segunda ecuación es

$$h + 2b = 106.32.$$

Por tanto, el sistema es

$$\begin{aligned} 2h + b &= 110.40 \quad (1)\\ h + 2b &= 106.32. \quad (2) \end{aligned}$$

Paso 4: **Resuelva** el sistema de ecuaciones. Para eliminar h, se multiplica la ecuación (2) por -2 y luego se suma.

$$\begin{aligned} 2h + b &= 110.40 && (1)\\ -2h - 4b &= -212.64 && \text{Multiplicar cada lado de (2) por } -2.\\ -3b &= -102.24 && \text{Sumar.}\\ b &= 34.08 && \text{Dividir entre } -3. \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de h se hace $b = 34.08$ en la ecuación (2).

$$\begin{aligned} h + 2b &= 106.32 && (2)\\ h + 2(34.08) &= 106.32 && \text{Sea } b = 34.08\\ h + 68.16 &= 106.32 && \text{Multiplicar.}\\ h &= 38.16 && \text{Restar } 68.16. \end{aligned}$$

Paso 5: **Enunciar la respuesta.** El precio promedio de un boleto para el baloncesto fue de $34.08. El precio promedio de un boleto para el hockey fue de $38.16.

Paso 6: **Comprobar** que estos valores satisfacen las condiciones planteadas por el problema. ■

Ya se han resuelto problemas de mezclas con el empleo de una variable. Para muchos problemas de mezclas se utiliza más de una variable y un sistema de ecuaciones.

EJEMPLO 7 ¿Cuántas onzas, cada una de ácido clorhídrico al 5% y ácido hidroclórico al 20%, deben combinarse para obtener 10 onzas de una solución de ácido hidroclórico al 12.5%?

Paso 1: **Lea** el problema. Se mezcla dos soluciones de concentración diferente para obtener una cantidad específica de solución con una concentración *intermedia.*



Los problemas que se resuelven al plantear un sistema de ecuaciones han despertado interés a lo largo de la historia. El siguiente problema apareció por primera vez en una obra hindú que data de 850 d.C., aproximadamente.

El precio conjunto de nueve limas [fruta parecida al limón, en la fotografía] y siete manzanas fragantes es de 107; también, el precio conjunto de siete limas y nueve manzanas fragantes es de 101. Oh, tú, matemático, dime rápido el precio de una lima y el de una manzana, ya que cada fruta tiene precios diferentes.

Utilice un sistema para resolver este problema. La respuesta se encuentra al final de los ejercicios para esta sección, en la página 476.

Paso 2: **Asigne variables.** Sea que x represente el número de onzas de la solución al 5%, y y el número de onzas de la solución al 20%. Se utiliza una tabla para resumir la información del problema.

Porcentaje (como decimal)	Onzas de solución	Onzas de ácido puro
5% = .05	x	$.05x$
20% = .20	y	$.20y$
12.5% = .125	10	$(.125)10$

La figura 41 también ilustra lo que plantea el problema.



FIGURA 41

Paso 3: **Escriba un sistema de ecuaciones.** Cuando se combinan x onzas de solución al 5% con y onzas de solución al 20%, el número total de onzas es 10, por tanto:

$$x + y = 10. \qquad (1)$$

Las onzas de ácido puro en la solución al 5% $(.05x)$ más las onzas de ácido puro en la solución al 20% $(.20y)$ deben ser igual al total de onzas de ácido puro en la mezcla, que es $(.125)10$, o 1.25. Es decir,

$$.05x + .20y = 1.25. \qquad (2)$$

Observe que estas ecuaciones se determinan con rapidez si se lee la tabla hacia abajo o con los letreros de la figura 41.

Paso 4: **Resuelva** el sistema de ecuaciones (1) y (2). Elimine x multiplicando primero la ecuación (2) por 100 para eliminar los decimales, y después con la multiplicación de la ecuación 1 por -5.

$$\begin{array}{rrl} 5x + 20y = & 125 & \text{Multiplicar cada lado de (2) por 100.} \\ \underline{-5x - \ 5y = \ -50} & & \text{Multiplicar cada lado de (1) por } -5. \\ 15y = & 75 & \text{Sumar.} \\ y = 5 & & \end{array}$$

Debido a que $y = 5$ y $x + y = 10$, x también es igual a 5.

Paso 5: **Enuncie la respuesta.** La mezcla que se desea obtener requerirá de 5 onzas de la solución al 5% y 5 onzas de la solución al 20%.

Paso 6: **Compruebe** que estos valores satisfacen ambas ecuaciones del sistema. ■

Al principio del capítulo 7 se estudiaron los problemas que utilizan la fórmula de la distancia $d = rt$. En muchos casos, dichos problemas se resuelven con sistemas de dos ecuaciones lineales. Recuerde que construir una tabla y dibujar un esquema ayudará a solucionarlos.

François Viète, matemático de la Francia del siglo XVI, hizo mucho por el simbolismo de las matemáticas. Antes de él, era frecuente que se usaran símbolos diferentes para potencias distintas de una cantidad. Viète usó la misma letra con una descripción de la potencia y el coeficiente. De acuerdo con Howard Eves en *An Introduction to the History of Mathematics*. Viète hubiera escrito

$$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$$

como

B5 en el quad A −C plano 2 en A + A cub aequatur D solido.

EJEMPLO 8 Un par de ejecutivos provenientes de ciudades que están separadas por una distancia de 400 millas, manejan para acudir a una cita de negocios en una localidad intermedia. Se encuentran después de cuatro horas. Encuentre la velocidad a la que viaja cada automóvil si uno de ellos lo hace 20 mph más rápido que el otro.

Paso 1: **Lea** el problema con cuidado.

Paso 2: **Asigne variables.**

$$\text{Sea } x = \text{velocidad del automóvil más rápido,}$$
$$y = \text{velocidad del automóvil más lento}$$

Se usa la fórmula $d = rt$. Como cada auto viaja durante 4 horas, el tiempo, t es igual a cuatro para ambos. Esta información se presenta en la tabla. La distancia se calcula con el empleo de la fórmula $d = rt$ y las expresiones que aparecen en la tabla.

	r	t	d
Automóvil más rápido	x	4	$4x$
Automóvil más lento	y	4	$4y$

Encuentre d a partir de $d = rt$.

Dibuje un esquema que muestre lo que ocurre en el problema. Vea la figura 42.

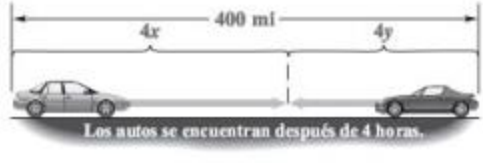


FIGURA 42

Paso 3: **Escriba dos ecuaciones.** Como se ve en la figura, debido a que la distancia total a la que viajan ambos automóviles es de 400 millas, una ecuación es

$$4x + 4y = 400.$$

Como el auto más veloz viaja 20 mph más rápido que el más lento, la segunda ecuación es

$$x = 20 + y.$$

Paso 4: **Resuelva.** Este sistema de ecuaciones,

$$4x + 4y = 400 \quad (1)$$
$$x = 20 + y, \quad (2)$$

puede resolverse por sustitución. Reemplace x por $20 + y$ en la ecuación (1) y resuelva para y.

$$\begin{aligned} 4(20 + y) + 4y &= 400 && \text{Sea } x = 20 + y \\ 80 + 4y + 4y &= 400 && \text{Propiedad distributiva} \\ 80 + 8y &= 400 && \text{Agrupar términos.} \\ 8y &= 320 && \text{Restar 80.} \\ y &= 40 && \text{Dividir entre 8.} \end{aligned}$$

Como $x = 20 + y$, y $y = 40$,

$$x = 20 + 40 = 60.$$

Paso 5: **Enuncie la respuesta.** Las velocidades de los dos vehículos son de 40 mph y 60 mph.

Paso 6: **Compruebe la respuesta.** Como cada auto viaja durante 4 horas, la distancia total recorrida es

$$4(60) + 4(40) = 240 + 160 = 400 \text{ millas},$$

como se requería. ■

Los problemas de los ejemplos 5 a 8 también hubieran podido resolverse con el empleo de una sola variable. Muchos estudiantes encuentran que la solución es más sencilla con dos variables.

EJEMPLO 9 Una compañía produce tres equipos de televisión a color, los modelos X, Y y Z. Cada modelo X requiere de 2 horas de trabajo de electrónica, 2 horas de tiempo de ensamblado y 1 hora para los acabados. Cada modelo Y necesita 1, 3 y 1 horas de tiempo para electrónica, ensamblado y acabados, respectivamente. Cada modelo Z exige 3, 2 y 2 horas del mismo trabajo, respectivamente. Se dispone por semana de 100 horas para la electrónica, 100 horas para el ensamblado y 65 horas para los acabados. ¿Qué cantidad debe producirse de cada modelo por semana si ha de utilizarse todo el tiempo disponible?

Paso 1: **Lea** el problema otra vez. Hay tres incógnitas.

Paso 2: **Asigne variables.**

Sea x = número de modelos X producidos por semana,

y = número de modelos Y producidos por semana,

y z = número de modelos Z producidos por semana.

La información se organiza en una tabla.

	Cada modelo X	Cada modelo Y	Cada modelo Z	Totales
Horas de trabajo electrónica	2	1	3	100
Horas de tiempo ensamblado	2	3	2	100
Horas para los acabados	1	1	2	65

Paso 3: **Escriba un sistema de tres ecuaciones.** Los x modelos X requieren $2x$ horas de electrónica, los y modelos Y necesitan $1y$ (o y) horas de electrónica, y los z modelos Z requieren $3z$ horas de electrónica. Como se dispone de 100 horas para la electrónica, se tiene que:

$$2x + y + 3z = 100. \qquad (1)$$

De manera similar, el hecho de que se disponga de 100 horas para el ensamblado, hace que:

$$2x + 3y + 2z = 100, \quad (2)$$

y como hay 65 horas disponibles para los acabados, se llega a la ecuación:

$$x + y + 2z = 65. \quad (3)$$

Otra vez, note la ventaja de construir una tabla. Si se lee en forma transversal se determinan con facilidad los coeficientes y constantes de las ecuaciones del sistema.

Paso 4: **Resuelva** el sistema

$$\begin{aligned} 2x + \ \ y + 3z &= 100 \\ 2x + 3y + 2z &= 100 \\ x + \ \ y + 2z &= 65 \end{aligned}$$

se encuentra que $x = 15, y = 10$ y $z = 20$.

Paso 5: ***Enuncie la respuesta.*** La compañía debe producir 15 modelos X, 10 modelos Y y 20 modelos Z por semana.

Paso 6: **Compruebe** que estos valores satisfagan las condiciones del problema. ■

8.7 EJERCICIOS

Responda las preguntas de los ejercicios 1 y 2, observe las gráficas que se proporcionan.

1. ***Participación de los programas de noticias*** La gráfica muestra la participación de cadenas (porcentaje de equipos de televisión en uso) durante los programas de noticias de las primeras horas de la tarde, para las tres televisoras principales, de 1986 a 2000.



Fuente: Nelson Media Research.

(a) ¿Entre cuáles años dominaron las noticias vespertinas de ABC?

(b) ¿En qué año terminó el dominio de ABC? ¿Cuál televisora igualó la participación de ABC ese año? ¿Cuál fue dicha participación?

(c) ¿Durante cuáles años ABC y CBS tuvieron igual participación? ¿Cuál fue la participación de cada una en dichos años?

(d) ¿Cuáles cadenas tuvieron recientemente igual participación? Escriba su participación como par ordenado de la forma (año, participación).

(e) Describa la tendencia general de los televidentes para las tres cadenas principales durante estos años.

2. ***Ventas por formato musical*** La gráfica muestra cómo cambió la producción de discos LP, cintas y discos compactos (CD) durante los años de 1986 a 1998.



Fuente: Asociación estadounidense de la industria de la grabación.

(a) ¿En cuál año la producción de cintas y CD alcanzó el mismo nivel? ¿Cuál fue dicho nivel?

(b) Exprese el punto de intersección de las gráficas de producción de LP y de CD como par ordenado de la forma (año, nivel de producción).

(c) ¿Entre cuáles años la producción de cintas se estabilizó primero y permaneció casi constante?

(d) Describa la tendencia de la producción de CD de 1986 a 1998. Si se usara una línea recta para aproximar su gráfica, ¿tendría pendiente positiva, negativa o de 0?

(e) Si se empleara una línea recta para aproximar la gráfica de la producción de cintas entre 1990 y 1998, ¿tendría pendiente positiva, negativa o de 0? Explique su respuesta.

Decida si el par ordenado es solución del sistema.

3. $x + y = 6 \quad (5, 1)$
$x - y = 4$

4. $x - y = 17 \quad (8, -9)$
$x + y = -1$

5. $2x - y = 8 \quad (5, 2)$
$3x + 2y = 20$

6. $3x - 5y = -12 \quad (-1, 2)$
$x - y = 1$

Resuelva cada sistema por graficación.

7. $x + y = 4$
$2x - y = 2$

8. $x + y = -5$
$-2x + y = 1$

Resuelva cada sistema por eliminación.

9. $2x - 5y = 11$
$3x + y = 8$

10. $-2x + 3y = 1$
$-4x + y = -3$

11. $3x + 4y = -6$
$5x + 3y = 1$

12. $4x + 3y = 1$
$3x + 2y = 2$

13. $3x + 3y = 0$
$4x + 2y = 3$

14. $8x + 4y = 0$
$4x - 2y = 2$

15. $7x + 2y = 6$
$-14x - 4y = -12$

16. $x - 4y = 2$
$4x - 16y = 8$

17. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{3}$
$\frac{x}{2} + 2y = -7$

18. $\frac{x}{5} + y = \frac{6}{5}$
$\frac{x}{10} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$

19. $5x - 5y = 3$
$x - y = 12$

20. $2x - 3y = 7$
$-4x + 6y = 14$

Resuelva cada sistema por sustitución.

21. $4x + y = 6$
$y = 2x$

22. $2x - y = 6$
$y = 5x$

23. $3x - 4y = -22$
$-3x + y = 0$

24. $-3x + y = -5$
$x + 2y = 0$

25. $-x - 4y = -14$
$2x = y + 1$

26. $-3x - 5y = -17$
$4x = y - 8$

27. $5x - 4y = 9$
$3 - 2y = -x$

28. $6x - y = -9$
$4 + 7x = -y$

29. $x = 3y + 5$
$x = \frac{3}{2}y$

30. $x = 6y - 2$
$x = \frac{3}{4}y$

31. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3$
$y = 3x$

32. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 9$
$y = 5x$

33. Explique qué significan los enunciados siguientes: el conjunto solución del sistema

$2x + y + z = 3$
$3x - y + z = -2$ es $\{(-1, 2, 3)\}$.
$4x - y + 2z = 0$

34. Escriba un sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables, que tenga el conjunto solución $\{(3, 1, 2)\}$. Después resuelva el sistema. (*Una pista:* Comience con la solución y elabore tres ecuaciones que se vean satisfechas por ella. Hay muchos modos de hacer esto.)

Resuelva cada sistema de ecuaciones en tres variables.

35. $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 8 \\ 2x - 3y + 2z &= -16 \\ x + 4y - z &= 20 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} -3x + y - z &= -10 \\ -4x + 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 3y - 2z &= -5 \end{aligned}$

37. $\begin{aligned} 2x + 5y + 2z &= 0 \\ 4x - 7y - 3z &= 1 \\ 3x - 8y - 2z &= -6 \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} 5x - 2y + 3z &= -9 \\ 4x + 3y + 5z &= 4 \\ 2x + 4y - 2z &= 14 \end{aligned}$

39. $\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ 2x - y + z &= -5 \\ -x + 2y - 3z &= -4 \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ -x - y + 3z &= 2 \\ -6x + y + z &= -2 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \\ x + 2y + z &= 17 \\ 2y - z &= 7 \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 6 \\ x + 2y - z &= 8 \\ 2y + z &= 1 \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} 4x + 2y - 3z &= 6 \\ x - 4y + z &= -4 \\ -x + 2z &= 2 \end{aligned}$

44. $\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 4 \\ x - 6y + z &= -16 \\ -x + 3z &= 8 \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ 3y - 2z &= -4 \\ 3x - 5z &= -7 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} 4x - 8y &= -7 \\ 4y + z &= 7 \\ -8x + z &= -4 \end{aligned}$

Las aplicaciones de los ejercicios 47 a 80 requieren sistemas con dos variables para ser resueltos, mientras que los que les siguen necesitan sistemas de solución con tres variables.

Resuelva cada problema con dos incógnitas.

47. ***Récord de juegos ganados y perdidos*** Durante la temporada regular de las Ligas Mayores de Béisbol, los Cardenales de San Luis jugaron 17 partidos. Ganaron 28 juegos más de los que perdieron. ¿Cuál fue su récord de perdidos y ganados en ese año?

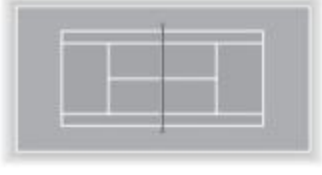
RESULTADOS EN 2000 DE LAS LMB, LIGA CENTRAL NACIONAL

Equipo	G	P
San Luis	—	—
Cincinnati	85	77
Milwaukee	73	89
Houston	72	90
Pittsburgh	69	93
Chicago	—	—

Fuente: www.mlb.com.

48. ***Récord de juegos ganados y perdidos*** Consulte el ejercicio 47. Durante la misma temporada de 162 juegos, los Chicago Cubs perdieron 32 juegos más de los que ganaron. ¿Cuál fue el récord de juegos ganados y perdidos por el equipo?

49. ***Dimensiones de una cancha de tenis*** Venus y Serena midieron una cancha de tenis y hallaron que era 42 pies más larga de lo que tenía de ancho, y que tenía un perímetro de 228 pies. ¿Cuáles eran el largo y ancho de la cancha de tenis?



50. ***Dimensiones de una cancha de baloncesto*** SAC y Kobe descubrieron que el ancho de su cancha de baloncesto tenía 44 pies menos que el largo. Si el perímetro era de 288 pies, ¿cuáles eran el largo y ancho de su cancha?



51. ***Compañías más grandes de Estados Unidos*** Las dos compañías más grandes de Estados Unidos en términos de ingreso en 2000, fueron ExxonMobil y General Motors. El de ExxonMobil fue $29,000 millones más que el de General Motors. El ingreso total de ambas compañías fue de $399,000 millones. ¿Cuál fue el ingreso de cada empresa? (*Fuente:* Bridge News, MarketGuide.com)

52. ***Principales socios comerciales de Estados Unidos*** Los dos socios comerciales principales de Estados Unidos durante los cuatro primeros meses de 2000 fueron Canadá y México. Las exportaciones e importaciones con México fueron $57,000 millones menos que aquellas con Canadá. Las exportaciones e importaciones totales que involucraron a estos dos países fueron de $211,000 millones. ¿De cuánto fueron las exportaciones estadounidenses con cada nación? (*Fuente:* Oficina de censos de Estados Unidos.)

53. ***Dimensiones de un rectángulo*** La longitud de un rectángulo es 7 pies más que el ancho. Si la longitud disminuyera 3 pies y el ancho aumentara 2 pies, el perímetro sería de 32 pies. Encuentre el largo y ancho del rectángulo original.

54. ***Dimensiones de un cuadrado y un triángulo*** El lado de un cuadrado es cuatro centímetros mayor que el lado de un triángulo equilátero. El perímetro del cuadrado es 24 centímetros mayor que el del triángulo. Calcule las longitudes del lado del cuadrado y del triángulo.

55. ***Costo de suministros para el arte*** Para un proyecto de arte, Cheryl Arabic compró ocho láminas de papel de colores y tres marcadores, por $6.50. Después necesitó dos láminas de papel de colores y dos marcadores. Estos artículos costaron $3.00. Obtenga el costo de un marcador y una lámina de papel de colores.

56. ***Precios de monitores de computadora*** Houston Community College decidió abastecer sus laboratorios de matemáticas con monitores de color. En una visita a una tienda de electrónica de la localidad se recabó la información siguiente: cuatro monitores CGA y seis VGA pueden comprarse por $4600, mientras que seis monitores CGA y cuatro VGA costarían $4400. ¿Cuáles son los precios de un solo monitor CGA y uno VGA?

Índice de costo por aficionado *El Índice de costo por aficionado (ICA) representa el costo de cuatro boletos de precio promedio, cuatro refrescos pequeños, dos cervezas chicas, cuatro hot dogs, estacionamiento para un auto, dos programas de juegos, y dos recuerdos de un evento deportivo. Por ejemplo, en 1997, el ICA para las Ligas Mayores de Béisbol fue de $105.63. Éste fue por mucho el menor para los cuatro deportes profesionales principales. (Fuente: Team Marketing Report, Chicago.) Para los ejercicios 57 y 58 utilice el concepto de ICA.*



57. Los precios del ICA para la Liga Nacional de Hockey y la Asociación Nacional de Baloncesto fueron por un total de $423.12. El ICA del hockey fue $16.36 más que el del baloncesto. ¿Cuáles fueron los ICA para estos deportes?

58. Los precios del ICA para las Ligas Mayores de Béisbol y la Liga Nacional de Futbol, fueron por un total de $311.03. El ICA del futbol fue $105.87 más que el del béisbol. ¿Cuáles fueron los ICA de estos deportes?

59. ***Precios en Wendy's*** Andrew McGinnis trabaja en Wendy's Old Fashioned Hamburguers. En una ocasión, durante la hora del almuerzo, vendió 15 hamburguesas sencillas y 10 dobles, por un total de $63.25. Otra vez, vendió 30 sencillas y 5 dobles, por un total de $78.65. ¿Cuánto costó cada tipo de hamburguesa? (*Fuente:* Wendy's Old Fashioned Hamburgers Menu).

60. ***Costos de viaje*** Tokio y Nueva York se encuentran entre las ciudades más caras del mundo para los viajeros de negocios. Los costos promedios por día para cada ciudad (que incluye habitación, comidas, lavandería y dos viajes en taxi), por dos días en Tokio y tres días en Nueva York, son de $2015. Pasar cuatro días en Tokio y dos en Nueva York cuesta $2490. ¿Cuál es el costo promedio por día para cada ciudad? (*Fuente:* ECA International.)

61. ***Producción de hilo y estambre*** Una fábrica usa dos máquinas principales, A y B, que a su vez producen dos artículos diferentes, hilo y estambre. Cada unidad de hilo requiere 1 hora en la máquina A y 2 horas en la B, mientras que cada unidad de estambre requiere 1 hora en la A y 1 hora en la B. La máquina A trabaja 8 horas por día, mientras que la B lo hace 14 horas diarias. ¿Cuántas unidades de hilo y cuántas de estambre debe hacer la fábrica por día, a fin de mantener sus máquinas funcionando a su capacidad?

62. ***Costo de la arcilla*** Para su clase de arte, Theodis compró 2 kilogramos de arcilla oscura y 3 kilogramos de clara, por lo que pagó $22. Después necesitó 1 kilogramo de arcilla oscura y 2 kilogramos de clara, que juntas costaron $13. ¿Cuál fue el costo por kilogramo de cada tipo de arcilla?

Fórmulas *En las aplicaciones de los ejercicios 67 a 76 se utilizan las fórmulas $p = br$ (porcentaje = base × tasa) e $I = prt$ (interés simple = capital × tasa × tiempo). Para preparar el empleo de estas fórmulas, responda las preguntas de los ejercicios 63 a 66.*

63. Si un recipiente para líquido contiene 60 onzas de solución, ¿cuál es el número de onzas de ácido puro si la solución contiene las concentraciones de ácido siguientes?
(a) 10% **(b)** 25% **(c)** 40% **(d)** 50%

64. Si se invierten $5000 en una cuenta que paga interés simple anual, ¿cuánto interés se percibirá durante el primer año con las tasas siguientes?
(a) 2% **(b)** 3% **(c)** 4% **(d)** 3.5%

65. Si una libra de pavo cuesta $.99, ¿cuánto cuestan x libras?

66. Si un boleto para la película *Chicago* cuesta $8 y se venden y boletos, ¿cuánto se obtiene por la venta?

67. ***Mezcla de alcohol*** ¿Cuántos galones de alcohol al 25% y cuántos de alcohol al 35% deben mezclarse para obtener 20 galones de alcohol al 32%?

Tipo de solución	Galones de solución	Cantidad de alcohol puro
.25	x	$.25x$
.35	y	$.35y$
.32	20	$.32(20)$

68. ***Mezcla ácida*** ¿Cuántos litros de cada producto, ácido al 15% y ácido al 33%, deben mezclarse para obtener 40 litros de ácido al 21%?

Tipo de solución	Litros de solución	Cantidad de ácido puro
.15	x	
.33	y	
.21	40	

69. ***Mezcla ácida*** Va a agregarse ácido puro a una solución de ácido al 10%, para obtener 27 litros de una solución ácida al 20%. ¿Cuáles son las cantidades que deben usarse de cada uno?

70. ***Mezcla anticongelante*** El radiador de un camión contiene 18 litros de fluido. ¿Cuánta mezcla de anticongelante puro debe agregarse a una mezcla que contiene 4% de anticongelante, a fin de llenar el radiador con una mezcla al 20%?

71. ***Mezcla de dulce*** Debbie Blanchard planea mezclar palanquetas de nuez, que vende a \$3.60 por libra, con trufas de chocolate, que ofrece a \$7.20 por libra, para obtener una mezcla que vende el día de San Valentín en \$4.95 por libra. ¿Qué cantidad de la palanqueta de \$3.60 y de trufas de \$7.20 debe usar para crear una mezcla de 80 libras?

	Número de libras	Precio por libra	Valor de dulce
Palanquetas	x	3.60	$3.60x$
Trufas	y	7.20	$7.20y$
Mezcla	80	4.95	4.95(80)

72. ***Mezcla de bebida de frutas*** Una popular bebida de frutas se fabrica mezclando el jugo de dos de ellas. Una mezcla con 50% de jugo va a mezclarse con otra con 30% de jugo, para obtener 200 litros de una mezcla con 45% de jugo. ¿Cuánto debe utilizarse de cada una?

Tipo de jugo	Número de litros	Cantidad de jugo puro
.50	x	$.50x$
.30	y	
.45		

73. ***Ventas de boletos*** Los boletos para una producción de Othello en la Universidad Nicholls State tiene un coste de \$2.50 admisión general y \$2.00 con credencial de estudiante. Si 184 pagaron para ver la actuación y se recolectaron \$406. ¿Cuántos boletos de cada tipo de admisión fueron vendidos?

74. ***Mezcla de dulces*** Un tendero planea mezclar dulces que se venden a \$1.20 por libra con dulces que se venden a \$2.40 por libra para obtener una mezcla que el planea vender en \$1.65 por libra. ¿Cuánto dulce de \$1.20 y de \$2.40 debe usar si quiere 80 libras de la mezcla.

75. ***Mezcla de inversiones*** Se invirtió un total de \$3000, una parte al 2% de interés simple y otra al 4%. Si el rendimiento total anual de las dos inversiones es de \$100, ¿cuánto se invierte con cada tasa?

Capital	Tasa	Interés
x	.02	$.02x$
y	.04	$.04y$
3000		100

76. ***Mezcla de inversiones*** Un inversionista debe invertir un total de \$15,000 en dos cuentas, una que paga el 4% de interés simple anual, y otra al 3%. Si desea ganar \$550 de interés anual, ¿cuánto debe invertir en cada tasa?

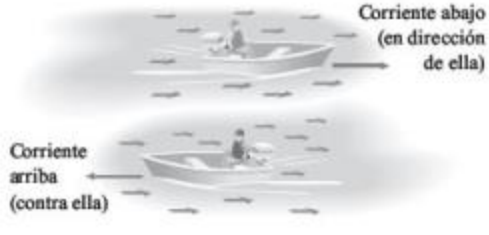
Capital	Tasa	Interés
x	.04	
y	.03	
15,000		

77. ***Velocidades de trenes*** Un tren de carga y otro expreso salen de dos ciudades separadas por 390 kilómetros, uno viaja en dirección del otro. El tren de carga va 30 kilómetros por hora más despacio que el expreso. Se cruzan 3 horas más tarde. ¿Cuáles son sus velocidades?

78. ***Velocidades de trenes*** Un tren recorre 150 kilómetros en el mismo tiempo que un avión recorre 400 kilómetros. Si la velocidad del avión es 20 kilómetros por hora menos que el triple de la velocidad del tren, calcule las velocidades de ambos.

79. ***Velocidades del viento y un trineo para la nieve*** Las condiciones climáticas en el planeta Hoth son duras, Luke Skywalker se traslada a velocidad máxima en su trineo hacia una base rebelde a 3600 millas. Viaja con viento estable en contra, y hace el recorrido en 2 horas. Descubre que el regreso, con la misma velocidad máxima pero ahora con viento a favor, le toma sólo 1.5 horas. Calcule la velocidad máxima del trineo de Luke, así como la velocidad del viento.

80. ***Velocidades de una lancha y la corriente*** Nguyen viaja en su bote de motor corriente arriba, a velocidad máxima, hacia su lugar de pesca favorito, a una distancia de 36 millas, en 2 horas. El regreso en dirección de la corriente, también a velocidad máxima, le toma sólo 1.5 horas. Encuentre la velocidad de la embarcación de Nguyen y la de la corriente.



Resuelva cada problema con tres incógnitas.

81. ***Afiliaciones de votantes*** En un muestreo al azar de 100 estadounidenses en edad de votar, se identificaron 10 más como Independientes que como Republicanos, seis menos se identificaron como Republicanos que como Demócratas. Si se supone que todos los integrantes de la muestra son Republicanos, Demócratas o Independientes, ¿cuántos de ellos se identifican con cada afiliación política? (*Fuente:* The Gallup Organization.)



82. ***Medallas olímpicas de oro*** En los Juegos Olímpicos de verano de 2000, celebrados en Sydney, Australia, Estados Unidos ganó 14 medallas de oro más que de plata. El número de medallas de bronce fue 17 menos que el doble de las de plata. Este país obtuvo un total de 97 medallas. ¿Cuántas medallas de cada tipo ganó? (*Fuente: The Gazette,* 2 de octubre de 2000.)



83. ***Dimensiones de un triángulo*** El perímetro de un triángulo mide 70 centímetros. El lado más largo es 4 centímetros menor que la suma de los otros dos lados. El doble de la distancia más corta es 9 centímetros menos que el lado más largo. Calcule la longitud de cada lado del triángulo.

84. ***Dimensiones de un triángulo*** El perímetro de un triángulo mide 56 pulgadas. El lado más largo mide 4 pulgadas menos que la suma de los otros dos lados. El triple del lado más corto es 4 pulgadas más que el lado más largo. Obtenga las longitudes de los tres lados.

85. ***Distribución a un mayorista*** Un fabricante de imitación de joyas para el carnaval provee a tres mayoristas, A, B y C. El total de un día de producción es de 320 estuches de imitación de joyas. Debe enviar al mayorista A el triple de estuches de los que envía al B, y debe mandar al mayorista C 160 estuches menos de los que proporciona al A y al B juntos. ¿Cuántos estuches debe enviar a cada mayorista, a fin de distribuirles la producción total del día?



86. ***Producción de ferretería*** Un proveedor de ferretería manufactura tres tipos de abrazaderas, de los tipos A, B y C. Las restricciones de la producción obligan a fabricar 10 unidades más del tipo C que el total de los otros tipos, y el doble de las de tipo B que las de tipo A. El taller debe producir un total de 490 unidades de abrazaderas por día. ¿Cuántas unidades de cada tipo pueden fabricarse a diario?

87. ***Precios de los boletos de los Globetrotters*** Los boletos para un espectáculo de la gira por el 75° Aniversario de los Harlem Globetrotters, cuestan $10, $18 o, por asientos VIP, $30. A la fecha, se han vendido cinco veces más boletos de $18 que de VIP. El número de boletos de $10 es igual al número de los de $18, más el doble del número de VIP. Las ventas de estos boletos son por un total de $9500. ¿Cuántos boletos de cada tipo se han vendido? (*Fuente:* www.ticketmaster.com)



88. ***Precios de boletos para conciertos*** Se dispone de tres clases de boletos para un concierto de Third Day: "cerca", "en medio" y "lejos". Los boletos "cerca" cuestan \$10 más que los de "en medio", mientras que los de "en medio" cuestan \$10 más que los de "lejos". El doble del costo por un boleto "cerca" es \$20 más que el triple del costo de un asiento "lejos". Calcule el precio de cada clase de boleto.

Respuesta al problema de la nota al margen, en la página 467: precio de una lima: 8, precio de una manzana: 5.



EXTENSIÓN

Uso de operaciones sobre las filas de una matriz, para resolver sistemas

El método de eliminación que se usó para resolver sistemas y que se estudió en la sección anterior, puede convertirse en un método sistemático con el empleo de matrices (el singular es *matriz*). Las matrices se utilizan para resolver sistemas lineales, y los métodos matriciales son aptos en particular para resolver en computadora grandes sistemas de ecuaciones con muchas incógnitas.

Para comenzar, considere un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, como el siguiente:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}$$

Este sistema se escribe en forma abreviada como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Un arreglo rectangular de números encerrados por corchetes se llama **matriz**. Cada número del arreglo es un **elemento** o **entrada**. La matriz anterior tiene tres filas (horizontales) y cuatro **columnas** (verticales) de entradas, y se denomina una matriz de 3×4 (se lee "3 por 4"). Las constantes de la última columna de la matriz se separan de los coeficientes de las variables por medio de una línea vertical, como se muestra en la **matriz aumentada** siguiente:

$$\text{Filas} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$$

Columnas

Las filas de esta matriz aumentada se tratan de la misma manera que las ecuaciones de un sistema, ya que en realidad la matriz es una forma corta del sistema. Se permite cualquier transformación de la matriz que resulte en un sistema equivalente. Las **operaciones en las filas de la matriz** que siguen son las que generan dichas transformaciones.



Al seleccionar C, D, E y F, el usuario de la calculadora TI-83 dispone de un medio para realizar operaciones con matrices.

Operaciones en las filas de una matriz

Para cualquier número real y cualquier matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, las operaciones siguientes producirán la matriz de un sistema equivalente:

1. **intercambiar dos filas de una matriz,**
2. **multiplicar los elementos de una fila por el mismo número k distinto de 0 y**
3. **sumar un múltiplo común de los elementos de una fila a los elementos correspondientes de otra fila.**

Si se sustituye la palabra *fila* por *ecuación*, se observa que las tres operaciones sobre las filas también se aplican a un sistema de ecuaciones, por lo que éste se resuelve al transformar su matriz correspondiente en la matriz de un sistema equivalente más sencillo. El objetivo es obtener una matriz con las formas siguientes:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array}\right] \quad \text{o} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

para sistemas con dos o tres ecuaciones, respectivamente. Observe que a la izquierda de la línea vertical hay varios números 1 en la diagonal que va de la parte superior izquierda a la inferior derecha, y 0 en todos los demás lugares de la matriz. Si estas matrices se rescriben como sistemas de ecuaciones, los valores de las variables resultan conocidos. El **método de Gauss-Jordan** es una forma sistemática de usar las operaciones sobre las filas de la matriz para cambiar la matriz aumentada de un sistema en otra forma donde aparezca la solución. Los ejemplos siguientes ilustrarán este método.

EJEMPLO 1 Resuelva el sistema lineal que sigue:

$$3x - 4y = 1$$
$$5x + 2y = 19$$

Las ecuaciones deben estar en la misma forma, con los términos variables en el mismo orden en el lado izquierdo, y el término constante en el derecho. Se comienza con la escritura de la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 19 \end{array}\right]$$

El objetivo es transformar la matriz aumentada en otra en la que los valores de las variables sean fáciles de ver. Es decir, cada columna de la matriz representa los coeficientes de una variable, la matriz aumentada debe transformarse de modo que tenga la forma siguiente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & j \end{array}\right]$$

(continúa)

para los números reales k y j. Una vez que la matriz aumentada tenga dicha forma, se rescribe como sistema lineal para obtener que:

$$x = k$$
$$y = j.$$

Las transformaciones necesarias se ejecutan como sigue. Es mejor trabajar por columnas, comenzando con el elemento que va a convertirse en 1. En la matriz aumentada,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 19 \end{array}\right],$$

hay un 3 en la primera fila, en la posición de la primera columna. Se usa la operación 2, multiplicar cada entrada de la primera fila por 1/3 para obtener un 1 en dicha posición (este paso se abrevia como (1/3)R1).

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4/3 & 1/3 \\ 5 & 2 & 19 \end{array}\right] \quad \frac{1}{3}\,R1$$

Se obtiene un 0 en la segunda fila, y la intersección con la primera columna, con la multiplicación de cada elemento de la primera fila por –5 y la suma del resultado al elemento correspondiente de la segunda fila, por medio de la operación 3.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 26/3 & 52/3 \end{array}\right] \quad -5R1 + R2$$

Se obtiene un 1 en la segunda fila, y la segunda columna, con la multiplicación de cada elemento de la segunda fila por 3/26, según la operación 2.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \frac{3}{26}\,R2$$

Por último, para obtener un 0 en la primera fila, y la segunda columna, se multiplica cada elemento de la segunda fila por 4/3 y se suma el resultado al elemento correspondiente de la primera fila.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \frac{4}{3}\,R2 + R1$$

Esta última matriz corresponde al sistema

$$x = 3$$
$$y = 2,$$

que tiene como conjunto solución $\{(3, 2)\}$. Esta solución se lee en forma directa de la tercera columna de la matriz final. ■

Un sistema lineal con tres ecuaciones se resuelve en forma similar. Las operaciones sobre las filas se emplean para obtener 1 sobre la diagonal que va de la parte superior izquierda a la inferior derecha, y 0 arriba y debajo de cada 1.

EJEMPLO 2 Emplee el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema que sigue:

$$\begin{aligned} x - y + 5z &= -6 \\ 3x + 3y - z &= 10 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Como el sistema se encuentra en la forma apropiada, se comienza por escribir la matriz aumentada del sistema lineal.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

La matriz final tiene que ser de la forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right],$$

donde m, n y p son números reales. Esta forma final de la matriz produce el sistema $x = m$, $y = n$ y $z = p$, de modo que el conjunto solución es $\{(m, n, p)\}$.

Ya hay un 1 en la primera fila, primera columna. Se obtiene un 0 en la segunda fila de la primera columna con la multiplicación de cada elemento de la primera fila por –3 y la suma del resultado al elemento correspondiente de la segunda fila, por medio de la operación 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 6 & -16 & 28 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right] \quad -3\,R1 + R2$$

Ahora, para convertir el último elemento de la primera columna en 0, se usa la operación 3 y se multiplica cada elemento de la primera fila por –1, y después se suma los resultados a los elementos correspondientes de la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 6 & -16 & 28 \\ 0 & 4 & -3 & 11 \end{array}\right] \quad -1R1 + R3$$

Se emplea el mismo procedimiento para transformar las columnas segunda y tercera. Para ambas, se ejecuta el paso de obtener 1 en la posición apropiada de cada columna. Esto se hace con la multiplicación de la fila por el recíproco del número en dicha posición.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -8/3 & 14/3 \\ 0 & 4 & -3 & 11 \end{array}\right] \quad \frac{1}{6}\,R2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & -8/3 & 14/3 \\ 0 & 4 & -3 & 11 \end{array}\right] \quad R2 + R1$$

(continúa)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & -8/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 23/3 & -23/3 \end{array}\right] \quad -4R2 + R3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & -8/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \frac{3}{23}R3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad -\frac{7}{3}R3 + R1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \frac{8}{3}R3 + R2$$

El sistema lineal asociado con esta matriz final es:

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = -1$$

y el conjunto solución es $\{(1, 2, -1)\}$. ■

EJERCICIOS DE EXTENSIÓN

Utilice el método de Gauss-Jordan para resolver cada sistema de ecuaciones.

1. $x + y = 5$
$x - y = -1$

2. $x + 2y = 5$
$2x + y = -2$

3. $x + y = -3$
$2x - 5y = -6$

4. $3x - 2y = 4$
$3x + y = -2$

5. $2x - 3y = 10$
$2x + 2y = 5$

6. $4x + y = 5$
$2x + y = 3$

7. $3x - 7y = 31$
$2x - 4y = 18$

8. $5x - y = 14$
$x + 8y = 11$

9. $x + y - z = 6$
$2x - y + z = -9$
$x - 2y + 3z = 1$

10. $x + 3y - 6z = 7$
$2x - y + 2z = 0$
$x + y + 2z = -1$

11. $2x - y + 3z = 0$
$x + 2y - z = 5$
$2y + z = 1$

12. $4x + 2y - 3z = 6$
$x - 4y + z = -4$
$-x + 2z = 2$

13. $-x + y = -1$
$y - z = 6$
$x + z = -1$

14. $x + y = 1$
$2x - z = 0$
$y + 2z = -2$

15. $2x - y + 4z = -1$
$-3x + 5y - z = 5$
$2x + 3y + 2z = 3$

16. $5x - 3y + 2z = -5$
$2x + 2y - z = 4$
$4x - y + z = -1$

8.8 Desigualdades lineales y programación lineal

Desigualdades lineales en dos variables En un capítulo anterior se graficaron sobre la recta numérica desigualdades lineales con una variable. En esta sección se grafican desigualdades lineales en dos variables en un sistema de coordenadas rectangulares.

Desigualdad lineal en dos variables

Una desigualdad escrita como

$$Ax + By < C \qquad \text{o bien como} \qquad Ax + By > C,$$

donde A, B y C son números reales y A y B no son 0, es una **desigualdad lineal en dos variables**. Los símbolos $\leq$ y $\geq$ reemplazan a $<$ y a $>$ en esta definición.

Una recta separa al plano en tres regiones: la recta misma y las dos mitades de plano a cada lado de ella. Hay que recordar que las gráficas de desigualdades lineales en una variable son intervalos sobre la recta numérica que a veces incluyen el punto del extremo. Las gráficas de las desigualdades lineales son *regiones* y el plano de número reales e incluyen una *línea de frontera*. La **línea de frontera** de la desigualdad $Ax + By < C$ o $Ax + By > C$, es la gráfica de la *ecuación* $Ax + By = C$. Para graficar una desigualdad lineal, se ejecutan los pasos siguientes:

Construcción de la gráfica de una desigualdad lineal

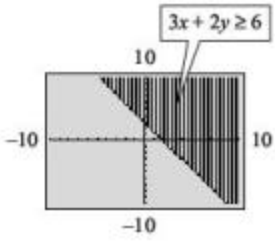
Paso 1: **Dibujar la frontera.** Se dibuja la gráfica de la línea recta que constituye la frontera. Se dibuja continua si la desigualdad involucra $\leq$ o $\geq$; se dibuja punteada si la desigualdad involucra $<$ o $>$.

Paso 2: **Elegir un punto de prueba.** Se selecciona como punto de prueba cualquiera que no esté sobre la recta.

Paso 3: **Sombrear la región apropiada.** Se sombrea la región que incluya al punto de prueba si éste satisface la desigualdad original; de otro modo, se sombrea la región al otro lado de la línea de frontera.

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de $3x + 2y \geq 6$.

Primero se traza la gráfica de la línea recta $3x + 2y = 6$. En la figura 43 se muestra la gráfica de esta recta, frontera de la gráfica de la desigualdad, en la página siguiente. La gráfica de la desigualdad $3x + 2y \geq 6$ incluye los puntos de la recta $3x + 2y = 6$, y ya sea los puntos *arriba* de la recta o *debajo* de ella. Para decidir cuáles, seleccione cualquier punto que no esté sobre la recta $3x + 2y = 6$ como punto



La calculadora TI-83 permite sombrear la región apropiada de una desigualdad. Compare con la figura 43.

de prueba. Con frecuencia, el origen, (0, 0), es una buena elección. Se sustituyen los valores del punto de prueba (0, 0) para x y y en la desigualdad $3x + 2y \geq 6$.

$$¿3(0) + 2(0) \geq 6?$$
$$0 \geq 6 \quad \text{Falso}$$

Como el resultado es falso, (0, 0) no satisface la desigualdad, por lo que el conjunto solución incluye todos los puntos al otro lado de la recta. En la figura 43 esta región aparece sombreada. ■

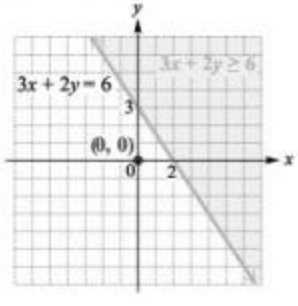


FIGURA 43

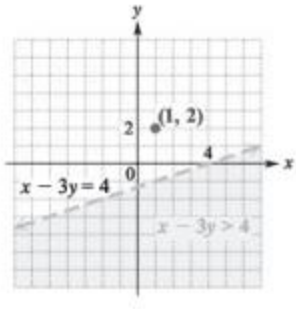
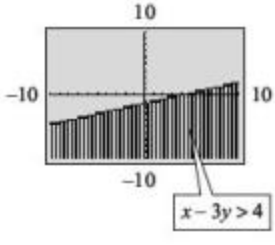


FIGURA 44



Compare con la figura 44. ¿Podría hacer que la calculadora graficara los puntos de la frontera si estuvieran incluidos en el conjunto solución de la desigualdad?

EJEMPLO 2 Grafique $x - 3y > 4$.

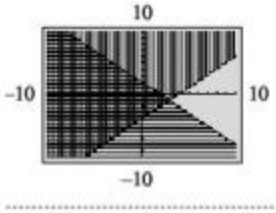
Primero se traza la gráfica de la recta de frontera $x - 3y = 4$. En la figura 44 se muestra la gráfica. Los puntos de la recta de frontera no pertenecen a la desigualdad $x - 3y > 4$ (ya que el símbolo de desigualdad es $>$ y no $\geq$). Por esta razón, la recta aparece punteada. Para decidir cuál lado de la recta es la gráfica del conjunto solución, se elige un punto que no esté sobre la recta, por ejemplo (1, 2). El conjunto solución, graficado en la figura 44, incluye sólo aquellos puntos de la región sombreada (no los que están sobre la recta).

$$¿1 - 3(2) > 4?$$
$$-5 > 4 \quad \text{Falso}$$

Debido a este resultado falso, el conjunto solución se encuentra del lado de la línea de frontera que *no* contiene el punto de prueba (1, 2). El conjunto solución cuya gráfica aparece en la figura 44, incluye sólo los puntos en la región sombreada (no los que se encuentran sobre la línea). ■

Sistemas de desigualdades

En la sección anterior se estudiaron los métodos de solución de sistemas de *ecuaciones*. Los sistemas de desigualdades con dos variables pueden resolverse con graficación. Un sistema de desigualdades lineales consiste en dos o más de ellas, y el conjunto solución de un sistema como ése consiste en todos los puntos que hacen que las desigualdades sean verdaderas al mismo tiempo.



La región con sombreado cruzado muestra la solución del sistema

$$y > x - 4$$
$$y < -x + 2.$$

Construcción de la gráfica de un sistema de desigualdades lineales

Paso 1: **Graficar cada desigualdad en el mismo sistema de coordenadas.** Grafique cada desigualdad en el sistema, con el método descrito en los ejemplos 1 y 2.

Paso 2: **Encontrar la intersección de las regiones de las soluciones.** Indique la intersección de las regiones de las soluciones de las desigualdades individuales. Éste es el conjunto solución del sistema.

EJEMPLO 3 Grafique el conjunto solución del sistema lineal siguiente:

$$3x + 2y \leq 6$$
$$2x - 5y \geq 10.$$

Se comienza trazando la gráfica de $3x + 2y \leq 6$. Para hacerlo, se traza la gráfica de $3x + 2y = 6$ como una recta continua. Como (0, 0) hace que la desigualdad se cumpla, se sombrea la región que contiene a (0, 0), como se muestra en la figura 45.

Ahora se traza la gráfica de $2x - 5y \geq 10$. La recta sólida de la frontera es la gráfica de $2x - 5y = 10$. Como (0, 0) hace que la desigualdad sea falsa, se sombrea la región que no contiene al punto (0, 0), como se aprecia en la figura 46.

El conjunto solución del sistema está dado por la intersección (traslape) de las regiones de las gráficas de las figuras 45 y 46. El conjunto solución es la región sombreada que se observa en la figura 47, e incluye porciones de las dos rectas de frontera.

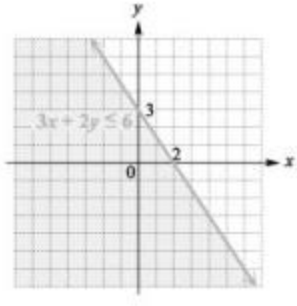


FIGURA 45

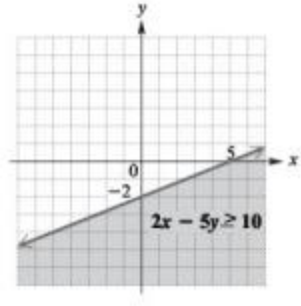


FIGURA 46

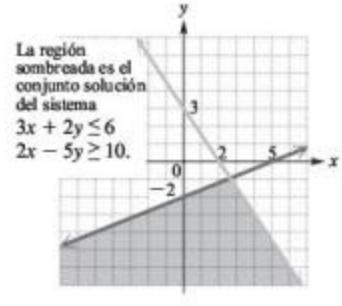


FIGURA 47

En la práctica, por lo general se hace al mismo tiempo todo el trabajo en un sistema de coordenadas. En el ejemplo que sigue, sólo se muestra una gráfica.

EJEMPLO 4 Trace la gráfica del conjunto solución del sistema lineal

$$2x + 3y \geq 12$$
$$7x + 4y \geq 28$$
$$y \leq 6$$
$$x \leq 5.$$

La gráfica se obtiene representando las cuatro desigualdades en un solo sistema de coordenadas, y se sombrea la región común a las cuatro, como se observa en la figura 48. Según se aprecia, las rectas de frontera son continuas.

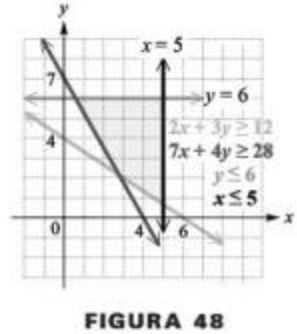


FIGURA 48



George B. Dantzig, de Stanford University, fue una de las personas clave en la **investigación de operaciones** (IO). Como ciencia administrativa, la IO no es una disciplina única, sino que toma de la matemática, la probabilidad, la estadística y la economía. El nombre dado a esta *multidisciplina* se remonta a sus orígenes en la Segunda Guerra Mundial, cuando las operaciones de naturaleza militar reclamaron el apoyo de numerosos científicos para que investigaran en sus campos aplicaciones al esfuerzo bélico y resolvieran problemas tácticos.

La investigación de operaciones es un enfoque para resolver problemas y tomar decisiones. En primer lugar, el problema tiene que ser planteado. Las cantidades involucradas se denotan como variables y los objetivos como funciones. Un aspecto importante de la IO es el empleo de **modelos**.

Programación lineal Una aplicación muy importante de las matemáticas en los negocios y en las ciencias sociales es la **programación lineal**. Se usa para encontrar un valor óptimo, por ejemplo el costo mínimo o la utilidad máxima. En 1947, George Dantzig desarrolló los procedimientos para resolver problemas de programación lineal, al trabajar en un asunto de asignación de suministros para la Fuerza Aérea de modo que se minimizara el costo total.

EJEMPLO 5 La Smartski Company fabrica dos productos, reproductores de cintas y amplificadores. Cada reproductor de cintas genera una utilidad de \$3, en tanto que cada amplificador produce una utilidad de \$7. La compañía debe fabricar al menos un reproductor de cintas por día para satisfacer a uno de sus clientes, pero no más de cinco debido a problemas de producción. Asimismo, el número de amplificadores que se produce no debe exceder seis por día. Como requerimiento adicional se tiene que el número de reproductores de cinta no puede sobrepasar al de amplificadores. ¿Qué cantidad de cada aparato debe manufacturar la compañía a fin de obtener la utilidad máxima?

Los enunciados del problema se traducen a símbolos, así:

x = número de reproductores de cinta por producir cada día.

y = número de amplificadores por fabricar a diario.

De acuerdo con el enunciado del problema, la empresa debe producir al menos un reproductor de cintas (uno o más), por tanto:

$$x \geq 1.$$

No debe producirse más de cinco reproductores de cintas:

$$x \leq 5.$$

En un día no puede fabricarse más de seis amplificadores:

$$y \leq 6.$$

El número de reproductores de cintas no debe exceder el de amplificadores:

$$x \leq y.$$

El número de reproductores de cinta y el de amplificadores no puede ser negativo:

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0.$$

Ahora se resume todas las limitantes, o **restricciones**, que tiene la producción:

$$x \geq 1, \quad x \leq 5, \quad y \leq 6, \quad x \leq y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

La utilidad máxima posible que la empresa puede obtener con estas restricciones, se calcula con el dibujo de la gráfica del conjunto solución del sistema. Vea la figura 49. Los únicos valores factibles de x y y son los que satisfacen a todas las restricciones. Estos valores corresponden a puntos que se encuentran en la frontera o en la región sombreada, denominada **región de soluciones factibles**.

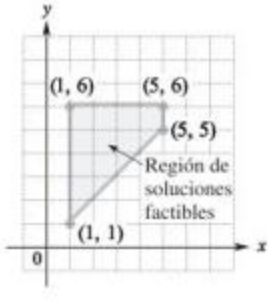


FIGURA 49

Como cada reproductor de cintas genera una utilidad de \$3, la utilidad diaria por producir x reproductores de cinta es de $3x$ dólares. Asimismo, la utilidad por producir y amplificadores será de $7y$ dólares por día. Así, la utilidad total diaria está dada por la **función objetivo siguiente**:

$$\text{Utilidad} = 3x + 7y.$$

Conviene hacer la tarea

George Dantzig, cuyo perfil biográfico se presenta en la página anterior, fue entrevistado en la edición de septiembre de 1986 de *College Mathematics Journal*. En la entrevista cuenta la historia de cómo obtuvo su grado sin escribir en realidad un trabajo de tesis.

Un día, Dantzig llegó tarde a una de sus clases y encontró dos problemas escritos en el pizarrón. Supuso que se trataba de la tarea, los resolvió y los llevó escritos a los pocos días, y se disculpó ante a su profesor por haber tardado tanto tiempo. Varias semanas después recibió una mañana temprano la visita de su maestro. Los problemas no eran ninguna tarea; en realidad se trataba de dos casos *sin resolver* en estadística. Tiempo después, cuando Dantzig pensaba acerca de un tema de tesis, su maestro le dijo que las dos soluciones servirían como trabajo final.

Ahora, el problema de Smartski Company se plantea del modo siguiente: encontrar valores de x y y en la región de soluciones factibles, como se muestra en la figura 49, que produzcan el valor máximo posible de $3x + 7y$. Puede demostrarse que cualquier valor óptimo (máximo o mínimo) siempre ocurrirá en un **vértice** (o **punto esquina**) de la región de soluciones factibles. Localice el punto (x, y) que brinda la utilidad máxima al probar las coordenadas de los vértices que se muestran en la figura 49, en la página anterior, y se enlistan a continuación. Calcule la utilidad que corresponde a cada par de coordenadas y escoja el que genere la utilidad máxima.

Punto	Utilidad $= 3x + 7y$	
$(1, 1)$	$3(1) + 7(1) = 10$	
$(1, 6)$	$3(1) + 7(6) = 45$	
$(5, 6)$	$3(5) + 7(6) = 57$	← Máxima
$(5, 5)$	$3(5) + 7(5) = 50$	

La utilidad máxima es de \$57 y se obtiene si cada día se producen cinco reproductores de cinta y seis amplificadores. ■

En general, para resolver un problema de programación lineal, se emplean los pasos siguientes:

Solución de un problema de programación lineal

Paso 1: Escribir todas las restricciones necesarias y la función objetivo.

Paso 2: Graficar la región de soluciones factibles.

Paso 3: Identificar todos los vértices.

Paso 4: Encontrar el valor de la función objetivo en cada vértice.

Paso 5: Ofrecer la solución que está dada por el vértice que produce el valor óptimo de la función objetivo.

8.8 EJERCICIOS

Relacione cada sistema de desigualdades con la gráfica correcta de las opciones A a D.

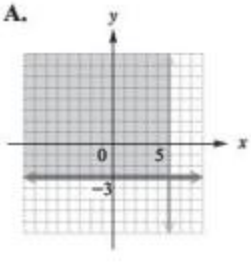
1. $x \geq 5$
$y \leq -3$

2. $x \leq 5$
$y \geq -3$

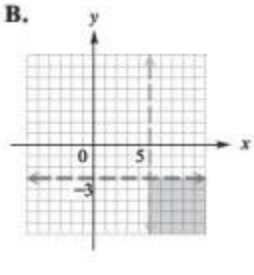
3. $x > 5$
$y < -3$

4. $x < 5$
$y > -3$

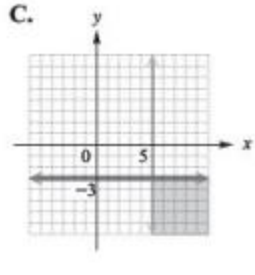
A.



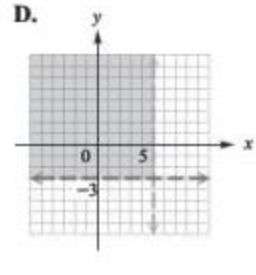
B.



C.



D.



Trace la gráfica de cada desigualdad lineal.

5. $x + y \leq 2$ **6.** $x - y \geq -3$ **7.** $4x - y \leq 5$ **8.** $3x + y \geq 6$

9. $x + 3y \geq -2$ **10.** $4x + 6y \leq -3$ **11.** $x + 2y \leq -5$ **12.** $2x - 4y \leq 3$

13. $4x - 3y < 12$ **14.** $5x + 3y > 15$ **15.** $y > -x$ **16.** $y < x$

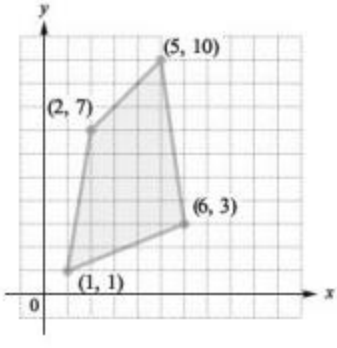
Trace la gráfica de cada sistema de desigualdades.

17. $x + y \leq 1$, $x \geq 0$ **18.** $3x - 4y \leq 6$, $y \geq 1$ **19.** $2x - y \geq 1$, $3x + 2y \geq 6$

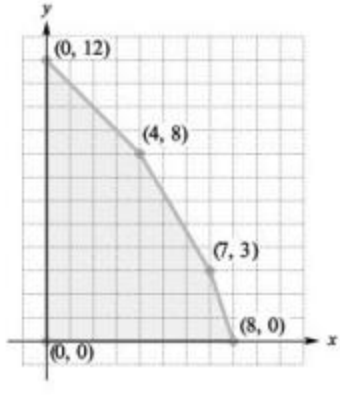
20. $x + 3y \geq 6$, $3x - 4y \leq 12$ **21.** $-x - y < 5$, $x - y \leq 3$ **22.** $6x - 4y < 8$, $x + 2y \geq 4$

Los ejercicios 23 y 24 muestran regiones de soluciones factibles. Encuentre los valores máximo y mínimo de las expresiones dadas.

23. $3x + 5y$



24. $40x + 75y$



Utilice métodos gráficos para hallar los valores de x *y de* y *que satisfacen las condiciones dadas (tal vez sea necesario resolver un sistema de ecuaciones a fin de encontrar los vértices). Encuentre el valor del máximo o el mínimo.*

25. Encuentre $x \geq 0$ y $y \geq 0$ de modo que

$$2x + 3y \leq 6$$
$$4x + y \leq 6$$

y $5x + 2y$ sea máxima.

26. Encuentre $x \geq 0$ y $y \geq 0$ de modo que

$$x + y \leq 10$$
$$5x + 2y \geq 20$$
$$2y \geq x$$

y $x + 3y$ sea mínima.

27. Encuentre $x \geq 2$ y $y \geq 5$ de modo que

$$3x - y \geq 12$$
$$x + y \leq 15$$

y $2x + y$ sea mínima.

28. Encuentre $x \geq 0$ y $y \geq 20$ de modo que

$$2x + 3y \leq 100$$
$$5x + 4y \leq 200$$

y $x + 3y$ sea máxima.

Resuelva cada problema de programación lineal.

29. ***Costos de envío de refrigeradores*** Un fabricante de refrigeradores debe enviar al menos 100 de ellos a sus dos almacenes de la costa oeste. Cada almacén puede albergar un máximo de 100 refrigeradores. El almacén A ya tiene 25 aparatos, mientras que en el B ya hay 20. Enviar un refrigerador al almacén A cuesta \$12, y al B cuesta \$10. ¿Cuántos refrigeradores debe enviarse a cada almacén a fin de minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?

30. ***Costos de suplementos alimenticios*** Bonnie se encuentra a dieta y requiere dos suplementos alimenticios, el I y el II. Se pueden obtener a partir de dos productos diferentes, el A y el B. Una ración del producto A proporciona 3 gramos del suplemento I, y 2 gramos del II. Una ración del producto B proporciona 2 gramos del suplemento I y 4 gramos del suplemento II. El médico, el doctor Dawson, le recomendó que incluyera al menos 15 gramos de cada suplemento en su dieta diaria. Si el producto A cuesta 25¢ por ración, y el B cuesta 40¢ por ración, ¿cómo puede Bonnie satisfacer sus requerimientos del modo más económico?

31. ***Costos de píldoras de vitaminas*** Elizabeth Owens toma píldoras de vitaminas. Cada día, debe consumir al menos 16 unidades de vitamina A, al menos cinco unidades de vitamina B_1, y al menos 20 unidades de vitamina C. Puede elegir entre píldoras rojas que cuestan 10¢ cada una y que contienen ocho unidades de A, una de B_1, y dos de C; o píldoras azules que cuestan 20¢ cada una y que contienen dos unidades de A, una de B_1 y siete de C. ¿Qué cantidad debe consumir de cada píldora a fin de minimizar su costo y satisfacer por completo sus requerimientos diarios?

32. ***Costos de remaches*** Un taller de maquinaria manufactura dos tipos de remaches. Cada uno puede ser fabricado en cualquiera de tres grupos de máquinas, pero el tiempo que requiere cada grupo difiere, como se muestra en la tabla que sigue:

		Grupos de máquinas		
		I	**II**	**III**
Remaches	**Tipo A**	.1 min	.1 min	.1 min
	Tipo B	.1 min	.4 min	.5 min

Se hace un programa de producción por día. En un día hay 240, 720 y 160 minutos disponibles de estas máquinas, respectivamente. Los remaches del tipo A se venden a 10¢ cada uno y los del tipo B a 12¢ cada uno. ¿Cuántos remaches de cada tipo debe manufacturarse a diario a fin de maximizar el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?

33. ***Costos de gasolina y gasóleo*** Un proceso de manufactura requiere que las refinerías de petróleo produzcan al menos 2 galones de gasolina por cada galón de gasóleo. Para satisfacer la demanda invernal de gasóleo, deben producirse al menos 3 millones de galones cada día. La demanda de gasolina no pasa de 6.4 millones de galones por día. Si el precio de la gasolina es de \$1.90 por galón, y el del gasóleo \$1.50 por galón, ¿qué volumen de cada producto debe producirse con objeto de que el ingreso sea el máximo?

34. ***Producción de pasteles y galletas*** Una pastelería hace pasteles y galletas. Cada lote de pasteles requiere dos horas en el horno y tres horas en decoración. Cada lote de galletas necesita una hora y media en el horno y dos tercios de hora en decoración. El horno está disponible durante no más de 15 horas al día, mientras que la sala de decoración se usa un máximo de 13 horas diarias. ¿Cuántos lotes de pasteles y galletas debe hacer la pastelería a fin de maximizar su utilidad, si las galletas generan una utilidad de \$20 por lote y los pasteles otra de \$30 por lote?

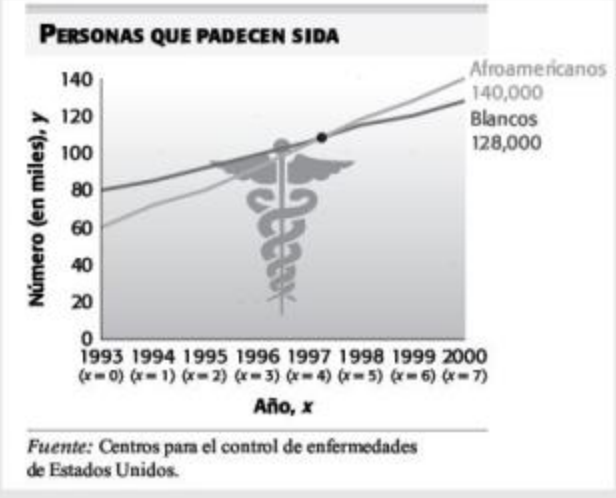
35. ***Ayuda a víctimas de un terremoto*** Hay víctimas de un terremoto en China que necesitan suministros médicos y agua embotellada. Cada equipo médico mide 1 pie cúbico y pesa 10 libras. Cada contenedor de agua también mide 1 pie cúbico y pesa 20 libras. El avión sólo puede transportar 80,000 libras con un volumen total de 6000 pies cúbicos. Cada equipo médico ayudaría a seis personas, mientras que cada contenedor serviría para 10. ¿Cuánto debe enviarse de cada suministro a fin de maximizar el número de personas que reciban ayuda?

36. ***Ayuda a víctimas de un terremoto*** Si cada equipo médico pudiera auxiliar a cuatro personas en lugar de 6, ¿cómo cambiarían los resultados del ejercicio 35?

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

Vivir con sida

En la gráfica se muestra una comparación entre el número de afroamericanos y blancos que padecen sida en Estados Unidos, de 1993 a 2000. Forme grupos de dos a tres estudiantes para que trabajen en lo siguiente.



Fuente: Centros para el control de enfermedades de Estados Unidos.

Temas para análisis

1. Las dos rectas se obtuvieron al unir los puntos de los datos que tienen la forma

(año, número de personas en miles).

Sea que $x = 0$ represente el año 1993, $x = 1$ al año 1994, y así sucesivamente, y aproxime el valor de y para cada año para los afroamericanos. Calcule los valores perdidos, y llene la tabla. Recuerde que y se expresa en miles.

Año	Número de afroamericanos con sida (y, en miles)
1993 ($x = 0$)	60
1994 ($x = 1$)	
1995 ($x = 2$)	
1996 ($x = 3$)	
1997 ($x = 4$)	
1998 ($x = 5$)	
1999 ($x = 6$)	
2000 ($x = 7$)	140

Ahora utilice dos puntos de los datos para encontrar una ecuación de la recta que describa estos datos.

2. Repita el procedimiento del inciso 1, aplicando los datos de la recta a los blancos que padecen sida.

Año	Número de blancos con Sida (y, en miles)
1993 ($x = 0$)	80
1994 ($x = 1$)	
1995 ($x = 2$)	
1996 ($x = 3$)	
1997 ($x = 4$)	
1998 ($x = 5$)	
1999 ($x = 6$)	
2000 ($x = 7$)	128

Ahora emplee dos puntos de datos cualesquiera para obtener una ecuación de la recta que describa estos datos.

3. Las dos ecuaciones de los incisos 1 y 2 forman un sistema de ecuaciones lineales en dos variables. Resuelva el sistema con cualquiera de los métodos que desee.

4. La coordenada x de la solución del sistema del inciso 3 debe corresponder al año en el que se intersecan las dos rectas. Observe la gráfica otra vez. ¿El valor de x que usted asignó es el que debería ser?

5. Analice por qué podrían variar los resultados de esta actividad para los distintos grupos que la lleven a cabo.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 8

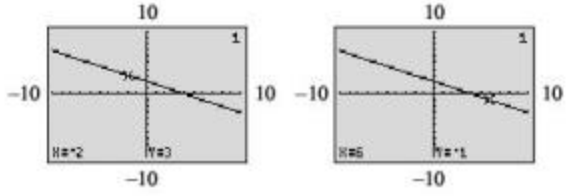
1. Encuentre la distancia entre los puntos (–3, 5) y (2, 1).

2. Obtenga una ecuación del círculo cuyo centro tiene las coordenadas (–1, 2), con radio de 3. Dibuje su gráfica.

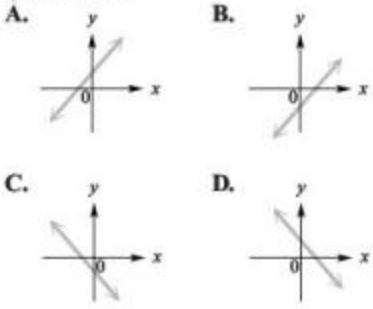
3. Encuentre las intersecciones de la gráfica de $3x - 2y = 8$ con los ejes x y y, y trace la gráfica de la ecuación.

4. Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos (6, 4) y (–1, 2).

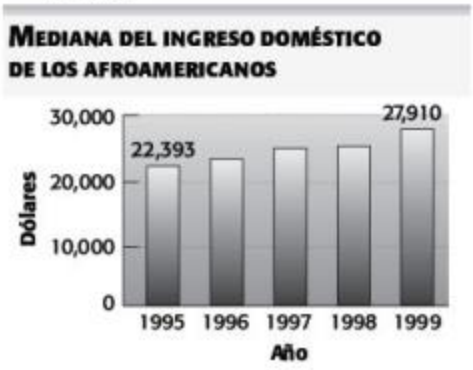
5. Obtenga la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que se describe.
   (a) pasa por (–1, 3), con pendiente de –2/5.
   (b) pasa por (−7, 2), y es perpendicular a $y = 2x$.
   (c) la recta que se muestra en las figuras siguientes (vea la parte inferior de las pantallas).



6. ¿Cuál de las rectas siguientes tiene pendiente positiva y coordenada y negativa en su intersección con el eje vertical?



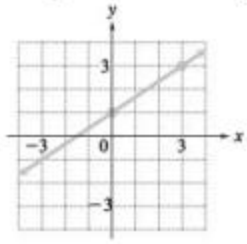
7. ***Ingreso de los afroamericanos*** En la parte superior de la columna siguiente se muestra la gráfica de barras de la mediana del ingreso doméstico de los afroamericanos.
   (a) Emplee la información que se da para los años de 1995 a 1999, si $x = 5$ representa a 1995, $x = 9$ a 1999, y y representa la mediana del ingreso, para escribir una ecuación que modele la mediana del ingreso doméstico.
   (b) Utilice la ecuación para aproximar la mediana del ingreso para 1997. ¿Cómo se compara el resultado que obtuvo el lector con el valor real, de $25,050?



Fuente: Oficina de censos de Estados Unidos.

8. ***Multas en una biblioteca*** A un usuario le cuesta $.05 por día el adeudo de un libro, más una tarifa global de $.50 por todos los libros prestados. Si x representa el número de días que se adeuda el libro, de modo que y represente la multa total por la tardanza del usuario. Escriba una ecuación con la forma $y = mx + b$ para esta situación. Después proporcione tres pares ordenados con valores de x de 1, 5 y 10, que satisfagan la ecuación.

9. Escriba la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que se muestra enseguida:



10. Para la función $f(x) = x^2 - 3x + 12$
    (a) proporcione su dominio; **(b)** encuentre $f(-2)$.

11. Proporcione el dominio de la función definida mediante

$$f(x) = \frac{2}{x - 3}.$$

12. ***Producción de calculadoras*** Si el costo de producir x unidades de calculadoras es $C(x) = 50x + 5000$ dólares, en tanto que el ingreso es $R(x) = 60x$ dólares, encuentre el número de unidades de calculadoras que deben producirse a fin de lograr el punto de equilibrio. ¿Cuál es el ingreso en el punto de equilibrio?

13. Trace la gráfica de la función cuadrática

$$f(x) = -(x + 3)^2 + 4.$$

Diga el eje, vértice, dominio y rango.

14. ***Dimensiones de un estacionamiento*** Miami-Dade Community College quiere construir un estacionamiento rectangular en un terreno limitado en uno de sus costados por una autopista. Tiene 320 pies de material para cercar los otros tres lados. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del estacionamiento si el área confinada ha de ser máxima?

15. Use una calculadora científica para hallar una aproximación de lo que se pide. Proporcione tantos dígitos como muestre la calculadora.
(a) $5.1^{4.7}$ **(b)** $e^{-1.85}$ **(c)** $\ln 23.56$

16. ¿Cuál de los siguientes enunciados es falso?
A. El dominio de la función $f(x) = \log_2 x$ es $(-\infty, \infty)$.
B. La gráfica de $F(x) = 3^x$ interseca al eje y.
C. La gráfica de $G(x) = \log_3 x$ interseca al eje x.
D. La expresión $\ln x$ representa el exponente al que debe elevarse e a fin de obtener x.

17. ***Inversiones*** Suponga que se invierte \$12,000 en una cuenta que paga el 4% de interés anual, y no se toca durante tres años. ¿Cuánto habrá en la cuenta si
(a) el interés se capitaliza en forma trimestral (cuatro veces por año)?
(b) el interés se capitaliza continuamente?

18. ***Degeneración del plutonio 241*** Suponga que la cantidad, expresada en gramos, de plutonio 241 presente en una muestra está determinada por la función definida por

$$A(t) = 2.00e^{-.053t},$$

donde t se mide en años. Encuentre la cantidad presente en la muestra después del número de años que se da.
(a) 4 **(b)** 10 **(c)** 20
(d) ¿Cuál era la cantidad inicial que había?

Resuelva cada sistema por eliminación, sustitución o una combinación de ambos métodos.

19.
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ 3x - 4y &= 20 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y + z &= 5. \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 6z &= 11 \\ x - y + 2z &= -2 \\ 4x + y - 2z &= 7 \end{aligned}$$

Resuelva cada problema con el empleo de un sistema de ecuaciones.

22. ***Éxitos de Julia Roberts*** Julia Roberts es una de las estrellas más grandes de Hollywood. En 2001, en el mes de julio, dos de sus películas nacionales triunfadoras, *Pretty Woman* y *Runaway Bride*, recabaron juntas \$330.7 millones. Si *Runnaway Bride* obtuvo \$26.1 millones menos que *Pretty Woman*, ¿cuánto reunió cada película? (*Fuente:* AC Nielsen EDI.)



23. ***Comisión de bienes raíces*** Keshon Grant vende bienes raíces. En tres ventas recientes obtuvo comisiones de 10, 6 y 5%. Sus comisiones totales por estas ventas fueron de \$17,000, y el valor de las propiedades que vendió fue de \$280,000. Si la venta del 5% fue la suma de las otras dos, ¿cuáles fueron los tres precios de venta?

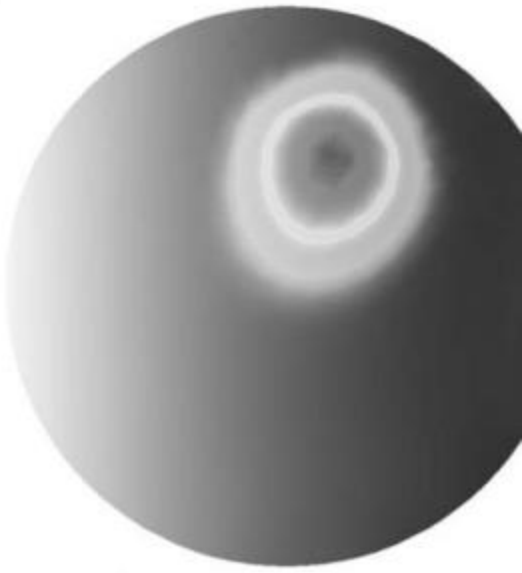
24. Trace la gráfica del conjunto solución del sistema de desigualdades siguiente:

$$x + y \le 6$$
$$2x - y \ge 3$$

25. ***Ventas de anillos*** La compañía Alessi diseña y vende dos tipos de anillos: el VIP y el SST. La empresa puede producir hasta 24 anillos cada día usando un total de 60 horas de mano de obra. Le toma 3 horas hacer un anillo VIP, y 2 hacer uno SST. ¿Cuántos anillos de cada tipo debe hacer a diario a fin de maximizar la utilidad, si la de un anillo VIP es de \$30 y la de uno SST es de \$40? ¿Cuál es la utilidad?

capítulo

9 Geometría



En muchas situaciones en las que la visualización mejora las posibilidades del diagnóstico ha comenzado a aplicarse una nueva técnica de obtención de imágenes llamada *tomografía por impedancia eléctrica* (TIE). Se usa para medir la cantidad de contaminantes en el suelo, para detectar los daños por corrosión en las aeronaves, y localizar depósitos de minerales valiosos en la tierra. En la medicina, existen investigaciones que se basan en esta técnica con el fin de mostrar imágenes de los órganos internos.

La TIE mide la distribución de la impedancia en una sección transversal del cuerpo. Esto es posible debido a que las resistividades eléctricas de los distintos tejidos del cuerpo varían mucho, desde los .65 ohms m del fluido cefalorraquídeo a los 150 ohms m de los huesos. Se colocan una serie de electrodos en una persona en un plano transversal para que registren los datos. Se conectan a una unidad de adquisición de datos que los envía a una PC. Con la aplicación de una serie de pequeñas corrientes al cuerpo, se realizan mediciones de la diferencia de potencial por medio de pares de electrodos que no conducen corriente. Como las corrientes eléctricas que se aplican al cuerpo siguen las trayectorias de impedancia mínima, su presencia depende de la distribución de la conductividad del sujeto. La reconstrucción de las imágenes es un proceso que involucra un problema no lineal. Por tanto, las imágenes se reconstruyen a partir de los datos con el empleo de varios métodos analíticos y geométricos.

La TIE difiere de los rayos X y de la TAC (tomografía axial computarizada). Aunque ambos proporcionan imágenes claras, la TIE muestra imágenes dinámicas de procesos fisiológicos como la respiración, conforme suceden. Los investigadores esperan utilizar la TIE en el futuro cercano para medir la actividad cardiaca y evitar el invasivo procedimiento de insertar un catéter en el corazón.

Fuentes: SIAM News, vol. 27, núm. 6, 1994.
www.geocities.com/CapeCanaveral/9710/smeit.html

9.1 Puntos, líneas, planos y ángulos

9.2 Curvas, polígonos y círculos

Extensión: Construcciones geométricas

9.3 Perímetro, área y circunferencia

9.4 La geometría de los triángulos: congruencia, similitud y el teorema de Pitágoras

9.5 Figuras en el espacio, volumen y área superficial

9.6 Geometría transformacional

9.7 Geometría no euclidiana, topología y redes

9.8 Caos y geometría fractal

Investigación en grupo: Generalización del concepto de suma de ángulos

Examen del capítulo 9

9.1 Puntos, líneas, planos y ángulos

La geometría de Euclides



Los *Elementos* de Euclides traducidos por Billingsley, aparecieron en 1570, y fue la primera traducción inglesa del texto —el libro de geometría de mayor influencia jamás escrito.

Es desafortunado que no exista ningún ejemplar de los *Elementos* que se remonte a la época de Euclides (alrededor de 300 a.C.), y las traducciones más modernas se basan en la obra que preparó Theon de Alejandría.

Aunque los *Elementos* fue sólo una de varias obras de Euclides, es, con mucho, la más importante. Ocupa el segundo lugar, solo atrás de la Biblia, como el libro más publicado de la historia.

No pase nadie que no sepa geometría.
—Palabras inscritas en la puerta de la Academia de Platón

Para los antiguos griegos, las matemáticas eran sobre todo geometría —una goemetría especialmente rígida en comparación con la actual. Los griegos estudiaron las propiedades de las figuras de forma y tamaño idénticos (figuras congruentes), así como de las que eran de forma idéntica pero no necesariamente de tamaño igual (figuras similares). Tomaron ideas sobre el área y el volumen de los egipcios y de los babilonios, y establecieron fórmulas generales. Los griegos fueron los primeros en insistir en que los enunciados de la geometría debían tener una prueba rigurosa.

El punto de vista de los griegos sobre la geometría (y otras ideas matemáticas), se resume en los *Elementos*, escrito por Euclides hacia el año 300 a.C. La influencia de este libro ha sido extraordinaria; hasta el día de hoy se ha estudiado virtualmente sin ningún cambio como texto de geometría y como *el* modelo de lógica deductiva.

Las ideas más fundamentales de la geometría son **punto**, **línea** y **plano**. En realidad no es posible definirlos con palabras. Euclides definió un punto como *lo que no tiene partes*, pero esta explicación es tan vaga que carece de significado. ¿Cree que podría concluir lo que es un punto a partir de esta definición? Pero lo que usted experimenta cuando dice *este punto del tiempo* o cuando afila un lápiz, se aproxima a lo que él trataba de decir. Aun cuando no intentemos definir *punto*, estaremos de acuerdo, en forma intuitiva, de que un punto no tiene magnitud ni tamaño.

Euclides definió una línea como *lo que no tiene largo ni ancho*. De nuevo, esta concepción es vaga. Sin embargo, con base en nuestra experiencia sabemos a qué se refería Euclides. Los dibujos que usamos para trazar líneas tienen la propiedad de carecer de espesor y de ancho, y se extienden en forma indefinida en dos direcciones.

¿Qué visualiza el lector al leer la definición que da Euclides de un plano? *Superfice que tiene las líneas rectas distribuidas uniformemente en él.* ¿Piensa en una superficie plana, como la cubierta de una mesa o la página de un libro? Es lo que Euclides pretendía.

La geometría de Euclides es un modelo de razonamiento deductivo. En este capítulo se presentará la geometría desde un punto de vista inductivo, se usarán como modelos para su estudio objetos y situaciones que se encuentran en el mundo que nos rodea.

Puntos, líneas y planos Hay ciertas convenciones y símbolos aceptados universalmente que se emplean para representar puntos, líneas, planos y ángulos. Por lo general, una letra mayúscula representa un punto. Una línea se denota con dos letras mayúsculas de modo que representan los puntos que quedan sobre ella, o con una sola letra (minúscula, en general) como ℓ_1. Los subíndices a veces se utilizan para diferenciar una línea de otra si se empleara una letra minúscula. Por ejemplo, ℓ_1 y ℓ_2 representarían dos líneas distintas. Un plano se denota con tres letras mayúsculas que representan puntos que se ubican sobre él, o con una letra griega del alfabeto, como α (alfa), β (beta) o γ (gama).

La figura 1 ilustra un plano representado ya sea como α o como *ADE*. En el plano está contenida la línea *DE* (o, en forma equivalente, la línea *ED*), que también se denota con ℓ en la figura.

La selección de cualquier punto de una línea la divide en tres partes: el punto en sí mismo y **dos mitades** de línea, una a cada lado del punto. Por ejemplo, en la figura 2, el punto *A* divide la línea en tres partes, *A* mismo y dos medias líneas. El pun-



A partir de tres puntos cualesquiera que no estén en línea recta, se forma un plano entre ellos. Ése es el porqué los trípodes de las cámara tienen tres patas —no importa cuán irregular sea la superficie en que se apoyen, los extremos de las tres patas determinan un plano. Por otro lado, una cámara que se apoyara en cuatro patas se tambalearía a menos que éstas se extendieran con cuidado solo la longitud necesaria.

to A pertenece a cualquier mitad de línea. Como lo sugiere la figura, cada mitad de línea se extiende indefinidamente en dirección opuesta de la otra.

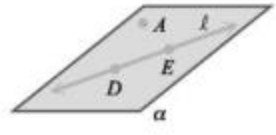


FIGURA 1

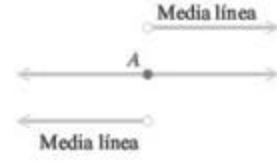


FIGURA 2

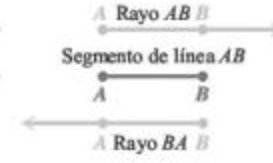
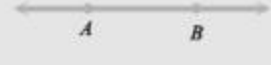


FIGURA 3

La inclusión de un punto inicial con una media línea genera un **rayo**. Un rayo se denota con dos letras, una para el punto inicial y otra para el otro punto contenido en la media línea. Por ejemplo, en la figura 3, el rayo AB tiene el punto inicial A y se extiende en la dirección de B. En cambio, el rayo BA tiene a B como su punto inicial y se extiende en dirección de A.

Un **segmento de línea** incluye ambos puntos extremos y se denota por medio de éstos. En la figura 3 se muestra el segmento de línea AB, que también puede designarse como segmento BA.

La tabla siguiente ilustra estas figuras junto con los símbolos que se emplean para representarlas.

Nombre	Figura	Símbolo
Línea AB o línea BA		$\overleftrightarrow{AB}$ o $\overleftrightarrow{BA}$
Mitad de línea AB		$\overrightarrow{AB}$
Mitad de línea BA		$\overrightarrow{BA}$
Rayo AB		$\overrightarrow{AB}$
Rayo BA		$\overrightarrow{BA}$
Segmento AB o segmento BA		$\overline{AB}$ o $\overline{BA}$

Para una línea, el símbolo sobre las dos letras tiene dos puntas de flecha, lo que indica que se extiende indefinidamente en ambas direcciones. Para mitades de línea y rayos, sólo se usa una punta de flecha, toda vez que se extiende en una sola dirección. Para una mitad de línea se emplea un círculo con fondo blanco que indica que el punto extremo no se incluye, en tanto que un círculo con fondo negro indica que sí está incluido. Como un segmento de línea incluye ambos puntos extremos y no se extiende en cualquier dirección, se utilizan círculos con fondo negro que señalan sus puntos extremos.

Las definiciones geométricas de *paralelas* e *intersección*, se aplican a dos o más líneas o planos (vea la figura 4 en la página siguiente). Las **líneas paralelas** están en el mismo plano y nunca se encuentran, no importa qué tan lejos se extiendan. Sin embargo, las **líneas que se intersecan** sí se encuentran. Si dos líneas diferentes se intersecan, lo hacen en un solo punto.

Se usa el símbolo $\parallel$ para denotar paralelismo. Si ℓ_1 y ℓ_2 son líneas paralelas, como en la figura 4, entonces esto se indica como $\ell_1 \parallel \ell_2$.

Los **planos paralelos** tampoco se encuentran nunca, no importa lo lejos que se extiendan. Si dos **planos distintos se intersecan** forman una línea recta, la única que tienen en común. Las **líneas desfasadas** no están en el mismo plano, y nunca se encuentran, no importa lo lejos que se extiendan.

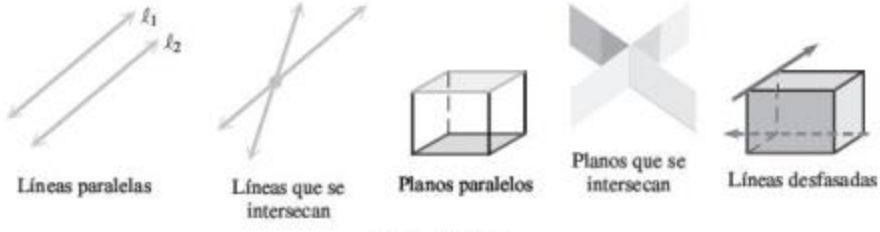


FIGURA 4

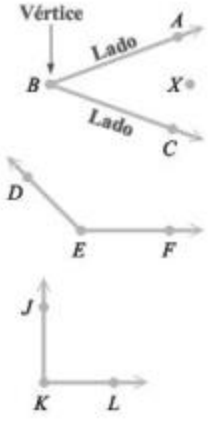


FIGURA 5

Ángulos Un **ángulo** es la unión de dos rayos que tienen un punto extremo en común, como se aprecia en la figura 5. Es importante recordar que el ángulo está formado por puntos sobre los rayos mismos, y no por otros. En la figura 5, el punto X *no* forma parte del ángulo (se dice que está en el *interior* del ángulo). Observe que en esta sección, *ángulo* es el primer término fundamental que en realidad se define, por medio de términos no definidos tales como *rayo* y *punto extremo*.

Los rayos que forman un ángulo se llaman sus **lados**. El punto extremo en común de los rayos es el **vértice** del ángulo. Hay dos maneras estándar de denominar a los ángulos. Si no hay lugar para la confusión, un ángulo se denomina con la letra que marca su vértice. Con este método, los ángulos de la figura 5 se denominan, respectivamente, ángulo B, ángulo E y ángulo K. Los ángulos también se indican con tres letras: la primera denota un punto en un lado del ángulo; la letra del medio es para el vértice; y la tercera es para un punto en el otro lado del ángulo. En este sistema, los ángulos de la figura se denotan como ángulo ABC, ángulo DEF y ángulo JKL.

El símbolo que representa un ángulo es $\measuredangle$. En lugar de escribir ángulo ABC, se escribiría "$\measuredangle ABC$".

Un ángulo se asocia con una cantidad de rotación. Por ejemplo, en la figura 6(a) se hace que $\overrightarrow{BA}$ coincida primero con $\overrightarrow{BC}$ —como si se tratara del mismo rayo. Después se rota $\overrightarrow{BA}$ (el punto final permanece fijo) en contra del sentido del movimiento de las manecillas del reloj para formar $\measuredangle ABC$.

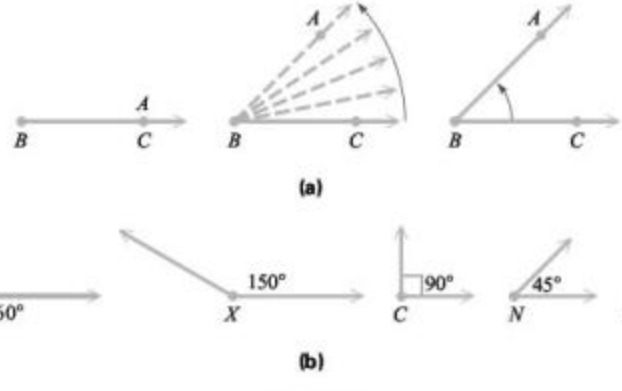


FIGURA 6

¿Por qué 360? El uso del número 360 se remonta a la cultura babilonia. Existen varias teorías acerca de por qué se eligió esta cifra como el número de grados que hay en una rotación completa alrededor de un círculo. Una de ellas afirma que se escogió 360 porque se aproxima al número de días en un año, y tiene la ventaja de ser divisible entre 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 y otros números más.

Los ángulos miden la cantidad de rotación, por medio de un sistema que se remonta a los babilonios de del siglo II a.C., aproximadamente. Los astrónomos babilonios eligieron el número 360 para representar la rotación de un rayo que regresa hacia sí mismo. Si se emplea 360 como la cantidad de rotación de un rayo de vuelta sobre sí mismo, **un grado**, que se escribe 1°, se define como $1/360$ de una rotación completa. La figura 6(b) muestra ángulos de varias medidas de grados.

Los ángulos se clasifican y denominan con relación a su medida en grados. Un ángulo que mida entre 0° y 90° se llama **ángulo agudo**. En la figura 6(b), los ángulos M y N son agudos. Un ángulo que mida 90° se llama **ángulo recto**. El ángulo C de la figura es un ángulo recto. El símbolo cuadrado ⌝ en el vértice denota un ángulo recto. Los ángulos que miden más de 90° pero menos de 180° se llaman **ángulos obtusos** (el ángulo X, por ejemplo). Un ángulo que mida 180° es **un ángulo llano**. Sus lados forman una línea recta.

En esta sección, se trabajará sobre todo con los ángulos cuyas medidas son menores o iguales de 180°. Los ángulos que miden más de 180° se estudian con más detalle en los cursos de trigonometría.



Los **ángulos** son clave para el estudio de la geodesia, que es la medición de las distancias sobre la superficie terrestre.

Para medir ángulos se emplea una herramienta llamada **transportador**. La figura 7 muestra un transportador que mide un ángulo. Para usar el transportador se coloca su orificio (o punto) en el vértice del ángulo, mientras que el otro lado debe extenderse hasta la medida en grados del ángulo. La figura indica un ángulo que mide 135°.

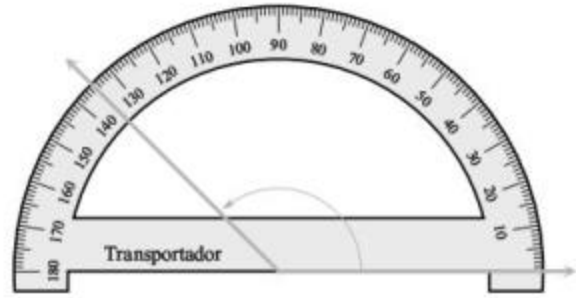


FIGURA 7

Si dos líneas se intersecan de modo que forman ángulos rectos, se llaman **líneas perpendiculares**. Nuestro sentido de *vertical* y *perpendicular* depende de dicha perpendicularidad.

En la figura 8, los lados de $\measuredangle NMP$ se han extendido para formar otro ángulo, $\measuredangle RMQ$. El par $\measuredangle NMP$ y $\measuredangle RMQ$ se denomina **ángulos verticales**. Al mismo tiempo, se ha formado otro par de ángulos verticales: $\measuredangle NMQ$ y $\measuredangle PMR$.

Una propiedad importante de los ángulos verticales es la siguiente.

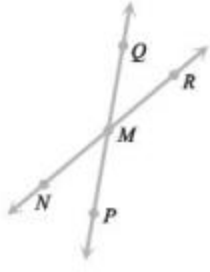


FIGURA 8

Propiedad de los ángulos verticales

Los ángulos verticales tienen medidas iguales.

Por ejemplo, $\measuredangle NMP$ y $\measuredangle RMQ$ de la figura 8 tienen medidas iguales. ¿Qué otro par de ángulos de la figura tiene medidas iguales?

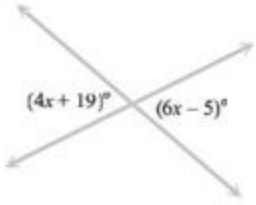


FIGURA 9

EJEMPLO 1 Consulte la figura apropiada para resolver cada problema.

(a) Encuentre la medida de cada ángulo de los que se señala en la figura 9.

Como los ángulos indicados son verticales, tienen la misma medida. Se hace $4x + 19$ igual a $6x - 5$ y se resuelve.

$$4x + 19 = 6x - 5$$

$$\begin{aligned} -4x + 4x + 19 &= -4x + 6x - 5 && \text{Sumar } -4x. \\ 19 &= 2x - 5 \\ 19 + 5 &= 2x - 5 + 5 && \text{Sumar 5.} \\ 24 &= 2x \\ 12 &= x && \text{Dividir entre 2.} \end{aligned}$$

Como $x = 12$, un ángulo mide $4(12) + 19 = 67$ grados. El otro tiene la misma medida, puesto que también $6(12) - 5 = 67$. Cada ángulo mide 67°.



FIGURA 10

(b) Encuentre la medida de cada ángulo señalado en la figura 10.

Las medidas de los ángulos que se indican deben sumar 180°, ya que juntos forman un ángulo llano. La ecuación por resolver es

$$\begin{aligned} (3x - 30) + 4x &= 180. \\ 7x - 30 &= 180 && \text{Agrupar términos semejantes.} \\ 7x - 30 + 30 &= 180 + 30 && \text{Sumar 30.} \\ 7x &= 210 \\ x &= 30 && \text{Dividir entre 7.} \end{aligned}$$

Para encontrar las medidas de los ángulos, se reemplaza a x por 30, en las dos expresiones.

$$3x - 30 = 3(30) - 30 = 90 - 30 = 60$$
$$4x = 4(30) = 120$$

Las medidas de los dos ángulos son 60° y 120°. ■

Si la suma de las medidas de dos ángulos agudos es 90°, se dice que los ángulos son **complementarios**, y cada uno se denomina *complemento* del otro. Por ejemplo, ángulos que midieran 40° y 50° son complementarios porque $40° + 50° = 90°$. Si dos ángulos tienen una suma de 180°, son **suplementarios**. El *suplemento* de un ángulo cuya medida es 40° es un ángulo cuya medida es 140°, porque $40° + 140° = 180°$. Si x representa los grados que mide un ángulo, $90 - x$ representa la medida de su complemento, y $180 - x$ es la medida de su suplemento.

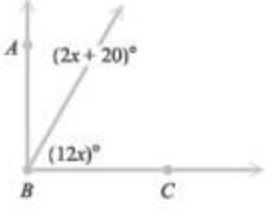


FIGURA 11

EJEMPLO 2 Encuentre las medidas de los ángulos de la figura 11, dado que $\measuredangle ABC$ es un ángulo recto.

La suma de las medidas de dos ángulos agudos es 90° (es decir, son complementarios), ya que forman un ángulo recto. Se suman su medidas para obtener el resultado de 90 y resolver la ecuación que resulta.

$$(2x + 20) + 12x = 90$$
$$14x + 20 = 90$$
$$14x = 70 \qquad \text{Restar 20.}$$
$$x = 5 \qquad \text{Dividir entre 14.}$$

El valor de x es 5. Por tanto, las medidas de los ángulos son

$$2x + 20 = 2(5) + 20 = 30 \text{ grados}$$

y

$$12x = 12(5) = 60 \text{ grados.}$$

■



Patrones de moiré Un conjunto de líneas paralelas con espaciamientos equidistantes interseca un conjunto idéntico, pero a un ángulo pequeño. El resultado es un patrón de moiré, así llamado por la tela de *seda moiré* (*mojada*). Es frecuente que se vean efectos similares al mirar a través del vidrio de una ventana con deformaciones. Los patrones moiré se relacionan con las funciones periódicas, que describen fenómenos regulares recurrentes (patrones de ondas tales como los latidos del corazón o los ciclos económicos). Los patrones moiré, entonces, se aplican al estudio del electromagnetismo, sonido y ondas en el agua, así como las estructuras cristalinas y fenómenos ondulatorios.

EJEMPLO 3 El suplemento de un ángulo mide 10° más que el triple de su complemento. Calcule la medida del ángulo.

Sea x = los grados que mide el ángulo.

Entonces $180 - x$ = medida en grados de su suplemento,

y $90 - x$ = medida en grados de su complemento.

Ahora se usan las palabras del problema para escribir la ecuación.

$$\underbrace{\text{El suplemento}}_{180 - x} \quad \underbrace{\text{mide}}_{=} \quad \underbrace{\text{10 más que}}_{10 +} \quad \underbrace{\text{el triple de su complemento.}}_{3(90 - x)}$$

$$180 - x = 10 + 270 - 3x \qquad \text{Propiedad distributiva}$$
$$180 - x = 280 - 3x$$
$$2x = 100 \qquad \text{Sumar } 3x\text{; restar } 180.$$
$$x = 50 \qquad \text{Dividir entre 2.}$$

El ángulo mide 50°. Como su suplemento (130°) es 10° mayor que el triple de su complemento (40°), es decir, se cumple que $130 = 10 + 3(40)$, la respuesta coincide. ■

Las **líneas paralelas** son aquellas que están en el mismo plano y no se intersecan. La figura 12 muestra las líneas paralelas m y n. Si una línea q interseca dos líneas paralelas, a q se le denomina **transversal**. En la figura 12, la transversal que interseca las líneas paralelas forma ocho ángulos, que se indican con números. Los ángulos 1 a 8 de la figura poseen algunas propiedades especiales relacionadas con los grados que miden, como se muestra en la tabla siguiente.

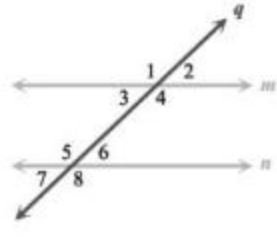
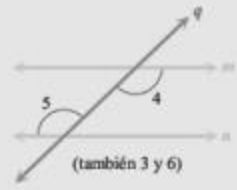
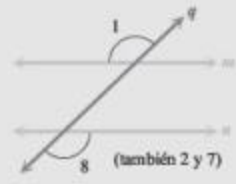
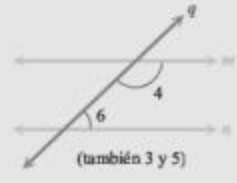
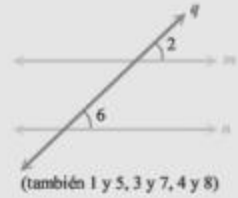


FIGURA 12

Nombre	Figura	Regla
Ángulos interiores alternos		Las medidas de los ángulos son iguales
Ángulos exteriores alternos		Las medidas de los ángulos son iguales
Ángulos interiores en el mismo lado de la transversal		La suma de las medidas de los ángulos es 180°
Ángulos correspondientes		Las medidas de los ángulos son iguales

Lo inverso de los enunciados anteriores también es verdadero. Es decir, si dos ángulos interiores alternos son iguales, entonces las líneas son paralelas, con resultados similares válidos para ángulos exteriores alternos, interiores en el mismo lado de la transversal, y correspondientes.

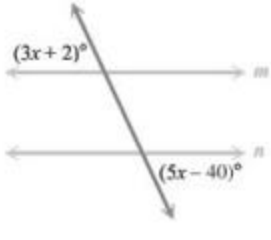


FIGURA 13

EJEMPLO 4 Encuentre la medida de cada ángulo de los que se indica en la figura 13, dado que las líneas m y n son paralelas.

Los ángulos señalados son exteriores alternos, que son iguales. Esto da como resultado que:

$$3x + 2 = 5x - 40$$

$$42 = 2x \qquad \text{Se resta } 3x \text{ y se suma } 40.$$

$$21 = x. \qquad \text{Dividir entre 2.}$$

Un ángulo tiene una medida de $3x + 2 = 3 \cdot 21 + 2 = 65$ grados, y el otro tiene una medida de $5x - 40 = 5 \cdot 21 - 40 = 65$ grados. ■

9.1 EJERCICIOS

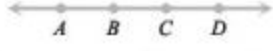
Llene los espacios en blanco con la respuesta correcta.

1. La suma de las medidas de dos ángulos complementarios es ___ grados.
2. La suma de las medidas de dos ángulos suplementarios es ___ grados.
3. Las medidas de dos ángulos verticales son _____ _____. (iguales/diferentes)
4. Las medidas de _____ ángulos rectos suman lo que mide un ángulo rectilíneo.

Decida si cada uno de los enunciados siguientes es verdadero o falso.

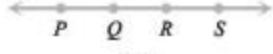
5. Un segmento de línea tiene dos puntos extremos.
6. Un rayo tiene un extremo.
7. Si A y B son puntos diferentes de una línea, entonces el rayo AB y el rayo BA representan al mismo conjunto de puntos.
8. Si dos líneas se intersecan, se encuentran en el mismo plano.
9. Si dos líneas son paralelas, se encuentran en el mismo plano.
10. Si dos líneas no se intersecan, deben ser paralelas.
11. El segmento AB y el segmento BA representan al mismo conjunto de puntos.
12. No existe un ángulo que sea su propio complemento.
13. No hay un ángulo que sea su propio suplemento.
14. El origen del uso de los grados como unidad de medida de los ángulos se remonta a los egipcios.

Los ejercicios 15 a 24 mencionan partes de la línea que se muestra. Para cada ejercicio, **(a)** *proporcione el símbolo que represente la porción de la línea mencionada, y* **(b)** *dibuje una figura que muestre sólo la parte que se cita, y que incluya todos los puntos señalados.*



15. Segmento de línea AB
16. Rayo BC
17. Rayo CB
18. Segmento de línea AD
19. Media línea BC
20. Media línea AD
21. Rayo BA
22. Rayo DA
23. Segmento de línea CA
24. Segmento de línea DA

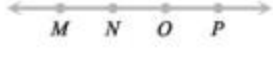
Relacione el símbolo que aparece en los ejercicios 25 a 32, con el símbolo en los incisos A-H, que haga referencia al mismo conjunto de puntos, con base en la figura dada.



25. $\overleftrightarrow{PQ}$
26. $\overleftrightarrow{QR}$
27. $\overleftrightarrow{QR}$
28. $\overleftrightarrow{PO}$
29. $\overleftrightarrow{RP}$
30. $\overleftrightarrow{SQ}$
31. $\overleftrightarrow{PS}$
32. $\overleftrightarrow{PS}$

A. $\overleftrightarrow{QS}$
B. $\overleftrightarrow{RQ}$
C. $\overleftrightarrow{SR}$
D. $\overleftrightarrow{QS}$
E. $\overleftrightarrow{SP}$
F. $\overleftrightarrow{QP}$
G. $\overleftrightarrow{RS}$
H. Ninguno de los anteriores

Las líneas, rayos, medias líneas y segmentos deben considerarse conjuntos de puntos. La intersección (que se simboliza con $\cap$) de dos conjuntos está compuesta por todos los elementos en común de ambos conjuntos, en tanto que la unión (cuyo símbolo es $\cup$) de dos conjuntos se compone de todos los elementos que están en al menos uno de ellos. Con base en la figura siguiente, especifique en forma sencilla cada uno de los conjuntos que se da en los ejercicios 33 a 40.



33. $\overleftrightarrow{MN} \cup \overleftrightarrow{NO}$
34. $\overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{NO}$
35. $\overleftrightarrow{MO} \cap \overleftrightarrow{OM}$
36. $\overleftrightarrow{MO} \cup \overleftrightarrow{OM}$
37. $\overleftrightarrow{OP} \cap O$
38. $\overleftrightarrow{OP} \cup O$
39. $\overleftrightarrow{NP} \cap \overleftrightarrow{OP}$
40. $\overleftrightarrow{NP} \cup \overleftrightarrow{OP}$

Diga cuál es la medida del complemento de cada ángulo.

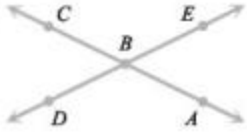
41. $28°$
42. $32°$
43. $89°$
44. $45°$
45. $x°$
46. $(90 - x)°$

Proporcione la medida del suplemento de cada ángulo.

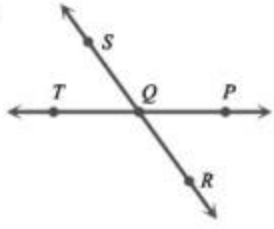
47. 132° **48.** 105° **49.** 26° **50.** 90° **51.** $y°$ **52.** $(180-y)°$

Mencione todos los pares de ángulos verticales que hay en cada figura.

53.



54.

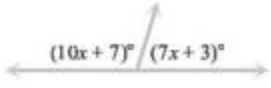


55. En el ejercicio 53, si $\measuredangle ABE$ mide 52°, calcule las medidas de los ángulos.
(a) $\measuredangle CBD$ **(b)** $\measuredangle CBE$

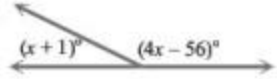
56. En el ejercicio 54, si $\measuredangle SQP$ mide 126°, calcule las medidas de los ángulos.
(a) $\measuredangle TQR$ **(b)** $\measuredangle PQR$

Calcule la medida de cada uno de los ángulos que se indica.

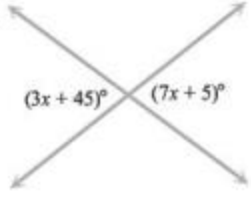
57.



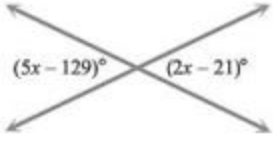
58.



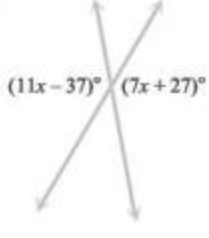
59.



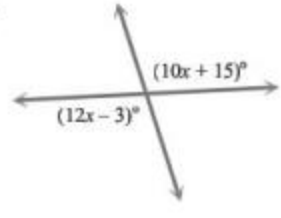
60.



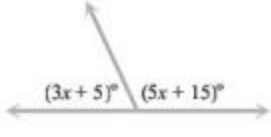
61.



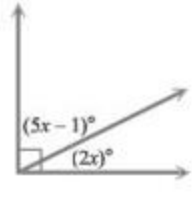
62.



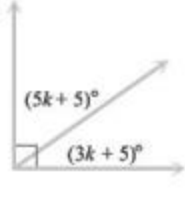
63.



64.

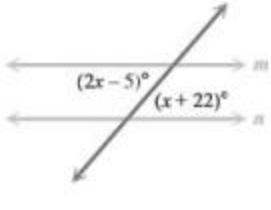


65.

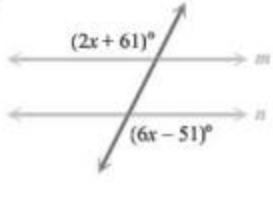


En los ejercicios 66 a 69, suponga que las líneas m y n son paralelas, y encuentre el valor de cada uno de los ángulos que se indica.

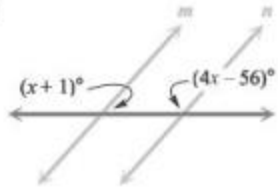
66.



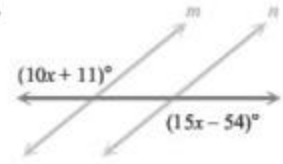
67.



68.



69.



Ángulos complementarios y suplementarios *Resuelva cada problema de los ejercicios 70 a 73.*

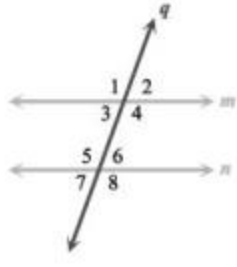
70. El suplemento de un ángulo mide 25° más que el doble de su complemento. Calcule la medida del ángulo.

71. El complemento de un ángulo mide 10° menos que la quinta parte de su suplemento. Obtenga la medida del ángulo.

72. El suplemento de un ángulo sumado al complemento de éste da 210°. ¿Cuál es la medida del ángulo?

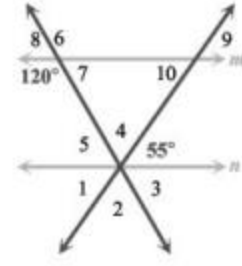
73. La mitad del suplemento de un ángulo es 12° menos que el doble del complemento de este. Encuentre la medida del ángulo.

74. El dibujo muestra las líneas paralelas m y n cortadas por una transversal q. Con el empleo de la figura, complete los pasos para demostrar que los ángulos exteriores alternos tienen la misma medida.

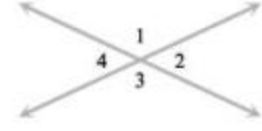


(a) La medida de $\angle 2$ = medida de $\angle$ _____, ya que son ángulos verticales.
(b) La medida de $\angle 3$ = medida de $\angle$ _____, puesto que son ángulos interiores alternos.
(c) La medida de $\angle 6$ = medida de $\angle$ _____, toda vez que son ángulos verticales.
(d) De acuerdo con los resultados de los incisos (a), (b) y (c), la medida $\angle 2$ debe ser igual a la medida del $\angle$ _____, lo que demuestra que los ángulos _____ alternos tienen medidas iguales.

75. Utilice el dibujo para calcular la medida de cada ángulo indicado por un número. Suponga que $m \parallel n$.



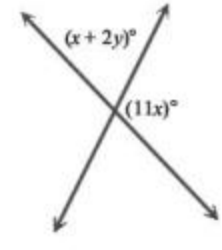
76. Complete estos pasos para probar que los ángulos verticales tienen medidas iguales.



En este ejercicio m($\angle$ _____) significa *la medida del ángulo* _____. Emplee la figura.
(a) m($\angle 1$) + m($\angle 2$) = _____°
(b) m($\angle 2$) + m($\angle 3$) = _____°
(c) Reste la ecuación del inciso (b) de la ecuación del inciso (a) para obtener [m($\angle 1$) + m($\angle 2$)] − [m($\angle 2$) + m($\angle 3$)] = _____° − _____°.
(d) m($\angle 1$) + m($\angle 2$) − m($\angle 2$) − m($\angle 3$) = _____°
(e) m($\angle 1$) − m($\angle 3$) = _____°
(f) m($\angle 1$) = m($\angle$ _____)

77. Utilice el enfoque del ejercicio 74 para demostrar que los ángulos interiores en el mismo lado de una transversal son suplementarios.

78. Encuentre los valores de x y y de la figura, dado que $x + y = 40$.



9.2 Curvas, polígonos y círculos

Curvas El término fundamental y no definido de *curva* se emplea para describir figuras en el plano. (Vea los ejemplos de la figura 14.)



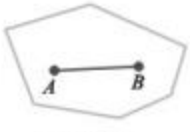
Simple; cerrada | Simple; abierta | No simple; cerrada | No simple; abierta

FIGURA 14

Curva simple; curva cerrada

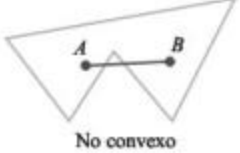
Una **curva simple** puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel, y sin pasar dos veces por un mismo punto.

Una **curva cerrada** tiene los mismos extremos de inicio y final, y también se dibuja sin levantar el lápiz del papel.



Convexo

(a)



No convexo

(b)

FIGURA 15

Se dice que una figura es convexa si, para dos puntos cualesquiera A y B dentro de la figura, el segmento de línea AB (es decir, $\overleftrightarrow{AB}$) siempre está por completo dentro de la figura. La figura 15(a) muestra una figura convexa, mientras que en su parte (b) se aprecia otra que no es convexa.

Entre los tipos de curvas más comunes en matemáticas se encuentran aquellas que son tanto simples como cerradas, y las más importantes quizá sean los *polígonos*. Un **polígono** es una curva simple cerrada constituida sólo por segmentos de líneas rectas. Los segmentos de línea se denominan *lados*, y los puntos en los que se tocan se llaman *vértices*. Los polígonos se clasifican de acuerdo con el número de segmentos de línea que tienen como lados. La tabla que se presenta en el margen proporciona sus nombres especiales. En general, si un polígono tiene n lados, y no se especifica un valor particular para n, se denomina n-ágono.

En la figura 16 se muestran algunos ejemplos de polígonos. Un polígono puede ser convexo o no serlo. Los polígonos con todos sus lados y ángulos iguales son **polígonos regulares**.



Convexa | No convexa

Los polígonos son curvas simples cerradas constituidas por segmentos de líneas rectas.



Los polígonos regulares tienen lados y ángulos iguales.

FIGURA 16

Clasificación de los polígonos de acuerdo con el número de lados	
Número de lados	**Nombre**
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Nonágono
10	Decágono

Triángulos y cuadriláteros Dos de los polígonos más comunes son los triángulos y cuadriláteros. Los triángulos se clasifican por medio de las medidas de sus ángulos, así como por su número de lados iguales, como se muestra en el recuadro siguiente (observe que se usan marcas para señalar cómo están relacionados los lados).



Tangramas El rompecabezas que se muestra en la parte superior proviene de China, donde ha sido un entretenimiento popular durante siglos. La figura de la izquierda es un tangrama. Cualquiera de ellos está compuesto por el mismo conjunto de siete tans (las piezas que forman el cuadrado se muestran a la derecha).

Los matemáticos han descrito varias propiedades de los tangramas. Si bien todo tan es convexo, sólo es posible obtener 13 tangramas convexos. Todos los demás, como la figura de la izquierda, no son convexos.

Tipos de triángulos

Todos los ángulos agudos	*Un ángulo recto*	*Un ángulo obtuso*
Ángulos 		
Triángulo acutángulo	Triángulo rectángulo	Triángulo obtuso
Todos los lados iguales	***Dos lados iguales***	***Ningún lado igual***
Lados 		
Triángulo equilátero	Triángulo isóceles	Triángulo escaleno

Los cuadriláteros se clasifican de acuerdo con sus lados y ángulos. Se advierte que una propiedad importante de los cuadriláteros es si uno o más pares de lados son paralelos.

Tipos de cuadriláteros

Figura muestra


Trapezoide

Un **trapecio** es un cuadrilátero con un par de lados paralelos.


Paralelogramo

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.


Rectángulo

Un **rectángulo** es un paralelogramo con un ángulo recto (y en consecuencia, cuatro ángulos rectos).


Cuadrado

Un **cuadrado** es un rectángulo cuyos lados tienen la misma longitud.


Rombo

Un **rombo** es un paralelogramo cuyos lados son de la misma longitud.

Una propiedad importante de los triángulos, que los geómetras griegos demostraron primero, implica la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo.

Suma de los ángulos de un triángulo

La suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es 180°.

Aunque en realidad la siguiente no es una demostración verdadera, sí es un argumento convincente alternativo sobre la veracidad de este enunciado, y consiste en emplear un triángulo de cualquier tamaño recortado de un trozo de papel. Recorte cada esquina del triángulo, como se observa en la figura 17(a). Debe ser posible reacomodar las piezas de modo que los tres ángulos formen un ángulo recto, como se aprecia en la figura 17(b).



(a) (b)

FIGURA 17

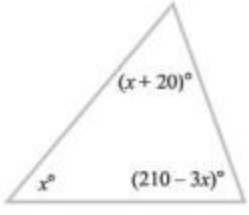


FIGURA 18

EJEMPLO 1 Calcule la medida de cada ángulo del triángulo de la figura 18.

De acuerdo con la relación de la suma de ángulos, las medidas de los tres ángulos deben sumar 180°. Escriba la ecuación que indique lo anterior, y luego resuélvala.

$$\begin{aligned} x + (x + 20) + (210 - 3x) &= 180 \\ -x + 230 &= 180 && \text{Agrupar términos semejantes.} \\ -x &= -50 && \text{Restar 230.} \\ x &= 50 && \text{Dividir entre } -1. \end{aligned}$$

Un ángulo mide 50°, otro mide $x + 20 = 50 + 20 = 70°$, y el tercero mide $210 - 3x = 210 - 3(50) = 60°$. Como $50° + 70° + 60° = 180°$, la respuesta satisface la relación de la suma de los ángulos. ■

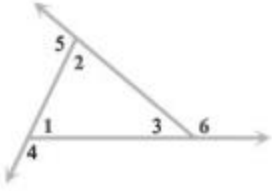


FIGURA 19

En el triángulo que se aprecia en la figura 19, los ángulos 1, 2 y 3 se llaman **ángulos interiores**, mientras que los señalados con los números 4, 5 y 6 se llaman **ángulos exteriores** del triángulo. Ya que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es 180°, y que un ángulo recto también mide 180°, se deduce la propiedad siguiente.

Medida de un ángulo exterior

La medida de un ángulo exterior de un triángulo, es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores opuestos.

En la figura 19, la medida del ángulo 6 es igual a la suma de las medidas de los ángulos 1 y 2. Es posible enunciar otras dos propiedades. ¿Cuáles son?

EJEMPLO 2 Calcule las medidas de los ángulos interiores A, B y C del triángulo de la figura 20 de la página siguiente, y la medida del ángulo exterior BCD.

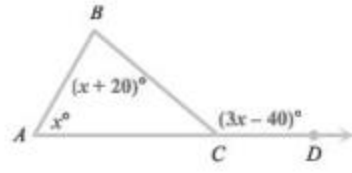


FIGURA 20

De acuerdo con la propiedad de los ángulos exteriores, la suma de las medidas de los ángulos interiores A y B debe ser igual a la medida del ángulo BCD. Entonces,

$$\begin{aligned} x + (x + 20) &= 3x - 40 \\ 2x + 20 &= 3x - 40 \\ -x &= -60 \qquad \text{Restar } 3x\text{; restar } 20. \\ x &= 60. \qquad \text{Dividir entre } -1. \end{aligned}$$

Como el valor de x es 60,

$$\begin{aligned} &\text{Ángulo interior } A = 60° \\ &\text{Ángulo interior } B = (60° + 20)° = 80° \\ &\text{Ángulo interior } C = 180° - (60° + 80°) = 40° \\ &\text{Ángulo exterior } BCD = [3(60°) - 40]° = 140°. \end{aligned}$$

■

Círculos Una de las curvas planas más importantes es el círculo. Es una curva simple cerrada que se define como sigue.

Círculo

Un **círculo** es un conjunto de puntos en un plano, cada uno de los cuales está a la misma distancia de un punto fijo.

Un círculo se construye físicamente por medio de un compás, cuya pata con punta permanece fija y la otra se mueve alrededor para trazar el círculo. También puede emplearse un cordel para dibujar un círculo. Por ejemplo, ate un trozo de tiza en un extremo del cordel. Sujete el otro extremo en un punto fijo del pizarrón y tense el cordel. Después desplace el gis alrededor para dibujar el círculo.

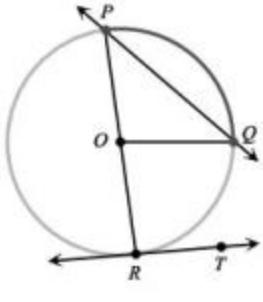


FIGURA 21

En la figura 21 se muestra un círculo, junto con varias líneas y segmentos. Los puntos P, Q y R se encuentran en el círculo. Cada uno de ellos está a la misma distancia del punto O, que se llama **centro** del círculo (éste es el punto fijo al que se refiere la definición). $\overleftrightarrow{OP}$, $\overleftrightarrow{OQ}$ y $\overleftrightarrow{OR}$ son segmentos, uno de cuyos extremos se ubica en el centro del círculo y el otro sobre éste. Cada uno de ellos se denomina **radio** del círculo. El segmento $\overleftrightarrow{PQ}$ es un segmento cuyos extremos se ubican en el círculo, y es un ejemplo de **cuerda**. $\overleftrightarrow{PR}$ es una cuerda que pasa por el centro y se denomina **diámetro** del círculo. Observe que la medida del diámetro es el doble de la del radio. Un diámetro como $\overleftrightarrow{PR}$, en la figura 21, divide al círculo en dos partes de tamaño igual, cada una de las cuales se llama **semicírculo**.

$\overleftrightarrow{RT}$, es una línea que toca (interseca) al círculo en solo un punto, R, y se denomina tangente al círculo. R es el punto de tangencia. $\overleftrightarrow{PQ}$, que interseca al círculo en dos puntos, se denomina línea secante (¿cuál es la diferencia entre una cuerda y una secante?).



Tales hizo su fortuna tan sólo para demostrar lo fácil que es volverse rico; acaparó todas las prensas de aceitunas en un año en que la cosecha fue excepcional. La leyenda dice que Tales estudió durante un tiempo en Egipto y después introdujo la geometría a Grecia, donde trató de aplicar los principios de la lógica griega a la materia que acababa de aprender.

La parte del círculo que se muestra en gris en la figura 21 es un ejemplo de **arco** de círculo. Consiste en dos puntos extremos (P y Q) y todos los puntos del círculo entre ellos. La parte gris se denomina PQ (o QP), y se denota con los símbolos $\overset{\frown}{PQ}$ (o $\overset{\frown}{QP}$).

Los griegos fueron los primeros que insistieron en que a todas las proposiciones, o **teoremas**, de la geometría debía darse una prueba rigurosa antes de aceptarlos. De acuerdo con la tradición, el primer teorema que recibió una prueba así fue el siguiente.

Ángulo inscrito

Cualquier ángulo inscrito en un semicírculo debe ser recto.

Para estar inscrito en un semicírculo, el vértice del ángulo debe estar en el círculo y sus lados deberán estar en contacto con los extremos del diámetro, que forma la base del semicírculo (vea la figura 22). Se afirmaba que esta primera prueba había sido dada por el filósofo griego Tales.

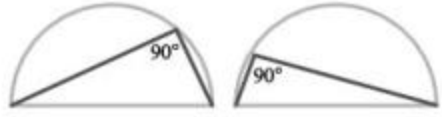


FIGURA 22

9.2 EJERCICIOS

Llene los espacios en blanco con la respuesta correcta.

1. Un segmento que une dos puntos de un círculo se denomina _____ .
2. Un segmento que une el centro de un círculo con un punto de este se llama _____ .
3. Un triángulo regular recibe el nombre de triángulo _____ .
4. Una cuerda que contiene al centro de un círculo se llama _____ .

Diga si cada uno de los enunciados siguientes es verdadero *o* falso.

5. Un rombo es un ejemplo de polígono regular.
6. Si un triángulo es isósceles entonces no es escaleno.
7. Un triángulo puede tener más de un ángulo obtuso.
8. Un cuadrado es tanto un rectángulo como un paralelogramo.
9. Un cuadrado debe ser un rombo.
10. Un rombo debe ser un cuadrado.
11. Explique con sus propias palabras la diferencia entre un cuadrado y un rombo.
12. ¿Cuál señal de tránsito de Estados Unidos tiene forma de octágono?

Diga si cada curva es simple, cerrada, ambas *o* ninguna.

13. 
14. 
15. 
16. 

17.



18.



19.



20.



Decida si cada figura es convexa *o* no convexa.

21.



22.



23.



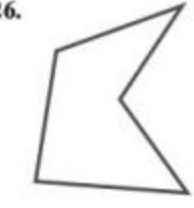
24.



25.

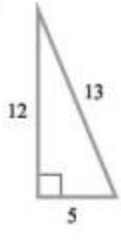


26.

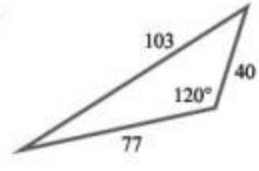


Clasifique cada triángulo como agudo, recto *u* obtuso. *Asimismo, clasifíquelos como* equilátero, isósceles *o* escaleno.

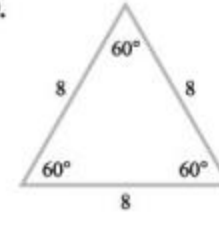
27.



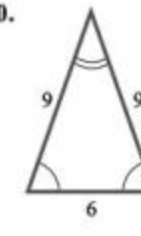
28.



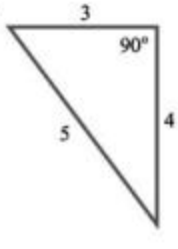
29.



30.



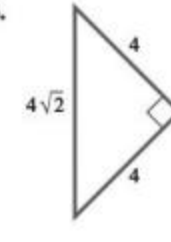
31.



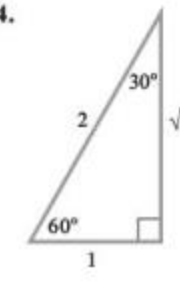
32.



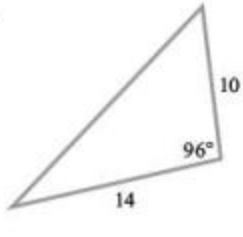
33.



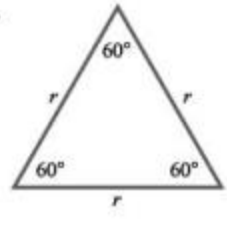
34.



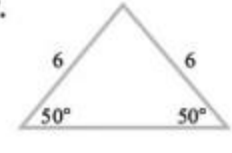
35.



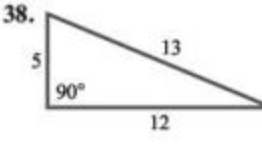
36.



37.



38.



39. Escriba una definición de *triángulo isósceles recto*.

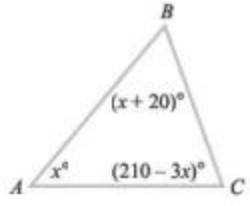
40. Explique por qué la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo debe ser mayor que la longitud del tercero.

41. Un triángulo, ¿puede ser tanto recto como obtuso? Explique su respuesta.

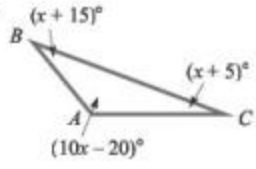
42. En la película clásica *El mago de Oz*, de 1939, una vez que obtiene un cerebro, el Espantapájaros dice lo siguiente: *La suma de las raíces cuadradas de dos lados cualesquiera de un triángulo isósceles es igual a la raíz cuadrada del otro lado.* Proporcione un ejemplo para demostrar que este enunciado es incorrecto.

Encuentre la medida de cada uno de los ángulos del triángulo ABC.

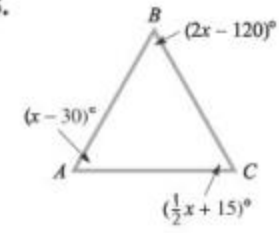
43.



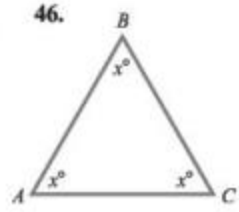
44.



45.



46.

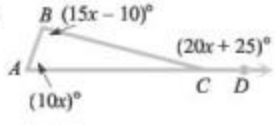


47. ***Medidas de ángulos*** En el triángulo *ABC*, los ángulos *A* y *B* tienen la misma medida, mientras que la medida del ángulo *C* es 24° mayor que la de cada uno de los ángulos *A* y *B*. ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos?

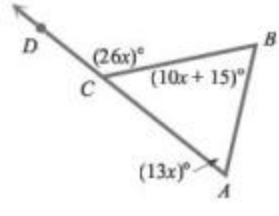
48. ***Medidas de ángulos*** En el triángulo *ABC*, la medida del ángulo *A* es de 30° más que la del ángulo *B*. El ángulo *B* mide lo mismo que el *C*. Encuentre la medida de cada ángulo.

Para cada uno de los triángulos siguientes, calcule la medida del ángulo exterior BCD.

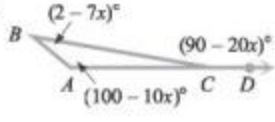
49.



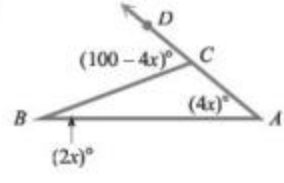
50.



51.

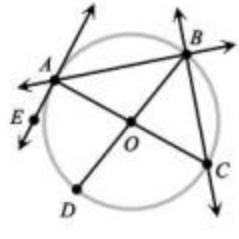


52.

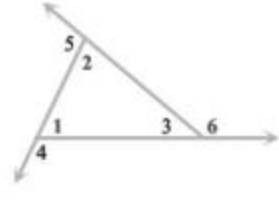


53. Con el uso de los puntos, segmentos y líneas de la figura, haga una lista de todas las partes del círculo.

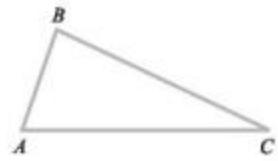
(a) centro
(b) radio
(c) diámetros
(d) cuerdas
(e) secantes
(f) tangentes



54. Observe los ángulos 1, 2 y 6 de la figura. Demuestre que la suma de las medidas de los ángulos 1 y 2 es igual a la medida del ángulo 6.



55. Realice la dinámica siguiente, propuesta por Richard Crouse en una carta al editor de *Mathematics Teacher*, en el número de febrero de 1988.



(a) Coloque el extremo de la goma de un lápiz en el vértice A del triángulo, de modo que el lápiz coincida con el lado AC del triángulo.

(b) Con la goma fija en A gire el lápiz en contra del movimiento de las manecillas del reloj hasta que coincida con el lado AB.

(c) Con la punta con que escribe el lápiz fija en el punto B, gire el extremo de la goma contra el movimiento de las manecillas del reloj hasta que el lápiz coincida con BC.

(d) Con la goma fija en el punto C, gire la punta del lápiz contra el movimiento de las manecillas del reloj hasta que este coincida con el lado AC.

(e) Observe que ahora el lápiz señala en la dirección opuesta. ¿Qué concepto de esta sección se refuerza con este ejercicio?

EXTENSIÓN



Geometría El escultor renacentista Antonio de Pollaiolo (1443-1498) ilustró a *Geometría* en este relieve en bronce, uno de los 10 que adornan la base inclinada de la tumba de bronce de Sixto IV, quien fuera papa de 1471 a 1484. La característica importante en esta fotografía es la presencia de un compás, uno de los dos instrumentos que permitía la geometría clásica para elaborar sus construcciones.

Construcciones geométricas

Los griegos no estudiaron álgebra en la forma en que lo hacemos nosotros. Para ellos, la geometría era la expresión más elevada de la ciencia matemática; su geometría era una materia abstracta. Cualquier aplicación práctica que resultara de su trabajo era agradable pero no se le concedía mayor importancia. Para los griegos, una construcción geométrica también necesitaba poseer belleza abstracta. Una construcción no podía contaminarse con instrumentos prácticos tales como las reglas. Los griegos permitían solo dos herramientas en la construcción geométrica: compás para dibujar círculos y arcos de círculo, y un objeto derecho para trazar segmentos rectilíneos. El objeto recto, a diferencia de una regla, no podía tener marcas. No estaba permitido alinear puntos con la vista.

A continuación se presentan cuatro construcciones básicas. Sus justificaciones se basan en las *propiedades de congruencia*, de la sección 9.4.

Construcción 1 Construir la bisectriz perpendicular de un segmento de línea dado.

Los extremos del segmento serán A y B. Ajuste el compás para cualquier radio mayor que la mitad de la longitud AB. Coloque la punta del compás en A y dibuje un arco, después, con la punta fija en B dibuje otro arco del mismo tamaño. La línea dibujada a través de los puntos de intersección de estos dos arcos es la bisectriz perpendicular que se buscaba. Vea la figura 23.

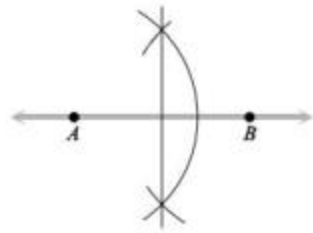


FIGURA 23

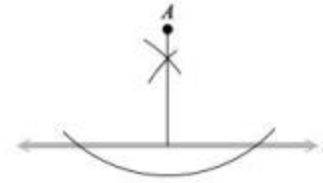


FIGURA 24

Construcción 2 Construir una perpendicular a una línea, desde un punto fuera de ésta.

(1) Sea A el punto, y r la línea. Coloque la punta del compás en A y dibuje un arco, de modo que corte a r en dos puntos.

(2) Desde cada uno de los dos puntos de r que resultaron del paso (1), trace arcos de igual radio. La línea que va de la intersección de los dos arcos al punto A es perpendicular a r. Vea la figura 24.

(continúa)



Herramientas euclidianas, el compás y un objeto recto sin marcas demostraron ser suficientes para que los geómetras griegos realizaran gran número de construcciones geométricas. Construcciones básicas tales como copiar un ángulo, construir la bisectriz perpendicular de un segmento, y bisecar un ángulo, se llevan a cabo y se comprueban con facilidad.

Sin embargo, había tres construcciones que los griegos no eran capaces de ejecutar con dichas herramientas. Ahora se conocen como los *tres famosos problemas de la Antigüedad*, y son los siguientes:

1. Trisecar un ángulo arbitrario;
2. Construir la longitud de la arista de un cubo si se tiene el doble de un cubo dado;
3. Construir un cuadrado que tenga la misma superficie que la de un círculo dado.

En el siglo IX se demostró que en realidad estas construcciones son imposibles de realizar con las herramientas euclidianas. Con el tiempo, se han desarrollado otros métodos para obtenerlas. Por ejemplo, se puede trisecar un ángulo arbitrario si se permite el lujo de hacer marcas en el objeto recto... Pero esto viola las reglas que obedecían los griegos.

Construcción 3 Construir una perpendicular a una línea a partir de algún punto dado sobre ésta.

(1) Sea r la línea y A el punto. Con algún radio conveniente del compás coloque la punta de éste en A y trace arcos que intersequen a r, como se aprecia en la figura 25.



FIGURA 25

(2) Aumente el radio del compás, coloque la punta de éste en los puntos que se obtuvo en el inciso (1) y trace arcos. La línea que va desde A a la intersección de los dos arcos, es la perpendicular a r. Vea la figura 26.

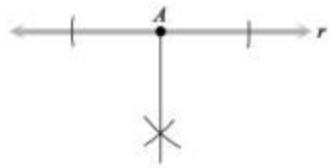


FIGURA 26

Construcción 4 Copiar un ángulo.

(1) A fin de copiar un ángulo ABC sobre la línea r, coloque la punta del compás en B y trace un arco. Después coloque la punta del compás sobre r' en algún punto P y trace el mismo arco, como se aprecia en la figura 27.

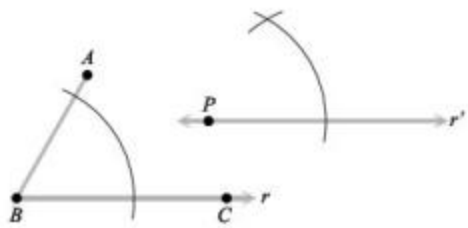


FIGURA 27

(2) Con el compás mida la distancia que hay entre los puntos donde el arco interseca el ángulo y transfiérala, como se aprecia en la figura 28. Utilice un objeto recto para unir P con el punto de intersección. Ahora, el ángulo ya ha sido copiado.

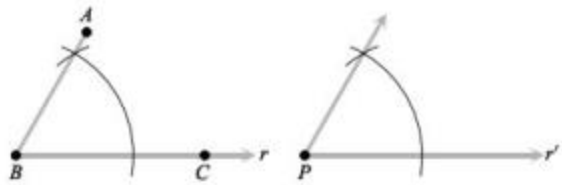


FIGURA 28

Existen otras construcciones básicas que pueden consultarse en libros de geometría plana.

EJERCICIOS DE EXTENSIÓN

Utilice la construcción 1 para obtener la bisectriz perpendicular del segmento PQ.

1.



2.



Use la construcción 2 para trazar una perpendicular de P *a la línea* r.

3.

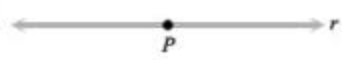


4.



Utilice la construcción 3 para dibujar la perpendicular a la línea r *y que pasa por* P.

5.

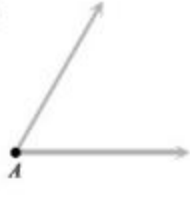


6.

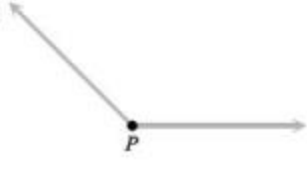


Emplee la construcción 4 a fin de copiar el ángulo dado.

7.



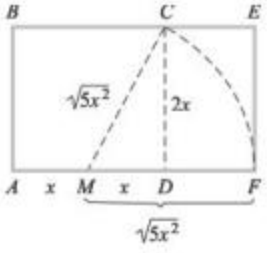
8.



9. Construya un ángulo de 45°.

10. Es imposible trisecar el ángulo general sólo con herramientas euclidianas. Profundice en esto y escriba un informe breve al respecto. Incluya información acerca de la herramienta de construcción que se llama *tomahawk*.

9.3 Perímetro, área y circunferencia



Para construir un **rectángulo áureo,** que es aquel en que la razón del largo al ancho es igual a la razón del largo más el ancho a la longitud, se comienza con un cuadrado $ABCD$. Con la punta del compás en M, punto medio de $\overline{AD}$, trace un arco de radio MC para intersecar la extensión de $\overline{AD}$ en F. Construya una perpendicular en F, y haga que interseque la extensión de $\overline{BC}$ en E. Así, $ABEF$ es un rectángulo áureo con razón $(1 + \sqrt{5})/2$. (Vea la sección 5.4 para más información acerca de la razón áurea.)

Para comprobar esta construcción, se hace $AM = x$, de modo que $AD = 2x$. Después, según el teorema de Pitágoras,

$$MC = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{5x^2}.$$

Como $\overset{\frown}{CF}$ es un arco del círculo con radio MC, $MF = MC = \sqrt{5x^2}$. Así, la razón de la longitud AF al ancho EF es

$$\frac{AF}{EF} = \frac{x + \sqrt{5x^2}}{2x} = \frac{x + x\sqrt{5}}{2x} = \frac{x(1 + \sqrt{5})}{2x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Perímetro y área

Al estudiar figuras planas es frecuente que se requiera encontrar la *distancia alrededor* de la figura, o la cantidad de superficie que cubre la figura. Estas ideas se expresan como *perímetro* y *área.*

Perímetro y área

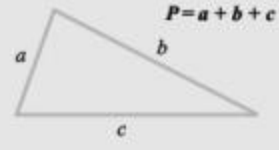
El **perímetro** de una figura plana compuesta por segmentos de línea es la suma de lo que mide cada uno de ellos. El **área** de una figura plana es la medida de la superficie cubierta por la figura. El perímetro se mide en *unidades lineales*, mientras que el área se mide en *unidades cuadradas*.

El polígono más simple es un triángulo. Si un triángulo tiene lados que miden a, b y c, entonces, para encontrar su perímetro tan sólo se suma a, b y c. Esto se expresa como fórmula, como se muestra a continuación.

Perímetro de un triángulo

El perímetro P de un triángulo con lados que miden a, b y c, está dado por la fórmula

$$P = a + b + c.$$



Como un rectángulo está constituido por dos pares de lados cada uno de los cuales tiene la misma longitud, la fórmula para el perímetro de un rectángulo se enuncia como sigue.

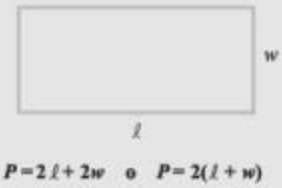
Perímetro de un rectángulo

El perímetro P de un rectángulo con longitud ℓ y ancho w, está dado por la fórmula

$$P = 2\ell + 2w,$$

o, en forma equivalente,

$$P = 2(\ell + w).$$



EJEMPLO 1 Un terreno tiene forma de rectángulo. Si su largo es de 50 pies y su ancho de 26 pies, ¿qué cantidad de cerca se necesita para encerrar por completo el lote?

Como se debe calcular la distancia alrededor del terreno, se necesita la fórmula del perímetro de un rectángulo. Para obtener P se sustituye ℓ y 26 por 50 y w por 26.

$$\begin{aligned} P &= 2\ell + 2w \\ P &= 2(50) + 2(26) \quad \ell = 50,\ w = 26 \\ P &= 100 + 52 \\ P &= 152 \end{aligned}$$

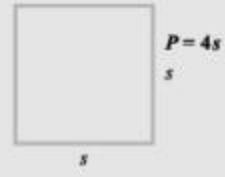
El perímetro es de 152 pies, por lo que se requieren 152 pies de material para la cerca. ■

Un cuadrado es un rectángulo con cuatro lados de longitud igual. La fórmula del perímetro de un cuadrado es un caso especial de la fórmula del rectángulo.

Perímetro de un cuadrado

El perímetro P de un cuadrado con todos sus lados de longitud s, se obtiene con la fórmula:

$$P = 4s.$$



EJEMPLO 2 Un cuadrado tiene un perímetro de 54 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

Se utiliza la fórmula $P = 4s$ con $P = 54$, y se resuelve para s.

$$\begin{aligned} P &= 4s \\ 54 &= 4s && P = 54 \\ s &= 13.5 && \text{Dividir entre 4.} \end{aligned}$$

Cada lado tiene una medida de 13.5 pulgadas. ■

Solución de problemas

El método de los seis pasos para resolver un sistema de aplicación por medio del álgebra, puede emplearse para solucionar aquellos que involucran figuras geométricas.



FIGURA 29

EJEMPLO 3 La longitud de una etiqueta de forma rectangular es 1 centímetro más que el doble del ancho. El perímetro es de 110 centímetros. Calcule el largo y el ancho.

Paso 1: **Leer el problema.** Se debe calcular el largo y el ancho.

Paso 2: **Asignar una variable.** Sea que W represente el ancho. Entonces, $1 + 2W$ representa el largo, ya que la longitud es 1 centímetro más que el doble del ancho. La figura 29 muestra un diagrama de la etiqueta.

Paso 3: **Escribir una ecuación.** En la fórmula $P = 2\ell + 2w$, se reemplaza w con W, ℓ con $1 + 2W$, y P con 110, ya que el perímetro es de 110 centímetros.

$$110 = 2(1 + 2W) + 2W$$

Paso 4: **Resolver la ecuación.**

$$\begin{aligned} 110 &= 2 + 4W + 2W && \text{Propiedad distributiva} \\ 110 &= 2 + 6W && \text{Agrupar términos.} \\ 108 &= 6W && \text{Restar 2.} \\ 18 &= W && \text{Dividir entre 6.} \end{aligned}$$

Paso 5: **Enunciar la respuesta.** Como $W = 18$, el ancho es de 18 centímetros y el largo es de $1 + 2W = 1 + 2(18) = 37$ centímetros.

Paso 6: **Comprobar.** Como 37 es 1 más que el doble de 18, y el perímetro es $2(37) + 2(18) = 110$ centímetros, las respuestas son correctas. ■

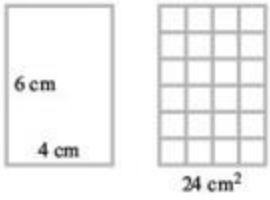


FIGURA 30

La definición de **área** de una figura requiere una *unidad de área* básica. Una que es común utilizar es el *centímetro cuadrado*, que se abrevia como cm^2. Un centímetro cuadrado, o 1 cm^2, es el área que tiene un cuadrado que mida un centímetro por lado. En lugar de 1 cm^2, la unidad de área básica hubiera podido ser 1 $pulg^2$, 1 pie^2, 1 m^2, o cualquier otra unidad apropiada.

Como ejemplo, se calcula el área del rectángulo que se muestra en la figura 30. Se usa la unidad básica de 1 cm^2, y en la figura 30 se observa que en el lado horizontal puede dibujarse 4 cuadrados, cada uno de los cuales mide 1 centímetros por lado, en tanto que en el lado vertical es posible dibujar 6 cuadrados. Para cubrir el área del rectángulo grande se necesita un total de $24 = 4 \cdot 6$ de los cuadrados pequeños. Así, el área del rectángulo grande es de 24 cm^2.

La ilustración anterior se generaliza para obtener la fórmula del área de un rectángulo.

Área de un rectángulo

El área A de un rectángulo con largo ℓ y ancho w está dada por la fórmula

$$A = \ell w.$$



La fórmula del área de un rectángulo, $A = \ell w$ se utiliza para encontrar fórmulas para las áreas de otras figuras. Por ejemplo, si s representa las longitudes iguales de los lados de un cuadrado, entonces, $A = s \cdot s = s^2$.

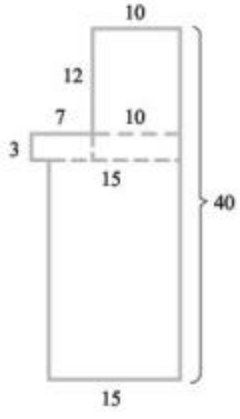
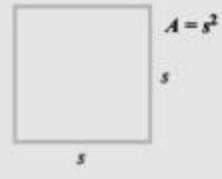


FIGURA 31

Área de un cuadrado

El área A de un cuadrado con todos sus lados de longitud s, está dada por la fórmula

$$A = s^2.$$



EJEMPLO 4 La figura 31 muestra el plano del piso de un edificio, constituido por varios rectángulos. Si cada longitud está en metros, ¿cuántos metros cuadrados de recubrimiento se requerirían para cubrir el piso del edificio?

Las líneas punteadas de la figura descomponen en rectángulos el área del piso. Las áreas de los diferentes rectángulos que resultan son las siguientes:

$$10 \cdot 12 = 120\ m^2, \quad 3 \cdot 10 = 30\ m^2, \quad 3 \cdot 7 = 21\ m^2, \quad 15 \cdot 25 = 375\ m^2.$$

El área total es $120 + 30 + 21 + 375 = 546\ m^2$, por lo que se necesita 546 m^2 de recubrimiento. ■

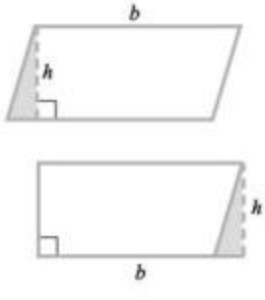


FIGURA 32

Como se dijo en una parte anterior de este capítulo, un **paralelogramo** es una figura de cuatro lados que tiene paralelos ambos pares de sus lados opuestos. Como un paralelogramo no necesariamente es un rectángulo, la fórmula para el área no puede emplearse en forma directa. Sin embargo, esta fórmula se usa indirectamente, como se muestra en la figura 32. Se recorta el triángulo sombreado de gris y se pega a la derecha. La figura que resulta es un rectángulo que tiene la misma área que el paralelogramo original.

La *altura* del paralelogramo es la distancia perpendicular entre dos de los lados paralelos y se denota con h en la figura. El ancho del rectángulo es igual a la altura del paralelogramo, y su largo es la base b del paralelogramo, por tanto:

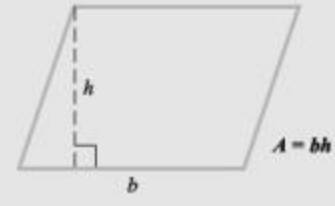
$$A = \text{largo} \cdot \text{ancho} \quad \text{se convierte en} \quad A = \text{base} \cdot \text{altura}.$$

Área de un paralelogramo

El área A de un paralelogramo con altura h y base b, se obtiene con la fórmula

$$A = bh.$$

(*Nota*: h no es el largo de un lado.)



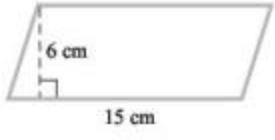


FIGURA 33

EJEMPLO 5 Calcule el área del paralelogramo de la figura 33.

Aquí, la base tiene un largo de 15 centímetros, mientras que el alto es de 6 centímetros. Así, $b = 15$ y $h = 6$.

$$A = bh = 15 \cdot 6 = 90$$

El área es de 90 cm^2. ■

La figura 34 muestra cómo obtener la fórmula para el área de un trapecio. Observe que la figura en conjunto es un paralelogramo. Está constituida por dos trapecios, cada uno de los cuales tiene altura de h, basemenor de b y base mayor de B. El área del paralelogramo se calcula con la multiplicación de la altura h por la base del paralelogramo, $b + B$, es decir, $h(b + B)$. Como el área del paralelogramo es el doble del área de cada trapecio, el área de cada uno de éstos es la *mitad* del área del paralelogramo.

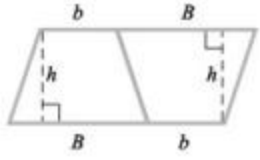
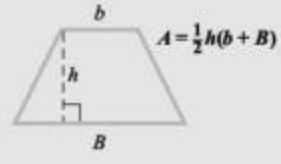


FIGURA 34

Área de un trapecio

El área A de un trapecio con bases paralelas b y B, y altura h, se obtiene con la fórmula

$$A = \frac{1}{2}h(b + B).$$



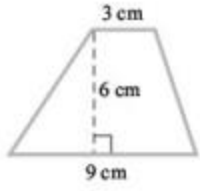


FIGURA 35

EJEMPLO 6 Calcule el área del trapecio de la figura 35.

Aquí, $h = 6$, $b = 3$ y $B = 9$. Así,

$$A = \frac{1}{2}h(B + b) = \frac{1}{2}(6)(9 + 3) = \frac{1}{2}(6)(12) = 36.$$

El área del trapecio es de 36 cm^2. ■

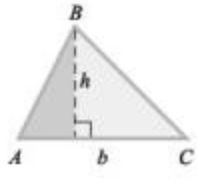
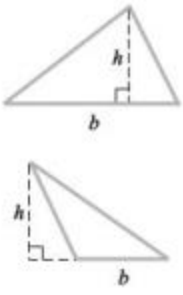




FIGURA 36

La fórmula para el área de un triángulo se encuentra a partir de la fórmula del área de un paralelogramo. En la figura 36, el triángulo cuyos vértices son A, B y C, está descompuesta en dos partes, una de las cuales está en gris oscuro y la otra en gris claro. Si se repite la parte en oscura y aquella en gris claro se obtiene un paralelogramo. El área de éste es A = base · altura, o $A = bh$. Sin embargo, el paralelogramo mide el *doble* del área del triángulo; en otras palabras, el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.



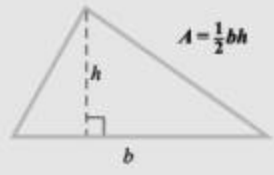
En cada caso, $A = \frac{1}{2}bh$.

FIGURA 37

Área de un triángulo

El área A de un triángulo con altura h y base b, se obtiene con la fórmula

$$A = \frac{1}{2}bh.$$



Al aplicar la fórmula para el área de un triángulo, hay que recordar que la altura es la distancia perpendicular que existe entre un vértice y el lado opuesto (o la extensión de dicho lado). Vea la figura 37.

PARA REFLEXIONAR

Para emplear la fórmula del área de un triángulo, $A = (1/2)bh$, se debe conocer la altura de uno de sus lados. Suponga que sólo se conocen las longitudes de los tres lados, ¿hay forma de determinar el área a partir de esta información?

La respuesta es sí, y nos conduce a lo que se conoce como **fórmula de Herón**. Herón de Alejandría vivió durante la segunda mitad del siglo I d.C., y aunque la fórmula lleva su nombre en su honor, existen pruebas de que Arquímedes ya la conocía varios siglos antes.

Fórmula de Herón para el área

Sean a, b y c las longitudes de los lados de cualquier triángulo. Sea que $s = (1/2)(a + b + c)$ represente el semiperímetro. Entonces, el área A del triángulo está dada por la fórmula

$$A = \sqrt{s(s-b)(s-c)}.$$

Por ejemplo, si los lados de un triángulo miden 6, 8 y 12 pies, se tiene que $s = (1/2)(6 + 8 + 12) = 13$, por lo que el área del triángulo es A, donde

$$A = \sqrt{13(13-6)(13-8)(13-12)}$$
$$= \sqrt{455} \approx 21.33 \text{ pies cuadrados.}$$

Para análisis en grupo

1. Si su salón está dispuesto en forma rectangular, mida su largo y ancho, y después multiplíquelos para encontrar el área. Ahora, mida una diagonal del cuarto y use la fórmula de Herón con el largo, ancho y la diagonal para obtener el área de la mitad del salón. Duplique este resultado. ¿Concuerda con los cálculos para el área?

2. Para que un triángulo exista, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera debe exceder la longitud del lado restante. Pida que la mitad del grupo trate de calcular el área de un triángulo con $a = 4$, $b = 8$ y $c = 12$, mientras que la otra mitad intenta calcular el área de otro triángulo con $a = 10$, $b = 20$ y $c = 34$. En ambos casos, utilice la fórmula de Herón. Después analicen los resultados, con ayuda de diagramas en el pizarrón para sustentar los resultados que se hayan obtenido.

3. El monumento en memoria a los veteranos de Vietnam, en Washington, D.C., tiene forma de triángulo isósceles no cerrado. Las paredes tienen forma de V y cada una mide 246.75 pies. La distancia entre los extremos de las paredes es de 438.14 pies. Emplee la fórmula de Herón para obtener el área encerrada por la forma triangular.



Circunferencia de un círculo La distancia alrededor de un círculo se llama su **circunferencia** (en lugar de perímetro). Para entender la fórmula de la circunferencia de un círculo, utilice un cordel para medir la distancia alrededor de un círculo. Mida su diámetro y después divida la circunferencia entre el diámetro. Este cociente es el mismo, sin importar cuál sea el tamaño del círculo. El resultado de esta medida es una aproximación del número π. Se tiene que:

$$\pi = \frac{\text{circunferencia}}{\text{diámetro}} = \frac{C}{d}, \quad \text{o bien la fórmula alternativa,} \quad C = \pi d.$$

Como el diámetro de un círculo mide el doble del radio, se tiene que $d = 2r$. Estas relaciones permiten enunciar las fórmulas siguientes para la circunferencia de un círculo.

Circunferencia de un círculo

La circunferencia C de un círculo de diámetro d está dada por la fórmula

$$C = \pi d.$$

Asimismo, la circunferencia C de un círculo de radio r está dada por la fórmula

$$C = 2\pi r.$$



$C = \pi d$
$C = 2\pi r$

Hay que recordar que π no es un número racional. En este capítulo se usará 3.14 como aproximación de π cuando se requiera.

EJEMPLO 7

(a) Un círculo tiene un diámetro de 12.6 centímetros. Calcule su circunferencia. Utilice $\pi \approx 3.14$.

Como $C = \pi d$,

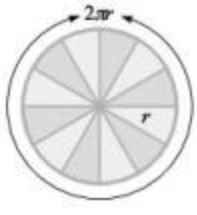
$$C \approx 3.14(12.6) = 39.564$$

o 39.6 centímetros, al redondear a la décima más cercana.

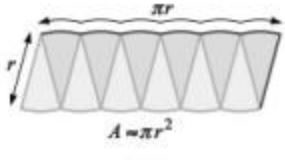
(b) El radio de un círculo es de 1.7 metros. Calcule su circunferencia. Use $\pi \approx 3.14$.

$$C = 2\pi r \approx 2(3.14)(1.7) \approx 10.7$$

La circunferencia mide aproximadamente 10.7 metros. ■



(a)



(b)

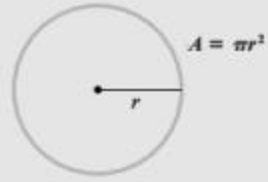
FIGURA 38

Área de un círculo La fórmula para el área de un círculo se justifica como sigue: comience con un círculo como el que se muestra en la figura 38(a), dividido en muchos elementos iguales en forma de rebanada de pastel (**sectores**). Reacomode los elementos en forma aproximada de rectángulo, como se observa en la figura 38(b). El círculo tiene circunferencia de $2\pi r$, por lo que el "largo" del rectángulo aproximado es de $(1/2)(2\pi r) = \pi r$, mientras que su "ancho" es de r. El área del rectángulo aproximado es el largo por el ancho, o $(\pi r)r = \pi r^2$. Si se escogen sectores cada vez más pequeños, la figura se parece más y más a un rectángulo, y su área se acerca cada vez más al valor de πr^2. Este procedimiento de "límitar" lleva a la fórmula siguiente.

Área de un círculo

El área A de un círculo con radio r está dada por la fórmula

$$A = \pi r^2.$$



Solución de problemas

La próxima vez que compre una pizza, puede emplear la fórmula del área de un círculo para determinar el mejor valor del dinero. El ejemplo que sigue utiliza la idea de precio unitario.



EJEMPLO 8 Paw-Paw Johnny es un negocio de entrega de pizzas a domicilio. El precio de una pizza de 8 pulgadas de diámetro de pepperoni es de \$6.99, mientras que el de una de 16 pulgadas de diámetro es de \$13.98. ¿Cuál es mejor?

Para determinar con cuál pizza se tiene el mayor rendimiento del dinero, primero debe calcularse el área de cada una, y dividir el precio entre el área para determinar el precio por pulgada cuadrada.

$$\text{Área de una pizza de 8 pulgadas de diámetro} = \pi(4)^2 \approx 50.24 \text{ pulgadas}^2$$

↑ El radio es (1/2)(8) = 4 pulgadas.

$$\text{Área de una pizza de 16 pulgadas de diámetro} = \pi(8)^2 \approx 200.96 \text{ pulgadas}^2$$

↑ El radio es (1/2)(16) = 8 pulgadas.

El precio por pulgada cuadrada de la pizza de 8 pulgadas es de \$6.99/50.24 ≈ 13.9¢, mientras que el de la de 16 pulgadas es de \$13.98/200.96 ≈ 7.0¢ por pulgada cuadrada. Por tanto, la pizza de 16 pulgadas es una mejor compra, ya que por pulgada cuadrada cuesta aproximadamente la mitad. ■

9.3 EJERCICIOS

Llene los espacios en blanco con la respuesta correcta.

1. El perímetro de un triángulo equilátero cuya longitud de lado es igual a _____ pulgadas, es el mismo que el perímetro de un rectángulo cuyo largo sea de 10 pulgadas y su ancho 8.

2. Un cuadrado cuya área sea 16 centímetros cuadrados tiene un perímetro de _____ centímetros.

3. Si el área de cierto triángulo es 24 pulgadas cuadradas, y la base mide 8 pulgadas, entonces la altura debe medir _____ pulgadas.

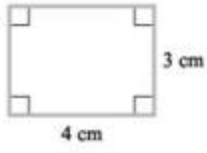
4. Si el radio de un círculo se duplica, entonces su área se multiplica por un factor de _____ .

5. El área de un triángulo equilátero cuyo lado mida 6 pulgadas, es _____ pulgadas cuadradas.

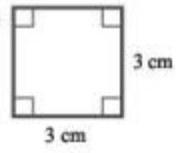
6. Si el largo y ancho de un rectángulo se duplican, entonces el área se multiplica por un factor de _____ .

Utilice las fórmulas de esta sección para calcular el área de cada figura. En los ejercicios 19 a 22, emplee 3.14 *como valor aproximado de* π.

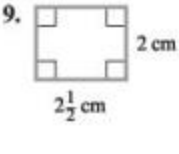
7.



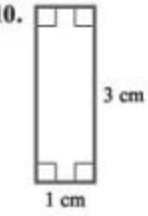
8.



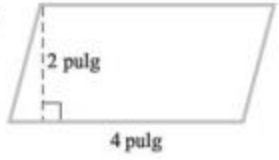
9.



10.

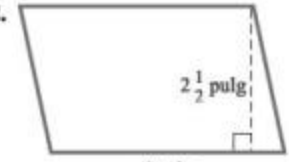


11.



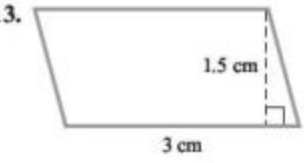
(paralelogramo)

12.



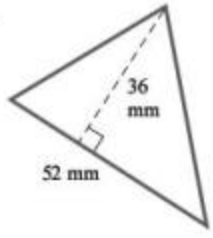
(paralelogramo)

13.



(paralelogramo)

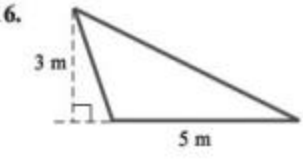
14.



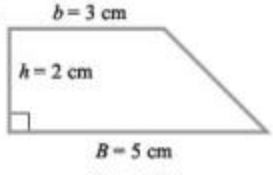
15.



16.

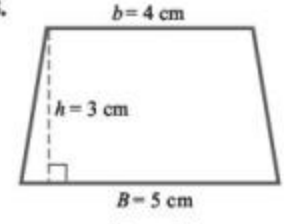


17.



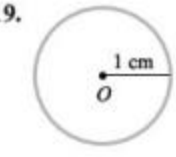
(trapecio)

18.

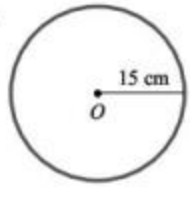


(trapecio)

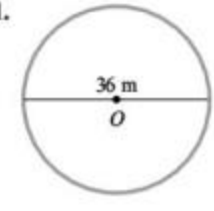
19.



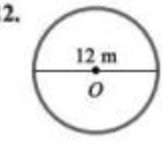
20.



21.



22.



Resuelva cada uno de los problemas siguientes.

23. ***Longitud del lado de una ventana*** Una ventana con vitrales de colores de una iglesia tiene forma cuadrada. El perímetro, en metros, del cuadrado es 7 veces la longitud de un lado menos 12. Encuentre la longitud del lado de la ventana.

24. ***Dimensiones de un rectángulo*** Un establecimiento de renta de videos colocó un anuncio de cartón rectangular para la película *Sweet Home Alabama*. Su largo era de 20 pulgadas más que el ancho, y el perímetro era de 176 pulgadas. ¿Cuáles eran las dimensiones del rectángulo?

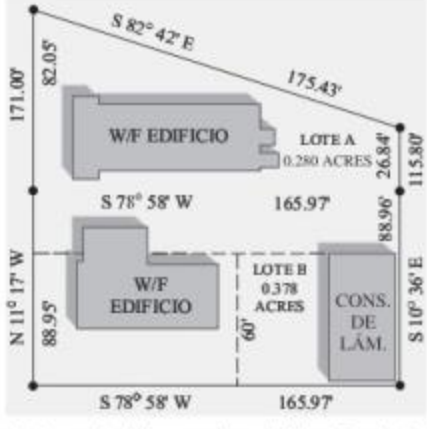
25. ***Dimensiones de un lote*** Un lote tiene forma triangular. Un lado es 100 pies más largo que el lado más corto, mientras que el tercer lado es 200 pies más largo que el lado más corto. El perímetro del lote es de 1200 pies. Encuentre las longitudes de los lados del lote.

26. ***Longitudes de lado en gallardete*** Una pared en gallardete tiene forma de triángulo isósceles. Cada uno de los dos lados iguales mide 18 pulgadas más que el tercer lado, y el perímetro del triángulo es de 54 pulgadas. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del gallardete?

27. ***Radio de una cimentación circular*** El Hotel Peachtree Plaza en Atlanta tiene forma de cilindro, con cimentación circular. La circunferencia de la cimentación es 6 veces el radio, más 12.88 pies. Encuentre el radio de la cimentación circular (use 3.14 como valor aproximado de π).

28. ***Radio de un círculo*** Si el radio de cierto círculo se triplica y luego se le agregan 8.2 centímetros, el resultado es igual a la circunferencia del círculo. Determine el radio del círculo (utilice 3.14 como aproximación del valor de π).

29. ***Área de dos lotes*** El plano topográfico de la figura, muestra dos lotes que forman un trapecio. Las medidas de los lados paralelos son 115.80 pies y 171.00 pies. La altura del trapecio es 165.97 pies. Encuentre el área combinada de los dos lotes. Redondee la respuesta al centésimo más cercano de un pie cuadrado.



Plano de la propiedad en un lote de New Roads, Luisiana.

30. ***Área de un lote*** El lote A de la figura tiene forma de trapecio. Los lados paralelos miden 26.84 pies y 82.05 pies. La altura del trapecio es de 165.97 pies. Calcule el área del lote A. Redondee la respuesta al centésimo más cercano de un pie cuadrado.

31. ***¿Perímetro o área?*** Si el lector quisiera comprar material para cercar un patio rectangular, ¿necesitaría usar el perímetro o el área para decidir cuánto comprar?

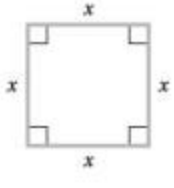
32. ***¿Perímetro o área?*** Si fuera usted a adquirir fertilizante para el césped de un patio, ¿necesitaría emplear el perímetro o el área para saber cuánto comprar?

En la tabla que sigue se proporciona uno de los valores r (radio), d (diámetro), C (circunferencia) o A (área), de un círculo en particular. Encuentre los tres valores restantes. Deje el símbolo π en sus respuestas.

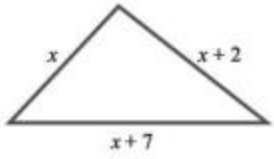
	r	*d*	*C*	*A*
33.	6 pulgadas			
34.	9 pulgadas			
35.		10 pies		
36.		40 pies		
37.			12π cm	
38.			18π cm	
39.				100π pulgadas^2
40.				256π pulgadas^2

Cada una de las figuras siguientes (no están necesariamente a escala) tiene el perímetro que se indica. Encuentre el valor de x.

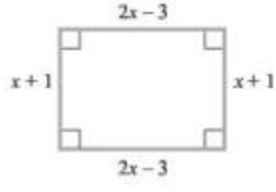
41. $P = 58$



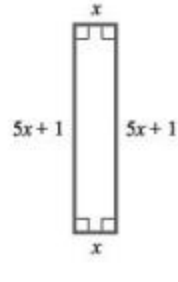
42. $P = 42$



43. $P = 38$

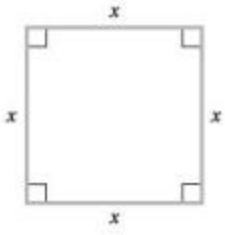


44. $P = 278$

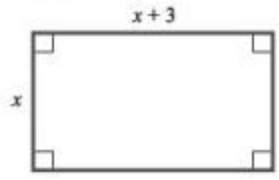


Cada una de las figuras que siguen tiene el área que se indica. Determine el valor de x.

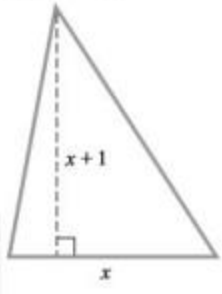
45. $A = 26.01$



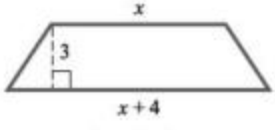
46. $A = 28$



47. $A = 15$



48. $A = 30$



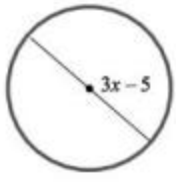
(trapecio)

Cada círculo de los que se presenta a continuación tiene la circunferencia o área que se menciona. Calcule el valor de x. Emplee 3.14 *como aproximación de* π.

49. $C = 37.68$



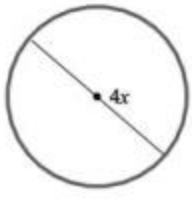
50. $C = 54.95$



51. $A = 18.0864$



52. $A = 28.26$



53. Resuelva los incisos de este ejercicio en orden, y úselos para hacer una generalización acerca de las áreas de los rectángulos.

(a) Determine el área de un rectángulo de 4 centímetros por 5 centímetros.

(b) Encuentre el área de un rectángulo de 8 centímetros por 10 centímetros.

(c) Calcule el área de un rectángulo de 12 centímetros por 15 centímetros.

(d) Diga cuál es el área de un rectángulo de 16 centímetros por 20 centímetros.

(e) El rectángulo del inciso (b) tiene lados que son el doble de los del rectángulo del inciso (a). Divida el área del más grande entre la del más pequeño. Si se duplican los lados, el área se incrementa _____ veces.

(f) Para obtener el rectángulo del inciso (c), cada lado del rectángulo del inciso (a) se multiplicó por _____. Esto hizo que el área mayor fuera _____ veces el área más pequeña.

(g) El rectángulo del inciso (d) se obtuvo con la multiplicación por _____ de aquel del inciso (a). Esto hizo que el área se incrementara _____ veces de lo que era originalmente.

(h) En general, si la longitud de cada lado de un rectángulo se multiplica por n, el área se multiplicará por _____.

Costo del trabajo *Utilice los resultados del ejercicio 53 para resolver cada uno de los siguientes.*

54. Un techo que mide 9 pies por 15 pies puede pintarse por $60. ¿Cuánto costaría pintar un techo de 18 pies por 30 pies?

55. Suponga que un recubrimiento de 10 pies por 12 pies cuesta $200. Calcule el costo de recubrir una habitación de 20 pies por 24 pies.

56. Un limpiador de pisos cobra $80 por asear un área de 31 pies por 31 pies. ¿Cuánto cobraría por otra de 93 pies por 93 pies?

57. Use la lógica del ejercicio 53 para responder lo siguiente: si el radio de un círculo se multiplica por n, entonces el área del círculo se multiplica por _____.

58. Siga la lógica del ejercicio 53 para responder lo siguiente: si la altura de un triángulo se multiplica por n y la longitud de la base permanece igual, entonces el área del triángulo se multiplica por _____.

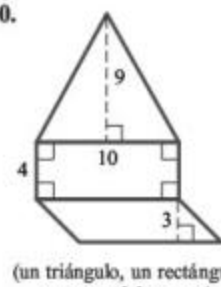
Área total como la suma de áreas *Si se considera al área total como la suma de áreas de todas sus partes, entonces es posible determinar el área de una figura como las que aparecen en los ejercicios 59 a 62. Calcule el área total de cada figura. En los ejercicios 61 y 62 utilice* 3.14 *como el valor aproximado de* π.

59.



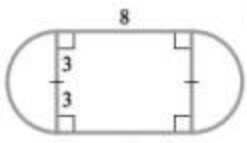
(un paralelogramo y un triángulo)

60.



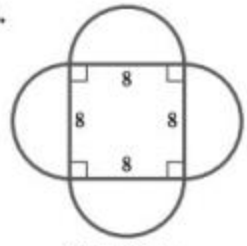
(un triángulo, un rectángulo y un paralelogramo)

61.



(un rectángulo y dos semicírculos)

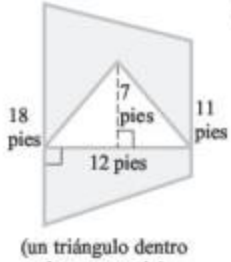
62.



(un cuadro y cuatro semicírculos)

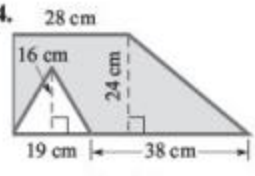
Área de una porción sombreada de una figura plana *Las áreas sombreadas de las figuras de los ejercicios 63 a 68 se obtienen si se resta el área no sombreada del área total de la figura. Emplee este enfoque para calcular el área de la parte sombreada. En los ejercicios 66 a 68, use* 3.14 *como valor aproximado de* π *y redondee al centésimo más cercano.*

63.



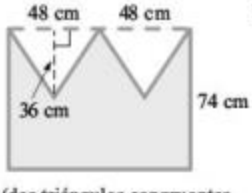
(un triángulo dentro de un trapecio)

64.



(un triángulo dentro de un trapecio)

65.



(dos triángulos congruentes dentro de un rectángulo)

66.



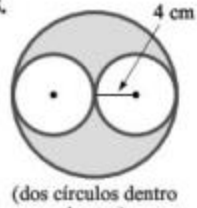
(un semicírculo dentro de un rectángulo)

67.



(un círculo dentro de un cuadrado)

68.



(dos círculos dentro de otro)

Precios de pizzas *Los ejercicios siguientes mencionan los precios reales que cobra Maw-Maw Gigi's, una pizzería local. En cada caso, la dimensión es el diámetro de la pizza. Determine cuál es la mejor compra.*

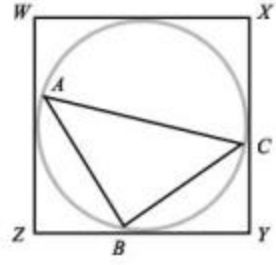
69. Pizza de queso: una pizza de 10 pulgadas se vende en \$5.99, otra de 12 pulgadas se vende en \$7.99, y otra de 14 pulgadas se vende en \$8.99.

70. Pizza de queso con dos cubiertas: una pizza de 10 pulgadas cuesta \$7.99, otra de 12 pulgadas se vende en \$9.99, y una más de 14 pulgadas cuesta \$10.99.

71. Pizza All Feasts: el costo de una de 10 pulgadas es de \$9.99, el de otra de 12 pulgadas es de \$11.99, y una de 14 pulgadas se vende en \$12.99.

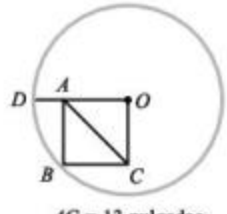
72. Pizza Extravaganza: una de 10 pulgadas se vende en \$11.99, la de 12 pulgadas cuesta \$13.99 y la de 14 pulgadas se vende en \$14.99.

Un polígono puede inscribirse dentro de un círculo o circunscribirse alrededor de éste. En la figura, el triángulo ABC está inscrito dentro del círculo, mientras que el cuadrado WXYZ se circunscribe alrededor de él. Se utilizarán estas ideas en algunos de los ejercicios que siguen en esta sección y en una parte posterior de este capítulo.



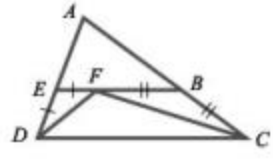
Los ejercicios 73 a 80 requieren cierta creatividad, pero todos se resuelven con el empleo de los conceptos presentados hasta el momento en este capítulo.

73. ***Diámetro de un círculo*** A partir del círculo con centro O y el rectángulo $ABCO$, obtenga el diámetro del círculo.

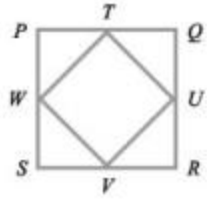


$AC = 13$ pulgadas
$AD = 3$ pulgadas

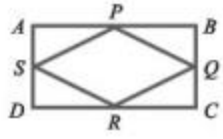
74. ***Perímetro de un triángulo*** ¿Cuál es el perímetro del $\triangle AEB$, si $AD = 20$ pulgadas, $DC = 30$ pulgadas y $AC = 34$ pulgadas?



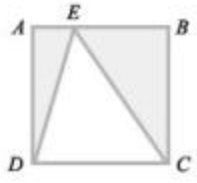
75. ***Área de un cuadrado*** El área del cuadrado $PQRS$ es de 1250 pies cuadrados. T, U, V y W son los puntos medios de PQ, QR, RS y SP, respectivamente. ¿Cuál es el área del cuadrado $TUVW$?



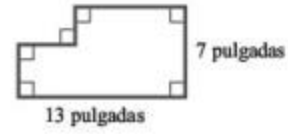
76. ***Área de un cuadrilátero*** El rectángulo $ABCD$ tiene una longitud del doble de su ancho. Si P, Q, R y S son los puntos medios de los lados, y el perímetro de $ABCD$ es de 96 pulgadas, ¿cuál es el área del cuadrilátero $PQRS$?



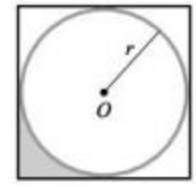
77. ***Área de una región sombreada*** Si $ABCD$ es un cuadrado cada uno de cuyos lados mide 36 pulgadas, ¿cuál es el área de la región sombreada?



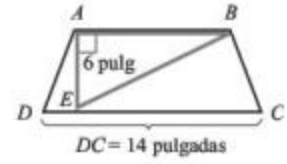
78. ***Perímetro de un polígono*** ¿Es posible determinar el perímetro del polígono que se muestra, a partir de la información dada? Si es así, ¿cuál es el perímetro?



79. ***Área de una región sombreada*** Exprese el área de la región sombreada en términos de r, dado que el círculo está inscrito en el cuadrado.



80. ***Área de un trapecio*** Encuentre el área del trapecio $ABCD$, dado que el área del triángulo rectángulo ABE es de 30 pulgadas cuadradas.



9.4 La geometría de los triángulos: congruencia, similitud y el teorema de Pitágoras

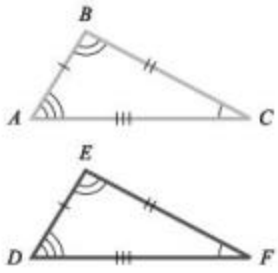


FIGURA 39

Triángulos congruentes En esta sección se investigan las propiedades especiales de los triángulos. Los triángulos que tienen el mismo tamaño y la misma forma se llaman **triángulos congruentes**. En el habla informal, si dos triángulos son congruentes entonces es posible tomar uno de ellos y colocarlo sobre el otro de modo que coincidan con exactitud. Un ejemplo de la vida cotidiana serían los apoyos triangulares de un columpio infantil, que se producen con máquinas y tienen exactamente las mismas dimensiones en cada ocasión.

La figura 39 ilustra dos triángulos congruentes, $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$. El símbolo $\cong$ denota congruencia, por lo que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Observe que los ángulos y lados están marcados para indicar cuáles ángulos son congruentes y cuáles lados también lo son (en términos técnicos, se dice que los ángulos o los lados son *congruentes*, si las



Plimpton 322 Lo que sabemos de las matemáticas de los babilonios de Mesopotamia se basa principalmente en los descubrimientos arqueológicos de miles de tablillas de arcilla. En la que se conoce como Plimpton 322, hay varias columnas de inscripciones que representan números. La columna en el extremo derecho es tan sólo la que sirve para numerar los renglones, pero las otras dos representan valores de las hipotenusas y los catetos de triángulos rectángulos con medidas de lados en números enteros. Por consiguiente, parece que aunque el famoso teorema que relaciona los lados de un triángulo rectángulo lleva el nombre del griego Pitágoras, ya se conocía más de 1000 años antes.

medidas de ángulos congruentes o lados congruentes, son *iguales*. Se usarán con frecuencia los vocablos *ángulos iguales* o *lados iguales* para describir ángulos o lados de medidas iguales).

En geometría, se usan las propiedades siguientes para demostrar que dos triángulos son congruentes.

Propiedades de congruencia

Lado-ángulo-lado (LAL) Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son iguales, respectivamente, a dos lados y el ángulo incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Ángulo-lado-ángulo (ALA) Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son iguales, respectivamente, a dos ángulos y el lado incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Lado-lado-lado (LLL) Si tres lados de un triángulo son iguales, respectivamente, a tres lados de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Los ejemplos 1 a 3 muestran cómo demostrar enunciados con el uso de estas propiedades. Se usa un diagrama con dos columnas, con el encabezado de ENUNCIADOS y RAZONES.

ENUNCIADOS	RAZONES

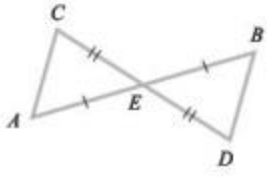


FIGURA 40

EJEMPLO 1 Consulte la figura 40.

A partir de: $CE = ED$

$AE = EB$

Demostrar que: $\triangle ACE \cong \triangle BDE$

Prueba:

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $CE = ED$	1. Dado
2. $AE = EB$	2. Dado
3. $\measuredangle CEA = \measuredangle DEB$	3. Ángulos verticales son iguales
4. $\triangle ACE \cong \triangle BDE$	4. Propiedad de congruencia LAL

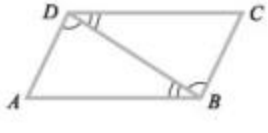


FIGURA 41

EJEMPLO 2 Consulte la figura 41.

A partir de: $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD$

$\measuredangle ABD = \measuredangle CDB$

Demostrar que: $\triangle ADB \cong \triangle CBD$

Prueba:

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD$	1. Dado
2. $\measuredangle ABD = \measuredangle CDB$	2. Dado
3. $DB = DB$	3. Propiedad reflexiva (una cantidad es igual a sí misma)
4. $\triangle ADB \cong \triangle CBD$	4. Propiedad de congruencia ALA

EJEMPLO 3 Consulte la figura 42.

A partir de: $AD = CD$

$AB = CB$

Demostrar que: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

Prueba:

ENUNCIADOS	RAZONES
1. $AD = CD$	1. Dado
2. $AB = CB$	2. Dado
3. $BD = BD$	3. Propiedad reflexiva
4. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$	4. Propiedad de congruencia LLL

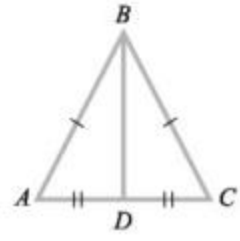


FIGURA 42

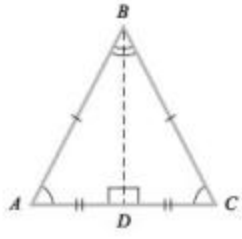


FIGURA 43

En el ejemplo 3, $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles. Los resultados de ese ejemplo permiten establecer varios enunciados importantes sobre un triángulo isósceles. Se indican en forma simbólica en la figura 43 y se enuncian en el recuadro siguiente.

Premisas importantes acerca de los triángulos isósceles

Si $\triangle ABC$ es un triágulo isósceles en el que $AB = CB$, y si D es el punto medio de la base AC, entonces son verdaderas las proposiciones siguientes:

1. Los ángulos de la base A y C son iguales.
2. Los ángulos ABD y CBD son iguales.
3. Los ángulos ADB y CDB son rectos.











FIGURA 44

Triángulos semejantes Muchas de las ideas clave de la geometría dependen de los **triángulos semejantes**, pares de triángulos que tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. La figura 44 muestra tres pares de triángulos semejantes. (*Nota*: Los triángulos no necesitan estar orientados en la misma forma para que sean semejantes.)

Suponga que se establece una correspondencia entre dos triángulos ABC y DEF, como sigue:

$\measuredangle A$ corresponde a $\measuredangle D$	el lado AB corresponde al lado DE
$\measuredangle B$ corresponde a $\measuredangle E$	el lado BC corresponde al lado EF
$\measuredangle C$ corresponde a $\measuredangle F$	el lado AC corresponde al lado DF

Para que el triángulo ABC sea semejante al triángulo DEF, deben cumplirse las condiciones siguientes:

1. Los ángulos correspondientes deben tener la misma medida.
2. Las razones de los lados correspondientes deben ser constantes; es decir, los lados correspondientes son proporcionales.

Si se demuestra que cualquiera de estas condiciones se cumple para un par de triángulos, se concluirá que éstos son semejantes.

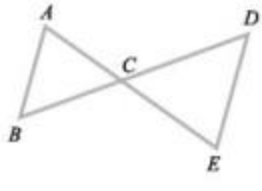


FIGURA 45

EJEMPLO 4 En la figura 45, $\overleftrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overleftrightarrow{ED}$. ¿Cómo puede verificarse que $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle EDC$?

Como $\overleftrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overleftrightarrow{ED}$, el $\overleftrightarrow{BD}$ transversal forma ángulos interiores alternos iguales ABC y EDC. Asimismo, el $\overleftrightarrow{AE}$ transversal forma ángulos interiores alternos iguales BAC y DEC. Se sabe que $\measuredangle ACB = \measuredangle ECD$, porque son ángulos verticales. Debido a que los ángulos correspondientes tienen las mismas medidas en los triángulos ABC y EDC, los triángulos son semejantes.



El puente Navajo, en Arizona, en el Cañón del Mármol del río Colorado, muestra **triángulos congruentes y semejantes**. Los triángulos correspondientes en los lados izquierdo y derecho del puente son congruentes, mientras que los triángulos son semejantes conforme se hacen más pequeños hacia el centro del puente.

Una vez que se ha demostrado que dos ángulos de un triángulo son iguales a los dos ángulos correspondientes de un segundo triángulo, no es necesario demostrar lo mismo para el tercer ángulo. Como en cualquier triángulo la suma de los ángulos es igual a 180°, se puede concluir que las medidas de los ángulos restantes *deben* ser iguales. Esto lleva a la propiedad siguiente de la semejanza Ángulo-Ángulo.

Propiedad de semejanza Ángulo-Ángulo (AA)

Si las medidas de dos ángulos de un triángulo son iguales a las de dos ángulos correspondientes de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

EJEMPLO 5 En la figura 46, $\triangle EDF$ es semejante a $\triangle CAB$. Encuentre las longitudes desconocidas de los lados del $\triangle EDF$.

Como ya se mencionó, los triángulos semejantes tienen lados correspondientes proporcionales. Utilice ese hecho para encontrar los lados desconocidos del triángulo más pequeño. El lado DF del triángulo pequeño corresponde al lado AB del más grande, y los lados DE y AC se corresponden. Esto lleva a la proporción:

$$\frac{8}{16} = \frac{DF}{24}.$$

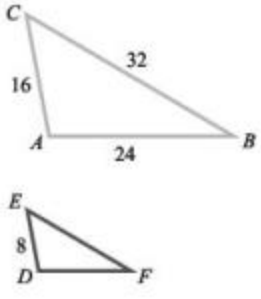


FIGURA 46

Con el empleo de una técnica del álgebra, se iguala los dos productos cruzados (como método alterno de solución, multiplique el lector ambos lados por 48, el mínimo común múltiplo de 16 y 24). Al hacer los productos cruzados queda:

$$\begin{aligned} 8(24) &= 16DF \\ 192 &= 16DF \\ 12 &= DF. \end{aligned}$$

El lado DF tiene una longitud de 12.

El lado EF corresponde al lado CB. Esto lleva a establecer otra proporción.

$$\begin{aligned} \frac{8}{16} &= \frac{EF}{32} \\ \frac{1}{2} &= \frac{EF}{32} \quad \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\ 2EF &= 32 \\ EF &= 16 \end{aligned}$$

El lado EF tiene una longitud de 16. ■

EJEMPLO 6 Encuentre las medidas de las partes desconocidas de los triángulos semejantes STU y ZXY, de la figura 47.

Aquí, los ángulos X y T se corresponden, al igual que los ángulos Y y U, y los ángulos Z y S. Como los ángulos Z y S se corresponden y el ángulo S mide 52°, el ángulo Z también debe medir 52°. La suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180°. En el triángulo más grande, $X = 71°$ y $Z = 52°$. Para encontrar Y, se plantea una ecuación y se resuelve para Y.

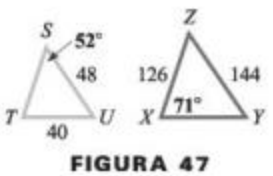


FIGURA 47

$$X + Y + Z = 180$$
$$71 + Y + 52 = 180$$
$$123 + Y = 180$$
$$Y = 57$$

El ángulo Y mide 57°. Como los ángulos Y y U se corresponden, también $U = 57°$.

Ahora se obtiene los lados desconocidos. Los lados SU y ZY son correspondientes, al igual que TS y XZ, y TU y XY, lo que conduce a las proporciones siguientes.

$$\frac{SU}{ZY} = \frac{TS}{XZ} \qquad \frac{XY}{TU} = \frac{ZY}{SU}$$
$$\frac{48}{144} = \frac{TS}{126} \qquad \frac{XY}{40} = \frac{144}{48}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{TS}{126} \qquad \frac{XY}{40} = \frac{3}{1}$$
$$3TS = 126 \qquad XY = 120$$
$$TS = 42$$

El lado TS tiene una longitud de 42, y el lado XY otra de 120. ■

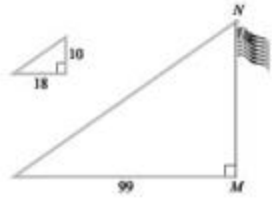


FIGURA 48

EJEMPLO 7 Lucie Wanersdorfer, la jefa de la oficina de correos de LA, quiere medir la altura del asta de la bandera de la oficina. Observa que en el instante en que la sombra de la estación mide 18 pies, la sombra del asta mide 99 pies. El edificio tiene 10 pies de altura. ¿Cuál es la altura del asta?

La figura 48 muestra la información que se proporciona en el problema. Los dos triángulos que se presentan son semejantes, por lo que los lados correspondientes están en proporción, con lo cual:

$$\frac{MN}{10} = \frac{99}{18}$$
$$\frac{MN}{10} = \frac{11}{2}$$
$$2MN = 110$$
$$MN = 55.$$

El asta mide 55 pies de alto. ■

El teorema de Pitágoras Ya se ha usado el teorema de Pitágoras en una parte anterior de este libro, y debido a su importancia en matemáticas, en esta sección se profundizará más en la geometría de los triángulos. Hay que recordar que en un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto (y en consecuencia, el lado más largo) se llama **hipotenusa**. Los otros dos lados, que son perpendiculares, reciben el nombre de **catetos**.



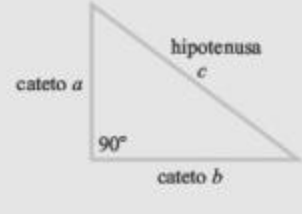
La distancia vertical de la base a la punta de este árbol roto es de 55 pulgadas. La longitud de la parte rota es de 144 pulgadas. ¿Qué distancia sobre el piso hay de la base del árbol a su punta, donde la parte rota toca el piso?

Teorema de Pitágoras

Si los dos catetos de un triángulo rectángulo tienen catetos a y b, y la hipotenusa tiene una longitud c, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Es decir, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



PARA REFLEXIONAR

Demostración del teorema de Pitágoras

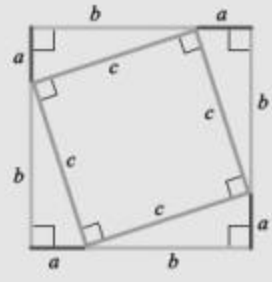


Es probable que el teorema de Pitágoras sea el que se haya demostrado en más formas diferentes que cualquier otro de las matemáticas. En 1927 se publicó por vez primera un libro que lleva por título *The Pythagorean Proposition,* por Elisha Scott Loomis. Contiene más de 250 pruebas distintas del teorema. Se reimprimió en 1968 por parte del National Council of Teachers of Mathematics como el primero de una serie de *Classics in Mathematics Education.*

Una de las pruebas más populares del teorema se presenta en el ejercicio de estudio en grupo que sigue:

Para análisis en grupo

Copie la figura adjunta en el pizarrón con objeto de demostrar el teorema de Pitágoras. Tenga presente que el área del cuadrado mayor debe ser siempre la misma, no importa cómo se determine. Está constituido por cuatro triángulos rectángulos y un cuadrado más pequeño.



(a) La longitud de un lado del cuadrado grande es _____, por lo que su área es (_____)², o bien _____ .

(b) El área del cuadrado grande también puede calcularse con la obtención de la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos y el cuadrado más pequeño. El área de cada triángulo rectángulo es _____ , por lo que la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos es _____ . El área del cuadrado más pequeño es _____ .

(c) La suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos y el cuadrado más pequeño es _____ .

(d) Como las áreas de los incisos (a) y (c) representan el área de la misma figura, las expresiones deben ser iguales. Si éstas se igualan, se obtiene que _____ = _____ .

(e) Se resta $2ab$ de cada lado de la ecuación del inciso (d) y se obtiene el resultado deseado: _____ = _____ .



FIGURA 49

En realidad, Pitágoras no descubrió el teorema que lleva su nombre, aunque la leyenda dice que sacrificó 100 bueyes a los dioses para agradecer su descubrimiento. Hay evidencias de que los babilonios ya conocían el concepto muy bien. Sin embargo, la primera prueba, tal vez sí sea la que realizó Pitágoras.

La figura 49 ilustra el teorema en forma sencilla, con el empleo de un patrón de cuadros. En la figura, el lado del cuadrado junto a la hipotenusa mide 5 unidades, en tanto que los adyacentes a los catetos miden 3 y 4 unidades. Si se hace que $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$, se observa que se satisface la ecuación del teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$9 + 16 = 25$$
$$25 = 25$$

Los números naturales 3, 4 y 5 forman un **trío pitagórico**, ya que satisfacen la ecuación del teorema de Pitágoras. Existe un número infinito de tríos.

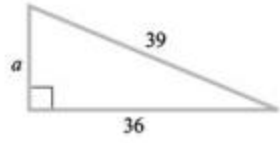


FIGURA 50

EJEMPLO 8 Determine la longitud a del triángulo rectángulo que se muestra en la figura 50.

Sea $b = 36$ y $c = 39$. Al sustituir estos valores en la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ es posible resolver para a.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a^2 + 36^2 &= 39^2 \\ a^2 + 1296 &= 1521 \\ a^2 &= 225 && \text{Restar 1296 de ambos lados.} \\ a &= 15 && \text{Seleccione la raíz cuadrada positiva, ya que } a > 0. \end{aligned}$$

Como comprobación, verifique que 15, 36 y 39 forman un trío pitagórico. ■

Solución de problemas

El Papiro Matemático de El Cairo es un documento egipcio que data del año 300 a.C. Se descubrió en 1938 y se estudió en 1962. Contiene 40 problemas, nueve de los cuales tienen que ver con la relación pitagórica. Uno de tales problemas se resuelve en el ejemplo 9.



FIGURA 51

EJEMPLO 9 Una escalera de 10 codos de longitud tiene su base a 6 codos de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera?

Como lo indica la figura 51, la escalera forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y el piso y la pared constituyen los catetos. Sea que x represente la distancia de la base de la pared al extremo superior de la escalera. Entonces, según el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} x^2 + 6^2 &= 10^2 \\ x^2 + 36 &= 100 \\ x^2 &= 64 && \text{Restar 36.} \\ x &= 8. && \text{Elegir la raíz cuadrada positiva de 64, ya que } x \text{ representa una longitud.} \end{aligned}$$

La escalera alcanza una altura de 8 codos. ■

El enunciado del teorema de Pitágoras es uno del tipo *si . . . entonces*. Si el antecedente (enunciado que sigue a la palabra "si") y el consecuente (enunciado que sigue a la palabra "entonces") se intercambian, el enunciado nuevo se denomina el *inverso* del original. Aunque el inverso de un enunciado verdadero podría no ser cierto, el *inverso* del teorema de Pitágoras *también* es un enunciado verdadero y puede emplearse para determinar si un triángulo es rectángulo, dadas las longitudes de los tres lados.

Inverso del teorema de Pitágoras

Si un triángulo tiene lados cuyas longitudes son a, b y c, donde c es la longitud del lado más largo, y si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.



Las 10 fórmulas matemáticas que cambiaron la faz de la Tierra Nicaragua emitió una serie de 10 estampillas postales para conmemorar ciertas fórmulas matemáticas, entre las que se incluía la del teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. Observe que el compás domina la figura.

Solución de problemas

Si un carpintero construye el piso de una habitación rectangular, es esencial que las esquinas formen ángulos rectos; de otro modo habrá problemas al construir las paredes, al colocar el piso, etc. Para comprobar que el piso *cuadra*, el carpintero puede emplear el inverso del teorema de Pitágoras.

EJEMPLO 10 Se contrató un carpintero para que agregue un cuarto de lavado de 8 pies por 12 pies a una casa ya existente. Después de construir el piso se dio cuenta de que la longitud de la diagonal del piso mide 14 pies y 8 pulgadas. ¿El piso cuadra como es apropiado?

Como 14 pies y 8 pulgadas $= 14\frac{2}{3}$ pies, el carpintero debe verificar si el enunciado siguiente es verdadero:

$$8^2 + 12^2 = \left(14\frac{2}{3}\right)^2 \quad ?$$

$$8^2 + 12^2 = \left(\frac{44}{3}\right)^2 \quad ?$$

$$208 = \frac{1936}{9} \quad ?$$

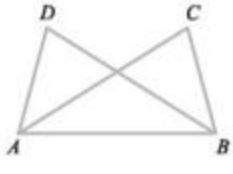
$$208 \neq 215\frac{1}{9} \qquad \text{Falso}$$

Ahora el carpintero está en un problema, puesto que la diagonal, que mide 14 pies y 8 pulgadas, en realidad debe medir $\sqrt{208} \approx 14.4 \approx 14$ pies y 5 pulgadas. Debe corregir el error para evitar problemas más grandes después. ■

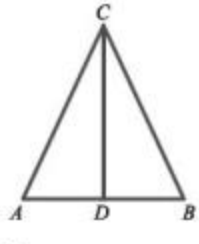
9.4 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 6 proporcione pruebas del tipo ENUNCIADO/RAZONES similares a las de los ejemplos 1 a 3.

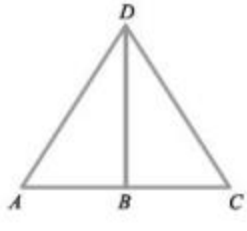
1. A partir de: $AC = BD$; $AD = BC$
Demuestre que: $\triangle ABD \cong \triangle BAC$



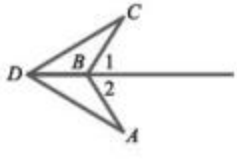
2. A partir de: $AC = BC$; $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$
Demuestre que: $\triangle ADC \cong \triangle BDC$



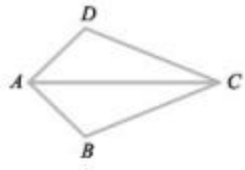
3. A partir de: $\overleftrightarrow{DB}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$; $AB = BC$
Demuestre que: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



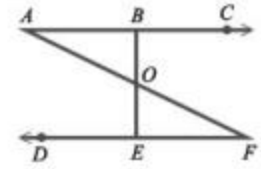
4. A partir de: $BC = BA$; $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$
Demuestre que: $\triangle DBC \cong \triangle DBA$



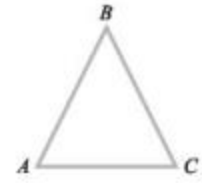
5. A partir de: $\measuredangle BAC = \measuredangle DAC$; $\measuredangle BCA = \measuredangle DCA$
Demuestre que: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.



6. A partir de: $BO = OE$; $\overleftrightarrow{OB}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$; $\overleftrightarrow{OE}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{DF}$
Demuestre que: $\triangle AOB \cong \triangle FOE$.



Los ejercicios 7 a 10 hacen referencia a la figura: un triángulo isósceles con $AB = BC$.



7. Si $\measuredangle B$ mide 46°, entonces $\measuredangle A$ mide _____ y $\measuredangle C$ mide _____ .

8. Si $\measuredangle C$ mide 52°, ¿cuál es la medida de $\measuredangle B$?

9. Si $BC = 12$ pulgadas, y el perímetro de $\triangle ABC$ es 30 pulgadas, ¿cuál es la longitud AC?

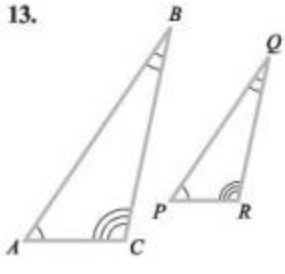
10. Si el perímetro de $\triangle ABC = 40$ pulgadas, y $AC = 10$ pulgadas, ¿cuál es la longitud de AB?

11. Explique por qué todos los triángulos equiláteros deben ser similares.

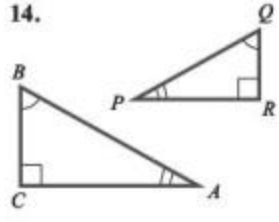
12. Explique por qué dos triángulos congruentes deben ser semejantes, pero dos triángulos semejantes podrían no ser congruentes.

Mencione los ángulos correspondientes y los lados correspondientes para cada uno de los pares siguientes de triángulos semejantes.

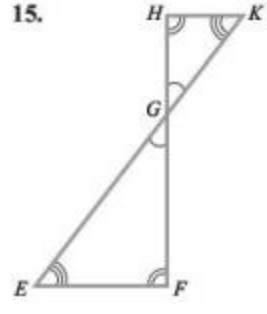
13.



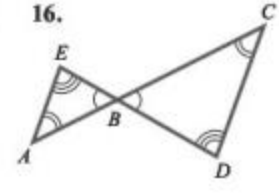
14.



15.

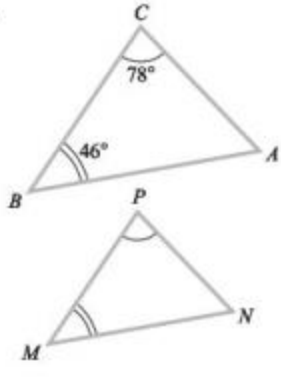


16.

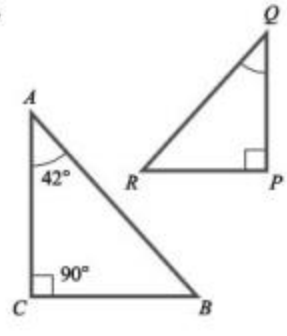


Encuentre todos los ángulos desconocidos de cada par de triángulos semejantes.

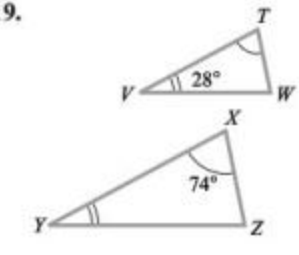
17.



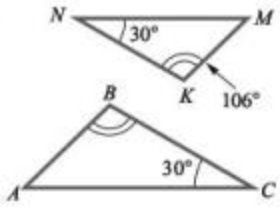
18.



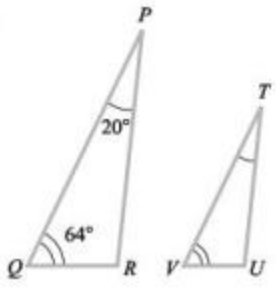
19.



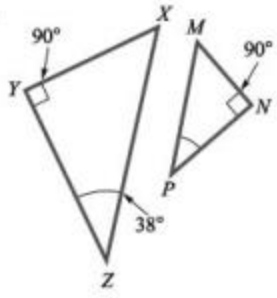
20.



21.

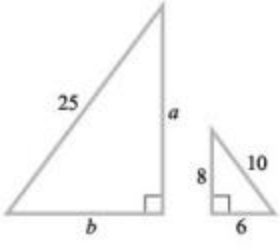


22.

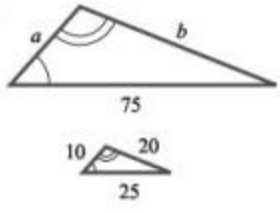


Encuentre las longitudes de los lados desconocidos de cada par de triángulos semejantes.

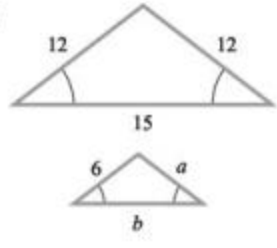
23.



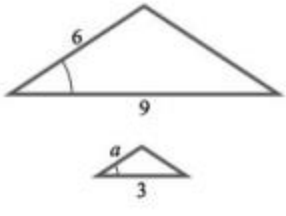
24.



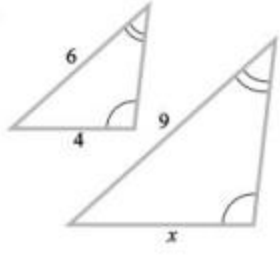
25.



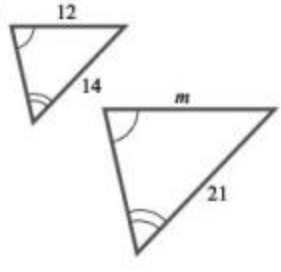
26.



27.

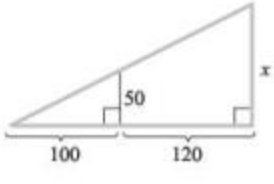


28.

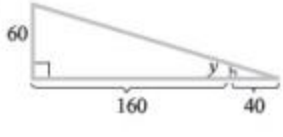


En cada diagrama hay dos triángulos semejantes. Calcule la medida desconocida en cada uno. (Una pista: En la figura para el ejercicio 29, el lado que tiene longitud de 100 *en el triángulo pequeño, corresponde a un lado de longitud* 100 + 120 = 220 *en el triángulo grande.)*

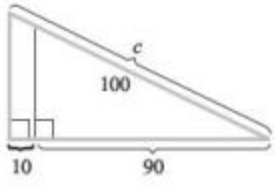
29.



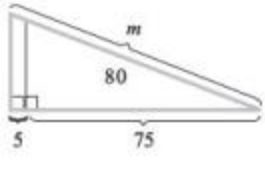
30.



31.



32.



Resuelva los problemas siguientes.

33. ***Altura de un árbol*** Un árbol proyecta una sombra de 45 metros de largo. Al mismo tiempo, la sombra que proyecta un soporte vertical mide 3 metros de longitud. Encuentre la altura del árbol.

34. ***Altura de una torre*** Una torre de observación contra incendios proyecta una sombra de 180 pies de largo, al mismo tiempo que la sombra de un camión mide 15 pies de largo. Calcule la altura que tiene la torre.

35. ***Longitudes de los lados de una fotografía*** En la fotografía de un terreno triangular, se aprecia que las longitudes de los tres lados son de 4 centímetros, 5 centímetros y 7 centímetros, respectivamente. El lado más corto del terreno real tiene una longitud de 400 metros. Determine las longitudes de los otros dos lados.

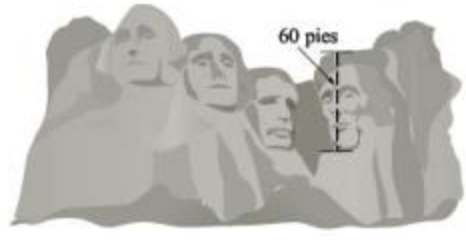
36. ***Estatura de la guardafaros*** El faro de Santa Cruz mide 14 metros de altura y proyecta una sombra de 28 metros de largo a las 7 p.m. A la misma hora, la sombra de la guardafaros tiene 3.5 metros de largo. ¿Cuál es su estatura?

37. ***Altura de un edificio*** Una casa tiene 15 pies de altura. Su sombra mide 40 pies de largo en el momento en que la sombra de un edificio cercano tiene una longitud de 300 pies. Calcule la altura del edificio.

38. ***Distancias entre ciudades*** Si se dibujan líneas en un mapa se forma un triángulo con las ciudades de Phoenix, Tucson y Yuma. En el mapa, la distancia entre Phoenix y Tucson es de 8 centímetros, la que hay entre Phoenix y Yuma es de 12 centímetros, y entre Tucson y Yuma hay 17 centímetros. La distancia real en línea recta de Phoenix a Yuma es de 230 km. Encuentre las distancias entre los otros pares de ciudades.



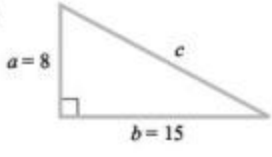
39. ***Dimensiones del monte Rushmore*** Suponga que Lincoln medía $6\frac{1}{3}$ de estatura y que su cabeza tuviera $\frac{3}{4}$ de pie de longitud. Si se sabe que la cabeza de Lincoln esculpida en el monte Rushmore tiene 60 pies de altura, calcule la estatura que su cuerpo completo hubiera debido medir si se hubiera tallado en la montaña.



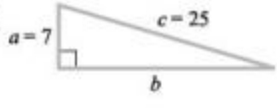
40. ***Estatura del humano más alto del mundo*** Robert Wadlow fue el ser humano más alto que jamás se registró. Cuando una varilla de 6 pies proyectaba una sombra de 24 pulgadas, Robert proyectaba otra de 35.7 pulgadas. ¿Qué estatura tenía?

En los ejercicios 41 a 48, a y b representan los dos catetos de un triángulo rectángulo, mientras que c representa la hipotenusa. Encuentre las longitudes de los lados desconocidos.

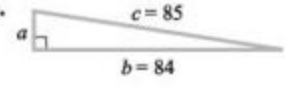
41.



42.



43.



44. $a = 24$ cm; $c = 25$ cm

45. $a = 14$ m; $b = 48$ m

46. $a = 28$ km; $c = 100$ km

47. $b = 21$ pulg; $c = 29$ pulg

48. $b = 120$ pies; $c = 169$ pies

49. Consulte el ejercicio 42 de la sección 9.2. Corrija la afirmación que hace el espantapájaros.

50. Demuestre que si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces no necesariamente es verdad que $a + b = c$.

Existen varias fórmulas que generan tríos pitagóricos. Por ejemplo, si se escogen enteros positivos r y s, con $r > s$, entonces el conjunto de ecuaciones

$$a = r^2 - s^2, \quad b = 2rs, \quad c = r^2 + s^2$$

genera tríos pitagóricos (a, b, c). Use los valores de r y s de cada uno de los ejercicios 51 a 56 para generar un trío pitagórico por medio de este método.

51. $r = 2, s = 1$ **52.** $r = 3, s = 2$

53. $r = 4, s = 3$ **54.** $r = 3, s = 1$

55. $r = 4, s = 2$ **56.** $r = 4, s = 1$

57. Demuestre que la fórmula para los ejercicios 51-56 en realidad satisface la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$.

58. Si se demuestra que si $(x, x + 1, y)$ es un trío pitagórico, entonces también lo es

$$(3x + 2y + 1, \quad 3x + 2y + 2, \quad 4x + 3y + 2).$$

Utilice esta idea para encontrar tres tríos pitagóricos más, comience con 3, 4, 5. (*Una pista:* Aquí, $x = 3$ y $y = 5$.)

Si m es un número entero impar positivo mayor que 1, *entonces*

$$\left(m, \frac{m^2 - 1}{2}, \frac{m^2 + 1}{2}\right)$$

es un triángulo pitagórico. Emplee esto para encontrar el trío pitagórico que genera cada valor de m en los ejercicios 59 a 62.

59. $m = 3$ **60.** $m = 5$

61. $m = 7$ **62.** $m = 9$

63. Demuestre que las expresiones que aparecen en las instrucciones para los ejercicios 59 a 62 en realidad satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$.

64. Demuestre que (6, 8, 10) es el único triángulo pitagórico que consiste en números pares consecutivos.

Para cualquier entero n mayor que 1,

$$(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$$

es un trío pitagórico. Use este patrón para encontrar el trío pitagórico que genera cada valor de n en los ejercicios 65 a 68.

65. $n = 2$ **66.** $n = 3$

67. $n = 4$ **68.** $n = 5$

69. Demuestre que las expresiones que se dan en las instrucciones para los ejercicios 65 a 68 en realidad satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$.

70. ¿Un triángulo isósceles rectángulo puede tener lados con catetos enteros? ¿Por qué?

Resuelva cada problema (el lector tal vez deseará revisar las ecuaciones cuadráticas, del álgebra).

71. ***Longitud del lado de un triángulo*** Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 1 metros más que el cateto más largo, y el cateto más corto mide 7 metros, encuentre la longitud del cateto más largo.

72. ***Longitudes de los lados de un triángulo*** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 1 centímetros más que el doble del cateto más corto, y el cateto más largo mide 9 centímetros menos que el triple del cateto más corto. Determine las longitudes de los tres lados del triángulo.

73. ***Altura de un árbol*** En cierto punto sobre el terreno que está a 30 pies de la base de un árbol, la distancia que hay a la altura del árbol es 2 pies más que el doble de la altura de éste. Calcule la altura del árbol.

74. ***Dimensiones de un rectángulo*** El largo de un rectángulo es de 2 pulgadas menos que el doble de su ancho. La diagonal mide 5 pulgadas. Encuentre el largo y ancho del rectángulo.

75. ***Altura del bambú roto*** [Problema del bambú roto, tomado de la obra china *Arithmetic in Nine Sections* (1261)]. Hay un bambú que mide 10 pies de altura, el extremo del cual, al romperse, toca el suelo a 3 pies del tronco. Calcule la altura a la que está la rotura.



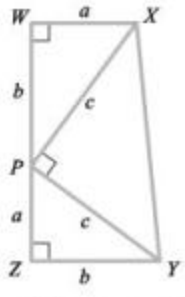
76. ***Profundidad de un estanque*** (Adaptado de *Arithmetic in Nine Sections*). En el medio de un estanque circular de 10 pies de diámetro, crece un junco que sobresale 1 pie por encima del agua. Cuando queda sumergido apenas toca la superficie del agua. ¿Cuál es la profundidad del estanque?

Cuadratura de un piso en construcción *Imagine que es un carpintero que construye el piso de una habitación rectangular. ¿Cuánto debe medir la diagonal de ésta si el piso ha de cuadrar en forma apropiada, de acuerdo con las dimensiones que se mencionan en los ejercicios 77 a 80? Redondee su respuesta a la pulgada más cercana.*

77. 12 pies por 15 pies **78.** 14 pies por 20 pies

79. 16 pies por 24 pies **80.** 20 pies por 32 pies

81. ***Prueba de Garfield del teorema de Pitágoras*** James A. Garfield, el vigésimo presidente de Estados Unidos, dio una prueba del teorema de Pitágoras que hacía uso de la figura que se muestra. Proporcione la información que se requiere en cada uno de los incisos (a) a (c) a fin de seguir su demostración.

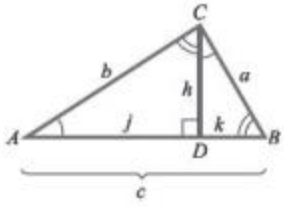


(a) Encuentre el área del trapecio $WXYZ$ con el empleo de la fórmula del área de dicha figura.

(b) Determine el área de cada uno de los triángulos rectángulos PWX, PZY y PXY.

(c) Como la suma de las áreas de los tres triángulos rectángulos debe ser igual al área del trapecio, iguale la expresión que resultó en el inciso (a) con la de las tres expresiones del inciso (b). Simplifique la ecuación tanto como sea posible.

82. ***Prueba del teorema de Pitágoras con triángulos semejantes*** En la figura, los triángulos rectángulos ABC, CBD y ACD son semejantes. Esto puede utilizarse para demostrar el teorema de Pitágoras. Llene los espacios en blanco con las respuestas apropiadas.



(a) Con proporciones, se tiene que $c/b =$ _____ $/j$.

(b) Con proporciones, también se tiene que $c/a = a/$_____.

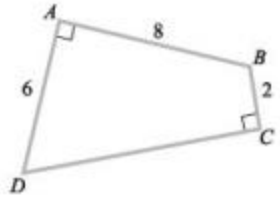
(c) Del inciso (a), $b^2 =$ _____.

(d) Del inciso (b), $a^2 =$ _____.

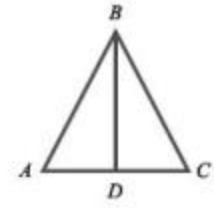
(e) De los resultados de los incisos (c) y (d) y con factorización, se tiene que $a^2 + b^2 = c($_____$)$. Pero como _____ $= c$, se concluye que _____.

Los ejercicios 83 a 90 requieren cierta creatividad, pero todos se resuelven con el uso de los conceptos que se han expuesto hasta el momento en este capítulo.

83. ***Área de un cuadrilátero*** Encuentre el área del cuadrilátero $ABCD$, si los ángulos A y C son ángulos rectos.



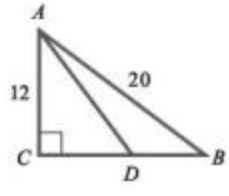
84. ***Área de un triángulo*** El perímetro del triángulo isósceles ABC (con $AB = BC$) es de 128 pulgadas. La altura BD es de 48 pulgadas. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?



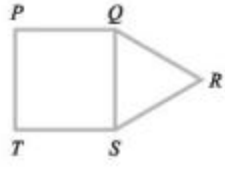
85. ***Medida de la base de un triángulo isósceles*** Un triángulo isósceles tiene una base de 24 y dos lados de 13. ¿Qué otra medida de la base puede tener un triángulo isósceles que tenga lados iguales de 13 y con la misma área que el triángulo dado?



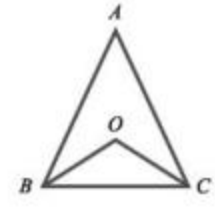
86. ***Valor de una medida en un triángulo*** En el triángulo rectángulo ABC, si $AD = DB + 8$, ¿cuál es el valor de CD?



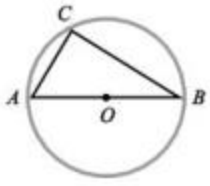
87. ***Área de un pentágono*** En la figura, el pentágono $PQRST$ está formado por un cuadrado y un triángulo equilátero de modo que $PQ = QR = RS = ST = PT$. El perímetro del pentágono es de 80. Calcule el área del pentágono.



88. ***Medida de un ángulo de un triángulo*** (Un segmento que biseca un ángulo es aquel que lo divide en dos ángulos iguales). En la figura, el ángulo A mide 50°. OB biseca al ángulo ABC y OC biseca al ángulo ACB. ¿Cuál es la medida del ángulo BOC?



Los ejercicios 89 y 90 hacen referencia a la figura. El centro del círculo es O.



89. ***Radio de un círculo*** Si un círculo $\overleftrightarrow{AC}$ mide 6 pulgadas, y $\overleftrightarrow{BC}$ mide 8 pulgadas, ¿cuál es el radio del círculo?

90. ***Longitudes de las cuerdas de un círculo*** Si $\overleftrightarrow{AB}$ mide 13 centímetros, y la longitud de $\overleftrightarrow{BC}$ es de 7 centímetros más que la de $\overleftrightarrow{AC}$, ¿cuáles son las longitudes de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$?

Compruebe que son válidas las construcciones siguientes, tomadas de la Extensión que sigue a la sección 9.2. Utilice una prueba del tipo ENUNCIADO/RAZONES.

91. Construcción 1

92. Construcción 2

93. Construcción 3

94. Construcción 4

9.5 Figuras en el espacio, volumen y área superficial

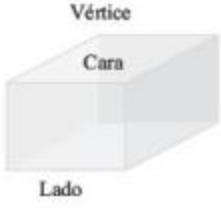


FIGURA 52

Figuras en el espacio Hasta este momento, en este capítulo se han estudiado sólo **figuras planas** —figuras que se dibujan por completo en el plano de una hoja de papel. Sin embargo, se necesitan las tres dimensiones del espacio para representar el mundo sólido que nos rodea. Por ejemplo, la figura 52 muestra una caja (en terminología matemática, un **paralelepípedo rectangular**). Las *caras* de una "caja" son rectángulos. Las caras se encuentran en *aristas*; las "esquinas" se denominan *vértices* (plural de vértice —misma palabra que se emplea para la "esquina" de un ángulo).

Las cajas son un tipo de figuras en el espacio que pertenecen a un grupo importante llamado **poliedros**, cuyas caras están constituidas sólo por polígonos. Tal vez los poliedros más interesantes sean los *poliedros regulares*. Hay que recordar que un *polígono regular* es aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales. Un poliedro regular es una figura en el espacio, cuyas caras sólo son de un tipo de polígono regular. Se desprende que únicamente hay cinco poliedros regulares diferentes. Éstos aparecen en la figura 53. Un **tetraedro** está compuesto de cuatro triángulos equiláteros, tres de los cuales coinciden en un punto. Emplee la figura para verificar que hay cuatro caras, cuatro vértices y seis aristas.



FIGURA 53

Un cuadrilátero regular se llama *cuadrado*. Un **hexaedro**, o **cubo** está constituido por seis cuadrados, tres de los cuales coinciden en un punto. Una vez más, utilice la figura 53 para verificar que un cubo tiene seis caras, ocho vértices y 12 aristas.

Los tres poliedros regulares restantes son el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. El octaedro está compuesto por grupos de cuatro triángulos regulares (es decir, equiláteros) que coinciden en un punto. El dodecaedro está formado por grupos de tres pentágonos regulares, en tanto que el icosaedro se compone de grupos de cinco triángulos regulares.

PARA REFLEXIONAR

Muchos cristales y ciertos virus adoptan la forma de poliedros regulares. Alguna vez se pensó que muchos de los virus que contagian a los animales tenían formas esféricas, hasta que el análisis con rayos X reveló que su capa externa tenían naturaleza de icosaedro. De las ilustraciones que se presentan a continuación, la de la izquierda muestra el virus de la polio.

Los *radiolarios*, como el que se aprecia en la ilustración de la derecha, son un grupo de microorganismos. Los esqueletos de estos animales unicelulares adoptan formas geométricas muy bellas. La que se muestra se basa en el tetraedro.





El cristal de sal que se ilustra en la estampilla que aparece en el lado izquierdo de la columna siguiente, revela su estructura cúbica por medio de una fotografía con rayos X, y sus iones de sodio y cloro que se alternan. La estampilla se emitió en honor de Sir Lawrence Bragg y su padre, Sir William Henry Bragg, quienes recibieron en conjunto un premio Nobel en 1915 por su trabajo pionero en el estudio de la difracción de rayos X y la física del estado sólido.





En el texto se menciona que un cubo tiene seis caras, ocho vértices y 12 aristas, mientras que un tetraedro posee cuatro caras, cuatro vértices y seis aristas. Leonhard Euler (1707-1783) investigó una relación notable entre estos números. El ejercicio siguiente, para estudiar en grupo, le permitirá también descubrirla.

Para análisis en grupo

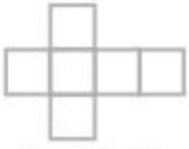
A fin de completar la tabla siguiente, toda la clase usará las figuras del texto, o modelos que el profesor o los estudiantes lleven. Después, para cada poliedro se planteará una conjetura respecto del valor de $F = V - E$. Este resultado, llamado **fórmula de Euler**, está dado en la página 545, al final del ejercicio para esta sección.

Poliedro	Caras (F)	Vértices (V)	Aristas (E)	Valor de $F + V - E$
Tetraedro				
Hexaedro (cubo)				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Hay otros dos tipos de poliedros que son figuras en el espacio que resultan familiares: las pirámides y los prismas. Las **pirámides** están hechas de lados triangulares y una base poligonal. Los **prismas** tienen dos caras en planos paralelos; estas caras son polígonos congruentes. Todas las caras restantes de un prisma son paralelogramos (vea la figura 54(a) y (b), en la página siguiente). Según esta definición, una caja también es un prisma.



Tetraedro



Hexaedro (cubo)



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

Patrones como éstos se usan para elaborar modelos tridimensionales de los poliedros regulares.

El círculo, aunque es una figura plana, no es un polígono (¿por qué?). La figura 54(c) muestra figuras espaciales formadas en parte por círculos, entre ellas *conos circulares rectos* y *cilindros circulares rectos*. La figura también presenta la forma en que un círculo genera un *toro*, sólido en forma de rosquilla que posee propiedades topológicas interesantes. Vea la sección 9.7.



Pirámides

(a)



Prismas

(b)



Cono circular recto

Cilindro circular recto



Círculo rotatorio que general un toro

(c)

FIGURA 54

Volumen y área superficial En tanto que el área es una medida de la superficie cubierta por una figura plana, el **volumen** es una medida de la capacidad de una figura en el espacio. El volumen se mide en unidades *cúbicas*. Por ejemplo, un cubo con aristas que midan 1 centímetros tiene un volumen de 1 centímetros cúbico, que también se escribe 1 cm^3, o 1 cc. El **área superficial** es el área total que se cubriría si la figura en el espacio se pelara y la cáscara se aplanara. El área superficial se mide en unidades *cuadradas*.

Volumen y área superficial de una caja

Suponga que una caja tiene longitud ℓ, ancho w y altura h. Entonces, el volumen V y el área superficial S quedan dados por las fórmulas

$$V = \ell wh \quad \text{y} \quad S = 2\ell w + 2\ell h + 2hw.$$

En particular, si la caja es un cubo con arista de longitud s,

$$V = s^3 \quad \text{y} \quad S = 6s^2.$$



$V = \ell wh$
$S = 2\ell w + 2\ell h + 2hw$



$V = s^3$
$S = 6s^2$

John C. Conway, de Princeton University, acuñó el término *hoyoedro* para describir un poliedro con un hoyo que pasa a través de todas sus caras y mantiene su naturaleza de poliedro (*Science News*, vol. 157, 17 de junio de 2000, p. 399). Esto antes de saber que una forma tal existía. Jade P. Vinson, también de *Princeton University*, ya demostró que un objeto como ése existe, y produjo un hoyoedro monstruoso que consiste en 78,585,627 caras. Conway había ofrecido un premio para quien produjera un hoyoedro: $10,000 dividido entre el número de caras. Así, por sus esfuerzos Vinson obtuvo $.0001. Conway cree que alguien finalmente encontrará un hoyoedro con menos de 100 caras.

EJEMPLO 1 Calcule el volumen V y el área superficial S de la caja que se muestra en la figura 55.

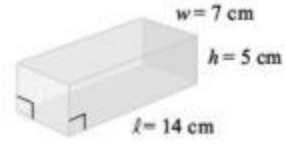


FIGURA 55

Para encontrar el volumen, se usa la fórmula $V = \ell wh$ con $\ell = 14$, $h = 18$ y $h = 5$.

$$V = \ell wh = 14 \cdot 7 \cdot 5 = 490$$

El volumen se mide en unidades cúbicas, por lo que el de la caja es de 490 centímetros cúbicos, o 490 cm^3.

Para encontrar el área superficial, use la fórmula $S = 2\ell w + 2\ell h + 2hw$.

$$S = 2(14)(7) + 2(14)(5) + 2(5)(7) = 196 + 140 + 70 = 406$$

Igual que las áreas de las figuras planas, las áreas superficiales de las figuras en el espacio se dan en medidas cuadradas; así el área superficial de la caja es 406 centímetros cuadrados o 406 cm^2. ■

Una lata común es un ejemplo de **cilindro circular recto**.

Volumen y área superficial de un cilindro circular recto

Si un cilindro circular recto tiene altura h y radio de su base igual a r, entonces el volumen V y el área superficial S quedan dados por las fórmulas

$$V = \pi r^2 h$$

y

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

(En las fórmulas para S, se incluyen las áreas superior e inferior.)



$V = \pi r^2 h$
$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$



FIGURA 56

EJEMPLO 2 En la figura 56, el cilindro circular recto tiene área superficial de 288π pulgadas cuadradas, y el radio de su base es de 6 pulgadas.

(a) Encuentre la altura del cilindro.

Como se sabe que $S = 288\pi$ y $r = 6$, se sustituye en la fórmula del área superficial con objeto de hallar el valor de h.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi rh + 2\pi r^2 \\ 288\pi &= 2\pi(6)h + 2\pi(6)^2 && S = 288\pi,\ r = 6 \\ 288\pi &= 12\pi h + 72\pi \\ 216\pi &= 12\pi h && \text{Restar } 72\pi. \\ h &= 18 && \text{Dividir entre } 12\pi. \end{aligned}$$

La altura es de 18 pulgadas.

El **modelo geométrico de Ptolomeo** era muy complejo: ubicaba a la Tierra en el centro y a los planetas y el Sol en movimiento según órbitas circulares y epiciclos. El sistema de Ptolomeo rigió durante la Edad Media hasta la época de la Revolución Copernicana, llamada así en honor de **Nicolás Copérnico**.

Copérnico desarrolló su sistema propio, en el que el Sol ocupaba el centro (heliocentrismo) en vez de la Tierra (geocentrismo). Tal vez le parezca un pequeño cambio, pero marcó una revolución del pensamiento y el inicio del mundo moderno.

(b) Encuentre el volumen del cilindro.

Use la fórmula del volumen, con $r = 6$ y $h = 18$.

$$V = \pi r^2 h = \pi(6)^2(18) = 648\pi$$

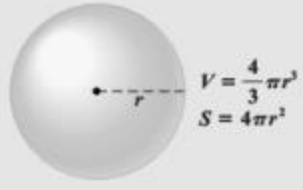
El volumen exacto es de 648π pulgadas cúbicas, o aproximadamente 2034.72 pulgadas cúbicas, con $\pi \approx 3.14$. ■

La analogía tridimensional de un círculo es una **esfera**. Queda definida al reemplazar la palabra plano por espacio en la definición del círculo, de (vea la sección 9.2).

Volumen y área superficial de una esfera

Si una esfera tiene radio r, entonces el volumen V y el área superficial S se denotan por las fórmulas

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{y} \quad S = 4\pi r^2.$$



EJEMPLO 3 Suponga que un tanque esférico que tiene radio de 3 metros puede llenarse con combustible líquido por $200. ¿Cuánto costará llenar con el mismo combustible otro tanque esférico de 6 metros de radio?

Primero debe encontrarse el volumen del tanque cuyo radio es 3 metros. Se denominará V_1.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{Fórmula del volumen de una esfera}$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = \frac{4}{3}\pi(27) = 36\pi$$

Ahora hay que encontrar V_2, volumen del tanque con radio de 6 metros.

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi(6)^3 = \frac{4}{3}\pi(216) = 288\pi$$

Observe que si se duplica el radio de la esfera de 3 a 6 metros, el volumen se incrementa 8 veces, puesto que:

$$V_2 = 288\pi = 8V_1 = 8(36\pi).$$

Por tanto, el costo de llenar el tanque más grande es 8 por el costo de llenar el pequeño: $8(\$200) = \$1600$. ■

FIGURA 57

La figura en el espacio que se muestra en la figura 57 es un **cono circular recto**.

Volumen y área superficial de un cono circular recto

Si un cono circular recto tiene una altura h y el radio de su base circular es r, entonces el volumen V y el área superficial S están dadas por las fórmulas siguientes:



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

y $$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2.$$

(En la fórmula para S está incluida el área de la base.)

Una **pirámide** es un espacio que tiene una base poligonal y lados triangulares. La figura 58 muestra una pirámide con base cuadrada.

FIGURA 58

Volumen de una pirámide

Si B representa el área de la base de una pirámide, y h la altura (es decir, la distancia perpendicular desde la parte superior, o ápice, hasta la base), entonces el volumen V está dado por la fórmula



$$V = \frac{1}{3}Bh$$

donde B es el área de la base

$$V = \frac{1}{3}Bh.$$



La Torre Transamérica, en San Francisco, es una pirámide con base cuadrada. Cada lado de la base tiene una longitud de 52 metros, mientras que la altura del edificio es de 260 metros. La fórmula para el volumen de una pirámide indica que el volumen del edificio es de cerca de 234,000 metros.

EJEMPLO 4 ¿Cuál es la razón del volumen de un cono circular recto con radio r en su base y altura h, al volumen de una pirámide de base cuadrada cuyos lados tienen longitud de r y su altura es h?

Con el empleo de la fórmula para el volumen de un cono, se tiene que:

$$V_1 = \text{Volumen del cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Como la pirámide tiene base cuadrada, el área B de su base es r^2. Con la fórmula para el volumen de una pirámide, se tiene que:

$$V_2 = \text{Volumen de la pirámide} = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}(r^2)h.$$

La razón del primer volumen al segundo es:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}r^2 h} = \pi.$$

■

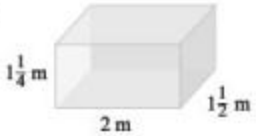
9.5 EJERCICIOS

Decida si cada uno de los enunciados siguientes es verdadero *o* falso.

1. Un cubo con volumen de 64 pulgadas cúbicas tiene un área superficial de 96 pulgadas cuadradas.
2. Un tetraedro tiene el mismo número de caras que de vértices.
3. Un dodecaedro puede usarse como modelo para el calendario de un año, en el que cada una de sus caras contenga los días de un mes, y no haya caras en blanco.
4. Cada cara de un octaedro es un octágono.
5. Si se duplica la longitud de la arista de un cubo, el cubo nuevo tendrá un volumen del doble de aquel del cubo original.
6. El valor numérico del volumen de una esfera es $r/3$ por el valor numérico de su área superficial, donde r es la medida del radio.

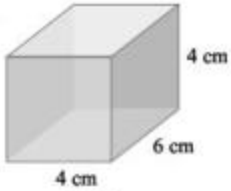
Calcule (**a**) *el volumen, y* (**b**) *el área superficial de cada una de las figuras en el espacio siguientes. Si es necesario utilice 3.14 como aproximación del valor de* π*, y redondee las respuestas a la centésima más cercana.*

7.



(caja)

8.



(caja)

9.



(caja)

10.



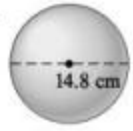
(esfera)

11.



(esfera)

12.



(esfera)

13.



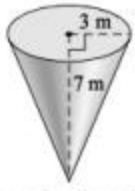
(cilindro circular recto)

14.



(cilindro circular recto)

15.



(cono circular recto)

16.



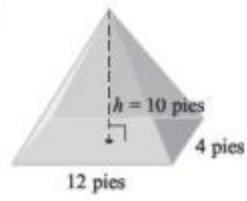
(cono circular recto)

Encuentre el volumen de cada pirámide. En cada caso, la base es un rectángulo.

17.



18.



Volúmenes de objetos comunes *Calcule cada uno de los volúmenes que se pide. Utilice* 3.14 *como aproximación para* π *si fuera necesario.*

19. Lata de café, radio de 6.3 centímetros y altura de 15.8 centímetros.

20. Lata de sopa, radio de 3.2 centímetros y altura de 9.5 centímetros.

21. Lata de comida, frijoles con puerco, diámetro de 7.2 centímetros y altura de 10.5 centímetros.

22. Tubo de cartón para hacer envíos por correo, diámetro de 2 pulgadas y altura de 40 pulgadas.

23. Tarro de café, diámetro de 9 centímetros y altura de 8 centímetros.

24. Botella de fluido corrector mecanográfico, diámetro de 3 centímetros y altura de 4.3 centímetros.

25. La Gran Pirámide de Keops, cerca de El Cairo —su base es un cuadrado de 230 metros en un lado y su altura de 137 metros.

26. El Hotel Peachtree Plaza, en Atlanta, cilindro cuya base tiene un radio de 46 metros y altura de 220 metros.

27. Marcador de carreteras en construcción, cono con altura de 2 metros y base de radio 1/2 metro.

28. Porción cónica del sombrero de un disfraz para la Noche de Brujas, con altura de 12 pulgadas y radio de la base de 4 pulgadas.

En la tabla siguiente se da uno de los valores, r (radio), d (diámetro), V (volumen) o S (área superficial), para una esfera en particular. Encuentre los tres valores restantes. Deje el símbolo de π *en sus respuestas.*

	r	*d*	*V*	*S*
29.	6 pulg			
30.	9 pulg			
31.		10 pies		
32.		40 pies		
33.			$\frac{32}{3}\pi$ cm^3	
34.			$\frac{256}{3}\pi$ cm^3	
35.				4π m^2
36.				144π m^2

Resuelva cada uno de los problemas que siguen.

37. ***¿Volumen o área superficial?*** Con objeto de determinar la cantidad de líquido que contendrá un tanque esférico, ¿se necesitaría utilizar el volumen o el área superficial?

38. ***¿Volumen o área superficial?*** A fin de calcular la cantidad de cuero que se requiere para manufacturar un balón de básquetbol, ¿se necesita usar el volumen o el área superficial?

39. ***Longitud del lado de un cubo*** Uno de los tres famosos problemas de construcción de los matemáticos griegos consistía en obtener la arista de un cubo con el doble del volumen de otro cubo dado. Si la longitud de cada lado del cubo dado es x, ¿cuál sería el largo de cada lado del cubo con el doble del volumen original?

40. Resuelva en orden los incisos de este ejercicio, y úselos para establecer una generalización acerca de los volúmenes de las esferas. En sus respuestas deje los términos de π.

(a) Encuentre el volumen de una esfera que tiene un radio de 1 metro.

(b) Suponga que el radio se duplica a 2 metros. ¿Cuál es el volumen?

(c) Si el radio se duplica, ¿cuántas veces se incrementa el volumen? [Para averiguarlo, divida la respuesta del inciso (b) entre la respuesta del inciso (a).]

(d) Suponga que el radio de la esfera del inciso (a) se triplica a 3 metros. ¿Cuál es el volumen?

(e) Si el radio se triplicara, ¿cuántas veces se incrementaría el volumen?

(f) En general, si el radio de una esfera se multiplica por n, el volumen se multiplicaría por _____ .

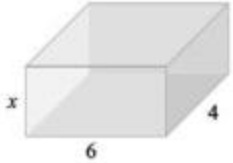
Costo de llenar un tanque esférico *Si un tanque esférico de* 2 metros *de diámetro se llena por* \$300 *con cierto líquido, encuentre el costo de llenar tanques de los diámetros siguientes.*

41. 6 m **42.** 8 m **43.** 10 m

44. Emplee la lógica del ejercicio 40 para responder lo siguiente: si el radio de una esfera se multiplica por n, entonces el área superficial se multiplicará por _____ .

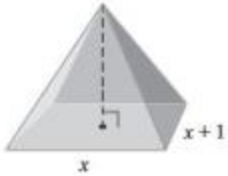
Cada una de las figuras siguientes tiene el volumen que se indica. Calcule el valor de x.

45. $V = 60$



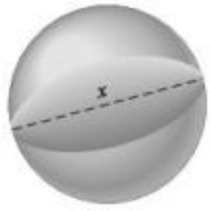
(caja)

46. $V = 450$



$h = 15$
(pirámide)
Base rectangular

47. $V = 36\pi$



(esfera)

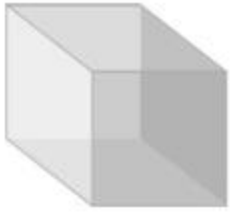
48. $V = 245\pi$



(cono circular recto)

Los ejercicios 49 a 56 requieren cierta creatividad, pero todos se resuelven con los conceptos que se han presentado hasta el momento en este capítulo.

49. ***Volumen de una caja*** Las áreas de los lados de una caja rectangular son de 30, 35 y 42 pulgadas cuadradas. ¿Cuál es el volumen de la caja?



50. ***Razones de volúmenes*** En la figura, un cono circular recto está inscrito en una semiesfera. ¿Cuál es la razón del volumen del cono al volumen de la semiesfera?



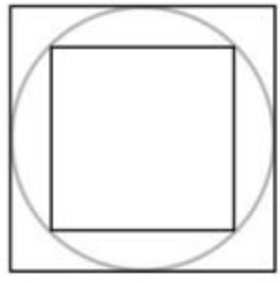
51. ***Volumen de una esfera*** Un plano interseca una esfera para formar un círculo como el que se muestra en la figura. Si el área del círculo que forma la intersección es de 576π pulgadas cuadradas, ¿cuál es el volumen de la esfera?



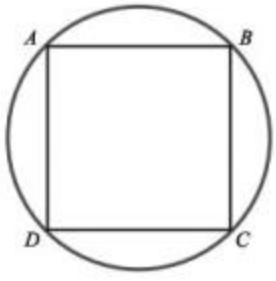
52. ***Cambio en el volumen*** Si la altura de un cilindro circular recto se divide a la mitad y el diámetro se triplica, ¿cómo cambia el volumen?



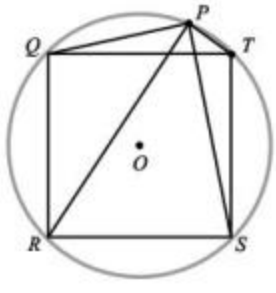
53. ***Razón de áreas*** ¿Cuál es la razón del área del cuadrado circunscrito al área del cuadrado inscrito?



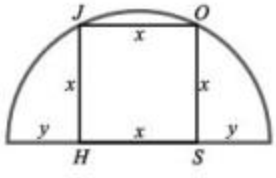
54. ***Perímetro de un cuadrado*** Suponga que el diámetro del círculo que se muestra es de 8 pulgadas. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado inscrito *ABCD*?



55. ***Valor de una suma*** En el círculo que se muestra, con centro en O y radio de 6, está inscrito el cuadrado $QTSR$. Determine el valor de $PQ^2 + PT^2 + PR^2 + PS^2$.



56. ***Razón de las longitudes de los lados*** El cuadrado *JOSH* está inscrito en un semicírculo. ¿Cuál es la razón de x a y?



Respuesta de la sección Para análisis en grupo de la página 537: La fórmula de Euler es $F + V - E = 2$.

9.6 Geometría transformacional

Existen muchas ramas de la geometría. En este capítulo se estudiaron conceptos de la geometría euclidiana. Una rama en particular de la geometría, conocida como **geometría transformacional**, investiga la manera en que una figura geométrica puede transformarse en otra. En la geometría transformacional se requiere reflejar, rotar y cambiar el tamaño de figuras por medio de conceptos que se analiza a continuación.

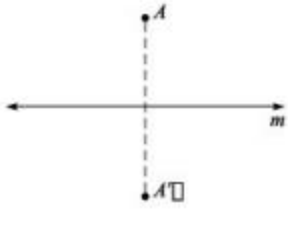


FIGURA 59

Reflexiones Una manera de transformar una figura geométrica en otra es por medio de la reflexión. En la figura 59, la línea m es perpendicular al segmento de línea AA' y también lo biseca. A' se denomina **imagen de reflexión** del punto A sobre la línea m. La línea m recibe el nombre de **línea de reflexión** para los puntos A y A'. En la figura se utiliza una línea punteada para conectar los puntos A y A', a fin de indicar que con esta transformación estos dos puntos son imágenes uno del otro.

El punto A' es la imagen de reflexión del punto A sólo para la línea m; si se usara una línea diferente, A tendría una imagen de reflexión distinta. Piense en la imagen de reflexión de un punto A sobre una línea m como sigue: coloque una gota de tinta en el punto A y doble la hoja de papel a lo largo de la línea m. El punto hecho por la tinta al otro lado de m es la imagen de reflexión de A. Si A' es la imagen de A sobre la línea m, entonces A es la imagen de A' sobre la misma línea.

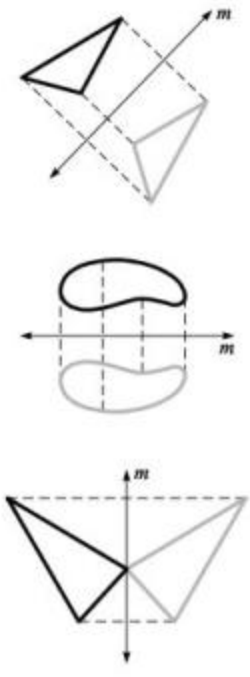


FIGURA 60

Para encontrar la imagen de reflexión de una figura, hay que hallar la imagen de reflexión de cada punto de la figura. El conjunto de todas las imágenes de reflexión de los puntos de la figura original se denomina **imagen de reflexión** de la figura. La figura 60 muestra varias figuras (en negro) y sus imágenes de reflexión (en gris) sobre las líneas que ahí aparecen.

De acuerdo con la definición de reflexión, cada punto de un plano tiene exactamente un punto como imagen de reflexión con respecto a una cierta línea de reflexión. Asimismo, cada imagen de reflexión del punto tiene exactamente un punto original. Así, dos puntos distintos no pueden tener la misma imagen de reflexión. Esto significa que hay una *correspondencia 1 a 1* entre el conjunto de puntos del plano y los puntos imagen con respecto a una línea de reflexión dada. Cualquier operación, como la reflexión, en la que existe una correspondencia 1 a 1 entre los puntos del plano y sus puntos imagen, se denomina **transformación**; a la reflexión sobre una línea la llamaremos **transformación de reflexión**.

Si un punto A y su imagen, A', son el mismo después de cierta transformación, entonces el punto A es un **punto invariante** de la transformación. Los únicos puntos invariantes de la transformación de reflexión, son aquellos que se localizan sobre la línea de reflexión.

A los tres puntos que estén sobre la misma línea recta se les llama **colineales**. En la figura 61, los puntos A, B y C son colineales, y se observa que las imágenes de reflexión A', B' y C', también son colineales. Así, la imagen de reflexión de una línea también es una línea. Esto se expresa al establecer que la **reflexión preserva la colinealidad**.

A la distancia también la preserva la transformación por reflexión. Así, en la figura 62, la distancia entre los puntos A y B, que se denota $|AB|$, es igual a la distancia entre las imágenes de reflexión A' y B', o bien:

$$|AB| = |A'B'|.$$

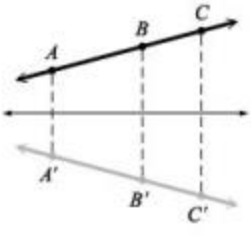


FIGURA 61

Para demostrar esto, se usa la definición de imagen de reflexión para verificar que $|AM| = |MA'|$ y $|BN| = |NB'|$. Se construyen segmentos CB y $C'B'$, ambos perpendiculares a BB'. Observe que $CBB'C'$ es un rectángulo. Como los lados opuestos de un rectángulo son iguales y paralelos, se tiene que $|CB| = |C'B'|$.

$$|CB| = |C'B'|. \qquad \text{(Lado)} \qquad \textbf{(1)}$$

Como $CBB'C'$ es un rectángulo, también se establece que

$$m\measuredangle ACB = m\measuredangle A'C'B' = 90° \qquad \text{(Ángulo)} \qquad \textbf{(2)}$$

donde se usa $m\measuredangle ACB$ para representar la medida del ángulo ACB.

Se sabe que $|AM| = |MA'|$ y se puede demostrar que $|CM| = |MC'|$, por lo que $|AC|$ debe ser igual a $|A'C'|$, o bien:

$$|AC| = |A'C'|. \qquad \text{(Lado)} \qquad \textbf{(3)}$$

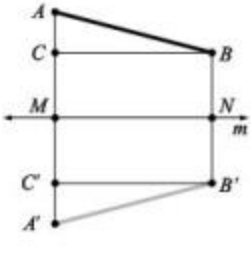


FIGURA 62

A partir de los enunciados anteriores, (1), (2) y (3), se concluye que en los triángulos ABC y $A'B'C$, dos lados y el ángulo incluido de uno son iguales en cuanto a su medida, a los dos lados y ángulo correspondientes del otro, y por ello tienen son congruentes por LAL (vea la sección 9.4). Como los lados correspondientes de los triángulos congruentes tienen igual longitud, se tiene que:

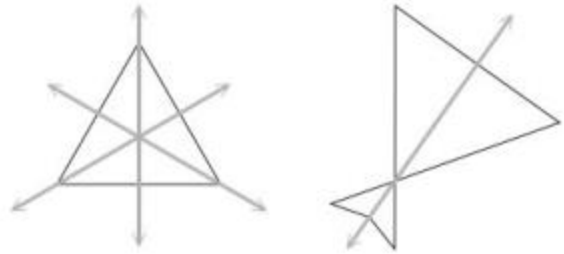
$$|AB| = |A'B'|,$$

que era lo que se quería demostrar. Así, la distancia entre dos puntos es igual a la distancia entre sus imágenes de reflexión, con lo que la reflexión preserva la distancia (la prueba que se proporcionó en realidad no está completa, ya que se asumió en forma tácita que AB no es paralela a $A'B'$, y que A y B están en el mismo lado de la línea de reflexión. Tendrían que hacerse algunas modificaciones en la prueba anterior para que incluyera estos otros casos).



Este perro de raza *beagle*, pequeño y juguetón, que lleva por nombre *D'Artagnan*, es propiedad de Cody y Margaret Westmoreland. Observe que las marcas de su cara son simétricas con respecto de una línea vertical que pasa por su húmeda y fría naricita.

Las imágenes que aparecen en la figura 63 son sus propias imágenes de reflexión sobre las líneas de reflexión que se indica. En este caso, la línea de reflexión se llama **línea de simetría** de la figura. La figura 63(a) tiene tres líneas de simetría. Cada una de las líneas que pasan por el centro de un círculo, constituye una línea de simetría.



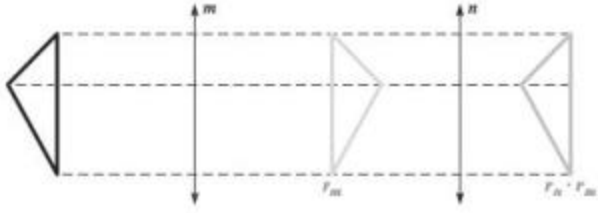
(a) (b)

FIGURA 63

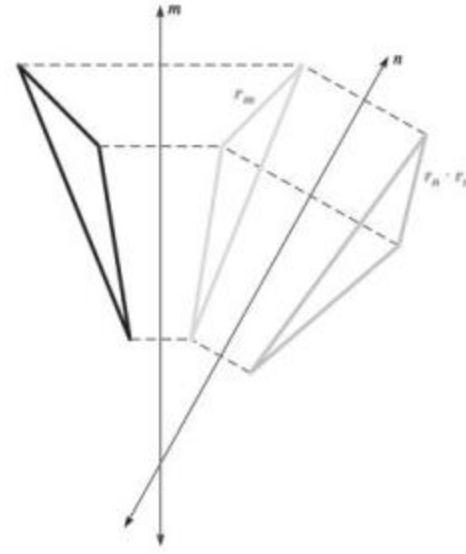


Ejemplo de reflexión

Traslaciones y rotaciones Se usará el símbolo r_m para representar la reflexión sobre la línea m, y se usará $r_n \cdot r_m$ para representar la reflexión sobre la línea m seguida por una reflexión sobre la línea n. Se llama $r_n \cdot r_m$ la **composición**, o **producto**, de las dos reflexiones r_n y r_m. La figura 64 muestra dos ejemplos de la composición de dos reflexiones. En la figura 64(a) las líneas m y n son paralelas, mientras que en la figura 64(b) se intersecan.



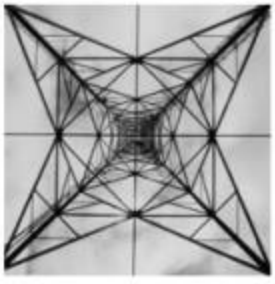
(a)



(b)

FIGURA 64

En la figura 64(a), tanto la figura original como su imagen bajo la composición de las dos reflexiones parecen estar orientada de la misma forma y tener la misma inclinación. En realidad, parece que la figura original pudiera deslizarse a lo largo de las líneas punteadas de la figura 64(a), sin rotación, hasta cubrir la imagen. Esta



¿Cuántas clases de simetría se aprecian aquí?

transformación compuesta se llama **traslación**. La figura 65 muestra una traslación, y la imagen se obtiene con la composición de dos reflexiones sobre líneas paralelas. Compruebe que la distancia entre un punto y su imagen con una traslación es el doble de la distancia entre las dos líneas paralelas. La distancia entre un punto y su imagen con una traslación se denomina **magnitud** de la traslación.

Una magnitud de traslación 0 deja a cada punto del plano sin cambio, por lo que se llama **traslación idéntica**. Una traslación de magnitud k, seguida por una traslación similar de magnitud k pero de dirección opuesta, regresa al punto a su posición original, con lo que estas dos traslaciones se denominan **inversas** una de la otra. Compruebe que no hay puntos invariantes en una traslación de magnitud $k > 0$.

Una traslación preserva la colinealidad (tres puntos sobre la misma línea tienen puntos imagen que también se ubican sobre una línea) y la distancia (la distancia entre dos puntos es la misma que la distancia entre las imágenes de los puntos).

En la figura 64(b), la figura original podría rotarse hasta que cubriera la imagen. Entonces, a la composición de dos reflexiones sobre líneas que no son paralelas se denomina una **rotación**. El punto de intersección de estas dos líneas no paralelas se llama **centro de rotación**. El triángulo negro de la figura 66 se reflejó sobre la línea m y después sobre la línea n, lo que resultó en una rotación con centro en B. Las líneas punteadas gruesas representan las trayectorias de los vértices del triángulo con la rotación. En los ejercicios se muestra que $m\measuredangle ABA'$ es el doble de largo que $m\measuredangle MBN$. La medida del ángulo ABA' se llama **magnitud** de la rotación.

Las rotaciones también preservan la colinealidad y la distancia. La transformación idéntica aquí es una rotación de 0° a 360°, y las rotaciones de, digamos, 240° y 120° (en general, $x°$ y $360° - x°$, $0 \leq x \leq 360°$) son inversas una de la otra. El centro de rotación es el único punto invariante de cualquier rotación, excepto la rotación identidad.

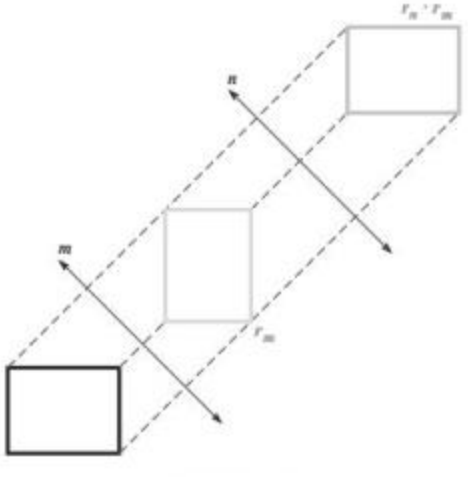


FIGURA 65

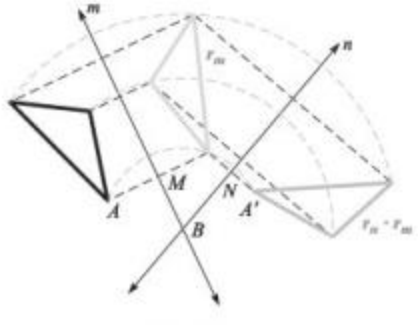


FIGURA 66

Se definió a las rotaciones como la composición de dos reflexiones sobre líneas no paralelas de reflexión. También se define una rotación si se especifica su centro, ángulo de rotación y una dirección de rotación, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

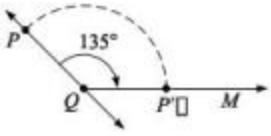


FIGURA 67

EJEMPLO 1 Encuentre la imagen de un punto P con una transformación por rotación que tiene su centro en Q y magnitud de 135° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

Para hallar P', imagen de P, primero se dibuja el ángulo PQM que mide 135°. Después se dibuja el arco de un círculo con centro en Q y radio $|PQ|$. El punto donde este arco interseca a QM es P'. Vea la figura 67. ■

La figura 68 muestra una transformación por rotación con centro en Q y magnitud de 180° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. El punto Q biseca el segmento de línea que va del punto A a su imagen A', y por ello esta rotación a veces se llama **reflexión puntual**.

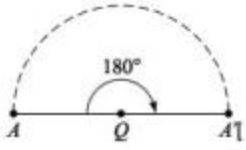


FIGURA 68

EJEMPLO 2 Encuentre las imágenes de reflexión puntual sobre el punto Q para cada una de las figuras siguientes en color negro.



FIGURA 69

Con el empleo de la definición de punto de reflexión, se encuentra las imágenes del punto de reflexión de varios puntos muestra con las imágenes, como se ilustra en gris en la figura 69. ■

Sea r_m una reflexión sobre la línea m, y sea T una traslación que tiene magnitud distinta de 0 y dirección paralela a m. Entonces, la composición de T y r_m se denomina **reflexión deslizante**, como se muestra en la figura 70. Aquí, una reflexión seguida por una traslación es la misma que la traslación seguida por una reflexión, por lo que en este caso:

$$T \cdot r_m = r_m \cdot T.$$

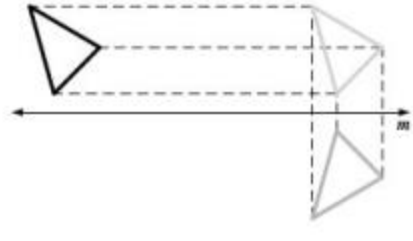


FIGURA 70



Esta criatura presenta *simetría bilateral*. Esta clase de simetría se encuentra con frecuencia en los organismos vivientes.

Como una traslación es la composición de *dos* reflexiones, una reflexión deslizante es la composición de *tres* reflexiones. Como se requiere que la traslación tenga magnitud distinta de 0, no hay identidad en la transformación deslizante.

Todas las transformaciones de esta sección son **isometrías**, o transformaciones en las que la imagen de la figura tiene el mismo tamaño y forma de la figura original. Se puede demostrar que una isometría es ya sea una reflexión o la composición de dos o más reflexiones.

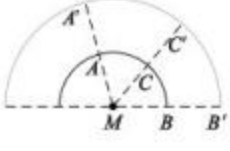


FIGURA 71

Transformaciones de tamaño La figura 71 muestra un semicírculo en negro, un punto M y un semicírculo en gris. La distancia $A'M$ es el doble de la distancia BM, y la distancia $B'M$ es el doble de la distancia BM. En realidad, todos los puntos del semicírculo imagen, tales como C', se obtuvieron con el dibujo de una





M.C. Escher (1898-1972) fue un artista gráfico holandés, reconocido sobre todo por sus ilusiones espaciales, sus construcciones imposibles, patrones geométricos repetidos (teselados) e increíbles técnicas de tallado en madera y elaboración de litografías.

Escher era un hombre con preparación, gozaba de mucho aprecio y respeto de los matemáticos, científicos y cristalógrafos, aun cuando no había tenido una instrucción formal en matemáticas o ciencias. Era un hombre sencillo que no se consideraba artista ni matemático.

Se requiere una segunda mirada a sus patrones repetidos e intrincados, estructuras matemáticas complejas y perspectivas espaciales. En la obra de Escher, lo más seguro es que lo que se ve por primera vez no sea todo lo que hay por ver. (*Fuentes*: M. C. Escher, *Simmetry Drawing E66* [Leones alados] y *Waterfall* © 2003 Cordon Art B. V., Baarn, Holland. Todos los derechos reservados; *http://www.worldofescher.com.*)

línea que pasa por M y C, y después se ubicó a C' de modo que $2|MC| = |MC|$. Una transformación así se llama **transformación de tamaño** con centro en M y magnitud 2. Hay que asumir que una transformación de tamaño tiene como magnitud a cualquier número real positivo k. Una transformación de tamaño con magnitud $k > 1$ se denomina **dilatación**, o **estiramiento**; mientras que una transformación de tamaño con magnitud de $k < 1$ se llama **contracción**, o **encogimiento**.

EJEMPLO 3 Aplique una transformación de tamaño con centro en M y magnitud de $\frac{1}{3}$ a los dos triángulos que se muestra en negro en la figura 72.

Para encontrar las imágenes de estos triángulos, se encuentran los puntos imagen de algunos puntos muestra. Por ejemplo, si se selecciona el punto A en cada uno de los triángulos originales, se encuentra los puntos imagen por medio de dibujar una línea que pase por A y M, y se localiza al punto A' de modo que $|MA'| = \frac{1}{3}|MA|$. Al hacer esto para todos los puntos de cada uno de los triángulos en color negro se obtienen las imágenes que aparecen en gris en la figura 72.

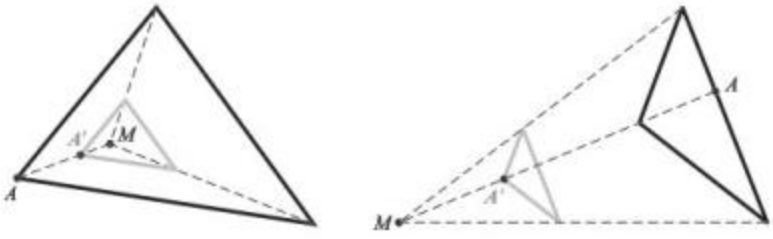


FIGURA 72 ■

La transformación identidad es una transformación de tamaño de magnitud 1, mientras que las transformaciones de tamaño de magnitud k y $1/k$, que tienen el mismo centro, son inversas una de la otra. El único punto invariante de una transformación de tamaño de magnitud $k \neq 1$ es el centro de la transformación.

EJEMPLO 4 **(a)** ¿Una transformación de tamaño preserva la colinealidad?

La figura 73 muestra tres puntos colineales, A, B y C, y sus imágenes con dos transformaciones de tamaño diferentes con centro en M: una de magnitud 3 y la otra de magnitud $\frac{1}{3}$. En cada caso, los puntos imagen parecen ser colineales, y puede demostrarse que en realidad lo son, por medio de triángulos semejantes. En realidad, la imagen de una línea que no pase por el centro de la transformación es paralela a la línea original.

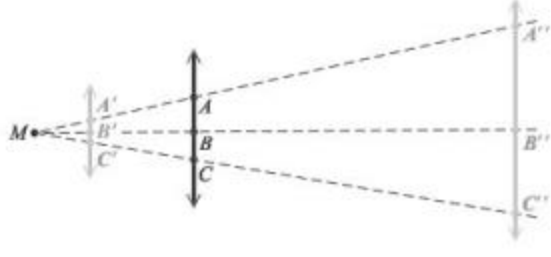
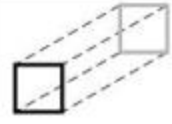
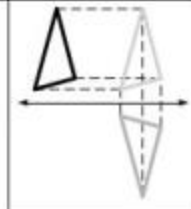


FIGURA 73

(b) ¿Una transformación de tamaño preserva la distancia?

Como se muestra en la figura 73, $|AB| \neq |A'B'|$. Así, una transformación de tamaño con magnitud $k \neq 1$ no preserva la distancia y no es una isometría. ■

Resumen de transformaciones					
	Reflexión	**Traslación**	**Rotación**	**Reflexión deslizante**	**Transformación de tamaño**
Ejemplo					
¿Se preserva la colinealidad?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
¿Se preserva la distancia?	Sí	Sí	Sí	Sí	No
¿Hay transformación identidad?	Ninguna	Magnitud 0	Magnitud 360°	Ninguna	Magnitud 1
¿Hay transformación inversa?	Ninguna	Misma magnitud; dirección opuesta	Mismo centro; magnitud $360° - x°$	Ninguna	Mismo centro; magnitud $1/k$
¿Composición de n reflexiones?	$n = 1$	$n = 2$, paralela	$n = 2$, no paralela	$n = 3$	No
¿Hay isometría?	Sí	Sí	Sí	Sí	No
¿Hay puntos invariantes?	Línea de reflexión	Ninguna	Centro de rotación	Ninguna	Centro de transformación

PARA REFLEXIONAR

Los autores agradecen a Suzanne Alejandre el permiso para reimprimir este artículo sobre los teselados, que aparece en

http://mathforum.org/sum95/suzanne/whattess.html.

Embaldosar (verbo), **teselado** (sustantivo): del latín *tessera* que significa "tablilla cuadrada" o "dado que se usa para juegos de azar". Es probable que el vocablo latín *tessera* haya provenido del griego *tessares*, que significa "cuatro", ya que un azulejo cuadrado tiene cuatro lados. El diminutivo de *teseera* fue *tessella*, pieza pequeña y cuadrada de piedra o azulejo cúbico que se usaba en los mosaicos. Como los mosaicos se extienden sobre un área dada, sin dejar descubierta ninguna región, el significado geométrico de la palabra embaldosar es cubrir el plano con un patrón de modo que ninguna región quede descubierta. Por extensión, el espacio o el hiperespacio también se puede embaldosar.

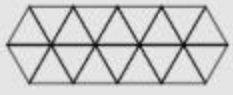
Definición

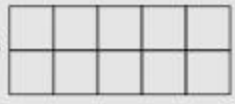
El diccionario diría que la palabra *embaldosar* significa "formar" o "acomodar" cuadrados pequeños en un patrón de damero o mosaicos. La palabra *teselado* se deriva de la forma jónica de la palabra griega *tesseres*, que en significa "cuatro". Los primeros azulejos estaban hechos de piezas cuadradas.

Un polígono regular tiene tres o cuatro o cinco o más lados y ángulos, todos iguales. Un **teselado regular** es aquel que está formado por polígonos regulares cuadrados. [Recuerde el lector que *regular* significa que los lados del polígono tienen todos la misma longitud. *Congruente* significa que los polígonos colocados tienen todos la misma forma y tamaño.]

(continúa)

En el plano euclidiano sólo tres polígonos regulares pueden hacer teselados: triángulos, cuadrados o hexágonos. Nos es imposible mostrar el plano completo, pero imagine que las siguientes son porciones tomadas de planos que se han recubierto con mosaico. A continuación se presentan ejemplos de

un teselado de triángulos 

un teselado de cuadrados 

un teselado de hexágonos 

Al ver estas tres muestras salta a la vista que los cuadrados están alineados uno con otro de modo que forman filas verticales, no así los triángulos y hexágonos. Asimismo, si se mira al mismo tiempo seis triángulos se verá que forman un hexágono, por lo que el teselado de triángulos y el de hexágonos son similares y no se pueden formar alineando directamente sus formas una con otra por la parte superior —se involucra un transporte (o un deslizamiento...)

Lo invitamos a que revise las medidas interiores de los ángulos de cada uno de los polígonos siguientes.

Forma	Medida del ángulo en grados
Triángulo	60
Cuadrado	90
Pentágono	108
Hexágono	120
Más de seis lados	Más de 120 grados

Como los polígonos regulares de un teselado deben llenar el plano en cada vértice, el ángulo interior debe se un divisor exacto de 360 grados. Esto funciona con el triángulo, el cuadrado y el hexágono, y es posible elaborar teselados funcionales para dichas figuras. Para todas las demás, los ángulos interiores no son divisores exactos de 360 grados, y por ello esas figuras no pueden recubrir el plano como un mosaico.

Convención de nomenclatura

Un teselado de cuadrados se denomina "4.4.4.4". La razón es esta: elija un vértice y después observe uno de los polígonos que toca cada vértice. ¿Cuántos lados tiene?

Como es un cuadrado, tiene cuatro lados, y de ahí proviene el primer 4. Ahora hay que ir alrededor del vértice en cualquier dirección, contando el número de lados de los polígonos hasta regresar a aquel con el que se inició. ¿Cuántos polígonos contó?

Hay cuatro polígonos, y cada uno tiene cuatro lados.



4.4.4.4

En un teselado de hexágonos congruentes regulares, si se elige un vértice y se cuentan los lados de los polígonos que lo tocan, se verá que son tres y que cada uno tiene seis lados, por lo que el teselado recibe el nombre "6.6.6":



6.6.6

Un teselado de triángulos tiene seis polígonos que rodean un vértice, y cada uno de aquellos tiene 3 lados: "3.3.3.3.3.3".



3.3.3.3.3.3

Teselados semi-regulares

También se usan una variedad de polígonos regulares para formar **teselados semi-regulares**.

Un teselado semi-regular tiene dos propiedades:

1. Está formada por polígonos regulares.
2. El acomodo de los polígonos en cada vértice es idéntico.

A continuación se presenta **ocho** teselados semi-regulares:



3.3.3.4.4



3.3.4.3.4



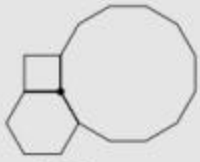
3.4.6.4



3.6.3.6



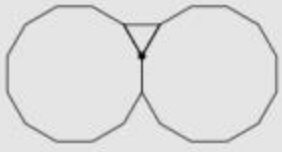
4.8.8



4.6.12

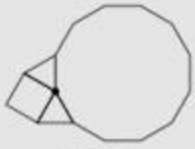


3.3.3.3.6



3.12.12

Es interesante que existan otras combinaciones que aparentemente cubrirían el plano con un mosaico, porque los arreglos de los polígonos regulares llenan el espacio alrededor de un punto. Por ejemplo:



3.4.3.12



3.4.4.6



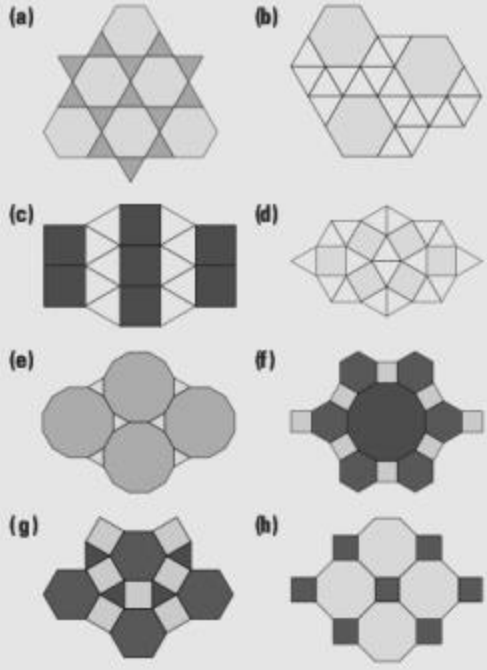
5.5.10

Si se intenta recubrir el plano con estas teselas se descubrirá que no se pueden extender en forma indefinida.

Hay un número infinito de teselados que es posible elaborar con patrones que no tienen la misma combinación de ángulos en cada vértice. También los hay hechos de polígonos que no comparten lados y vértices comunes.

Para análisis en grupo

1. Emplee las convenciones de nomenclatura para dar nombre a cada uno de los teselados semi-regulares siguientes (pueden encontrarse en: http://www.coolmath4kids.com/tesspag2.html).



2. ¿Por qué el siguiente no es un teselado semi-regular?



9.6 EJERCICIOS

Encuentre las imágenes de reflexión de las figuras que se muestran, sobre las líneas dadas.

1.



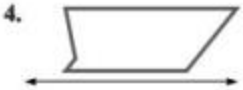
2.



3.



4.



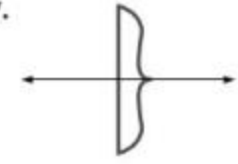
5.



6.



7.



8.



Encuentre todas las líneas de simetría de las figuras dadas.

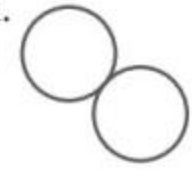
9.



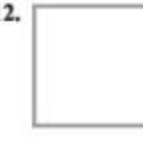
10.



11.

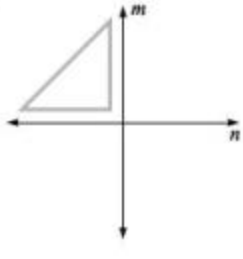


12.

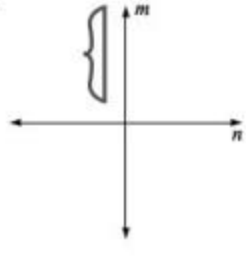


Primero refleje la figura dada sobre la línea m. Después refléjela sobre la línea n.

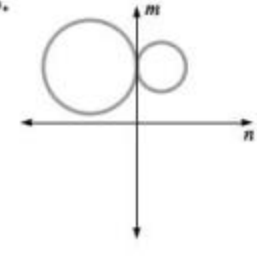
13.



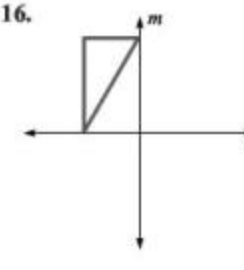
14.



15.



16.



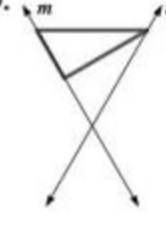
17.



18.



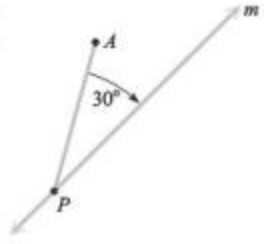
19.



20.



En los ejercicios 21 a 34, T denota una traslación de magnitud $\frac{3}{4}$ a la derecha, en dirección paralela al borde inferior de esta página. Sea r_m una reflexión sobre la línea m y sea R_P una rotación sobre el punto P con magnitud de 60° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. En cada uno de los ejercicios 21 a 32, ejecute las trasformaciones que se piden sobre el punto A de la figura que se muestra a la derecha.



21. r_m **22.** R_P **23.** T

24. $r_m \cdot r_m$ **25.** $T \cdot T$ **26.** $R_P \cdot R_P$

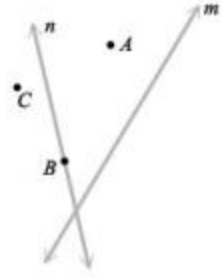
27. $T \cdot R_P$ **28.** $T \cdot r_m$ **29.** $r_m \cdot T$

30. $R_P \cdot r_m$ **31.** $r_m \cdot R_P$ **32.** $R_P \cdot T$

33. Es $T \cdot r_m$ una reflexión por deslizamiento?

34. ¿Se cumple que $T \cdot r_m = r_m \cdot T$ en este caso?

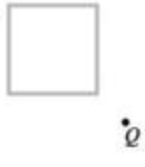
35. Suponga que se da una rotación por medio de $r_m \cdot r_n$, como se muestra en la figura. Encuentre las imágenes de *A*, *B* y *C*.



36. ¿Una reflexión por deslizamiento preserva
(a) la colinealidad?
(b) la distancia?

Encuentre las imágenes del punto de reflexión de las figuras siguientes, como centro tome los puntos que se indican.

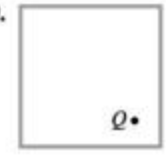
37.



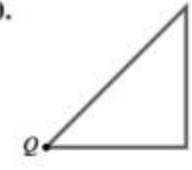
38.



39.

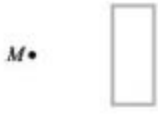


40.



Realice la transformación de tamaño que se indica.

41. Magnitud 2: centro en *M*



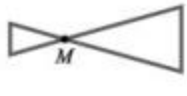
42. Magnitud 1/2; centro en *M*



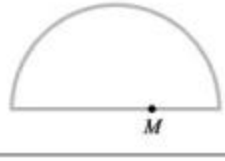
43. Magnitud 1/2; centro en *M*



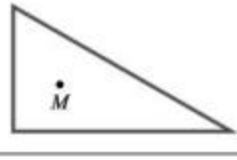
44. Magnitud 2; centro en *M*



45. Magnitud 1/3; centro en *M*



46. Magnitud 1/3; centro en *M*



9.7 Geometría no euclidiana, topología y redes

Es muy posible que los *Elementos* de Euclides sea el libro de matemáticas con mayor influencia que se haya escrito (vea la nota al margen al principio de este capítulo, en la página 492). Comienza con definiciones de ideas básicas tales como punto, línea y plano. Luego, Euclides emite cinco postulados que constituyen el fundamento de todo lo que sigue.



John Playfair (1748-1819) escribió sus *Elementos de geometría* en 1795. El axioma de Playfair es: dada una línea k y un punto P que no esté sobre la línea, existe una y sólo una línea m que pasa por P y que es paralela a k. Playfair fue un geólogo que reivindicaba el *uniformitarismo*, doctrina que afirma que los procesos geológicos dieron desde hace mucho tiempo a la Tierra las características que presenta, y que los procesos actuales son del mismo tipo que los del pasado.

A continuación, Euclides enlista cinco axiomas que considera verdades generales y no meros hechos sobre la geometría (para algunos autores griegos, los postulados eran verdades sobre un campo particular, mientras que los axiomas eran verdades generales. Hoy día, el término *axioma* se utiliza con otro sentido).

Postulados de Euclides	Axiomas de Euclides
1. Dos puntos determinan una y sólo una línea recta.	**6.** Las cosas iguales a otra son iguales entre sí.
2. Una línea recta se extiende en forma indefinida en cualquiera de sus direcciones.	**7.** Si se suma lo mismo a cantidades iguales, los resultados son iguales.
3. Es posible dibujar un círculo con cualquier centro y radio dados.	**8.** Si se resta lo mismo de cantidades iguales, los resultados son iguales.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.	**9.** Las figuras que pueden hacerse coincidir son iguales.
5. Dada una línea k y un punto P que no esté sobre la línea, existe una y sólo una línea m que pasa por P y que es paralela a k.	**10.** El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Con el uso exclusivo de estos 10 enunciados y las reglas básicas de la lógica, Euclides fue capaz de demostrar un gran número de *proposiciones* acerca de las figuras geométricas.

El enunciado del postulado 5 que se menciona en la parte superior, en realidad se conoce como *axioma de Playfair* de las líneas paralelas, que es equivalente al quinto postulado de Euclides. Para comprender por qué dicho postulado ocasionó problemas a tantos matemáticos durante largo tiempo, debe estudiarse la formulación original.

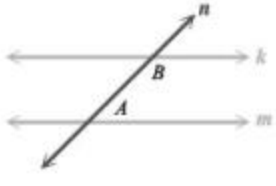


FIGURA 74

Quinto postulado de Euclides (postulado de las paralelas) Este postulado afirma que si dos líneas (en la figura 74, k y m) son tales que una tercera, n, las interseca de modo que la suma de los dos ángulos interiores (A y B) en un lado de la línea n es menor que dos ángulos rectos, entonces las dos líneas, si se extendieran lo suficiente, se encontrarían en el mismo lado de n que tuviera la suma de los ángulos interiores menor que dos ángulos rectos.

El postulado de las paralelas de Euclides es muy diferente de los otro nueve postulados y axiomas que se mencionan. Los otros son enunciados simples que parecen estar completamente de acuerdo con nuestra experiencia del mundo que nos rodea. Pero el postulado de las paralelas es largo y confuso, y difícil de entender sin un dibujo.

La diferencia entre el postulado de las paralelas y los otros axiomas fue notado por los griegos, así como por matemáticos posteriores. El punto de vista común era que no se trataba de un postulado en absoluto, sino de un teorema que debía demostrarse. Por más de 2000 años, los matemáticos trataron repetidas veces de demostrarlo.

El intento más elaborado es producto de un jesuita italiano, Girolamo Saccheri (1667-1733). Trató de demostrar el postulado de las paralelas en una forma indirecta, con la técnica que se conoce como *reducción al absurdo*. Supondría que el postulado era falso y luego demostraría que la suposición llevaría a la contradicción de algo verdadero (un absurdo). Tal contradicción demostraría la veracidad del enunciado.

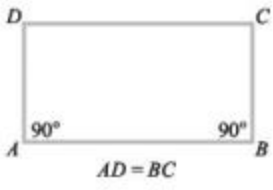


FIGURA 75

Saccheri comenzó con un cuadrilátero, como el de la figura 75. Supuso que los ángulos A y B eran rectos, y que los lados AD y BC eran iguales. Su plan era el siguiente:

1. Suponer que los ángulos C y D eran obtusos, y demostrar que esto llevaría a una contradicción.
2. Suponer que los ángulos C y D eran agudos, y demostrar que esto conduciría a una contradicción.
3. Entonces, si C y D no eran agudos ni obtusos, debían ser ángulos rectos.
4. Si C y D eran ángulos rectos, entonces podía demostrarse que el quinto postulado era verdad. De modo que sería un teorema y no un postulado.

Saccheri no tuvo problemas con la parte 1. Sin embargo, en la segunda parte en realidad no llegó a una contradicción, sino que produjo algunos teoremas tan *repugnantes* que se convenció de que había reivindicado a Euclides. Tanto así, que publicó un libro que lleva por título en inglés *Euclid Freed of Every Flaw.*

Ahora se sabe que el quinto postulado sí es un axioma y no un teorema. Es *consistente* con los demás axiomas de Euclides.

Los 10 axiomas de Euclides describen el mundo que nos rodea con exactitud notable. Ahora nos damos cuenta de que el quinto postulado es necesario en la geometría euclidiana para establecer lo *plano.* Es decir, los axiomas de Euclides describen la geometría de las *superficies planas*. Si se cambia el quinto postulado, se describe la geometría de otras superficies. Entonces, existen otros sistemas geométricos del mismo modo que existe la geometría euclidiana, e incluso se demuestran en nuestro mundo. Sólo que no nos son tan familiares. Un sistema de geometría en el que se cambie el quinto postulado se llama **geometría no euclidiana**.





Una canción que lleva por título simplemente ***Lobachevsky*** apareció por primera vez en el álbum LP *Songs by Tom Lehrer* (reedición RS-6216). En el texto del disco dice que la canción *es la introducción a una forma de salir adelante en matemáticas (lo que es la especialidad académica del autor) o en cualquier otro campo académico.* Lo invitamos a obtener un ejemplar del álbum, o del disco compacto *The Remains of Tom Lehrer*, para que vea qué es lo que Lehrer sugiere.

Los orígenes de la geometría no euclidiana Aproximadamente en la misma época, tres personas que trabajaban por separado desarrollaron un sistema no euclidiano. A principios del siglo XIX, Carl Friedrich Gauss, uno de los matemáticos más notables, obtuvo una geometría consistente al sustituir el quinto postulado de Euclides. Sin embargo, nunca publicó su trabajo porque temía hacer el ridículo ante quienes se resistían a liberarse de las formas habituales de pensamiento. Gauss fue el primero en usar el término *no euclidiano*. En 1830, Nikolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856), publicó un sistema similar en ruso. Al mismo tiempo, Janos Bolyai (1802-1860), oficial del ejército húngaro, obtuvo un sistema parecido, que publicó en 1832, sin saber del trabajo de Lobachevski. Bolyai nunca se recuperó de la desilusión por no haber sido el primero, y no hizo más investigaciones en matemáticas.

Lobachevski reemplazó el quinto postulado de Euclides con el siguiente:

> Los ángulos C y D en el cuadrilátero de Saccheri son agudos.

Este postulado de Lobachevski puede decirse de este otro modo:

> Por el punto P de una línea k (vea la figura 76), pueden dibujarse al menos dos líneas diferentes que sean paralelas a k.

Compare el lector esta forma del postulado de Lobachevski con la geometría de Euclides. En la geometría euclidiana, ¿cuántas líneas se pueden dibujar que toquen a P y sean paralelas a k? A primera vista el postulado de Lobachevski no está de acuerdo con lo que sabemos sobre el mundo que nos rodea. Pero esto sólo se debe a que pensamos que nuestro entorno inmediato es plano.

Muchos de los teoremas de la geometría euclidiana son válidos para la geometría de Lobachevski, pero otros muchos no lo son. Por ejemplo, en la geometría Euclidiana, la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es igual a 180°. En la geometría de Lobachevski, la suma de las medidas de los ángulos de cualquier

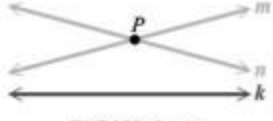
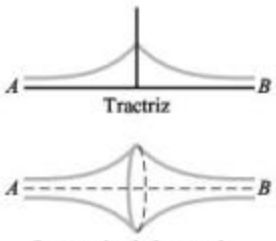


FIGURA 76



La rotaci n de la tractriz produce la seudoesfera.

FIGURA 77

triángulo es *menos* de 180°. Asimismo, los triángulos de tamaño diferente nunca tienen ángulos iguales, por lo que no existen triángulos semejantes.

La geometría de Euclides se representa en un plano. Como cualquier parte de la Tierra que miremos muy probablemente parezca plana, la geometría euclidiana es muy útil para describir el mundo cotidiano que nos rodea. La geometría no euclidiana de Lobachevski se representa en una superficie llamada **seudoesfera**. Esta superficie está formada por la rotación de una curva llamada **tractriz** sobre la línea AB de la figura 77.

Georg Riemann (1826-1866) desarrolló un segundo sistema no euclidiano. Hizo énfasis en la diferencia que hay entre una línea que continúa en forma indefinida y una que tiene longitud infinita. Por ejemplo, un círculo que se encuentre en la superficie de una esfera continúa indefinidamente pero no tiene longitud infinita. Riemann desarrolló

PARA REFLEXIONAR

A fin de pintar en forma realista un mundo de sólidos en el espacio, los artistas deben poseer un conocimiento notable de la geometría. Nuestro mundo tridimensional debe representarse de modo convincente sobre lienzos u otras superficies planas. Por ejemplo, ¿cómo debiera pintar un artista una vista real de vías de ferrocarril que se pierden en el horizonte? En realidad, los rieles se encuentran siempre a distancia constante uno del otro, pero no pueden dibujarse de ese modo excepto vistos desde arriba. El artista debe hacer que los rieles converjan en un punto. Sólo de esa manera la escena parecerá *real*.

A comienzos del siglo XV, algunos artistas encabezados por Leone Battista Alberti, Leonardo da Vinci y Alberto Durero, incursionaron en el estudio de la representación de tres dimensiones en solo dos. Encontraron métodos geométricos para hacerlo. Lo que los artistas iniciaron, los matemáticos lo desarrollaron en una geometría diferente de la de euclides —la **geometría proyectiva**.

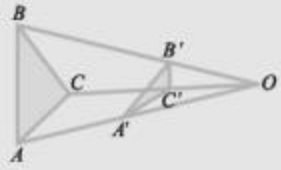
Gerard Desargues (1591-1661), arquitecto e ingeniero, era asesor técnico del gobierno francés. En 1628 encontró a Descartes en La Rochelle, y el decenio de 1630 fue miembro del grupo Parisino, que incluía a Descartes, Pascal, Fermat y Mersenne. En 1636 y 1639 publicó un tratado y varias proposiciones acerca de la sección perspectiva —Desargues había inventado la geometría proyectiva. Desafortunadamente, su obra era demasiado difícil para la época; sus términos procedían de la botánica y no usaba los símbolos cartesianos. Las innovaciones geométricas de Desargues permanecieron ocultas por casi



200 años. Uno de los manuscritos de Desargues salió a la luz en 1845, aproximadamente 30 años después de que Jean-Victor Poncelet hubiera redescubierto la geometría proyectiva.

Para análisis en grupo

Haga que un miembro del grupo pase al pizarrón con una escuadra y dibuje una figura similar a la que se muestra a continuación.



Después haga que el estudiante, *con mucho cuidado*, siga estas instrucciones.

1. Extienda las líneas AC y $A'C'$ de los dos triángulos para que se encuentren en un punto M.
2. Extienda los lados AB y $A'B'$ para que se encuentren en un punto N.
3. Extienda BC y $B'C'$ para que se encuentren en un punto P.

Ahora, todo el grupo hará una conjetura sobre lo que ha ocurrido. Este ejercicio es una ilustración del teorema de Desargues (que se enuncia en el ejercicio 12 de esta sección).



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) fue un matemático alemán. Aunque vivió poco tiempo y publicó escasos libros, su obra constituye la base de gran parte de las matemáticas modernas. Realizó contribuciones significativas en la teoría de funciones y el estudio de los números complejos, así como en la geometría. La mayoría de los actuales libros de cálculo emplean la idea de una *suma de Riemann* para definir la integral.

Riemann logró comprender en su totalidad las geometrías no euclidianas de su tiempo, las expresó sobre superficies curvas y mostró cómo extenderlas a dimensiones mayores.

la idea de la geometría sobre una esfera y reemplazó el quinto postulado de Euclides con el siguiente:

> Los ángulos C y D del cuadrilátero de Saccheri son ángulos obtusos.

En términos de las líneas paralelas, el postulado de Riemann se convierte en éste:

> Por un punto P que esté fuera de una línea k, no puede dibujarse ninguna línea que sea paralela a k.

La geometría riemanniana es importante en la navegación. Las líneas en este sistema geométrico son en realidad *grandes círculos*, o círculos cuyos centros están en el centro de la esfera. La distancia más corta entre dos puntos de una esfera es la que se encuentra a lo largo de un arco de círculo grande. Las rutas por los grandes círculos en un globo no parecen en absoluto la distancia más corta si el globo se aplana para formar un mapa, pero es parte de la distorsión que ocurre cuando se representa a la Tierra como una superficie plana. Vea la figura 78. Los lados de un triángulo dibujados sobre una esfera serían arcos de círculos grandes. Y, en la geometría riemanniana, la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es *más* de 180°.



FIGURA 78

Topología Este capítulo comenzó con la sugerencia de que la geometría euclidiana podría parecer rígida desde el punto de vista moderno. El plano y las figuras en el espacio que se estudiaron en el sistema euclidiano se diferencian a detalle en cuanto a tamaño, forma, ángulos, etc. Para una cierta figura, dichas propiedades son permanentes, por lo que se plantean delicadas preguntas acerca de la congruencia y la semejanza. Suponga que se estudiara *figuras* construidas con bandas de hule, es decir, *figuras* que pudieran estirarse, curvarse, o deformarse de otra manera sin agujerarlas o separarlas. Eso es lo que hace la **topología**, un importante tipo de geometría del siglo XX.

Los temas topológicos implican la estructura básica de los objetos, y no su tamaño o disposición. Por ejemplo, una pregunta topológica común se refiere al número de agujeros en un objeto, propiedad estructural básica que no cambia durante una deformación. No se puede deformar una pelota de hule para obtener una banda de hule sin perforarla —hacer un agujero en ella. Por consiguiente, los dos objetos no son equivalentes desde el punto de vista topológico. Por otro lado, una dona (rosquilla) y una taza son equivalentes en su topología, ya que una podría deformarse hasta formar la otra, sin que cambiara la propiedad estructural básica.

La topología en medicina La tripanosoma es un parásito que ocasiona la enfermedad del sueño a los humanos. El material genético de este parásito contiene un gran número de círculos conectados. Si se introduce a las células la sustancia bromuro de etilo, dichos círculos se entrelazan de forma irremediable, y el parásito no puede reproducirse. Así, la topología se usa para curar la enfermedad del sueño...

EJEMPLO 1 Decida si las figuras de cada par son equivalentes en cuanto a su topología.

(a) Un balón de fútbol y una caja de cereal

Si se supone que el balón está hecho de una sustancia perfectamente elástica como el hule o una masa, podría torcerse o doblarse hasta adquirir la misma forma de una caja de cereal. Por lo tanto, las dos figuras son equivalentes topológicos.

(b) Una dona (rosquilla) y un abrigo sin abrochar

Una dona tiene un hoyo, mientras que el abrigo tiene dos (las aberturas de las mangas). Entonces, este bocadillo no podría estirarse ni torcerse para que tomara la forma de la prenda de vestir sin que se le hiciera otro agujero. Debido a esto, la rosquilla y el abrigo no son equivalentes topológicos. ■

PARA REFLEXIONAR

Existen dos buenos ejemplos de superficies topológicas: la banda de **Möbius** y la **botella de Klein**. La banda de Möbius es una superficie de un solo lado llamada así en honor de August Ferdinand Möbius (1790-1868), discípulo de Gauss.

Para construir una banda de Möbius, se corta una tira rectangular de papel, de unos 3 por 25 centímetros. Se hace que el papel dé un medio giro y se pegan los extremos de 3 centímetros. Para ver cómo la banda ahora tiene un solo lado, marque con una *x* la banda y después marque otra en lo que parece ser el otro *lado*. Comience en una de las *x* que dibujó y trace una trayectoria a lo largo de la banda. Al final, llegará a la otra *x* sin cruzar el borde de la banda.

Una rama de la química llamada química topológica estudia las estructuras de las configuraciones químicas. Un avance reciente en esta área fue la síntesis de la primera banda molecular de Möbius, formada por la unión de los extremos de una banda de doble cara de átomos de carbono y oxígeno.

Un matemático confiaba
en que una banda de Möbius
un solo lado tenía.
fuerte carcajada soltarías
si por la mitad una cortaras
y de una pieza siguiera al dividirla.





Banda de Möbius



Botella de Klein

Mientras que una banda de Möbius resulta de dar a una *tira* de papel un medio giro para luego unirla consigo misma, se obtendría una botella de Klein, así llamada en honor de Félix Klein (1849-1925) si se pudiera hacer lo mismo con un *tubo* de papel. Klein produjo resultados importantes en varias áreas, inclusive en geometría no euclidiana y en los inicios de la teoría de grupos (no es posible construir una botella de Klein real. Sin embargo, para ver algunos interesantes modelos de vidrio soplado, consulte la dirección www.kleinbottle.com).

Un matemático con Klein por apellido
de la banda de Möbius hizo un Dios
Dijo si pegaras
los bordes de dos
obtendrías una botella misteriosa como la mía.

Para análisis en grupo

1. La banda de Möbius tiene otras propiedades interesantes. Con un par de tijeras corte una de ellas a lo largo. ¿Obtiene dos? Repita el proceso con lo que haya obtenido con el primer corte. ¿Qué pasa?
2. Ahora construya otra banda de Möbius y comience por cortar a lo largo a una distancia de 1/3, aproximadamente, de un borde. ¿Qué pasa?
3. ¿Cuál sería la ventaja de una banda transportadora que tuviera la configuración de una banda de Möbius?

En topología, las figuras se clasifican de acuerdo con su **género;** es decir, el número de cortes que pueden hacerse sin cortar las figuras en dos partes. El genus de un objeto es el número de ajugeros que contiene. Vea la figura 79 en la página que sigue.



Toro o **toroide** Una de las figuras más útiles en topología es el toro, superficie parecida a una dona (rosquilla) o con forma de neumático. Sus propiedades son diferentes de las de una esfera, por ejemplo. Imagine que se cubre una esfera con pelo. No podrían doblarse los cabellos en forma uniforme por completo; quedaría un punto fijo, igual que en la propia cabeza del lector. Del mismo modo, en la superficie de la Tierra los vientos no son un sistema uniforme. Existe un punto de calma en algún sitio. Sin embargo, sobre un toro el pelo sí se combaría de modo uniforme. En un planeta en forma de toro, los vientos soplarían de modo uniforme.

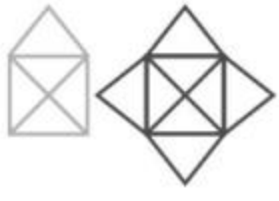


FIGURA 80



Genus de algunos objetos comunes

FIGURA 79

Redes* Otra rama de la geometría moderna es la teoría de grafos. Las redes son un tema de estudio de esta teoría.

Una **red** es un diagrama que consiste en varias trayectorias (o **arcos**) que unen puntos (llamados **vértices** o **nodos**). Una red se concibe como un conjunto de arcos y vértices. La figura 80 muestra dos ejemplos. El estudio de las redes comenzó formalmente con el llamado problema de los puentes de Königsberg, que resolvió Leonhard Euler (1707-1783). En Königsberg, Alemania, el río Pregel corría a media ciudad. En el río había dos islas. En vida de Euler existían siete puentes que conectaban las islas con las márgenes del río.

Los domingos, los habitantes de la ciudad gustaban de pasear por los puentes. Poco a poco se estableció una competencia para ver si alguien encontraba una ruta que cruzara cada uno de los puentes exactamente una vez. El problema se relaciona con lo que los topólogos de hoy llaman el *recorrido* de una red. Nadie pudo encontrar una solución. El problema se hizo tan famoso que en 1735 llegó a oídos de Euler, que en aquel entonces se encontraba en la corte de la emperatriz Catalina la Grande, de Rusia. Para tratar de resolverlo, Euler comenzó por dibujar una red que representaba el sistema de puentes, como se observa en la figura 81.

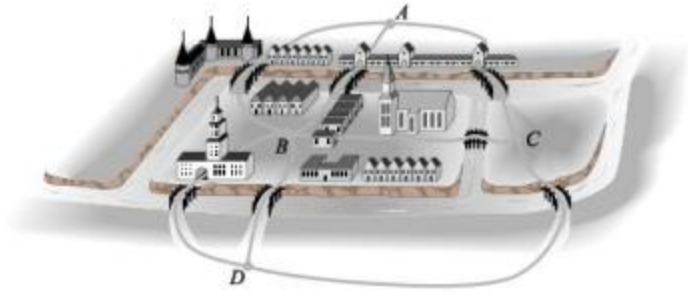


FIGURA 81

* Existe un capítulo entero consagrado a la teoría de grafos, en el que las redes conforman uno de los temas de estudio. Si dicho capítulo no se encuentra en este libro y usted está interesado en profundizar en la cuestión de la redes, contacte a su representante local de Pearson Educación.

Euler observó que había tres rutas que coincidían en el vértice A. Como 3 es un número impar, llamó a A un **vértice impar**. Al haber tres rutas que llegan a A, éste debe ser un punto de inicio o de terminación para cualquier recorrido de la red. Esto debe ser cierto; de otro modo, al llegar a A en una segunda vuelta no habría forma de abandonarlo. Un **vértice par**, aquel en que coincide un número par de caminos, no necesita ser un punto de arranque o inicio (¿por qué?) Hay tres trayectorias que también se encuentran en C y D, y cinco en B. Entonces, B, C y D también son vértices impares. Un vértice impar debe ser un punto de inicio o de terminación de un recorrido. Así, los cuatro vértices A, B, C y D, deben ser puntos iniciales o finales. Como una red sólo puede tener dos puntos de arranque o llegada (uno de cada tipo), esta red no puede atravesarse. Los residentes de Königsberg intentaban lograr lo imposible.

Los resultados de Euler se resumen como sigue:

Resultados acerca de vértices y recorridos

1. El número de vértices impares de cualquier red es *impar* (es decir, una red debe tener $2n$ vértices impares, donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$).
2. Una red sin vértices impares o, bien, una en la que haya exactamente dos de ellos, sí puede recorrerse. En el caso en que haya exactamente dos, se comienza en uno y se termina en el otro.
3. Una red con más de dos vértices impares no puede recorrerse.

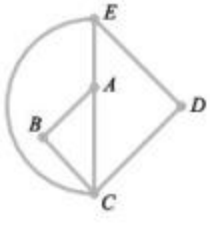


FIGURA 82

EJEMPLO 2 Decida si las redes de la figura 82 y 83 pueden recorrerse.

Como en la figura 82 hay exactamente dos vértices impares (A y E), sí puede recorrerse. Una manera de hacerlo es comenzar en A, ir a B y C, para luego volver a A (se acepta pasar por un vértice tantas veces como sea necesario). Luego se va a E, a D y a C, y finalmente se regresa a E. La red puede recorrerse.

En la figura 83, como los vértices A, B, C y D son impares (cinco rutas llegan a cada uno de ellos), esta red no puede recorrerse (cuando estudiaba el bachillerato, uno de los autores de este libro intentó por horas recorrerla, sin saber que trataba de lograr algo imposible...). ■

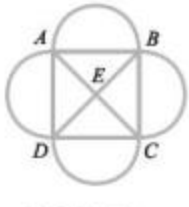


FIGURA 83

EJEMPLO 3 La figura 84 muestra la vista en planta de una casa. ¿Es posible recorrer esta casa cruzando cada puerta exactamente una vez?

Las habitaciones A, C y D tienen números pares de puertas, en tanto que B y E tienen números impares. Si se considera a las habitaciones como los vértices de un grafo, entonces el hecho de que haya exactamente dos vértices impares significa que es posible pasar por cada puerta de la casa exactamente una vez (muestre cómo hacerlo —comience en la habitación B o en la E). ■

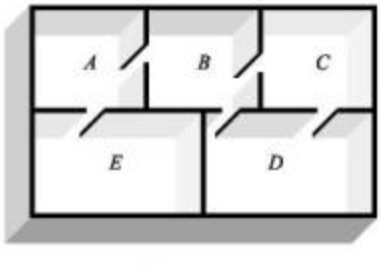
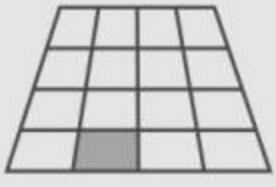
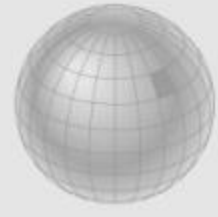
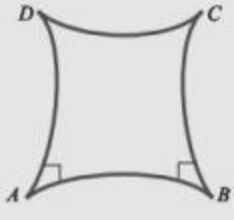
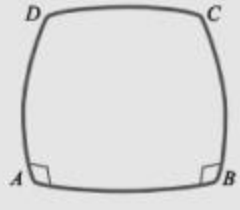
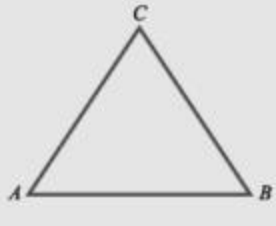
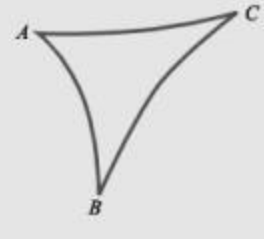
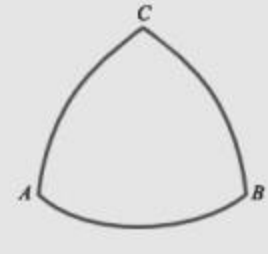


FIGURA 84

9.7 EJERCICIOS

La tabla que sigue ilustra ciertas propiedades de las geometrías euclidianas y no euclidianas. Estúdiela y utilícela para responder los ejercicios 1 a 10.

EUCLIDIANA	**NO EUCLIDIANAS**	
Se remonta a 300 a.C.	**De Lobachevski (hacia 1830)**	**De Riemann (hacia 1850)**
Las líneas tienen longitud *infinita*.		Las líneas tienen longitud *infinita*.
Geometría en un plano 	Geometría en una superficie parecida a una seudoesfera 	Geometría en una esfera 
Los ángulos C y D de un cuadrilátero de Saccheri son ángulos *rectos*. 	Los ángulos C y D son ángulos *agudos*. 	Los ángulos C y D son ángulos *obtusos*. 
Dado el punto P fuera de la línea k, es posible dibujar exactamente una línea que pase por P y que sea paralela a k.	Puede dibujarse *más de una* línea que pase por P y que sea paralela a k.	*No* puede dibujarse ninguna que pase por P y que sea paralela a k.
Triángulo común ABC 	Triángulo común ABC 	Triángulo común ABC 
Dos triángulos pueden tener ángulos de la misma medida pero lados de tamaño diferente (semejanza y congruencia).	Dos triángulos con ángulos de la misma medida deben tener lados del mismo tamaño (sólo congruencia).	

1. ¿En cuál geometría la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a 180°?

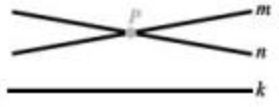
2. ¿En cuál geometría la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es más de 180°?

3. ¿En cuál geometría la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es menos de 180°?

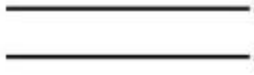
4. En un cuadrilátero *ABCD* en la geometría de Lobachevski, la suma de las medidas de los ángulos debe ser _____ 360°.
(menor que/mayor que)

5. En un cuadrilátero *ABCD* en la geometría de Riemann, la suma de las medidas de sus ángulos debe ser _____ 360°.
(menor que/mayor que)

6. Suponga que *m* y *n* representan líneas que pasan por *P* y que ambas son paralelas a *k*. ¿En cuál geometría esto es posible?



7. Suponga que *m* y *n*, que se *muestran* a continuación, deben encontrarse en un punto. ¿En cuál geometría es posible esto?

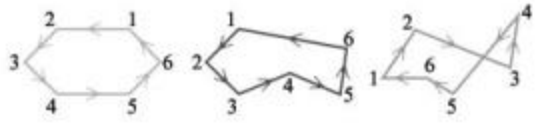


8. Un globo que represente la tierra es el modelo de una superficie, ¿en cuál geometría?

9. ¿En cuál geometría es posible el enunciado siguiente: el triángulo *ABC* y el triángulo *DEF* son tales que $\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$ y $\measuredangle C = \measuredangle F$, y tienen áreas diferentes?

10. Dibuje una figura (en una hoja de papel) lo mejor que pueda, que muestre la figura que forman el polo norte *N* y dos puntos *A* y *B* que estuvieran en el ecuador de un modelo de la Tierra.

11. Papus, matemático griego que vivió en Alejandría hacia el año 320 d.C., escribió un comentario sobre la geometría de su época. Enunció un teorema acerca de un hexágono inscrito en dos líneas de intersección.



Primero se necesita definir una palabra antigua de modo nuevo: un **hexágono** consiste en seis líneas cualesquiera en un plano, sin que tres de ellas coincidan en el mismo punto. Como se observa en la figura, los vértices de varios hexágonos se etiquetan con números. Así, 1-2 representa el segmento de línea que une los vértices 1 y 2. Los segmentos 1-2 y 4-5 son lados opuestos de un hexágono, al igual que 2-3 y 5-6, y 3-4 y 1-6.

(a) Dibuje un ángulo menor de 180°.
(b) Elija tres puntos en un lado del ángulo. Llámelos 1, 5 y 3, en ese orden, comience con el punto más cercano al vértice.
(c) Escoja tres puntos en el otro lado del ángulo. Etiquételos con 6, 2 y 4, en ese orden, comience con el punto más cerca del vértice.
(d) Dibuje segmentos de línea 1-6 y 3-4. Dibuje líneas que pasen por los segmentos de modo que se extiendan para coincidir en un punto; llame a este *N*.
(e) Haga que las líneas que pasan por 1-2 y 4-5 se encuentren en un punto que se denote con *M*.
(f) Deje que las líneas que pasan por 2-3 y 5-6 lleguen a un punto que se llamará *P*.
(g) Dibuje una línea recta que toque los puntos *M*, *N* y *P*.
(h) Escriba en sus propias palabras un teorema que generalice el resultado.

12. El teorema siguiente proviene de la geometría proyectiva:

Teorema de Desargues para un plano Este teorema afirma que si se colocan en un plano dos triángulos de modo que las líneas que unen a los vértices correspondientes se encuentran en un punto, entonces los lados correspondientes, al extenderse, se encontrarán en tres puntos colineales (los puntos *colineales* son aquellos que están sobre la misma línea).

Dibuje una figura que ilustre este teorema.

En los ejercicios 13 a 20, cada figura puede ser equivalente topológico de algunos o ninguno de los objetos que se denota con A-E. *Enliste todas las equivalencias topológicas (con letras) de cada figura.*

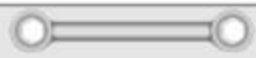
A.



B.



C.



D.



E.



13.



(tijeras)

14.



(zanahoria)

15.



(calculadora)

16.



(tuerca)

17.



(pirámide)

18.



(moneda)

19.



(cráneo)

20.



(aguja)

Equivalencia topológica *Alguna vez alguien describió a un topólogo como un matemático que no sabe la diferencia que existe entre una rosquilla y una taza de café. Esto se debe al hecho de que ambos objetos tienen genus 1 —son equivalentes topológicos. Con base en esta interpretación, ¿un topólogo sabría la diferencia entre cada uno de los pares de objetos siguientes?*

21. Una cuchara y un tenedor.

22. Una ensaladera y un escurridor.

23. Una rebanada de queso americano y otra de queso suizo.

24. Un disco compacto y otro fonográfico.

Diga cuál es el genus de los objetos siguientes.

25. Un disco compacto.

26. Un disco fonográfico.

27. Una hoja de papel perforada para una carpeta de tres argollas.

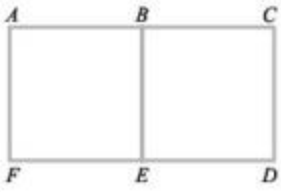
28. Una hoja de papel perforada para una carpeta de dos argollas.

29. Un lazo de boda.

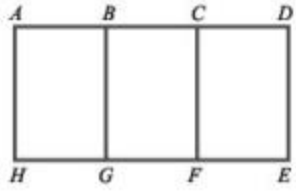
30. Una estampilla postal.

Para cada una de las redes siguientes, decida si cada vértice que tiene una letra es par *o* impar.

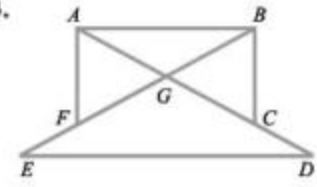
31.



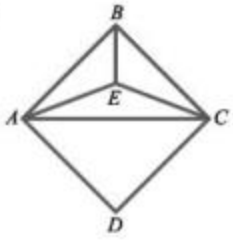
32.



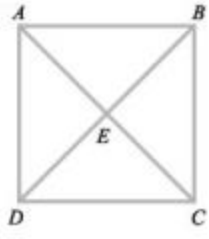
33.



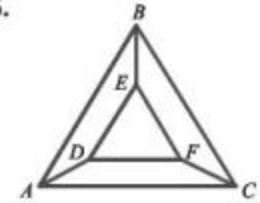
34.



35.



36.

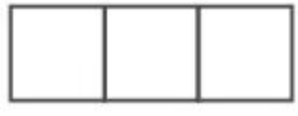


Decida si cada red puede recorrerse. Si alguna puede recorrerse, diga en qué forma.

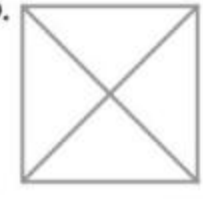
37.



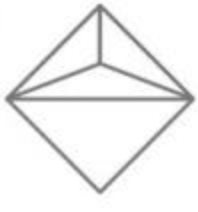
38.



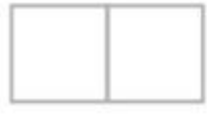
39.



40.



41.

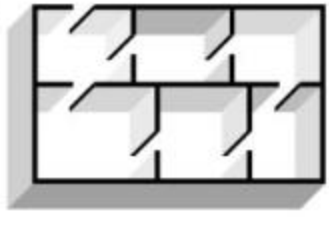


42.



¿Es posible pasar por cada una de las puertas de las casas siguientes exactamente una vez? Si la respuesta es sí, indique cómo.

43.



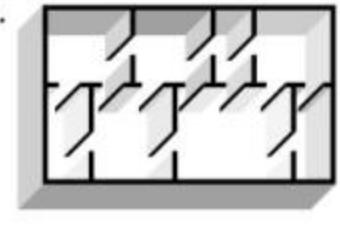
44.



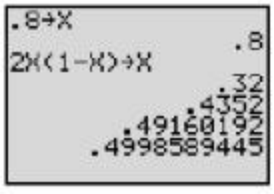
45.

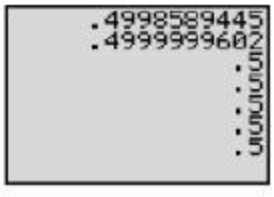


46.



9.8 Caos y geometría fractal





Estas dos pantallas muestran la manera en que la calculadora TI-83 Plus produce la secuencia que se describe.

Caos

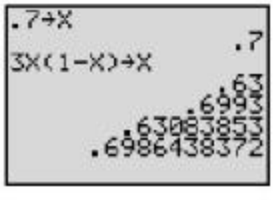
¿El caos rige el cosmos?

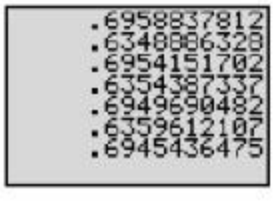
—Una de las 10 grandes preguntas de la ciencia que no tienen respuesta, como se cita en el número de noviembre de 1992 de *Discover*

Considere la ecuación $y = kx(1 - x)$. Si se elige $k = 2$ se llega a la ecuación $y = 2x(1 - x)$, que puede iterarse comenzando con un valor arbitrario para x entre 0 y 1, se calcula el valor de y que resulte, se sustituye éste como valor de x, se calcula el valor de y que resulte, se sustituye de nuevo como valor de x, se calcula otro valor de y, y así sucesivamente. Por ejemplo, un valor inicial de $x = .8$, produce la secuencia siguiente (se le invita a verificarlo con una calculadora):

.8, .32, .435, .492, .500, .500, .500, etcétera.

La secuencia parece comenzar al azar pero se estabiliza con rapidez en el valor de .500. Un valor inicial diferente de x produciría otra secuencia que también *convergiría* a .500. El valor .500 se denomina *atractor* para la secuencia que genera la ecuación $y = 2x(1 - x)$. Los valores de la secuencia resultan "atraídos" hacia .500.





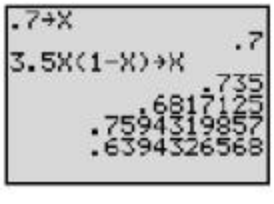
EJEMPLO 1 Para la ecuación $y = kx(1 - x)$ con $k = 3$, si se comienza con $x = .7$ y se itera con una calculadora, ¿Cuál es el patrón que emerge?

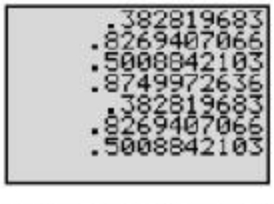
Con una calculadora TI-83 Plus, resulta que las iteraciones 17 a 20 generan la secuencia cuyos términos son:

.6354387337, .6949690482, .6359612107, .6945436475.

En apariencia, esta secuencia converge de un modo distinto del modo en que inició nuestro análisis, ya que alterna entre valores cercanos a .636 y .695. Por tanto, para $k = 3$, la secuencia tiende en forma alternativa hacia dos atractores distintos. ■

Sucede que la ecuación del ejemplo 1 muestra el mismo comportamiento para cualquier valor inicial de x entre 0 y 1. En varios ejercicios se le pide que demuestre lo anterior.





Estas pantallas sustentan al análisis que se presenta en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 2 En la ecuación del ejemplo 1, cambie el multiplicador k a 3.5 y encuentre los primeros 44 términos. ¿Cuál es el patrón que emerge?

De nuevo, si se emplea una calculadora TI-83 Plus, y se redondea a tres cifras decimales, se obtiene lo siguiente:

.383, .827, .501, .875, .383, .827, .501, .875.

Esta secuencia parece estabilizarse alrededor de cuatro atractores alternantes: .383, .827, .501 y .875. ■

Observe que en nuestro análisis inicial, para $k = 2$, la secuencia convergía a un atractor. En el ejemplo 1, para $k = 3$, convergía a dos atractores, y en el ejemplo 2, para $k = 3.5$, convergía a cuatro atractores.



John Nash, matemático destacado estadounidense de nuestra época (nació en 1928), captó la atención del público general gracias a su reciente autobiografía *A beautiful mind* (y a la película del mismo nombre). En 1958, Nash perdió por muy poco la Medalla Fields, ante René Thom (topólogo e inventor de la teoría de la catástrofe, que se estudia en la página 569), el equivalente matemático del premio Nobel. Aunque su brillante carrera se interrumpió en forma desafortunada debido a una enfermedad mental durante un periodo de casi 30 años, en 1994 Nash recibió el *Premio del Banco Central Sueco en Ciencias Económicas*, en Memoria de Alfred Nobel, que generalmente se percibe como el equivalente del premio Nobel. Esta presea recompensó su teorema del equilibrio, que publicó en 1950 en su tesis doctoral. El trabajo de Nash estableció una manera nueva y significativa de analizar el conflicto racional y la cooperación en la economía y en otras ciencias sociales.

Si k se incrementara más, resultaría que el número de atractores se duplicaría una y otra vez. En realidad, esta duplicación ha ocurrido un infinidad de veces antes de que k llegara a tomar el valor de 4. Si se observan con cuidado estas duplicaciones, se verá que siempre son semejantes a grupos anteriores, pero a una escala más pequeña. Esto se denomina *autosemejanza* o *escalamiento*, idea que no es nueva pero que ha adquirido un significado nuevo en años recientes. En algún momento antes de que k llegue a ser 4, la secuencia que resulta parece ser totalmente aleatoria, sin atractores ni estabilidad. Este tipo de condición es una instancia de lo que ha llegado a conocerse en la comunidad científica con el nombre de **caos**. Este nombre proviene de un artículo del matemático James A. Yorke, de la Universidad de Maryland en College Park.

La ecuación $y = kx(1 - x)$ no parece complicada, pero su comportamiento intrincado que presenta, así como el de otras ecuaciones parecidas, ha captado la atención de las mentes más brillantes (por no mencionar las computadoras) de varios campos —ecología, biología, física, genética, economía y matemáticas— desde aproximadamente 1960. Por ejemplo, una ecuación como ésa podría representar la población de alguna especie animal para la que el valor de k esté determinado por factores (tales como la disponibilidad de comida, o los predadores de la especie) que afecten el crecimiento o disminución de la población. En ciertas condiciones, hay una población estable a largo plazo (un solo atractor). En otras, la población fluctuará eventualmente entre dos niveles alternantes (dos atractores), o cuatro, u ocho, y así sucesivamente. Pero después de cierto valor de k, la población a largo plazo se vuelve por completo caótica e impredecible.

En tanto k sea suficientemente pequeña, habrá algún número de atractores y el comportamiento a largo plazo de la secuencia (o población) es el mismo sin que importe el valor inicial de x. Pero una vez que k crece lo suficiente para generar caos, el comportamiento a largo plazo del sistema cambiará de manera drástica si el valor inicial de x cambia apenas un poco. Por ejemplo, considere las dos secuencias que siguen, ambas generadas por $y = 4x(1 - x)$.

$$.600, .960, .154, .521, .998, .008, .032, \ldots$$
$$.610, .952, .183, .598, .962, .146, .499, \ldots$$

El hecho de que las dos secuencias se separen una de la otra se debe en parte a errores de redondeo durante los cálculos. Pero Yorke y otros demostraron que incluso el cálculo exacto de las iteraciones produciría con rapidez secuencias divergentes tan sólo debido a valores iniciales un poco distintos. Este tipo de dependencia sensible de las condiciones iniciales fue decubierta (accidentalmente) por Edward Lorenz en la década de 1960, mientras buscaba un modelo computarizado eficaz de los patrones del clima. Se dio cuenta de que podría no haber esperanza de contar con algún esquema para pronosticar el clima a largo plazo.

Los patrones como los de las secuencias anteriores son algo más que sólo curiosidades numéricas. Patrones similares se aplican a un gran número de fenómenos en las ciencias físicas, biológicas y sociales, muchos de ellos son sistemas naturales comunes que se han estudiado durante cientos de años. La medición de una línea de costa, la descripción de los patrones de ramificación de un árbol, o una cordillera, o la formación de nubes, el polvo cósmico intergaláctico, la predicción de patrones del clima, el comportamiento turbulento de fluidos de todas clases, los sistemas circulatorio y nervioso del cuerpo humano, las fluctuaciones de la población y los sistemas económicos —éstos y muchos otros fenómenos permanecen en el misterio, y su naturaleza verdadera parece hallarse en algún lugar más allá del alcance de nuestras más grandes y rápidas computadoras.

Es fácil analizar a los fenómenos continuos. El cambio en una cantidad produce un cambio predecible en la otra (por ejemplo, una presión un poco mayor en el pe-

dal del acelerador produce una velocidad un poco mayor). Las funciones matemáticas que representan eventos continuos se grafican por medio de líneas o curvas sin interrupciones, o quizá con superficies suaves que cambian en forma gradual. Las ecuaciones que gobiernan dichos fenómenos son *lineales*, y se han desarrollado métodos matemáticos extensos para resolverlas. Por otro lado, los eventos erráticos que se asocian con ciertas ecuaciones son más difíciles de describir o predecir. La ciencia del caos, hecha posible por las computadoras modernas, continúa abriendo formas nuevas de estudiar tales eventos.

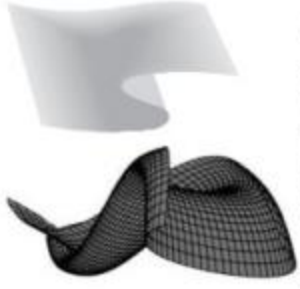


FIGURA 85

Uno de los primeros intentos para analizar de un modo nuevo los procesos discontinuos fue el que hizo quien es considerado el precursor de la teoría del caos, el matemático francés René Thom, quien, en la década de 1960 aplicó los métodos de la topología. Para hacer énfasis en la característica del cambio súbito, Thom llamó *catástrofes* a eventos tales como el latir del corazón, el rayo que cae, el derrumbe del mercado financiero, una rebelión o un tornado. Demostró que todos los eventos catastróficos (en nuestro espacio-tiempo de cuatro dimensiones) son combinaciones de siete catástrofes elementales (en dimensiones mayores el número se acerca con rapidez al infinito).

Cada una de las siete catástrofes elementales tiene una forma topológica característica. En la figura 85 se muestran dos ejemplos. La figura superior se denomina *cúspide*. La ilustración inferior es un *ombligo elíptico* (un botón convexo con sección transversal ovalada). El trabajo de Thom pasó a ser conocido como **teoría de la catástrofe**.

Las gráficas por computadora han sido indispensables en el estudio de los procesos caóticos. La graficación de un gran número de puntos ha revelado patrones que de otro modo habrían pasado desapercibidos (sin embargo, las razones tras muchos de estos patrones aún no han sido explicadas). Las ilustraciones que aparecen en la figura 86 se crearon por medio de procesos caóticos.

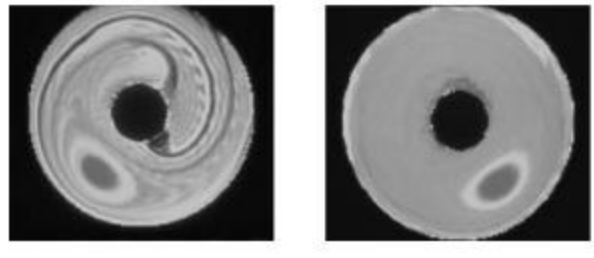


FIGURA 86

Fractales Si hay una estructura que haya provisto una clave para la nueva disciplina de estudio de los procesos no lineales, es la **geometría fractal**, desarrollada a lo largo de los años sobre todo por Benoit Mandelbrot (1924-), matemático de IBM. Gracias a su trabajo en este campo, y a la recomendación de la National Science Foundation, la Universidad de Columbia le concedió en 1985 la Medalla Bernard por Servicios Meritorios en la Ciencia.



La superficie de la Tierra, que consiste en continentes, montañas, océanos, valles, etc., tiene dimensión fractal 2.2.

Las líneas tienen una sola dimensión. Las figuras planas tienen dos, y nosotros vivimos en un mundo tridimensional. En un artículo que se publicó en 1967, Mandelbrot investigó la idea de medir la longitud de una línea costera. Concluyó que una forma como ésa desafiaba la geometría euclidiana convencional, y que en lugar de tener una dimensión que se expresara con un número natural, se tendría una dimensión fraccional. Una línea costera es un ejemplo de *forma autosimilar* (una forma que se repite a sí misma una y otra vez a escalas diferentes). Vista de cierta distancia, las bahías y esteros no se observan en lo individual, pero conforme uno se acerca se hacen visibles. Las ramificaciones de un árbol, desde la pequeña ramita a la gran rama y de ésta al tronco, también presentan una forma que se repite a sí misma.



FIGURA 87

A principios del siglo XX, el matemático alemán H. von Koch investigó el llamado copo de nieve de Koch, que aparece en la figura 87. Si se comienza con un triángulo equilátero, cada uno de los lados de éste luego da lugar a otro triángulo equilátero. El proceso continúa una y otra vez, en forma indefinida, y se produce una curva de longitud infinita. Las matemáticas de la época de Koch no se encontraban lo suficientemente avanzadas para enfrentarse a figuras como ésa. Sin embargo, por medio de la teoría de Mandelbrot se demostró que el copo de nieve de Koch tiene dimensión de 1.26. Esta figura se obtiene con una fórmula que involucra logaritmos (los cuales se expusieron brevemente en un capítulo anterior).

La teoría de los fractales se aplica hoy día en muchas áreas de la ciencia y la tecnología. Se ha empleado para analizar la simetría de ciertas formas de vida, la turbulencia de los líquidos y los afluentes de los ríos, así como la variación de precios en la economía. La industria del cine en Hollywood ha utilizado fractales en la creación de efectos especiales en algunas películas taquilleras. La figura 88 presenta un ejemplo de diseño de fractales generados por computadora.



FIGURA 88

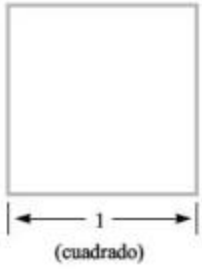
En el popular libro de 1987 que lleva por título *Chaos*, de James Gleick, se hace un recuento interesante de la ciencia del caos. Mandelbrot ha publicado dos libros acerca de los fractales. Ellos son *Fractals: Form, Chance, and Dimension* (1975) y *La geometría fractal de la naturaleza* (1982).

Además de proporcionar una estructura geométrica para los procesos caóticos de la naturaleza, la geometría fractal es vista por muchos como una forma nueva y significativa de arte (para apreciar por qué, consulte la publicación de 1986 de *The Beauty of Fractals*, por H. O. Peitgen y P. H. Richter, que contiene 184 figuras, muchas de ellas en color). Peitgen y otros también publicaron *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume One* (Springer-Verlag, 1991).

9.8 EJERCICIOS

Los ejercicios 1 a 25 se tomaron de una edición de Student Math Notes, *publicado por el National Council of Teachers of Mathematics. Fueron escritos por el doctor Tami S. Martin, del Departamento de Matemáticas de la Illinois State University, y los autores agradecen al NCTM y a Tami Martin por su permiso para reproducir esta actividad. Como los ejercicios deben realizarse en orden numérico, las respuestas de todos ellos (pares e impares) se dan en la sección correspondientes de este libro.*

La mayor parte de los objetos matemáticos que se han estudiado son números enteros. Por ejemplo, tanto sólidos como cubos e icosaedros tienen dimensión. Los cuadrados, triángulos y muchas otras figuras planas son bidimensionales. Las líneas tienen una dimensión, y los puntos tienen dimensión 0. Considere un cuadrado con lados de longitud 1. Reúna varios de estos cuadrados cortándolos o con el uso de bloques guía.

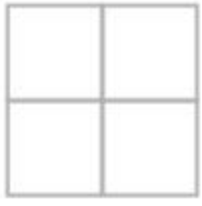


(cuadrado)

El tamaño de una figura se calcula con el conteo del número de réplicas (piezas pequeñas) que lo constituyen. Aquí, una réplica es el cuadrado original con aristas cuya longitud es 1.

1. ¿Cuál es el número mínimo de estos cuadrados que puede colocarse juntos un lado con otro para formar un cuadrado más grande?

El cuadrado original está constituido por un cuadrado pequeño, por lo que su tamaño es 1.



2. ¿Cuál es el tamaño del cuadrado nuevo?
3. ¿Cuál es la longitud de cada arista del cuadrado nuevo?

Las figuras semejantes tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. El **factor de escala** *entre dos figuras similares se determina con el cálculo de la razón de lados correspondientes:*

$$\frac{\text{longitud nueva}}{\text{longitud antigua}}.$$

4. ¿Cuál es el factor de escala entre el cuadrado grande y el pequeño?
5. Encuentre la razón

$$\frac{\text{tamaño nuevo}}{\text{tamaño antiguo}}$$

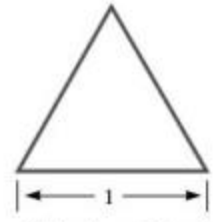
para los dos cuadrados.

6. Construya un cuadrado aún mayor que tenga tres unidades de longitud en cada lado. Compare este cuadrado con el pequeño. ¿Cuál es el factor de escala entre los dos cuadrados? ¿Cuál es la razón del tamaño nuevo al antiguo?
7. Construya otro cuadrado aún más grande cuyos lados sean de cuatro unidades cada uno. Compare este cuadrado con el más chico. ¿Cuál es el factor de escala entre los dos cuadrados? ¿Cuál es la razón del tamaño nuevo al antiguo?
8. Para los cuadrados, complete la tabla siguiente.

Factor de escala	2	3	4	5	6	10
Razón del tamaño nuevo al antiguo						

9. ¿Cómo se relacionan los dos renglones de la tabla?

Considere un triángulo equilátero. La longitud de uno de sus lados es de una unidad. El tamaño de este triángulo es 1.



(triángulo equilátero)

10. ¿Cuál es el número mínimo de triángulos equiláteros que pueden ponerse juntos, lado con lado, para formar un triángulo semejante más grande?
11. Complete la tabla que sigue, para triángulos.

Factor de escala	2	3	4	5	6	10
Razón del tamaño nuevo al antiguo						

12. ¿Cómo se compara la relación entre los dos renglones de la tabla con aquella que el lector encontró en la tabla para los cuadrados?

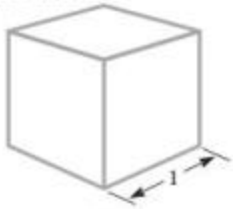
Una manera de definir la dimensión, d, de una figura, se relaciona con el factor de escala, el tamaño nuevo y el antiguo, así:

$$(\text{factor escala})^d = \frac{\text{tamaño nuevo}}{\text{tamaño antiguo}}.$$

Con el empleo de un factor de escala de dos para los cuadrados o triángulos equiláteros, se observa que $2^d = 4/1$*; es decir,* $2^d = 4$*. Como* $2^2 = 4$*, la dimensión, d, debe ser dos. Esta definición de dimensión confirma lo que ya sabíamos que: los cuadrados y triángulos equiláteros son figuras de dos dimensiones.*

13. Utilice la definición y las tablas que llenó para confirmar que el cuadrado y el triángulo equilátero son figuras de dos dimensiones para factores de escala distintos de dos.

Considere un cubo, con aristas de longitud 1. Sea que el tamaño del cubo es de 1.



(cubo)

14. ¿Cuál es el número mínimo de estos cubos que puede colocarse juntos, cara con cara, para formar otro cubo más grande?

15. ¿Cuál es el factor de escala entre estos dos cubos? ¿Cuál es la razón del tamaño nuevo al antiguo, para los dos cubos?

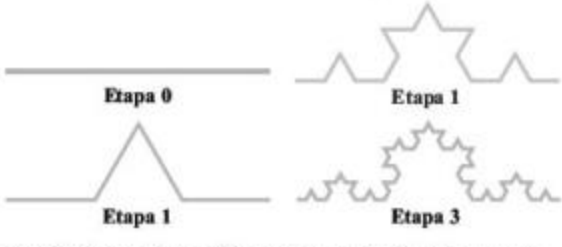
16. Complete la tabla que sigue, para los cubos.

Factor de escala	2	3	4	5	6	10
Razón del tamaño nuevo al antiguo						

17. ¿Cómo se relacionan los dos renglones de la tabla?

18. Utilice la definición de dimensión y un factor de escala de dos para verificar que un cubo es un objeto tridimensional.

Se ha explorado los factores de escala y tamaño asociados con figuras de dos y tres dimensiones. ¿Es posible que los objetos matemáticos tengan dimensiones fraccionales? Considere la figura siguiente formada con el reemplazo del tercio medio de un segmento de línea de longitud de uno por una subida y bajada en forma de V, cada una de las cuales tiene dos lados de longitud igual que la del segmento que se retiró. A continuación se presenta las cuatro primeras etapas del desarrollo de esta figura.

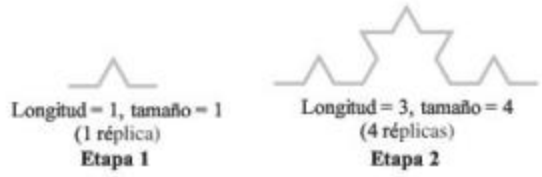


Es difícil encontrar el factor de escala de esta secuencia de figuras porque la longitud conjunta de una porción representativa de la figura permanece igual, mientras que el número de piezas se incrementa. Para simplificar el procedimiento, siga los pasos que se mencionan a continuación:

Paso 1: *Comience con cualquier etapa (es decir, la etapa 1).*

Paso 2: *Dibuje la etapa siguiente (es decir, etapa 2) de la secuencia y expándala de modo que contenga una copia exacta de la etapa anterior (la 1, en este ejemplo).*

Observe que la etapa 2 contiene cuatro copias, o réplicas, de la etapa 1, y es tres veces más larga que ésta.



19. El factor de escala es igual a la razón

$$\frac{\text{longitud nueva}}{\text{longitud antigua}}$$

entre dos etapas consecutivas cualesquiera. El factor de escala entre la etapa 1 y la etapa 2 es _____.

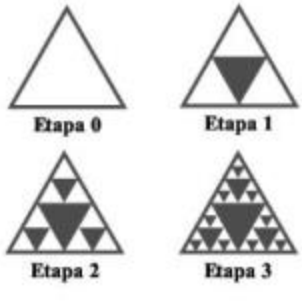
20. El tamaño se determina con el conteo del número de réplicas de la etapa 1 que se encuentre en la etapa 2. Tamaño antiguo = 1, tamaño nuevo = _____.

Emplee la definición de dimensión para calcular la dimensión, d, de la figura que se forma con el proceso siguiente: $3^d = 4/1$; *es decir,* $3^d = 4$. $3^1 = 3$ *y* $3^2 = 9$, *para* $3^d = 4$ *la dimensión de la figura debe ser mayor que uno pero menor que dos:* $1 < d < 2$.

21. Use su calculadora para estimar el valor de d. Recuerde que d es el exponente que hace que 3^d sea igual a 4. Por ejemplo, como d debe estar entre 1 y 2, intente con $d = 1.5$. Pero $3^{1.5} = 5.196\ldots$, que es mayor que 4; así, d debe ser más pequeño que 1.5. Continúe así hasta que d se aproxime a tres cifras decimales (para una determinación exacta utilice logaritmos).

La figura original fue un segmento de línea de una dimensión. Al sumar en forma iterativa al segmento de línea, se generó un objeto de dimensión mayor que 1 pero menor que dos. Los objetos con dimensión fraccional se conocen como **fractales**. *Los fractales son objetos autosemejantes que se forman de manera indefinida por medio de agregarlos, o quitarlos, a una figura. El objeto que se obtiene en el límite del procedimiento repetido es el fractal.*

A continuación considere dos objetos bidimensionales con secciones que se retiran de modo iterativo. En cada etapa, del desarrollo del fractal, se elimina un triángulo del centro de cada región triangular.



Utilice el proceso del último ejemplo como ayuda para responder las preguntas que siguen.

22. ¿Cuál es el factor de escala del fractal?

23. Tamaño antiguo = 1, tamaño nuevo = _____.

24. La dimensión del fractal, ¿entre cuáles dos valores numéricos está?

25. Utilice la definición de dimensión y su calculadora para aproximar la dimensión de este fractal a tres cifras decimales.

Emplee una calculadora para determinar el patrón de atractores para la ecuación $y = kx(1 - x)$ para el valor dado de k y el valor inicial de x.

26. $k = 3.25, x = .7$ **27.** $k = 3.4, x = .8$

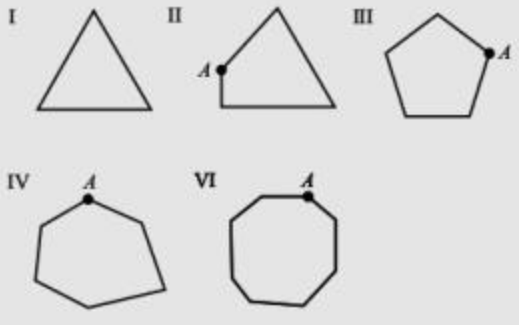
28. $k = 3.55, x = .7$

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

Generalización del concepto de suma de ángulos

En este capítulo se aprendió que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°. Esto puede extenderse para determinar una fórmula para la suma de las medidas de los ángulos de cualquier polígono convexo. Para comenzar esta investigación, forme grupos de tres o cuatro estudiantes. Prepare en una hoja de papel seis figuras como las que se muestran a la derecha.

Ahora defina una diagonal desde el vértice A al segmento que va de A a un vértice no adyacente. El triángulo de la figura I no tiene diagonales, pero los polígonos de las figuras II a VI sí las tienen.



Temas para análisis

1. Elija a alguien del grupo para que dibuje todas las diagonales posibles desde el vértice *A* de cada figura.

2. Ahora, que todo el grupo complete la tabla siguiente.

Polígono	Número de lados	Número de triángulos, t	Número de grados en cada triángulo	Suma de las medidas de todos los ángulos del polígono, $t \cdot 180°$
I	_____	_____	_____	_____
II	_____	_____	_____	_____
III	_____	_____	_____	_____
IV	_____	_____	_____	_____
V	_____	_____	_____	_____
VI	_____	_____	_____	_____

3. Con base en la tabla que se llenó, responda las preguntas que siguen, en orden.

(a) Como sugiere la tabla, el número de triángulos en que puede dividirse un polígono convexo es _____ menos que el número de lados.

(b) Entonces, si un polígono tiene s lados, puede dividirse en ___ triángulos.

(c) De la tabla se ve que la suma de las medidas de todos los ángulos de un polígono se encuentra con la expresión $t \cdot 180°$. Entonces, si un polígono tiene s lados, la suma de las medidas de todos los ángulos del polígono está dada por la expresión (_____ − _____) · _____°.

4. Use sus descubrimientos del ejercicio 3(c) para encontrar la suma de las medidas de todos los ángulos de

(i) un nonágono **(ii)** un decágono

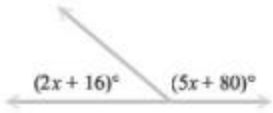
(iii) un polígono de 12 lados.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 9

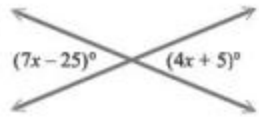
1. Considere un ángulo de 38°. Responda cada una de las preguntas siguientes.
- **(a)** ¿Cuál es la medida de su complemento?
- **(b)** ¿Cuál es la medida de su suplemento?
- **(c)** Clasifíquelo como agudo, obtuso, recto o rectilíneo.

Encuentre la medida de cada ángulo que se indica.

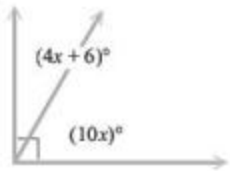
2.



3.

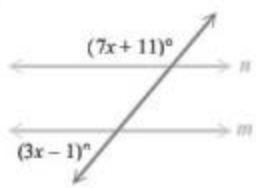


4.

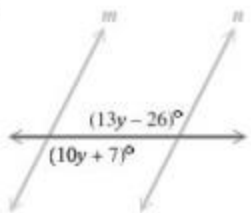


En los ejercicios 5 y 6, suponga que las líneas m y n son paralelas, y encuentre la medida de cada ángulo que se indica.

5.



6.



7. Explique por qué un rombo debe ser un paralelogramo, pero un paralelogramo podría no ser un rombo.

8. ¿Cuál de los enunciados A-D es falso?
- **A.** Un cuadrado es un rombo.
- **B.** Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
- **C.** Un ángulo podría tener un ángulo recto y uno obtuso.
- **D.** Un trapecio podría tener lados no paralelos de la misma longitud.

Identifique cada una de las curvas siguientes como simple, cerrada, ambas *o* ninguna.

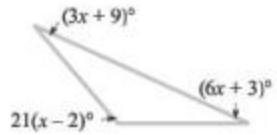
9.



10.

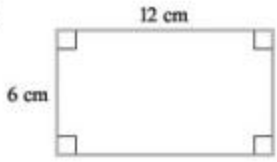


11. Determine la medida de cada ángulo en el triángulo.

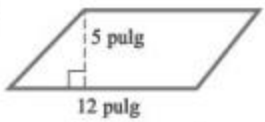


Encuentre el área de cada una de las figuras siguientes.

12.

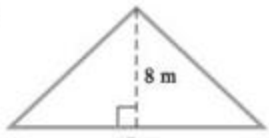


13.

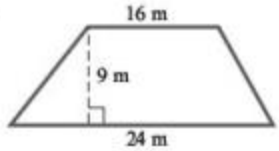


(paralelogramo)

14.



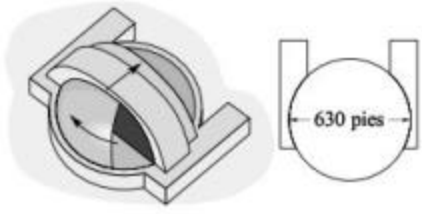
15.



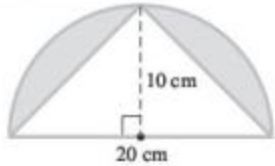
(trapecio)

16. Si un círculo tiene un área de 144π pulgadas cuadradas, ¿cuál es su circunferencia?

17. ***Circunferencia de un domo*** El Skidome de Toronto, Canadá, es el primer estadio con techo rígido retráctil. El domo de acero tiene un diámetro de 630 pies. ¿Cuál es la circunferencia de este domo, redondeada al pie más cercano?



18. ***Área de una figura sombreada*** ¿Cuál es el área de la parte sombreada de la figura? Utilice 3.14 como valor aproximado de π.



(triángulo con semicírculo)

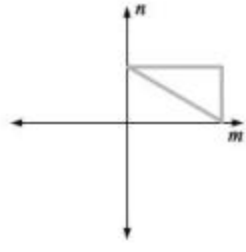
19. Dado: $\measuredangle CAB = \measuredangle DBA$; $DB = CA$
Demuestre que: $\triangle ABD \cong \triangle BAC$



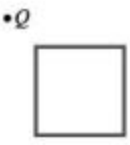
20. ***Altura de un poste*** Si un poste de 30 pies proyecta una sombra de 45 pies de largo, ¿qué tan alto es un poste cuya sombra mida 30 pies de largo, a la misma hora?

21. ***Diagonal de un rectángulo*** ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo que tiene un ancho de 20 metros y un largo de 21 metros?

22. Primero, refleje la figura dada sobre la línea n, y después sobre la línea m.



23. Encuentre la imgen de reflexión puntual de la figura dada con el punto dado como centro.



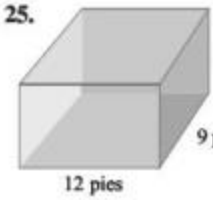
Encuentre **(a)** *el volumen y* **(b)** *el área superficial de cada una de las figuras en el espacio siguientes. Cuando sea necesario emplee 3.14 como valor aproximado d* π.

24.



(esfera)

25.



(caja)

26.



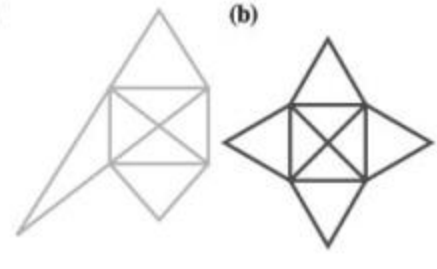
(cilindro circular recto)

27. Enliste varias diferencias importantes entre la geometría euclidiana y la no euclidiana.

28. ***Equivalencia topológica*** ¿Son equivalentes topológicos los pares de objetos siguientes?
(a) Una página de un libro y la cubierta del mismo libro.
(b) Un par de anteojos sin vidrios, y la Mona Lisa

29. Decida si es posible recorrer la red que se muestra. Si es posible, diga cómo.

(a) **(b)**



30. Use una calculadora para determinar los atractores para la secuencia que genera la ecuación $y = 2.1x(1 - x)$, con valor inicial de $x = .6$.

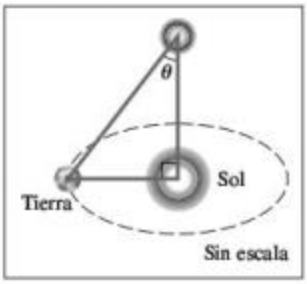
capítulo

10 Trigonometría

Los fundamentos de la trigonometría se remontan al menos a hace 3000 años. Los antiguos egipcios, babilonios y griegos desarrollaron la trigonometría para encontrar las longitudes de los lados de triángulos y las medidas de sus ángulos. En Egipto, la trigonometría se utilizó para restablecer los límites entre terrenos después de las inundaciones causadas por el desbordamiento anual del río Nilo, y en Babilonia se empleaba en astronomía. En sí, la palabra *trigonometría* proviene de los vocablos griegos que designan triángulo (*trigon*) y medida (*metry*). Hoy día, la trigonometría se usa en la electrónica, la topografía y otras áreas de la ingeniería, y se necesita en cursos más avanzados de matemáticas, como el cálculo.

Durante siglos, los astrónomos trataron de determinar las distancias a ciertas estrellas. No fue hasta 1838 que el astrónomo Friedrich Bessel determinó la distancia a la estrella denominada Cignus 61. Usó el método de *paralaje*, basado en la medición de ángulos muy pequeños. Esta medición confirmó que el modelo heliocéntrico de Copérnico era correcto y dio a los científicos un entendimiento mejor del tamaño y de la estructura del universo.

Se observa el paralaje cuando se viaja en automóvil y se ve un objeto cercano que en apariencia se mueve hacia atrás con respecto de los objetos más distantes. Ocurre lo mismo para ciertas estrellas que están relativamente cerca de la Tierra. Conforme ésta gira alrededor del Sol, el ángulo observado θ (letra griga, *theta*) de algunas estrellas cercanas cambia debido al paralaje, como se muestra en la figura. La tabla enlista el tamaño en segundos del ángulo θ, para cinco estrellas (un segundo es igual a 1/3600 de grado).



Estrella	θ
Alfa Centauro	.763
Estrella de Bernard	.546
Sirio	.377
Cignus 61	.292
Procyon	.287

Fuentes: Freebury, H. A., *A History of Mathematics*, MacMillan Company, 1968; Zeilik, M., S. Gregory y E. Smith, *Introductory Astronomy and Astrophysics*, 2a. ed., Saunders College Publishers, 1998.

10.1 Los ángulos y sus medidas

10.2 Funciones trigonométricas de los ángulos

10.3 Identidades trigonométricas

10.4 Triángulos rectángulos y valores de funciones

10.5 Aplicaciones de los triángulos rectángulos

10.6 Leyes de senos y cosenos; fórmulas de área

10.7 El círculo unitario y gráficas

Investigación en grupo: Construcción de un *punto* sobre valores de funciones trigonométricas

Examen del capítulo 10

Como las estrellas son objetos muy distantes, el paralaje de una de ellas es pequeño y siempre menor que un segundo. ¿Cómo se emplea θ para encontrar la distancia a estas estrellas? Para resolver problemas como calcular las distancias a las estrellas, determinar la región cubierta por un eclipse total de Sol, o aproximar la profundidad de un cráter en la Luna, se deben entender los ángulos y las funciones trigonométricas. Este capítulo presenta una breve introducción a la trigonometría

10.1 Los ángulos y sus medidas

Terminología básica Es posible dibujar una línea que toque dos puntos distintos A y B. Esta línea se llama **línea AB**. La parte de la línea entre A y B, inclusive estos puntos, es el **segmento AB**. La parte de la línea AB que comienza en A y continúa después de pasar por B, se llama **rayo AB**. El punto A es el punto final del rayo. Ver la figura 1.

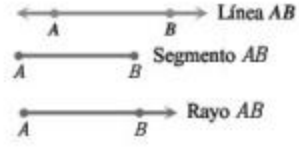


FIGURA 1



FIGURA 2

En el estudio de la trigonometría, un **ángulo** se forma al rotar un rayo alrededor de su punto final. En la posición inicial, el rayo se llama **lado inicial** del ángulo, una vez rotado es el **lado terminal** del ángulo. El punto final del rayo es el **vértice** del ángulo. La figura 2 muestra los lados inicial y terminal de un ángulo con vértice en A.

Si la rotación del lado terminal es en contra del sentido del movimiento de las manecillas del reloj, el ángulo es **positivo**. Si la rotación es a favor de dicho movimiento, el ángulo es **negativo**. La figura 3 muestra dos ángulos, uno positivo y otro negativo.

Un ángulo se denomina con el nombre de su vértice. Por ejemplo, el ángulo en el lado derecho de la figura 3 se llama ángulo C. Un ángulo puede recibir su nombre con el empleo de tres letras, la de en medio corresponde al vértice. Así, el ángulo a la derecha de la figura 3 también se llamaría ángulo ACB o ángulo BCA.

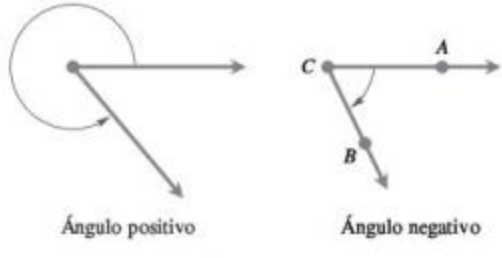
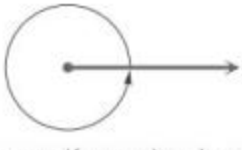


FIGURA 3



La rotación completa de un rayo genera un ángulo cuya medida es de 360°.

FIGURA 4

Medida en grados Hay dos sistemas comunes para medir el tamaño de los ángulos. La unidad más frecuente de medida es el **grado** (la otra unidad común para medir ángulos se llama *radián*). Hace 4000 años los babilonios desarrollaron la medición en grados. Para utilizar la medición en grados se asignan 360 de ellos a la rotación completa de un rayo. Observe el lector, en la figura 4, que el lado terminal del ángulo corresponde a su lado inicial cuando da una rotación completa.

Un grado, que se escribe así: 1°, representa 1/360 de una rotación. Por tanto, 90° representan 90/360 = 1/4 de una rotación completa, y 180° representan 180/360 = 1/2 de una rotación completa. En la figura 5 se presenta ángulos que miden 1°, 90° y 180°.

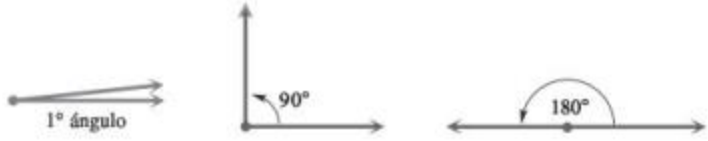
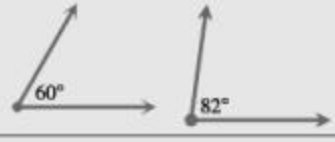
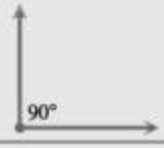


FIGURA 5

En la tabla siguiente se presenta las denominaciones de ciertos ángulos especiales.

Nombre	Medida del ángulo	Ejemplo(s)
Ángulo agudo	Entre 0° y 90°	
Ángulo recto	Exactamente 90°	
Ángulo obtuso	Entre 90° y 180°	
Ángulo rectilíneo	Exactamente 180°	

Trigonometría. Quizá más que cualquier otra rama de las matemáticas, la trigonometría se desarrolló como resultado de un intercambio continuo y fértil de la oferta y la demanda: la oferta de teorías y técnicas matemáticas disponibles en cualquier momento dado y la demanda de una sola ciencia aplicada, la astronomía. Su relación era tan íntima, que no fue hasta el siglo XIII que resultó de utilidad considerar a las dos disciplinas como entidades separadas. (Tomado de *The History of Trigonometry*, por Edward S. Kennedy, en *Historical Topics for Mathematics Classroom*, Anuario número 31 de *N.C.T.M.*, 1969.)

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90°, los ángulos se llaman **complementarios**. En tanto que dos ángulos cuyas medidas sumen 180° son **suplementarios**.

EJEMPLO 1 Diga cuál es el complemento y el suplemento de 50°.

El complemento de 50° es

$$90° - 50° = 40°,$$

mientras que el suplemento de 50° es

$$180° - 50° = 130°.$$ ■

No hay que confundir un ángulo con su medida. El *ángulo en sí* consiste en el vértice junto con los lados inicial y terminal, mientras que la *medida del ángulo* es el tamaño de la rotación del ángulo, desde el lado al inicial al terminal (y es común expresarlo en grados). Si el ángulo A tiene una rotación de 35°, se dice que m(ángulo A) es de 35°, donde m(ángulo A) se lee como *la medida del ángulo A*. Sin embargo, se ahorra mucho trabajo si se abrevia la notación m(ángulo A) = 35° como ángulo $A = 35°$.

Por tradición, las partes de un grado se miden en minutos y segundos. Un **minuto**, que se escribe como $1'$, es $1/60$ de un grado.

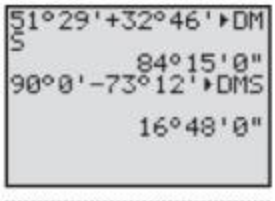
$$1' = \frac{1^\circ}{60}, \quad \text{o bien} \quad 60'' = 1^\circ$$

Un **segundo**, $1''$, es $1/60$ de un minuto.

$$1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600}, \quad \text{o bien} \quad 60'' = 1'$$

La medida $12^\circ\, 42'\, 38''$ representa 12 grados, 42 minutos, 38 segundos.

El ejemplo que sigue muestra la forma de hacer cálculos con grados, minutos y segundos.



Los cálculos que se realizan en el ejemplo 2 pueden llevarse a cabo en una calculadora gráfica capaz de trabajar en grados, minutos y segundos.

EJEMPLO 2 Realice los cálculos que se piden.

(a) $51^\circ\, 29' + 32^\circ\, 46'$

Se suma por separado los grados y los minutos.

$$\begin{array}{r} 51^\circ\, 29' \\ +\ 32^\circ\, 46' \\ \hline 83^\circ\, 75' \end{array}$$

Como $75' = 60' + 15' = 1^\circ\, 15'$, la suma queda

$$\begin{array}{r} 83^\circ \\ +\ 1^\circ\, 15' \\ \hline 84^\circ\, 15'. \end{array}$$

(b) $90^\circ - 73^\circ\, 12'$

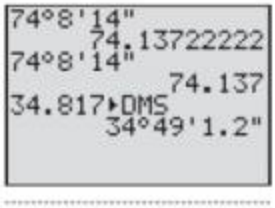
Se escribe 90° como $89^\circ\, 60'$. Por tanto,

$$\begin{array}{r} 89^\circ\, 60' \\ -\ 73^\circ\, 12' \\ \hline 16^\circ\, 48'. \end{array}$$

■

Debido a que las calculadoras son parte integral del mundo de hoy, es común que los ángulos se midan en **grados decimales**. Por ejemplo 12.4238° representa

$$12.4238^\circ = 12\ \frac{4238^\circ}{10{,}000}.$$



Las conversiones del ejemplo 3 pueden realizarse con alguna calculadora gráfica. El segundo resultado que se muestra se obtuvo al hacer que la máquina mostrara sólo tres cifras decimales.

El ejemplo siguiente muestra la manera de transformar grados decimales a grados, minutos y segundos.

EJEMPLO 3 **(a)** Convertir $74^\circ\, 8'\, 14''$ a grados decimales. Redondee al milésimo más cercano de un grado.

Como $1' = \frac{1^\circ}{60}$ y $1'' = \frac{1^\circ}{3600}$,

$$\begin{aligned} 74^\circ\, 8'\, 14'' &= 74^\circ + \frac{8^\circ}{60} + \frac{14^\circ}{3600} \\ &\approx 74^\circ + .1333^\circ + .0039^\circ \\ &= 74.137^\circ \text{ (con redondeo).} \end{aligned}$$

(b) Convertir 34.817° a grados, minutos y segundos.

$$\begin{aligned} 34.817° &= 34° + .817° \\ &= 34° + (.817)(60') && 1° = 60' \\ &= 34° + 49.02' \\ &= 34° + 49' + .02' \\ &= 34° + 49' + (.02)(60'') && 1' = 60'' \\ &= 34° + 49' + 1.2'' \\ &= 34°\,49'\,1.2'' \end{aligned}$$

■

Los ángulos en un sistema de coordenadas Un ángulo está en **posición estándar** si su vértice se halla en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial se encuentra sobre el eje positivo de las x. Los dos ángulos de la figura 6 están en posición estándar. Se dice que un ángulo en posición estándar queda en el cuadrante en el que se ubica su lado terminal. Por ejemplo, un ángulo agudo está en el primer cuadrante y uno obtuso queda en el segundo. Los ángulos en posición estándar que tienen sus lados terminales sobre el eje x el y, como aquellos que miden 90°, 180°, 270°, etc., se llaman **ángulos cuadrantales**.

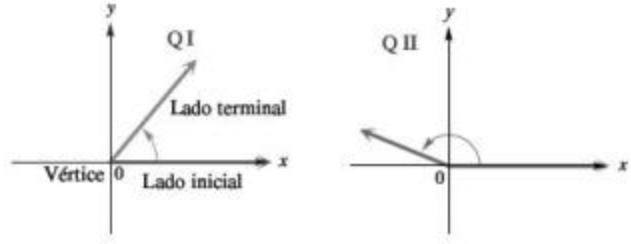
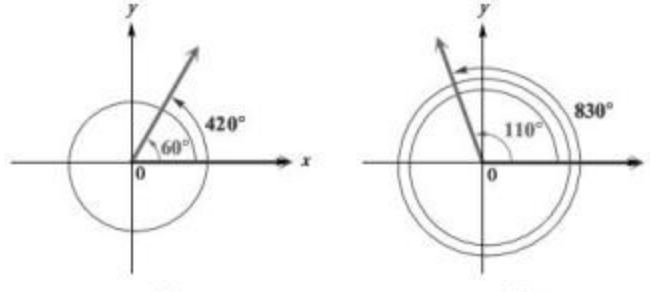


FIGURA 6

La rotación completa de un rayo da lugar a un ángulo que mide 360°. Pero no hay razón por la que la rotación se detenga en 360°. Si esta continuara, se produciría ángulos que midieran más de 360°. Los ángulos de la figura 7(a) tienen medidas de 60° y 420°. Estos dos ángulos tienen el mismo lado inicial y el mismo terminal, pero cantidades distintas de rotación. Los ángulos que tienen los mismos lados inicial y terminal se denominan **ángulos coterminales**. Como se aprecia en la figura 7(b), los ángulos que miden 110° y 830° son coterminales.



(a) **(b)**

FIGURA 7

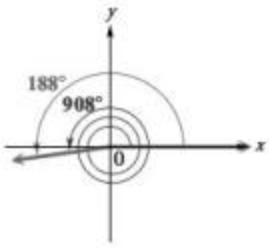


FIGURA 8

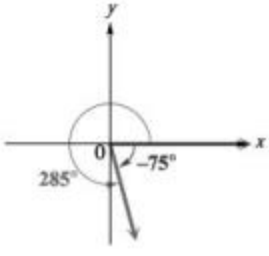


FIGURA 9

EJEMPLO 4 Para los siguientes ángulos, encuentre los más pequeños posibles con medida positiva y coterminales.

(a) $908°$

Hay que sumar y restar $360°$ tantas veces como sea necesario para obtener un ángulo que mida más de $0°$ pero menos de $360°$. Como $908° - 2 \cdot 360° = 908° - 720° = 188°$, el ángulo de $188°$ es coterminal con uno de $908°$. Vea la figura 8.

(b) $-75°$

Utilice una rotación de $360° + (-75°) = 285°$. Consulte la figura 9. ■

A veces es necesario encontrar una expresión que genere todos los ángulos coterminales con un ángulo dado. Por ejemplo, suponga que se desea hacer esto para un ángulo de $60°$. Como cualquier ángulo coterminal se obtiene si a $60°$ se suma un múltiplo apropiado de $360°$, éste se representará con n, y la expresión que representará todos los ángulos coterminales es:

$$60° + n \cdot 360°.$$

La tabla siguiente muestra algunas posibilidades.

Valor de n	Ángulo coterminal con $60°$
2	$60° + 2 \cdot 360° = 780°$
1	$60° + 1 \cdot 360° = 420°$
0	$60° + 0 \cdot 360° = 60°$ (el propio ángulo)
-1	$60° + (-1) \cdot 360° = -300°$

10.1 EJERCICIOS

Proporcione **(a)** *el complemento, y* **(b)** *el suplemento de cada ángulo.*

1. $30°$ **2.** $60°$ **3.** $45°$ **4.** $55°$ **5.** $89°$ **6.** $2°$

7. Si un ángulo mide x grados, ¿cómo se representa su complemento?

8. Si un ángulo mide x grados, ¿cómo se representa su suplemento?

Realice los cálculos que se indica.

9. $62° 18' + 21° 41'$ **10.** $75° 15' + 83° 32'$ **11.** $71° 58' + 47° 29'$

12. $90° - 73° 48'$ **13.** $90° - 51° 28'$ **14.** $180° - 124° 51'$

15. $90° - 72° 58' 11''$ **16.** $90° - 36° 18' 47''$

Convierta cada medida de ángulo a grados decimales. Emplee una calculadora y redondee el resultado al milésimo más cercano de un grado.

17. $20° 54'$ **18.** $38° 42'$ **19.** $91° 35' 54''$

20. $34° 51' 35''$ **21.** $274° 18' 59''$ **22.** $165° 51' 9''$

Convierta cada medida de ángulo a grados, minutos y segundos. Si fuera necesario, utilice una calculadora.

23. $31.4296°$ **24.** $59.0854°$ **25.** $89.9004°$

26. $102.3771°$ **27.** $178.5994°$ **28.** $122.6853°$

Para los ángulos que se indica, encuentre los ángulos coterminales que tengan la medida positiva más pequeña.

29. $-40°$ **30.** $-98°$ **31.** $-125°$ **32.** $-203°$

33. $539°$ **34.** $699°$ **35.** $850°$ **36.** $1000°$

Proporcione una expresión que genere todos los ángulos coterminales con el ángulo dado. Sea que n *represente cualquier entero.*

37. $30°$ **38.** $45°$ **39.** $60°$ **40.** $90°$

Dibuje cada ángulo en posición estándar. Agregue una flecha que represente la cantidad de rotación correcta. Obtenga la medida de otros dos ángulos, uno positivo y otro negativo, que sean coterminales con el ángulo que se da. Mencione el cuadrante de cada ángulo.

41. $75°$ **42.** $89°$ **43.** $174°$ **44.** $234°$

45. $300°$ **46.** $512°$ **47.** $-61°$ **48.** $-159°$

10.2 Funciones trigonométricas de los ángulos

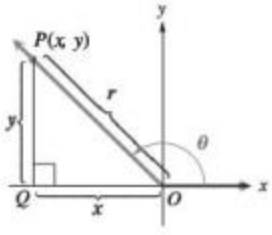


FIGURA 10

El estudio de la trigonometría cubre las seis funciones trigonométricas que se define en esta sección. Para definir dichas funciones, comience con un ángulo θ (la letra griega *theta*) en posición estándar.* Elija cualquier punto P con coordenadas (x, y) en el lado terminal del ángulo θ (el punto P no debe ser el vértice del ángulo). Vea la figura 10.

La perpendicular de P con el eje x llega al punto Q y determina un triángulo que tiene sus vértices en O, P y Q. La distancia r desde $P(x, y)$ al origen $(0, 0)$ se encuentra con la fórmula de la distancia.

$$r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observe que $r > 0$, ya que la distancia nunca es negativa.

El fundador de la trigonometría es **Hiparco**, quien vivió en Rodas y Alejandría, y murió hacia el año 125 a.C. Se sabe poco sobre él. La mayor parte de lo que conocemos de su vida se debe a Ptolomeo, quien le da crédito por ciertas ideas de trigonometría y astronomía. A él se deben muchas observaciones y descubrimientos astronómicos, la teoría astronómica más influyente de los tiempos antiguos, así como obras de geografía. (*Fuente: Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, volumen 1, por Morris Kline.)

Las seis funciones trigonométricas del ángulo θ se llaman **seno**, **coseno**, **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante**. En las definiciones que siguen se utilizan las abreviaturas habituales para los nombres de dichas funciones.

Funciones trigonométricas

Sea (x, y) un punto distinto del origen sobre el lado terminal de un ángulo θ en posición estándar. La distancia del punto al origen es $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Las seis funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\textbf{sen}\ \theta = \frac{y}{r} \qquad \textbf{cos}\ \theta = \frac{x}{r} \qquad \textbf{tan}\ \theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

$$\textbf{csc}\ \theta = \frac{r}{y}\ (y \neq 0) \qquad \textbf{sec}\ \theta = \frac{r}{x}\ (x \neq 0) \qquad \textbf{cot}\ \theta = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$$

*En la nota al margen de la página 586, se menciona las letras del alfabeto griego.

Aunque en la figura 10 se ilustra el segundo cuadrante angular, estas definiciones se aplican a cualquier ángulo θ. Debido a las restricciones en los denominadores en las definiciones de tangente, contangente, secante y cosecante, algunos ángulos tendrán valores indefinidos para sus funciones. Esto se estudiará con más detalle en una parte posterior de este capítulo.

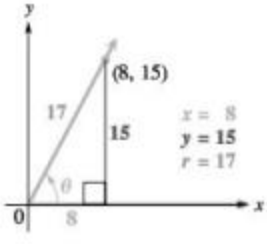


FIGURA 11

EJEMPLO 1 El lado terminal de un ángulo θ en posición estándar pasa por el punto (8, 15). Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de dicho ángulo.

La figura 11 muestra al ángulo θ un el triángulo que se forma al tirar una línea perpendicular del punto (8, 15) al eje x. El punto (8, 15) está 8 unidades a la derecha del eje y y a 15 unidades por arriba del eje x, por tanto, $x = 8$ y $y = 15$.

Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{8^2 + 15^2} \\ &= \sqrt{64 + 225} \\ &= \sqrt{289} \\ &= 17. \end{aligned}$$

Ahora, con las definiciones que se dio, se encuentran los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$ ■

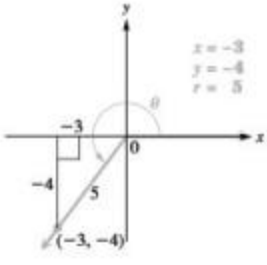


FIGURA 12

EJEMPLO 2 El lado terminal de un ángulo θ en posición estándar pasa por el punto $(-3, -4)$. Calcule los valores de las seis funciones trigonométricas de θ.

Como se ve en la figura 12, $x = -3$ y $y = -4$. El valor de r es

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ r &= \sqrt{25} \\ r &= 5. \end{aligned}$$

(Hay que recordar que $r > 0$.) Entonces, de acuerdo con las definiciones de las funciones trigonométricas, se tiene lo siguiente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}.$$ ■

Las seis funciones trigonométricas se obtienen desde *cualquier* punto del lado terminal del ángulo, que no sea el origen. Para ver la razón por la que es posible emplear cualquier punto, consulte la figura 13, que muestra un ángulo θ y dos puntos distintos de su lado terminal. El punto P tiene coordenadas (x, y), y el punto P' (que se lee "P prima") tiene coordenadas (x', y'). Sea que r designe la longitud de la hipotenusa del triángulo OPQ, y r' será la longitud de la hipotenusa del triángulo OPQ'. Ya que los lados correspondientes de los triángulos semejantes están en proporción.

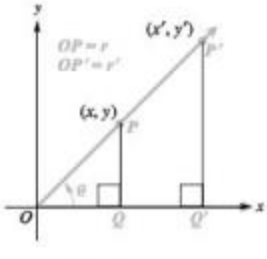


FIGURA 13

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'},$$

así que $\operatorname{sen}\theta = y/r$ tiene el mismo valor sin importar cuál punto se use para encontrarlo. Para las otras cinco funciones se obtienen resultados similares.

Si el lado terminal de un ángulo en posición estándar se encuentra sobre el eje y, cualquier punto que se ubique en dicho lado tiene a 0 como coordenada x. En forma similar, un ángulo con el lado terminal sobre el eje x tiene como coordenada y a 0, para cualquier punto de su lado terminal. Como los valores de x y de y aparecen en los denominadores de algunas de las funciones trigonométricas, y como una fracción está indefinida si su denominador es 0, algunos de los valores de la función trigonométrica de ángulos cuadrantales (es decir, aquellos con su lado terminal sobre el eje x) estarán indefinidos.

EJEMPLO 3 Encuentre los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos siguientes. Identifique los que estén indefinidos.

(a) Un ángulo de 90°

En primer lugar, selecciones cualquier punto del lado terminal de un ángulo a 90°. Se elige el punto $(0,1)$, como se aprecia en la figura 14(a). Aquí, $x = 0$ y $y = 1$. Se invita al lector a comprobar que $r = 1$. Entonces, según las definiciones de las funciones trigonométricas, se tiene lo siguiente:

$$\operatorname{sen} 90° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cos 90° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan 90° = \frac{1}{0} \text{ (indefinida)}$$

$$\csc 90° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec 90° = \frac{1}{0} \text{ (indefinida)} \qquad \cot 90° = \frac{0}{1} = 0.$$

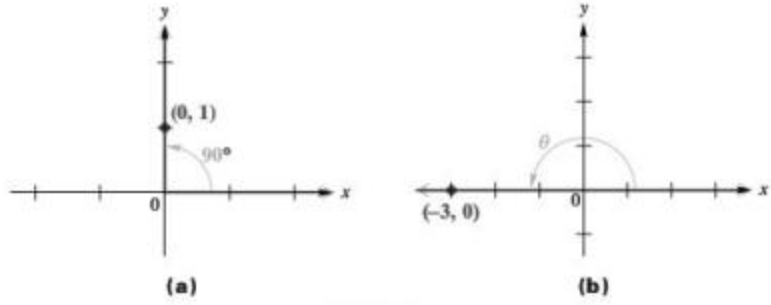


FIGURA 14

(b) Un ángulo en posición estándar con lado terminal que pase por $(-3,0)$

En la figura 14(b) se presenta al ángulo. Aquí, $x = -3$, $y = 0$ y $r = 3$, por lo que las funciones trigonométricas tienen los valores siguientes:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{0}{3} = 0 \qquad \cos \theta = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \tan \theta = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\csc \theta = \frac{3}{0} \text{ (indefinida)} \qquad \sec \theta = \frac{3}{-3} = -1 \qquad \cot \theta = \frac{-3}{0} \text{ (indefinida)} \quad \blacksquare$$

A continuación se resume las condiciones en las que los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales están indefinidas.

Valores indefinidos de las funciones

Si el lado terminal de un ángulo cuadrantal está sobre el eje y, las funciones tangente y secante están indefinidas. Si el ángulo está sobre el eje x, las funciones cotangente y cosecante están indefinidas.

Como los ángulos cuadrantales más comunes son 0°, 90°, 180°, 270° y 360°, en la tabla siguiente se resume los valores de las funciones de éstos. La tabla sólo es una referencia, usted debiera ser capaz de reproducirla con rapidez.

Ángulos cuadrantales

θ	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido
90°	1	0	Indefinido	0	Indefinido	1
180°	0	−1	0	Indefinido	−1	Indefinido
270°	−1	0	Indefinido	0	Indefinido	−1
360°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido

10.2 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 4, dibuje un ángulo θ en posición estándar tal que θ tenga la medida positiva más pequeña posible, y el punto dado esté en el lado terminal de θ.

1. $(-3, 4)$ **2.** $(-4, -3)$ **3.** $(5, -12)$ **4.** $(-12, -5)$

Calcule los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos en posición estándar que tienen los puntos siguientes sobre sus lados terminales. Identifique todos aquellos que estén indefinidos. Cuando se pueda, racionalice los denominadores.

5. $(-3, 4)$ **6.** $(-4, -3)$ **7.** $(0, 2)$ **8.** $(-4, 0)$

9. $(1, \sqrt{3})$ **10.** $(-2\sqrt{3}, -2)$ **11.** $(3, 5)$ **12.** $(-2, 7)$

13. $(-8, 0)$ **14.** $(0, 9)$

15. Para cualquier ángulo θ que no sea cuadrantal, sen θ y csc θ tendrán el mismo signo. Explique la razón de esto.

16. Si cot θ está indefinida, ¿cuál es el valor de tan θ?

17. ¿Cómo se interpreta geométricamente el valor de r en las definiciones de las funciones seno, coseno, secante y cosecante?

18. Si el lado terminal de un ángulo θ está en el cuadrante III, ¿qué signo tiene cada una de los valores de las funciones trigonométricas?

Suponga que el punto (x, y) está en el cuadrante que se indica. Decida si la razón que se da es positiva o negativa. (Una pista: Es de mucha ayuda dibujar un esquema.)

19. II, $\frac{y}{r}$ **20.** II, $\frac{x}{r}$ **21.** III, $\frac{y}{r}$ **22.** III, $\frac{x}{r}$

23. IV, $\frac{x}{r}$ **24.** IV, $\frac{y}{r}$ **25.** IV, $\frac{y}{x}$ **26.** IV, $\frac{x}{y}$

Emplee la definición apropiada para determinar el valor de cada función. Si está indefinida, menciónelo.

27. cos 90° **28.** sen 90° **29.** tan 90° **30.** cot 90° **31.** sec 90°

32. csc 90° **33.** sen 180° **34.** sen 270° **35.** tan 180° **36.** cot 270°

37. sen(−270°) **38.** cos(−270°) **39.** tan 0° **40.** sec(−180°)

10.3 Identidades trigonométricas

El alfabeto griego

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	épsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
O	o	ómicron
Π	π	pi
P	ρ	ro
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Y	υ	ípsilon
Φ	ϕ	fi
X	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Las identidades recíprocas

Las definiciones de las funciones trigonométricas que se dieron en la página 582, se escribieron de modo que fueran recíprocas las funciones que están una arriba o debajo de la otra. Como $\operatorname{sen}\theta = y/r$ y $\csc\theta = r/y$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \quad \text{y} \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Asimismo, $\cos\theta$ y $\sec\theta$ son recíprocas, al igual que $\tan\theta$ y $\cot\theta$. En resumen, se tienen **identidades recíprocas** que se cumplen para cualquier ángulo θ que no tenga a 0 como denominador.

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Las **identidades** son ecuaciones que se cumplen para cualesquiera valores significativos de la variable. Por ejemplo, tanto $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ como $2(x + 3) = 2x + 6$ son identidades.

Al estudiar las identidades hay que tener cuidado con el hecho de que adoptan varias formas. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

también puede escribirse como

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{y como} \qquad (\operatorname{sen}\theta)(\csc\theta) = 1.$$

Habrá que familiarizarse con todas las formas que toman las identidades.

EJEMPLO 1 Encuentre el valor de cada función.

(a) $\cos\theta$, si $\sec\theta = \dfrac{5}{3}$

Como $\cos\theta$ es el recíproco de $\sec\theta$, entonces

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{5/3} = \frac{3}{5}.$$

(b) $\operatorname{sen}\theta$, si $\csc\theta = -\dfrac{\sqrt{12}}{2}$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{-\sqrt{12}/2} = \frac{-2}{\sqrt{12}} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$ ■

En las definiciones de las funciones trigonométricas, r es la distancia que hay desde el origen al punto (x, y). La distancia nunca es negativa, por lo que $r > 0$. Si se escoge un punto (x, y) en el primer cuadrante, entonces tanto x como y serán po-



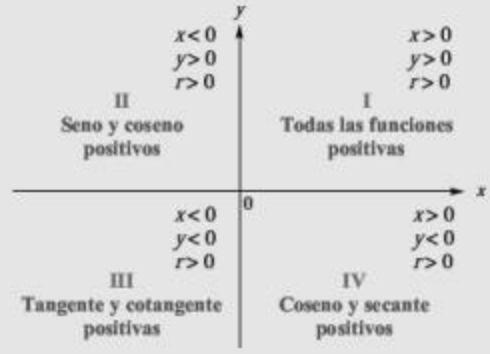
Claudio Ptolomeo (hacia 100-178) realizó la obra astronómica más influyente de la Antigüedad. Aunque en ciertos círculos se conoce a Hiparco como el fundador de la trigonometría, sus obras se han perdido: los historiadores utilizan las de Ptolomeo como fuente para indagar la manera en que los griegos percibían la trigonometría. La descripción que hizo en 13 libros del modelo griego del universo, conocidos como *Mathematical Collection*, fueron la base para los futuros estudiantes tanto en en el mundo islámico como en el occidental. Debido a su importancia, los científicos del Islam lo llamaban *Al-magesti*, que significaba *el más grande*. Aquí se aprecia una talla en madera de una de sus primeros impresos. (*Fuente:* Katz, Victor J., *A History of Mathematics.*)

sitivas. Como $r > 0$, serán positivas las seis fracciones que se emplea en las definiciones de las funciones trigonométricas, de modo que en el primer cuadrante los valores de las seis funciones serán positivas.

Para un punto (x, y) en el segundo cuadrante se tiene que $x < 0$ y $y < 0$. Esto hace que los valores del seno y la cosecante sean positivos para los ángulos que se ubican en dicho cuadrante, mientras que las otras cuatro funciones adoptan valores negativos. Para los otros cuadrantes se obtiene resultados similares.

Signos de los valores de las funciones

θ en cuadrante	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−



EJEMPLO 2 Identifique el cuadrante (o cuadrantes) de cualquier ángulo θ que satisfaga: $\theta > 0$, $\tan\theta < 0$.

Como sen $\theta > 0$ en los cuadrantes I y II, en tanto que tan $\theta < 0$ en los cuadrantes II y IV, ambas condiciones se cumplen en el cuadrante II. ■

Las seis funciones trigonométricas están definidas en términos de x, y y r, además de que el teorema de Pitágoras afirma que $r^2 = x^2 + y^2$ y $r > 0$. Con estas relaciones, si se conoce el valor de una sola función y el cuadrante en que se ubica el ángulo, es posible obtener los valores de las seis funciones trigonométricas. En el ejemplo siguiente se ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 3 Suponga que el ángulo α está en el segundo cuadrante y que sen $\alpha = 2/3$. Calcule los valores de las otras cinco funciones.

Se elige cualquier punto en el lado terminal del ángulo α. Por simplicidad, como sen $\alpha = y/r$, se escoge al punto con $r = 3$. Entonces,

$$\frac{y}{r} = \frac{2}{3}.$$

Como $r = 3$, $y = 2$. Para encontrar x se emplea el resultado que arroje la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + 2^2 = 3^2$$
$$x^2 + 4 = 9$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \sqrt{5}, \quad \text{o bien} \quad x = -\sqrt{5}$$

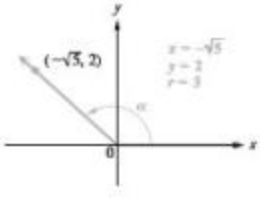


FIGURA 15

Como α está en el segundo cuadrante, la x debe ser negativa, como se ilustra en la figura 15, por tanto $x = -\sqrt{5}$. Esto coloca al punto $(-\sqrt{5}, 2)$ en el lado terminal de α.

Ahora que se conoce los valores de x, y y r, es posible encontrar los valores de las funciones trigonométricas restantes.

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{5}}{5} \qquad \sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{3}{-\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{2}{-\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5} \qquad \cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc \alpha = \frac{r}{y} = \frac{3}{2}$$

■

Las identidades pitagóricas Pueden obtenerse tres identidades nuevas muy útiles a partir de la relación $x^2 + y^2 = r^2$. Si se divide ambos lados entre r^2, queda

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2},$$

o bien,

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Como $\operatorname{sen} \theta = y/r$ y $\cos \theta = x/r$, este resultado se transforma en

$$(\cos \theta)^2 + (\operatorname{sen} \theta)^2 = 1,$$

o bien, como se escribe con frecuencia:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

Si se comienza con $x^2 + y^2 = r^2$ y se divide entre x^2, se obtiene

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$
$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$$
$$1 + (\tan \theta)^2 = (\sec \theta)^2$$

o bien,

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta.$$

Por otro lado, si se divide entre y^2 se llega a:

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta.$$

Estas tres identidades reciben el nombre de **identidades pitagóricas**, ya que la ecuación original que dio lugar a ellas es $x^2 + y^2 = r^2$, y proviene del teorema de Pitágoras.

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Como se dijo, sólo se da una forma de cada identidad. Sin embargo, con transformaciones algebraicas se obtiene otras equivalentes. Por ejemplo, si se resta $\operatorname{sen}^2\theta$ de ambos lados de $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se llega a la identidad equivalente

$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta.$$

Usted debería poder transformar estas identidades con rapidez, y también reconocer sus forma equivalentes.

Las identidades del cociente Hay que recordar que $\operatorname{sen}\theta = y/r$, y $\cos\theta = x/r$. Considere el cociente de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, donde $\cos\theta \neq 0$.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{y}{r} \div \frac{x}{r} = \frac{y}{r} \cdot \frac{r}{x} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

En forma similar, se demuestra que $(\cos\theta)/(\operatorname{sen}\theta) = \cot\theta$, para $\operatorname{sen}\theta \neq 0$. Así, se tiene dos identidades más que se llaman **identidades del cociente**.

Identidades del cociente

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \qquad \frac{\cot\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$$

EJEMPLO 4 Encuentre el $\operatorname{sen}\alpha$ y $\tan\alpha$ si $\cos\alpha = -\sqrt{3}/4$ y α está en el segundo cuadrante. Comience con $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, y sustituya $\cos\alpha$ con $-\sqrt{3}/4$.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 1 \qquad \text{Reemplace } \cos\alpha \text{ con } -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{3}{16} = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{3}{16} \qquad \text{Reste } \frac{3}{16}.$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{13}}{4} \qquad \text{Tome raíces cuadradas.}$$

Como α está en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen}\alpha > 0$, y

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Para calcular tan α, se usa la identidad del cociente $\tan \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$.

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\dfrac{\sqrt{13}}{4}}{\dfrac{-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{4}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{13}}{-\sqrt{3}}$$

El denominador se racionaliza de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{13}}{-\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{13}}{-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{39}}{-3} \\ &= -\frac{\sqrt{39}}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, $\tan \alpha = -\sqrt{39}/3$. ■

10.3 EJERCICIOS

Utilice la identidad recíproca apropiada para determinar el valor de cada identidad. Racionalice los denominadores cuando se pueda.

1. $\tan \theta$, si $\cot \theta = -3$
2. $\cot \theta$, si $\tan \theta = 5$
3. $\operatorname{sen} \theta$, si $\csc \theta = 3$
4. $\cos \alpha$, si $\sec \alpha = -5/2$
5. $\cot \beta$, si $\tan \beta = -1/5$
6. $\operatorname{sen} \alpha$, si $\csc \alpha = \sqrt{15}$
7. $\csc \alpha$, si $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{2}/4$
8. $\sec \beta$, si $\cos \beta = -1/\sqrt{7}$
9. $\tan \theta$, si $\cot \theta = -\sqrt{5}/3$
10. $\cot \theta$, si $\tan \theta = \sqrt{11}/5$
11. $\operatorname{sen} \theta$, si $\csc \theta = 1.5$
12. $\cos \theta$, si $\sec \theta = 7.5$

Identifique el cuadrante o cuadrantes en los que cada ángulo satisface las condiciones que se da.

13. $\operatorname{sen} \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$
14. $\cos \beta > 0$, $\tan \beta > 0$
15. $\tan \gamma > 0$, $\operatorname{sen} \gamma > 0$
16. $\operatorname{sen} \beta < 0$, $\cos \beta > 0$
17. $\tan \omega < 0$, $\cos \omega < 0$
18. $\csc \theta < 0$, $\cos \theta < 0$
19. $\cos \beta < 0$
20. $\tan \theta > 0$

Para cada ángulo proporcione los signos de las seis funciones trigonométricas.

21. 74°
22. 129°
23. 183°
24. 298°
25. 302°
26. 406°
27. 412°
28. −82°
29. −14°
30. −121°

Utilice identidades para hallar el valor que se indica en cada caso.

31. $\tan \alpha$, si $\sec \alpha = 3$, con α en el cuadrante IV
32. $\cos \theta$, si $\operatorname{sen} \theta = 2/3$, con θ en el cuadrante II
33. $\operatorname{sen} \alpha$, si $\cos \alpha = -1/4$, con α en el cuadrante II
34. $\csc \beta$, si $\cot \beta = -1/2$, con β en el cuadrante IV
35. $\tan \theta$, si $\cos \theta = 1/3$, con θ en el cuadrante IV
36. $\sec \theta$, si $\tan \theta = \sqrt{7}/3$, con θ en el cuadrante III
37. $\cos \beta$, si $\csc \beta = -4$, con β en el cuadrante III
38. $\operatorname{sen} \theta$, si $\sec \theta = 2$, con θ en el cuadrante IV

Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de cada ángulo.

39. $\tan \alpha = -15/8$, con α en el cuadrante II

40. $\cos \alpha = -3/5$, con α en el cuadrante III

41. $\cot \gamma = 3/4$, con γ en el cuadrante III

42. $\operatorname{sen} \beta = 7/25$, con β en el cuadrante II

43. $\tan \beta = \sqrt{3}$, con β en el cuadrante III

44. $\csc \theta = 2$, con θ en el cuadrante II

45. $\operatorname{sen} \beta = \sqrt{5}/7$, con $\tan \beta > 0$

46. $\cot \alpha = \sqrt{3}/8$, con $\operatorname{sen} \alpha > 0$

47. Obtenga la identidad $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$, con la división de $x^2 + y^2 = r^2$ entre y^2.

48. Con el empleo de un método similar al que se dio en esta sección para probar que $(\operatorname{sen} \theta)/(\cos \theta) = \tan \theta$, demuestre que

$$\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \cot \theta.$$

10.4 Triángulos rectángulos y valores de funciones

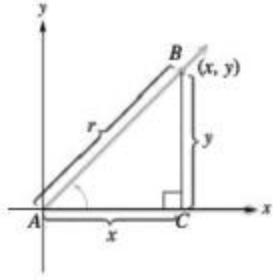


FIGURA 16

Triángulos rectángulos En la figura 16 se ilustra un ángulo agudo en posición estándar. Las definiciones de los valores de las funciones trigonométricas del ángulo A requieren de x, y y r. Como se aprecia en la figura 16, x y y son las longitudes de los dos catetos del triángulo rectángulo ABC, y r es la longitud de la hipotenusa.

El lado de longitud y se denomina **cateto opuesto** al ángulo A, y el lado de longitud x recibe el nombre de **cateto adyacente** al ángulo A. Las longitudes de estos catetos se usan para reemplazar a x y y en las definiciones de las funciones trigonométricas, y r sustituye a la longitud de la hipotenusa, a fin de obtener las definiciones siguientes con base en un triángulo rectángulo.

Definiciones de las funciones trigonométricas con base en un triángulo rectángulo

Para cualquier ángulo agudo A en posición estándar:

$$\operatorname{sen} A = \frac{y}{r} = \frac{\text{cateto opuesto a } A}{\text{hipotenusa}} \qquad \csc A = \frac{r}{y} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } A}$$

$$\cos A = \frac{x}{r} = \frac{\text{cateto adyacente a } A}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec A = \frac{r}{x} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } A}$$

$$\tan A = \frac{y}{x} = \frac{\text{cateto opuesto a } A}{\text{cateto adyacente a } A} \qquad \cot A = \frac{x}{y} = \frac{\text{cateto adyacente a } A}{\text{cateto opuesto a } A}$$

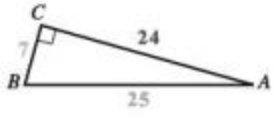


FIGURA 17

EJEMPLO 1 Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos A y B del triángulo rectángulo que se muestra en la figura 17.

La longitud del cateto opuesto al ángulo A es 7. La longitud del cateto adyacente al ángulo A es 24, y la longitud de la hipotenusa es 25. Con el empleo de las relaciones que se proporcionan arriba, se tiene que:

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{7}{25} \qquad \csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{25}{7}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{24}{25} \qquad \sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{25}{24}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{7}{24} \qquad \cot A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{24}{7}$$

La longitud del cateto opuesto al ángulo B es 24, mientras que la del cateto adyacente a B es 7, de lo que resulta lo siguiente:

$$\operatorname{sen} B = \frac{24}{25} \qquad \cos B = \frac{7}{25} \qquad \tan B = \frac{24}{7}$$

$$\csc B = \frac{25}{24} \qquad \sec B = \frac{25}{7} \qquad \cot B = \frac{7}{24}.$$

■

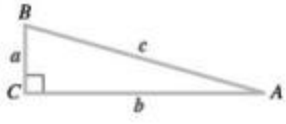


FIGURA 18

En el ejemplo 1, se observa que $\operatorname{sen} A = \cos B$, $\cos A = \operatorname{sen} B$, y así sucesivamente. Dichas relaciones siempre son verdaderas para los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo. La figura 18 muestra un triángulo rectángulo con ángulos agudos A y B y un ángulo recto con C (siempre que se utilice A, B y C para denotar los ángulos de un triángulo rectángulo, el ángulo recto será C). La longitud del cateto opuesto al ángulo A es a, y la longitud del cateto opuesto a B es b. La longitud de la hipotenusa será c.

De acuerdo con las definiciones anteriores, $\operatorname{sen} A = a/c$. Como $\cos B$ también es igual a a/c.

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} = \cos B.$$

De manera similar,

$$\tan A = \frac{a}{b} = \cot B \qquad \sec A = \frac{c}{b} = \csc B.$$

La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es 180°. Como el ángulo C es igual a 90°, los ángulos A y B deben sumar $180° - 90° = 90°$. Como se dijo en el capítulo 9, los ángulos cuya suma es 90°, se denominan *ángulos complementarios*. Como los ángulos A y B son complementarios y $\operatorname{sen} A = \cos B$, las funciones seno y coseno reciben el nombre de **cofunciones**. Asimismo, la tangente y cotangente son cofunciones, al igual que la secante y cosecante. Y como los ángulos A y B son complementarios, $A + B = 90°$, o bien

$$B = 90° - A,$$

lo que arroja:

$$\operatorname{sen} A = \cos B = \cos(90° - A).$$

Para las demás funciones trigonométricas se obtienen resultados similares. Dichos resultados se llaman **identidades por cofunción**.

Identidades por cofunción

Para cualquier ángulo agudo A, se cumple que:

$$\operatorname{sen} A = \cos(90° - A) \qquad \csc A = \sec(90° - A)$$

$$\cos A = \operatorname{sen}(90° - A) \qquad \sec A = \csc(90° - A)$$

$$\tan A = \cot(90° - A) \qquad \cot A = \tan(90° - A).$$

Estas identidades se extienden a *cualquier* ángulo A, y no sólo a los agudos.

EJEMPLO 2 Escriba cada uno de los enunciados siguientes en términos de cofunciones.

(a) cos 52°

Como $\cos A = \text{sen}(90° - A)$,

$$\cos 52° = \text{sen}(90° - 52°) = \text{sen } 38°.$$

(b) $\tan 71° = \cot 19°$

(c) $\sec 24° = \csc 66°$ ■

Valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales

Ciertos ángulos especiales, tales como 30°, 45° y 60° ocurren con tanta frecuencia en la trigonometría en el ámbito de las matemáticas más avanzadas, que merecen atención especial. Los valores de las funciones trigonométricas de dichos ángulos se calculan por medio de ciertas propiedades geométricas y el teorema de Pitágoras.

Para obtener los valores de las funciones trigonométricas de 30° y 60°, se comienza con un triángulo equilátero, que es aquel cuyos lados miden todos lo mismo. Cada ángulo de un triángulo así mide 60°. Aunque los resultados que se obtendrá son independientes de la longitud, por conveniencia se eligue que cada lado mida 2 unidades. Vea la figura 19(a).

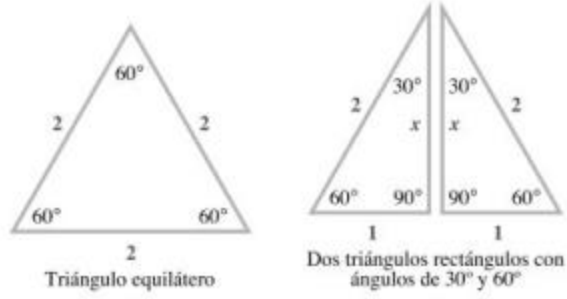


FIGURA 19

Si se biseca un ángulo de este triángulo equilátero se obtiene dos triángulos rectángulos, cada uno de los cuales tiene ángulos de 30°, 60° y 90°, según se aprecia en la figura 19(b). Como la hipotenusa de uno de dichos triángulos rectángulos mide 2, el lado más corto tendrá una longitud de 1 (¿por qué?). Si x representa la medida de medio lado, entonces, de acuerdo con el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} 2^2 &= 1^2 + x^2 \\ 4 &= 1 + x^2 \\ 3 &= x^2 \\ \sqrt{3} &= x. \end{aligned}$$

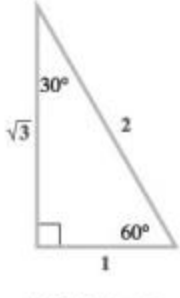


FIGURA 20

La figura 20, que muestra un triángulo rectángulo con ángulos de 30° y 60°, resume los resultados que se obtuvo.

Como se ve en la figura, el cateto opuesto al ángulo de 30° mide 1; es decir, para el ángulo de 30°, se tiene que:

$$\text{hipotenusa} = 2, \qquad \text{cateto opuesto} = 1, \qquad \text{cateto adyacente} = \sqrt{3}.$$

Con el empleo de las funciones trigonométricas, se tiene que:

$$\text{sen } 30° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{2} \qquad \csc 30° = \frac{2}{1} = 2$$

$$\cos 30° = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

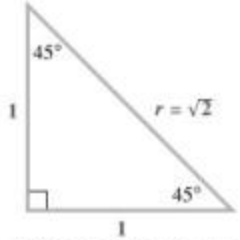
$$\tan 30° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Para tan 30° y sec 30°, se racionalizó el denominador.

En forma similar, se tiene que:

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec 60° = 2 \qquad \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Triángulo rectángulo con dos ángulos de 45°

FIGURA 21

Los valores de las funciones trigonométricas para 45° se encuentran por medio de un triángulo rectángulo con dos ángulos de 45° cada uno, como el que se aprecia en la figura 21. Éste es un triángulo isósceles, y por conveniencia se elige que las longitudes de los lados iguales midan 1 unidad (al igual que antes, los resultados son independientes de la longitud de los lados iguales del triángulo rectángulo). Como cada uno de los lados más cortos mide 1, si r representa la longitud de la hipotenusa, se tiene que

$$1^2 + 1^2 = r^2$$
$$2 = r^2$$
$$\sqrt{2} = r.$$

Por medio de las mediciones que se indican en el triángulo rectángulo con ángulos de 45°, que aparece en la figura 21, se obtiene lo siguiente:

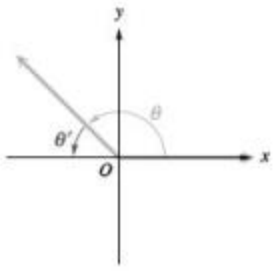
$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \qquad \sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \qquad \cot 45° = \frac{1}{1} = 1.$$

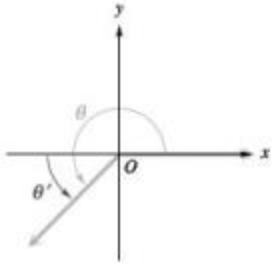
La importancia de estos valores exactos de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 60° y 45°, no puede exagerarse dado que se emplean mucho. En la tabla siguiente se resume dichos valores.

Valores de las funciones de ángulos especiales

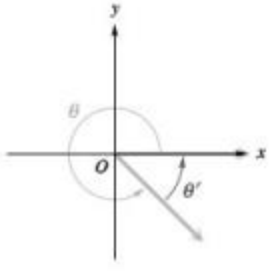
θ	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$



θ en el cuadrante II



θ en el cuadrante III



θ en el cuadrante IV

FIGURA 22

Usted debe ser capaz de reproducir los valores de las funciones que se presentan en la tabla anterior. No es difícil hacerlo si recuerda los valores de sen 30°, cos 30° y sen 45°. Con ellos se completa el resto de la tabla, por medio de las identidades de los recíprocos, cociente y cofunción. Otra opción consiste en visualizar los triángulos apropiados y usar las razones de las definiciones.

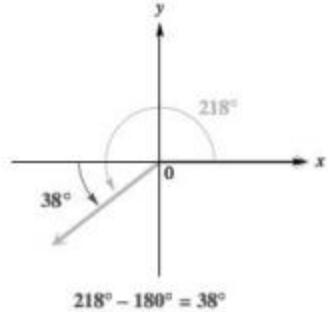
Ángulos de referencia Ahora que se han estudiado los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos, se usan los resultados para calcular los valores de las funciones de otro tipo de ángulos. A cada ángulo en posición estándar que no sea cuadrantal se asocia un ángulo agudo positivo que se llama su *ángulo de referencia*. El **ángulo de referencia** de un ángulo θ se escribe θ' y es el ángulo agudo positivo que forma el lado terminal del ángulo θ con el eje de las x. La figura 22 presenta varios ángulos θ (cada uno de ellos mide menos que una vuelta completa en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) en los cuadrantes II, III y IV, respectivamente, y también se indica el ángulo de referencia θ'. En el cuadrante I, θ y θ' son el mismo. Si un ángulo θ es negativo o mide más de 360°, su ángulo de referencia se obtiene por medio de determinar primero su ángulo coterminal que está entre 0° y 360°, y después se emplea el diagrama de la figura 22.

Un error común consiste en encontrar el ángulo de referencia con el empleo del lado terminal de θ y el eje y. *El ángulo de referencia siempre se obtiene en relación con el eje de las x.*

EJEMPLO 3 Encuentre los ángulos de referencia para los ángulos siguientes:

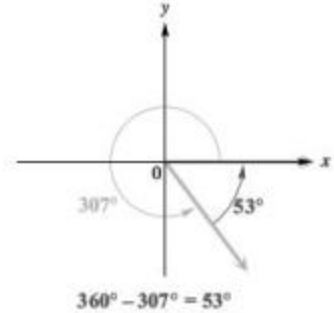
(a) 218°

Como se ve en la figura 23, el ángulo agudo positivo que forma el lado terminal de este ángulo y el eje de las x, mide $218° - 180° = 38°$. Para $\theta = 218°$, el ángulo de referencia es $\theta' = 38°$.



$218° - 180° = 38°$

FIGURA 23



$360° - 307° = 53°$

FIGURA 24

(b) 1387°

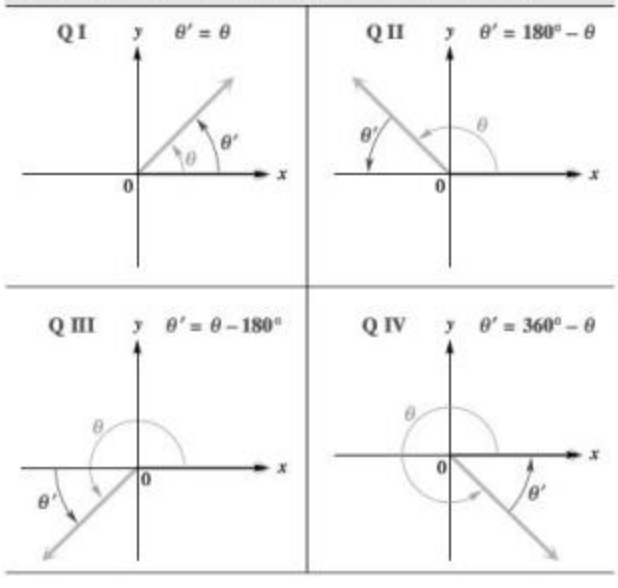
En primer lugar, se determina el ángulo coterminal entre 0° y 360°. Se divide 1387° entre 360° y se obtiene el cociente de 3.9, aproximadamente. Luego se resta tres por 360° (debido al 3 que aparece en 3.9):

$$1387° - 3 \cdot 360° = 307°.$$

El ángulo de referencia para 307° (y por tanto para 1387°) es $360° - 307° = 53°$. Vea la figura 24. ■

El ejemplo anterior sugiere la tabla siguiente para calcular el ángulo de referencia θ' de cualquier ángulo θ entre 0° y 360°.

Ángulo de referencia θ' para θ, donde $0° < \theta < 360°$



Ahora es posible calcular los valores de las funciones trigonométricas de ángulos con ángulos de referencia de 30°, 60° y 45°. En el ejemplo 4 se muestra cómo utilizar los valores de estas funciones para obtener los valores de las funciones trigonométricas de 210°.

EJEMPLO 4 Obtenga los valores de las funciones trigonométricas para 210°.

Aun cuando un ángulo de 210° no pertenece a un triángulo rectángulo, las ideas que se han mencionado se emplean para calcular los valores de sus funciones trigonométricas. Para hacerlo, se dibuja un ángulo de 210° en posición estándar, como se ve en la figura 25. Se elige el punto P en el lado terminal del ángulo de modo que la distancia entre el origen O a P sea 2. Con los resultados que se obtuvieron para triángulos con dos ángulos de 30° y 60°, se concluye que las coordenadas del punto P son $(-\sqrt{3}, -1)$, con $x = -\sqrt{3}$, $y = -1$ y $r = 2$. Luego, de acuerdo con las definiciones de las funciones trigonométricas, se tiene lo siguiente:

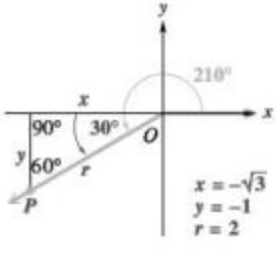


FIGURA 25

$$\operatorname{sen} 210° = -\frac{1}{2} \qquad \cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 210° = -2 \qquad \sec 210° = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 210° = \sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

En el ejemplo 4, observe que los valores de las funciones trigonométricas de 210° corresponden, en cuanto a su valor absoluto, a los de su ángulo de referencia de 30°. Los signos son diferentes para las funciones seno, coseno, secante y cosecante porque 210° es un ángulo que está en el tercer cuadrante. Estos resultados sugieren un método para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo que no sea agudo, con el empleo de su ángulo de referencia. En el ejemplo 4, el ángulo de referencia de 210° es 30°, como se aprecia en la figura 25. Con la sola utili-

El historiador Reviel Netz, de Stanford University, ha estudiado un manuscrito antiguo del matemático griego Arquímedes ("Unveiling the work of Archimedes", *Science News*, vol. 157, p. 77, 20 de enero de 2000). Se conoce como el *Palimpsesto de Arquímedes*, data del siglo 10 d.C., y se trata de los retos de un pergamino que después fue cortado y raspado y sobrescrito con la descripción de un ritual eclesiástico. El empleo de la fotografía ultravioleta e imágenes digitales hicieron posible la lectura de lo que estaba atrás del ritual, y se descubrieron el texto y los diagramas de Arquímedes. De acuerdo con Netz, los diagramas sugieren que los matemáticos griegos hacían énfasis en las relaciones cualitativas más que en las cuantitativas.

zación de los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de referencia, 30°, y la selección correcta de los signos para el cuadrante III, se obtienen los mismos resultados a que se llegó en el ejemplo 4.

Los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo θ que no sea cuadrantal se determinan con el cálculo de los valores de las funciones para un ángulo entre 0° y 90°. Para hacer esto, se siguen los pasos siguientes:

Cálculo de los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo no cuadrantal

1. Si $\theta > 360°$ o si $\theta < 0°$, se encuentra un ángulo coterminal por medio de sumar o restar 360° tantas veces como sea necesario para obtener un ángulo mayor que 0° pero menor que 360°.
2. Encontrar el ángulo de referencia θ'.
3. Hallar los valores necesarios de las funciones trigonométricas del ángulo de referencia θ'.
4. Determine los signos correctos para los valores que se encontraron en el paso 3 (se utiliza la tabla de signos de la sección 10.3). Este resultado proporciona los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ.

EJEMPLO 5 Con el uso de los ángulos de referencia, encuentre el valor exacto de cada uno de los ángulos siguientes:

(a) $\cos(-240°)$

El ángulo de referencia es 60°, como se aprecia en la figura 26. Como en el cuadrante III el coseno es negativo:

$$\cos(-240°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$$

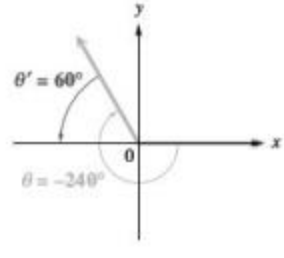


FIGURA 26

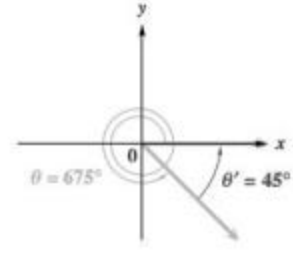


FIGURA 27

(b) $\tan 675°$

Se comienza con la resta de 360° para obtener un ángulo coterminal entre 0° y 360°.

$$675° - 360° = 315°$$

Según se aprecia en la figura 27, el ángulo de referencia es $360° - 315° = 45°$. Un ángulo de 365° está en el cuarto cuadrante, en el que la tangente es negativa, y entonces:

$$\tan 675° = \tan 315° = -\tan 45° = -1.$$

■

Las ideas que se estudiaron en esta sección se emplean a la inversa para calcular las medidas de ciertos ángulos, dados el valor de una función trigonométrica y un intervalo en el que debe estar el ángulo θ. Es frecuente que haya interés en el intervalo $0° \le \theta < 360°$.

EJEMPLO 6 Encuentre todos los valores de θ, si $0° \le \theta < 360°$ y $\cos \theta = -\sqrt{2}/2$.

Como el coseno que se da es negativo, θ debe quedar en el cuadrante II o en el III. Como el valor absoluto de $\cos \theta$ es $\sqrt{2}/2$, el ángulo de referencia θ' debe ser 45°. Los dos ángulos posibles θ aparecen en la figura 28. El ángulo θ en el segundo cuadrante debe ser igual a $180° - 45° = 135°$, y el ángulo θ en el tercer cuadrante debe ser igual a $180° + 45° = 225°$.

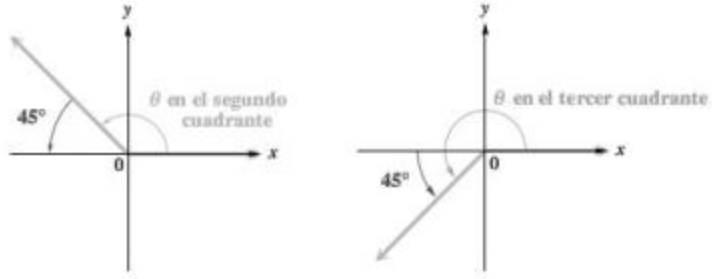
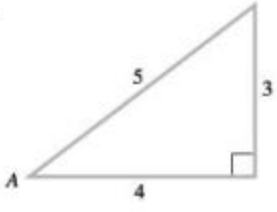


FIGURA 28

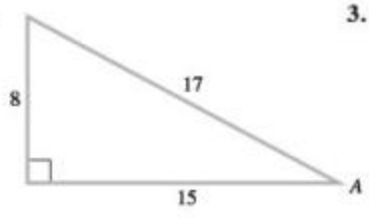
10.4 EJERCICIOS

Encuentre los valores de las funciones trigonométricas del ángulo A. Deje las respuestas en forma de fracción.

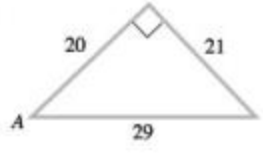
1.



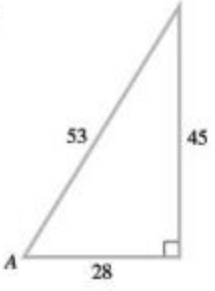
2.



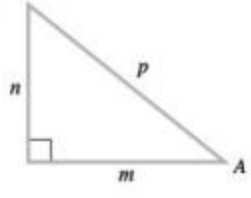
3.



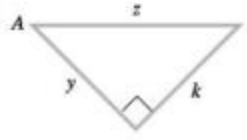
4.



5.



6.



Suponga que ABC es un triángulo rectángulo cuyos lados miden a, b y c, con C que denota al ángulo recto (consulte la figura 18). Calcule la longitud desconocida del lado, por medio del teorema de Pitágoras, y después obtenga los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo B. Racionalice los denominadores cuando se pueda.

7. $a = 5, b = 12$ **8.** $a = 3, b = 5$ **9.** $a = 6, c = 7$ **10.** $b = 7, c = 12$

Escriba cada una de las funciones siguientes en términos de la cofunción.

11. tan 50° **12.** cot 73° **13.** csc 47° **14.** sec 39°

15. tan 25.4° **16.** sen 38.7° **17.** cos 13° 30′ **18.** tan 26° 10′

En relación con lo que se estudió en esta sección, proporcione el valor exacto *de la función trigonométrica. No utilice calculadora.*

19. tan 30° **20.** cot 30° **21.** sen 30° **22.** cos 30°

23. csc 45° **24.** sec 45° **25.** cos 45° **26.** sen 45°

27. sen 60° **28.** cos 60° **29.** tan 60° **30.** cot 60°

Encuentre el ángulo de referencia para cada uno de los siguientes.

31. 98° **32.** 212° **33.** $-135°$ **34.** $-60°$ **35.** 750° **36.** 480°

Utilice los métodos de esta sección para determinar los valores exactos *de las funciones trigonométricas para cada uno de los ángulos siguientes. Racionalice los denominadores cuando sea procedente.*

37. 120° **38.** 135° **39.** 150° **40.** 225° **41.** 240°

42. 300° **43.** 315° **44.** 405° **45.** 420° **46.** 480°

47. 495° **48.** 570° **49.** 750° **50.** 1305° **51.** 1500°

52. 2670° **53.** $-390°$ **54.** $-510°$ **55.** $-1020°$ **56.** $-1290°$

Complete la tabla siguiente con los valores exactos *de las funciones trigonométricas, emplee los métodos expuestos en esta sección.*

	θ	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
57.	30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	____	____	$2\sqrt{3}/3$	2
58.	45°	____	____	1	1	____	____
59.	60°	____	1/2	$\sqrt{3}$	____	2	____
60.	120°	$\sqrt{3}/2$	____	$-\sqrt{3}$	____	____	$2\sqrt{3}/3$
61.	135°	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	____	____	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
62.	150°	____	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	____	____	2
63.	210°	$-1/2$	____	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	____	-2
64.	240°	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	____	____	-2	$-2\sqrt{3}/3$

Obtenga todos los valores de θ, *si* $0° \leq \theta < 360°$, *y la condición que se da es verdadera.*

65. sen $\theta = -1/2$ **66.** cos $\theta = -1/2$ **67.** tan $\theta = 1$

68. cot $\theta = \sqrt{3}$ **69.** sen $\theta = \sqrt{3}/2$ **70.** cos $\theta = \sqrt{3}/2$

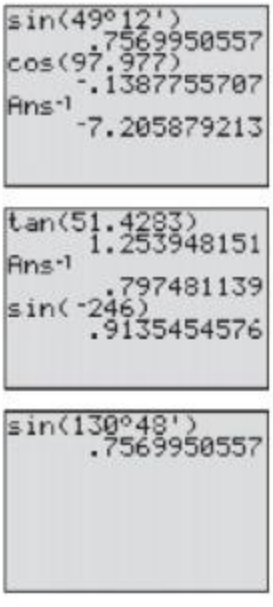
71. sec $\theta = -2$ **72.** csc $\theta = -2$ **73.** sen $\theta = \sqrt{2}/2$

74. cos $\theta = -\sqrt{2}/2$ **75.** tan $\theta = -\sqrt{3}$ **76.** cot $\theta = -1$

10.5 Aplicaciones de los triángulos rectángulos

Obtener aproximaciones con calculadora Con la vista puesta en los avances tecnológicos de esta era, los ejemplos y ejercicios siguientes de este capítulo suponen que todos los estudiantes tienen acceso a calculadoras científicas. Sin embargo, como las calculadoras difieren en marcas y modelos, los estudiantes siempre deben consultar el manual del usuario para obtener información específica en caso de que surjan dudas respecto de su uso.

Hasta este punto del libro, sólo se han estudiado un tipo de unidades de medida de ángulos —los grados; se estudian otro tipo de unidades, los radianes, en el contexto de un trabajo teórico más profundo. Cuando se evalúan funciones trigonométricas de ángulos que están dados en grados, un error común consiste en utilizar el modo incorrecto; hay que recordar que la calculadora debe estar en el *modo de grados*. Una forma de evitar este problema es adquirir el hábito de comenzar siempre a trabajar con la obtención del sen 90°. Si la respuesta que aparece en la pantalla es 1, la calculadora está dispuesta para medidas en grados; de otro modo, no lo está. Hay que recordar que la mayor parte de los valores de funciones trigonométricas que arroja la calculadora, son aproximaciones.



Las tres pantallas muestran los resultados de los incisos (a)-(e) del ejemplo 1. Observe que la calculadora permite introducir la medida del ángulo en grados y minutos en los incisos (a) y (e). En la quinta línea de la primera pantalla, Ans^{-1} indica a la calculadora que encuentre el recíproco de la respuesta que dio en la línea anterior.

EJEMPLO 1 Utilice la calculadora para aproximar los valores de las funciones trigonométricas siguientes.

(a) sen 49° 12′

Convierta 49° 12′ a grados decimales.

$$49°\ 12' = 49\frac{12°}{60} = 49.2°$$

Si se redondea a ocho cifras decimales, queda:

$$\text{sen } 49°\ 12' = \text{sen } 49.2° \approx .75699506.$$

(b) sec 97.977°

Las calculadoras no tienen tecla para la secante. Sin embargo, se sabe que:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

para todos los ángulos θ para los que $\cos\theta \neq 0$. Para encontrar sec 97.977°, primero se obtiene cos 97.977° y después se toma el recíproco, con lo que se obtiene:

$$\sec 97.977° \approx -7.205879213.$$

(c) cot 51.4283°

Se utiliza la identidad $\cot\theta = 1/\tan\theta$.

$$\cot 51.4283° \approx .79748114$$

(d) sen (–246°) ≈ .91354546

(e) sen 130° 48′

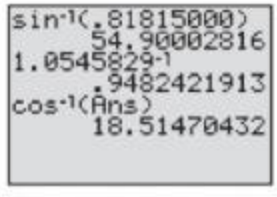
130° 48′ es igual a 130.8°.

$$\text{sen } 130°\ 48' = \text{sen } 130.8° \approx .75699506$$

■

Observe que los valores que se encontraron en los incisos (a) y (e) del ejemplo 1 son los mismos. La razón de esto es que 49° 12′ es el ángulo de referencia para 130° 48′ y la función seno es positiva para un ángulo en el segundo cuadrante.

Obtención de ángulos Hasta el momento, en esta sección se ha usado la calculadora para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos. Este proceso puede invertirse. Por ahora limitaremos nuestra atención a ángulos θ que estén en el intervalo $0° \le \theta \le 90°$. La medida de un ángulo se encuentra a partir de algún valor de sus funciones trigonométricas con el empleo de las funciones inversas, como se muestra en el ejemplo siguiente.



Esta pantalla da apoyo a los resultados del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Por medio de una calculadora, encuentre un valor de θ tal que $0° \le \theta \le 90°$, y θ satisfaga cada uno de los enunciados siguientes. Exprese las respuestas en grados decimales.

(a) sen $\theta = .81815000$

θ se encontrará con la tecla que dice [arc] o [INV] junto con la tecla que dice [sin]. En lugar de lo anterior, algunas calculadoras tal vez requieran que se utilice la tecla que dice [sin⁻¹]. Revise su manual de usuario para ver la forma de operar de su calculadora. Otra vez, asegúrese de que la calculadora está dispuesta para medidas en grados. Usted debe obtener

$$\theta \approx 54.900028°.$$

(b) sec $\theta \approx 1.0545829$

Utilice la identidad $\cos \theta = 1/\sec \theta$. Introduzca 1.0545829 y encuentre el recíproco. Esto arroja $\cos \theta \approx .9482421913$. Ahora calcule θ como se describió en el inciso (a), por medio de la inversa del coseno. El resultado es

$$\theta \approx 18.514704°.$$ ■

Compare los ejemplos 1(a) y 2(b). Observe que para calcular el ángulo la tecla del recíproco se usa *antes* de la tecla de la inversa del coseno, pero *después* de la tecla del coseno cuando se calcula la función trigonométrica.

Cifras significativas Suponga que se mide con rapidez una habitación y resulta que tiene 15 pies por 18 pies. Para calcular la longitud de una diagonal de este cuarto se utiliza el teorema de Pitágoras.

$$d^2 = 15^2 + 18^2$$
$$d^2 = 549$$
$$d = \sqrt{549} \approx 23.430749$$

¿Esta respuesta debe tomarse como la longitud de la diagonal de la habitación? Por supuesto que no. El número 23.430749 tiene 6 cifras decimales, mientras que los datos originales de 15 pies y 18 pies sólo tienen una exactitud al pie más cercano. Como los resultados de un problema no pueden ser más exactos que el número menos exacto que se emplea en los cálculos, en realidad se debe decir que la diagonal de un cuarto de 15 pies por 18 es 23 pies.

Si una pared que se mide al pie más cercano tiene 18 pies de largo, en realidad esto significa que su longitud está entre 17.5 pies y 18.5 pies. Si se mide la pared con más exactitud y resulta que tiene 18.3 pies de largo, entonces su longitud en realidad está entre 18.25 pies y 18.35 pies. Una medida de 18.00 pies indicaría que la longitud de la pared está entre 17.995 y 18.005 pies. Se dice que la medida de 18 pies tiene una exactitud de dos *cifras significativas*; 18.0 tiene tres cifras significativas, y 18.00 tiene cuatro.

¿Qué pasa si se tiene una medida de 900 metros? No se puede decir si ésta representa una medida al metro más cercano, a los 10 metros o a la centena de metros. Para evitar este problema, se escribe el número en notación científica como 9.00×10^2 si es al metro más cercano, 9.0×10^2 a la decena más cercana de metros, o 9×10^2 si es a la centena más cercana. Estos tres casos tienen, respectivamente, tres, dos y una cifras significativas.

Una **cifra significativa** es la que se obtiene por medio de una medición real. Un número que represente el resultado de contar o que provenga de trabajo teórico, y no sea el resultado de una medición, es un **número exacto**. En Estados Unidos hay 50 estados, por lo que 50 es un número exacto. El numero de estados no es $49\frac{3}{4}$ o $50\frac{1}{4}$, tampoco se utiliza el número 50 para representar *algún número entre 45 y 55*. En la fórmula del perímetro de un rectángulo, $P = 2L + 2W$, los números 2 se obtuvieron de la definición de perímetro, por lo que se trata de números exactos.

La mayor parte de valores de las funciones trigonométricas son aproximaciones, y virtualmente todas las medidas son aproximaciones. Para realizar cálculos con dichos números aproximados, se sigue las reglas que se da a continuación (las reglas para redondear se encuentran en la sección 6.5).

Cálculo con cifras significativas

Para *sumar* y *restar*, se redondea la respuesta de modo que la última cifra que se tenga esté en la columna más a la derecha en la que todos los números tengan cifras significativas.

Para *multiplicar* o *dividir*, la respuesta se redondea al número mínimo de cifras significativas que se encuentre en cualquiera de los números dados.

Para *potencias* y *raíces*, hay que redondear la respuesta en forma tal que tenga el mismo número de cifras significativas que los números cuya potencia o raíz se esté calculando.

Resolver un triángulo significa encontrar las medidas de todos sus ángulos y lados. Cuando se resuelvan triángulos se emplea la tabla siguiente a fin de determinar las cifras significativas de la medida del ángulo.

Cifras significativas de los ángulos

Número de cifras significativas	Medida del ángulo a la unidad más cercana de éstas:
2	Grado
3	10 minutos, décima de grado más cercana
4	Minuto, o centésima de grado más cercana
5	Décima de un minuto, o milésima de grado más cercana

Por ejemplo, un ángulo que mida 52° 30′ tiene tres cifras significativas (si se supone que 30′ está medido a la decena de minutos más cercana).

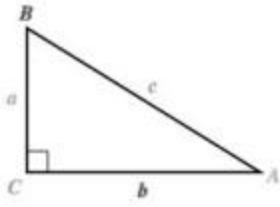


FIGURA 29

Resolución de triángulos Al emplear trigonometría para resolver triángulos, una ayuda importante consiste en un dibujo con acotaciones. Por convención se emplea una a para representar la longitud del lado opuesto al ángulo A, una b representa la longitud del lado opuesto al ángulo B, y así sucesivamente. Como ya se dijo, en un triángulo rectángulo, se reserva la letra c para denotar la hipotenusa. La figura 29 muestra las acotaciones de un triángulo rectángulo común.

EJEMPLO 3 Resuelva el triángulo rectángulo ABC, con $A = 34° 30'$ y $c = 12.7$ pulg. Ver la figura 30.

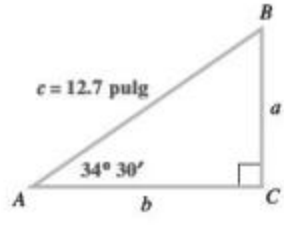


FIGURA 30

Para resolver el triángulo, hay que encontrar las medidas de los lados y ángulos restantes. El valor de a se obtiene con la función trigonométrica que involucre los valores conocidos del ángulo A y el lado c. Como el seno del ángulo A está dado por el cociente del lado opuesto a A y la hipotenusa, se emplea la función sen A, así:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$$

Al sustituir los valores conocidos queda:

$$\operatorname{sen} 34° 30' = \frac{a}{12.7},$$

bien, después de multiplicar ambos lados por 12.7, queda:

$$a = 12.7 \operatorname{sen} 34° 30'$$
$$a = 12.7(.56640624) \qquad \text{Use una calculadora.}$$
$$a = 7.19 \text{ pulg}$$

El valor b se encuentra por medio del teorema de Pitágoras. Sin embargo, es mejor utilizar la información que se da en el problema en vez de obtener el resultado de un cálculo. Esto es así porque si se hubiera cometido un error al calcular a, entonces también b sería incorrecto. Asimismo, al redondear más de una vez se ocasiona que el resultado sea menos exacto. Al utilizar la función cos A se obtiene:

$$\cos A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$
$$\cos 34° 30' = \frac{b}{12.7}$$
$$b = 12.7 \cos 34° 30'$$
$$b = 10.5 \text{ pulg}$$

Una vez obtenido b, se emplea el teorema de Pitágoras para comprobar. Todo lo que resta para resolver el triángulo ABC es encontrar la medida del ángulo B. Como $A + B = 90°$, y $A = 34° 30'$, se tiene que:

$$\begin{aligned} A + B &= 90° \\ B &= 90° - A \\ B &= 89° 60' - 34° 30' \\ B &= 55° 30'. \end{aligned}$$

■

En el ejemplo 3 hubiera podido comenzarse por calcular la medida del ángulo B y después utilizar los valores de las funciones trigonométricas de B para hallar los lados desconocidos. El proceso de resolver un triángulo rectángulo (igual que muchos problemas de matemáticas) por lo general puede llevarse a cabo de varias maneras, cada una de las cuales da como resultado la respuesta correcta. Sin embargo, a fin de mantener tanta exactitud como pudiera esperarse, siempre hay que emplear la información que se proporciona hasta donde sea posible, y evitar el redondeo en pasos intermedios.

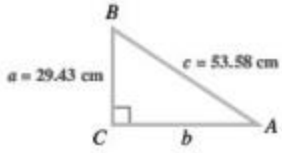


FIGURA 31

EJEMPLO 4 Resuelva el triángulo ABC si $a = 29.43$ cm y $c = 53.58$ cm.

Haga un dibujo que muestre la información dada, como el de la figura 31. Una manera de comenzar es encontrar el seno del ángulo A, y después utilizar la inversa del seno.

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{29.43}{53.58}$$

Una vez que en una calculadora se oprimen las teclas [INV] [sin] o bien, [sin⁻¹], se encuentra que $A = 33.32°$. La medida de B es $90° - 33.32° = 56.68°$.

Ahora se encuentra b por medio del teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, o bien, $b^2 = c^2 - a^2$. Como $c = 53.58$ y $a = 29.43$, se tiene que:

$$b^2 = 53.58^2 - 29.43^2$$

lo que da $$b = 44.77 \text{ cm}.$$

■

Solución de problemas

El proceso de resolver triángulos rectángulos se adapta con facilidad a la solución de problemas de aplicación. Un paso crucial de dichas aplicaciones radica en dibujar el triángulo y acotar en forma correcta las partes que se dan. Después se emplean los métodos descritos en los ejemplos anteriores para calcular el valor o valores desconocidos.



FIGURA 32

Muchas aplicaciones de triángulos rectángulos involucran el *ángulo de elevación* o el *ángulo de depresión*. El **ángulo de elevación** del punto X al punto Y (por arriba de X), es el ángulo agudo que forma el rayo XY y un rayo horizontal cuyo punto de terminación está en X. El ángulo de elevación siempre se mide a partir de la horizontal. Vea el ángulo de la parte superior de la figura 32. El **ángulo de depresión** del punto X al punto Y (por debajo de X), es el ángulo agudo que forma el rayo XY y un rayo horizontal con su punto final en X, como se aprecia en la parte inferior de la figura 32.

Es frecuente que se cometan errores al interpretar el ángulo de depresión. Hay que recordar que tanto el ángulo de elevación *como* el ángulo de depresión se miden entre la línea visual y la *horizontal*.



Antes de la aparición de la calculadora científica, en la década de 1970, se pedía a los estudiantes de trigonometría que usaran tablas para encontrar los valores de las funciones trigonométricas. Si bien la mayor parte de los libros de trigonometría incluían versiones cortas de dichas tablas, había libros como el que se muestra aquí, que daban los valores de las funciones para ángulos, así como información acerca de sus logaritmos con objeto de ejecutar cálculos con más facilidad. (Nota del autor: *Los estudiantes de hoy no saben cuán afortunados son de no tener que usar dichas tablas.*)

EJEMPLO 5 Donna Garbarino sabe que cuando se para a 123 pies de la base de un asta bandera, el ángulo de elevación hasta el extremo superior es de 26° 40′. Si sus ojos están 5.30 pies por arriba del piso, calcule la altura del asta.

Se conoce la longitud del lado adyacente a Donna y ha de encontrarse la longitud del lado opuesto a ella. Vea la figura 33. La razón que involucra estos dos valores es la tangente.

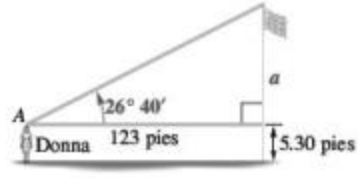


FIGURA 33

$$\tan A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

$$\tan 26° 40' = \frac{a}{123}$$

$$a = 123 \tan 26° 40'$$

$$a = 61.8 \text{ pies}$$

Como los ojos de Donna están a 5.30 pies sobre el piso, la altura del asta es

$$61.8 + 5.30 = 67.1 \text{ pies.}$$

■

EJEMPLO 6 La longitud de la sombra de un edificio que mide 34.09 metros de altura, es de 37.62 metros. Encuentre el ángulo de elevación del Sol.

Como se muestra en la figura 34, el ángulo de elevación del Sol es el ángulo B. Como se conoce el cateto opuesto a B y también el adyacente a este ángulo, se utiliza la razón de la tangente para hallar la medida de B.

$$\tan B = \frac{34.09}{37.62}$$

$$B = 42.18° \qquad \text{Utilice la función inversa de la tangente de una calculadora.}$$

El ángulo de elevación del Sol es de 42.18°.

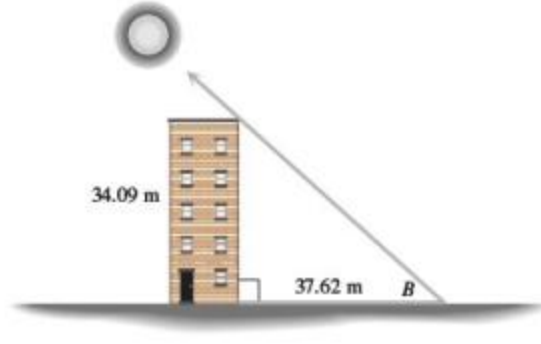


FIGURA 34

■

10.5 EJERCICIOS

Utilice una calculadora para encontrar una aproximación decimal de cada valor. Proporcione tantos dígitos como muestre la máquina.

1. tan 29° 30′ **2.** sen 38° 42′ **3.** cot 41° 24′ **4.** cos 27° 10′
5. sec 13° 15′ **6.** csc 44° 30′ **7.** sen 39° 40′ **8.** tan 17° 12′
9. csc 145° 45′ **10.** cot 183° 48′ **11.** cos 421° 30′ **12.** sec 312° 12′
13. tan(−80° 6′) **14.** sen(−317° 36′) **15.** cot(−512° 20′) **16.** cos(−15′)

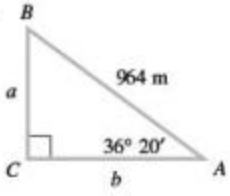
Calcule el valor de θ de modo que $0° \le \theta \le 90°$, y θ satisfaga el enunciado en cuestión. Exprese su respuesta en grados decimales.

17. sen $\theta = .84802194$ **18.** tan $\theta = 1.4739716$ **19.** sec $\theta = 1.1606249$ **20.** cot $\theta = 1.2575516$
21. sen $\theta = .72144101$ **22.** sec $\theta = 2.7496222$ **23.** tan $\theta = 6.4358841$ **24.** sen $\theta = .27843196$

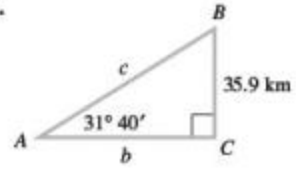
En los ejercicios restantes de este grupo, utilice una calculadora conforme lo requiera.

Resuelva cada triángulo rectángulo.

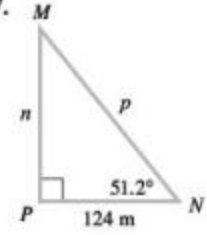
25.



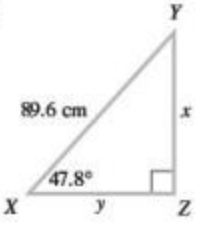
26.



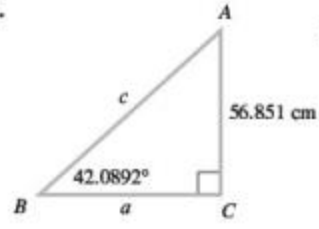
27.



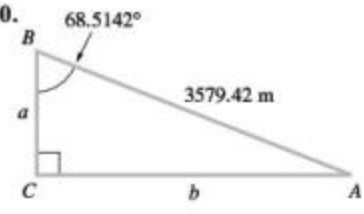
28.



29.



30.

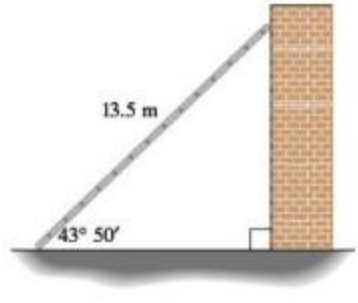


Resuelva cada triángulo rectángulo. En cada caso, $C = 90°$. Si la información sobre el ángulo se da en grados y minutos, exprese las respuestas en la misma forma. Si se da en grados decimales, haga lo mismo en sus respuestas. Si se da dos lados, proporcione las respuestas en grados y minutos.

31. $A = 28.00°$, $c = 17.4$ pies **32.** $B = 46.00°$, $c = 29.7$ m **33.** $B = 73.00°$, $b = 128$ pulg
34. $A = 61° 00′$, $b = 39.2$ cm **35.** $a = 76.4$ yd, $b = 39.3$ yd **36.** $a = 958$ m, $b = 489$ m
37. $a = 18.9$ cm, $c = 46.3$ cm **38.** $b = 219$ m, $c = 647$ m **39.** $A = 53° 24′$, $c = 387.1$ pies
40. $A = 13° 47′$, $c = 1285$ m **41.** $B = 39° 9′$, $c = .6231$ m **42.** $B = 82° 51′$, $c = 4.825$ cm

Resuelva cada problema.

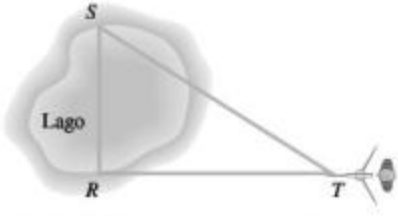
43. ***Escalera que se apoya contra una pared*** La escalera de un coche de bomberos está apoyada contra una pared. Encuentre la distancia que sube la escalera sobre la pared si forma un ángulo de 43° 50′ con respecto del piso.



44. ***Cable para anclar una antena*** Se ata un alambre de 77.4 metros a la parte superior del mástil de una antena que mide 71.3 metros de alto. Encuentre el ángulo que forma el alambre con el piso.

45. ***Cable para anclar una torre*** Encuentre la longitud de un alambre que forma un ángulo de 45° 30′ con el piso, si se ata a la parte superior de una torre de 63.0 metros de alto.

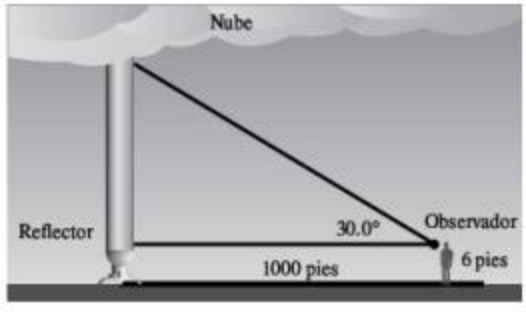
46. ***Distancia a través de un lago*** Para encontrar la distancia RS a través de un lago, un topógrafo mide un $RT = 53.1$ metros, con ángulo $T = 32° 10'$ y ángulo $S = 57° 50'$. Calcule la distancia RS.



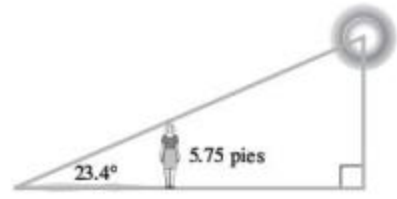
47. ***Longitudes de los lados de un triángulo*** La longitud de la base de un triángulo isósceles es de 42.36 pulgadas. Cada ángulo de la base mide 38.12°. Encuentre la longitud de cada uno de los dos lados iguales del triángulo. (*Una pista:* Divida el triángulo en dos triángulos rectángulos.)

48. ***Altura de un triángulo*** Encuentre la altura de un triángulo isósceles que tiene una base de 184.2 cm si el ángulo opuesto a la base mide 68° 44′.

49. ***Techo de nubes*** El U.S. Weather Bureau define el *techo de nubes* como la altura de las nubes más bajas que cubran más de la mitad del cielo. Para determinar un techo de nubes, un reflector potente proyecta un círculo de luz vertical sobre la parte inferior de la nube. Un observador busca el círculo de luz en la retícula de un tubo llamado *clinómetro*. Una plomada que cuelga en forma vertical del tubo y que está en un transportador proporciona el ángulo de elevación. Encuentre la altura del techo de nubes si el reflector se localiza a 1000 pies del observador y el ángulo de elevación es de 30.0°, según lo mide el clinómetro a una altura de los ojos de 6 pies (suponga tres cifras significativas).



50. ***Longitud de una sombra*** Suponga que el ángulo de elevación del Sol es de 23.4°. Encuentre la longitud de la sombra que proyecta Cindy Newman, quien mide 5.75 pies de estatura.

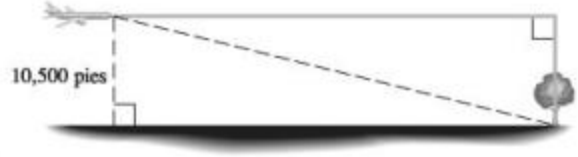


51. ***Altura de una torre*** La sombra de una torre vertical mide 40.6 metros de largo, cuando el ángulo de elevación del Sol es de 34.6°. Calcule la altura de la torre.

52. ***Ángulo de elevación del Sol*** Determine el ángulo de elevación del Sol si un asta bandera de 48.6 pies proyecta una sombra de 63.1 pies de largo.

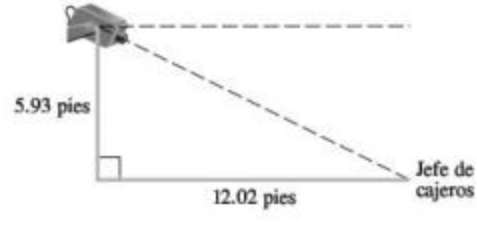
53. ***Distancia desde el piso a la parte superior de un edificio*** El ángulo de depresión de un edificio a un punto del piso es de 32° 30′. ¿Qué tan lejos queda el punto en el suelo de la parte superior del edificio si este mide 252 metros de altura?

54. ***Distancia a un aeroplano*** Un aeroplano vuela a 10,500 pies sobre el nivel de tierra. El ángulo de depresión del avión a la base de un árbol es de 13° 50′. ¿A qué distancia horizontal debe volar la nave para que esté directamente arriba del árbol?



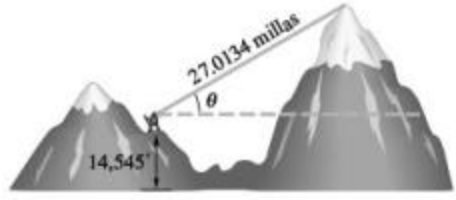
55. ***Altura de un edificio*** El ángulo de elevación desde la azotea de un edificio pequeño a la de un taller cercano es de 46° 40′, mientras que el ángulo de depresión a la parte inferior es de 14° 10′. Si el edificio pequeño tiene 28.0 metros de altura, calcule cuánto mide de alto el edificio del taller.

56. ***Montaje de una cámara de video*** Se instalará una cámara de video en un soporte de pared de modo que brinde una vista buena del jefe de cajeros. Encuentre el ángulo de depresión que debe formar la lente con la horizontal.



57. ***Error en la medición*** Un grado puede parecer una unidad muy pequeña, pero un error de un grado al medir un ángulo es muy significativa. Por ejemplo, suponga que un rayo láser que se dirija al centro visible de la Luna falle por 30 segundos su blanco determinado. ¿Qué tan lejos (en millas) está de éste? Tome la distancia desde la superficie de la Tierra a la de la Luna como de 234,000 millas. (*Fuente: A Sourcebook of Applications of School Mathematics*, por Donald Bushaw *et al.* Copyright © 1980 por The Mathematical Association of America.)

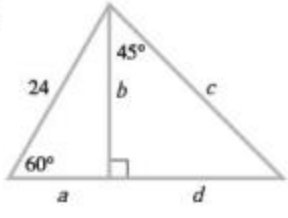
58. ***Altura del monte Everest*** La montaña más alta del mundo es el monte Everest, que se localiza en la cordillera del Himalaya. La altura de esta enorme montaña fue determinada en 1856 por topógrafos que usaron métodos trigonométricos mucho antes de que fuera escalada en 1953. Esta difícil medición tuvo que hacerse desde una gran distancia. A una altura de 14,545 pies, en una montaña diferente, la línea recta a la cumbre del monte Everest es de 27.0134 millas, y su ángulo de elevación es de $\theta = 5.82°$. (*Fuente:* Dunham, W., *The Mathematical Universe*, John Wiley & Sons, 1994.)



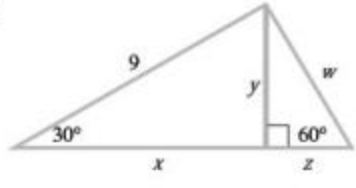
(a) Aproxime la altura del monte Everest.
(b) En la medición real, el monte Everest estaba a 100 millas de distancia y tuvo que tomarse en cuenta la curvatura de la Tierra. Esta curvatura, ¿haría que la cumbre pareciera más elevada o más baja de lo que en realidad es?

Calcule el valor exacto de las partes acotadas en cada figura.

59.



60.



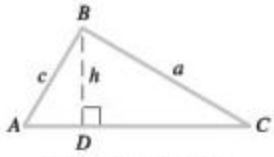
10.6 Leyes de senos y cosenos; fórmulas de área

Un triángulo que no sea rectángulo se denomina **triángulo oblicuángulo**. Las medidas de los tres lados y tres ángulos de un triángulo pueden calcularse si se conoce la medida de al menos un lado y de cualesquiera otras dos partes. Existen cuatro casos posibles.

1. Se conoce un lado y dos ángulos.
2. Se conoce dos lados y un ángulo que no está incluido entre ellos (este caso podría dar origen a más de un triángulo).
3. Se conoce dos lados y el ángulo incluido entre ellos.
4. Se conoce tres lados.

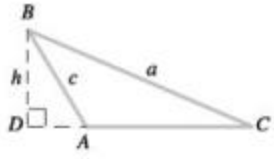
Si se conoce los tres ángulos de un triángulo, no es posible calcular las longitudes únicas de los lados, puesto que *AAA* garantiza sólo semejanza, no congruencia. Por ejemplo, existe una infinidad de triángulos ABC con $A = 35°$, $B = 65°$ y $C = 80°$.

Para resolver triángulos oblicuángulos se necesita emplear las leyes de los senos y cosenos.



Triángulo agudo *ABC*

(a)



Triángulo obtuso *ABC*

(b)

FIGURA 35

La ley de los senos Para obtener la ley de los senos, se comienza con un triángulo oblicuángulo, tal como el triángulo agudo de la figura 35(a), o el triángulo obtuso de la figura 35(b). El análisis siguiente se aplica a ambos triángulos. En primer lugar, hay que tirar una perpendicular desde B al lado AC o lado AC extendido. Sea h la longitud de esta perpendicular. Entonces, c es la hipotenusa del triángulo rectángulo ADB, y a es la hipotenusa del triángulo rectángulo BDC. Por tanto,

$$\text{en el triángulo } ADB, \quad \operatorname{sen} A = \frac{h}{c}, \quad \text{o bien} \quad h = c \operatorname{sen} A$$

$$\text{en el triángulo } BDC, \quad \operatorname{sen} C = \frac{h}{a}, \quad \text{o bien} \quad h = a \operatorname{sen} C.$$

Puesto que $h = c \operatorname{sen} A$ y $h = a \operatorname{sen} C$, entonces:

$$a \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} A,$$

o bien, después de dividir ambos lados entre $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C$,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

En forma similar, al construir las perpendiculares desde otros vértices, puede demostrarse que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \quad \text{y} \quad \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Este análisis proporciona el teorema siguiente.

Ley de los senos

En cualquier triángulo ABC con lados a, b y c, se cumple que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}, \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \text{y} \quad \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Esto se escribe en forma compacta como:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

A veces es más conveniente utilizar la forma alternativa siguiente de la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Si se conocen dos ángulos y el lado opuesto de uno de ellos, la ley de los senos se emplea en forma directa para resolver para el lado opuesto y el otro ángulo conocido. Entonces, el triángulo puede resolverse por completo, como se ilustra con el ejemplo siguiente.

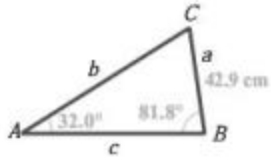


FIGURA 36

EJEMPLO 1 Resuelva el triángulo ABC si $A = 32.0°$, $B = 81.8°$ y $a = 42.9$ centímetros. Consulte la figura 36.

Se comienza por dibujar un triángulo, a escala aproximada, y se acotan las partes que se dan, como se observa en la figura 36. Puesto que se conocen los valores de A, B y a, se utiliza la parte de la ley de los senos que involucra a dichas variables.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Al sustituir los valores conocidos queda lo siguiente:

$$\frac{42.9}{\operatorname{sen} 32.0°} = \frac{b}{\operatorname{sen} 81.8°}.$$

Se multiplican ambos lados de la ecuación por 81.8°, así:

$$b = \frac{42.9 \operatorname{sen} 81.8°}{\operatorname{sen} 32.0°}$$

Si se emplea una calculadora para obtener b, hay que guardar las respuestas intermedias en la máquina hasta encontrar el resultado final. Después se redondea a un número apropiado de cifras significativas. En este caso, se encuentra sen 81.8° y luego se multiplica dicho número por 42.9. Este resultado se guarda en la calculadora mientras se calcula el sen 32.0°, para después hacer la división. Puesto que la información que se da es exacta hasta tres cifras significativas, se redondea el valor de b para obtener:

$$b = 80.1 \text{ centímetros.}$$

Se encuentra C con base en el hecho de que los ángulos de cualquier triángulo suman 180°.

$$\begin{aligned} A + B + C &= 180° \\ C &= 180° - A - B \\ C &= 180° - 32.0° - 81.8° \\ C &= 66.2° \end{aligned}$$

Ahora se usa la ley de los senos otra vez para calcular c. (¿Por qué no se aplica el teorema de Pitágoras?)

$$\begin{aligned} \frac{a}{\operatorname{sen} A} &= \frac{c}{\operatorname{sen} C} \\ \frac{42.9}{\operatorname{sen} 32.0°} &= \frac{c}{\operatorname{sen} 66.2°} \\ c &= \frac{42.9 \operatorname{sen} 66.2°}{\operatorname{sen} 32.0°} \\ c &= 74.1 \text{ centímetros} \end{aligned}$$

■

Solución de problemas

En las aplicaciones de triángulos oblicuángulos tales como el del ejemplo 1, es esencial un dibujo con acotaciones con objeto de plantear la ecuación correcta.



EJEMPLO 2 Tri Nguyen desea medir la distancia a través del río Big Muddy. Vea la figura 37 en la página siguiente. Encuentra que $C = 112.90°$, $A = 31.10°$ y $b = 347.6$ pies. Encuentre la distancia requerida.

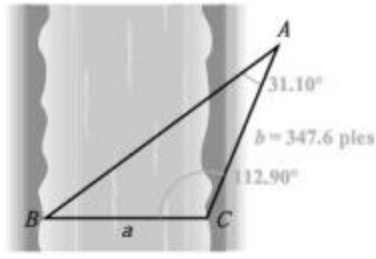


FIGURA 37

Para utilizar la ley de los senos, debe conocerse un lado y el ángulo opuesto. Como el único lado cuya longitud está dada es b, debe encontrarse el ángulo B antes de poder emplear la ley de los senos.

$$\begin{aligned} B &= 180° - A - C \\ &= 180° - 31.10° - 112.90° = 36.00° \end{aligned}$$

Ahora se utiliza la forma de la ley de los senos que involucra A, B y b, para encontrar a, la distancia a través del río.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 31.10°} = \frac{347.6}{\operatorname{sen} 36.00°} \qquad \text{Sustituir.}$$

$$a = \frac{347.6 \operatorname{sen} 31.10°}{\operatorname{sen} 36.00°} \qquad \text{Multiplicar por sen } 31.10°.$$

$$a = 305.5 \text{ pies} \qquad \text{Usar calculadora.}$$ ■

La ley de los cosenos Si se dan dos lados y el ángulo incluido entre ellos, o tres lados de un triángulo, se forma un triángulo único. Sin embargo, en estos casos, no se puede comenzar la solución del triángulo por medio de la ley de los senos porque no se da un lado y el ángulo opuesto a él. En ambos casos se requiere el uso de la *ley de los cosenos*.

Cuando se aplique la ley de los cosenos será de ayuda recordar la propiedad siguiente de los triángulos

Propiedad de las longitudes de los lados de un triángulo

En cualquier triángulo, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera debe ser mayor que la longitud del lado restante.

Por ejemplo, sería imposible construir un triángulo cuyos lados midieran 3, 4 y 10. Consulte la figura 38.



FIGURA 38

Para obtener la ley de los cosenos, sea ABC cualquier triángulo oblicuángulo. Se elige un sistema de coordenadas de modo que el vértice B esté en el origen y el lado BC coincida con el eje de las x. Vea la figura 39.

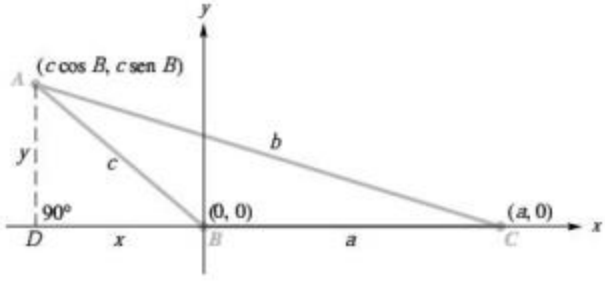


FIGURA 39

Sea (x, y) las coordenadas del vértice A del triángulo. Compruebe que para el ángulo B, sea obtuso o agudo, se cumple que:

$$\text{sen } B = \frac{y}{c} \quad \text{y} \quad \cos B = \frac{x}{c}.$$

(Aquí, x es negativa si B es obtusa.) De estos resultados, se tiene que:

$$y = c \text{ sen } B \quad \text{y} \quad x = c \cos B.$$

de modo que las coordenadas del punto A se convierten en:

$$(c \cos B,\ c \text{ sen } B).$$

El punto C tiene por coordenadas $(a, 0)$, y AC tiene una longitud de b. De acuerdo con la fórmula de la distancia:

$$b = \sqrt{(c \cos B - a)^2 + (c \text{ sen } B)^2}.$$

Al elevar al cuadrado ambos lados y simplificar, queda:

$$\begin{aligned} b^2 &= (c \cos B - a)^2 + (c \text{ sen } B)^2 \\ &= c^2 \cos^2 B - 2ac \cos B + a^2 + c^2 \text{ sen}^2 B \\ &= a^2 + c^2 (\cos^2 B + \text{sen}^2 B) - 2ac \cos B \\ &= a^2 + c^2(1) - 2ac \cos B \qquad \text{Identidad pitagórica} \\ &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B. \end{aligned}$$

Este resultado es una forma que adopta la ley de los cosenos. En el trabajo anterior, se hubiera podido colocar con la misma facilidad A o C en el origen. Esto habría arrojado el mismo resultado pero con otro acomodo de las variables. Estas formas distintas de la ley de los cosenos se sintetizan en el teorema siguiente.

Ley de los cosenos

En cualquier triángulo ABC con lados a, b y c,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

La ley de los cosenos dice que el cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos dos lados y el coseno del ángulo incluido entre ellos.

Si $C = 90°$ en la tercera forma de la ley de los cosenos que se dio, se tiene que $\cos C = \cos 90°$, y la fórmula se convierte en

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

la ecuación familiar del teorema de Pitágoras. Así, el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

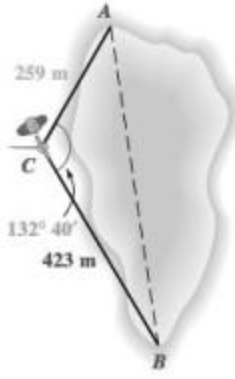


FIGURA 40

EJEMPLO 3 Una topógrafa desea calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B en los lados opuestos de un lago. Mientras se encuentra en el punto C, determina que $AC = 259$ metros, $BC = 423$ metros y el ángulo ACB mide $132° 40'$. Encuentre la distancia AB. Consulte la figura 40.

Aquí puede usarse la ley de los cosenos, ya que se conoce las longitudes de dos lados del triángulo y la medida del ángulo incluido entre ellos.

$$AB^2 = 259^2 + 423^2 - 2(259)(423)\cos 132° 40'$$
$$AB^2 = 394{,}510.6 \quad \text{Usar calculadora.}$$
$$AB \approx 628 \quad \text{Sacar la raíz cuadrada y redondear a tres cifras significativas.}$$

La distancia AB es de aproximadamente 628 metros. ■



Esta fotografía muestra la cubierta de un texto breve (sólo 60 páginas) sobre trigonometría esférica, que se publicó en 1928. En el bosquejo histórico que se proporciona al final del libro, la autora, Pauline Sperry, afirma que Albatani, Geber de Sevilla y Nassir Eddin, continuaron el trabajo de Ptolomeo en el mundo árabe, mientras que Johanne Müller (mejor conocido como **Regiomontanus**) hizo lo mismo en Europa. La obra de Regiomontanus, *De triangulis omnimodis*, fue el "primer tratado sistemático de trigonometría independiente de la astronomía en el mundo occidental, y dominó la Edad Media tardía en un grado notable".

EJEMPLO 4 Resuelva el triángulo ABC si $A = 42.3°$, $b = 12.9$ metros y $c = 15.4$ metros. Consulte la figura 41.

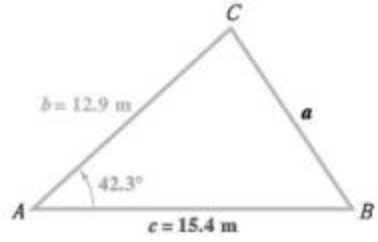


FIGURA 41

Se comienza por encontrar a por medio de la ley de los cosenos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$a^2 = 12.9^2 + 15.4^2 - 2(12.9)(15.4)\cos 42.3°$$
$$a^2 = 109.7$$
$$a = 10.5 \text{ metros}$$

Ahora debe calcularse las medidas de los ángulos B y C. Hay muchos enfoques que es posible emplear en este punto. Se usará la ley de los senos para obtener uno de estos ángulos. De los dos ángulos que restan, el más pequeño debe ser B, ya que es

opuesto al lado más corto de los dos lados b y c. Por tanto, no puede ser obtuso, y se evitará cualquier ambigüedad cuando se obtenga su seno.

$$\frac{\operatorname{sen} 42.3^\circ}{10.5} = \frac{\operatorname{sen} B}{12.9}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{12.9 \operatorname{sen} 42.3^\circ}{10.5}$$

$$B = 55.8^\circ \qquad \text{En una calculadora, se usa la función inversa del seno.}$$

La forma más fácil de encontrar C es restar de 180° las medidas de A y B, así:

$$C = 180^\circ - A - B = 81.9^\circ. \quad \blacksquare$$

Si en el ejemplo 4 se hubiera elegido utilizar la ley de los senos para obtener C en lugar de B, no se habría sabido si C era igual a 81.9° o a su suplemento, 98.1°.

EJEMPLO 5 Resuelva el triángulo ABC si $a = 9.47$ pies, $b = 15.9$ pies y $c = 21.1$ pies.

Se da las longitudes de tres lados del triángulo, por lo que se usará la ley de los cosenos para resolver para cualquier lado del triángulo. Se resolverá para C, el ángulo más grande, por medio de dicha ley. Estaremos en posición de decir si C es obtuso, si $\cos C < 0$. Hay que utilizar la forma de la ley de los cosenos que involucra a C.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

o bien,
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Al sustituir los valores dados se llega a lo siguiente:

$$\cos C = \frac{(9.47)^2 + (15.9)^2 - (21.1)^2}{2(9.47)(15.9)}$$

$$\cos C = -.34109402. \qquad \text{Usar calculadora.}$$

Al emplear la función inversa del coseno en una calculadora, se encuentra el ángulo obtuso C.

$$C = 109.9^\circ$$

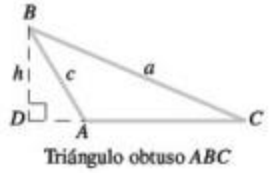
Con cualquiera de las leyes, de los senos de los cosenos, se encuentra que $B = 45.1^\circ$ (se le invita a que compruebe esto). Como $A = 180^\circ - B - C$,

$$A = 25.0^\circ. \quad \blacksquare$$



Triángulo agudo ABC

(a)



Triángulo obtuso ABC

(b)

FIGURA 42

Fórmulas del área El método que se usó para obtener la ley de los senos también puede emplearse para obtener una fórmula útil para calcular el área de un triángulo. Una fórmula familiar para el área de un triángulo es $\mathcal{A} = (1/2)bh$, donde $\mathcal{A}$ representa al área, b a la base y h a la altura. No siempre es fácil utilizar esta fórmula, ya que es frecuente que en la práctica no se conozca h. Para encontrar una fórmula alternativa, consulte el triángulo ABC en la figura 42(a), o el obtuso ABC de la figura 42(b).

Se dibujó una perpendicular de B a la base del triángulo (o a la extensión de la base). Esta perpendicular forma dos triángulos rectángulos. Con el triángulo ABD se tiene que:

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{c},$$

o bien, $$h = c \operatorname{sen} A.$$

Al sustituir en la fórmula $\mathcal{A} = (1/2)bh$, queda:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} b(c \operatorname{sen} A)$$

o bien, $$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A.$$

Hubiera podido usarse cualquier otro par de lados y el ángulo entre ellos, como se establece en el teorema siguiente.

Área de un triángulo

En cualquier triángulo ABC, el área $\mathcal{A}$ está dada por cualquiera de las fórmulas siguientes:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A, \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C, \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B.$$

Es decir, el área está dada por la mitad del producto de las longitudes de dos lados y por el seno del ángulo incluido entre ellos.

EJEMPLO 6 Encuentre el área del triángulo ABC si $A = 24° 40'$, $b = 27.3$ centímetros y $C = 52° 40'$.

Antes de que se pueda usar la fórmula dada, debe emplearse la ley de los senos para obtener ya sea a o c. Como la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es igual a 180°,

$$B = 180° - 24° 40' - 52° 40' = 102° 40'.$$

Ahora se emplea la forma de la ley de los senos que relaciona a, b, A y B, para encontrar a.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 24° 40'} = \frac{27.3}{\operatorname{sen} 102° 40'}$$

Se resuelve para a y se obtiene que $a = 11.7$ centímetros. Ahora se calcula el área.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2}(11.7)(27.3) \operatorname{sen} 52° 40' \approx 127$$

El área del triángulo ABC es igual a 127 centímetros cuadrados, con tres cifras significativas. ■

La ley de los cosenos se emplea para obtener una fórmula para el área de un triángulo cuando sólo se conocen las longitudes de los tres lados. Esta fórmula es conocida como la *fórmula de Herón*, así llamada en honor del matemático griego Herón de Alejandría.

Herón de Alejandría vivió aproximadamente en la misma época que Ptolomeo e Hiparco. Escribió mucho sobre temas tanto matemáticos como físicos. La más importante de sus obras matemáticas es *Métrica*, que fue descubierta en Constantinopla a finales del siglo XIX. El estudioso árabe al-Biruni afirma que en realidad fue Arquímedes quien descubrió la fórmula del área de un triángulo, lo cual eliminaría el nombre de Herón. (*Fuente:* Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. edición.)

Fórmula de Herón para las áreas

Si un triángulo tiene lados de longitudes a, b y c, y si el **semiperímetro** es

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

entonces, el área del triángulo es

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

EJEMPLO 7 Determine el área del triángulo cuyos lados miden lo siguiente: $a = 29.7$ pies, $b = 42.3$ pies y $c = 38.4$ pies.

Para emplear la fórmula de Herón, primero se encuentra el valor de s.

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$s = \frac{1}{2}(29.7 + 42.3 + 38.4)$$

$$= 55.2$$

El área es:

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{55.2(55.2 - 29.7)(55.2 - 42.3)(55.2 - 38.4)}$$

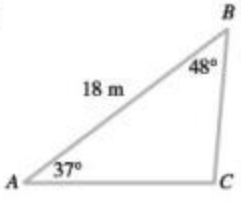
$$= \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)}$$

$\mathcal{A} \approx 552$ pies cuadrados. ■

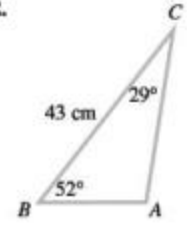
10.6 EJERCICIOS

Utilice la ley de los senos para resolver cada triángulo.

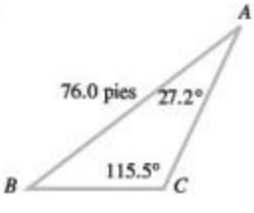
1.



2.



3.



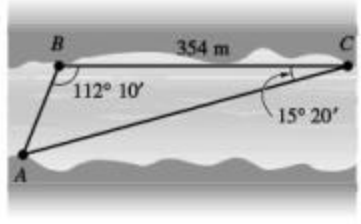
4.



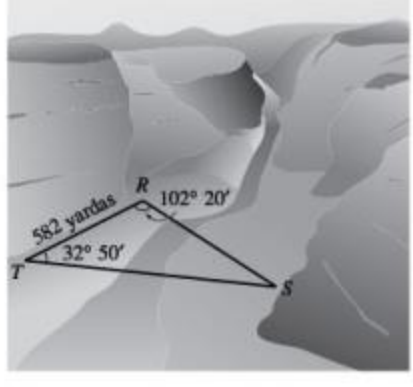
5. $A = 68.41°, B = 54.23°, a = 12.75$ pies
6. $C = 74.08°, B = 69.38°, c = 45.38$ m
7. $A = 87.2°, b = 75.9$ yardas, $C = 74.3°$
8. $B = 38° 40', a = 19.7$ cm, $C = 91° 40'$
9. $B = 20° 50', C = 103° 10', AC = 132$ pies
10. $A = 35.3, B = 52.8°, AC = 675$ pies
11. $A = 39.70°, C = 30.35°, b = 39.74$ m
12. $C = 71.83°, B = 42.57°, a = 2.614$ cm
13. $B = 42.88°, C = 102.40°, b = 3974$ pies
14. $A = 18.75°, B = 51.53°, c = 2798$ yardas
15. $A = 39° 54', a = 268.7$ m, $B = 42° 32'$
16. $C = 79° 18', c = 39.81$ mm, $A = 32° 57'$

Emplee la ley de los senos para resolver cada problema.

17. ***Distancia a través de un río*** Para encontrar la distancia AB a través de un río, se mide una distancia $BC = 354$ metros en una de sus márgenes. Se encuentra que $B = 112° 10'$ y $C = 15° 20'$. Obtenga AB.



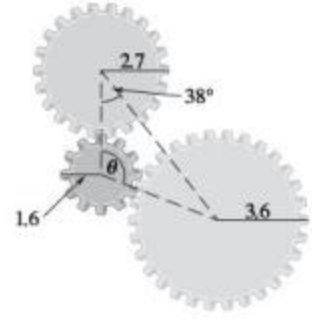
18. ***Distancia a través de un cañón*** Para determinar la distancia RS a través de un cañón profundo, Joanna mide una distancia $TR = 582$ yardas. Encuentra que $T = 32° 50'$ y $R = 102° 20'$. Calcule RS.



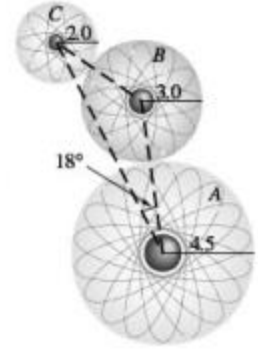
19. ***Medida de una silla plegable*** Una silla plegable va a tener un asiento con ancho de 12.0 pulgadas y los ángulos que se muestra en la figura. ¿Qué tan lejos del asiento deben unirse las patas que se cruzan? (En la figura, determine el valor de x.)



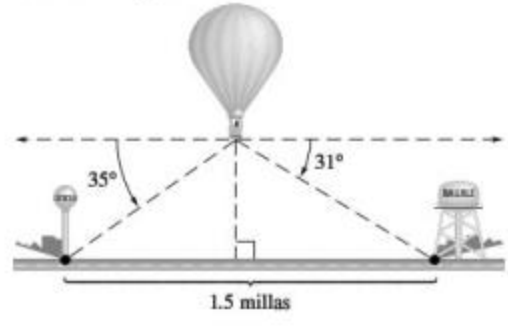
20. ***Ángulo que forman los radios de engranes*** Hay tres engranes con el arreglo que se muestra en la figura. Calcule el ángulo θ.



21. ***Distancia entre átomos*** Tres átomos cuyos radios son 2.0, 3.0 y 4.5, tienen las posiciones que se ilustra en la figura. Calcule la distancia que hay entre los centros de los átomos A y C.



22. ***Altura de un globo*** La tripulante de un globo está directamente encima de una carretera rectilínea de 1.5 millas de largo y que une a dos pueblos. Ella determina que la ciudad más cercana forma un ángulo de depresión de 35°, y la más lejana otro, también de depresión, de 31°. ¿Qué tan alto se encuentra el globo sobre el piso?



Utilice la ley de los cosenos para encontrar la longitud de los lados restantes de cada triángulo. No emplee calculadora.

23.

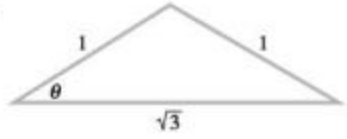


24.

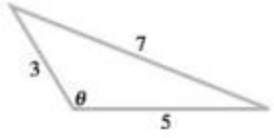


Utilice la ley de los cosenos para calcular el valor de θ en cada triángulo. No use calculadora.

25.



26.



Use la ley de los cosenos para resolver cada uno de los triángulos siguientes.

27. $C = 28.3°$, $b = 5.71$ pulg, $a = 4.21$ pulg

28. $A = 41.4°$, $b = 2.78$ yd, $c = 3.92$ yd

29. $C = 45.6°$, $b = 8.94$ m, $a = 7.23$ m

30. $A = 67.3°$, $b = 37.9$ km, $c = 40.8$ km

31. $A = 80° 40'$, $b = 143$ cm, $c = 89.6$ cm

32. $C = 72° 40'$, $a = 327$ pies, $b = 251$ pies

33. $B = 74.80°$, $a = 8.919$ pulg, $c = 6.427$ pulg

34. $C = 59.70°$, $a = 3.725$ mi, $b = 4.698$ mi

35. $A = 112.8°$, $b = 6.28$ m, $c = 12.2$ m

36. $B = 168.2°$, $a = 15.1$ cm, $c = 19.2$ cm

37. $a = 3.0$ pies, $b = 5.0$ pies, $c = 6.0$ pies

38. $a = 4.0$ pies, $b = 5.0$ pies, $c = 8.0$ pies

39. $a = 9.3$ cm, $b = 5.7$ cm, $c = 8.2$ cm

40. $a = 28$ pies, $b = 47$ pies, $c = 58$ pies

41. $a = 42.9$ m, $b = 37.6$ m, $c = 62.7$ m

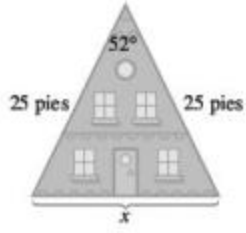
42. $a = 187$ yd, $b = 214$ yd, $c = 325$ yd

Resuelva cada problema por medio de la ley de los senos o de los cosenos, según sea necesario.

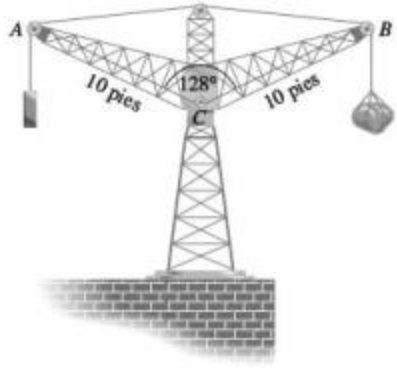
43. ***Distancia a través de un lago*** Los puntos A y B están en lados opuestos del lago Yankee. Desde un tercer punto, C, el ángulo entre las líneas visuales hacia A y B es de 46.3°. Si AC tiene 350 metros de largo y BC 286 metros, calcule AB.

44. ***Diagonales de un paralelogramo*** Los lados de un paralelogramo miden 4.0 y 6.0 centímetros. Uno de sus ángulos es de 58° mientras que otro es de 122°. Calcule las longitudes de las diagonales del paralelogramo.

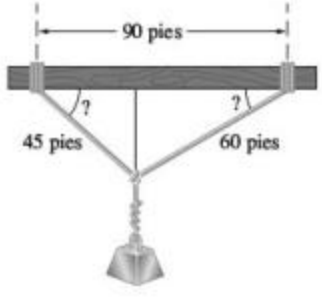
45. ***Distribución de un juego*** En la figura se ilustra la distribución de un juego que consiste en una casita para niñas y que se encuentra en el patio, las dimensiones son las que se muestra. Calcule el valor de x.



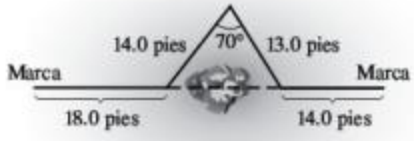
46. ***Distancia entre puntos de una grúa*** En la figura se ilustra una grúa con un contrapeso. Encuentre la distancia horizontal entre los puntos A y B.



47. ***Ángulo entre vigas y cables*** Un peso cuelga de cables atados a ambos extremos de una viga horizontal, según se aprecia en la figura. ¿Cuáles son los ángulos que se forman entre la viga y los cables?



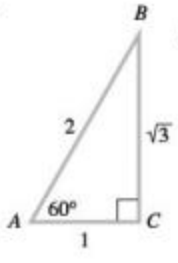
48. ***Medidas por medio de triangulación*** Es frecuente que cuando miden los límites de un terreno, los topógrafos se enfrenten a obstáculos tales como árboles. Un recurso que se emplea para obtener la medida exacta se denomina *método de la triangulación*. En dicho método, se construye un triángulo alrededor de un obstáculo y se mide uno de sus ángulos y dos de sus lados. Utilice este método para encontrar la longitud de la línea del terreno (la línea recta entre las dos marcas) que aparece en la figura. (*Fuente:* Kavanagh, B., y S. Bird, *Surveying Principles and Applications*, 5a. edición, Prentice-Hall, 2000.)



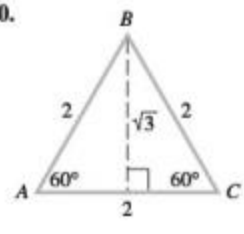
Sin escala

Calcule el área exacta de cada triángulo por medio de la fórmula $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh$, *y luego compruebe que la fórmula* $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$ *da el mismo resultado.*

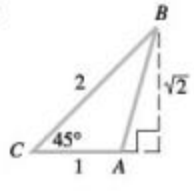
49.



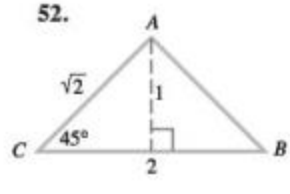
50.



51.



52.



Encuentre el área de cada triángulo con el empleo de la fórmula que involucra la función seno (página 615).

53. $A = 42.5°, b = 13.6$ m, $c = 10.1$ m

54. $C = 72.2°, b = 43.8$ pies, $a = 35.1$ pies

55. $B = 124.5°, a = 30.4$ cm, $c = 28.4$ cm

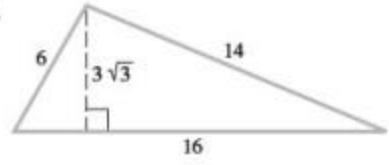
56. $C = 142.7°, a = 21.9$ km, $b = 24.6$ km

57. $A = 56.80°, b = 32.67$ pulg, $c = 52.89$ pulg

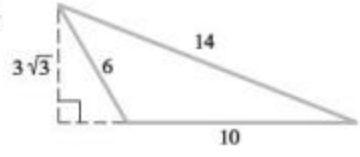
58. $A = 34.97°, b = 35.29$ m, $c = 28.67$ m

Calcule el área exacta de cada triángulo, con el empleo de la fórmula $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh$, *y luego verifique el resultado con la fórmula de Herón.*

59.



60.



Obtenga el área de cada triángulo por medio de la fórmula de Herón.

61. $a = 12$ m, $b = 16$ m, $c = 25$ m

62. $a = 22$ pulg, $b = 45$ pulg, $c = 31$ pulg

63. $a = 154$ cm, $b = 179$ cm, $c = 183$ cm

64. $a = 25.4$ yd, $b = 38.2$ yd, $c = 19.8$ yd

65. $a = 76.3$ pies, $b = 109$ pies, $c = 98.8$ pies

66. $a = 15.89$ pulg, $b = 21.74$ pulg, $c = 10.92$ pulg

Resuelva cada uno de los problemas que siguen.

67. ***Área de una placa metálica*** Una pintora va a aplicar un recubrimiento especial a una placa metálica triangular que está en un edificio nuevo, en el que dos de los lados miden 16.1 metros y 15.2 metros. Ella sabe que el ángulo entre los lados es de 125°. ¿Cuál es el área de la superficie que planea tratar con el recubrimiento?

68. ***Área de un lote triangular*** Un agente de bienes raíces quiere encontrar el área de un lote triangular. Un topógrafo hace ciertas mediciones y encuentra que dos de los lados tienen longitudes de 52.1 metros y 21.3 metros, y que el ángulo entre ellos es de 42.2°. ¿Cuál es el área del lote triangular?

69. ***Cantidad requerida de pintura*** Un pintor necesita cubrir una superficie triangular de 75 metros por 68 metros. Una lata de pintura cubre 75 metros cuadrados de área. ¿Cuántas latas se necesitarán? (Redondee al número más alto siguiente de latas.)

70. ***Área del triángulo de las Bermudas*** Encuentre la superficie del triángulo de las Bermudas, si los lados del triángulo tienen longitudes aproximadas de 850 millas, 925 millas y 1300 millas.

10.7 El círculo unitario y gráficas

Hasta este momento, se definieron las funciones trigonométricas con dominios que consistían en ángulos cuyas medidas se expresaban en grados. También es posible definirlas para dominios de números reales.

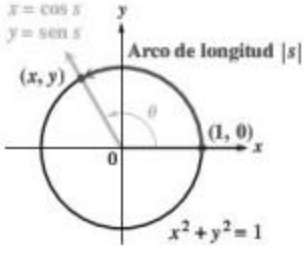


FIGURA 43

Observe la figura 43. Suponga que s representa un número real. Se comienza en el punto $(1, 0)$ para trazar un arco de longitud $|s|$ a lo largo del círculo. Si se avanza en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj s es positiva, y si se va en favor del movimiento s es negativa. El extremo final del arco es el punto (x, y). El círculo de la figura 43 es un **círculo unitario**, que es aquel con centro en el origen y radio de una unidad (de aquí su nombre de *círculo unitario*). Del álgebra, se recuerda que la ecuación de este círculo es

$$x^2 + y^2 = 1.$$

El valor de x se llama el coseno del número real s, en tanto que el de y es su seno.

Seno de s y coseno de s

Para el círculo unitario de la figura 43,

$$x = \cos s \quad \text{y} \quad y = \operatorname{sen} s.$$

Muchos fenómenos de la vida diaria se repiten con un patrón predecible: en las regiones cálidas el consumo de electricidad aumenta en verano y disminuye en invierno, el precio de la fruta fresca baja en el verano y sube en el invierno, y la asistencia a los parques de diversiones se incrementa en el verano y disminuye en el invierno. Debido a que las funciones seno y coseno repiten sus valores una y otra vez con un patrón regular, constituyen ejemplos de *funciones periódicas*.

Función periódica

Una **función periódica** es una función f tal que

$$f(x) = f(x + p)$$

para cualquier número real x en el dominio de f y para algún número real positivo p. El valor positivo más pequeño posible de p es el **periodo** de la función.

La circunferencia del círculo unitario es 2π, por lo que el valor más pequeño de p para el que las funciones seno y coseno se repiten es 2π. Por tanto, las funciones seno y coseno son periódicas con periodo de 2π.

Ahora, utilice la figura 44 para comprobar la tabla siguiente para $y = \operatorname{sen} s$ y $y = \cos s$.

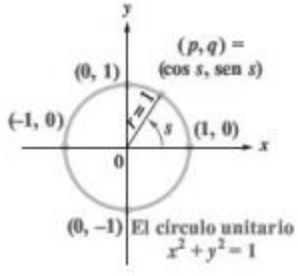


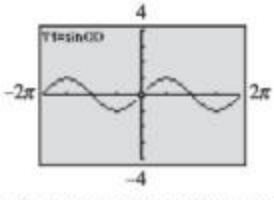
FIGURA 44

Conforme s aumenta de	sen s	cos s
0 a $\pi/2$	aumenta de 0 a 1	disminuye de 1 a 0
$\pi/2$ a π	disminuye de 1 a 0	disminuye de 0 a -1
π a $3\pi/2$	disminuye de 0 a -1	aumenta de -1 a 0
$3\pi/2$ a 2π	aumenta de -1 a 0	aumenta de 0 a 1

Para denotar la longitud del arco hubiera podido usarse cualquier letra en lugar de s. Es costumbre usar x de modo que se grafique en el sistema coordenado xy que nos es familiar. Al seleccionar valores clave de x y calcular los valores correspondientes de sen x, se obtienen los resultados siguientes. Esto se puede llevar a cabo con una calculadora en el **modo de radianes** (en lugar de grados). Los decimales están redondeados a la décima más cercana.

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
sen x	0	.7	1	.7	0	−.7	−1	−.7	0

Al graficar los puntos de la tabla de valores y unirlos por medio de una curva suave, se obtiene la gráfica que se observa en la figura 45. Como $y = \text{sen } x$ es periódica y tiene como su dominio a {todos los números reales}, la gráfica continúa en ambas direcciones en forma indefinida. Su rango es $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$. Esta gráfica a veces recibe el nombre de **onda senoidal** o **senoide**. El lector debe aprender la forma de esta gráfica y ser capaz de dibujarla con rapidez. Los puntos clave de la gráfica son $(0,0)$, $(\pi/2, 1)$, $(\pi, 0)$, $(3\pi/2, -1)$ y $(2\pi, 0)$. Si se grafican estos cinco puntos y se los conecta con la onda senoidal característica, se dibuja la gráfica en forma rápida. Si se desea, el dibujo puede extenderse.



La gráfica de Y = sin X aparece en la ventana estándar *window trig*, con las dimensiones indicadas.

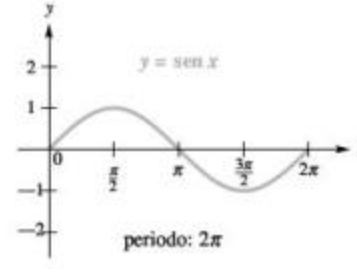


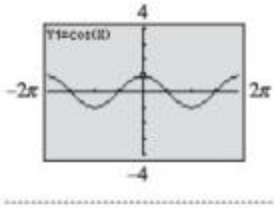
FIGURA 45

La gráfica de $y = \cos x$ se obtiene en forma muy parecida a la de y sen x. El dominio de $y = \cos x$ es {todos los números reales}, y su rango es $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$. A continuación se presenta una tabla de valores de $y = \cos x$.

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
cos x	1	.7	0	−.7	−1	−.7	0	.7	1

En ésta, los puntos clave son $(0,1)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi, -1)$, $(3\pi/2, 0)$ y $(2\pi, 1)$.

La gráfica de $y = \cos x$, que aparece en la figura 46, tiene la misma forma que la de $y = \text{sen } x$. En realidad se trata de la gráfica de la función seno desplazada $\pi/2$ unidades a la izquierda.



Ésta es una gráfica en calculadora de la función coseno.

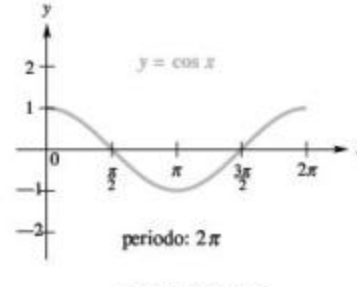


FIGURA 46

EJEMPLO 1 Grafique la función $y = 2 \operatorname{sen} x$.

Para un valor dado de x, el valor de y es el doble de lo que sería para $y = \operatorname{sen} x$, como se aprecia en la tabla de valores. Lo único que cambia en la gráfica es el rango, que pasa a ser $\{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$. Consulte la figura 47, que también muestra la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ para efectos de comparación, y partes de ambas gráficas para valores negativos de x.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sen x	0	1	0	-1	0
2 sen x	0	2	0	-2	0

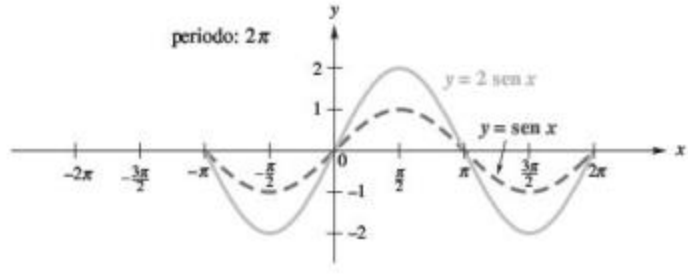


FIGURA 47

Al graficar funciones periódicas, es costumbre hacerlo para un periodo. La mayor parte de la gráfica se dibuja gracias al hecho de que el ciclo se repite una vez y otra.

Al generalizar los resultados del ejemplo 1 se obtiene lo que sigue.

Amplitud de las funciones seno y coseno

La gráfica de $y = a \operatorname{sen} x$ o $y = a \cos x$, con $a \neq 0$, tendrá la misma forma que la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ o la de $y = \cos x$, respectivamente, excepto que el rango cambia a $\{y \mid -|a| \leq y \leq |a|\}$. El número $|a|$ se llama **amplitud** (la amplitud de una función periódica se interpreta como la mitad de la diferencia entre sus valores máximo y mínimo).

EJEMPLO 2 La gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$.

Para esta función, todos los valores de ella se obtienen al hacer que $2x$ tome valores entre 0 y 2π. Así, x tomará valores entre 0 y π. Por tanto, el periodo es $2\pi/2 = \pi$. La gráfica completará un periodo en el intervalo que va de 0 a π.

Los puntos extremos son 0 y π, y los tres puntos intermedios son

$$\frac{1}{4}(0 + \pi), \quad \frac{1}{2}(0 + \pi) \quad \text{y} \quad \frac{3}{4}(0 + \pi),$$

lo que arroja los valores de x siguientes.

0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
Punto extremo de la izquierda	Punto en el primer cuarto	Punto medio	Punto en el tercer cuarto	Punto extremo de la derecha

Ahora se dibujan los puntos de la tabla de valores que se dio, y se los une con una curva suave senoidal. Se puede extender la gráfica si se repite este ciclo una vez y otra, como se muestra en la figura 48. Observe que la amplitud no cambia. Se incluye la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ para efectos de comparación.

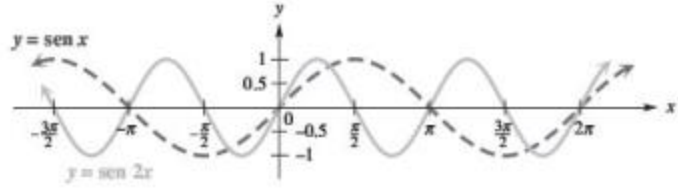


FIGURA 48

Al generalizar los resultados del ejemplo 2 se llega al resultado que sigue.

Periodo de las funciones seno y coseno

Para $b > 0$, la gráfica de $y = \operatorname{sen} bx$ tendrá la apariencia de aquella para $y = \operatorname{sen} x$, pero con un periodo igual a $2\pi/b$. Asimismo, la gráfica de $y = \cos bx$ se parecerá a la de $y = \cos x$, pero con un periodo de $2\pi/b$.

EJEMPLO 3 Grafique $y = \cos \frac{2}{3}x$.

Para esta función, el periodo es de

$$\frac{2\pi}{2/3} = 3\pi.$$

Para obtener los valores de x que darán lugar a los puntos mínimo, máximo y las intersecciones con el eje de las x, hay que dividir el intervalo de 0 a 3π en cuatro partes iguales. Estos valores de x son los siguientes:

$$0 \qquad \frac{3\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{2} \qquad \frac{9\pi}{4} \qquad 3\pi$$

Se emplean estos valores para construir una tabla de puntos clave para un periodo.

x	0	$3\pi/4$	$3\pi/2$	$9\pi/4$	3π
$(2/3)x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos(2/3)x$	1	0	-1	0	1

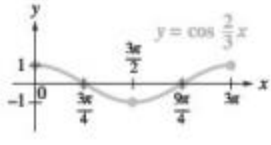


FIGURA 49

La amplitud es 1 porque el valor máximo es 1, el valor mínimo es -1 y la mitad de $1 - (-1) = (1/2)(2) = 1$.

Ahora se grafican estos puntos y se los une por medio de una curva suave. En la figura 49 se muestra la gráfica. ■

A continuación se hace una lista los pasos que se siguió para graficar $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$, donde $b > 0$.

Forma para trazar la gráfica de las funciones seno y coseno

Para trazar la gráfica $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$, con $b > 0$:

1. Encontrar el periodo, $2\pi/b$. Se traza una distancia de $2\pi/b$ a partir de 0 en el eje horizontal.
2. Dividir el intervalo en cuatro partes iguales.
3. Evaluar la función para cada uno de los cinco valores de x que resultan del paso 2. Los puntos serán el máximo, el mínimo y las intersecciones con el eje x.
4. Localizar los puntos obtenidos en el paso 3, y unirlos con una curva senoidal de amplitud $|a|$.
5. Si es necesario, dibujar ciclos adicionales de la gráfica, a derecha e izquierda.

EJEMPLO 4 Trace la gráfica de $y = -2 \operatorname{sen} 3x$.

Paso 1: Para esta función, $b = 3$, por lo que el periodo es $2\pi/3$. La gráfica de esta función estará en el intervalo de 0 a $2\pi/3$.

Paso 2: Dividir este intervalo en cuatro partes iguales, lo que da los valores de x de 0, $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/2$ y $2\pi/3$.

Paso 3: Construir una tabla de puntos determinados por los valores de x que resultaron del paso 2.

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
$3x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sen $3x$	0	1	0	-1	0
-2 sen $3x$	0	-2	0	2	0

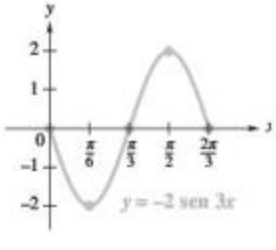


FIGURA 50

Paso 4: Localizar los puntos $(0, 0)$, $(\pi/6, -2)$, $(\pi/3, 0)$, $(\pi/2, 2)$ y $(2\pi/3, 0)$, y unirlos con una curva senoidal con amplitud de 2. Vea la figura 50.

Paso 5: Si es necesario, extender la gráfica de la figura 50 con la repetición del ciclo varias veces.

Observe el efecto del valor negativo de a. Cuando a es negativa, la gráfica de $y = a \operatorname{sen} bx$ será el reflejo sobre el eje x de la gráfica de $y = |a| \operatorname{sen} bx$. En este caso la amplitud es $|-2| = 2$. ■

En esta sección sólo se estudiaron las gráficas de las funciones seno y coseno. Las gráficas de otras funciones trigonométricas se estudian en los textos estándar de trigonometría.

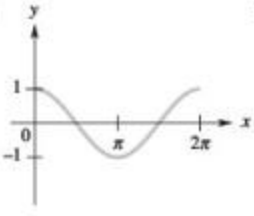
10.7 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 8, relacione cada función con las gráficas que se muestra en los incisos A-H.

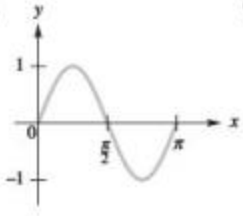
1. $y = \operatorname{sen} x$ **2.** $y = \cos x$ **3.** $y = -\operatorname{sen} x$ **4.** $y = -\cos x$

5. $y = \operatorname{sen} 2x$ **6.** $y = \cos 2x$ **7.** $y = 2 \operatorname{sen} x$ **8.** $y = 2 \cos x$

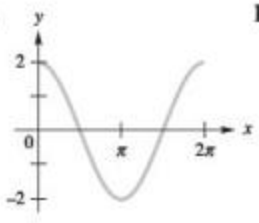
A.



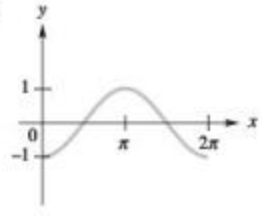
B.



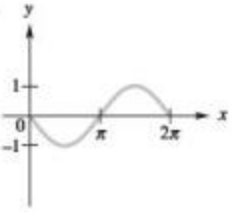
C.



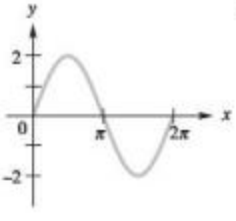
D.



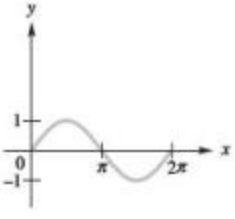
E.



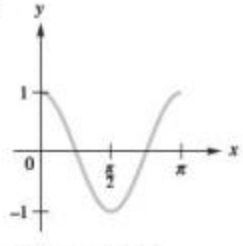
F.



G.



H.



Trace cada una de las funciones siguientes durante dos periodos. Proporcione el periodo y la amplitud.

9. $y = 2 \cos x$ **10.** $y = 3 \operatorname{sen} x$ **11.** $y = \frac{2}{3} \operatorname{sen} x$ **12.** $y = \frac{3}{4} \cos x$

13. $y = -\cos x$ **14.** $y = -\operatorname{sen} x$ **15.** $y = -2 \operatorname{sen} x$ **16.** $y = -3 \cos x$

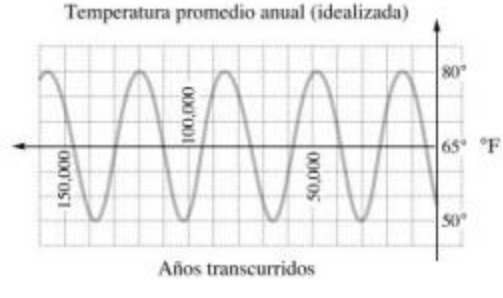
17. $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$ **18.** $y = \operatorname{sen} \frac{2}{3} x$ **19.** $y = \cos \frac{1}{3} x$ **20.** $y = \cos \frac{3}{4} x$

21. $y = \operatorname{sen} 3x$ **22.** $y = \cos 2x$ **23.** $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{4} x$ **24.** $y = 3 \operatorname{sen} 2x$

25. $y = -2 \cos 3x$ **26.** $y = -5 \cos 2x$ **27.** $y = \cos \pi x$ **28.** $y = -\operatorname{sen} \pi x$

Resuelva cada problema de los que siguen.

29. ***Temperatura promedio anual*** Los científicos piensan que la temperatura promedio anual de cierto lugar es periódica. La temperatura en su conjunto en un sitio dado durante una estación dada fluctúa conforme el tiempo avanza, de más fría a más cálida, y vuelve a ser fría. La gráfica muestra una descripción idealizada de la temperatura para los últimos 1000 años en una localidad que se encuentra en la misma latitud que Anchorage.



(a) Encuentre las temperaturas más alta y más baja que se hayan registrado.

(b) Utilice estos dos números para encontrar la amplitud. (*Una pista:* Una definición alternativa de la amplitud es la mitad de la diferencia entre los valores de y de los puntos máximo y mínimo de la gráfica.)

(c) Encuentre el periodo de la gráfica.

(d) ¿Cuál es la tendencia de la temperatura hoy día?

30. ***Actividades de un animal nocturno*** Muchas de las actividades de los seres vivos son periódicas. Por ejemplo, la gráfica siguiente muestra la hora en la que un animal nocturno comienza su actividad vespertina.

(a) Encuentre la amplitud de esta gráfica.

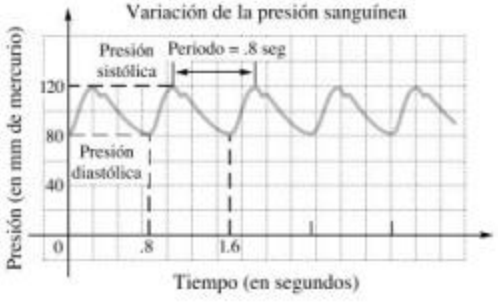
(b) Encuentre el periodo.



31. ***Variación de la presión sanguínea*** La gráfica que se muestra proporciona la variación en la presión sanguínea de una persona normal. Las presiones de sístole y diástole son los límites superior e inferior de los cambios periódicos en la presión y que ocasionan el pulso. El tiempo entre los picos se llama *periodo del pulso*.

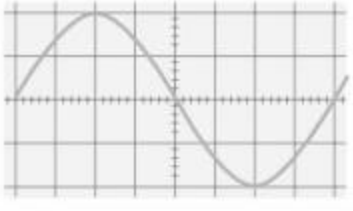
(a) Encuentre la amplitud de la gráfica.

(b) Calcule la tasa del pulso (número de pulsaciones por minuto) de esta persona.

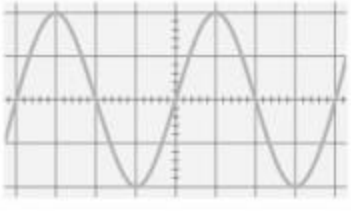


32. ***Ondas senoidales de un osciloscopio*** Los sonidos puros producen ondas senoidales únicas en un osciloscopio. Encuentre la amplitud y periodo de cada onda senoidal que se muestra en las gráficas siguientes. En la escala vertical, cada cuadrado representa .5, y en la horizontal cada uno representa $\pi/6$.

(a)



(b)

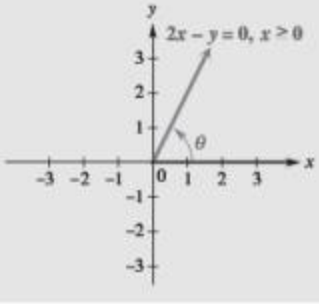


INVESTIGACIÓN EN GRUPO

Obtención de un *punto* sobre valores de funciones trigonométricas

Una ecuación de la forma $Ax + By = 0$ representa una línea que pasa por el origen en el plano. Al restringir a x para que adopte sólo valores no positivos o sólo no negativos, se obtiene un rayo con su extremo terminal en el origen. Este rayo se considera el lado terminal de un ángulo en posición estándar. Por ejemplo, la figura muestra un ángulo θ en posición estándar cuyo lado terminal tiene la ecuación

$$2x - y = 0, \; x \geq 0.$$



Para encontrar los valores de la función trigonométrica de θ, se usa *cualquier* punto sobre su lado terminal, excepto el origen. En forma similar, es posible encontrar el valor de θ por medio de cualquier punto y la función trigonométrica inversa que sea apropiada. Esta investigación reivindica estos enunciados.

Temas de análisis

1. Divida al grupo en cuatro equipos: I, II, III y IV. A cada equipo se asignará un valor diferente de x:

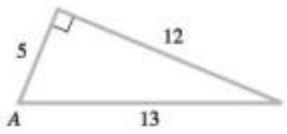
   Equipo I: $x = 2$ Equipo II: $x = 4$

   Equipo III: $x = 6$ Equipo IV: $x = 8$

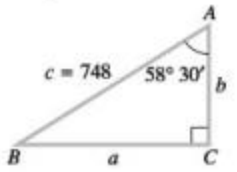
2. Encuentre las coordenadas del punto en el lado terminal de θ que corresponda al valor de x que se asignó.
3. Encuentre el valor de r que corresponda a la ecuación $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. Determine los valores exactos de las funciones trigonométricas de θ. Simplifique por completo cualesquiera expresiones con radicales que aparezcan.
5. Con la calculadora en el modo de grados, encuentre
   (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$, **(b)** $\cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$ y **(c)** $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.
6. Compare los resultados del punto 4 para los diferentes equipos. ¿El punto seleccionado hace alguna diferencia para encontrar los valores de la función trigonométrica?
7. Compare los resultados del punto 5 para los equipos distintos. Todos los valores deben ser el mismo. ¿Cuál es dicho valor? ¿Qué representa?
8. Los triángulos semejantes tienen lados proporcionales, como se estudió en la sección 9.4. Analiza la forma en que esta propiedad justifica los resultados del punto 4.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 10

1. Convierta 74° 17′ 54″ a grados decimales.
2. Encuentre el ángulo coterminal con −157°, cuya medida sea la positiva más pequeña posible.
3. Si $(2, -5)$ se encuentra en el lado terminal de un ángulo θ en posición estándar, encuentre sen θ, cos θ y tan θ.
4. Si $\cos\theta < 0$ y $\cot\theta > 0$, ¿en cuál cuadrante termina θ?
5. Si $\cos\theta = 4/5$ y θ está en el cuarto cuadrante, encuentre los valores de las otras funciones trigonométricas de θ.
6. Proporcione los seis valores de las funciones trigonométricas del ángulo A.



7. Diga el valor *exacto* de cada expresión. Si es indefinida, menciónelo.
   (a) cos 60° **(b)** tan 45° **(c)** tan(−270°)
   (d) sec 210° **(e)** csc(−180°) **(f)** sec 135°
8. Utilice una calculadora para aproximar los valores que siguen.
   (a) sen 78° 21′ **(b)** tan 11.7689°
   (c) sec 58.9041°
9. Encuentre un valor de θ en el intervalo $0° \le \theta \le 90°$, en grados decimales, si sen $\theta = .27843196$.
10. Encuentre dos valores de θ en el intervalo $0° \le \theta \le 360°$, que satisfaga la ecuación
    $$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
11. Resuelva el triángulo que se muestra.



12. ***Altura de un asta bandera*** Para medir la altura de un asta, Mario Mendoza obtuvo que el ángulo de elevación entre un punto que está a 24.7 pies de la base y el extremo superior del asta, es de 32° 10′. ¿Cuál es la altura del asta?

Encuentre el elemento que se indique para cada triángulo.

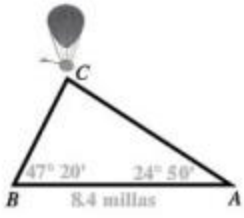
13. $A = 25.2°$, $a = 6.92$ yardas, $b = 4.82$ yardas; encontrar C
14. $C = 118°$, $b = 130$ km, $a = 75$ km; encontrar c
15. $a = 17.3$ pies, $b = 22.6$ pies, $c = 29.8$ pies encontrar B

16. Encuentre el área del triángulo ABC del ejercicio 14.

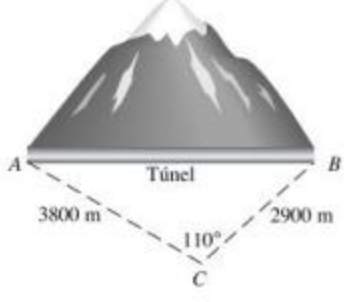
17. Calcule el área de un triángulo que tiene lados cuyas longitudes son 22, 26 y 40.

Resuelva cada problema.

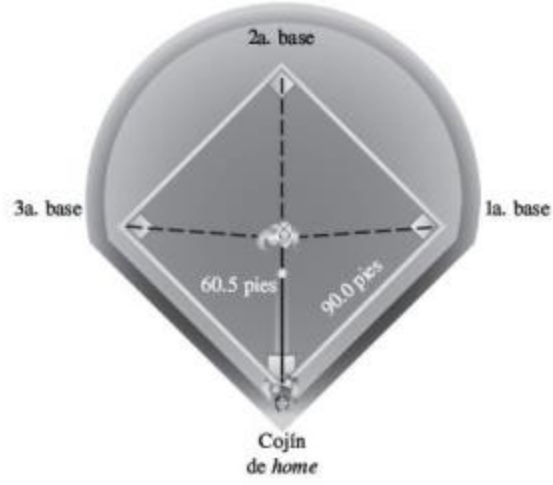
18. ***Altura de un globo*** Los ángulos de elevación de un globo en relación con dos puntos A y B en el nivel del piso, son 24° 50′ y 47° 20′, respectivamente. Como se ve en la figura, los puntos A, B y C están en el mismo plano vertical y A y B están separados por una distancia de 8.4 millas. Aproxime la altura del globo sobre el terreno a la décima más cercana de milla.



19. ***Longitud de un túnel*** Para medir la distancia a través de una montaña para fines de construcción de un túnel, se elige un punto C que puede alcanzarse desde cada extremo del túnel. Si $AC = 3800$ metros, $BC = 2900$ metros, y el ángulo $C = 110°$, encuentre la longitud del túnel.



20. ***Distancias sobre un diamante de béisbol*** Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90.0 pies por lado, con el cojín de *home* y las tres bases en sus vértices. El lugar del lanzador se ubica a 60.5 pies del *home*. Encuentre la distancia que hay entre el sitio del lanzador y cada una de las bases.



21. Trace la gráfica de la función $y = 3 \operatorname{sen} x$, para el intervalo de un periodo. Proporcione la amplitud y el periodo.

22. Trace la gráfica de la función $y = -\cos 2x$, en un intervalo de dos periodos. Diga cuáles son la amplitud y el periodo.

capítulo

11 Métodos de conteo



Uno de los descubrimientos más trascendentes de nuestros tiempos tuvo lugar en 1953, cuando se identificó la estructura doble helicoidal del ADN (ácido desoxirribonucleico), que es la materia básica de la herencia. Desde entonces, los científicos han tratado de entender el complejo código genético que determina quiénes somos. En junio de 2000, se anunció que una investigación de alta tecnología había logrado determinar prácticamente todo el código genético humano. Una prueba del ADN de las personas pueden ayudar a probar la inocencia o culpabilidad en casos criminales. El perfil del ADN también se puede utilizar en estudios arqueológicos y en el diagnóstico (y posible prevención o tratamiento) de enfermedades genéticas.

El ADN se compone de cuatro bases llamadas adenina (A), guanina (G) timina (T) y citosina (C). El código genético de un individuo está formado por aproximadamente 6000 millones de estas bases almacenadas en una secuencia lineal. En el núcleo de cada célula existe una copia de este código genético, estrechamente arrollado en forma de doble hélice.

En cualquier segmento del código genético puede aparecer cualquiera de estas cuatro bases. En un glóbulo rojo normal, la hemoglobina contiene la secuencia genética

—ACTCCTG[A]GGAGGAGT—

mientras que una persona con anemia falciforme tendrá exactamente la misma secuencia, excepto por una sola base

—ACTCCTG[T]GGAGGAGT—.

Como podemos ver, un error en una secuencia de 6000 millones de letras ocasiona esta enfermedad. Puesto que cada posición en el código permite cuatro bases (A, C, G y T), dos posiciones consecutivas permiten $4 \times 4 = 4^2 = 16$ elecciones, tres permiten $4^3 = 64$ elecciones, y así sucesivamente. En 6000 millones de posiciones existen $4^{6,000,000,000}$ de secuencias diferentes posibles. De hecho, entre 99 y 99.9% de este código genético es idéntico en todos los seres humanos, y sólo del .1 al 1% es particular para cada individuo. Es este pequeño porcentaje del cual dependen los perfiles de ADN. Métodos de conteo como los anteriores destacan la singularidad humana y la de cada individuo. Un cambio en el código genético, por pequeño que sea, puede tener efectos radicales.

Fuentes: Easteal, S., N. McLeod y K. Reed, *DNA PROFILING Principles, Pitfalls and Potential*, Harwood Academic Publishers, 1991; www.cnn.com (26 de junio de 2000).

11.1 Conteo mediante un listado sistemático

11.2 Uso del principio fundamental de conteo

11.3 Uso de permutaciones y combinaciones

11.4 Uso del triángulo de Pascal y del teorema del binomio

11.5 Problemas de conteo que incluyen "no" y "o"

Investigación en grupo:
Aproximación de factoriales mediante la fórmula de Stirling

Examen del capítulo 11

11.1 Conteo mediante un listado sistemático



Los métodos de conteo pueden utilizarse para determinar el número de movimientos necesarios para resolver el cubo de Rubik. El cubo desordenado debe modificarse de tal manera que al final cada cara tenga un solo color. Las regalías por las ventas del cubo en los países occidentales convirtieron a su creador, Rubik, en el hombre más rico de Hungría.

En cada uno de los métodos de conteo que se presentan en esta sección hay que proponer una lista puntual de los posibles resultados para cada tarea determinada. Este enfoque sólo es práctico cuando se trata de listas bastante pequeñas. Otros métodos, que desarrollaremos en el resto del capítulo, nos permitirán determinar "cuántas" son las posibilidades sin necesidad de enumerarlas todas.

Es muy importante usar un método *sistemático* al momento de hacer la lista de los posibles resultados de un ejercicio. Si empezamos a colocar en la lista cada posibilidad según vaya ocurriendo, es muy probable que perdamos de vista algunas de ellas.

Tareas con una fase Por lo general, los resultados de tareas sencillas que constan de una sola fase pueden listarse con facilidad. Por ejemplo, cuando la tarea consiste en lanzar una moneda al aire, la lista sería ésta: *cara, cruz*. Hay dos posibles resultados. Si la tarea consiste en tirar un dado (un cubo cuyas caras están numeradas del 1 al 6), los diferentes resultados son 1, 2, 3, 4, 5, 6, un total de seis posibilidades.

EJEMPLO 1 Considere un club N formado por cinco miembros:

$$N = \{\text{Andy, Bill, Cathy, David, Evelyn}\},$$

para abreviar, $N = \{A, B, C, D, E\}$.

¿Cuántas posibilidades tiene este grupo de elegir a un presidente (suponiendo que todos sus miembros son elegibles)?

La tarea en este caso es seleccionar a uno de los cinco miembros como presidente. Hay cinco posibles resultados: *A, B, C, D* y *E*. ■

TABLA 1

		Segundo dígito		
		1	**2**	**3**
Primer dígito	**1**	11	12	13
	2	21	22	23
	3	31	32	33

Tareas con dos fases; cómo usar las tablas de productos

EJEMPLO 2 Determine la cantidad de números de dos dígitos que pueden escribirse con los dígitos del conjunto {1, 2, 3}.

Esta tarea consta de dos fases: seleccionar un primer dígito y luego un segundo dígito. Los resultados para la tarea de dos fases pueden representarse en una **tabla de productos** como la tabla 1. De ésta obtuvimos nuestra lista de posibles resultados: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. Existen nueve posibilidades. ■

EJEMPLO 3 Determine el número de posibles resultados diferentes cuando se lanzan dos dados comunes y corrientes.

Supondremos que los dados son fácilmente distinguibles uno del otro. Por ejemplo, uno puede ser rojo y el otro verde. Así pues, esta tarea consta de dos partes: tirar el dado rojo y luego tirar el dado verde. La tabla 2 es una tabla de productos que muestra los 36 resultados posibles. ■

Esta última tabla le servirá de referencia cuando enfrente los diversos problemas relacionados con los tiros de dados que aparecen tanto en el resto de este capítulo como en el capítulo siguiente.

TABLA 2 Tirar dos dados

		Dado verde					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado rojo	**1**	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

TABLA 3 Elección de dos directivos

		Secretario				
		A	***B***	***C***	***D***	***E***
Presidente	***A***		*AB*	*AC*	*AD*	*AE*
	B	*BA*		*BC*	*BD*	*BE*
	C	*CA*	*CB*		*CD*	*CE*
	D	*DA*	*DB*	*DC*		*DE*
	E	*EA*	*EB*	*EC*	*ED*	

EJEMPLO 4 Determine el número de combinaciones en que el club N del ejemplo 1 puede elegir tanto a un presidente como un secretario. Suponga que todos los miembros son elegibles, pero que ninguno puede ejercer dos cargos a la vez.

Una vez más, la tarea exigida consta de dos partes: determinar quién va a ser el presidente y quién el secretario. La tabla 3 proporciona la lista siguiente (donde, por ejemplo, AB significa que A es presidente y B secretario, mientras que BA implica que B es presidente y A secretario):

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ BA,\ BC,\ BD,\ BE,\ CA,\ CB,$$
$$CD,\ CE,\ DA,\ DB,\ DC,\ DE,\ EA,\ EB,\ EC,\ ED.$$

Observe que ciertas entradas (las de la diagonal principal, que va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha) están omitidas en la tabla, pues los casos AA, BB, etc., implicarían que una misma persona ocupa ambos cargos. En total, hay 20 posibilidades. ■



Dados de hueso fueron desenterrados de las ruinas del campamento romano de Vindolanda, cerca de la frontera entre Inglaterra y Escocia. La vida en la frontera romana daba tanta importancia al juego como a las batallas. Algunos de los dados romanos estaban cargados en el 6 y el 1.

Por otra parte, la vida de la frontera estadounidense quedaba reflejada en las marcas del ganado, cuyos diseños mantenían vivo el recuerdo de las disputas, las luchas entre familias y los romances. Un ganadero llamado Ellis, del Valle del Paraíso, en Arizona, quien era aficionado a los juegos de palabras, incluso diseñó su propia marca de ganado con la forma de un par de dados. Como usted ya habrá imaginado, los puntos que aparecían eran 6 y 1.

EJEMPLO 5 Determine el número de maneras en que el club N puede elegir un comité de dos miembros para que los represente en una conferencia.

De nuevo, la tarea exigida tiene dos partes. De hecho, podríamos usar nuevamente la tabla 3, sólo que en esta ocasión el orden de ambas letras (es decir, personas) en un par dado realmente no implica diferencia alguna. Por ejemplo, BD y DB son el mismo comité. (En el ejemplo 4, BD y DB eran dos resultados diferentes, ya que las dos personas tenían cargos distintos.) En el caso de los comités, eliminamos no sólo las entradas de la diagonal principal, sino también todas las entradas que estén por debajo de ésta. La lista resultante contiene 10 posibilidades:

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ BC,\ BD,\ BE,\ CD,\ CE,\ DE.$$ ■

Tareas con tres o más fases; cómo usar los diagramas de árbol

Solución de problemas

Cuando una tarea consta de más de dos partes, no es fácil analizarla mediante una tabla de productos. Necesitaríamos una tabla de más de dos dimensiones, la cual es difícil de elaborar en una hoja de papel. Pero existe otra herramienta útil: el **diagrama de árbol**, del que nos valdremos en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 6 Determine cuántos números de tres dígitos pueden escribirse con los dígitos del conjunto {1, 2, 3}, suponiendo primero que (**a**) se permite repetir los dígitos, y luego que (**b**) no se permite repetir los dígitos.

(a) La tarea de hallar tales números consta de tres partes: seleccionar el primer dígito, luego el segundo dígito y finalmente el tercer dígito. Conforme avanzamos de izquierda a derecha por el diagrama de árbol de la figura 1, el árbol se divide en la primera etapa para mostrar todas las posibles combinaciones para el primer dígito. Luego, cada rama de la primera etapa se ramifica o subdivide otra vez, en la segunda etapa, en todas las posibilidades para el segundo dígito. Por último, la ramificación en la tercera etapa muestra las posibilidades para el tercer dígito. La lista de los resultados posibles (27 en total) se muestra en la figura 1.

(b) Cuando no se permite repetir los dígitos, habría que construir un nuevo diagrama de árbol, como el de la figura 2, o simplemente podríamos listar los números del primer diagrama de árbol y eliminar los que tengan dígitos repetidos. En cualquiera de los dos casos, sólo obtenemos seis posibilidades.

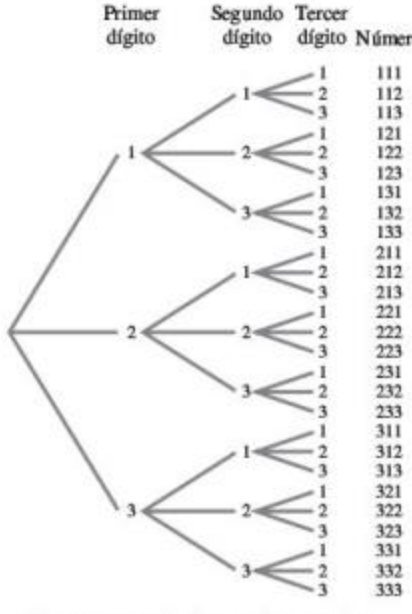


Diagrama de árbol para números de tres dígitos del conjunto {1, 2, 3}

FIGURA 1

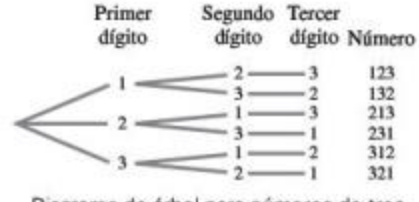


Diagrama de árbol para números de tres dígitos no repetidos del conjunto {1, 2, 3}

FIGURA 2

Observe la diferencia entre las partes (a) y (b) del ejemplo 6. Cuando "se permite la repetición (de dígitos)" existen 27 posibilidades, pero sólo seis cuando "no se permite repetir los dígitos". He aquí otra manera de explicar cómo debe realizarse el ejemplo 6: hay que determinar un número de tres dígitos colocando, en un sombrero, tres pedazos de papel (marcados con 1, 2 y 3, respectivamente) y sacando de manera sucesiva tres pedazos. Determine el número de posibles resultados si al sacar los papeles (a) los va reemplazando, (b) no los reemplaza. Sacar papeles "reemplazándolos" significa sacar un pedazo de papel, registrar el dígito con que está marcado y regresarlo al sombrero, de modo que se pueda volver a sacar. Sacar "con reemplazo" tiene el efecto de "permitir las repeticiones", mientras que sacar "sin reemplazo" tiene el efecto de "no permitir las repeticiones".

Las palabras "repeticiones" y "reemplazo" pueden ser claves importantes al momento de enunciarse un problema. Pero existen otras formas de expresar esos mismos significados. En el ejemplo 2, puesto que no se estableció restricción alguna, podemos suponer que *se permiten las repeticiones* (de dígitos), o de forma equivalente, que los dígitos se seleccionan *con reemplazo.*

EJEMPLO 7 La impresora de la computadora de Michelle Clayton permite configurarla de manera opcional con un panel de cuatro interruptores en hilera. ¿Cuántas configuraciones diferentes puede seleccionar, si no puede haber dos interruptores adyacentes apagados al mismo tiempo?

Esta situación es característica de las opciones que los usuarios pueden determinar para distintos dispositivos, entre los que se incluyen los equipos de cómputo, los mecanismos para abrir las puertas de las cocheras y otros aparatos domésticos. En la figura 3 designamos al "encendido" y al "apagado" con 1 y 0, respectivamente (una práctica común). Como podemos ver, el número de configuraciones posibles es ocho. Observe que, en el diagrama, cuando un interruptor aparece como apagado (0), el siguiente sólo puede estar encendido (1). Esto, para satisfacer la restricción de que puede haber dos interruptores adyacentes apagados ambos al mismo tiempo.

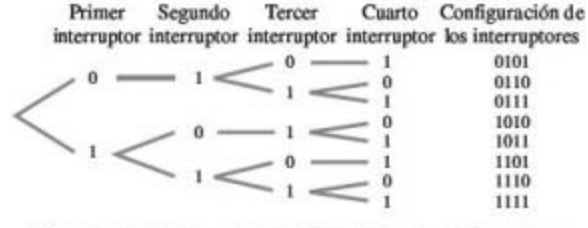


Diagrama de árbol para la configuración de una impresora

FIGURA 3

EJEMPLO 8 Aarón, Bobbette, Chuck y Deirdre han reservado cuatro asientos en la misma fila para un concierto de rock. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse los cuatro, de modo que Aarón y Bobbette estén juntos?

Aquí tenemos una tarea de cuatro fases: asignar a una persona al primero, segundo, tercero y cuarto asientos. En el diagrama de árbol de la figura 4 evitamos las repeticiones, ya que ninguna persona puede ocupar más de un asiento a la vez. Además, una vez que *A* o *B* aparezca en alguna etapa del árbol, el otro debe figurar en la siguiente etapa. (¿Por qué será esto?) Observe que de la etapa tres a la etapa cuatro ya no existen divisiones, pues para ese momento sólo queda una persona a la que hay que asignarle asiento. La columna de la derecha muestra las 12 posibles disposiciones para sentarse.

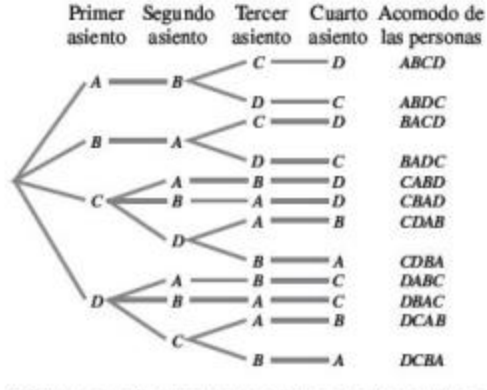


Diagrama de árbol para los asientos de un concierto

FIGURA 4

Aunque hemos aplicado los diagramas de árbol a tareas con tres o más fases, también pueden usarse para tareas con dos fases, incluso para las tareas sencillas de una sola fase. Las tablas de producto, por su parte, son útiles solamente para tareas de dos fases.

Otros métodos de listado sistemático Las tablas de productos (para tareas de dos fases) y los diagramas de árbol (para tareas con cualquier número de fases) son métodos útiles para describir y enumerar los posibles resultados de determinadas tareas. Pero existen otras formas sistemáticas de producir un listado completo de posibles resultados.

En el ejemplo 4, usamos una tabla de productos (la tabla 3) para listar todas las parejas presidente-secretario que pueden formarse para el club $N = \{A, B, C, D, E\}$. También podríamos elaborar de manera sistemática la misma lista mediante un ordenamiento alfabético o yendo de izquierda a derecha. Primero, tome los resultados en los que A es presidente. Entonces, cualquiera de los miembros restantes podría ser secretario (B, C, D o E). Esto nos da las parejas AB, AC, AD y AE. Ahora, suponga que B es presidente. El secretario sería A, C, D o E. Obtenemos así las parejas BA, BC, BD y BE. Si continuamos en este orden, obtenemos una lista completa igual a la del ejemplo 4:

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ BA,\ BC,\ BD,\ BE,\ CA,\ CB,$$
$$CD,\ CE,\ DA,\ DB,\ DC,\ DE,\ EA,\ EB,\ EC,\ ED.$$

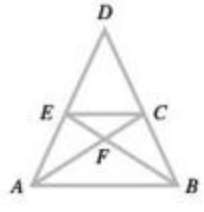


FIGURA 5

EJEMPLO 9 ¿Cuántos triángulos (de cualquier tamaño) comprende la figura 5?

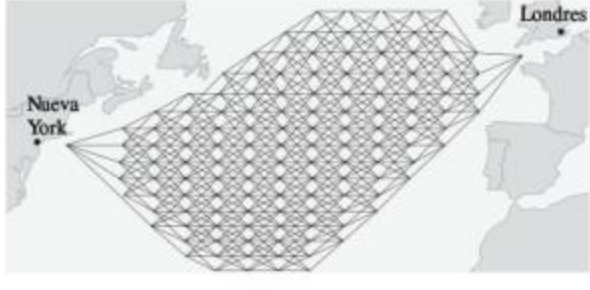
Un método sistemático consiste en marcar los puntos como se muestra, comenzando con A, para luego proceder a escribir todas las combinaciones de tres letras en orden alfabético escribiendo y, por último, tachar las que no son triángulos.

$$ABC,\ ABD,\ ABE,\ ABF,\ ACD,\ ACE,\ ACF,\ ADE,\ ADF,\ AEF,$$
$$BCD,\ BCE,\ BCF,\ BDE,\ BDF,\ BEF,\ CDE,\ CDF,\ CEF,\ DEF$$

Al final, vemos que en la figura hay 12 triángulos diferentes. ¿Por qué ACB y CBF (y muchos más) no están incluidos en la lista?

Otro método podría ser identificar primero los triángulos que constan cada uno de una sola región: DEC, ECF, AEF, BCF y ABF. Luego, listar los que constan de dos regiones cada uno: AEC, BEC, ABE y ABC; y los de tres regiones: ACD y BED. No hay triángulos con cuatro regiones, pero hay uno con cinco: ABD. El total es nuevamente 12. ¿Podría pensar en otras formas sistemáticas de obtener la misma lista? ■

Observe que en el primer método mostrado en el ejemplo 9, los puntos marcados se consideraron en orden alfabético. En el segundo método, se listaron regiones individuales en orden descendente y de izquierda a derecha. Utilizar un sistema definido nos ayuda a asegurar que la lista que obtengamos esté completa.



El **"diagrama de árbol"** que se observa en el mapa proviene de la investigación sobre la factibilidad de emplear veleros de motor (embarcaciones impulsadas por motor que usan la potencia auxiliar de una vela) en la regata del Atlántico Norte. Al inicio de una carrera, se utilizan los pronósticos del clima y el análisis por computadora para elegir la mejor ruta de entre 45 millones de rutas posibles.

11.1 EJERCICIOS

Elección de directivos de un club *Remítase a los ejemplos 1 y 4, los cuales mencionan este club*

$$N = \{\text{Andy, Bill, Cathy, David, Evelyn}\}.$$

Suponiendo que todos los miembros son elegibles, pero que ninguno puede ocupar más de un cargo, liste y cuente las diferentes maneras en que el club podría elegir a los siguientes grupos de directivos.

1. Un presidente y un tesorero.
2. Un presidente y un tesorero, si el presidente debe ser una mujer.
3. Un presidente y un tesorero, si ambos funcionarios no deben ser del mismo sexo.
4. Un presidente, un secretario y un tesorero, si el presidente y el tesorero deben ser mujeres.
5. Un presidente, un secretario y un tesorero, si el presidente debe ser hombre y los otros dos mujeres.
6. Un presidente, un secretario y un tesorero, si el secretario debe ser mujer y los otros dos hombres.

Nombramiento de comités *Liste y cuente las maneras en que el club N podría designar un comité de tres miembros con las condiciones siguientes.*

7. No hay restricciones.
8. El comité debe incluir más hombres que mujeres.

Consulte la tabla 2 (la tabla de productos para el tiro de dos dados). De las 36 posibilidades, determine el número de tiradas para que la suma (de ambos dados) sea la siguiente.

9. 2 **10.** 3 **11.** 4
12. 5 **13.** 6 **14.** 7
15. 8 **16.** 9 **17.** 10
18. 11 **19.** 12 **20.** Impar
21. Par
22. De 6 a 8, inclusive.
23. Entre 6 y 10.
24. Menor que 5.
25. Elabore una tabla de productos que muestre todos los posibles números de dos dígitos que pueden formarse con los dígitos del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

De los 36 números en la tabla de productos del ejercicio 25, liste los que pertenezcan a cada una de las siguientes categorías.

26. Números impares.
27. Números con dígitos repetidos.
28. Múltiplos de 6. **29.** Números primos.
30. Números triangulares. **31.** Números cuadrados.
32. Números de Fibonacci. **33.** Potencias de 2.

34. Elabore un diagrama de árbol que muestre todos los resultados posibles cuando se lanzan tres monedas. Luego liste las formas de obtener los siguientes resultados:
- **(a)** al menos dos caras
- **(b)** más de dos caras
- **(c)** no más de dos caras
- **(d)** menos de dos caras

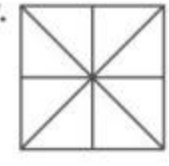
35. Amplíe el diagrama de árbol del ejercicio 34, ahora para cuatro monedas. Luego, liste los resultados obtenidos que cumplan con las siguientes condiciones.
- **(a)** más de tres cruces
- **(b)** menos de tres cruces
- **(c)** al menos tres cruces
- **(d)** no más de tres cruces

Determine el número de triángulos (de cualquier tamaño) que hay en cada una de las figuras siguientes.

36.



37.



38.

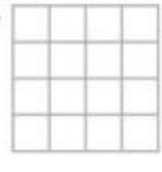


39.

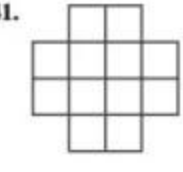


Determine el número de cuadrados (de cualquier tamaño) que hay en cada una de las figuras siguientes.

40.



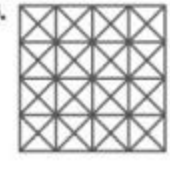
41.



42.



43.

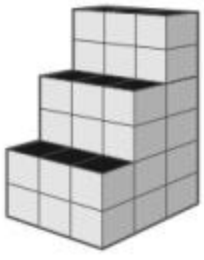


Considere solamente los cubos más pequeños en forma individual y suponga que todas las pilas están llenas (sin huecos). Determine el número de cubos que no se ven en las siguientes figuras en perspectiva.

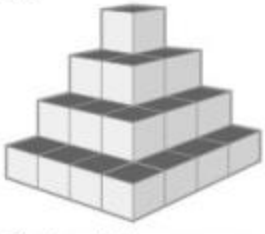
44.



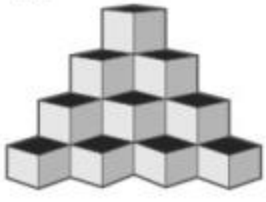
45.



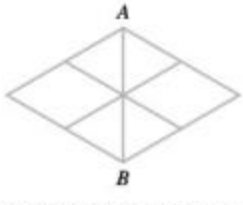
46.



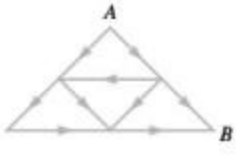
47.



48. En el plano que se muestra aquí, sólo se permiten movimientos descendentes. Determine el número total de rutas para ir de A a B.



49. Determine el número de rutas que hay de A a B en la figura que se aprecia aquí, si en cada segmento sólo se puede seguir la dirección indicada.



En cada ejercicio del 50 al 52, determine el número de maneras diferentes en que el número dado puede escribirse como la suma de dos primos.

50. 30 **51.** 40 **52.** 95

53. ***Apretones de manos*** Doce personas que no se conocían entre sí estaban sentadas en círculo, y cada una entabló conversación sólo con la persona que estaba a su izquierda y con la persona a su derecha. Después, las 12 personas se levantaron y cada una estrechó la mano (una sola vez) de cada una de las personas restantes a las que aún no conocía. ¿Cuántos apretones de mano se efectuaron?

54. ***Número de juegos en un torneo de ajedrez*** Cincuenta personas entraron a un torneo de ajedrez de eliminación sencilla. (Si uno pierde un juego, queda eliminado.) Suponiendo que no hubo empates, ¿cuál es el número de juegos que se necesitaron para determinar al campeón del torneo?

55. ***Sumas de dígitos*** ¿En cuántos números del 10 al 100 la suma de sus dígitos es igual a un cuadrado perfecto?

56. ***Sumas de dígitos*** ¿Cuántos son los números de tres dígitos cuya suma de sus dígitos es igual a 22?

57. ***Enteros que contienen al 2*** ¿Cuántos enteros entre 100 y 400 contienen al dígito 2?

58. ***Selección de platillos*** Esta noche, Frank Capek y sus amigos están cenando en el restaurante Bay Steamer, en donde una cena completa consta de tres platillos: (1) sopa (de crema de almejas o minestrone) o ensalada (de espinacas frescas o de camarones), (2) empanadas o molletes de salvado y (3) plato fuerte (lasaña, langosta o pavo asado). Frank elige sus alimentos en función de las siguientes restricciones. No tolera más de una clase de mariscos en una sola comida. Además, cuando come sopa minestrone, no puede resistirse a comer lasaña también. Y no sería capaz de hacer frente a las burlas de sus compañeros si ordenara tanto espinacas como molletes de salvado. Utilice un diagrama de árbol para determinar el número de diferentes opciones que tiene Frank.

Opciones de configuración de la impresora de una computadora *Para los ejercicios 59 a 61, consulte el ejemplo 7. ¿Cuántas configuraciones diferentes podría seleccionar Michelle en cada caso?*

59. No se aplica restricción alguna sobre los interruptores adyacentes.

60. Ningún par de interruptores adyacentes puede estar apagado y ningún par adyacente puede estar encendido.

61. Hay cinco interruptores en lugar de cuatro, y no puede haber dos interruptores adyacentes encendidos al mismo tiempo.

62. ***Elaboración de numerales a partir de conjuntos de dígitos*** Determine cuántos números impares de tres dígitos que no se repitan pueden escribirse con los dígitos del conjunto {0, 1, 2, 3}.

63. ***Puntos de retícula en un segmento de recta*** Un segmento de recta une los puntos (8, 12) y (53, 234) en el plano cartesiano. Si se incluyen los puntos en los extremos, ¿cuántos puntos de retícula contiene este segmento de recta? (Un *punto de retícula* es un punto cuyas coordenadas son números enteros.)

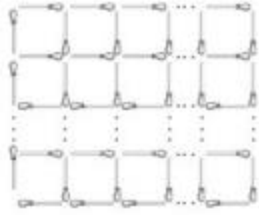
64. ***Longitudes de segmentos que unen puntos de retícula*** En el patrón que aquí se aprecia, cada punto

está a una unidad de distancia, tanto horizontal como verticalmente. Si un segmento puede unir dos puntos cualesquiera, ¿cuántos segmentos pueden dibujarse con cada una de las longitudes siguientes?

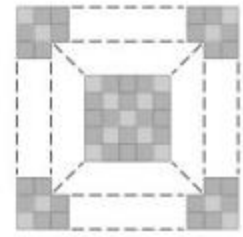
(a) 1 **(b)** 2 **(c)** 3 **(d)** 4 **(e)** 5



65. ***Contar los fósforos en una cuadrícula*** La cuadrícula rectangular que se muestra abajo se formó con fósforos de longitud uniforme. Si la cuadrícula es de 15 fósforos de alto y 28 de ancho, ¿cuántos fósforos se utilizaron?



66. ***Patrones en un piso con mosaicos*** Un piso cuadrado se cubre con mosaicos también cuadrados, como se muestra en la siguiente figura. Las líneas diagonales se cubren con mosaicos de sombreado oscuro y el resto del piso se cubre con mosaicos de sombreado más claro. (En todos los casos, deben usarse los mosaicos oscuros y mosaicos claros, y las dos diagonales deben tener un mosaico oscuro en común en el centro del piso.)



(a) Si se utilizan 81 mosaicos oscuros, ¿cuántos mosaicos claros se necesitarán?

(b) ¿Para cuántos números, además del 81, todavía tendría solución este problema?

(c) Encuentre una fórmula que exprese, en general, el número de mosaicos de color claro que se necesitan.

67. ***Apretones de mano*** Jeff Howard y su hijo se reunieron con otras cuatro parejas de padres e hijos para intercambiar tarjetas de béisbol. Conforme iban llegando, cada uno estrechaba la mano de todos a los que no conocía. Cada persona terminó por hacer un número diferente de nuevos conocidos (0-6), excepto Jeff y su hijo, quienes, cada uno por su parte, conocieron al mismo número de personas. ¿Cuántas manos estrechó Jeff?

En los ejercicios 68 a 71, enuncie de otra forma el problema de conteo de dos maneras diferentes, primero **(a)** *usando la palabra* repetición, *y luego* **(b)** *la palabra* reemplazo.

68. Ejemplo 2 **69.** Ejemplo 3

70. Ejemplo 4 **71.** Ejercicio 7

11.2 Uso del principio fundamental de conteo

En la sección anterior, obtuvimos listas completas de todos los posibles resultados de diversas tareas. Sin embargo, si el número total de posibilidades es todo lo que necesitamos conocer, entonces por lo común no es necesario hacer una lista, que a menudo es muy difícil o tedioso de obtener, en especial cuando ésta es larga. En la presente sección, desarrollamos formas de calcular "qué cantidad" por medio del *principio fundamental de conteo.*

La figura 6 reproduce la figura 2 de la sección anterior [para el ejemplo 6(b)] que muestra todos los números posibles de tres dígitos, sin repetir ningún dígito, que se pueden formar con el conjunto {1, 2, 3}.

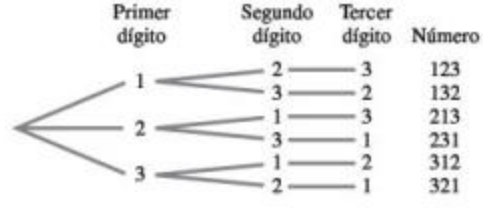


FIGURA 6

El diagrama de árbol de la figura 6 es "uniforme", en el sentido de que una parte dada de la tarea debe realizarse siempre de la misma manera y la misma cantidad de veces, sin importar qué elección se haga en las fases previas. Por ejemplo, siempre hay dos opciones para el segundo dígito. (Si el primer dígito es 1, el segundo sólo puede ser 2 o 3, si el primero es 2, el segundo sólo puede ser 1 o 3, si el primero es 3, entonces el segundo sólo puede ser 1 o 2.) El ejemplo 6(a) de la sección anterior trata el mismo problema (cuántos números de tres dígitos se pueden formar usando los dígitos 1, 2 y 3), sólo que en ese caso se permitían las repeticiones. Cuando éstas se permitían, hubo muchas más posibilidades (27 en lugar de 6; vea la figura 1 de la sección 11.1), sin embargo, se sigue aplicando el criterio de uniformidad mencionado anteriormente. No importa cuál sea el primer dígito, para el segundo existen tres alternativas (1, 2 y 3). Y no importa cuáles sean el primero y el segundo dígitos, sigue habiendo tres opciones para el tercer dígito. Este criterio de uniformidad puede establecerse en general como sigue.

Criterio de uniformidad para tareas con múltiples fases

Se dice que una tarea de varias fases satisface el **criterio de uniformidad** si el número de alternativas en cualquier fase particular es el mismo *sin importar qué alternativas se eligieron en las fases anteriores.*

El criterio de uniformidad no se satisface en todos los problemas de conteo de muchas fases. Recuerde el ejemplo 7 (y la figura 3) de la sección anterior. Después del primer interruptor (dos posibilidades), para los demás interruptores existe una o dos posiciones posibles dependiendo de cómo se colocó el interruptor anterior. (Esta "no uniformidad" surge, en este caso, de una restricción: que dos interruptores adyacentes no podían estar apagados al mismo tiempo.)

En muchos casos en donde la uniformidad se cumple, podemos evitar la tarea de elaborar un diagrama de árbol si usamos el **principio fundamental de conteo**, que se establece como sigue.

Principio fundamental de conteo

Cuando una tarea consiste en k fases separadas, si la primera puede realizarse en n_1 formas, la segunda puede hacerse en n_2 formas, etc., y así hasta la k-ésima fase, que puede hacerse de n_k formas. Entonces, el número total de resultados posibles para completar la tarea está dado por el producto de

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Solución de problemas

Una de las estrategias para resolver problemas sugerida en el capítulo 1 fue: "Si una fórmula se aplica, utilícela." El principio fundamental de conteo proporciona una fórmula que se aplica a una gran variedad de problemas. El truco consiste en visualizar la "tarea" como si llevarla a cabo requiriera hacerla en una sucesión de dos o más fases separadas. Una técnica útil cuando se aplica el principio fundamental de conteo es escribir todas las fases separadas de la tarea, con un espacio en blanco para cada una de ellas. Luego hay que imaginar de cuántas maneras puede llevarse a cabo cada parte e introducir estos números en los espacios. Por último, basta con multiplicar estos números.

Richard Dedekind (1831-1916) estudió en la Universidad de Gotinga, donde fue el último alumno de Gauss. Su trabajo no fue reconocido mientras vivió, pero su tratamiento del infinito y de lo que constituye un número real sigue teniendo influencia en la actualidad.

Mientras pasaba unas vacaciones en Suiza, Dedekind conoció a Georg Cantor y se interesó en el trabajo de éste sobre los conjuntos infinitos. Tal vez porque ambos trabajaron en campos de las matemáticas que en aquel entonces eran nuevos y poco comunes, como la teoría de números, y debido a que ninguno de los dos recibió en vida la atención profesional que merecían, entablaron una profunda y larga amistad.

EJEMPLO 1 ¿Cuántos números de dos dígitos hay en nuestro sistema (de base 10) de los números naturales? (Aunque 40 es un número de dos dígitos, 04 no lo es.)

Nuestra "tarea" consiste en seleccionar, o inventar, un número de dos dígitos. Podemos configurar el trabajo como sigue, mostrando las dos partes que deben llevarse a cabo.

Parte de la tarea	Seleccionar el primer dígito	Seleccionar el segundo dígito
Número de formas	_____	_____

Hay nueve alternativas para el primer dígito (1 a 9). Puesto que no se estableció restricción alguna ni quedó implícita, suponemos que está permitido repetir los dígitos. Por lo tanto, sin importar cuál dígito diferente de 0 se haya utilizado como primer dígito, las nueve opciones están disponibles para el siguiente dígito. Además, a diferencia del primer dígito, el segundo puede ser 0, así que tenemos diez opciones para el segundo dígito.

Parte de la tarea	Seleccionar el primer dígito		Seleccionar el segundo dígito	
Número de formas	9	·	10	= 90

Existen 90 números de dos dígitos. (Como comprobación, observe que son los números del 10 al 99, un total de $99 - 10 + 1 = 90$.) ■

EJEMPLO 2 Determine cuántos números de dos dígitos no contienen dígitos repetidos (por ejemplo, el 66 no está permitido).

La tarea básica, de nuevo, es seleccionar un número de dos dígitos. Esta labor consta de dos partes: seleccionar el primer dígito y seleccionar el segundo dígito. Hay nueve formas de seleccionar el primer dígito (del 1 al 9). Luego, quedan nueve opciones para el segundo dígito, puesto que el dígito usado fue distinto de 0 y ya no puede repetirse, aunque ahora el 0 sí está disponible. El número total es $9 \cdot 9 = 81$. ■

EJEMPLO 3 ¿De cuántas maneras puede el club N, de la sección anterior, elegir un presidente y un secretario, si el secretario debe ser hombre?

Recuerde que $N = \{A, B, C, D, E\}$ = {Andy, Bill, Cathy, David, Evelyn}. Si se considera primero al presidente, hay cinco opciones (y no hay restricciones). Pero ahora existe un problema para determinar las opciones para secretario. Si se eligió a una mujer como presidente (C o E), quedan tres opciones para secretario (A, B y D). Si el elegido como presidente fue un hombre, sólo quedan dos opciones (los otros dos hombres) para secretario. En otras palabras, no se cumple el criterio de uniformidad y fracasa nuestro intento de aplicar el principio fundamental de conteo.

Sin embargo, no todo está perdido. Al determinar el número total de maneras, no hay razón por la que no podamos decidir elegir primero al secretario. Hay tres opciones (A, B y D). Ahora, no importa cuál de los hombres haya sido elegido como secretario, pueden elegirse tanto los otros dos hombres como las dos mujeres (cuatro opciones en cualquier caso). Considerando las fases de esta tarea en este orden, satisfacemos el criterio de uniformidad y, por lo tanto, podemos utilizar el principio fundamental de conteo. El número total de formas de elegir un presidente y un secretario es $3 \cdot 4 = 12$. (Puede comprobar esta respuesta elaborando un diagrama de árbol o por medio de algún otro método que muestre una lista de todas las posibilidades.) ■

La lección que debemos aprender del ejemplo 3 es ésta: siempre que una o más partes de una tarea tengan restricciones especiales, intente considerar esa o esas partes antes que las demás.

EJEMPLO 4 ¿Cuántos números naturales impares de tres dígitos distintos hay?

El dígito más restringido es el tercero, ya que debe ser impar. Sólo existen cinco opciones para éste (1, 3, 5, 7 o 9). Ahora, considere el primer dígito. Puede ser cualquier dígito distinto de 0, excepto el que ya se haya elegido como tercer dígito. Hay ocho posibilidades. Por último, el segundo dígito puede ser cualquiera (incluyendo el 0) excepto los dos dígitos (distintos de 0) que ya se hayan utilizado. Hay ocho posibilidades. Podemos resumir este razonamiento como sigue.

Partes de la tarea	Seleccionar el tercer dígito	·	Seleccionar el primer dígito	·	Seleccionar el segundo dígito	
Número de formas	5	·	8	·	8	= 320

Existen 320 números naturales impares de tres dígitos no repetidos. ■

EJEMPLO 5 En algunos estados de Estados Unidos, las matrículas de los automóviles tiene tres letras seguidas de tres dígitos. ¿Cuántas matrículas diferentes son posibles?



La tarea básica consiste en idear una matrícula que conste de tres letras seguidas de tres dígitos. Esta tarea se compone de seis fases. Como no hay restricciones sobre las letras o los dígitos que se utilizarán, el principio fundamental de conteo muestra que existen

$$26^3 \cdot 10^3 = 17{,}576{,}000$$

matrículas posibles. (En la práctica, algunas de las secuencias posibles de letras se consideran no deseables, por lo que no se utilizan.) ■

EJEMPLO 6 Hay que crear un número de cuatro dígitos utilizando sólo los dígitos del conjunto $\{1, 2, 3\}$.

(a) ¿Cuántos números de esta naturaleza son posibles?

Para crear tal número, debemos seleccionar cuatro dígitos, en sucesión, del conjunto dado de tres dígitos, en donde la selección se realiza con reemplazo (ya

que aparentemente se permite repetir dígitos). Por el principio fundamental de conteo, el número de posibilidades es $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$.

(b) ¿Cuántos de estos números naturales son impares menores que 2000?

El número será menor que 2000 sólo si su primer dígito es 1 (una sola opción) y será impar sólo si su cuarto dígito es 1 o 3 (dos opciones). No hay restricción para el segundo y tercer dígitos (tres opciones en cada caso). La respuesta es $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. ■

Solución de problemas

Dos de las estrategias del capítulo 1 para resolver problemas fueron: "Primero resuelva un problema más sencillo que sea similar" y "Busque un patrón". De hecho, muchas veces resulta que un problema que es en esencial el mismo, o al menos muestra el mismo patrón, que otro problema ya resuelto quizá en un contexto diferente.

EJEMPLO 7 Vern tiene cuatro palos de golf antiguos que quiere darle a sus tres hijos, Mark, Chris y Scott.

(a) ¿De cuántas maneras puede distribuir los palos?

La tarea consiste en distribuir cuatro palos de golf entre tres hijos. Considere los palos de golf en sucesión, y para cada uno, pregúntese cuántos hijos podrían recibirlo. En efecto, debemos seleccionar cuatro hijos del conjunto {Mark, Chris, Scott} en sucesión, y seleccionar con reemplazo. Compare esto con el ejemplo 6(a), en el que elegimos cuatro dígitos, en sucesión y con reemplazo, del conjunto $\{1, 2, 3\}$. En este caso, estamos seleccionando hijos en lugar de dígitos, pero el patrón es el mismo y los números son los mismos. Nuevamente la respuesta es $3^4 = 81$.

(b) ¿Cuántas opciones hay si el palo número 1 debe ser para Mark y el número 3 debe ser para Chris o para Scott?

Al igual que en el ejemplo 6(b), una parte de la tarea ahora está restringida a una sola opción y otra parte está restringida a dos opciones. Como en aquel ejemplo, el número de posibilidades es $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. ■

EJEMPLO 8 Vuelva a resolver el ejemplo 8 de la sección anterior, pero esta vez usando el principio fundamental de conteo.

Recuerde que Aaron, Bobbette, Chuck y Deirdre (*A, B, C* y *D*) se sentarán en fila en cuatro asientos adyacentes (digamos 1, 2, 3 y 4), de modo que *A* y *B* estén uno al lado del otro. Una forma de resolver esta tarea es tomar tres decisiones sucesivas, como vemos a continuación.

1	2	3	4
X	X	_	_
_	X	X	_
_	_	X	X

Asientos disponibles para *A* y *B*

1. ¿Qué par de asientos deben ocupar *A* y *B*? Hay *tres* opciones ($1 - 2$, $2 - 3$ o $3 - 4$), como se ilustra al margen.
2. ¿En qué orden deben estar *A* y *B*? Hay *dos* opciones (*A* a la izquierda de *B* o *B* a la izquierda de *A*).
3. ¿En qué orden deben estar *C* y *D*? Hay *dos* opciones (*C* a la izquierda de *D* o *D* a la izquierda de *C*, no por fuerza uno junto al otro).

(¿Por qué no nos preguntamos cuáles asientos deben ocupar *C* y *D*?) Ahora el principio fundamental de conteo proporciona el número total de opciones: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$, el mismo resultado que obtuvimos en la sección anterior. ■

Pequeña tabla de factoriales
Los valores numéricos de las factoriales se incrementan rápidamente. El valor de 100! es un número de 158 dígitos.

0! = 1
1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120
6! = 720
7! = 5040
8! = 40,320
9! = 362,880
10! = 3,628,800

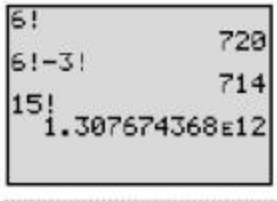
Factoriales Esta sección empezó con una exposición de números de tres dígitos no repetidos del conjunto $\{1, 2, 3\}$. El número de posibilidades fue de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, de acuerdo con el principio fundamental de conteo. Ese producto también puede ser considerado como el número total de distintas *disposiciones* de los tres dígitos 1, 2 y 3. De manera similar, el número de disposiciones de cuatro objetos, digamos, *A, B, C* y *D*, es, por el principio fundamental de conteo, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Como este tipo de producto aparece con mucha frecuencia en las aplicaciones, le damos un nombre y un símbolo especiales, como se muestra a continuación. Para cualquier número natural n, el producto de *todos* los números naturales de n a 1 se denomina **n factorial** y se denota con $n!$.

Fórmula factorial

Para cualquier número natural n, la cantidad n factorial está dada por

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1.$$

Los primeros valores de la factorial se determinan con facilidad por medio de una sencilla multiplicación, pero muy pronto resultan demasiado grandes, como se puede ver al margen. En la mayoría de los casos, es aconsejable el uso de una calculadora. (Véanse las notas al margen siguientes.)



Los resultados del ejemplo 9(b), (c) y (g) se ilustran en esta pantalla de calculadora.

EJEMPLO 9 Evalúe las expresiones siguientes.

(a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$ **(b)** $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

(c) $(6-3)! = 3! = 6$ **(d)** $6! - 3! = 720 - 6 = 714$

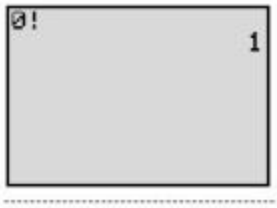
(e) $\dfrac{6!}{3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot = 120$

(f) $\left(\dfrac{6}{3}\right)! = 2! = 2 \cdot 1 = 2$

(g) $15! = 1.307674368000 \times 10^{12}$ **(h)** $100! = 9.332621544 \times 10^{157}$

Observe la diferencia entra las partes (c) y (d) y entre las partes (e) y (f) anteriores. Las partes (g) y (h) se calcularon por medio de una calculadora científica avanzada. [La parte (h) rebasa la capacidad de la mayoría de las calculadoras científicas.] ■

Para que las factoriales estén definidos para todos los enteros no negativos, incluyendo el cero, es común definir 0! como sigue.



La definición 0! = 1 se ilustra aquí.

Definición del cero factorial

$$0! = 1$$

(Veremos más adelante que esta definición especial permite expresar de manera más sencilla otros resultados.)

Siempre que necesitemos conocer el número total de formas de *ordenar* o *acomodar* un número de objetos distintos, podremos utilizar una factorial. El principio fundamental de conteo serviría, pero las factoriales proporcionan una vía más corta.

Ordenamiento de n objetos

El número total de formas diferentes de acomodar n objetos distintos es $n!$.

EJEMPLO 10 Erika Berg debe incluir siete ensayos en su carpeta de Inglés 1A. ¿De cuántas formas diferentes puede acomodarlos?

El número de formas de acomodar siete objetos distintos es $7! = 5040$. ■

EJEMPLO 11 Lynn Damme debe llevar al parque a 13 niños de nivel preescolar. ¿De cuántas maneras diferentes puede acomodarlos en una sola fila, para subir a la camioneta?

Trece niños pueden acomodarse de $13! = 6{,}227{,}020{,}800$ formas distintas. ■

PARA REFLEXIONAR

Un problema clásico



Suponga que un vendedor quiere hacer exactamente una sola visita a cada capital de los 48 estados contiguos de Estados Unidos, iniciando y finalizando en la misma ciudad. ¿Cuál es la ruta más corta?

En varias versiones, y durante muchos años, el denominado **"problema del agente viajero"** (o PAV) ha desafiado el ingenio de los matemáticos. Para la versión que acabamos de formular, existen 24!/3 rutas posibles, y la razón por la que el problema resulta tan difícil es enorme. (Incluso usando las computadoras más potentes.) En 1985, el matemático Shen Lin propuso la ruta de 10,628 millas que mostramos aquí, y aunque no pudo probar que era la más corta, ofreció 100 dólares a quien pudiese hallar otra ruta aún más corta.

En 1998, los investigadores David Applegate, Robert Bixby y William Cook, de la Universidad Rice, junto con Vasek Chvatal de la Universidad Rutgers, anunciaron una solución que marcaba un récord para el problema del agente viajero: el recorrido incluía 13,509 ciudades de Estados Unidos con poblaciones de al menos 500 personas. Su récord anterior se había establecido en 1994, para 7397 ciudades.

Para análisis en grupo

1. Dentro de los límites de precisión del dibujo anterior, trate de identificar otras rutas que podrían ser tan buenas o mejores que la que se muestra.
2. De manera realista, ¿qué otros factores, además de la *distancia*, podrían ser importantes para el vendedor?
3. Cuando un fabricante de productos químicos programa los pasos de un complejo proceso de manufactura, ¿qué cantidades podría querer minimizar?
4. Muchos sitios de la Web proporcionan información histórica e información actualizada sobre investigaciones en torno al problema del agente viajero. Por ejemplo visite el sitio www.math.princeton.edu/tsp.

11.2 EJERCICIOS

1. Explique, en sus propias palabras, el principio fundamental de conteo.

2. Describa cómo pueden utilizarse las factoriales en problemas de conteo.

Para los ejercicios 3 y 4, n y m son números naturales. Haga lo siguiente: **(a)** *diga si el enunciado dado es o no verdadero en general, y* **(b)** *explique su respuesta con ejemplos específicos.*

3. $(n + m)! = n! + m!$

4. $(n \cdot m)! = n! \cdot m!$

Evalúe cada expresión sin utilizar una calculadora.

5. $4!$

6. $7!$

7. $\frac{8!}{5!}$

8. $\frac{16!}{14!}$

9. $\frac{5!}{(5-2)!}$

10. $\frac{6!}{(6-4)!}$

11. $\frac{9!}{6!(6-3)!}$

12. $\frac{10!}{4!(10-4)!}$

13. $\frac{n!}{(n-r)!}$, donde $n = 7$ y $r = 4$

14. $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, donde $n = 12$ y $r = 4$

Evalúe cada expresión con ayuda de una calculadora. (Algunas respuestas pueden no ser exactas.)

15. $11!$

16. $17!$

17. $\frac{12!}{7!}$

18. $\frac{15!}{9!}$

19. $\frac{13!}{(13-3)!}$

20. $\frac{16!}{(16-6)!}$

21. $\frac{20!}{10! \cdot 10!}$

22. $\frac{18!}{6! \cdot 12!}$

23. $\frac{n!}{(n-r)!}$, donde $n = 23$ y $r = 10$

24. $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, donde $n = 28$ y $r = 15$

Configuraciones en un panel de interruptores *Hay que colocar un panel que contiene en sucesión tres interruptores de encendido y apagado.*

25. Suponiendo que no existe restricción alguna sobre los interruptores, utilice el principio fundamental de conteo para determinar el número total de posibles configuraciones del panel.

26. Suponiendo que no hay restricciones, elabore un diagrama de árbol que muestre todas las posibles configuraciones del panel mencionado en el ejercicio 25.

27. Ahora, suponga que no puede haber dos interruptores adyacentes apagados al mismo tiempo. Explique por qué el principio fundamental de conteo no se aplica en este caso.

28. Elabore un diagrama de árbol para mostrar todas las posibles configuraciones del panel si se respeta la restricción del ejercicio 27.

29. ***Tiro de dados*** La tabla 2 de la sección anterior muestra que cuando se tira un par de dados pueden obtenerse 36 resultados diferentes. ¿Cuántos resultados habría si se tiraran tres dados?

30. ***Conteo de números con cinco dígitos*** ¿Cuántos números de cinco dígitos hay en nuestro sistema de números naturales?

Asignar tareas a los miembros del club *Recuerde el club*

$$N = \{\text{Andy, Bill, Cathy, David, Evelyn}\}.$$

¿De cuántas formas podrían hacer lo siguiente?

31. Alinearse en fila los cinco miembros para una fotografía.

32. Programar que un miembro trabaje en la oficina cada uno de cinco días diferentes, suponiendo que los miembros pueden laborar más de un día.

33. Elegir a un hombre y una mujer para que hagan la decoración de una fiesta.

34. Elegir a dos miembros, uno para iniciar su siguiente reunión y otro para clausurarla, suponiendo que Bill no estuviera presente.

Creación de números a partir de conjuntos de dígitos *En los ejercicios 35 a 38, hay que formar números naturales usando sólo los dígitos del conjunto* $\{3, 4, 5\}$. *Determine el número de posibilidades diferentes para cada tipo de número que se describe a continuación.*

35. Números de dos dígitos.

36. Números impares de tres dígitos.

37. Números de cuatro dígitos con un par de cuatros adyacentes pero sin que se repita ningún otro dígito. [*Una pista:* Podría tener que dividir en tres fases la tarea de crear tales número, como *(1)* colocar el par de cuatros, *(2)* colocar el 3 y *(3)* colocar el 5.]

38. Números de cinco dígitos que inicien y terminen con 3; se permiten todas las repeticiones necesarias.

Selección de platos para una cena *El restaurante La Casa Loma ofrece cuatro opciones en la categoría de sopa y ensalada (dos sopas y dos ensaladas), dos opciones en la categoría de pan y tres opciones en la categoría de plato fuerte. Determine el número de cenas que se pueden formar en cada uno de los casos siguientes.*

39. Hay que incluir un elemento de cada una de las tres categorías.

40. Sólo se debe incluir una sopa y un plato fuerte.

Selección de respuestas en un examen *Determine el número de formas posibles de marcar su hoja de respuestas (dando una respuestas a cada pregunta) para cada uno de los exámenes siguientes.*

41. Un examen de falso-verdadero con seis preguntas.

42. Un examen de selección múltiple de 20 preguntas, cada una con cinco alternativas.

Selección de un calendario de clases *Tiffany Connolly está preparando su calendario de clases del próximo semestre, que debe incluir una clase de cada una de las cuatro categorías que se muestran aquí.*

Categoría	Opciones	Número de opciones
Inglés	Literatura medieval Redacción Poesía moderna	3
Matemáticas	Historia de las matemáticas Álgebra superior Matemáticas finitas	3
Ciencias de la computación	Introducción a las hojas de cálculo Procesamiento de palabras avanzado Programación en C Programación en BASIC	4
Sociología	Problemas sociales Sociología del Medio Oriente Envejecimiento en EU Minorías en EU Las mujeres en la cultura	5

En cada situación de los ejercicios 43 a 48, utilice la tabla anterior para determinar el número de conjuntos diferentes de clases que puede organizar Tiffany.

43. Todas las clases mostradas están disponibles

44. No puede tomar Poesía moderna ni Programación en C.

45. Todos los grupos de Minorías en Estados Unidos y Mujeres en la cultura estadounidense ya están llenos.

46. No cumple con los requisitos previos para Literatura medieval, Matemáticas finitas y Programación en C.

47. Se retiraron los fondos para tres de los cursos de computación y para dos de los cursos de sociología.

48. Debe terminar Redacción en inglés y Envejecimiento en Estados Unidos el próximo semestre para cumplir con los requisitos para poder graduarse.

49. ***Elegir la ropa*** En un viaje reciente, Jean llevó consigo dos pares de zapatos, cuatro pantalones y seis camisas. Suponiendo que todas las prendas son combinables, ¿de cuántas formas diferentes puede vestirse?

50. ***Elegir un equipo de música*** Un distribuidor de equipo musical tiene 10 guitarras diferentes, cuatro estuches para guitarra, seis amplificadores y tres procesadores de efectos; cada artículo es compatible con los demás y todos son adecuados para principiantes. ¿Cuántos equipos completos podría formar Lionel para iniciar su carrera musical?

51. ***Conteo de códigos postales*** El código postal de Tonya es 85726. ¿Cuántos códigos postales de cinco dígitos en total podrían formarse utilizando todos los dígitos del código postal de Tonya?

52. ***Lista de números telefónicos*** John Cross guarda los números telefónicos de sus siete mejores amigos (tres hombres y cuatro mujeres) en la memoria de su teléfono digital. ¿De cuántas maneras puede listarlos si...
(a) coloca a los hombres antes que a las mujeres?
(b) los hombres se listan todos juntos?
(c) ningún hombre está listado junto a otro?

Acomodo de asientos en un teatro *Aaron, Bobbette, Chuck, Deirdre, Ed y Fran han reservado seis asientos en una fila de un teatro, empezando en el asiento contiguo al pasillo. (Consulte el ejemplo 8 de esta sección.)*

53. ¿De cuántas formas pueden acomodarse? (*Una pista:* Divida la tarea en la serie de seis fases que se muestra a continuación, realizadas en orden.)
(a) Si *A* va a sentarse primero, ¿cuántos asientos están disponibles para él?
(b) Ahora, ¿cuántos asientos están disponibles para *B*?
(c) Ahora, ¿cuántos para *C*?
(d) Ahora, ¿cuántos para *D*?
(e) Ahora, ¿cuántos para *E*?
(f) Ahora, ¿cuántos para *F*?
Ahora multiplique las seis respuestas anteriores.

54. ¿De cuántas formas pueden acomodarse de modo que Aaron y Bobbette estén uno al lado de la otra?

1	2	3	4	5	6
X	X	_	_	_	_
_	X	X	_	_	_
_	_	X	X	_	_
_	_	_	X	X	_
_	_	_	_	X	X

Asientos disponibles *A* y *B*

(*Una pista:* Primero dé respuesta a la siguiente serie de preguntas, suponiendo que cada una de estas fases debe realizarse en orden.)

(a) ¿Cuántos pares de asientos contiguos pueden ocupar *A* y *B*?

(b) Ahora, dados los dos asientos *A* y *B*, ¿en cuántos órdenes pueden sentarse?

(c) Ahora, ¿cuántos asientos están disponibles para *C*?

(d) Ahora, ¿cuántos para *D*?

(e) Ahora, ¿cuántos para *E*?

(f) Ahora, ¿cuántos para *F*?

Ahora, multiplique los seis números de sus respuestas anteriores.

55. ¿De cuántas formas pueden acomodarse, si los hombres y las mujeres deben ocupar asientos alternos y en el asiento del pasillo debe sentarse un hombre? (*Una pista:* Primero responda la siguiente serie de preguntas.)

(a) ¿Cuántas personas pueden ocupar el primer asiento, a un lado del pasillo? (Debe ser un hombre.)

(b) Ahora, ¿cuántas personas pueden ocupar el segundo asiento, contando desde el pasillo? (Debe ser una mujer.)

(c) Ahora, ¿cuántas para el tercer asiento? (Debe ser uno de los hombres que quedan.)

(d) Ahora, ¿cuántas para el cuarto asiento? (Una mujer.)

(e) Ahora, ¿cuántas para el quinto asiento? (Un hombre.)

(f) Ahora, ¿cuántas para el sexto asiento? (Una mujer.)

Ahora, multiplique los seis números de sus respuestas anteriores.

56. ¿De cuántas formas pueden acomodarse, si los hombres y las mujeres deben alternarse, es decir, un hombre o una mujer en el asiento del pasillo? (*Una pista:* Primero responda la siguiente serie de preguntas.)

(a) ¿Cuántas opciones hay para la persona que está en el asiento del pasillo?

(b) Ahora, ¿cuántas hay para el segundo asiento? (Esta persona no puede ser del mismo sexo que la persona del pasillo.)

(c) Ahora, ¿cuántas opciones hay para el tercer asiento?

(d) Ahora, ¿cuántas para el cuarto asiento?

(e) Ahora, ¿cuántas para el quinto asiento?

(f) Ahora, ¿cuántas para el sexto asiento?

Ahora, multiplique los seis números de sus respuestas anteriores.

57. Intente resolver el ejemplo 4 considerando los dígitos en el orden siguiente: primero el primer dígito, luego el segundo, luego el tercero. Explique qué ocurre mal.

58. Intente resolver el ejemplo 4, considerando los dígitos en el orden siguiente: primero el tercero, luego el segundo, luego el primero. Explique qué ocurre mal.

59. Repita el ejemplo 4, pero esta vez permítase repetir dígitos. ¿Importa el orden en que se consideran los dígitos?

11.3 Uso de permutaciones y combinaciones

Anteriormente mostramos que las factoriales son una manera de contar el número de *arreglos* (u *ordenaciones*) de un determinado conjunto de objetos. Por ejemplo, los miembros del club

$$N = \{\text{Andy, Bill, Cathy, David, Evelyn}\}$$

pueden acomodarse en una fila para tomarse una fotografía en $5! = 120$ formas diferentes. Emplear una factorial por lo general resulta más eficaz que aplicar el principio fundamental de conteo. También nos hemos valido de métodos anteriores, como los diagramas de árbol y el principio fundamental de conteo, para responder preguntas como: ¿de cuántas formas puede elegir el club *N* a un presidente, un secretario y un tesorero, si nadie puede ocupar más de un cargo a la vez? Nuevamente, se trata de una cuestión de *ordenaciones* o *arreglos*. La diferencia es que, en cada caso, sólo se incluyen tres de los miembros, en lugar de los cinco. Una forma común de parafrasear la pregunta básica aquí es la siguiente: *¿de cuántas maneras se pueden acomodar cinco cosas si se toman de tres en tres?* La respuesta, según el principio fundamental de

conteo, es $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Los factores empiezan con 5 y continúan de manera descendente, como en un producto factorial, pero sin llegar a 1. (En este ejemplo, el producto se detiene cuando hay tres factores.) Generalizaremos ahora esta idea.

Permutaciones En el contexto de los problemas de conteo, a menudo a los arreglos se les conoce como **permutaciones**; el número de permutaciones de n objetos distintos tomados r a la vez se escribe como $P(n, r)$.* Puesto que el número de objetos que deben acomodarse no puede exceder al total disponible, para nuestros objetivos suponemos que $r \leq n$. Al aplicar el principio fundamental de conteo para arreglos de este tipo, obtenemos

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)].$$

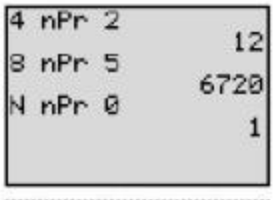
Al simplificar el último factor se obtiene la fórmula siguiente.

Fórmula para las permutaciones

El número de **permutaciones**, o *arreglos*, de n objetos distintos tomados en grupos de r a la vez, donde $r \leq n$, está dado por

$$\boldsymbol{P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).}$$

Los factores de este producto empiezan en n y van en orden descendente hasta que el número total de factores es r. Ahora, vemos que el número de formas en las que el club N puede elegir a un presidente, un secretario y un tesorero puede denotarse por $P(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.



Los resultados del ejemplo 1(a) y (b) se confirman aquí. Para cualquier valor entero no negativo de N, $P(N, 0) = 1$. Vea la última línea que aparece en la pantalla.

EJEMPLO 1 Evalúe cada permutación

(a) $P(4,2) = 4 \cdot 3 = 12$ Empieza en 4 y contiene dos factores.

(b) $P(8,5) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ Empieza en 8 y usa cinco factores.

(c) $P(5,5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Empieza en 5 usa cinco factores. ■

Observe que $P(5, 5)$ es igual a 5!. Para todos los números enteros no negativos, $P(n, n) = n!$ es verdadero. (Éste es el número de posibles arreglos de n objetos distintos tomados todos a la vez.)

En general, las permutaciones también pueden relacionarse con las factoriales de la manera siguiente.

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \qquad \text{Fórmula para las permutaciones}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 2\cdot 1}$$

Multiplique y divida entre $(n-r)(n-r-1)\ldots 2\cdot 1$.

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \text{Definición de factorial}$$

Esto nos da una fórmula para calcular permutaciones en términos de factoriales.

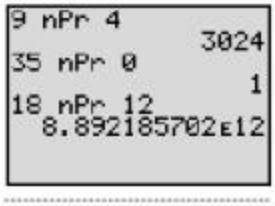
*Otras notaciones alternas son ${}_nP_r$ y P_r^n.

Fórmula factorial para las permutaciones

El número de **permutaciones**, o *arreglos*, de n objetos distintos tomados en grupos de r a la vez, donde $r \leq n$, puede calcularse como

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Si n y r son números muy grandes, contar con una calculadora que tenga la tecla para factoriales y esta fórmula pueden ahorrar mucho trabajo cuando se determinan permutaciones. Vea la nota al margen.



Esta pantalla confirma los resultados del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Utilice la fórmula factorial para las permutaciones para evaluar cada expresión.

(a) $P(9,4) = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = 3024$

(b) $P(35,0) = \dfrac{35!}{(35-0)!} = \dfrac{35!}{35!} = 1$

(c) $P(18,12) = \dfrac{18!}{(18-12)!} = \dfrac{18!}{6!} = 8{,}892{,}185{,}702{,}400$

Con respecto a la parte (c), la mayoría de las calculadoras no puede mostrar todos estos dígitos, así que usted quizá obtenga una respuesta como 8.8921857×10^{12}. ■

Solución de problemas

Las permutaciones pueden utilizarse para cualquier problema en que necesitemos saber el número de arreglos de tamaño r que pueden seleccionarse de un conjunto de tamaño n. La palabra *arreglo* o *disposición* implica un ordenamiento, de modo que usamos las permutaciones sólo en los casos donde el orden de los elementos es importante. Hagamos un resumen con los siguientes principios.

Guía para saber cuándo utilizar las permutaciones

Las permutaciones sólo se aplican cuando

1. no se permiten las repeticiones, y
2. el orden es importante.

EJEMPLO 3 ¿Cuántos números de tres dígitos que no se repiten pueden escribirse con los dígitos del conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

No se permiten las repeticiones, pues los números deben tener todos sus dígitos diferentes (por ejemplo, 448 no es aceptable). Además, el orden es importante (por ejemplo, 476 y 746 son casos *distintos*). Así, utilizamos las permutaciones:

$$P(6,3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$ ■



El cambio de tañidos, la forma de tañer las campanas de iglesia, en Inglaterra, constituye una combinación de matemáticas y música. Primero, las campanas se tañen conforme a la secuencia 1, 2, 3 . . . Luego, la secuencia se permuta (se "cambia"). Con seis campanas pueden hacerse 720 "cambios" diferentes (distintas permutaciones de tono): $P(6, 6) = 6!$.

Los compositores elaboran los cambios de manera que se produzcan secuencias musicalmente interesantes y armoniosas en forma regular.

Las campanas de una iglesia se mueven por medio de cuerdas atadas a las ruedas a las que están unidas. Cada tañedor hace sonar una campana, escuchando con gran atención y observando puntualmente a sus compañeros. Si uno de los tañedores pierde el compás y no recupera el tiempo, no podrá mantenerse el ritmo del tañido, y todos los tañedores tendrán que parar.

El tañedor puede tardar varias semanas simplemente en aprender a mantener la campana en movimiento, y meses en aprender a tañerla justo en el momento preciso. Un error de 1/4 de segundo significa que dos campanas sonarán al mismo tiempo. Incluso es posible percibir el sonido desafinado a causa de un error de 1/10 de segundo.

El ejemplo siguiente implica varias fases, y por tanto es adecuado para aplicar el principio fundamental de conteo, pero cada una de sus fases puede manejarse con permutaciones.

EJEMPLO 4 Suponga que ciertos números de cuenta constan de dos letras seguidas por cuatro dígitos y luego tres letras más, en los cuales no se permite que una letra o dígito se repita *dentro* de cada uno de los tres grupos, pero el último grupo de letras puede contener una o las dos que se usaron en el primer grupo. ¿Cuántos de dichos números de cuenta son posibles?

La tarea de idear tales números consiste de tres fases.

1. Determinar el primer conjunto de dos letras.
2. Determinar el conjunto de cuatro dígitos.
3. Determinar el conjunto final de tres letras.

Cada fase requiere un arreglo sin repeticiones, lo cual es una permutación. Aplique el principio fundamental de conteo y multiplique los resultados de las tres partes.

$$P(26,2) \cdot P(10,4) \cdot P(26,3) = \underbrace{26 \cdot 25}_{\text{Parte 1}} \cdot \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}_{\text{Parte 2}} \cdot \underbrace{26 \cdot 25 \cdot 24}_{\text{Parte 3}}$$
$$= 650 \cdot 5040 \cdot 15{,}600$$
$$= 51{,}105{,}600{,}000$$

■

Combinaciones Hemos presentado las permutaciones, que permiten evaluar el número de arreglos de n objetos tomados en grupos de r a la vez, en los cuales no se permiten las repeticiones. El orden de los elementos era importante. Recuerde que el club $N = \{\text{Andy, Bill, Cathy, David, Evelyn}\}$ podía elegir a tres directivos de $P(5, 3) = 60$ formas diferentes. Por otro lado, con comités de tres miembros el orden no es importante. Los comités B, D, E y E, B, D no son diferentes. El número posible de comités no es igual al número de arreglos de tamaño 3, sino que es, en realidad el número de *subconjuntos* de tamaño 3 (ya que el orden de los elementos en un conjunto carece de importancia).

Los subconjuntos en este nuevo contexto se denominan **combinaciones**. El número de combinaciones de n objetos tomados en grupos de r a la vez (esto es, el número de subconjuntos de tamaño r, dado un conjunto de tamaño n) se escribe $C(n, r)$.*

Los comités (subconjuntos) de tamaño 3 del club (conjunto) $N = \{A, B, C, D, E\}$ son:

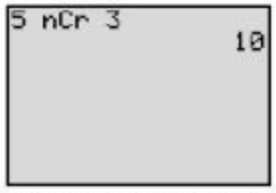
$$\{A,B,C\},\ \{A,B,D\},\ \{A,B,E\},\ \{A,C,D\},\ \{A,C,E\},$$
$$\{A,D,E\},\ \{B,C,D\},\ \{B,C,E\},\ \{B,D,E\},\ \{C,D,E\}.$$

Hay 10 subconjuntos de 3, de modo que el número posible de comités de tres miembros es 10. Como ocurre con las permutaciones, no se permiten las repeticiones. Por ejemplo, $\{E, E, B\}$ no es un subconjunto válido de tres elementos, así como EEB no es un arreglo válido de tres miembros.

Para ver cómo encontrar el número de tales subconjuntos sin listarlos todos, observe que cada subconjunto (combinación) de tamaño 3 da origen a seis arreglos (permutaciones) de tamaño 3. Por ejemplo, con la combinación ADE se obtienen las seis permutaciones siguientes:

$$A,D,E \qquad D,A,E \qquad E,A,D \qquad A,E,D \qquad D,E,A \qquad E,D,A.$$

*Otras notaciones son ${}_nC_r$, C_r^n y $\binom{n}{r}$.



Las calculadoras pueden realizar operaciones que incluyan combinaciones de n objetos tomados en grupos de r a la vez. Compare lo que aparece aquí con el resultado en el texto.

Así, hay seis veces más permutaciones de tamaño 3 que combinaciones de tamaño 3, o en otras palabras, un sexto de combinaciones que de permutaciones. Por lo tanto,

$$C(5,3) = \frac{P(5,3)}{6} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10.$$

El 6 aparece en el denominador porque existen seis formas diferentes de acomodar un conjunto de tres objetos (puesto que $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$). Haciendo una generalización a partir de este ejemplo, r objetos pueden acomodarse de $r!$ formas diferentes, con lo que obtenemos la fórmula siguiente.

Fórmula para las combinaciones

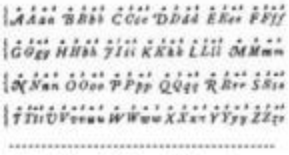
El número de **combinaciones** o *subconjuntos*, de n objetos distintos tomados en grupos de r a la vez, donde $r \leq n$, está dado por

$$\boldsymbol{C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots 2 \cdot 1}.}$$

Combinando esta fórmula con la fórmula factorial para las permutaciones, obtenemos una forma de evaluar también las combinaciones sólo en términos de factoriales.

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$





El **"código bilateral"** fue inventado por Francis Bacon a principios del siglo XVII para codificar secretos de Estado. Este código binario, a y b en combinaciones de cinco, tiene 32 permutaciones. El "alfabeto biformado" de Bacon (las cuatro filas inferiores) utiliza dos tipos de fuentes para ocultar el mensaje de un texto. El decodificador descifra una cadena de letras a y b, agrupándolas de cinco en cinco, y luego descifra las letras y las palabras. El código fue aplicado a las obras de Shakespeare en un esfuerzo por demostrar que Bacon era el autor legítimo de las obras de aquél.

Fórmula factorial para las combinaciones

El número de **combinaciones**, *o subconjuntos*, de n objetos distintos tomados en grupos de r a la vez, donde $r \leq n$, puede calcularse como

$$\boldsymbol{C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.}$$

EJEMPLO 5 Utilice la fórmula factorial para las combinaciones para evaluar cada expresión.

(a) $C(8,6) = \dfrac{8!}{6!\,2!} = \dfrac{40{,}320}{720 \cdot 2} = 28$ **(b)** $C(22,15) = \dfrac{22!}{15!\,7!} = 170{,}544$ ■

Solución de problemas

Los principios siguientes subrayan que las combinaciones comparten una importante propiedad con las permutaciones (que no se permiten las repeticiones), pero que hay una diferencia importante entre ambas (que el orden *no* importa en el caso de las combinaciones). Es esencial tomar esto en cuenta al momento de resolver problemas.

Guía para saber cuándo utilizar las combinaciones

Las combinaciones se aplican solamente cuando

1. no se permiten las repeticiones, y
2. el orden *no* es importante.

EJEMPLO 6 Encuentre el número de subconjuntos diferentes de tamaño 2 en el conjunto $\{a, b, c, d\}$. Haga una lista con ellos para verificar su respuesta.

Un subconjunto de tamaño 2 debe tener dos elementos distintos, de modo que no se permiten las repeticiones. Y, como no afecta el orden en que se listen los elementos del conjunto, vemos que el orden no es importante. Utilice la fórmula de las combinaciones, donde $n = 4$ y $r = 2$.

$$C(4,2) = \frac{P(4,2)}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

o, de manera alterna, $$C(4,2) = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

Los seis subconjuntos de tamaño 2 son $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$. ■



El conjunto de 52 cartas en la baraja estándar tiene cuatro palos.

♠ espadas ♦ diamantes
♥ corazones ♣ tréboles

El as es el uno; la sota, la reina y el rey son "cartas de figura". Cada palo contiene 13 denominaciones: as, 2, 3, . . . , 10, sota, reina, rey. (En algunos juegos, el as vale más que el rey, en lugar de contar como 1.)

EJEMPLO 7 Una forma común del póquer comprende manos (conjuntos) de cinco cartas cada una, que se sacan de una baraja estándar la cual consta de 52 cartas (como se ilustra en el margen). ¿Cuántas manos diferentes de cinco cartas se pueden formar?

Una mano de cinco cartas debe tener cinco cartas distintas, de modo que no se permiten las repeticiones. Además, el orden no es importante, ya que una mano dada depende sólo de las cartas que contiene, no del orden en que fueron sacadas o el orden en que se coloquen. Como el orden no importa, use las combinaciones (y una calculadora).

$$C(52,5) = \frac{P(52,5)}{5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}598{,}960$$

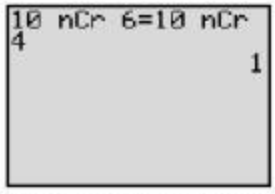
o $$C(52,5) = \frac{52!}{5!\,(52-5)!} = \frac{52!}{5!\,47!} = 2{,}598{,}960\,.$$ ■

EJEMPLO 8 Melvin quiere comprar 10 libros diferentes pero sólo tiene dinero para cuatro. ¿De cuántas maneras puede hacer su selección?

Los cuatro libros elegidos deben ser distintos (no se permiten las repeticiones), y además el orden no es importante en este caso, de modo que usamos las combinaciones:

$$C(10,4) = \frac{P(10,4)}{4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ maneras.}$$

o $$C(10,4) = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210 \text{ maneras.}$$ ■



El "1" indica que el enunciado

$C(10, 6) = C(10, 4)$

es verdadero.

Observe que, de acuerdo con nuestra fórmula para las combinaciones,

$$C(10,6) = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10!}{6!\,4!} = 210,$$

que equivale a $C(10, 4)$. De hecho, el ejercicio 58 exige demostrar el hecho de que, en general, para todos los números enteros no negativos n y r, donde $r \leq n$,

$$C(n,r) = C(n,n-r).$$

También vea la nota al margen. Indica que $C(10, 6)$ es igual a $C(10, 4)$.

EJEMPLO 9 ¿Cuántos comités de tres miembros podría designar el club N de modo que en cada comité haya exactamente una mujer?

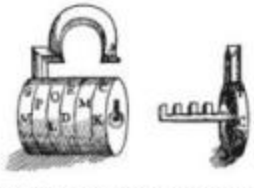
Recuerde que $N =$ {Andy, Bill, Cathy, David, Evelyn}. Dos miembros son mujeres, tres son hombres. Aunque la pregunta sólo aludió a que el comité debe incluir exactamente a una mujer, para completarlo también se deben seleccionar dos hombres. Por lo tanto, la tarea de elegir a los miembros del comité consiste en dos fases:

1. Seleccionar a una mujer.
2. Seleccionar a dos hombres.

Una mujer puede elegirse de $C(2, 1) = 2/1 = 2$ formas distintas, mientras que los dos hombres se eligen de $C(3, 2) = (3 \cdot 2)/(2 \cdot 1) = 3$ formas distintas. Si aplicamos el principio fundamental de conteo obtenemos $2 \cdot 3 = 6$ comités diferentes. Este número es lo suficientemente pequeño como para verificarlo por medio de una lista de posibilidades:

$$\{C,A,B\}, \{C,A,D\}, \{C,B,D\}, \{E,A,B\}, \{E,A,D\}, \{E,B,D\}. \quad \blacksquare$$





La ilustración anterior pertenece a ***Logística***, un texto que data de la década de 1560, obra del matemático J. Buteo. Entre otros temas, el libro analiza el número de posibles tiros de cuatro dados y el número de arreglos de los cilindros de una cerradura de combinación. Observe que la palabra "combinación" es un nombre inadecuado en el caso de estas cerraduras, ya que se permiten repeticiones, y además el orden sí establece una diferencia.

EJEMPLO 10 Todos los miembros de la fraternidad Alfa Beta Gamma desean ir a un evento especial este fin de semana, pero sólo a 10 de ellos se les permitirá asistir. ¿De cuántas maneras podrían elegirse los 10 afortunados si hay un total de 48 miembros?

En este caso, se requieren 10 distintos hombres (no se permiten las repeticiones) y el orden de la selección no importa, por lo que utilizamos las combinaciones. Evaluamos con una calculadora.

$$C(48,10) = \frac{48!}{10!\,38!} = 6{,}540{,}715{,}896 \quad \blacksquare$$

Solución de problemas

Muchos problemas de conteo implican elegir algunos elementos de un conjunto dado. Las condiciones particulares de cada problema determinan qué técnica específica debemos utilizar. Las siguientes guías pueden resultar de ayuda.

Pautas para seleccionar un método de conteo

1. Si los elementos seleccionados se pueden repetir, utilice el principio fundamental de conteo.
   Ejemplo: ¿Cuántos números de cuatro dígitos existen?
   $$9 \cdot 10^3 = 9000$$
2. Si los elementos seleccionados no pueden repetirse, y el orden es importante, utilice las permutaciones.
   Ejemplo: ¿De cuántas formas se pueden formar en la fila de una taquilla tres de ocho personas?
   $$P(8,3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$
3. Si los elementos seleccionados no pueden repetirse, y el orden no es importante, utilice las combinaciones.
   Ejemplo: ¿De cuántas formas se puede elegir un comité de tres miembros en un grupo formado por 12 personas?
   $$C(12,3) = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

Tanto las permutaciones como las combinaciones permiten conocer el número de formas en que se pueden seleccionar r elementos de entre n elementos, cuando no se permiten las repeticiones. Las permutaciones se aplican a arreglos (el orden es importante), mientras que las combinaciones se aplican a subconjuntos (el orden no es importante). Estas semejanzas y diferencias, así como sus fórmulas correspondientes, se resumen en la tabla siguiente.

Permutaciones	**Combinaciones**
Número de maneras de seleccionar r elementos de entre n elementos	
No se permiten las repeticiones.	
El orden es importante	El orden no es importante
Arreglos de n elementos tomados r a la vez	Subconjuntos de n elementos tomados r a la vez
$P(n,r)$ $= n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ $= \frac{n!}{(n-r)!}$	$C(n,r)$ $= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots 2 \cdot 1}$ $= \frac{n!}{r!(n-r)!}$
Palabras clave: arreglo, programación, orden	Palabras clave: conjunto, grupo, muestra, selección

Cualquier problema resuelto con permutaciones (o con factoriales, como en la sección anterior) también puede resolverse con el principio fundamental de conteo. De hecho, tanto factoriales como permutaciones son formas sencillas de caracterizar ciertos patrones de productos que surgen de la aplicación del principio fundamental de conteo. Además, las combinaciones son en realidad tan sólo permutaciones modificadas para los casos en los que el orden no es importante.

La mayoría de los ejercicios, si no es que todos, en esta sección requerirán permutaciones y/o combinaciones. Y en el caso de tareas con varias fases, también puede necesitarse el principio fundamental de conteo.

PARA REFLEXIONAR

Manos de póquer

En el póquer de 5 cartas, que se juega con un mazo de 52 cartas estándar, es posible formar 2,598,960 manos diferentes. (Vea el ejemplo 7.) El valor de cada mano depende de la probabilidad de que aparezca, la cual, a su vez, depende del número de maneras diferentes en que puede aparecer, como se muestra en la tabla 4.

TABLA 4 Categorías de las manos en el póquer de 5 cartas

Evento *E*	Descripción del evento *E*	Número de resultados favorables de *E*
Escalera real	As, rey, reina, sota y 10, todas del mismo palo.	4
Escalera de color	5 cartas de denominaciones consecutivas, todas del mismo palo (excluyendo la escalera real).	36
Póquer	4 cartas de la misma denominación, más una carta adicional.	624
Full	3 cartas de una denominación, más 2 cartas de una segunda denominación.	3744
Flor (color)	Cualesquiera 5 cartas, todas del mismo palo (excepto escalera real y escalera de color).	5108
Escalera	5 cartas de denominaciones consecutivas (no todas del mismo palo).	10,200
Trío (tercia)	3 cartas de una denominación, más 2 cartas de dos denominaciones adicionales.	54,912
Dos pares	2 cartas de una denominación, más 2 cartas de una segunda denominación, más 1 carta de una tercera denominación.	123,552
Un par	2 cartas de una denominación, más 3 cartas adicionales de tres diferentes denominaciones.	1,098,240
Ningún par	Ningún par de cartas de la misma denominación (y de diferente palo).	1,302,540
Total		2,598,960

Para análisis en grupo

Como se muestra en la tabla, sacar un *full* es un evento relativamente raro. (Sólo el póquer, la escalera de color y la escalera real son menos probables.) Para verificar que hay 3744 diferentes posibles manos de *full*, realice los pasos siguientes.

1. Explique por qué hay $C(4, 3)$ diferentes maneras de seleccionar tres ases del mazo.
2. Explique por qué hay $C(4, 2)$ diferentes maneras de seleccionar dos ochos del mazo.
3. Si "ases y ochos" (tres ases y dos ochos) es una de las maneras de formar un *full*, muestre que existen en total $P(13, 2)$ diferentes clases de *full*.
4. Multiplique las expresiones de los pasos 1, 2 y 3. Explique por qué este producto daría el número total de posibles manos de *full*.

11.3 EJERCICIOS

Evalúe cada una de las expresiones siguientes.

1. $P(6,4)$ **2.** $P(12,2)$

3. $C(15,3)$ **4.** $C(13,6)$

Determine el número de permutaciones (arreglos) en cada uno de los siguientes ejercicios.

5. 21 objetos tomados en grupos de 4 a la vez.

6. 14 objetos tomados en grupos de 5 a la vez.

Determine el número de combinaciones (subconjuntos) de cada uno de los siguientes ejercicios.

7. 10 objetos tomados en grupos de 5 a la vez.

8. 13 objetos tomados en grupos de 4 a la vez.

Utilice una calculadora para evaluar cada una de estas expresiones.

9. $P(25,8)$ **10.** $C(36,14)$

11. ¿Es posible evaluar $P(6, 10)$? Explique su respuesta.

12. ¿Es posible evaluar $C(9, 12)$? Explique su respuesta.

13. Explique en qué difieren las permutaciones y las combinaciones.

14. Explique cómo están relacionados los factoriales con las permutaciones.

15. Determine si cada elemento siguiente es una permutación o una combinación.

(a) Un número telefónico.
(b) Un número del seguro social.
(c) Una mano de póquer.
(d) Un comité político.
(e) La "combinación" de un candado de combinación.
(f) La elección de seis números de la lotería, en donde el orden no importa.
(g) Un número de licencia de conducir.

Los ejercicios 16 a 23 pueden resolverse con permutaciones, aunque la forma de enunciar los problemas no siempre incluya las palabras "permutación", "arreglo" u "ordenación" ni ningún sinónimo de ellas.

16. ***Lugares en una carrera*** ¿De cuántas formas posibles pueden presentarse el primero, segundo y tercer lugares en una carrera en que compiten seis corredores?

17. ***Ubicación de los nuevos modelos de casas*** Jeff Hubbard, un contratista, construye casas de ocho modelos diferentes y actualmente tiene cinco lotes para construirlas. ¿De cuántas formas distintas puede situar las casas en estos lotes? Suponga que se construirán cinco modelos diferentes.

18. ***Números de identificación en cajeros automáticos*** El cajero automático requiere de un número de identificación personal (NIP) de cuatro dígitos, que pueden ser del 0 al 9. (El primer dígito puede ser 0.) ¿Cuántos NIP no tienen dígitos repetidos?



19. ***Elección de directivos de un club*** ¿De cuántas maneras se puede determinar quién será presidente y quién vicepresidente en un club con 12 miembros?

20. ***Conteo de los ganadores de premios*** El primero, segundo y tercer lugares se otorgarán a tres personas diferentes. Si hay 10 personas elegibles, ¿cuántos resultados posibles existen?

21. ***Conteo de ganadores de premios*** ¿De cuántas formas una maestra puede dar cinco premios distintos a cinco de sus 25 alumnos?

22. ***Programación de visitas de un equipo de seguridad*** Un equipo de seguridad visita 12 oficinas cada noche. ¿De cuántas formas diferentes puede el equipo ordenar sus visitas?

23. ***Suma de dígitos*** ¿Cuántos números naturales tienen cuatro dígitos distintos y diferentes de 0 tales que la suma de los cuatro dígitos sea
(a) 10?
(b) 11?

Los ejercicios 24 a 31 pueden resolverse mediante combinaciones, aunque la forma de enunciar los problemas no siempre incluya las palabras "combinación" o "subconjuntos", ni ningún sinónimo de ellas.

24. ***Muestreo de reproductores de CD*** ¿De cuántas formas puede una muestra de cinco reproductores de CD seleccionarse de un cargamento de 24 reproductores?

25. ***Detección de reproductores defectuosos de CD*** Si el cargamento del ejercicio 24 contiene seis reproductores defectuosos, ¿cuántas de las muestras de cinco reproductores no incluirán reproductores defectuosos?

26. ***Comités de senadores de Estados Unidos*** ¿Cuántos comités diferentes de cinco miembros podrían formarse con los 100 senadores de Estados Unidos?

27. ***Selección de manos de cartas*** Remítase al mazo estándar de 52 cartas descrita en el texto. Tenga en

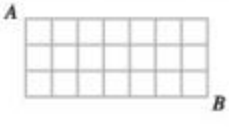
cuenta que el mazo contiene cuatro ases, 12 cartas de figuras, 13 corazones (todos rojos), 13 diamantes (todos rojos), 13 espadas (todas negras) y 13 tréboles (todos negros). De las 2,598,960 distintas manos posibles de cinco cartas, determine cuántas consistirán de las cartas siguientes.

(a) Todas diamantes.
(b) Todas cartas negras.
(c) Todas ases.

28. ***Selección de números de una lotería*** En una lotería conocida como 7/39, usted selecciona siete números distintos del conjunto formado por los números del 1 al 39, cuyo orden no importa. ¿De cuántas formas diferentes puede hacer su selección?

29. ***Ubicación de los nuevos modelos de casas*** Jeff Hubbard (el contratista) va a construir seis casas en una manzana de un nuevo barrio. Los gastos generales lo han forzado a limitar su línea a sólo dos modelos: normal y de lujo. (Todas las casas del modelo normal son iguales entre sí, y todas las casas de lujo lo son entre sí.)
   (a) Si decide construir tres modelos normales y tres de lujo, ¿cuántas opciones diferentes tiene Jeff de situar las seis casas?
   (b) Si Jeff construye sólo dos de lujo y cuatro normales, ¿cuántas posiciones diferentes puede utilizar?

30. ***Número de rutas de un punto a otro punto*** ¿Cuántos caminos son posibles para ir de *A* a *B*, si todos los movimientos deben ser a la derecha o hacia abajo? (*Una pista:* Se requieren 10 pasos de una unidad para llegar de *A* a *B*, y tres de ellos deben ser hacia abajo.)



31. ***Elección de un monograma*** Judy Zahrndt quiere ponerle nombre a su bebé, de modo que su monograma (las iniciales de su nombre y de sus apellidos paterno y materno) sean letras distintas en orden alfabético. ¿Cuántos monogramas diferentes puede elegir?

Para los ejercicios 32 a 56, podría utilizar permutaciones, combinaciones, el principio fundamental de conteo u otros métodos de conteo que considere adecuados. (Algunos de los problemas pueden requerir más de un método.)

32. ***Selección de los números de la lotería*** En SuperLotto Plus, un juego de lotería estatal de California, la persona selecciona cinco números distintos del 1 al 47, y un número MEGA del 1 al 27, con la esperanza de que su selección coincida con una lista aleatoria elegida por los directivos de la lotería.
   (a) ¿Cuántas conjuntos diferentes de seis números puede seleccionar?
   (b) Eileen Burke siempre incluye su edad y la de su esposo como dos de los primeros cinco números en su selección de SuperLotto Plus. ¿De cuántas maneras puede completar su lista de seis números?

33. ***Extracción de cartas*** ¿Cuántas cartas deben sacarse (sin reemplazar ninguna) de una baraja estándar de 52 cartas, para garantizar que al menos dos de ellas sean del mismo palo?

34. ***Manos de color en el póquer*** ¿Cuántas manos diferentes de cinco cartas pueden contener sólo cartas de un mismo palo?

35. ***Números de identificación en una investigación*** Los números de identificación de cierto proyecto de investigación científica constan de tres letras seguidas de tres dígitos y luego tres letras más. Suponga que no se permite repetir elementos dentro de cualquiera de los tres grupos, pero las letras del primer grupo pueden aparecer en el último grupo. ¿Cuántos números de identificación son posibles?

36. ***Letras de denominación de estaciones de radio*** Las estaciones de radio de Estados Unidos tienen denominaciones de letras que inician con K o con W (para el oeste o el este del río Mississippi, respectivamente). Algunas tienen nombres de tres letras como WBZ en Boston, WLS en Chicago y KGO en San Francisco. Suponiendo que no se pueden repetir las letras, ¿cuántos conjuntos de denominaciones con tres letras son posibles?

37. ***Letras de denominación de estaciones de radio*** La mayoría de las estaciones que obtuvieron su permiso después de 1927 tiene una denominación de cuatro letras que empieza con K o W, como WXYZ en Detroit o KRLD en Dallas. Suponiendo que no se pueden repetir las letras, ¿cuántos conjuntos de cuatro letras son posibles?

38. ***Programación de juegos en una liga de baloncesto*** El programa de una liga de ocho equipos de baloncesto se hizo de tal manera que cada equipo juegue tres partidos con cada uno de los equipos restantes. ¿Cuántos juegos se jugarán en total?

39. ***Programación del orden de bateo en béisbol*** Los Coyotes, un equipo de una liga juvenil de béisbol, tiene siete jugadores que sólo lanzan y 12 jugadores más que pueden jugar en cualquier posición, excepto la de lanzador. Para el juego del sábado, el entrenador aún no ha determinado cuáles serán los nueve jugadores que utilizará ni qué orden de bateo tendrán, excepto que el lanzador bateará al final. ¿Cuántos órdenes de bateo diferentes puede haber?

40. ***Órdenes de presentación en un recital musical*** Una clase de música formada por ocho mujeres y siete hombres va a dar un recital. Si cada miembro se presenta una vez, ¿de cuántas formas se puede ordenar el programa en cada uno de los casos siguientes?

(a) Todas las mujeres se presentan primero.
(b) Una mujer debe presentarse primero y un hombre debe presentarse al final.
(c) Elisa y Doug se presentarán al principio y al final, respectivamente.
(d) Todo el programa estará alternado entre los dos sexos.
(e) Los intérpretes primero, octavo y decimoquinto deben ser mujeres.

41. ***Programación de lecturas diarias*** Carole inicia cada día con la lectura de uno de siete libros de superación personal. ¿De cuántas maneras puede seleccionar los libros para una semana, si la selección se hace
(a) con reemplazo?
(b) sin reemplazo?

42. ***Conteo de manos de cartas*** ¿Cuántas manos de cinco cartas son posibles con un mazo de 52 cartas, si la mano consiste en
(a) cuatro tréboles y una carta que no sea trébol?
(b) dos cartas de figura y tres cartas que no sean de figura?
(c) dos cartas rojas, dos tréboles y una espada?

43. ***División de personas en grupos*** ¿De cuántas formas podrían dividirse 25 personas en cinco grupos que tengan, respectivamente, tres, cuatro, cinco, seis y siete personas?

44. ***Puntos y rectas en un plano*** Si cualesquiera dos puntos determinan una recta, ¿cuántas rectas están determinadas por siete puntos en un plano, en donde no hay tres que sean colineales?

45. ***Puntos y triángulos en un plano*** ¿Cuántos triángulos pueden determinarse por 20 puntos en un plano, de los cuales no haya tres que sean colineales?

46. ***Conteo de posibilidades en un candado de combinación*** ¿Cuántas diferentes "combinaciones" de tres números son posibles en un candado de combinación que tiene 40 números en su perilla? (*Una pista*: Llamarlos "de combinación" es un forma engañosa de designar a estos candados, ya que se permiten las repeticiones y además el orden también importa.)



47. ***Selección de conductores y pasajeros en un viaje*** Michael Grant, su esposa e hijo y otros cuatro amigos conducen hacia la costa en dos vehículos.
(a) Si las siete personas pueden conducir, ¿de cuántas maneras pueden elegirse los conductores? (A cualquiera le gustaría conducir el automóvil deportivo, así que es importante a qué conductor le corresponde cada automóvil.)
(b) Si el automóvil deportivo sólo lo pueden conducir Michael, su esposa o su hijo, entonces, ¿de cuántas maneras pueden determinarse los conductores?
(c) Si el automóvil deportivo sólo tiene espacio para dos personas y no hay ninguna otra restricción, ¿de cuántas formas pueden asignarse ambos conductores y los pasajeros en ambos automóviles?

48. ***Ganando "el doble" en una carrera de caballos*** En la pista de carreras, usted gana "el doble" comprando un boleto y seleccionando los ganadores de dos carreras específicas. Si seis y ocho caballos corren en la primera y segunda carreras, respectivamente, ¿cuántos boletos debe comprar para garantizas una elección ganadora?

49. ***Cómo ganar la "trifecta" en carreras de caballos*** Muchos hipódromos ofrecen una carrera "trifecta". Para ganar, hay que elegir de manera correcta el primero, segundo y tercer lugares. Si entran ocho caballos en la carrera, ¿cuántos boletos debe comprar para garantizar que uno de ellos será la trifecta ganadora?

50. ***Selección de miembros de un comité*** Nueve personas se distribuirán en tres comités de dos, tres y cuatro miembros, y para cada comité se seleccionará un presidente. ¿De cuántas maneras se puede realizar? (*Sugerencia:* Divida la tarea en la siguiente secuencia de fases.)
(a) Seleccione los miembros del comité de dos personas.
(b) Seleccione los miembros del comité de tres personas.
(c) Seleccione al presidente del comité de dos personas.
(d) Seleccione al presidente del comité de tres personas.
(e) Seleccione al presidente del comité de cuatro personas.

51. ***Ubicación de los nuevos modelos de casas*** Debido a su buen desempeño, Jeff Hubbard obtiene un contrato para construir casas en tres manzanas más en el barrio, cada una con espacio para seis casas. Decide construir nueve casas de lujo en estas tres manzanas: dos en la primera, tres en la segunda y cuatro en la tercera manzana. Las restantes nueve casas serán normales.
(a) En total, en las tres manzanas adicionales, ¿cuántas opciones tiene Jeff para ubicar las 18 casas? (*Sugerencia:* Considere las tres manzanas de forma separada y utilice el principio fundamental de conteo.)
(b) ¿Cuántas opciones tendría si construyera los dos, tres y cuatro modelos de lujo en las tres manzanas, como antes, pero no necesariamente dos en la primera manzana, tres en la segunda y cuatro en la tercera?

52. ***Creación de números a partir de conjuntos de dígitos***
(a) ¿Cuántos números naturales de seis dígitos pueden formarse usando los seis dígitos 4, 5, 6, 7, 8 y 9?

(b) Suponga que todos estos números fueron acomodados en orden creciente: 456,789; 456,798, y así sucesivamente. ¿Cuál número estaría en el lugar 364 de la lista?

53. ***Acomodo en una recepción de boda*** En la recepción de una boda, la novia y el novio, la dama de honor y el padrino, dos damas de honor y dos ujieres forman una fila de recepción. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse en cada uno de los casos siguientes?

(a) En cualquier orden.

(b) El novio y la novia deben ser los últimos dos de la fila.

(c) El novio debe ser el último con la novia junto a él.

54. ***Asignación de calificaciones de un estudiante*** Un profesor enseña a un grupo de 60 estudiantes y a otro de 40. Cinco por ciento de los estudiantes en cada grupo recibirán una calificación de A. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir estas?

55. ***Suma de dígitos*** ¿Cuántos números naturales de cuatro dígitos distintos y diferentes de 0 hay, tales que la suma de los cuatro dígitos sea

(a) 12? **(b)** 13?

56. ***Selección de los procesadores para computadoras*** Una compañía de cómputo debe seleccionar 30 procesadores para un envío, y para ello debe probar una muestra aleatoria de cinco de ellos. ¿Cuántas muestras diferentes son posibles?

57. Verifique que

$$C(12, 9) = C(12, 3).$$

58. Utilice la fórmula factorial para combinaciones con el fin de demostrar que, en general,

$$C(n, r) = C(n, n - r).$$

59. **(a)** Utilice la fórmula factorial para permutaciones y evalúe, para cualquier entero no negativo n, $P(n, 0)$.

(b) Explique el resultado de la parte (a).

60. **(a)** Utilice la fórmula factorial para combinaciones y la definición de 0! para evaluar, para cualquier entero no negativo n, $C(n, 0)$.

(b) Explique el significado del resultado de la parte (a).

11.4 Uso del triángulo de Pascal y del teorema del binomio

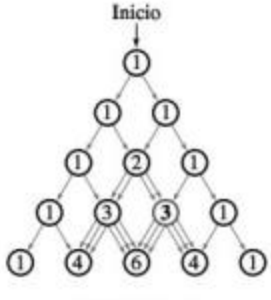


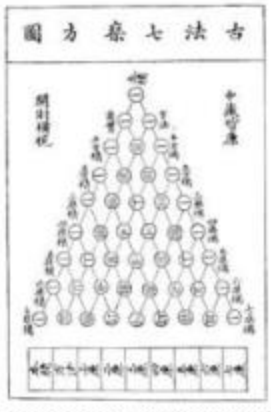
FIGURA 7

Triángulo de Pascal La matriz triangular de la figura 7 representa lo que solemos llamar "caminatas aleatorias", que empiezan en INICIO y se dirigen hacia abajo, de acuerdo con la regla siguiente. En cada círculo (o bifurcación), se lanza una moneda. Si cae cara (h), bajamos hacia la izquierda. Si cae cruz (t), bajamos a la derecha. En cada punto, existe la misma probabilidad de ir a la izquierda o a la derecha. En cada círculo hemos registrado el número de rutas diferentes que podrían llevarnos a ese punto. Por ejemplo, llegar hasta el 3 en negritas pudo ser resultado de tres secuencias de lanzamiento de monedas: htt, tht y tth.

Otra manera de generar el mismo patrón de números es empezar con 1 en ambas diagonales y luego llenar las entradas interiores sumando los dos números que están exactamente por encima de cada posición (a la izquierda y a la derecha). Por ejemplo, el 28 que aparece en negritas en la tabla 5 es resultado de sumar el 7 y el 21 de la fila que está encima.

TABLA 5 Triángulo de Pascal

Número de renglón		Número de suma
0	1	1
1	1 1	2
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32
6	1 6 15 20 15 6 1	64
7	1 7 21 35 35 21 7 1	128
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	256
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	512
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1	1024

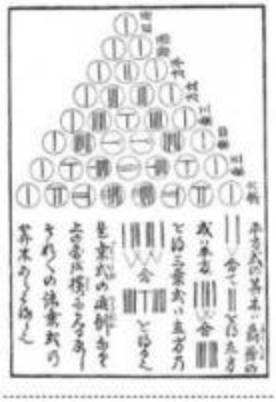


Este "triángulo de Pascal" aparece en ***Szu-yuen Yu-chien*** (*El precioso espejo de los cuatro elementos*), un texto del año 1303, escrito por el matemático chino Chu Shih-chieh.

Si seguimos agregando pares de números, es posible extender la matriz de manera indefinida hacia abajo, siempre iniciando y terminando cada fila con 1. (La tabla muestra sólo las filas del 0 al 10.) Esta matriz "triangular" infinita de números se denomina **triángulo de Pascal**, porque Blaise Pascal escribió un tratado sobre él en 1653. No obstante, existen pruebas de que ya era conocido alrededor del año 1100, e incluso pudo haber sido estudiado en China o la India mucho antes. Lo cierto es que el "triángulo" posee muchas propiedades interesantes. En aplicaciones de conteo, la propiedad más útil es que, en general, la entrada número r en la fila número n es $C(n, r)$, es decir, el número de *combinaciones* de n objetos tomados en grupos de r cada vez. Esta correspondencia se muestra en la tabla 6 (hasta la fila 7).

TABLA 6 Valores de las combinaciones en el triángulo de Pascal

Número de fila	
0	$C(0,0)$
1	$C(1,0)$ $C(1,1)$
2	$C(2,0)$ $C(2,1)$ $C(2,2)$
3	$C(3,0)$ $C(3,1)$ $C(3,2)$ $C(3,3)$
4	$C(4,0)$ $C(4,1)$ $C(4,2)$ $C(4,3)$ $C(4,4)$
5	$C(5,0)$ $C(5,1)$ $C(5,2)$ $C(5,3)$ $C(5,4)$ $C(5,5)$
6	$C(6,0)$ $C(6,1)$ $C(6,2)$ $C(6,3)$ $C(6,4)$ $C(6,5)$ $C(6,6)$
7	$C(7,0)$ $C(7,1)$ $C(7,2)$ $C(7,3)$ $C(7,4)$ $C(7,5)$ $C(7,6)$ $C(7,7)$
	y así sucesivamente



Versión japonesa del triángulo que data del siglo XVIII. Los numerales de "palillos" evolucionaron a partir de las piezas de bambú para contar empleadas en una tabla de conteo. Se cree que Omar Khayyam, matemático y poeta persa del siglo XII, logró también descubrir sus patrones cuando buscaba soluciones algebraicas. (El triángulo enumera los coeficientes del desarrollo binomial.)

Contar con una copia del triángulo de Pascal nos ofrece otra opción para evaluar las combinaciones. En cualquier momento que necesitemos conocer el número de combinaciones de n objetos tomados en grupos de r a la vez (esto es, el número de subconjuntos de tamaño r de un conjunto de tamaño n), basta con leer la entrada número r de la fila n. Tenga en cuenta que en la *primera* fila que se muestra es la *fila número 0*. Además, la primera entrada de cada fila puede designarse como entrada número 0. Esta entrada proporciona el número de subconjuntos de tamaño 0 (que siempre es 1, ya que sólo hay un conjunto vacío).

EJEMPLO 1 En un grupo de 10 personas hay seis mujeres y cuatro hombres. Si se elige al azar a cinco de estas personas para que llenen un cuestionario, ¿cuántos conjuntos diferentes de cinco personas son posibles?

Puesto que simplemente se trata de seleccionar un subconjunto de cinco de un conjunto total de 10 (o combinaciones de 10 objetos tomados de cinco en cinco), podemos leer $C(10, 5)$ del renglón 10 del triángulo de Pascal en la tabla 5. La respuesta es 252. ■

EJEMPLO 2 De los 252 conjuntos posibles de cinco personas del ejemplo 1, ¿cuántos constan exactamente de dos mujeres y tres hombres?

Puede elegirse a dos mujeres de entre seis mujeres de $C(6, 2)$ formas distintas, y puede seleccionarse a tres hombres de entre cuatro hombres de $C(4, 3)$ formas distintas (valores combinatorios que pueden extraerse del triángulo de Pascal). Entonces, como elegir a dos mujeres y luego elegir a tres hombres son ambas tareas individuales, el principio fundamental de conteo nos indica que debemos multiplicar sus dos valores:

$$C(6, 2) \cdot C(4, 3) = 15 \cdot 4 = 60.$$ ■

EJEMPLO 3 Si se lanzan cinco monedas al aire, ¿de cuántas formas diferentes podrían obtenerse tres caras? (Designemos cara como h y cruz como t.)

Hay varios "métodos" para obtener tres caras, pues las tres pueden aparecer en diferentes subconjuntos de las monedas. Por ejemplo, hhtht y thhth son sólo dos de las muchas posibilidades que existen. Cuando anotamos una de estas posibilidades, podemos ver que tres de sus posiciones están ocupadas exactamente por una h, y las otras dos por una t. Cada forma distinta de elegir tres posiciones de un conjunto de cinco posiciones ofrece una posibilidad distinta. (Una vez que están determinadas las tres posiciones para h, cada una de las otras dos posiciones recibe de manera automática una t.) Así, nuestra respuesta es sencillamente el número de subconjuntos de tamaño tres de un conjunto de tamaño cinco, es decir, el número de combinaciones de cinco objetos tomados de tres en tres. Buscamos esta respuesta en la fila 5 del triángulo de Pascal: $C(5, 3) = 10$. ■

Observe que la fila 5 del triángulo de Pascal también proporciona la respuesta a otras preguntas las cinco monedas lanzadas, las cuales se resumen en la tabla 7.

TABLA 7 Cinco monedas lanzadas al aire

Número de caras, n	Maneras de obtener exactamente n caras	Listado
0	$C(5, 0) = 1$	tttt
1	$C(5, 1) = 5$	httt, thtt, ttht, ttth, tttt
2	$C(5, 2) = 10$	hhtt, htht, htth, thht, thth, tthh
3	$C(5, 3) = 10$	hhht, hhth, hthh, thhh, htth, hthh, thht, thth, tthh, tttt
4	$C(5, 4) = 5$	hhhh, hhhh, hhth, hthh, thhh
5	$C(5, 5) = 1$	hhhh

El teorema del binomio Ahora veremos en forma breve una línea totalmente diferente de razonamiento matemático que también conduce al triángulo de Pascal, que se aplica a un resultado muy importante en álgebra. Resulta que este patrón "triangular" de entradas también surge cuando varios binomios se elevan a diferentes potencias. (En álgebra, cualquier expresión de dos términos, como x y y, o $a + 2b$, o $w - 4$, se denomina binomio.) A continuación aparecen las primeras potencias del binomio $x + y$, de modo que podamos ver un patrón.

$$(x + y)^0 = 1$$
$$(x + y)^1 = x + y$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Los coeficientes en el desarrollo de cualquiera de estas expresiones son justamente las entradas de una de las filas del triángulo de Pascal. El desarrollo de las expresiones puede verificarse por cálculo directo mediante las propiedades distributiva, asociativa y conmutativa del álgebra. Como el coeficiente del cada desarrollo de los binomios indica la fila correspondiente del triángulo de Pascal, son ellos precisamente los números a los que hemos estado refiriéndonos como *combinaciones* en







La tabla generada por la calculadora TI-83 Plus puede utilizarse para generar una fila del triángulo de Pascal. ¿Por qué aparece un "0" para Y1, cuando X = 6?

nuestro análisis del conteo. [En el estudio del álgebra, tradicionalmente se han denominado **coeficientes binomiales**, y se representan de manera diferente. Por ejemplo, en un lugar de $C(n, r)$, verá la notación $\binom{n}{r}$.] Como "coeficientes binomiales", todavía sirven para dar respuesta a la pregunta de "¿cuántos?", si razonamos de la manera siguiente. Al desarrollar $(x + y)^4$, ¿cuántos coeficientes binomiales hay en la expresión x^2y^2? Si buscamos en la entrada apropiada de la fila 4 del triángulo de Pascal, vemos que la respuesta es 6.

Si generalizamos el patrón mostrado en los seis desarrollos anteriores, obtenemos el importante resultado que se conoce como **teorema del binomio** (o algunas veces como **desarrollo general de un binomio**).

Teorema del binomio

Para cualquier entero positivo n,

$$(x + y)^n = C(n,0) \cdot x^n + C(n,1) \cdot x^{n-1}y + C(n,2) \cdot x^{n-2}y^2 + C(n,3) \cdot x^{n-3}y^3 + \cdots + C(n,n-1) \cdot xy^{n-1} + C(n,n) \cdot y^n,$$

o bien, si utilizamos la fórmula factorial para combinaciones y nos basamos en el hecho de que $C(n, 0) = C(n, n) = 1$,

$$(x + y)^n = x^n + \frac{n!}{(n-1)!\,1!}x^{n-1}y + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n!}{(n-3)!\,3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + \frac{n!}{1!(n-1)!}xy^{n-1} + y^n.$$

EJEMPLO 4 Escriba el desarrollo binomial para $(x + y)^7$.

Al leer los coeficientes de la fila 7 del triángulo de Pascal (tabla 5), obtenemos

$$(x + y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7. \quad \blacksquare$$

Recuerde que las expresiones "binomiales" pueden incluir términos distintos de x y de y. No obstante, el teorema del binomio sigue aplicándose.

EJEMPLO 5 Escriba el desarrollo binomial para $(2a + 5)^4$.

Inicialmente, obtenemos los coeficientes gracias al triángulo de Pascal (renglón 4), pero una vez agotada el álgebra, los coeficientes son números diferentes:

$$\begin{aligned}(2a + 5)^4 &= (2a)^4 + 4(2a)^3 5 + 6(2a)^2 5^2 + 4(2a)5^3 + 5^4 \\ &= 2^4a^4 + 4(2^3a^3)5 + 6(2^2a^2)5^2 + 4(2a)5^3 + 5^4 \\ &= 16a^4 + 4 \cdot 8 \cdot a^3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 \cdot a^2 \cdot 25 + 4 \cdot 2a \cdot 125 + 625 \\ &= 16a^4 + 160a^3 + 600a^2 + 1000a + 625. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

11.4 EJERCICIOS

Tome los valores de las combinaciones siguientes directamente del triángulo de Pascal.

1. $C(4,3)$ **2.** $C(5,2)$

3. $C(6,4)$ **4.** $C(7,5)$

5. $C(8,2)$ **6.** $C(9,4)$

7. $C(9,7)$ **8.** $C(10,6)$

Elección de un comité de congresistas *Se elegirá un comité de cuatro congresistas de un grupo de siete demócratas y tres republicanos. Determine el número de formas de obtener cada una de las combinaciones siguientes.*

9. Exactamente un demócrata.

10. Exactamente dos demócratas.

11. Exactamente tres demócratas.

12. Exactamente cuatro demócratas.

Lanzar monedas *Suponga que se lanzan ocho monedas al aire. Determine el número de formas de obtener cada uno de los siguientes resultados.*

13. Exactamente tres caras.

14. Exactamente cuatro caras.

15. Exactamente cinco caras.

16. Exactamente seis caras.

Selección de aulas *Peg Cheever está buscando la clase de economía y sabe que debe estar en una de nueve aulas. Como el profesor no permite que los estudiantes entren después de que ha iniciado la clase, y queda muy poco tiempo, Peg decide intentarlo al azar sólo en cuatro aulas.*

17. ¿Cuántas elecciones diferentes de cuatro aulas son posibles?

18. ¿En cuántas de las elecciones del ejercicio 17 no se localiza la clase de economía?

19. ¿En cuántas de las elecciones del ejercicio 17 sí se localiza la clase?

20. ¿Qué fracción de las posibles elecciones conducirá al "éxito"? (Proporcione tres decimales.)

Para un conjunto de cinco elementos, determine el número de subconjuntos diferentes de cada uno de los tamaños siguientes. (Emplee el triángulo de Pascal para encontrar las respuestas.)

21. 0 **22.** 1 **23.** 2

24. 3 **25.** 4 **26.** 5

27. ¿Cuántos subconjuntos (de cualquier tamaño) hay para un conjunto de cinco elementos?

28. Determine y explique la relación entre el número de fila y la suma de la fila en el triángulo de Pascal.

Con el paso de los años, se han descubierto muchos patrones interesantes en el triángulo de Pascal. Los ejercicios 29 a 35 muestran unos cuantos de estos patrones.*

29. Consulte la tabla 5.

(a) Elija una fila cuyo número sea primo. Sin tomar en cuenta los unos de esa fila, ¿qué se cumple en todas las demás entradas?

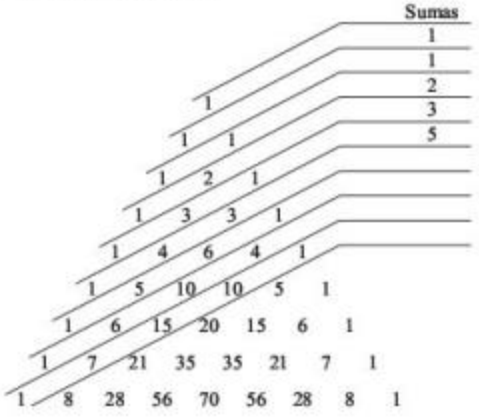
(b) Elija una segunda fila con número primo y vea si se cumple este patrón.

(c) Continúe el patrón para determinar la fila 11 en la tabla 5 y verifique que el mismo patrón se cumple en esa fila.

30. Proporcione los cinco números que siguen en la sucesión diagonal que aparece en la figura. ¿Cómo se denominan estos números? (Vea la sección 1.2.)



31. Complete la secuencia de sumas de las diagonales que se muestran en la figura. ¿Qué patrón forman estas sumas? ¿Cuál es el nombre de esta importante secuencia de números? Al parecer, Pascal no descubrió la presencia de esta secuencia en el triángulo que lleva su nombre.



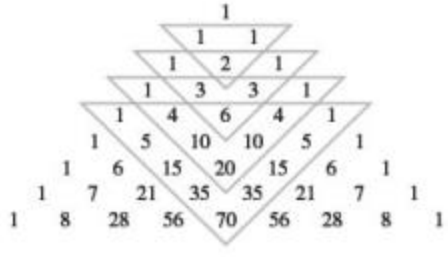
*Por ejemplo, vea el artículo "Serendipitous Discovery of Pascal's Triangle", de Francis W. Stanley, en *The Mathematics Teacher*, febrero de 1975.

32. Elabore otro "triángulo", reemplazando cada número en el triángulo de Pascal (filas **0** a **5**) por su residuo cuando se divide entre 2. ¿Qué propiedad especial comparten las filas **2** y **4** de este nuevo triángulo?

33. En el ejercicio 32, ¿cuál es la siguiente fila que tendría la misma propiedad que las filas **2** y **4**?

34. ¿Cuántos números pares hay en la fila número **256** del triángulo de Pascal? (Primero resuelva los ejercicios 32 y 33.)

35. La figura siguiente muestra una parte del triángulo de Pascal con varias regiones triangulares invertidas resaltadas. Para cualquiera de estas regiones, ¿qué puede decir de la suma de los cuadrados de las entradas en la fila superior de cada triángulo?



36. Más de un siglo antes de que apareciera el tratado de Pascal sobre el "triángulo", se publicó otro trabajo escrito por el matemático italiano Niccolo Tartaglia (1506-1559) que incluía la tabla de números que se muestra aquí.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

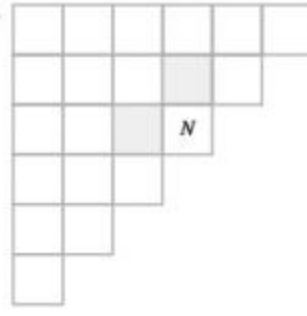
Explique la conexión entre el triángulo de Pascal y el "rectángulo" de Tartaglia.

El "triángulo" que Pascal estudió y publicó en su tratado fue más como una esquina cortada del rectángulo de Tartaglia, como se muestra enseguida.

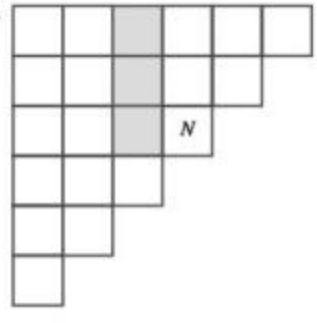
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Cada número en el arreglo de esta matriz puede calcularse de varias formas. En cada uno de los ejercicios 37 a 40, considere el número N que se ubica en algún lugar de la matriz. Al revisar distintas posiciones en la matriz dada, determine cómo se relaciona N con la suma de los números que corresponderían a las celdas sombreadas. Describa esta relación con palabras.

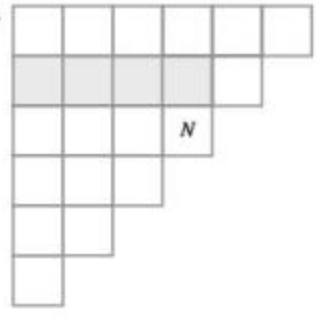
37.



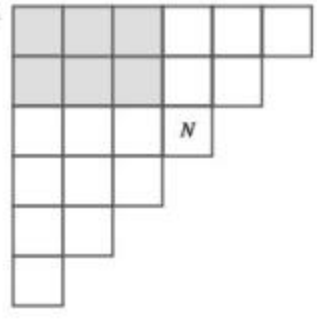
38.



39.



40.



Escriba el desarrollo binomial para cada una de las potencias siguientes.

41. $(x + y)^6$ **42.** $(x + y)^8$ **43.** $(z + 2)^3$

44. $(w + 3)^5$ **45.** $(2a + 5b)^4$ **46.** $(3d + 5f)^4$

47. $(b - h)^6$ [*Una pista:* Primero cambie $b - h$ a $b + (-h)$.]

48. $(2n - 4m)^5$

49. ¿Cuántos términos figuran en el desarrollo binomial para $(x + y)^m$?

50. Observe el patrón de esta tabla y llene los espacios para descubrir una fórmula para el término r-ésimo (el término general) del desarrollo binomial para $(x + y)^n$.

Número de términos	Coeficiente	Parte variable	Término
1	1	x^n	$1\,x^n$
2	$\frac{n!}{(n-1)!\,1!}$	$x^{n-1}y$	$\frac{n!}{(n-1)!\,1!}x^{n-1}y$
3	$\frac{n!}{(n-2)!\,2!}$	$x^{n-2}y^2$	$\frac{n!}{(n-2)!2!}x^{n-2}y^2$
4	$\frac{n!}{(n-3)!\,3!}$	$x^{n-3}y^3$	$\frac{n!}{(n-3)!\,3!}x^{n-3}y^3$
⋮	⋮	⋮	⋮
r	$\frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!}$	_____	_____

Utilice los resultados del ejercicio 50 para determinar el término indicado de cada una de los siguientes desarrollos.

51. $(x + y)^{14}$; quinto término

52. $(a + b)^{18}$; decimosexto término

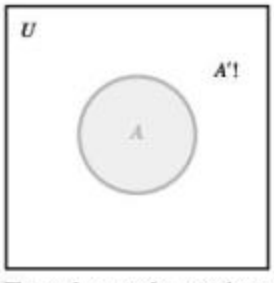
53. Se estableció en el texto que cada entrada interior en el triángulo de Pascal puede obtenerse sumando los dos números que están justo arriba de él (a la izquierda y a la derecha). Este hecho, conocido como "identidad de Pascal", puede representarse como

$$C(n, r) = C(n - 1, r - 1) + C(n - 1, r).$$

Utilice la fórmula factorial para las combinaciones (junto con un poco de álgebra) para probar la identidad de Pascal.

11.5 Problemas de conteo que incluyen "no" y "o"

Cuando contamos el número de formas en que puede ocurrir un evento (o en que puede hacerse una "tarea"), algunas veces es más fácil aplicar un método indirecto. En esta sección estudiaremos dos técnicas diferentes: primero, el *principio de los complementos*, en el que iniciamos contando las formas en que *no ocurriría* un evento, y luego el *principio de la suma*, en el que dividimos un evento en eventos componentes más simples, y contamos el número de formas en que ocurriría un componente *u* otro.



El complemento de un conjunto

FIGURA 8

Suponga que U es el conjunto de todos los resultados posibles de algún tipo y que A es el conjunto de dichos resultados que satisfacen una condición determinada. Para cualquier conjunto S, el número cardinal de S (número de elementos en S) se escribe como $n(S)$, y el complemento de S se escribe S'. Entonces, la figura 8 sugiere que

$$n(A) + n(A') = n(U) \quad \text{o} \quad n(A) = n(U) - n(A').$$

A continuación ofrecemos un resumen de este principio.

Principio de conteo por medio de complementos

Si A es cualquier conjunto dentro de un conjunto universal U, entonces

$$n(A) = n(U) - n(A').$$

Por este principio, el número de formas en que se satisface cierta condición es el número total de resultados posibles menos el número de formas en que dicha condición **no** se satisfaría. (Como vimos antes en los capítulos 2 y 3, la operación aritmética de *sustracción* corresponde a la operación de *complementación* y al conector lógico de *negación*, que es "no", de los conjuntos.)

EJEMPLO 1 Para el conjunto $S = \{a, b, c, d, e, f\}$, determine el número de subconjuntos propios.

Recuerde que para que un subconjunto de S sea propio de éste no debe contener sus mismos seis elementos. Si bien varios subconjuntos de diferentes tamaños cumplirían esta condición, es más fácil considerar al único subconjunto que no es propio, es decir, S. De la teoría de conjuntos, sabemos que el conjunto S tiene un total de $2^6 = 64$ subconjuntos. Por lo tanto, del principio de los complementos, el número de subconjuntos propios es de $64 - 1 = 63$. Dicho de otro modo, el número de subconjuntos que *son* propios es el número total de subconjuntos menos el número de subconjuntos que *no le son* propios. ■

Imagine que lanzamos tres monedas al aire. Como cada moneda caerá en cara (h) o cruz (t), los resultados posibles pueden listarse como sigue.

hhh, hht, hth, thh, htt, tht, tth, ttt

(Aun sin la lista, podríamos haber llegado a la conclusión de que existen ocho posibilidades. Hay dos resultados posibles para cada moneda, de modo que el principio fundamental de conteo da $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.)

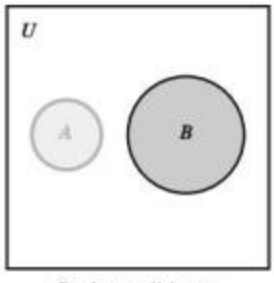
Ahora suponga que necesitamos el número de formas de obtener *al menos* una cara. En este caso, "al menos" significa una, dos o tres. Pero en lugar de tratar los tres casos, podemos observar que "al menos una" es el opuesto (o complemento) de "menos de una" (que es 0). Como sólo hay una manera de obtener 0 caras (ttt), y hay un total de ocho posibilidades (como se demostró antes), el principio de los complementos proporciona el número de formas de obtener al menos una cara: $8 - 1 = 7$. (El número de resultados que incluyen al menos una cara es el número total de resultados menos el número de resultados que *no* incluyen al menos una cara.) Descubrimos, pues, que los métodos de conteo indirecto a menudo pueden aplicarse a problemas que incluyen los conceptos de "al menos", o "a lo sumo", o "menos que", o "más que".

EJEMPLO 2 Si se lanzan cuatro monedas, ¿de cuántas maneras puede obtenerse al menos una cruz?

Por el principio fundamental de conteo, son posibles $2^4 = 16$ resultados diferentes. Exactamente uno de ellos no satisface la condición de "al menos una cruz" (a saber, ninguna cruz, o hhhh). Así, nuestra respuesta (con base en el principio de los complementos) es $16 - 1 = 15$. ■

EJEMPLO 3 Carol Britz y tres de sus amigos van a abordar un aeroplano justo antes de la hora de despegue. Sólo quedan 10 asientos, tres de los cuales dan al pasillo. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse las cuatro personas en los asientos disponibles de modo que al menos uno de ellos se siente junto al pasillo?

La palabra "acomodar" implica que el orden es importante, de modo que utilizaremos permutaciones. "Al menos uno junto al pasillo" es el opuesto (complemento) de "nadie junto al pasillo". El número total de maneras de acomodar cuatro personas en 10 asientos es $P(10, 4) = 5040$. El número de formas de acomodar a cuatro personas en siete asientos (ninguno junto al pasillo) es $P(7, 4) = 840$. Por lo tanto, por el principio de los complementos, el número de formas de acomodar al menos a una junto al pasillo es $5040 - 840 = 4200$. ■



Conjuntos disjuntos

FIGURA 9

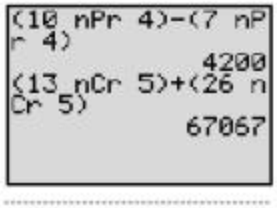
El principio de los complementos es una manera indirecta de contar. Otra técnica se relaciona con la figura 9. Si A y B son conjuntos disjuntos (que no tienen elementos en común), entonces, al escribir la unión de los conjuntos A y B como $A \cup B$ llegamos al principio que se establece aquí.

Principio aditivo especial de conteo

Si A y B son conjuntos disjuntos, entonces

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

(Este principio es *especial* porque A y B son disjuntos. Más adelante ofreceremos una generalización del mismo.) Dicho principio afirma que si dos condiciones no pueden cumplirse al mismo tiempo, entonces el número de formas en que una **u** otra podría cumplirse se determina sumando el número de maneras en que una se satisface más el número de formas en que la otra puede cumplirse. La idea es que algunas veces podemos analizar un conjunto de posibilidades descomponiendo éste en un conjunto de componentes más simples. (La operación aritmética de la *adición* corresponde a la operación de *unión* y al conector lógico de *disyunción*, esto es, "o", de los conjuntos.)



En esta pantalla se confirman los resultados de los ejemplos 3 y 4.

EJEMPLO 4 ¿Cuántas manos de cinco cartas son todas de tréboles o todas de cartas rojas?

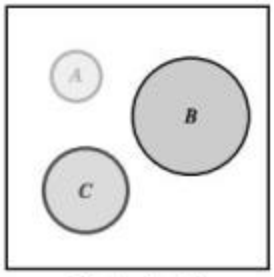
Ninguna mano que satisfaga una de estas condiciones podría también satisfacer la otra, de modo que los dos conjuntos de posibilidades (para todas de tréboles y todas de cartas rojas) son disjuntos. Por consiguiente, se puede aplicar el principio aditivo especial. Como hay 13 tréboles y 26 cartas rojas, obtenemos

$$C(13,5) + C(26,5) = 1287 + 65{,}780$$
$$= 67{,}067.$$ ■

El principio aditivo especial también se extiende a la unión de tres o más conjuntos disjuntos, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Peggy Jenders necesita tomar 12 cursos más específicos para obtener su grado de licenciatura, incluidos cuatro de matemáticas, tres de física, tres de ciencias de la computación y dos de negocios. Si elige al azar cinco de los 12 cursos para el programa del siguiente semestre, ¿cuántas de las selecciones posibles incluirían al menos dos cursos de matemáticas?

De toda la información dada aquí, lo que es importante es que hay cuatro cursos de matemáticas y otros ocho cursos para elegir, y que cinco de ellos se elegirán para



$T = A \cup B \cup C$

FIGURA 10

el semestre siguiente. Si T designa al conjunto de selecciones que incluyen al menos dos cursos de matemáticas, entonces podemos escribir

$$T = A \cup B \cup C$$

donde $A =$ al conjunto de selecciones que incluyen exactamente dos cursos de matemáticas,

$B =$ al conjunto de selecciones que incluyen exactamente tres cursos de matemáticas

y $C =$ al conjunto de selecciones que incluyen exactamente cuatro cursos de matemáticas.

(En este caso, *al menos dos* significa exactamente dos **o** exactamente tres **o** exactamente cuatro.) La situación se ilustra en la figura 10.

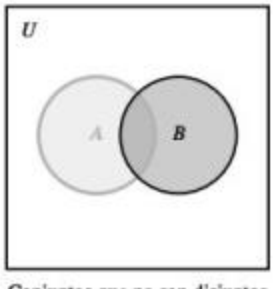
Por medio de los métodos anteriores, sabemos que

$$n(A) = C(4, 2) \cdot C(8, 3) = 6 \cdot 56 = 336,$$
$$n(B) = C(4, 3) \cdot C(8, 2) = 4 \cdot 28 = 112$$

y $$n(C) = C(4, 4) \cdot C(8, 1) = 1 \cdot 8 = 8,$$

de modo que, por el principio aditivo,

$$n(T) = 336 + 112 + 8 = 456.$$ ■



Conjuntos que no son disjuntos

FIGURA 11

La figura 11 ilustra el caso en el que dos conjuntos, A y B, no son disjuntos. En este caso, cuando el número de elementos en el conjunto A se suma al número en el conjunto B, los elementos en la intersección, $A \cap B$, se cuentan dos veces. Para corregir esta doble inclusión, ese número de elementos debe restarse de la suma. El resultado es el siguiente principio general. (Esta fórmula se vio por primera vez en el capítulo 2, en donde se denominó fórmula para el número cardinal.)

Principio aditivo general de conteo

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, disjuntos o no, entonces

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).}$$

EJEMPLO 6 En la tabla 8 se clasifica a una delegación diplomática de 18 miembros del Congreso según su militancia en el partido y su sexo. Si se elige uno de los miembros de manera aleatoria para que sea el que hable por el grupo, ¿en cuántas formas podría esta persona ser demócrata o ser mujer?

TABLA 8

	Hombre (M)	Mujer (W)	Totales
Republicano (R)	5	3	8
Demócrata (D)	4	6	10
Totales	9	9	18

Por medio del principio aditivo general de conteo, obtenemos

$$n(D \cup W) = n(D) + n(W) - n(D \cap W)$$
$$= 10 + 9 - 6$$
$$= 13.$$ ■

EJEMPLO 7 ¿Cuántos números naturales de tres dígitos son múltiplos de 2 o múltiplos de 5?

Un múltiplo de 2 debe terminar en un dígito par (0, 2, 4, 6 u 8), de modo que hay $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ múltiplos de 2 de tres dígitos. Un múltiplo de 5 debe terminar en 0 o en 5, así que hay $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ de éstos. Un múltiplo de 2 y al mismo tiempo de 5 es un múltiplo de 10, y debe terminar en 0. Hay $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$ de éstos, lo que da

$$450 + 180 - 90 = 540$$

posibles números de tres dígitos que son múltiplos de 2 o múltiplos de 5. ■

EJEMPLO 8 Se saca una sola carta de una baraja estándar de 52 cartas.

(a) ¿De cuántas maneras podría obtenerse un corazón o un rey?

Una sola carta puede ser a la vez corazón y rey (el rey de corazones), de modo que utilizamos la fórmula aditiva general. Hay 13 corazones, cuatro reyes y una carta que es a la vez corazón y rey:

$$13 + 4 - 1 = 16.$$

(b) ¿De cuántas formas podría la carta ser un trébol o una carta de figura?

Hay 13 tréboles, 12 cartas de figura y 3 cartas que son a un tiempo tréboles y figuras, con lo que se obtiene

$$13 + 12 - 3 = 22.$$ ■

EJEMPLO 9 ¿Cuántos subconjuntos de un conjunto de 25 elementos contienen más de tres elementos?

Sería mucho trabajo contar de manera directa todos los subconjuntos de tamaño 4, 5, 6, . . . , 25. Es mucho más sencillo contar los que tienen tres o menos elementos:

Hay	$C(25,0) = 1$	subconjunto de tamaño 0.
Hay	$C(25,1) = 25$	subconjuntos de tamaño 1.
Hay	$C(25,2) = 300$	subconjuntos de tamaño 2.
Hay	$C(25,3) = 2300$	subconjuntos de tamaño 3.

El número total de subconjuntos es de $2^{25} = 33{,}554{,}432$ (utilice una calculadora). De modo que los subconjuntos con más de tres elementos deben ser

$$\begin{aligned} 33{,}554{,}432 - (1 + 25 + 300 + 2300) &= 33{,}554{,}432 - 2626 \\ &= 33{,}551{,}806. \end{aligned}$$ ■

En el ejemplo 9, nos servimos tanto de la fórmula especial aditiva (para obtener el número de subconjuntos con no más de tres elementos) como del principio de los complementos.

Solución de problemas

Cuando resuelva los ejercicios de esta sección, tenga en cuenta que podría ser mejor usar los métodos indirectos, y que también puede utilizar permutaciones, combinaciones, el principio fundamental de conteo, o procedimientos de listado como las tablas de productos o los diagramas de árbol. Además, puede que necesite obtener los valores de las combinaciones, cuando sea necesario, que ofrece el triángulo de Pascal, o determinar los valores de las combinaciones y permutaciones mediante una calculadora.

11.5 EJERCICIOS

1. Explique por qué al principio de conteo por medio de complementos se le conoce como método "indirecto".
2. Explique la diferencia entre el principio aditivo *especial* de conteo y el principio aditivo *general* de conteo.

¿Cuántos subconjuntos propios tiene cada uno de los conjuntos siguientes?

3. $\{w, x, y, z\}$
4. $\{A, B, C, D, E\}$

Lanzar monedas *Si usted lanza siete monedas al aire, ¿de cuántas formas puede obtener cada uno de los resultados siguientes?*

5. Al menos una cara. ("Al menos una" es el complemento de "ninguna".)
6. Al menos dos caras. ("Al menos dos" es el complemento de "cero o una".)
7. Al menos dos cruces.
8. Al menos una de cada una (una cara y una cruz).

Tiro de dados *Si tira dos dados (por ejemplo, uno rojo y uno verde), ¿de cuántas maneras puede obtener cada uno de los siguientes resultados? (Consulte la tabla 2 de la sección 11.1.)*

9. Un 2 en el dado rojo.
10. Una suma de al menos 3.
11. Un 4 en al menos uno de los dados.
12. Un número diferente en cada dado.

Identificación de propiedades de los números naturales *¿Cuántos números naturales de dos dígitos cumplen los siguientes requisitos?*

13. No son múltiplo de 10.
14. Son mayores que 70 o múltiplos de 10.
15. ***Elegir álbumes de música country*** La colección de Michelle Cook de ocho álbumes de música *country* incluye *Unchained* de Johnny Cash. Michelle elegirá tres de sus álbumes para escucharlos mientras conduce a Nashville. (Suponga que el orden no es importante.)
    (a) ¿Cuántos conjuntos diferentes de tres álbumes podría seleccionar?
    (b) ¿Cuántos de estos conjuntos no incluirían *Unchained*?
    (c) ¿Cuántos de ellos incluirían *Unchained*?
16. ***Elegir éxitos de Broadway*** Las 10 puestas en escena más exitosas incluyen *Cats* y *Oh Calcutta!*. Cuatro de las 10 se seleccionan al azar. (Suponga que el orden no es importante.)
    (a) ¿De cuántas maneras se pueden elegir los cuatro éxitos?
    (b) ¿Cuántos de esos grupos de cuatro no incluirían las producciones mencionadas?
    (c) ¿Cuántas de ellas incluirían al menos a una de las dos producciones mencionadas?
17. ***Elegir días de la semana*** ¿De cuántas maneras diferentes se podrían elegir tres días distintos de la semana, de modo que al menos uno de ellos inicie con la letra M? (Suponga que el orden de la selección no es importante.)
18. ***Elegir tareas escolares*** Chalon Bridges tiene nueve tareas importantes que terminar esta semana para la escuela. Dos de ellas implican redactar un ensayo. Chalon decide trabajar en dos de las nueve tareas esta noche. ¿Cuántas opciones diferentes de dos incluirían al menos un ensayo? (Suponga que el orden no es importante.)

Selección de restaurantes *Byron Hopkins quiere cenar en tres restaurantes diferentes durante una visita a un centro vacacional en la montaña. Si dos de los ocho restaurantes disponibles sirven mariscos, determine el número de formas en que al menos uno de los restaurantes seleccionados servirá mariscos, dadas las condiciones siguientes.*

19. El orden de la selección es importante.
20. El orden de la selección no es importante.
21. ***Acomodo de asientos en una aerolínea*** Remítase al ejemplo 3. Si uno del grupo decidió a última hora no volar, entonces, ¿de cuántas maneras podrían los tres restantes acomodarse en los 10 asientos disponibles, de modo que al menos uno de ellos se siente junto al pasillo?
22. ***Identificación de propiedades de los números naturales*** Determine la cantidad de números naturales de cuatro dígitos que tienen al menos un 0, de acuerdo con cada una de las condiciones siguientes.
    (a) Se permite repetir dígitos.
    (b) No se permite repetir dígitos.
23. ***Selección de comités de la facultad*** Un comité de cuatro miembros de la facultad será elegido de un departamento formado por 25 catedráticos, entre ellos los profesores Fontana y Spradley. ¿De cuántas formas podría incluirse en el comité al menos a uno de estos dos profesores?
24. ***Selección de equipos de búsqueda y rescate*** Una unidad de patrulla civil aérea de 12 miembros incluye a cuatro oficiales. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse cuatro miembros para una misión de búsqueda y rescate, tal que al menos se incluya a un oficial?

Extracción de cartas *Si se saca una sola carta de un mazo de 52 cartas, ¿de cuántas formas podría resultar lo siguiente? (Utilice el principio aditivo general.)*

25. Un trébol o una sota.
26. Una figura o una carta negra.

Conteo de estudiantes que disfrutan de la música y la literatura *De un grupo de* 50 *estudiantes, a* 30 *les gusta la música, a* 15 *la literatura y a* 10 *les complace tanto la música como la literatura. ¿A cuántos les gusta lo siguiente?*

27. Al menos una de estas dos materias (principio aditivo general).

28. Ninguna de estas materias (complemento de "al menos uno").

Conteo de manos de cartas *Entre las* 2,598,960 *posibles manos de póquer de una mazo de 52 cartas, ¿cuántas contienen la siguientes cartas?*

29. Al menos una carta que no es trébol (complemento de "todas tréboles").

30. Cartas de más de un palo (complemento "todas del mismo palo").

31. Al menos una carta de figura (complemento de "ninguna carta de figura").

32. Al menos un diamante, pero no todas diamantes (complemento de "ningún diamante o todas diamantes").

Tamaño de subconjuntos de un conjunto *Si un conjunto determinado tiene* 12 *elementos, ¿cuántos de sus subconjuntos tiene el número dado de elementos?*

33. A lo más dos elementos.

34. Al menos 10 elementos.

35. Más de dos elementos.

36. De tres a nueve elementos.

37. ***Conteo de números de licencia*** Si un número de licencia consiste en tres letras seguidas de tres dígitos, ¿cuántas licencias diferentes podrían crearse que tuvieran al menos una letra o un dígito repetidos? (*Una pista:* Utilice el principio de conteo por medio de complementos.)

38. ***Extracción de cartas*** Si se sacan dos cartas de una baraja de 52 cartas, sin reemplazo (lo que significa que la primera carta no se reemplaza en el mazo antes de que se saque la segunda carta), ¿de cuántas maneras diferentes es posible obtener un rey en la primera toma y un corazón en la segunda? (*Una pista:* Divida este evento en los dos componentes disjuntos "rey de corazones y luego otro corazón" y "un rey que no es de corazones y luego un corazón". Utilice el principio fundamental de conteo para cada componente, luego aplique el principio aditivo especial.)

Selección de monumentos nacionales por visitar *Edward Roberts planea el viaje por carretera que tanto han esperado él y su familia, por la ruta del sur hasta la costa oeste de Estados Unidos. Ed está interesado en ver los* 12 *monumentos nacionales enumerados aquí, pero tendrá que optar sólo por tres de ellos, ya que algunos miembros de su familia están ansiosos por llegar a Disneylandia.*

Nuevo México	Arizona	California
Refugios de Gila Cliff	Cañón de Chelly	Devils Postpile
Petroglifos	Organ Pipe Cactus	Joshua Tree
White Sands	Saguaro	Lava Beds
Ruinas aztecas		Muir Woods
		Pinnacles

¿De cuántas maneras podrían los tres monumentos elegidos incluir lo siguiente?



39. Sitios de uno solo de los estados.

40. Al menos un sitio que no se encuentre en California.

41. Sitios de menos de tres estados.

42. Sitios de exactamente dos de los tres estados.

✎ ***Conteo de categorías de manos de póquer*** *En la tabla 4 de este capítulo (en la sección Para reflexionar) describimos brevemente las diferentes clases de manos que pueden formarse en un juego de póquer de cinco cartas. Verifique cada proposición de los ejercicios 43 a 48. (Explique todos los pasos de su argumento.)*

43. Hay cuatro formas de obtener una escalera real.

44. Hay 36 formas de obtener una escalera de color.

45. Hay 5108 formas de obtener una flor.

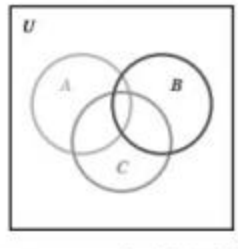
46. Hay 10,200 formas de obtener una escalera.

47. Hay 624 formas de obtener un póquer.

48. Hay 54,912 formas de obtener un trío (o tercia).

✎ **49.** Amplíe el principio aditivo general de conteo a tres conjuntos que se traslapan (como en la figura) para demostrar que

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$



50. ¿Cuántos números naturales del 1 al 300 *no* son divisibles entre 2, 3 o 5? (*Una pista:* Utilice el principio de los complementos y el resultado del ejercicio 49.)

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

Aproximación de factoriales mediante la fórmula de Stirling

En este capítulo aprendimos un método para calcular el valor exacto de una factorial utilizando un producto. Debido a que las factoriales aumentan muy rápido de magnitud, las matemáticas teóricas nos proporcionan una fórmula para aproximar factoriales grandes. Curiosamente, dicha fórmula utiliza los números irracionales π y e. Se conoce como **fórmula de Stirling** y es como sigue:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Como ha ocurrido con otros hallazgos matemáticos, ¡esta fórmula se conoce con un nombre distinto al de quien la descubrió! Según David M. Burton, el matemático Abraham De Moivre tuvo tanto que ver en el descubrimiento de esta fórmula como su amigo James Stirling.

Como ejemplo de una aplicación de esta fórmula, observamos que el valor exacto de 5! es 120. Con ayuda de una calculadora, la fórmula de Stirling da como aproximación de 5! la cifra de 118.019168, a la cual le falta menos de 2, un error de sólo 1.65%.

Temas para análisis

Divida la clase en varios grupos, y en cada uno asegúrese de que haya alguien que sepa utilizar una calculadora.

Cada grupo debe llenar una sección de la tabla de la derecha. (El grupo 1 toma $n = 1, 2, 3$, el grupo 2 toma $n = 4, 5, 6$, y así sucesivamente.) Los valores de las columnas se definen como sigue.

$C = n!$	(Valor exacto, por medio de una calculadora)
$S \approx n!$	(Aproximación de Stirling, por medio de una calculadora)
$D =$ Diferencia	$(C - S)$
$P =$ Porcentaje de la diferencia	$\left(\frac{D}{C} \cdot 100\%\right)$

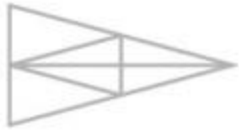
Intente obtener los porcentajes de la diferencia con una precisión de dos decimales. Cuando todos los grupos hayan finalizado sus cálculos, combine los resultados en una tabla grande. Analice con el grupo la pregunta siguiente: a medida que n se incrementa, ¿la fórmula de Stirling se hace más o menos precisa?

n	C	S	D	P
1 2 3				
4 5 6				
7 8 9				
10 11 12				
13 14 15				

EXAMEN DEL CAPÍTULO 11

Si puede utilizar los dígitos del conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, *determine el número de cada uno de los siguientes puntos.*

1. Números de tres dígitos.
2. Números de tres dígitos.
3. Números de tres dígitos que no se repitan.
4. Múltiplos de cinco de tres dígitos que no se repitan.
5. ***Conteo de triángulos en una figura*** Determine el número de triángulos (de cualquier tamaño) que hay en la siguiente figura.



6. ***Lanzar monedas*** Elabore un diagrama de árbol que presente todos los posibles resultados cuando se lanza una moneda al aire cuatro veces, si el tercer lanzamiento debe ser diferente del segundo.
7. ***Sumas de dígitos*** ¿En cuántos números de cuatro dígitos que no se repitan la suma de sus dígitos es igual a 30?
8. ***Creación de números a partir de conjuntos de dígitos*** Si se emplean solamente los dígitos del conjunto {0, 1, 2}, ¿cuántos números de tres dígitos pueden escribirse que no tengan dígitos impares repetidos?

Evalúe las expresiones siguientes.

9. $5!$
10. $\dfrac{8!}{5!}$
11. $P(12, 4)$
12. $C(7, 3)$
13. ***Formación de palabras a partir de conjuntos de letras*** ¿Cuántas "palabras" de cinco letras que no se repitan se pueden formar con nuestro alfabeto? (Suponga que cualquier combinación de cinco letras forma una "palabra".)
14. ***Formación de palabras a partir de conjuntos de letras*** Mediante el alfabeto ruso (que tiene 32 letras), y permitiendo que se repitan las letras, ¿cuántas "palabras" de cinco letras se pueden formar?

Selección de grupos de jugadores de baloncesto *Si hay 12 jugadores en un equipo de baloncesto, determine el número de opciones de donde puede elegir el entrenador en cada una de las siguientes situaciones.*

15. Cuatro jugadores para cargar el equipaje del equipo.
16. Dos jugadores para posiciones de defensa y dos para posiciones de delantero.
17. Cinco jugadores que inician y cinco sustitutos.
18. Un conjunto de tres o más jugadores.

Selección de configuraciones para interruptores *Determine el número de posibles configuraciones para una hilera de cuatro interruptores de encendido-apagado en las condiciones siguientes.*

19. No hay restricciones.
20. El primero y el cuarto interruptores deben estar encendidos.
21. El primero y el cuarto interruptores deben estar en la misma posición, ambos encendidos o ambos apagados.
22. No pueden estar apagados al mismo tiempo.
23. Dos interruptores adyacentes no pueden estar en la misma posición, ambos encendidos o ambos apagados.
24. Al menos dos interruptores deben estar encendidos.

Selección de subconjuntos de letras *Hay que elegir cuatro letras distintas del conjunto*

{A, B, C, D, E, F, G}.

Determine el número de formas de obtener un subconjunto que incluya lo siguiente.

25. La letra D.
26. Tanto la letra A como la letra E.
27. La letra A o la letra E, pero no ambas.
28. El mismo número de vocales que de consonantes.
29. Más consonantes que vocales.
30. Escriba y simplifique el desarrollo binomial para $(x + 2)^5$.
31. Si $C(n, r) = 495$ y $C(n, r + 1) = 220$, determine el valor de $C(n + 1, r + 1)$.
32. Si usted anota la segunda entrada de cada fila del triángulo de Pascal (iniciando con la fila 1), ¿qué secuencia de números obtiene?
33. Explique por qué hay $r!$ veces tantas permutaciones de n objetos tomados en grupos de r a la vez, como combinaciones hay de n objetos tomados en grupos de r a la vez.

capítulo

12 Probabilidad



Cada día nos vemos expuestos a situaciones peligrosas. El riesgo es la posibilidad o *probabilidad* de que ocurra un evento perjudicial. El riesgo asume muy diversas formas, ya sean las sustancias químicas que flotan en el ambiente, o bien diversos comportamientos que pudieran implicar consecuencias perjudiciales. En la lista siguiente aparecen ciertas actividades que incrementan en una posibilidad en un millón el riesgo de morir.

Fumar 1.4 cigarrillos
Pasar 1 hora en una mina de carbón
Vivir 2 días en Nueva York o Boston
Comer 40 cucharaditas de crema de cacahuate
Vivir 2 meses con un fumador
Volar 1600 kilómetros en un avión de propulsión
Recorrer 480 kilómetros en un automóvil
Conducir 16 kilómetros en una bicicleta

Nuestra sociedad dedica un enorme esfuerzo a evaluar el riesgo. En un mundo ideal, viviríamos con un índice de riesgos igual a cero. No obstante, casi cualquier acción que realicemos o cualquier sustancia química con la que tengamos contacto nos expone a alguna clase de riesgo. Por ejemplo, en un año cualquiera, el riesgo de recibir el impacto de un meteorito es de aproximadamente 1 en 1,700,000,000, mientras que las probabilidades de morir como consecuencia del hábito de fumar son de cerca de 1 en 170. Aunque lo más probable es que ningún meteorito lastime a nadie en Estados Unidos, se cree que el hábito de fumar ocasiona 420,000 muertes al año tan sólo en ese país.

En el fútbol soccer se acostumbra "cabecear" el balón. Cuando la revista *Science News* analizó las posibilidades de sufrir daño cerebral como consecuencia de esta práctica, se dice que un doctor les aseguró a las mamás y papás que "conducir al campo de fútbol en sus autos o camionetas era 'al menos 100 veces' más peligroso que practicar ese deporte".

Conocer la probabilidad nos permite ponerle cifras a la eventualidad de sufrir riesgos como los que acabamos de mencionar. Gracias a este conocimiento, cada persona está mejor capacitada para mantener en perspectiva los distintos riesgos y tomar decisiones mejor fundamentadas sobre sus vidas.

Fuentes: Rodricks, J., *Calculated Risk,* Cambridge University Press, 1992; 1995 *Grolier Multimedia Encyclopedia; Science News,* 27 de noviembre de 1999.

12.1 **Conceptos básicos**

12.2 **Eventos que incluyen "no" y "o"**

12.3 **Eventos que incluyen "y"**

12.4 **Probabilidad binomial**

12.5 **Valor esperado**

12.6 **Estimación de probabilidades por medio de la simulación**

Investigación en grupo:
Cómo aproximar π por medio de la probabilidad

Examen del capítulo 12



Pero, ¿será probable que la probabilidad proporcione certeza?", se preguntaba Pascal. "Nada ofrece certeza, excepto la verdad; nada proporciona descanso sino la búsqueda sincera de la verdad." Cuando Pascal escribió esto, se había retirado al convento jansenista de Port Royal después de haber sufrido un accidente cuando viajaba en un carruaje en 1654.

Las notas de Pascal sobre su defensa del cristianismo fueron recopiladas después de su muerte en sus *Pensamientos* (*Pensées*). La cita anterior se ha extraído, precisamente, de esta obra. Otra de las citas memorables de Pascal desarrolla la llamada "prueba del juicio de Dios". Si uno apuesta por que Dios existe y vive conforme a ello, habrá ganado mucho, incluso aunque Dios no exista; si apuesta por lo contrario, y Dios existe, habrá perdido la razón para vivir correctamente, por lo tanto, habrá perdido todo.

Si usted va al supermercado y escoge cinco libras de duraznos a 89¢ la libra, fácilmente podrá predecir que la cantidad que le van a cobrar será de $5 \times \$.89 = \$4.45$. La suma cobrada por una compra así es un **fenómeno determinista**, es decir, se puede predecir de forma exacta con base en la información con que se cuenta, en este caso, el número de libras y el costo por libra.

Por otro lado, considere el problema que enfrenta el gerente del supermercado, quien debe adquirir duraznos de modo que siempre estén disponibles para sus clientes, aunque no sepa exactamente cuántas libras comprarán éstos durante el día. La demanda de los clientes es un ejemplo de **fenómeno aleatorio**. Fluctúa de tal manera que su valor en un día determinado no puede predecirse de manera exacta con la información de que se dispone.

El estudio de la probabilidad tiene que ver con tales fenómenos aleatorios. Aunque no podemos estar seguros de si ocurrirá o no un resultado dado, con frecuencia podemos tener una buena idea de su *verosimilitud,* o **probabilidad**. En este capítulo se discuten varias formas de determinar y utilizar las probabilidades.

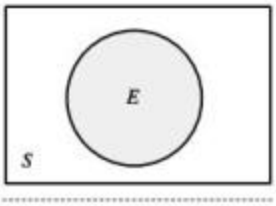
Ya desde los siglos XV y XVI se estudiaban en Italia algunas matemáticas de probabilidad relacionadas con los juegos de azar, pero no fue sino hasta 1654 cuando surgió una teoría matemática sistemática del azar. En ese año, dos matemáticos franceses, Pierre de Fermat (alrededor de 1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662), intercambiaban correspondencia en relación con un problema planteado por el aristócrata y jugador conocido como Caballero de Meré: *Si los dos jugadores se ven forzados a terminar el juego antes de que la partida finalice, ¿cómo debe dividirse la apuesta?* Pascal y Fermat resolvieron el problema ideando métodos básicos para determinar la oportunidad, o probabilidad, que cada jugador tenía de ganar.

Casi todos los trabajos publicados sobre teoría de la probabilidad hasta cerca de 1800 estaban basados en juegos de dados y otros juegos de azar. Por lo general, el hombre a quien se concede el crédito de ser el "padre" de la teoría de la probabilidad es el matemático francés Pierre Simón de Laplace (1749-1827), quien fue uno de los primeros en aplicar la probabilidad a aspectos que no tenían que ver con los juegos de azar. A pesar del trabajo de Laplace y los esfuerzos de algunos otros matemáticos importantes del siglo XIX, la comunidad matemática dejó de interesarse en la probabilidad hasta principios del siglo XX.

El desarrollo de la probabilidad como teoría matemática se debió principalmente a un grupo de especialistas rusos, entre ellos P. L. Chebyshev (1821-1894), su alumno A. A. Markov (1856-1922) y, por último, Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987). La obra *Fundamentos de la teoría de la probabilidad* (1933) de Kolmogorov es considerado hoy un tratado axiomático.

12.1 Conceptos básicos

Probabilidad En el estudio de la probabilidad, decimos que cualquier observación, o medida, de un fenómeno aleatorio es un **experimento**. Los efectos posibles obtenidos del experimento se denominan **resultados**, y el conjunto de todos los resultados posibles se conoce como **espacio muestral**. Por lo común, lo que nos interesa es un conjunto determinado de resultados posibles. A cualquier subconjunto del espacio muestral se le llama **evento**. Los resultados que forman parte de este evento generalmente se conocen como "resultados favorables", o "éxitos". Cada vez que se observa un éxito, decimos que "ocurrió" un evento. La probabilidad de que ocurra un evento, siendo ésta una medida numérica de la verosimilitud del evento, se determina de dos formas: *empíricamente* (de manera experimental) o *teóricamente* (de forma matemática).



Todo evento es un subconjunto del espacio muestral.



Christiaan Huygens (1629-1695), brillante científico y matemático holandés, fue el primero en escribir un tratado formal sobre probabilidad. Apareció en 1657 y se basó en la correspondencia que sostuvieron Pascal y Fermat.

EJEMPLO 1 Determine la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire caiga con la cara hacia arriba.

No hay razón aparente para que, a largo plazo, uno de los lados de una moneda caiga hacia arriba con mayor frecuencia que el otro, de modo que normalmente supondremos que cara y cruz son igualmente probables. Para enfatizar esta suposición habría que decir que la moneda es "legal". Ahora bien, este experimento consiste en lanzar al aire una moneda legal. El espacio muestral puede denotarse como $S = \{h, t\}$ (h representa cara y t representa cruz), y el evento cuya probabilidad buscamos es $E = \{h\}$. Como uno de los dos resultados posibles es cara, la probabilidad es el cociente de 1 y 2.

$$\text{Probabilidad (cara)} = \frac{1}{2}, \quad \text{que se expresa como} \quad P(h) = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad P(E) = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Si se lanza al aire una taza de poliestireno, determine la probabilidad de que caiga hacia arriba.

Intuitivamente, nos parecería probable que una taza caiga de lado con mucha más frecuencia que hacia arriba o hacia abajo. Lo que no queda claro es exactamente qué tan a menudo. Para darnos una idea, realizamos el experimento de lanzar 50 veces una taza de ese tipo. Cayó de lado 44 veces, boca abajo 5 veces y hacia arriba sólo 1 vez. Por la frecuencia de "éxitos" en este experimento, concluimos que

$$P(\text{arriba}) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}. \blacksquare$$

En el ejemplo 1, que implica lanzar una moneda no defectuosa, el número de resultados posibles era obviamente dos, ambos igualmente probables, y uno de los resultados era una cara. No se requirió un experimento real. La probabilidad deseada se obtuvo *teóricamente*. Las probabilidades teóricas se aplican a toda clase de juegos de azar (dados, cartas, ruleta, lotería, etc.), y aparentemente también a muchos fenómenos de la naturaleza. Laplace, en su famosa *Teoría analítica de la probabilidad*, publicada en 1812, ofreció una fórmula que se aplica a cualquiera de tales probabilidades teóricas, siempre que el espacio muestral S sea finito y los resultados sean igualmente probables. (A veces se le denomina la *definición clásica de la probabilidad*.)

Fórmula de la probabilidad teórica

Si todos los resultados en un espacio muestral S son igualmente probables, y E es un evento en ese espacio muestral, entonces la **probabilidad teórica** del evento E está dada por

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados}} = \frac{n(E)}{n(S)}.$$

El ejemplo 2, por su parte, consistió en lanzar una taza al aire, y en él las probabilidades de los diferentes resultados no eran claras de manera intuitiva. Tuvimos que efectuar un experimento real para llegar a un valor de probabilidad: 1/10. Este valor se encontró de acuerdo con la fórmula de la probabilidad *experimental*, o *empírica*.



En 1827, **Robert Brown**, (1773-1858), botánico y científico escocés, describió el movimiento irregular de partículas microscópicas de polen suspendidas en agua. Tal "movimiento browniano", como se le llamó, no fue comprendido sino hasta 1905, cuando Albert Einstein lo explicó al tratar el movimiento molecular como un fenómeno aleatorio.

Fórmula de la probabilidad empírica

Si E es un evento que puede ocurrir cuando se realiza un experimento, entonces la **probabilidad empírica** del evento E está dada por

$$P(E) = \frac{\text{número de veces que ocurre el evento } E}{\text{número de veces que se realizó el experimento}}.$$

Por lo general, en el momento de aplicarse queda claro cuál de las dos fórmulas de probabilidad debe usarse. Aquí están tres ejemplos más.

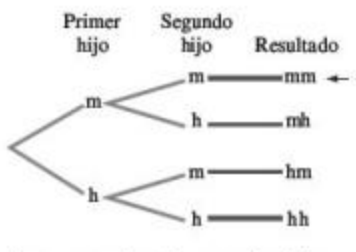
EJEMPLO 3 Michelle Brown quiere tener sólo dos hijas. Suponiendo que las probabilidades de tener un niño o una niña son iguales, determine la probabilidad de éxito en cada uno de los casos siguientes.

(a) En total tiene dos partos.

En este caso, suponer que hay una igualdad de probabilidades permite el uso de la probabilidad teórica. Pero, ¿cómo podemos determinar el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles?

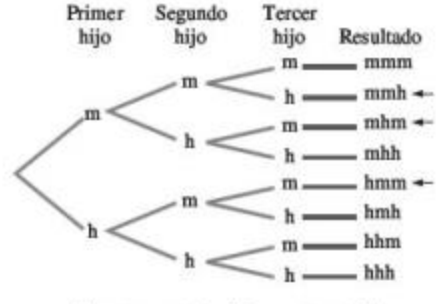
Una forma es utilizar un diagrama de árbol (sección 11.1) para enumerar las posibilidades, como se muestra en la figura 1. De la columna de resultados obtenemos el espacio muestral $S = \{mm, mh, hm, hh\}$ (en donde m representa niña y h representa niño). Sólo un resultado, el marcado con una flecha, es el evento favorable: exactamente dos niñas: $E = \{mm\}$. Por la fórmula de la probabilidad teórica,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}.$$



Exactamente dos niñas entre dos hijos

FIGURA 1



Exactamente dos niñas entre tres hijos

FIGURA 2

(b) En total tiene tres partos.

En el caso de tres partos elaboramos otro diagrama de árbol, como se muestra en la figura 2. En este caso, $S = \{mmm, mmh, mhm, mhh, hmm, hmh, hhm, hhh\}$ y $E = \{mmh, mhm, hmm\}$, de modo que $P(E) = 3/8$. ■

EJEMPLO 4 Determine la probabilidad de recibir cada una de las siguientes manos de cinco cartas de póquer. Utilice una calculadora para obtener las respuestas hasta ocho decimales.

(a) un *full* (tres de una denominación y dos de otra).

La tabla 1 resume todas las diferentes clases posibles de manos de cinco cartas. Como cada una de las 2,598,960 manos posibles son igualmente probables, podemos tomar de la tabla los números que requerimos y usarlos en la fórmula de la probabilidad teórica.

$$P(\textit{full}) = \frac{3774}{2{,}598{,}960} = \frac{6}{4165} \approx .00144058$$

(b) una escalera real (las cinco cartas mayores de un solo palo).

La tabla muestra que hay cuatro escaleras reales, una para cada palo, así que

$$P(\text{escalera real}) = \frac{4}{2{,}598{,}960} = \frac{1}{649{,}740} \approx .00000154. \quad \blacksquare$$

TABLA 1 Número de manos de póquer; no hay comodines

Evento E	Número de resultados en que ocurre E
Escalera real	4
Escalera de color	36
Póquer	624
Full	3744
Color	5108
Escalera	10,200
Trío (tercia)	54,912
Dos pares	123,552
Un par	1,098,240
Nada	1,302,540
Total	2,598,960

En los ejemplos 3 y 4, se utilizó la fórmula de la probabilidad teórica, ya que fuimos capaces de enumerar todos los resultados y todos ellos eran igualmente probables. Sin embargo, en el ejemplo 3 *supusimos* que la probabilidad de tener un varón o una niña era idéntica. En realidad, los nacimientos de varones ocurren con una frecuencia un poco mayor. (A la vez, por lo regular siempre hay más mujeres en cualquier momento dado, debido al mayor índice de mortalidad de los bebés varones y a que la esperanza de vida de las mujeres es mayor, en general.) En el ejemplo 5 veremos cómo incorporar tal información empírica.

EJEMPLO 5 En el año 2000, nacieron en Estados Unidos 2.077 millones de hombres y 1.982 millones de mujeres. Si una persona fue seleccionada aleatoriamente de los registros de nacimientos de ese año, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido hombre?

Ya que las probabilidades de que nazcan hombres o mujeres no son iguales, y tenemos información específica experimental que respalda este hecho, lo que hay que hacer es calcular la probabilidad empírica.

$$P(\text{hombre}) = \frac{\text{número de nacimientos de varones}}{\text{número total de nacimientos}} = \frac{2{,}077{,}000}{2{,}077{,}000 + 1{,}982{,}000} \approx .512$$

$\blacksquare$

Ley de los grandes números

Ahora piense nuevamente en la taza del ejemplo 2. Si se lanza la taza 50 veces más, tendríamos un total de 100 tiros sobre los cuales basar una probabilidad empírica de que la taza caerá boca abajo. Lo más probable es que el nuevo valor difiera (al menos un poco) del que obtuvimos antes. Aún sería una probabilidad empírica, pero sería "mejor" en el sentido de que estaría basada en un conjunto mayor de resultados.

Conforme aumenta el número de veces que lanzamos la taza, los valores de la probabilidad empírica resultante pueden aproximarse a algún valor particular. Si es así, ese número puede definirse como la probabilidad teórica de que esa taza en particular caiga boca abajo. Este valor "límite" sólo puede ocurrir cuando el número real de tiros observados se aproxime al número total de tiros posibles de la taza. Como potencialmente existe un número infinito de tiros, en realidad nunca encontraríamos la probabilidad teórica que queremos. Pero aún podemos suponer que tal número existe. Y cuando el número real de tiros observados aumente, la probabilidad empírica resultante debería tender a acercarse más a este valor teórico. Este importante principio se conoce como **ley de los grandes números** (o algunas veces como "ley de los promedios").

La **ley de los grandes números** también puede enunciarse como sigue. *Una probabilidad teórica en realidad no dice nada acerca de una, o incluso algunas, repeticiones de un experimento, sino sólo de la proporción de éxitos que esperaríamos obtener a largo plazo.*

Ley de los grandes números

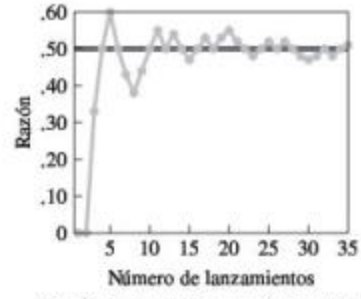
Cuantas más veces se repita un experimento, la proporción de resultados favorables a cualquier evento tenderá a estar cada vez más próxima a la probabilidad teórica de dicho evento.

EJEMPLO 6 Lanzamos una moneda 35 veces, con lo que se produjo la siguiente secuencia de resultados (donde h = cara y t = cruz).

tthhh ttthh hthtt hhthh ttthh thttt hhthh

Calcule la razón del número de caras al número total de lanzamientos, después del primer lanzamiento, el segundo lanzamiento, y así sucesivamente, hasta completar los 35 lanzamientos, y muestre estas razones en una gráfica.

Las primeras razones, hasta dos lugares decimales, son .00, .00, .33, .50, .60, .50, . . . La gráfica de la figura 3 muestra cómo las fluctuaciones distintas de .50 disminuyen conforme el número de lanzamientos aumenta, y la razón parece aproximarse a .50 hacia la parte derecha de la gráfica, en concordancia con la ley de los grandes números.



Razón de caras a lanzamientos totales

FIGURA 3 ■

Como podemos ver, la ley de los grandes números proporciona una conexión importante entre las probabilidades empírica y teórica. Al obtener de manera experimental una probabilidad empírica para un evento, podemos, mediante el razonamiento inductivo, *estimar* la probabilidad teórica de dicho evento. Cuanto mayor sea el número en que se basa la estimación, más confiable será ésta.

De manera similar, conocer la probabilidad teórica de un evento nos permite *predecir* (estimar), mediante el razonamiento deductivo, la fracción de veces que el evento ocurrirá en una serie de experimentos repetidos. Cuanto mayor sea el número de repeticiones, la predicción será más precisa.

La probabilidad en genética Las probabilidades, tanto empíricas como teóricas, han sido herramientas valiosas en muchas áreas de la ciencia. Uno de los primeros ejemplos importantes fue el trabajo del monje austriaco Gregor Mendel, quien aplicó la idea de aleatoriedad para ayudarse a establecer el estudio de la genética. Mendel publicó sus resultados en 1865, pero fueron ignorados por mucho tiempo, hasta 1900, cuando otros científicos redescubrieron y reconocieron la importancia de su obra.



Gregor Johann Mendel (1822-1884) provenía de una familia campesina que sólo con grandes esfuerzos pudo enviarlo a la escuela. En 1847 se ordenó sacerdote y ejerció la enseñanza en la abadía de Santo Tomás. Terminó su educación en la Universidad de Viena y regresó a la abadía a enseñar matemáticas y ciencias naturales. Mendel empezó a realizar sus experimentos sobre plantas en el jardín en la abadía, principalmente con guisantes, cuyas características distintivas (caracteres unitarios) despertaron su interés. En 1865, publicó sus resultados (la estampilla checa que aparece arriba conmemora el centenario de su muerte).

Su obra no se apreció en esa época, aunque sentó las bases para la genética clásica. Mendel estableció las leyes básicas de la herencia: las leyes de los caracteres unitarios, del predominio y de la segregación.

En un esfuerzo por entender el mecanismo de transmisión de caracteres de una generación de plantas a otra, Mendel contó el número de incidencias de diversas características. Por ejemplo, descubrió que el color de las flores de cierta planta de guisantes obedecía al siguiente esquema:

Rojas puras cruzadas con blancas puras producían rojas.

Mendel especuló que el rojo era "dominante" (que simbolizó con la letra mayúscula R), mientras que el blanco era "recesivo" (simbolizado con la letra minúscula r). El progenitor rojo puro porta sólo genes para rojo (R) y el progenitor blanco puro sólo porta genes para blanco (r). Los descendientes reciben un gen de cada progenitor, es decir, una de las cuatro combinaciones que aparecen en la tabla 2. Puesto que cada descendiente recibe un gen para rojo, esa característica domina y los descendientes presentan el color rojo.

TABLA 2 Primera a segunda generación

		Segundo padre	
		r	**r**
Primer padre	**R**	Rr	Rr
	R	Rr	Rr

TABLA 3 Segunda a tercera generación

		Segundo padre	
		R	**r**
Primer padre	**R**	RR	Rr
	r	rR	rr

Ahora bien, aunque cada uno de estos descendientes de la segunda generación presenta el color rojo, porta dentro de sí cada uno de ambos genes. Así, cuando dos de ellos se crucen, cada uno de los descendientes de la tercera generación recibirá una de las combinaciones de genes que se muestran en la tabla 3. Mendel discurrió que cada una de estas cuatro posibilidades sería igualmente probable, y produjo conteos experimentales que se acercaban lo suficiente como para apoyar esta hipótesis. (En años recientes, hay quienes han acusado a Mendel, o a sus asistentes, de amañar los datos experimentales, si bien sus conclusiones no han sido puestas en duda.)

EJEMPLO 7 Usando los datos de la tabla 3, determine la probabilidad de que una tercera generación de descendientes presente cada uno de los siguientes colores de flores. Sustente las probabilidades en el siguiente espacio muestral de resultados igualmente probables: $S = \{RR, Rr, rR, rr\}$.

(a) rojo

Como el rojo domina sobre el blanco, cualquier combinación con al menos un gen para rojo (R) dará por resultado flores rojas. Como tres de las cuatro posibilidades cumplen este criterio, $P(\text{roja}) = 3/4$.

(b) blanco

La combinación rr es la única que no tiene genes para el rojo, así que $P(\text{blanca}) = 1/4$. ■

Gracias a las leyes de probabilidad de la genética, que principiaron con la obra de Mendel, se han producido mejoras significativas en la tecnología para la producción de alimentos mediante la hibridación de animales y de cosechas. Además, la comprensión y el control de enfermedades del ser humano se han acelerado por los estudios relacionados con la genética.

Posibilidades Mientras que la probabilidad compara el número de resultados favorables con el número total de resultados, las **posibilidades** comparan el número de resultados favorables con el número de resultados desfavorables. Las posibilidades se utilizan más comúnmente que las probabilidades en las carreras de caballos, la lotería y en la mayoría de las situaciones que implican apuestas. Y, por lo general, las posibilidades que se mencionan son "en contra", más que posibilidades "a favor".

Posibilidades

Si todos los resultados en un espacio muestral son igualmente probables, y un número a de ellos son favorables al evento E, y los restantes b son desfavorables a E, entonces las **posibilidades a favor** de E son de a a b, y las **posibilidades en contra** de E son de b a a.

Las razones de posibilidades se pueden simplificar, como se hace con las fracciones. Por ejemplo, es preferible expresar posibilidades de 12 a 1 que de 48 a 4.

EJEMPLO 8 A Jennifer se le prometió uno de seis trabajos de verano, tres de los cuales serían en un cercano centro turístico en la playa. Si tiene las mismas oportunidades de obtener cualquiera de los seis trabajos, determine las posibilidades de que consiga uno en el centro turístico.

Puesto que tres de las posibilidades son favorables y las otras tres son desfavorables, las posibilidades de trabajar en el centro turístico son de 3 a 3, o de 1 a 1. (Se ha dividido entre el factor común 3.) A las posibilidades de 1 a 1 a menudo se les conoce como "igualdad de posibilidades" o "posibilidades de 50-50". ■

EJEMPLO 9 Donn Demaree compró seis boletos para una rifa de su oficina en la que el ganador recibiría un teléfono digital. Si en total se vendieron 51 boletos y cada uno tiene la misma oportunidad de salir ganador, ¿cuáles son las posibilidades que Donn tiene en contra de sacarse el teléfono?

Donn tiene seis oportunidades de ganar y 45 de perder, de modo que sus posibilidades en contra son de 45 a 6, o de 15 a 2. ■

EJEMPLO 10 Suponga que la probabilidad de que llueva mañana es de .13. Transforme esta información en posibilidades.

Podemos decir que

$$P(\text{lluvia}) = .13 = \frac{13}{100}.$$

Esta fracción no significa que necesariamente hay 13 resultados favorables y 100 resultados posibles, sino sólo que ocurrirá según esta *razón*. El número correspondiente de resultados *desfavorables* sería de 100 – 13 = 87 (total – favorables). Así, las posibilidades son de 13 a 87 a favor; podemos decir que las posibilidades son de 87 a 13 en contra de que llueva mañana. ■

EJEMPLO 11 En cierta lotería, las posibilidades de ganar son de 1 a 99,999,999. ¿Cuáles son las probabilidades de ganar?

Las posibilidades mencionadas proporcionan una razón de 1 resultado favorable y 99,999,999 desfavorables, por lo tanto, 1 + 99,999,999 = 100,000,000 de resultados totales. Entonces,

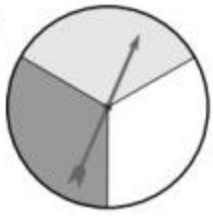
$$P(\text{ganar}) = \frac{\text{favorable}}{\text{total}} = \frac{1}{100{,}000{,}000} = .00000001.$$ ■

En esta sección se han aplicado algunas de las ideas de la teoría de conjuntos, y otras más irán apareciendo conforme avancemos. En este punto vale la pena hacer un resumen. Para cualquier experimento de probabilidades, el conjunto universal es el conjunto de todos los posibles resultados. En el contexto presente, a esto lo denominamos espacio muestral. Por lo tanto, cualquier conjunto dentro del conjunto universal es un subconjunto del espacio muestral. A dicho subconjunto lo consideramos un evento. Normalmente lo que nos interesa es la probabilidad, o posibilidad de que ocurra, un evento en particular.

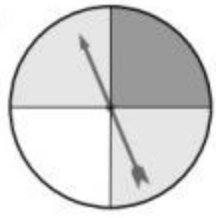
12.1 EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4, ¿qué probabilidad hay de que la flecha giratoria se detenga en una región **(a)** *de sombreado oscuro,* **(b)** *de sombreado claro,* **(c)** *sin sombrear?*

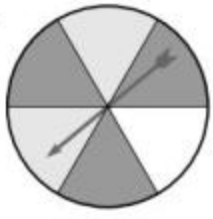
1.



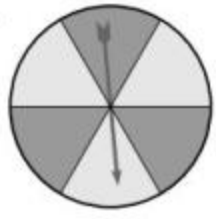
2.



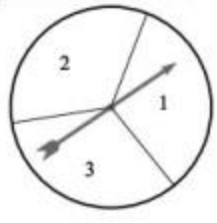
3.



4.



5. ***Uso de ruletas para generar números*** Suponga que hacemos girar una vez la ruleta que aparece aquí para elegir un número de un dígito, y lo que nos interesa es el evento, E, que el número resultante sea impar. Responda lo que se le pide a continuación.



   (a) El espacio muestral.
   (b) El número de resultados favorables.
   (c) El número de resultados desfavorables.
   (d) El número total de resultados posibles.
   (e) La probabilidad de obtener un número impar.
   (f) Las posibilidades a favor de un número impar.

6. ***Formar en línea a niños de preescolar*** En el grupo de preescolar de Lynn Damme hay ocho niñas y cinco niños. Si Lynn elige al azar a un pequeño (niño o niña) para que esté al frente de la fila, y E es el evento de que el seleccionado sea niña, proporcione los siguientes datos.
   (a) El número total de resultados posibles.
   (b) El número de resultados favorables.
   (c) El número de resultados desfavorables.
   (d) La probabilidad de que ocurra el evento E.
   (e) Las posibilidades a favor del evento E.

7. ***Uso de ruletas para generar números*** La ruleta del ejercicio 5 se giró dos veces consecutivas para elegir un número de dos dígitos. Proporcione los siguientes datos.
   (a) El espacio muestral.
   (b) La probabilidad de obtener un número impar.
   (c) La probabilidad de obtener un número con dígitos repetidos.
   (d) La probabilidad de obtener un número mayor que 30.
   (e) La probabilidad de obtener un número primo.

8. ***Probabilidades al lanzar monedas*** Se lanzan al aire dos monedas (por ejemplo, una de 10 y otra de 25 centavos). Proporcione los siguientes datos.
   (a) El espacio muestral.
   (b) La probabilidad de que caiga cara en la moneda de 10 centavos.
   (c) La probabilidad de que caiga cara en la de 25 centavos.
   (d) La probabilidad de que caiga cara en ambas.
   (e) La probabilidad de que ambas monedas caigan en del mismo lado.

9. ***Extracción de bolas de una urna*** Anne Kelly elige aleatoriamente una bola de la urna que se muestra aquí. Determine las posibilidades a favor de cada uno de los eventos siguientes.



   (a) negra **(b)** gris **(c)** blanca

10. ***Elección aleatoria de dirigentes de un club*** Cinco personas (Andy, Bill, Cathy, David y Evelyn) forman el club $N = \{A, B, C, D, E\}$. Si eligen a un presidente de forma aleatoria, determine las probabilidades en contra de cada uno de los resultados siguientes.
   (a) Que el presidente sea David.
   (b) Que sea una mujer.
   (c) Que sea alguien cuyo nombre inicie con una vocal.

11. ***Selección aleatoria de música de los cincuenta*** Joe "la Rockola" tiene 50 discos sencillos de éxitos de los años cincuenta, incluyendo exactamente uno de Buddy Holly, dos de The Drifters, tres de Bobby Darin, cuatro de The Coasters y cinco de Fats Domino. Si Joe elige aleatoriamente sólo uno de entre los 50 éxitos de su colección, determine la probabilidad de que la canción sea de:
   (a) Buddy Holly **(b)** The Drifters
   (c) Bobby Darin **(d)** The Coasters
   (e) Fats Domino

12. ***Probabilidades al lanzar monedas*** Se lanzan tres monedas al aire. Escriba el espacio muestral, luego determine la probabilidad de que ocurra cada uno de los eventos siguientes.
(a) Ninguna cara. **(b)** Exactamente una cara.
(c) Exactamente dos caras. **(d)** Tres caras.

13. ***Suma de números con el tiro de dos dados*** En la tabla 2 de la sección 11.1 mostramos el espacio muestral de tirar dos dados. Reproduzca esa tabla, pero reemplace cada uno de los 36 pares igualmente probables por la suma correspondiente (para los dos dados). Luego determine la probabilidad de obtener cada una de las sumas siguientes:
(a) 2 **(b)** 3 **(c)** 4 **(d)** 5
(e) 6 **(f)** 7 **(g)** 8 **(h)** 9
(i) 10 **(j)** 11 **(k)** 12

En los ejercicios 14 y 15, calcule la respuesta hasta tres fracciones decimales.

14. ***Probabilidades de que una semilla germine*** En un proyecto de investigación sobre un maíz híbrido, se plantaron 200 semillas, de las que germinaron 170. Encuentre la probabilidad empírica de que germine una semilla en particular de este tipo.

15. ***Probabilidades de que nazcan niños o niñas*** En cierto estado de Estados Unidos, en 1996 nacieron 38,550 varones y 36,770 mujeres. Determine la probabilidad empírica de que uno de esos nacimientos, seleccionado al azar, sea
(a) un varón. **(b)** una mujer.

16. ***Probabilidades de tener dos hijas entre cuatro descendientes*** En el ejemplo 3, ¿cuál sería la probabilidad de que Michelle tuviera exactamente dos mujeres, si fuese a tener cuatro hijos en total? (Quizá necesite usar un diagrama de árbol para construir ese espacio muestral.)

17. Explique la diferencia entre probabilidad teórica y empírica.

18. Explique la diferencia entre probabilidad y posibilidades.

Genética en la boca de dragón *Mendel descubrió que en la planta conocida como boca de dragón, las flores de color rojo y blanco no tenían rasgos dominantes (a diferencia de los guisantes). Cuando padres color rojo puro y blanco puro se cruzan (véase la tabla 2), la combinación resultante* Rr *(uno de cada gen) produce una segunda generación de descendientes con flores color de rosa. Sin embargo, esta segunda generación aún lleva un gen rojo y uno blanco, de modo que, cuando se cruzan, la tercera generación aún está regida por la tabla 3.*

Determine las probabilidades siguientes para la tercera generación de flores de boca de dragón.

19. P(rojo) 20. P(rosa) 21. P(blanco)

Genética en las plantas de guisante *Mendel también investigó diversas características, además del color de las flores. Por ejemplo, los guisantes redondos son dominantes, mientras que los guisantes arrugados son recesivos. La primera, segunda y tercera generaciones pueden analizarse de nuevo por medio de las tablas 2 y 3, donde* R *corresponde a redondo y* r *a arrugado.*

22. Explique por qué al cruzarse una primera generación de padres redondos puros con padres arrugados puros la segunda generación de descendientes siempre producirá guisantes redondos.

23. Cuando se cruza la segunda generación de plantas de guisantes redondos (cada uno lleva ambos genes, *R* y *r*), determine la probabilidad de que la tercera generación de descendientes sea de
(a) guisantes redondos. **(b)** guisantes arrugados.

Genética de la fibrosis quística *La* **fibrosis quística** *es una de las enfermedades hereditarias más comunes en todos los países de América del Norte, pues ocurre en cerca de 1 de cada 2000 nacimientos de caucásicos y aproximadamente en 1 de cada 250,000 nacimientos de no caucásicos. Aun con tratamientos modernos, por lo regular las víctimas mueren de daño en los pulmones antes de cumplir los 20 años. Si denotamos al gen de fibrosis quística con* c *y a un gen libre de la enfermedad con* C *(puesto que el mal es recesivo), entonces sólo quien tenga los genes* cc *padecerá la enfermedad. Por lo general, tales personas mueren antes de tener descendientes, pero dos padres* Cc *(que son saludables, esto es, que no muestran síntomas pero son "portadores" de la enfermedad) pueden heredarle el mal a un hijo. Este fenómeno es parecido al de la planta de guisantes que recibe la herencia de producir flores blancas de dos padres de flores rojas que son portadores de genes blancos.*

24. Determine la probabilidad empírica (hasta cuatro cifras decimales) de que la fibrosis quística se presente en un recién nacido elegido al azar entre caucásicos estadounidenses.

25. Determine la probabilidad empírica (hasta seis cifras decimales) de que la fibrosis quística se presente en un recién nacido seleccionado aleatoriamente entre no caucásicos estadounidenses.

26. De entre 150,000 nacimientos de caucásicos en América del Norte, ¿alrededor de cuántas incidencisas de fibrosis quística se esperarían?

Suponga que ambos cónyuges de un matrimonio son portadores de fibrosis quística (una rara incidencia). Elabore un esquema semejante a la tabla 3 y determine la probabilidad de que ocurra cada uno de los eventos siguientes.

27. El primer hijo tendrá la enfermedad.

28. El primer hijo será portador.

29. El primer hijo no será portador ni tendrá la enfermedad.

Suponga que un niño nace de un padre portador de fibrosis quística y una madre no portadora. Encuentre la probabilidad de que ocurra cada uno de los eventos siguientes.

30. El niño tendrá fibrosis quística.

31. El niño será saludable, pero será portador de fibrosis quística.

32. El niño no tendrá la enfermedad ni será portador.

Genética de la anemia de células falciformes La **anemia de células falciformes** *o drepanocitosis ocurre en cerca de 1 de cada 500 nacimientos de bebés de raza negra y en aproximadamente 1 de cada 160,000 criaturas que no son de raza negra. En los primeros años de la niñez, esta enfermedad por lo común es mortal. Hay una prueba para identificar a los portadores. A diferencia de la fibrosis quística, que es recesiva, la anemia de células falciformes es* **codominante**, *lo que significa que heredar dos de sus genes provoca la enfermedad, mientras que heredar sólo un gen de este tipo de anemia provoca una versión (no mortal) benigna (que se conoce como* **rasgo de falciformidad**). *Esto es igual a lo que sucede con la planta de boca de dragón, que manifiesta flores rosas al heredar un gen rojo y otro blanco.*

En los ejercicios 33 y 34, determine la probabilidad empírica de que ocurra cada uno de los eventos siguientes.

33. Un bebé de raza negra elegido al azar tendrá anemia de células falciformes. (Dé su respuesta hasta tres cifras decimales.)

34. Un bebé que no es de raza negra elegido al azar tendrá anemia de células falciformes. (Dé su respuesta hasta seis cifras decimales.)

35. Entre 80,000 nacimientos de bebés de raza negra, ¿alrededor de cuántas incidencias de anemia de células falciformes se esperarían?

Determine la probabilidad teórica de cada una de las siguientes condiciones en un niño, cuando ambos padres presentan el rasgo de falciformidad.

36. El niño tendrá anemia de células falciformes.

37. El niño presentará el rasgo de falciformidad.

38. El niño será saludable.

39. ***Carrera de 100 metros para damas*** En la historia de las competencias de pista y campo, ninguna mujer ha roto la barrera de los 10 segundos en la carrera de 100 metros planos.

(a) Del enunciado anterior, determine la probabilidad empírica de que una corredora rompa la barrera de los 10 segundos el año próximo.

(b) ¿Puede determinar la probabilidad teórica para el evento del inciso (a)?

(c) ¿Es posible que ocurra el evento del inciso (a)?

40. ¿Hay alguna forma en que una moneda deje de ser "legal", es decir, sin defectos? Explique su respuesta.

41. En la página 27 de su libro *Descartes' Dream*, Philip Davis y Reuben Hersh formulan la pregunta: "¿La probabilidad es una cuestión real o es sólo una forma de encubrir la ignorancia?". ¿Qué piensa usted? ¿Hay cosas que realmente son aleatorias o todo es potencialmente determinista?

42. Si $P(E) = .37$, determine **(a)** las posibilidades a favor de E y **(b)** las posibilidades en contra de E.

43. Si las posibilidades a favor del evento E son 12 a 9, encuentre $P(E)$.

44. Si las posibilidades en contra del evento E son 10 a 3, encuentre $P(E)$.

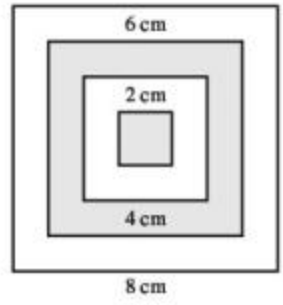
Probabilidades en manos de póquer *En un juego de póquer, determine las probabilidades de recibir cada una de las siguientes manos. Proporcione cada respuesta hasta ocho decimales. (Consulte la tabla 1.)*

45. Una escalera de color. **46.** Dos pares.

47. Cuatro reinas.

48. Una mano con sólo corazones (*que no sea* escalera real ni escalera de color).

49. ***Probabilidades en el tiro de dardos*** Si un dardo se clava de manera aleatoria en el objetivo cuadrado que se muestra a continuación, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en alguna región sombreada? (*Una pista*: Compare el área de la región sombreada con el área total del objetivo.)



50. ***Extracción de cartas*** Cuando se sacan cartas sin reemplazarlas de una baraja estándar de 52 cartas, determine el número máximo de cartas que tendría que sacar para obtener

(a) menos de tres cartas negras,

(b) menos de seis espadas,

(c) menos de cuatro cartas de figuras,

(d) menos de dos reyes.

El resto de los ejercicios requieren de una reflexión cuidadosa para determinar n(E) y n(S). (En algunos casos, podría requerir de los métodos de conteo del capítulo 11, tales como el principio fundamental de conteo, las permutaciones o las combinaciones.)

Probabilidades de acomodarse en varias sillas *Tres matrimonios se acomodan aleatoriamente en seis lugares contiguos en una fila. Determine la probabilidad de que ocurra cada uno de los eventos en los ejercicios 51 a 54. (Una pista: En cada caso, el denominador de la probabilidad, en forma de fracción, será* $6! = 720$, *el número total de formas en que pueden acomodarse seis objetos.)*

51. Cada hombre se sentará inmediatamente a la izquierda de su esposa.

52. Cada hombre se sentará inmediatamente a la izquierda de una mujer.

53. Las mujeres estarán en tres asientos contiguos.

54. Las mujeres estarán en tres asientos contiguos y también los hombres.

55. Si se eligen dos números distintos del conjunto $\{-2, -4/3, -1/2, 0, 1/2, 3/4, 3\}$ al azar, determine la probabilidad de que los números seleccionados sean las pendientes de dos líneas perpendiculares.

56. ***Apuestas en las carreras*** En la mayor parte de las carreras de caballos, la "trifecta" es una carrera particular en la que uno gana si selecciona correctamente a los caballos que llegan en primero, segundo y tercer lugares, justo en ese orden. Si cinco caballos de igual capacidad entran en la trifecta de hoy y usted elige una combinación de ellos, ¿qué probabilidades tiene de resultar ganador?

57. ***Probabilidades de programación de cursos de un estudiante*** Suponga que planea tomar tres cursos el próximo semestre. Si los selecciona al azar de entre una lista de 12 cursos, cinco de los cuales son de ciencias, ¿cuál es la probabilidad de que los tres cursos sean de ciencias?

58. ***Elegir la presentación de una orquesta*** Cheryl Chechvala selecciona al azar las presentaciones de tres orquestas a las que asistirá esta temporada, eligiéndolas de un programa de 10, tres de las cuales ofrecerán obras de Beethoven. Encuentre la probabilidad de que los tres programas elegidos por Cheryl sean sólo de obras de Beethoven.

Selección de reportes de clase *Suponiendo que Ben, Jill y Pam pertenecen a un grupo de 36 alumnos, y que se elegirán al azar tres miembros de la clase para entregar sus informes durante la siguiente reunión del grupo, determine la probabilidad (hasta seis cifras decimales) de que ocurra cada uno de los eventos siguientes.*

59. Ben, Jill y Pam resultarán seleccionados, y en ese orden.

60. Ben, Jill y Pam resultarán seleccionados, pero en cualquier orden.

61. ***Selección aleatoria de números primos*** Si se seleccionan dos números primos distintos de entre los primeros ocho números primos, ¿cuál es la probabilidad de que su suma sea 24?

62. ***Creación de números a partir de conjuntos de dígitos*** Los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 se acomodan aleatoriamente para formar un número con cinco dígitos. Determine la probabilidad de que ocurra cada uno de los eventos siguientes.
(a) El número es par.
(b) Los dígitos primero y último son pares.

63. ***Sumas aleatorias*** Se seleccionan al azar dos enteros del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y se suman. Determine la probabilidad de que su suma sea 11, si se seleccionan
(a) con reemplazo,
(b) sin reemplazo.

Encontrar números palíndromos *Los números que son* **palíndromos** *se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo,* 30203 *es un palíndromo de cinco dígitos. Si se elige al azar un número de cada uno de los conjuntos siguientes, determine la probabilidad de que sea palíndromo.*

64. El conjunto de todos los números de dos dígitos.

65. El conjunto de todos los números de tres dígitos.

12.2 Eventos que incluyen "no" y "o"

Recuerde, de la sección anterior, que una probabilidad empírica basada en la observación experimental puede ser el mejor valor con que contemos, aunque no deja de ser sólo una aproximación a la probabilidad teórica (la "verdadera"). Por ejemplo, nunca se ha sabido de un humano que salte más de dos metros y medio en forma vertical, por lo tanto, la probabilidad empírica de tal evento es cero. Sin embargo, al observar la velocidad a la que se han ido rompiendo los récords de salto de altura, sospechamos que el evento es, de hecho, posible, y que algún día podría llegar a ocurrir. Por lo tanto, debería tener alguna probabilidad teórica diferente de cero, aunque no tengamos manera alguna de asignarle su valor exacto.

También recuerde que la fórmula de la probabilidad teórica,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)},$$



Pierre Simon de Laplace (1749-1827) comenzó a resolver en 1773 el problema de por qué la órbita de Júpiter parece contraerse mientras que la de Saturno parece expandirse. Finalmente, Laplace dilucidó los movimientos de todo el Sistema Solar. Su obra, *Mecánica celeste*, resultado de casi toda una vida de trabajo, se publicó en cinco volúmenes entre 1799 y 1825, y con ella Laplace se hizo merecedor del título de "el Newton de Francia".

El trabajo de Laplace sobre probabilidad era de hecho un complemento a su mecánica celeste. Necesitaba demostrar que la probabilidad es útil en la interpretación de la información científica. También escribió, a modo de divulgación popular, una exposición sobre el sistema, la cual contiene ('en una nota a pie de página!) la "hipótesis nebular" según la cual el Sol y los planetas se originaron de una nube de materia, la cual después se enfrió y condensó en cuerpos separados.

sólo es válida para resultados igualmente probables dentro del espacio muestral S. Para el experimento de lanzar al aire dos monedas podemos escribir $S = \{hh, ht, th, tt\}$ y calcular de forma correcta que

$$P(\text{ambas caras}) = \frac{1}{4},$$

en tanto que si designamos como $S = \{\text{dos caras, dos cruces, uno de cada uno}\}$ al espacio muestral con resultados no igualmente probables, tenemos que

$$P(\text{dos caras}) = \frac{1}{3}, \qquad \text{lo cual es } \textit{incorrecto.}$$

(Para que se convenza de que $1/4$ es un mejor valor que $1/3$, lance al aire dos monedas unas 100 veces y observe cuál parece ser la fracción empírica que se aproxima más al resultado probable.)

Puesto que cualquier evento E es un subconjunto de S, sabemos que $0 \le n(E) \le n(S)$. Al dividir a todos los miembros de esta desigualdad entre $n(S)$, tenemos que

$$\frac{0}{n(S)} \le \frac{n(E)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)}, \quad \text{o} \quad 0 \le P(E) \le 1.$$

Dicho con palabras, la probabilidad de cualquier evento es un número entre 0 y 1, inclusive.

Si el evento E es *imposible* (no puede suceder), entonces $n(E)$ debe ser 0 (E es el conjunto vacío), por lo tanto $P(E) = 0$. Si un evento E es *seguro* (es inevitable que ocurra), entonces $n(E) = n(S)$, de modo que $P(E) = n(E)/n(S) = n(S)/n(S) = 1$. Estas propiedades se resumen a continuación.

Propiedades de la probabilidad

Sea E un evento en el espacio muestral S. Esto es, E es un subconjunto de S. Entonces se presentan las siguientes propiedades.

1. $\mathbf{0 \le P(E) \le 1}$ (La probabilidad de un evento es un número entre 0 y 1, inclusive.)
2. $\mathbf{P(\emptyset) = 0}$ (La probabilidad de un evento imposible es de 0.)
3. $\mathbf{P(S) = 1}$ (La probabilidad de un evento seguro es de 1.)

EJEMPLO 1 Si tira un dado no cargado, determine la probabilidad de que ocurra cada uno de los siguientes eventos.

(a) obtiene el número 2

Puesto que una de las seis posibilidades es 2, $P(2) = 1/6$.

(b) obtiene un número diferente de 2

Hay 5 de estos números, 1, 3, 4, 5 y 6, de modo que $P(\text{un número diferente de } 2) = 5/6$.

(c) obtiene el número 7

Ninguno de los posibles resultados es 7. Por lo tanto, $P(7) = 0/6 = 0$.

(d) obtiene un número menor que 7

Puesto que los seis posibles resultados son menores que 7, $P(\text{un número menor que } 7) = 6/6 = 1$. ■



A **Mary Somerville** (1780-1872) se la asocia con Laplace por la brillante exposición que realizó de la *Mecánica celeste* de aquél. Mary Somerville combinaba una comprensión profunda de la ciencia con la habilidad de comunicar sus conceptos al público en general.

Estudió minuciosamente a Euclides y perfeccionó su latín con el fin de poder leer los *Principia* de Newton. Hacia 1816 se trasladó a Londres y pronto pasó a formar parte de los círculos literarios y científicos de esa ciudad. También intercambió correspondencia con Laplace y otros científicos europeos de la época.

Su libro sobre las teorías de Laplace se publicó en 1831 y tuvo una gran acogida. A éste le siguió un libro panorámico, *Connection of the Physical Sciences* (1834). Un párrafo que aparece en una de las ediciones de esta obra sugiere que las irregularidades de la órbita de Urano podrían indicar la existencia de un planeta más remoto, aún no descubierto. Esto llamó la atención de los científicos que más tarde realizarían los cálculos sobre la órbita de Neptuno.

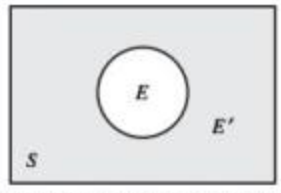
Observe que los incisos (c) y (d) del ejemplo 1 ilustran las propiedades 2 y 3 de la probabilidad, respectivamente. Observe también que los eventos de los incisos (a) y (b) son *complementos* uno del otro y que sus probabilidades suman 1, lo cual es cierto para cualesquiera dos eventos complementarios; esto es, $P(E) + P(E') = 1$. Reagrupando términos, podemos escribir esta ecuación de dos formas equivalentes, de las cuales la más útil se indica en la siguiente regla.

Regla de la probabilidad de los complementos

La probabilidad de que un evento E ocurra es igual a uno menos la probabilidad de que *no* ocurra.

$$P(E) = 1 - P(E')$$

Si usted ha estudiado métodos de conteo, observará que esta regla es análoga al principio de conteo de los complementos (y en realidad se deduce de la misma). La regla de los complementos se ilustra en la figura 4.



El conectivo lógico "no" corresponde al "complemento" en la teoría de conjuntos.

$$P(\text{no } E) = P(S) - P(E)$$
$$= 1 - P(E)$$

FIGURA 4

El ejemplo siguiente ilustra la forma en que la regla de los complementos permite calcular probabilidades de forma indirecta, cuando ello resulta más sencillo.

EJEMPLO 2 Cuando se toma una carta de una baraja estándar de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que esa carta no sea un rey?

Es más fácil contar los reyes que las cartas que no lo son. Sea E el evento de *no* tomar un rey. Entonces,

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{n(E')}{n(S)} = 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}.$$ ■

Ahora consideremos algunas formas de combinar eventos para obtener otros eventos. Primero, buscamos las combinaciones que incluyan el conectivo lógico "o". Para el evento A y el evento B, pretendemos calcular $P(A \text{ o } B)$. "A o B" es el evento en el que ocurre por lo menos uno de los dos eventos individuales.

EJEMPLO 3 Si se escoge un número al azar del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, determine la probabilidad de que sea un número impar o un múltiplo de 3.

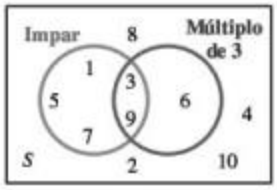


FIGURA 5

Tome como espacio muestral a $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Por lo tanto, si A es el evento en el que el número es impar y B el evento en el que el número es un múltiplo de 3, tenemos

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{y} \quad B = \{3, 6, 9\}.$$

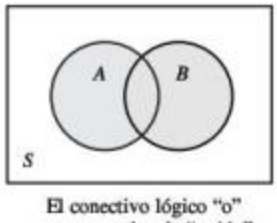
La figura 5 muestra la posición de los 10 enteros dentro del espacio muestral, y vemos que $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$. El evento compuesto A *o* B corresponde al conjunto $A \cup B$. Por lo tanto, por la fórmula de la probabilidad teórica,

$$P(A \text{ o } B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}. \qquad \blacksquare$$

En general, no podemos simplemente sumar las probabilidades individuales de un evento compuesto de la forma A *o* B. Si lo hubiéramos hecho así en el ejemplo 3 habríamos obtenido

$$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \quad \text{lo cual es } \textit{incorrecto.}$$

De haberlo hecho así, habríamos contado dos veces los resultados dentro de la intersección. Los enteros 3 y 9 son tanto impares *como* múltiplos de 3. La regla general correcta se establece de la siguiente forma. (Ya que los conectivos lógicos *o* e *y* corresponden a las operaciones de conjuntos $\cup$ (unión) e $\cap$ (intersección), respectivamente, podemos enunciar dos versiones de esta regla.)



El conectivo lógico "o" corresponde a la "unión" en la teoría de conjuntos.

$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$

FIGURA 6

Regla general de la suma de probabilidades

Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces,

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B),$$

o

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

La regla general para la suma se ilustra en la figura 6. Esta regla se obtiene del principio general de conteo para sumas: $n(A \cup B) = n(B) - n(A \cap B)$. Por ahora, consideraremos solamente eventos de la forma "A y B", que son bastante sencillos, como en el ejemplo 3. En la siguiente sección trataremos más casos en los que intervengan conjuntos compuestos que incluyan el conectivo "y".

EJEMPLO 4 Marc planea ver uno de los 20 programas de televisión que se transmitirán esta noche, mismo que elegirá al azar lanzando un dardo hacia el desplegado impreso de la programación televisiva. Si 8 de los programas son educativos, 9 son interesantes y 5 son educativos e interesantes, determine la probabilidad de que el programa que vea tenga por lo menos uno de estos atributos.

Si E representa "educativo" e I representa "interesante", entonces $P(E) = 8/20$, $P(I) = 9/20$ y $P(E \text{ e } I) = 5/20$. Por lo tanto,

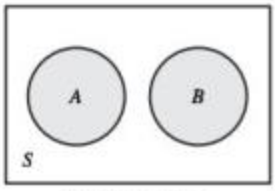
$$P(E \text{ o } I) = \frac{8}{20} + \frac{9}{20} - \frac{5}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Suponga que hay que tomar una carta de entre las 52 de una baraja estándar. Determine la probabilidad de que sea de espadas o roja.

En el mazo hay 13 cartas de espadas y 26 cartas rojas. Pero es imposible que ocurra el evento "espadas y roja", ya que no existen cartas de espadas rojas (todas las espadas son negras). Por lo tanto, el tercer término en la regla general para la suma será 0 (por la propiedad 2 de la probabilidad) y puede omitirse. De ahí que

$$P(\text{espadas } o \text{ roja}) = P(\text{espadas}) + P(\text{roja}) = \frac{13}{52} + \frac{26}{52} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}. \quad \blacksquare$$

En el ejemplo 5, vimos que el evento "espadas *y* roja" tiene probabilidad cero porque, al tomar una sola carta, las espadas y el color rojo no pueden salir al mismo tiempo. De forma general, cuando dos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo se dice que son **mutuamente excluyentes**. (Como conjuntos, a dichos eventos se les denomina "disjuntos".) Para los eventos A y B que son mutuamente excluyentes, la regla de la suma de probabilidades toma una forma más sencilla que se establece a continuación.



Cuando A y B son mutuamente excluyentes $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$.

FIGURA 7

Regla especial de la suma de probabilidades

Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes en un experimento dado, entonces

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B),$$

o

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

La regla especial de la suma se ilustra en la figura 7.

A menudo nos encontramos con casos en los que hay que considerar combinaciones de más de dos eventos. Cuando cada evento involucrado es mutuamente excluyente de todos los demás, puede aplicarse una extensión de la regla especial de la suma.

x	$P(x)$
1	.05
2	.10
3	.20
4	.40
5	.10
6	.15

EJEMPLO 6 Sara calcula que sólo existe una pequeña posibilidad de que pueda terminar su tarea en una hora esta noche. De hecho, si x representa el número de horas dedicadas a la tarea, entonces ella asigna probabilidades a los diferentes valores de x, como se aprecia en la tabla al margen. (Estamos suponiendo que el tiempo real necesario se redondeará a la hora más cercana y que no tomará menos de 1 hora ni más de 6. Los seis periodos determinados son mutuamente excluyentes entre sí ya que, por ejemplo, si a Sara le toma 3 horas hacer su tarea, entonces no la habrá hecho en 2 horas, ni en 4 horas, ni en cualquiera de las otras opciones.) Determine la probabilidad de que termine su tarea en cada uno de los siguientes periodos.

(a) menos de 3 horas

"Menos de 3 horas" significa 1 o 2. Por lo tanto, $P(\text{menos de 3}) = .05 + .10 = .15$.

(b) más de 2 horas

$$\begin{aligned} P(\text{más de 2}) &= P(3 \ o \ 4 \ o \ 5 \ o \ 6) \\ &= P(3) + P(4) + P(5) + P(6) \\ &= .20 + .40 + .10 + .15 = .85 \end{aligned}$$

(c) más de 1 hora pero no más de 5

$$\begin{aligned} P(\text{más de 1 pero no más de 5}) &= P(2) + P(3) + P(4) + P(5) \\ &= .10 + .20 + .40 + .10 = .80 \end{aligned}$$

(d) menos de 5 horas

Aunque aquí podríamos emplear un enfoque directo, como en los incisos (a), (b) y (c), combinaremos la regla de probabilidad de los complementos con la regla especial de la suma. (Esto mejoraría mucho nuestra eficiencia si la lista de posibilidades fuese muy grande.)

$$\begin{aligned} P(\text{menos de 5 horas}) &= 1 - P(\text{no menos de 5 horas}) \\ &= 1 - P(5 \text{ o } 6) \\ &= 1 - [P(5) + P(6)] \\ &= 1 - (.10 + .15) \\ &= 1 - .25 \\ &= .75 \end{aligned}$$

■

En el ejemplo 6, la tabla muestra todos los posibles intervalos de modo que las probabilidades correspondientes suman 1, una condición necesaria para la forma en que se resolvió el inciso (d). El tiempo requerido para hacer la tarea es un ejemplo de **variable aleatoria**. (Es "aleatoria" pues no podemos predecir cuál de los valores posibles tendrá lugar.) Una tabla, como la del ejemplo 6, que lista todos los posibles valores de una variable aleatoria junto con las respectivas probabilidades de que ocurra, se denomina **distribución de probabilidad** de dicha variable aleatoria. Como ahí aparecen *todos* los valores posibles, éstos forman en su totalidad el espacio muestral y, por ende, las probabilidades listadas deben sumar 1 (por la propiedad 3 de la probabilidad). En otra sección del libro analizaremos las distribuciones de probabilidad.

12.2 EJERCICIOS

1. ***Cómo determinar si dos eventos son mutuamente excluyentes*** Julie Davies tiene tres asistentes en su oficina. Si A es el evento de que al menos dos de ellos sean hombres y B es el evento de que por lo menos dos sean mujeres, ¿son A y B mutuamente excluyentes?

2. ***Asistir a diferentes universidades*** Nancy Hart obtuvo su título universitario hace varios años. Considere los siguientes cuatro eventos.

   Su *alma mater* está en el Este.
   Su *alma mater* es un colegio privado.
   Su *alma mater* está en el Noroeste.
   Su *alma mater* está en el Sur.

   ¿Son estos eventos mutuamente excluyentes entre sí?

3. Explique la diferencia entre las reglas "general" y "especial" de la suma de probabilidades, e ilustre cada una con un ejemplo apropiado.

Probabilidades al tirar un dado *Para el experimento de tirar un dado, encuentre la probabilidad de que caiga cada uno de los valores siguientes.*

4. no menos de 2
5. un número no primo
6. un número impar o menor que 5
7. un par o primo
8. un impar o par
9. menos que 3 o más que 4

La probabilidad y las posibilidades al sacar una carta *Para el experimento de tomar una sola carta de un mazo de 52 cartas, determine* **(a)** *la probabilidad y* **(b)** *las posibilidades a favor de cada uno de los eventos siguientes.*

10. que no sea un as
11. que sea rey o reina
12. trébol o corazón
13. que sea espada o figura
14. que no sea de corazón, o 7
15. ni corazón ni 7

Suma de valores de un par de dados *Para el experimento de tirar un par de dados comunes, determine la probabilidad de que la suma sea igual a cada uno de los siguientes números. (Tal vez desee elaborar una tabla que muestre la suma de cada uno de los 36 resultados igualmente probables.)*

16. 11 o 12
17. par o múltiplo de 3
18. impar o mayor que 9
19. menor que 3 o mayor que 9

20. Encuentre la probabilidad de sacar un número primo en cada uno de los siguientes casos
    (a) Al elegir un número al azar del siguiente conjunto {1, 2, 3, 4, ..., 12}.
    (b) Se tiran dos dados y se observa cuánto suman.

21. Suponga, para un experimento determinado, que A, B, C y D son eventos mutuamente excluyentes entre sí, de manera que $A \cup B \cup C \cup D = S$ (espacio muestral). Si ampliamos la regla especial para la suma de probabilidades para incluir este caso y utilizamos la propiedad 3 de la probabilidad, ¿qué podría afirmarse?

Probabilidades de manos de póquer *Si le dan a usted una mano de 5 cartas (esto implica sin reemplazo) de un mazo estándar de 52 cartas, determine la probabilidad de obtener cada uno de los siguientes juegos. Consulte la tabla 1 de la sección 12.1 y dé sus respuestas hasta seis cifras decimales.*

22. color o trío

23. *full* o escalera

24. color con cartas negras o dos pares

25. nada mejor que dos pares

Probabilidades en un marcador de golf *En la tabla se proporcionan las probabilidades que tiene Amy Donlin de obtener diversos marcadores que la golfista, en varios intervalos, en un campo de par 70. En una ronda dada, determine la probabilidad de que su marcador sea cada uno de los siguientes.*

x	$P(x)$
Debajo de 60	.04
60–64	.06
65–69	.14
70–74	.30
75–79	.23
80–84	.09
85–89	.06
90–94	.04
95–99	.03
100 o más	.01

26. 95 o más.

27. Par o por encima del par.

28. Entre 80 y 89, inclusive.

29. Menos de 90.

30. Que no esté entre 70 y 99.

31. ¿Cuáles son las posibilidades de que Amy tire por debajo de par?

32. ***Sacar bolas de una urna*** Anne Kelly escoge al azar una bola de la urna mostrada aquí y x representa el color de la bola elegida. Elabore la tabla completa de distribución de probabilidades de la variable aleatoria x.



33. Sea x la suma de dos números distintos seleccionados al azar del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Elabore la tabla de distribución de probabilidades de la variable aleatoria x.

34. ***Comparación de las probabilidades empírica y teórica para el tiro de dados*** Lance 50 veces un par de dados, manteniendo el registro de cuántas veces la suma de los dados "es menor que 3 o mayor que 9" (esto es, 2, 10, 11 o 12).

(a) Según sus resultados, calcule la probabilidad empírica de que ocurra el evento "menor que 3 o mayor que 9".

(b) ¿En cuánto difiere su respuesta de la probabilidad *teórica* del ejercicio 19?

Para los ejercicio 35 a 38, sean A un evento dentro del espacio muestral S, $n(A) = a$ y $n(S) = s$.

35. Utilice el principio de conteo de los complementos para evaluar $n(A')$.

36. Utilice la fórmula de la probabilidad teórica para expresar $P(A)$ y $P(A')$.

37. Evalúe y simplifique $P(A) + P(A')$.

38. ¿Qué regla acaba de demostrar?

El resto de los ejercicios requieren de una reflexión cuidadosa para determinar n(E) y n(S). (En algunos casos, podría necesitar el uso de los métodos de conteo del capítulo 11, tal como el principio fundamental de conteo, las permutaciones o las combinaciones.)

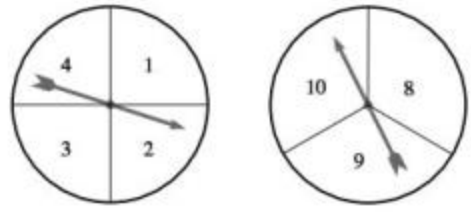
Creación de números a partir de conjuntos de dígitos *Suponga que queremos formar numerales de tres dígitos mediante el conjunto de dígitos* {0, 1, 2, 3, 4, 5}. *Por ejemplo,* 501 *y* 224 *son ejemplos de esos números, pero* 035 *no lo es.*

39. ¿Cuántos de estos números se pueden formar?

40. ¿Cuántos de estos números son múltiplos de 5?

41. Si un número de tres dígitos se escoge al azar de entre todos los números que pueden formarse del conjunto de dígitos anterior, determine la probabilidad de que el número elegido no sea múltiplo de 5.

42. ***Multiplicación de números generados por ruletas*** Un experimento consiste en girar las flechas que aquí se muestran y multiplicar los números obtenidos. Determine la probabilidad de que el producto resultante sea un número par.



43. ***Tomar canicas de colores de cajas*** Una bolsa contiene 50 canicas azules y 50 verdes. Se toman dos canicas al mismo tiempo de forma aleatoria. Si ambas son verdes, se colocan las dos en la caja A; si son azules, se colocan en la caja B; si una es verde y la otra azul, se colocan en la caja C. Una vez que se han sacado y colocado todas las canicas, ¿qué probabilidades hay de que el número de canicas dentro de la caja A sea igual al de la caja B? (Este problema se tomó con la debida autorización de *Mathematics Teacher*, página 736, edición de diciembre de 1992.)

12.3 Eventos que incluyen "y"

En la sección anterior, determinamos la probabilidad de un evento del tipo *A o B* sumando las probabilidades del evento *A* y las del evento *B* y restando luego la probabilidad del evento *A y B*. El ajuste es necesario cuando los eventos *A* y *B* no son mutuamente excluyentes.

Ahora consideraremos, de forma general, cómo determinar la probabilidad de cualquier evento del tipo forma *A y B*.

EJEMPLO 1 Si se escoge un número al azar del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, determine la probabilidad de que el número seleccionado sea impar y múltiplo de 3.

Como en el ejemplo 3 de la sección anterior,

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{y} \quad B = \{3, 6, 9\}.$$

El evento compuesto *A y B* corresponde al conjunto $A \cap B = \{3, 9\}$. Por lo tanto, por medio de la fórmula de probabilidad teórica,

$$P(A \text{ y } B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}. \quad \blacksquare$$

La fórmula general para la probabilidad del evento *A y B* exige que se multipliquen las probabilidades individuales del evento *A* y las del evento *B*. Pero, como muestra el ejemplo 1, esto debe hacerse con precaución. Aunque $P(A) = 5/10$ y $P(B) = 3/10$, al multiplicar simplemente estos dos números hubiéramos obtenido

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}, \quad \text{lo cual es } \textit{incorrecto}.$$

El procedimiento correcto es calcular la probabilidad del segundo evento bajo la suposición de que el primer evento efectivamente ha ocurrido (o está ocurriendo u ocurrirá, pues el momento en que tenga lugar carece aquí de importancia). Este tipo de probabilidad, calculada bajo alguna suposición especial, se conoce como *probabilidad condicional*.

Probabilidad condicional

La probabilidad del evento *B*, calculada bajo la suposición de que el evento *A* ha ocurrido, se denomina **probabilidad condicional de *B*, dado *A*** y se denota por $P(B|A)$.

La condición supuesta reducirá normalmente el espacio muestral a un subconjunto propio del espacio muestral original.

En el ejemplo 1, la suposición de que el número seleccionado es impar significa que sólo consideramos el conjunto {1, 3, 5, 7, 9}. De estos cinco elementos, sólo dos, el 3 y el 9, son múltiplos de 3. Por lo tanto, usando una probabilidad condicional como el segundo factor, podemos escribir

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}, \quad \text{lo cual es correcto.}$$

Incluso una **rara incidencia** en ocasiones puede causar una controversia enorme. En la época en que la empresa de juguetes Mattel inició la campaña de comercialización de una nueva muñeca Barbie parlante, en 1992, algunas de las Barbies fueron programadas para decir "La clase de matemáticas es difícil". El *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM (Consejo estadounidense de profesores de matemáticas), la *American Association of University Women*, AAUW (Asociación estadounidense de mujeres universitarias) y numerosos consumidores hicieron patente su desagrado por el daño que dicho mensaje podía provocar en la autoestima de los niños, así como en sus actitudes hacia la escuela y hacia las matemáticas. Más tarde, Mattel aceptó borrar la frase del microcircuito en las producciones futuras de la muñeca.

Por cierto, cada Barbie estaba programada para decir cuatro frases diferentes, seleccionadas aleatoriamente de un total de 270 frases pregrabadas. Por lo tanto, la probabilidad de adquirir una muñeca que dijera "La clase de matemáticas es difícil" era de apenas

$$\frac{1 \cdot C(269, 3)}{C(270, 4)} \approx .015.$$

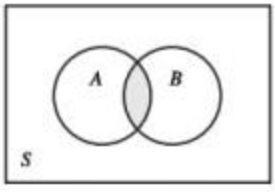
Algunos de los demás mensajes eran: "Me encanta la escuela ¿y a ti?", "Estoy estudiando para ser médico" y "Estudiemos para el examen".

EJEMPLO 2 Dada una familia con dos hijos, determine lo siguiente.

(a) Si se sabe que por lo menos uno de los hijos es una niña, determine la probabilidad de que ambos hijos sean niñas. (Suponga que el tener un niño (h) o una niña (m) es igualmente probable.)

El espacio muestral para dos hijos puede expresarse como $S = \{mm, mh, hm, hh\}$. En este caso, la condición dada de que al menos un hijo es mujer elimina la posibilidad hh, por lo que el espacio muestral se reduce a {mm, hm, mh}. El evento "que ambos sean niñas" se satisface por uno de estos tres resultados igualmente probables, por lo que

$$P(\text{ambos niñas} \mid \text{al menos uno es niña}) = \frac{1}{3}.$$



El conectivo lógico "y" corresponde a la "intersección" en la teoría de conjuntos.

$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B|A)$

FIGURA 8

(b) Si el hijo mayor es una niña, determine la probabilidad de que ambos hijos sean niñas.

Puesto que el hijo mayor es una niña, el espacio muestral se reduce a {mm, mh}. (Suponemos que los hijos aparecen conforme al orden en que nacieron.) El evento "ambos hijos son niñas" se obtiene sólo por un elemento del espacio muestral reducido, de modo que

$$P(\text{ambos niñas} \mid \text{el mayor es una niña}) = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Por medio de una probabilidad condicional, podemos escribir la siguiente *regla general para la multiplicación de probabilidades*, la cual es muy similar al principio fundamental de conteo del capítulo 11. Ésta se ilustra en la figura 8.

Regla general para la multiplicación de probabilidades

Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

o

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

EJEMPLO 3 Cada año, Diane Carr suma a su colección de libros varias publicaciones nuevas que cree que serán de interés y valor duraderos. Tiene clasificadas cada una de sus 20 adquisiciones de 2003 como de pasta dura o rústica, y de ficción o no ficción. En la tabla 4 se presenta el número de libros de las distintas categorías.

TABLA 4 Libros del año 2003

	Ficción (F)	No ficción (N)	Totales
Pasta dura (H)	3	5	8
Rústica (P)	8	4	12
Totales	11	9	20

Si Diane escoge al azar uno de estos 20 libros para leerlo hoy por la tarde, determine la probabilidad de que el libro sea de cada uno de los siguientes tipos.

(a) de pasta dura

Ocho de los 20 libros son de pasta dura, por lo tanto $P(H) = 8/20 = 2/5$.

(b) de ficción, siempre que sea de pasta dura

La condición dada de que el libro sea de pasta dura reduce el espacio muestral a ocho libros. De esos ocho, sólo tres son de ficción. Por lo tanto, $P(F|H) = 3/8$.

(c) de pasta dura y ficción

Por medio de la regla para la multiplicación de probabilidades,

$$P(H \text{ y } F) = P(H) \cdot P(F|H) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20}.$$

En este caso, el inciso (c) se facilita si observamos, directamente de la tabla, que tres de los 20 libros son de "pasta dura y de ficción". Esto confirma que la regla general para la multiplicación de probabilidades sí nos dio la respuesta correcta. ■

TABLA 5
Distancia media de los planetas al Sol

Mercurio	57.9
Venus	108.2
Tierra	149.6
Marte	227.9
Júpiter	778.3
Saturno	1427
Urano	2870
Neptuno	4497
Plutón	5900

EJEMPLO 4 La tabla 5 lista los nueve planetas de nuestro sistema solar junto con su distancia media al Sol, en millones de kilómetros. (La información se tomó del *Time Almanac 1999*.) Selina debe elegir dos planetas distintos sobre los cuales debe comentar en su reporte de astronomía. Si hace su elección de forma aleatoria, determine la probabilidad de que el primero sea más cercano al Sol que Marte, y el segundo sea más cercano que Saturno.

Defina los eventos siguientes.

A: El primero es más cercano que Marte.

B: El segundo es más cercano que Saturno.

Entonces $P(A) = 3/9 = 1/3$. (Tres de las nueve opciones originales son favorables.) El primer planeta seleccionado, por estar más cerca al Sol que Marte, también lo estará que Saturno, y como este planeta ya no está disponible, $P(B|A) = 4/8 = 1/2$. (Cuatro de las ocho opciones restantes son favorables.) Por la regla general de la multiplicación, la probabilidad deseada es

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \approx .167. \quad ■$$

En el ejemplo 4, la condición de que A haya ocurrido cambia la probabilidad de B ya que la selección fue hecha, en efecto, sin reemplazo. No se permiten las repeticiones. Podemos decir que el evento B fue *dependiente* del evento A. Por otro lado, si el primer planeta seleccionado aún está disponible para una selección posterior (como ocurrirá en el ejemplo 5), A y B entonces son *independientes* uno del otro. Los eventos independientes se definen por lo general como sigue.

Eventos independientes

Dos eventos A y B son **independientes** si el conocimiento de la incidencia de uno de ellos no tiene efecto en la probabilidad de ocurrencia del otro, esto es, si

$$\boldsymbol{P(B|A) = P(B)}.$$



Desastres naturales como los tornados, ciclones, temblores, *tsunamis*, las erupciones volcánicas, las tormentas eléctricas y las inundaciones pueden matar a miles de personas. Pero el impacto de un meteorito, cometa o asteroide contra la Tierra podría ser al menos tan catastrófica como una guerra nuclear a nivel mundial, que mataría a 1000 millones de personas, o más. Esto, según un reporte de la NASA colocado en internet en la dirección http://impact.arc.nasa.gov/reports/spaceguardysg_2.html. Un objeto lo suficientemente grande podría poner a la especie humana en riesgo de extinción, pues provocaría cambios climáticos drásticos y la destrucción de las cosechas. En la actualidad muchos científicos creen que impactos del pasado, como el del asteroide de entre 10 y 15 kilómetros de diámetro que cayó en la península de Yucatán, hace aproximadamente 65 millones de años, pudo haber sido la causa de la extinción de los dinosaurios, así como de otras especies.

La fotografía que aparece arriba muestra el daño causado por un fragmento cósmico que se desintegró en la atmósfera sobre Tunguska, Siberia, en 1908, con una energía explosiva de más de 10 megatones de TNT. Cerca de 1000 kilómetros cuadrados de bosque deshabitado fueron arrasados.

El enunciado $P(A|B) = P(A)$ es equivalente al de la definición. Así que, en la práctica, podemos establecer la independencia de A y B verificando cualquiera de las dos condiciones.

Siempre que dos eventos A y B sean independientes, las probabilidades condicional y no condicional no diferirán. $P(B|A)$ será igual a $P(B)$, por lo que la condición puede ignorarse al calcular la probabilidad. En este caso, la regla general para la multiplicación de probabilidades se reduce a la siguiente forma especial.

Regla especial para la multiplicación de probabilidades

Si A y B son dos eventos independientes, entonces

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B),$$

o

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

EJEMPLO 5 Selina debe seleccionar nuevamente dos planetas, pero esta vez debe hacer un informe oral sobre uno y uno escrito para el otro, los cuales no necesitan ser distintos (puede seleccionar el mismo planeta para ambos trabajos). Una vez más, determine la probabilidad de que, si selecciona al azar, el primero sea más cercano al Sol que Marte y el segundo más cercano que Saturno.

Al definir los eventos A y B como en el ejemplo 4, tenemos que $P(A) = 3/9 = 1/3$, igual que antes. Pero ahora la selección se realiza *con* reemplazo. Las repeticiones *son* permitidas. En este caso, el evento B es independiente del evento A, por lo que podemos utilizar la regla especial para la multiplicación, con lo que se obtiene una respuesta diferente que en el ejemplo 4.

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{27} \approx .185. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Se toma una carta de una baraja estándar de 52 cartas. Sea N el evento de que la carta sea negra y D el evento de que la carta sea de diamantes. Responda las preguntas siguientes.

(a) ¿Son N y D eventos independientes?

Para la probabilidad no condicional de D, tenemos quet $P(D) = 13/52 = 1/4$. (Trece de las 52 cartas son de diamantes.) Pero, para la probabilidad condicional de D, dado N, tenemos $P(D|N) = 0/26 = 0$. (Ninguna de las 26 cartas negras es de diamantes.) Puesto que la probabilidad condicional $P(D|N)$ es diferente de la probabilidad no condicional $P(D)$, los eventos N y D no son independientes.

(b) ¿Son los eventos N y D mutuamente excluyentes?

Los eventos mutuamente excluyentes, definidos en la sección anterior, son aquellos que no pueden ocurrir juntos cuando un experimento se realiza de cierta manera. Puesto que ninguna carta del mazo es a la vez negra y de diamantes, N y D son mutuamente excluyentes.

(Algunas veces se tiene la idea de que "mutuamente excluyentes" e "independientes" significan lo mismo. Pero este ejemplo debió haberlo convencido de que esto no es así.) $\blacksquare$

Las reglas para la multiplicación de probabilidades, tanto en su forma general como especial, pueden extenderse a casos que incluyan más de dos eventos.



EJEMPLO 7 Anne sigue sacando bolas de la misma urna (que aparece al margen). Esta vez, saca tres bolas, sin reemplazo. Determine la probabilidad de que las bolas que extraiga sean negra, gris y blanca, en ese orden.

Utilizando las letras apropiadas para denotar los colores y subíndices para indicar el orden en que se sacan las bolas (en primero, segundo o tercer lugar), el evento que buscamos puede simbolizarse por N_1 y G_2 y B_3, de modo que

$$P(N_1 \text{ y } G_2 \text{ y } B_3) = P(N_1) \cdot P(G_2|N_1) \cdot P(B_3|N_1 \text{ y } G_2)$$
$$= \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{99} \approx .0404. \quad \blacksquare$$



La **búsqueda de inteligencia extraterrestre** (**SETI**, por sus siglas en inglés) quizá inició a principios de 1961, cuando el doctor Frank Drake presentó una ecuación para estimar el posible número de civilizaciones en la Vía Láctea cuyas comunicaciones podríamos detectar. Al paso de los años, el esfuerzo ha sido promovido por muchos científicos, incluyendo el difunto astrónomo y exobiólogo Carl Sagan, quien popularizó el tema en presentaciones de televisión y en su libro *The Cosmic Connection: An Extraterrestrial Perspective* (Dell). "Tiene que haber otros seres en el espacio sideral", solía decir Sagan. De hecho, algunos astrónomos han estimado que las posibilidades en contra de que la vida en la Tierra sea la única en el universo son de 100 trillones (10^{20}) a una.

Otros expertos no coinciden. Freeman Dyson, notable fisicomatemático y astrónomo, menciona en su libro *Disturbing the Universe*, que después de examinar las mismas pruebas y los mismos argumentos considera nula la probabilidad de que existan otras vidas inteligentes en el espacio exterior.

EJEMPLO 8 Si se sacan cinco cartas sin reemplazo de un mazo de 52 cartas estándar, determine la probabilidad de que todas sean de corazones.

Cada vez que se selecciona un corazón, el número de cartas disminuye en uno y el número de corazones disminuye en uno. La probabilidad de seleccionar solamente corazones es

$$\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} = \frac{33}{66{,}640} \approx .000495. \quad \blacksquare$$

Si estudió métodos de conteo (capítulo 11), quizá prefiera resolver el problema 8 mediante la fórmula de la probabilidad teórica y las combinaciones. El número total de posibles manos de 5 cartas, elegidas sin reemplazo, es $C(52, 5)$ y el número de cartas de corazones es $C(13, 5)$, por lo tanto la probabilidad requerida es

$$\frac{C(13,5)}{C(52,5)} = \frac{\frac{13!}{5!\,8!}}{\frac{52!}{5!\,47!}} \approx .000495.$$

Utilice una calculadora.

El ejemplo 9 muestra cómo algunos problemas de probabilidad requieren tanto del uso de las reglas de la suma como las de la multiplicación de probabilidades.

EJEMPLO 9 Un taller automotriz cuenta con dos mecánicos, A y B, pero usted nunca puede saber qué mecánico reparará su auto. La asociación de consumidores de su vecindario ha descubierto que A realiza el doble de trabajo que B, A hace un buen trabajo tres de cada cuatro veces, y B sólo dos de cada cinco veces. Si usted planea llevar su auto a reparar en dicho taller, determine la probabilidad de que el trabajo esté bien hecho.

Defina los siguientes eventos.

A: trabajo hecho por A; B: trabajo hecho por B; G: trabajo bien hecho.

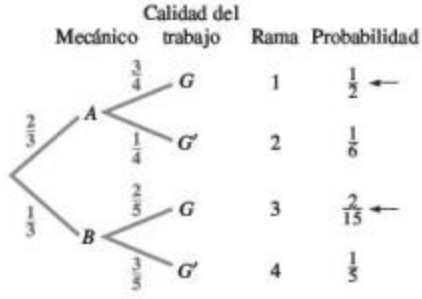
Debido a que A realiza el doble de trabajos que B, las probabilidades (no condicionales) de A y B son $2/3$ y $1/3$, respectivamente. Como A realiza un buen trabajo tres de cada cuatro veces, la probabilidad de un buen trabajo, dado que A realice el trabajo, es de $3/4$. Y puesto que B hace un buen trabajo dos de cada cinco veces, la probabilidad de un buen trabajo, dado que B lo realice, es de $2/5$. (Estas dos últimas probabilidades son condicionales.) Los cuatro valores pueden resumirse como $P(A) = 2/3, P(B) = 1/3, P(G|A) = 3/4$ y $P(G|B) = 2/5$. El evento que buscamos,

G, puede ocurrir de dos formas mutuamente excluyentes: A podría realizar el trabajo y hacerlo bien ($A \cap G$), o B podría realizar el trabajo y hacerlo bien ($B \cap G$) Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(G) &= P(A \cap G) + P(B \cap G) && \text{Regla especial de la suma} \\ &= P(A) \cdot P(G|A) + P(B) \cdot P(G|B) && \text{Regla general para la multiplicación} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{15} = \frac{19}{30} \approx .633. \end{aligned}$$

■

El diagrama de árbol de la figura 9 da un enfoque alterno para determinar la probabilidad del ejemplo 9. Utilice la información dada para dibujar el diagrama de árbol, luego determine la probabilidad de obtener un buen trabajo sumando las probabilidades de las ramas indicadas.



Experimento de los mecánicos del taller

FIGURA 9



Desde 1999, la **(SETI) Search for Extraterrestrial Intelligence** se ha llevado a cabo principalmente a través de **SETI@HOME**, el proyecto de cómputo distribuido más grande en la Tierra. Algunos de los radiotelescopios más grandes del mundo, como el que se construyó en una cuenca natural en Arecibo, Puerto Rico (fotografía de arriba), recolecta información de las regiones con mayor probabilidad en nuestra galaxia. La información es analizada por computadoras personales de usuarios alrededor del mundo. Hasta el 1 de octubre de 2002 había registrados 4 millones de participantes. Para aprender más, o si quisiera tener la posibilidad de ser el primero en hacer "contacto" con una civilización extraterrestre, revise el sitio de la web http://setiathome.ssl.berkeley.edu.

EJEMPLO 10 Michael Bolinder es uno de los cinco ganadores de un premio en una fiesta navideña. A los cinco ganadores se les pide que escojan, sin mirar, de una bolsa en la que, según les dicen, contiene 4 bastones de dulce y un certificado de regalo por 50 dólares. Si Michael quiere el certificado, ¿puede mejorar sus posibilidades de obtenerlo, si es el primero en escoger?

Denotamos el bastón de dulce por C, el certificado de regalo por G y la primera selección, la segunda, la tercera, etc., por medio de los subíndices 1, 2, ... Entonces, si Michael es el primero en escoger, la probabilidad de que obtenga el certificado es de

$$P(G_1) = \frac{1}{5}.$$

Si es el segundo en escoger, la probabilidad de que obtenga el certificado es de

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(C_1 \text{ y } G_2) = P(C_1) \cdot P(G_2 \mid C_1) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}, \text{ igual que antes.} \end{aligned}$$

Si es el tercero,

$$\begin{aligned} P(G_3) &= P(C_1 \text{ y } C_2 \text{ y } G_3) = P(C_1) \cdot P(C_2 \mid C_1) \cdot P(G_3 \mid C_1 \text{ y } C_2) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}, \text{ de nuevo el mismo valor.} \end{aligned}$$

De igual manera, la probabilidad de obtener el certificado, siendo el cuarto o quinto en escoger, es de 1/5. Por lo tanto, el orden en que Michael escoge no afecta sus posibilidades. ■

PARA REFLEXIONAR

El problema de los cumpleaños

Un problema clásico (cuyo resultado es sorprendente) implica la probabilidad de que en un determinado grupo de personas por lo menos dos de ellas hayan nacido el mismo día (el mismo día del año, aunque no necesariamente del mismo año). Este problema puede analizarse con la fórmula de los complementos (sección 12.2) y con la regla general para la multiplicación de probabilidades de esta sección. Suponga que hay tres personas en el grupo. Entonces

$$
\begin{aligned}
&P(\text{al menos una duplicidad de un cumpleaños}) \\
&= 1 - P(\text{sin duplicidad}) && \text{Fórmula de los complementos} \\
&= 1 - P(\text{el 2o. es diferente del 1o. y el 3o. es diferente del 1o. y el 2o.}) \\
&= 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} && \text{Regla general para la multiplicación} \\
&\approx 1 - .992 \\
&= .008
\end{aligned}
$$

(Para simplificar los cálculos, hemos supuesto 365 posibles fechas de nacimiento, sin contar el 29 de febrero.)

Al hacer más cálculos como el anterior, descubrimos que cuanto más pequeño es el grupo, menor es la probabilidad de que se dupliquen los cumpleaños; cuanto más grande es el grupo, mayor será la probabilidad de duplicarse. La tabla siguiente muestra la probabilidad de que ocurra por lo menos una duplicidad para diferentes grupos de personas hasta 50.

Para análisis en grupo

1. Con base en la información mostrada en la tabla, ¿cuáles son las posibilidades de que haya una duplicidad en un grupo de 30 personas?
2. A partir de la tabla, calcule el menor número de personas para quienes la probabilidad de duplicarse es de al menos 1/2.
3. ¿Qué tan pequeño debe ser un grupo para que la probabilidad de duplicarse sea *exactamente* de 0?
4. ¿Qué tan grande debe ser un grupo para que la probabilidad de duplicarse sea *exactamente* de 1?

Número de personas	Probabilidad de al menos una duplicidad	Número de personas	Probabilidad de al menos una duplicidad	Número de personas	Probabilidad de al menos una duplicidad
2	.003	19	.379	36	.832
3	.008	20	.411	37	.849
4	.016	21	.444	38	.864
5	.027	22	.476	39	.878
6	.040	23	.507	40	.891
7	.056	24	.538	41	.903
8	.074	25	.569	42	.914
9	.095	26	.598	43	.924
10	.117	27	.627	44	.933
11	.141	28	.654	45	.941
12	.167	29	.681	46	.948
13	.194	30	.706	47	.955
14	.223	31	.730	48	.961
15	.253	32	.753	49	.966
16	.284	33	.775	50	.970
17	.315	34	.795		
18	.347	35	.814		

12.3 EJERCICIOS

Para cada uno de los siguientes experimentos, determine si los eventos dados son independientes.

1. ***Lanzar una moneda*** Se lanza una moneda al aire dos veces. Los eventos son "cara en el primer lanzamiento" y "cara en el segundo lanzamiento".
2. ***Tiro de dados*** Se tira un par de dados. Los eventos son "número par en el primer tiro" y "número impar en el segundo tiro".
3. ***Comparar las distancias medias de los planetas al Sol*** Se seleccionan dos planetas, con reemplazo, de la lista de la tabla 5. Los eventos son "el primero es más cercano que la Tierra" y "el segundo es más lejano que Urano".
4. ***Comparar las distancias medias de los planetas al Sol*** Dos planetas se seleccionan sin reemplazo, de la lista de la tabla 5. Los eventos son "el primero es más cercano que Júpiter" y "el segundo es más lejano que Neptuno".
5. ***Adivinar respuestas en un examen de opción múltiple*** Adivinamos las respuestas de un examen de 20 preguntas de opción múltiple. Los eventos son "la primera respuesta es correcta" y "la última respuesta es correcta".
6. ***Selección de comités de senadores de Estados Unidos*** Se elige al azar a 5 miembros de un comité de entre 100 senadores de Estados Unidos. Los eventos son "el primer miembro seleccionado es republicano" y "el segundo miembro seleccionado es republicano". (Suponga que hay tanto republicanos como no republicanos en el Senado.)

Comparar el sexo y la motivación vocacional de estudiantes universitarios *A 100 estudiantes de último año que asistían a una feria de profesiones en una importante universidad de Estados Unidos se les clasificó de acuerdo con el sexo y con su motivación vocacional primordial, como se resume en la siguiente tabla.*

		Principal motivación vocacional			
		Dinero	**Permitir la creatividad**	**Retribuir a la sociedad**	**Total**
Sexo	**Masculino**	18	21	19	58
	Femenino	14	13	15	42
Total		32	34	34	100

Si uno de estos estudiantes debe ser elegido al azar, determine la probabilidad de que el estudiante seleccionado satisfaga cada una de las siguientes condiciones.

7. Que sea de sexo femenino.
8. Que esté motivado primordialmente por la creatividad.
9. Que no esté motivado primordialmente por el dinero.
10. Que sea de sexo masculino y esté motivado primordialmente por el dinero.
11. Que sea de sexo masculino, sólo si está motivado primordialmente por el sentido de retribuir a la sociedad.
12. Que esté motivado primordialmente por el dinero o la creatividad, sólo si es de sexo femenino.

Elegir mascota *Una tienda de mascotas tiene siete perritos, incluyendo cuatro* poodles, *dos* terriers *y un* retriever. *Si Rebecka y Aaron, en ese orden, eligen cada uno un cachorro al azar,* con reemplazo *(ambos pueden seleccionar el mismo cachorro), determine la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes.*

13. Ambos eligen un *poodle*.
14. Rebecka elige un *retriever*; Aaron selecciona un *terrier*.
15. Rebecka elige un *terrier*; Aaron selecciona un *retriever*.
16. Ambos eligen un *retriever*.

Elegir mascota *Suponga que se eligen dos perritos como en el ejercicio anterior, pero esta vez* sin reemplazo *(Rebecka y Aaron no pueden elegir el mismo cachorro). Determine la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes.*

17. Ambos eligen un *poodle*.
18. Aaron elige un *terrier*, dado que Rebecka elige un *poodle*.
19. Aaron elige un *retriever*, dado que Rebecka elige un *poodle*.
20. Rebecka elige un *retriever*.
21. Aaron elige un *retriever*, dado que Rebecka elige un *retriever*.
22. Ambos eligen un *retriever*.

Sacar cartas *Se repartirán dos cartas sucesivamente, sin reemplazo, de una baraja estándar de 52 cartas. Determine la probabilidad de cada no de los siguientes eventos. (Ejercicios 23 a 27.)*

23. La segunda es de espadas, dada la primera de espadas.

24. La segunda es de tréboles, dada la primera de diamantes.

25. Las dos son de figuras. **26.** Ninguna es de figuras.

27. La primera carta es una sota y la segunda es de figura.

28. Dados los eventos A y B dentro del espacio muestral S, la siguiente secuencia de pasos establece fórmulas que pueden utilizarse para determinar probabilidades condicionales. [La fórmula del paso (b) implica probabilidades, mientras que la del paso (d) implica números cardinales.] Justifique cada enunciado.

(a) $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

(b) Por lo tanto, $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$.

(c) Por lo tanto, $P(B \mid A) = \dfrac{n(A \text{ y } B)/n(S)}{n(A)/n(S)}$.

(d) Por lo tanto, $P(B \mid A) = \dfrac{n(A \text{ y } B)}{n(A)}$.

Tomar en cuenta ciertas condiciones al sacar una carta *Utilice los resultados del ejercicio 28 para determinar cada una de las siguientes probabilidades, cuando se escoge una carta de una baraja estándar de 52 cartas.*

29. $P(\text{reina} \mid \text{figura})$ **30.** $P(\text{figura} \mid \text{reina})$

31. $P(\text{roja} \mid \text{diamante})$ **32.** $P(\text{diamante} \mid \text{roja})$

33. Si se escoge un número aleatoriamente de los enteros del 1 al 10, la probabilidad de obtener un número que sea *impar y primo*, por medio de la regla general para la multiplicación, es de

$$P(\text{impar}) \cdot P(\text{primo} \mid \text{impar}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}.$$

Calcule el producto $P(\text{primo}) \cdot P(\text{impar} \mid \text{primo})$ y compárelo con el producto anterior.

34. ¿Qué implica el ejercicio 33, en general, acerca de la probabilidad de un evento del tipo A y B?

35. ***El sexo de bebés sucesivos*** Uno de los autores de este libro tiene tres hijos varones y ninguna hija. Suponiendo que el nacimiento de bebés varones o mujeres es igualmente probable, ¿cuál es la probabilidad de este evento?

36. ***El sexo de bebés sucesivos*** Bajo las hipótesis del ejercicio 35, ¿cuál es la probabilidad de que tres nacimientos sucesivos serán varón, luego mujer y luego varón?

Los ejercicios, y grupos de ejercicios, restantes quizá requieran que usted acuda a conceptos analizados en secciones previas, como el principio de los complementos y las reglas de la suma, así como las reglas de la multiplicación de esta sección.

Probabilidades en las compras del supermercado *Emily Falzon dirige un supermercado de descuento que alienta a sus clientes a comprar por volumen. Emily ha descubierto que, en cualquier día entre semana, el 80 por ciento de sus clientes hacen compras por más de 100 dólares. Esto es, cualquier venta efectuada esos días tiene una probabilidad de .80 de ser de más de 100 dólares. (En realidad, las probabilidades condicionales a lo largo del día cambiarían ligeramente, dependiendo de las ventas anteriores, pero este efecto sería despreciable para las primeras ventas del día, así que podemos tratarlas como independiente.)*

Determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos. (Escriba las respuestas hasta tres decimales.)

37. Las primeras dos ventas del miércoles son por más de 100 dólares.

38. Las primeras tres ventas del miércoles son todas por más de 100 dólares.

39. Ninguna de las tres primeras ventas del miércoles es de más de 100 dólares.

40. Exactamente una de las tres primeras ventas del miércoles es de más de 100 dólares.

Contaminación proveniente del sitio de lanzamiento del transbordador espacial *Un problema que enfrentan los diseñadores del programa de naves espaciales es la contaminación del aire en el área que rodea el sitio de lanzamiento. Una determinada dirección a partir del sitio de lanzamiento se considera crítica en términos de contaminación por cloruro de hidrógeno debida a la nube de gases de escape. Se ha determinado que las condiciones atmosféricas pueden provocar, sólo el 5% de las veces, un movimiento de la nube emitida hacia la dirección crítica.*



Determine las probabilidades de los siguientes eventos (ejercicios 41 a 44). Suponga que las probabilidades de un lanzamiento en particular no depende en ninguna forma de las probabilidades de otros lanzamientos. (Dé las respuestas hasta dos decimales.)

41. Un lanzamiento determinado no producirá movimiento alguno de la nube en la dirección crítica.

42. No habrá movimiento alguno de la nube en la dirección crítica durante cualquiera de cinco lanzamientos.

43. Cualquiera de cinco lanzamientos provocará por lo menos un movimiento de la nube en la dirección crítica.

44. Cualquiera de 10 lanzamientos producirá al menos un movimiento de la nube en la dirección crítica.

Orden en entrevistas de trabajo *Cuatro hombres y tres mujeres esperan a que se les entreviste para un empleo. Si se elige a todos en orden aleatorio, determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.*

45. A todas las mujeres se les entrevistará primero.

46. A todos los hombres se les entrevistará primero.

47. La primera persona entrevistada será una mujer.

48. La segunda persona entrevistada será una mujer.

49. La última persona entrevistada será una mujer.

50. En el ejemplo 7, en donde Anne saca tres bolas sin reemplazo, ¿cuál sería la probabilidad de obtener una de cada color, sin importar en qué orden?

51. ***El sexo de bebés sucesivos*** Suponga que es igualmente probable que nazca un bebé niño o niña y determine la probabilidad de que sean necesarios
- **(a)** al menos tres nacimientos para tener dos niñas.
- **(b)** al menos cuatro nacimientos para tener dos niñas.
- **(c)** al menos cinco nacimientos para tener dos niñas.

52. ***Sacar cartas*** Se toman cartas, sin reemplazo, de una baraja común de 52 cartas.
- **(a)** ¿Cuántas deben sacarse antes de que la probabilidad de obtener por lo menos una figura sea mayor que 1/2?
- **(b)** ¿Cuántas deben sacarse antes de que la probabilidad de obtener por lo menos un rey sea mayor que 1/2?

Decisiones justas con monedas "trucadas" *Muchas decisiones cotidianas, tal como determinar quién manejará el auto para ir a almorzar o quién pagará el café, se toman echando una moneda al aire (que se supone no es defectuosa), basándose en el criterio de que "si sale cara, tú lo harás; si es cruz, yo lo haré". Sin embargo, este criterio no es precisamente justo si la moneda está defectuosa o "cargada" (debido, por ejemplo, a alguna pequeña irregularidad en la acuñación, o al desgaste por el uso, que hacen que se incline con mayor frecuencia hacia una misma cara). John von Neumann sugirió una forma de tomar decisiones justas, aun cuando exista la posibilidad de tener una moneda defectuosa. Si una moneda, cargada de tal modo que*

$$P(\text{h}) = .5200 \quad \text{y} \quad P(\text{t}) = .4800,$$

(donde h equivale a cara y t a cruz) se lanza al aire dos veces, determine las siguientes probabilidades. (Escriba las respuestas hasta cuatro decimales.)

53. $P(\text{hh})$ **54.** $P(\text{ht})$

55. $P(\text{th})$ **56.** $P(\text{tt})$

57. Una vez terminados los ejercicios 53 a 56, ¿cuál pensaría usted que es el esquema de Von Neumann?

Programación de un control automático para abrir la puerta de una cochera *Cierta marca de controles automáticos para abrir puertas de cocheras utiliza un transmisor de control con seis interruptores independientes, cada uno de los cuales puede estar encendido o apagado. El receptor (conectado a la puerta) debe sintonizarse, es decir, conectarse o desconectarse, con el mismo patrón que el transmisor.* Los ejercicios 58 a 61 están basados en ideas similares a las del "problema del cumpleaños" en la parte "Para reflexionar" de esta sección.*



58. ¿De cuántas maneras diferentes puede configurar los interruptores el propietario de uno de estos controles para abrir puertas?

59. Si dos residentes del mismo vecindario, cada uno con un control de la misma marca, configuran los interruptores de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad, hasta cuatro decimales, de que cada uno abra la cochera del otro?

60. Si cinco vecinos con el mismo tipo de control configuran sus interruptores de forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellos hayan elegido la misma configuración de encendido o apagado para sus interruptores? (Escriba su respuesta hasta cuatro decimales.)

61. ¿Cuál es el número mínimo de vecinos que debe utilizar esta marca de controles antes de que la probabilidad de al menos una duplicación de configuraciones sea mayor que 1/2?

62. ***Elegir cartas*** Hay tres cartas, una verde por ambos lados, una roja por ambos lados y una verde de un lado y roja del otro. Una de las tres cartas se escoge al azar y se coloca sobre la mesa. Si la carta en la mesa tiene un lado rojo hacia arriba, ¿cuál es la probabilidad de que el otro lado también sea rojo?

---

*Para saber más, consulte "Matching Garage-Door Openers", de Bonnie H. Litwiller y David R. Duncan, en el número de marzo de 1992 de *Mathematics Teacher*, p. 217.

Condiciones climáticas en días sucesivos *En noviembre, la lluvia que cae en cierto valle tiende a ser una tormenta que dura varios días. La probabilidad no condicional de lluvia en cualquier día dado del mes es de .500. Pero la probabilidad de lluvia el día posterior a otro en que ha llovido es de .800 y la probabilidad de lluvia el día posterior a otro en que no ha llovido es de .300. Determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos. Escriba las respuestas hasta tres decimales.*

63. Lluvia en dos días consecutivos de noviembre, elegidos al azar.

64. Lluvia en tres días consecutivos de noviembre, elegidos al azar.

65. Lluvia el 1 y 2 de noviembre, pero no el 3 de noviembre.

66. Lluvia los primeros cuatro días de noviembre, si el 31 de octubre no llovió.

Averías en motores de una aeronave antigua *En cierta aeronave antigua de cuatro motores, ya no muy confiable, cada motor tienen un 10 por ciento de probabilidades de averiarse en cualquier vuelo, siempre y cuando esté cargado a una cuarta parte de su capacidad. Pero si un motor se descompone, entonces la posibilidad de avería se incrementa a 20 por cierto en cada uno de los otros tres motores. Y si un segundo motor sufre una avería, cada uno de los dos restantes tiene un 30 por ciento de riesgo de descomponerse. Suponiendo que dos motores nunca sufren averías simultáneamente y que la aeronave puede seguir volando con sólo dos motores en funcionamiento, determine cada una de las siguientes probabilidades para un vuelo de esta aeronave. (Escriba las respuestas hasta cuatro decimales.)*

67. La probabilidad de que ningún motor se descomponga.

68. La probabilidad de que sólo un motor sufra una avería (cualquiera de los cuatro).

69. La probabilidad de que sólo dos motores se descompongan (cualesquiera dos de los cuatro).

70. La probabilidad de un vuelo fallido.

Tiros de falta uno a uno en baloncesto *En el baloncesto los tiros de castigo "uno a uno" se realizan de la siguiente manera: si el jugador encesta el primer tiro (1 punto), obtiene un segundo tiro. Si falla el primer tiro, no se le concede un segundo tiro (véase el diagrama de árbol).*



Susan Dratch, jugadora de baloncesto, tiene un récord de 70% en tiros de castigo. (Encesta el 70% de sus tiros de castigo.) Determine la probabilidad de que, en una oportunidad determinada de tiro uno a uno, Susan anote el siguiente número de puntos.

71. ningún punto **72.** un punto **73.** dos puntos

74. ***Comparación de la probabilidad empírica y la teórica en tiros de dados*** Tire un par de dados hasta que aparezca una suma de siete, y registre la cantidad de tiros que se tuvo que hacer. Repita el proceso un total de 50 veces, y en cada ocasión registre el número de tiros que se tardó en obtener una suma de siete.

(a) Utilice su información experimental para calcular una probabilidad empírica (hasta dos decimales) de que necesitará al menos tres tiros para obtener una suma de siete.

(b) Encuentre la probabilidad teórica (hasta dos decimales) de que se requerirían al menos tres tiros para obtener una suma de siete.

75. Visite el sitio web mencionado en la nota al margen de *desastres naturales*, en esta sección, y escriba un reporte sobre la amenaza de los impactos cósmicos para la humanidad. Incluya una explicación de la abreviatura *NEO*.

12.4 Probabilidad binomial



Suponga que la flecha de la figura al margen se gira dos veces, y que estamos interesados en el número de veces en que se obtiene el 2. (Suponga que cada una de las tres regiones consiste en un arco de 120 grados, por lo que las probabilidades de que caiga en cada uno son iguales.) Podemos pensar en el resultado 2 como un "éxito", mientras que los resultados 1 y 3 serían "fracasos". Cuando los resultados de un experimento se dividen en dos categorías, éxito y fracaso, la distribución de probabilidades se conoce como "binomial" (el prefijo *bi* significa *dos*). A las repeticiones de un experimento de estas características, en que la probabilidad de éxito permanece constante en todas ellas, se les conoce también como **ensayos repetidos de Bernoulli** (en honor de James Bernoulli).



James Bernoulli (1654-1705) también era conocido como Jacob o Jaques Bernoulli. Sintió una intensa atracción por la teología, a raíz de la lectura de los escritos de Leibniz, y se convirtió en discípulo de éste. Posteriormente fue el decano de la facultad de matemáticas de la Universidad de Basilea. Sus resultados en el campo de la probabilidad se hallan contenidos en su obra *Art of Conjecture*, publicada en 1713, después de su muerte, la cual también incluye una reimpresión de artículos previos de Huygens. Bernoulli también hizo muchas contribuciones al cálculo y la geometría analítica

TABLA 6
Distribución de probabilidad para dos giros

x	$P(x)$
0	4/9
1	4/9
2	1/9
Suma = 9/9 = 1	

Si x representa las veces que se obtiene un 2 después de dos giros, entonces x es una variable aleatoria y podemos elaborar su distribución de probabilidad. (Las variables aleatorias y las distribuciones de probabilidad se definieron al final de la sección 12.2.) Al parecer, x podría tener los valores de 0, 1 o 2. Comencemos por escribir el espacio muestral (de resultados igualmente probables) para los dos giros:

$$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

En cada uno de estos pares ordenados, la primera y segunda entradas dan el resultado del primer y segundo giros, respectivamente. Hay nueve resultados, de los cuales en cuatro casos la cantidad de veces que se obtiene un dos es 0, 1 en otros cuatro casos y 2 en un caso. De esta información, elaboramos la distribución de probabilidades que aparece en la tabla 6. En este caso en particular, lo que tenemos es un ejemplo de una **distribución de probabilidades binomial**. Observe que la suma de la columna de probabilidades es 1, lo cual concuerda con la propiedad 3 de la probabilidad (sección 12.2), ya que se han enumerado todos los posibles valores de x.

A fin de desarrollar una fórmula general para la probabilidad binomial, podemos considerar otra forma de obtener las probabilidades de la tabla 6. Los diferentes giros de la flecha son independientes entre sí y en cada giro la probabilidad de éxito (S) es de 1/3, mientras que la de fracaso (F) es de 2/3. Designemos el éxito en el primer giro como S_1, el fracaso en el segundo giro como F_2, y así, sucesivamente. Entonces, aplicando las reglas de la probabilidad, tenemos que

$$\begin{aligned} P(x=0) &= P(F_1 \text{ y } F_2) \\ &= P(F_1)\cdot P(F_2) && \text{Regla especial de la multiplicación} \\ &= (2/3)\cdot(2/3) \\ &= 4/9, \\ P(x=1) &= P[(S_1 \text{ y } F_2) \text{ o } (F_1 \text{ y } S_2)] \\ &= P[(S_1 \text{ y } F_2) + P(F_1 \text{ y } S_2) && \text{Regla especial de la suma} \\ &= P(S_1)\cdot P(F_2) + P(F_1)\cdot P(S_2) && \text{Regla especial de la multiplicación} \\ &= (1/3)\cdot(2/3) + (2/3)\cdot(1/3) \\ &= 2/9 + 2/9 \\ &= 4/9, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P(x=2) &= P(S_1 \text{ y } S_2) \\ &= P(S_1)\cdot P(S_2) && \text{Regla especial de la multiplicación} \\ &= (1/3)\cdot(1/3) \\ &= 1/9. \end{aligned}$$

Obsérvese el siguiente patrón de los cálculos anteriores. Sólo existe una forma de obtener $x = 0$ (a saber, F_1 y F_2). Y sólo hay una manera de obtener $x = 2$ (a saber, S_1 y S_2). Pero existen dos formas posibles de obtener $x = 1$. Una es S_1 y F_2; la otra es F_1 y S_2. Existen dos formas porque el único éxito requerido puede ocurrir en el primer giro o en el segundo. ¿De cuántas formas puede ocurrir exactamente un éxito en dos ensayos repetidos? Esta pregunta equivale a decir: ¿cuántos subconjuntos de cardinalidad uno existen en el conjunto de dos ensayos? La respuesta es $C(2, 1) = 2$. [La expresión $C(2, 1)$ significa "combinaciones de dos objetos tomados de uno en uno". Las combinaciones se estudiaron en el capítulo 11.] Cada una de las dos formas de obtener exactamente un éxito tiene una probabilidad igual a $(1/3)\cdot(2/3)$, la probabilidad de éxito multiplicada por la probabilidad de fracaso.

TABLA 7
Distribución de probabilidad para tres giros

x	$P(x)$
0	8/27
1	12/27
2	6/27
3	1/27
Suma = 27/27 = 1	

Si la misma flecha se gira tres veces en vez de dos, entonces x, el número de éxitos (obtener el número 2) puede tener valores de 0, 1, 2 o 3. Así, el número de formas de obtener exactamente un éxito es $C(3, 1) = 3$. Éstas son $S_1\ y\ F_2\ y\ F_3$, $F_1\ y\ S_2\ y\ F_3$, $F_1\ y\ F_2\ y\ S_3$. La probabilidad de cada una de esta tres formas es $(1/3) \cdot (2/3) \cdot (2/3) = 4/27$. Por lo tanto, $P(x = 1) = 3 \cdot (4/27) = 12/27 = 4/9$. El diagrama de árbol de la figura 10 muestra todas las posibilidades al hacer tres giros, y la tabla 7 proporciona la probabilidad de distribución asociada. Observe que, en el diagrama de árbol, el número de formas de obtener dos éxitos en tres ensayos es también de tres, lo cual concuerda con el hecho de que $C(3, 2) = 3$. Observe, también, que la suma de la columna $P(x)$ es 1.

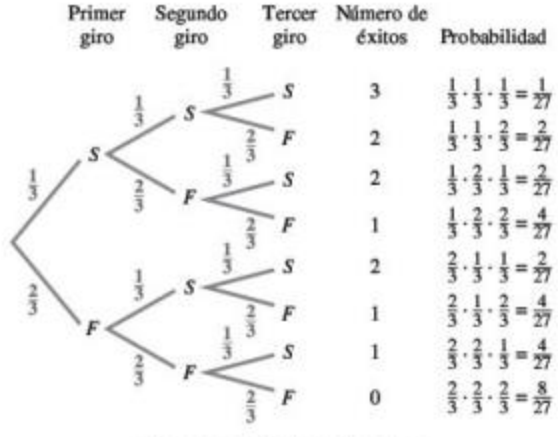


Diagrama de árbol para tres giros

FIGURA 10

Solución de problemas

Una de las estrategias para resolver problemas del capítulo 1 fue "Busque un patrón". Habiendo elaborado las distribuciones de probabilidad completas para experimentos binomiales con 2 y 3 ensayos repetidos (y con una probabilidad de éxito de 1/3), ahora podemos generalizar el patrón observado a cualquier experimento binomial, como se muestra enseguida.

En general, sea

n = número de ensayos repetidos,

p = probabilidad de éxito en cualquier ensayo dado,

$q = 1 - p$ = probabilidad de fracaso en cualquier ensayo dado

y x = número de éxitos obtenidos.

Observe que p permanece fijo en todos los n ensayos. Esto significa que todos los ensayos son independientes entre sí. La variable aleatoria x (número de éxitos) puede tomar cualquier valor entero entre 0 y n. En general, se pueden obtener x éxitos en n ensayos de $C(n, x)$ formas distintas, debido a que éste es el número de los diferentes subconjuntos de x posiciones dentro de un conjunto de n posiciones. Asimismo, sin importar cuáles de los x ensayos resultaron en éxito, siempre habrá x éxitos y $n - x$ fracasos, por lo que hay que multiplicar las p un número x de veces y las q un número $n - x$ veces.

Este análisis se resume en el siguiente enunciado.

Fórmula de la probabilidad binomial

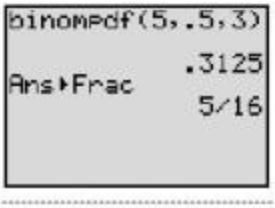
Cuando ocurren n repeticiones independientes de un ensayo, donde

p = probabilidad de éxito y q = probabilidad de fracaso

con p y $q\,(= 1 - p)$ constantes a lo largo de los n ensayos, la probabilidad de obtener exactamente x éxitos está dada por

$$P(x) = C(n,x)p^x q^{n-x}.$$

Por lo regular, en libros de estadística podemos encontrar tablas de valores de la probabilidad binomial para distintos valores de p, con frecuencia para valores de n hasta alrededor de 20. Asimismo, hay paquetes de cómputo para estadística que pueden hacer estos cálculos por usted de manera automática, así como algunas calculadoras de bolsillo. En los ejemplos siguientes, utilizaremos la fórmula que acabamos de mostrar para hacer énfasis en el razonamiento que sustenta nuestros cálculos.



Con la calculadora TI-83 Plus se puede determinar la probabilidad analizada en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Determine la probabilidad de obtener exactamente tres caras al lanzar cinco veces una moneda sin defectos.

Sea cara el "éxito". Entonces, éste es un experimento binomial con $n = 5$, $p = 1/2$, $q = 1/2$ y $x = 3$. Por la fórmula de la probabilidad binomial,

$$P(3) = C(5,3)\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$ ■



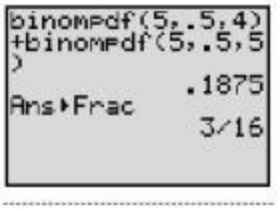
Esta pantalla confirma la respuesta del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Determine la probabilidad de obtener exactamente dos cincos en seis tiros de un dado no cargado.

Sea 5 el "éxito". Entonces $n = 6$, $p = 1/6$, $q = 5/6$ y $x = 2$.

$$P(2) = C(6,2)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 15 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{625}{1296} = \frac{3125}{15{,}552} \approx .201$$ ■

En el caso de ensayos independientes repetidos, cuando un evento implica más de un número específico de éxitos, podemos emplear la fórmula de la probabilidad binomial junto con la regla de los complementos o la regla de la suma.

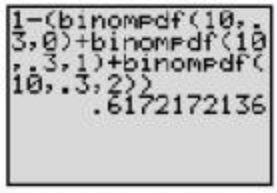


Esta pantalla confirma la respuesta en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Una pareja planea tener 5 hijos. Determine la probabilidad de que tengan más de tres niñas. (Suponga que es igualmente probable tener niños que niñas.)

Sea una niña el "éxito". Entonces $n = 5$, $p = q = 1/2$ y $x > 3$.

$$\begin{aligned} P(x > 3) &= P(x = 4 \text{ o } 5) \\ &= P(4) + P(5) \\ &= C(5,4)\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 + C(5,5)\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= 5 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{32} \cdot 1 \\ &= \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16} = .1875 \end{aligned}$$ ■



Esta pantalla confirma la respuesta del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Scott Davidson, un jugador de béisbol, tiene una carrera bien establecida gracias a que posee un promedio de bateo de 0.300. En una serie corta con un equipo rival, Scott bateará 10 veces. Determine la probabilidad de que obtenga más de dos imparables en la serie.

Este "experimento" implica $n = 10$ ensayos repetidos de Bernoulli, cuya probabilidad de éxito (un imparable) es $p = 0.3$ (lo cual implica que $q = 1 - 0.3 = 0.7$). Debido, a que, en este caso, "más de 2" significa "3 *o* 4 *o* 5 *o* 6 *o* 7 *u* 8 *o* 9 *o* 10" (lo cual significa 8 diferentes posibilidades), esto implicará menos trabajo el aplicar la regla de los complementos.

$$\begin{aligned} P(x > 2) &= 1 - P(x \le 2) && \text{Regla de los complementos} \\ &= 1 - P(x = 0 \text{ o } 1 \text{ o } 2) && \text{Sólo tres posibilidades diferentes} \\ &= 1 - [P(0) + P(1) + P(2)] && \text{Regla especial de la suma} \\ &= 1 - [C(10,0)(.3)^0(.7)^{10} && \text{Fórmula de la probabilidad binomial} \\ &\quad + C(10,1)(.3)^1(.7)^9 + C(10,2)(.3)^2(.7)^8] \\ &\approx 1 - [.0282 + .1211 + .2335] \\ &= 1 - .3828 \\ &= .6172 \end{aligned}$$

■

12.4 EJERCICIOS

Para los ejercicios 1 a 24, escriba todas las respuestas numéricas como fracciones comunes reducidas a su mínima expresión. Para los ejercicios 25 a 59 escriba todas las respuestas numéricas hasta tres decimales.

Lanzar monedas *Si se lanzan al aire tres monedas no defectuosas, determine la probabilidad de que caigan los siguientes números de caras.*

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3
5. 1 o 2
6. no más de 1
7. al menos 1
8. menos de 3

9. ***El sexo de bebés sucesivos*** Suponiendo que es igualmente probable tener un niño o una niña, determine la probabilidad de que una familia con tres hijos tenga exactamente dos varones.

10. En la tabla 5 de la sección 11-4 se presentó el triángulo de Pascal. Explique cómo están relacionadas las probabilidades en los ejercicios 1 a 4 con el renglón (fila) 3 del "triángulo". (Recuerde que al renglón superior del triángulo lo consideramos como "renglón número 0", y a la entrada que está más hacia la izquierda de cada renglón como "entrada número cero".)

11. Generalice el patrón observado en el ejercicio 10 para completar el siguiente enunciado. Si se lanzan n monedas no defectuosas, la probabilidad de obtener exactamente x caras es una fracción cuyo numerador es la entrada número _____ del renglón número _____ en el triángulo de Pascal, y cuyo denominador es la suma de las entradas del renglón número _____ .

Probabilidad binomial aplicada al tiro de monedas *Utilice el patrón observado en los ejercicios 10 y 11 para determinar las probabilidades de que caigan los siguientes números de caras cuando se lanzan siete monedas.*

12. 0
13. 1
14. 2
15. 3
16. 4
17. 5
18. 6
19. 7

Probabilidad binomial aplicada al tiro de dados *Se tira tres veces un dado no cargado. Si cae 4 se considera como "éxito", mientras que los demás resultados son "fracasos". Determine la probabilidad de cada uno de los siguientes números de éxitos.*

20. 0
21. 1
22. 2
23. 3

24. En los ejercicios 10 y 11 se estableció una forma de utilizar el triángulo de Pascal en vez de la fórmula de la probabilidad binomial para determinar las probabilidades de diferentes números de éxitos en los experimentos de lanzar monedas. Explique por qué este mismo proceso no sirve para los ejercicios 20 a 23.

Para n ensayos independientes con probabilidad de éxito constante p para todos los ensayos, determine la probabilidad de obtener x éxitos en cada uno de los siguientes casos.

25. $n = 5, \quad p = 1/3, \quad x = 4$
26. $n = 10, \quad p = 0.7, \quad x = 5$
27. $n = 20, \quad p = 1/8, \quad x = 2$
28. $n = 30, \quad p = 0.6, \quad x = 22$

Para los ejercicios 29 a 31, consulte el ejemplo 4 del texto.

29. ***Promedios de bateo en béisbol*** ¿La probabilidad de que Scott batee un imparable de verdad permanece constante en exactamente .300 en cada una de sus 10 oportunidades de batear? Explique su razonamiento.

30. ***Promedios de bateo en béisbol*** Si al llegar a la serie, el promedio de bateo de Scott es exactamente .300, y este valor está basado en los 1200 imparables logrados en 4000 veces al bate, ¿cuál es el promedio más alto (hasta tres decimales) cuando va al bate por décima ocasión? ¿Cuál podría ser su menor promedio al tomar su turno al bate por décima ocasión en la serie?

31. ¿Cree usted que el uso de la fórmula de la probabilidad binomial se justificó en el ejemplo 4, a pesar de que p no es estrictamente constante? Explique su razonamiento.

Selección aleatoria de respuestas en un examen de opción múltiple *Yesha Brill está resolviendo un examen de 10 preguntas de opción múltiple en el que cada pregunta tiene tres posibles respuestas, de las cuales únicamente una es correcta. Para decidir las respuestas, Yesha tira un dado; si éste muestra 1 o 2, marca la primera opción, si muestra 3 o 4 marca la segunda opción, y si muestra 5 o 6 marca la tercera opción. Determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.*

32. Exactamente cuatro respuestas correctas.

33. Exactamente siete respuestas correctas.

34. Menos de tres respuestas correctas.

35. Al menos siete respuestas correctas.

Efectos secundarios de medicamentos por prescripción *Se sabe que cierto medicamento prescrito produce efectos secundarios indeseables en el 30% de los pacientes que lo consumen. De una muestra aleatoria de ocho pacientes que consumen la medicina, determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.*

36. Que ninguno sufra efectos secundarios indeseables.

37. Que exactamente uno sufra efectos secundarios indeseables.

38. Que exactamente dos sufran efectos secundarios indeseables.

39. Que más de dos sufran efectos secundarios indeseables.

Posibilidad de que los estudiantes capacitados ingresen a la universidad *En cierto estado de Estados Unidos, se ha demostrado que sólo el 50 por ciento de los estudiantes que terminan la escuela media superior y poseen la capacidad para ir a la universidad, realmente se inscriben en ella. Determine la probabilidad de que entre nueve estudiantes que terminaron la educación media superior en ese estado, cada uno de los siguientes números se inscribirán a la universidad.*

40. exactamente 4 **41.** de 4 a 6 **42.** ninguno **43.** los 9

44. ***Estudiantes con computadoras personales*** En una gran universidad de la región centro-oeste de Estados Unidos, el 80 por ciento de los estudiantes cuenta con una computadora personal. Si se elige a cinco estudiantes de la universidad de manera aleatoria, determine la probabilidad de que exactamente tres de ellos cuenten con una computadora personal.

45. ***Naranjos capaces de sobrevivir a las nevadas*** Si se sabe que el 65 por ciento de los naranjos sobrevivirá a una fuerte helada, entonces, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos la mitad de un grupo de seis naranjos sobreviva a tal helada?

46. ***Tasa de cobertura favorable de los medios para un candidato presidencial*** Una encuesta reveló que, durante cierta campaña electoral por la presidencia de Estados Unidos, el 44 por ciento de las columnas políticas en cierto grupo de periódicos fue favorable al actual presidente. Si se escoge una muestra de 15 de estas columnas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente seis de ellas le sean favorables?

En el caso de n ensayos independientes repetidos de Bernoulli, la fórmula desarrollada en esta sección proporciona la probabilidad de obtener exactamente x éxitos. Sin embargo, en ocasiones lo que nos interesa no es el evento de que ocurran exactamente x éxitos en ensayos, sino en que el primer éxito tenga lugar en el ensayo número x. Por ejemplo, considere la probabilidad de que, en una serie de lanzamientos de una moneda, el primer éxito (cara) ocurra en el cuarto lanzamiento. Esto implica un fracaso al principio, después un segundo fracaso, un tercer fracaso y, finalmente, un éxito. De forma simbólica, el evento es F_1 y F_2 y F_3 y S_4. La probabilidad de que ocurra esta secuencia de resultados es de $q \cdot q \cdot q \cdot p$ o $q^3 \cdot p$. De forma general, si la probabilidad de éxito permanece constante con un valor de p (lo cual implica una probabilidad de fracaso de $q = 1 - p$), entonces la probabilidad de que el primer éxito ocurra en el ensayo número x puede calcularse de la siguiente forma:

$$P(F_1 \text{ y } F_2 \text{ y } \ldots \text{ y } F_{x-1} \text{ y } S_x) = q^{x-1} \cdot p$$

47. Explique por qué, en la fórmula anterior, no existe el factor de combinación, como $C(n, x)$ en la fórmula de la probabilidad binomial.

48. ***El sexo de bebés sucesivos*** Suponiendo que tener una niña o un niño es igualmente probable, determine la probabilidad de que el cuarto hijo de una familia será su primer bebé mujer.

49. ***Ser detenido por exceso de velocidad*** Si la probabilidad de ser detenido por exceder el límite de velocidad en cierta recta de una autopista es de 0.38, determine la probabilidad de que la primera vez que

usted sea detenido sea la quinta vez que excede el límite de velocidad.



50. ***Miembros de un sindicato en una industria*** Si el 30 por ciento de los trabajadores de cierta industria son miembros del sindicato, y los trabajadores de esta industria son seleccionados sucesivamente de forma aleatoria, determine la probabilidad de que la elección de primer miembro del sindicato tenga lugar en la tercera selección.

51. ***Fracasos de los lanzamientos de cohetes*** Si la posibilidad de fracasar el lanzamiento de cierto tipo de cohete siempre es de 4 por ciento, determine la probabilidad de que el primer lanzamiento fracasado sea el vigésimo lanzamiento.

Harvey está de pie en la esquina lanzando una moneda. Decide que la lanzará 10 *veces, y cada vez caminará una manzana hacia el norte si la moneda cae cara arriba, y una manzana hacia el sur si cae cruz arriba. En cada uno de los siguientes ejercicios, determine la probabilidad de que termine en la ubicación indicada. (En cada caso, pregúntese cuantos éxitos, digamos, caras, serían necesarios, y aplique la fórmula binomial. Algunas ubicaciones finales no serán posibles con sólo* 10 *lanzamientos.) Este proceso aleatorio ilustra lo que denominamos una* **caminata aleatoria**. *Se trata de un modelo simplificado del movimiento browniano mencionado en la página 676. En la sección 12.6 aparecen más situaciones en que se puede aplicar la idea de la caminata aleatoria.*

52. Diez manzanas al norte de su esquina.

53. Seis manzanas al norte de su esquina.

54. Seis manzanas al sur de su esquina.

55. Cinco manzanas al sur de su esquina.

56. Dos manzanas al norte de su esquina.

57. Al menos 2 manzanas al norte de su esquina.

58. Al menos a 2 manzanas de su esquina.

59. En su esquina.

12.5 Valor esperado

x	$P(x)$
1	.05
2	.10
3	.20
4	.40
5	.10
6	.15

La distribución de probabilidades que aparece al margen, tomada del ejemplo 6 de la sección 12.2, muestra las probabilidades asignadas por Sara a los diferentes tiempos que le podría tomar terminar su tarea en una noche determinada. Si Art, amigo de Sara, le pregunta cuántas horas le tomará estudiar, ¿cuál será su mejor respuesta? Son posibles seis tiempos diferentes, aunque algunos son más probables que otros. Algo que Sara podría hacer es calcular un "promedio ponderado" multiplicando cada valor posible de tiempo por su probabilidad y luego sumando los seis productos.

$$\begin{aligned} &1(.05) + 2(.10) + 3(.20) + 4(.40) + 5(.10) + 6(.15) \\ &\quad = .05 + .20 + .60 + 1.60 + .50 + .90 \\ &\quad = 3.85 \end{aligned}$$

Por tanto, 3.85 horas es el **valor esperado** (o la **esperanza matemática**) de la cantidad de tiempo que será necesario invertir. Como los valores originales de tiempo en la tabla se redondearon a la hora más cercana, el valor esperado también debe redondearse a 4 horas. Una definición general del valor esperado es la siguiente.

Valor esperado

Si una variable aleatoria x puede tomar cualquiera de los valores x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n$ y las probabilidades correspondientes de estos valores son $P(x_1)$, $P(x_2)$, $P(x_3), \ldots, P(x_n)$, entonces el **valor esperado de x** es

$$x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + x_3 \cdot P(x_3) + \cdots + x_n \cdot P(x_n).$$

EJEMPLO 1 Determine el número esperado de varones para una familia con tres hijos (esto es, el valor esperado del número de varones).

El espacio muestral para este experimento es

$$S = \{\text{mmm, mmh, mhm, hmm, mhh, hmh, hhm, hhh}\}.$$

La distribución de probabilidad se muestra en la tabla siguientes, junto con los productos y su suma, lo que proporciona el valor esperado.

Número de varones x	Probabilidad $P(x)$	Producto $x \cdot P(x)$
0	1/8	0
1	3/8	3/8
2	3/8	6/8
3	1/8	3/8

Valor esperado: $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

El número esperado de varones es 3/2, o 1.5. Este resultado parece razonable. Como las niñas y los niños son igualmente probables, se espera que "la mitad" de ellos sean varones. ■

Observe que el valor esperado para el número de varones en la familia es en sí mismo un valor imposible. Así que, como en este ejemplo, el valor esperado como tal podría nunca ocurrir. Muchas veces el valor esperado realmente no puede ocurrir; es sólo un tipo de promedio a largo plazo de los diferentes valores que sí podrían ocurrir. (Para información adicional sobre "promedios", véase la sección 13.2.) Si registramos el número de varones en diferentes familias con tres hijos, entonces por la ley de los grandes números, conforme el número de familias observadas aumenta, el número promedio de varones observado debería aproximarse al valor esperado.

Aunque el ejemplo 1 no incluye dinero, en muchos casos se usa el valor esperado para determinar expectativas monetarias. Entre sus aplicaciones más comunes se cuentan los juegos y los negocios (por ejemplo: decisiones de inversión, licitaciones públicas de contratos y valuación de pólizas de seguros).

EJEMPLO 2 Un jugador paga \$3 por jugar el juego siguiente: si lanza tres monedas legales, los demás le "pagan" \$1 cuando no caen caras, \$2 si cae una sola cara, \$3 si caen dos caras y \$4 si caen 3 caras. Determine las ganancias netas esperadas por el jugador en este juego.

La información se muestra en una tabla. (Observe que, para cada posible evento, las "ganancias neta" son las "ganancias brutas" [el pago] menos el costo por jugar.) Las probabilidades se deducen del espacio muestral

$$S = \{\text{ttt, htt, tht, tth, hht, hth, thh, hhh}\} \quad \text{(donde h es cara y t es cruz).}$$

Número de caras	Pago	Ganancias netas x	Probabilidad $P(x)$	Producto $x \cdot P(x)$
0	\$1	−\$2	1/8	−\$2/8
1	2	−1	3/8	−3/8
2	3	0	3/8	0
3	4	1	1/8	1/8

Valor esperado: $-\$\frac{1}{2} = -\$.50$

La pérdida neta esperada de 50 centavos es tan sólo un promedio a largo plazo. En cualquier partida particular de este juego, el jugador perdería \$2 o \$1 o quedaría tablas o ganaría \$1. En una serie larga de jugadas, digamos 100, habría algunos triunfos y algunas derrotas, pero el resultado neto sería probablemente una *pérdida* de alrededor de $100 \cdot (\$.50) = \$50$. ■

Un juego en el que las ganancias netas esperadas son cero se denomina **juego justo**. El juego del ejemplo 2 tiene una ganancia neta esperada negativa, así que es injusto para el jugador. Un juego con ganancia neta esperada positiva es injusto a favor del jugador.

EJEMPLO 3 Los \$3 que cuesta participar en el juego del ejemplo 2 hace que el juego sea injusto en contra del jugador (ya que la ganancia esperada neta del jugador es negativa). ¿Qué costo haría que este juego fuera justo?

En el ejemplo 2 ya calculamos que el costo de \$3 para jugar resultó en una pérdida neta esperada de \$0.50. Por lo tanto, podemos concluir que el costo de \$3 está excedido en 50 centavos. Entonces un costo justo para jugar el juego sería $\$3 - \$.50 = \$2.50$. ■

El resultado en el ejemplo 3 se puede verificar como sigue. Primero no tome en cuenta el costo por jugar y determine las ganancias *brutas* esperadas (multiplicando los pagos por su probabilidad y sumando luego los productos).

$$\$1 \cdot \frac{1}{8} + \$2 \cdot \frac{3}{8} + \$3 \cdot \frac{3}{8} + \$4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{\$20}{8} = \$2.50$$

Como las ganancias brutas esperadas a largo plazo (los pagos) son de \$2.50, esta cantidad es un costo justo por jugar.

EJEMPLO 4 En cierta lotería estatal, un jugador elige tres dígitos en un orden específico. (Se pueden tener ceros al principio, así que números como 028 y 003 son válidos.) Los operadores de la lotería seleccionan al azar una secuencia de tres dígitos y si coinciden con la selección de cualquier jugador, éste recibe un pago de \$600. ¿Cuál sería un costo justo por jugar este juego?

En este caso, no se ha propuesto ningún costo, así que no tenemos otra opción que calcular las ganancias brutas esperadas. La probabilidad de seleccionar los tres dígitos de manera correcta es de $(1/10) \cdot (1/10) \cdot (1/10) = 1/1000$, y la probabilidad de no seleccionar los tres dígitos correctamente es $1 - 1/1000 = 999/1000$. Las ganancias brutas esperadas son

$$\$600 \cdot \frac{1}{1000} + \$0 \cdot \frac{999}{1000} = \$.60.$$

De modo que el costo justo por jugar este juego es de 60 centavos. (En realidad, la lotería cobra \$1 por jugar, así que los jugadores deben esperar perder *en promedio* 40 centavos por jugar.) ■

Por supuesto que las loterías estatales deber ser injustas en contra de los jugadores ya que están diseñadas para financiar fondos de beneficencia (tales como el sistema escolar estatal) así como para cubrir los costos administrativos y algunos otros gastos. Entre las razones que tiene la gente para jugar puede ser la buena voluntad para apoyar tales causas, pero la mayoría indudablemente juega por la probabilidad de tener "un golpe de suerte" y ser uno de los pocos ganadores.

Los casinos son importantes empresas de negocios, pero no significa que estén diseñados para ser justas; los juegos que ofrecen siempre son injustos a favor de la casa. Sin embargo, el sesgo no es grande, ya que incluso un promedio pequeño de



La **ruleta** (del francés *roulette*, o "rueda pequeña") fue inventada en Francia entre finales del siglo XVII y principios del XVIII, y ha sido un juego de azar característico del casino de Monte Carlo.

El disco se divide en compartimientos rojos y negros, alternados y numerados del 1 al 36 (aunque no en este orden). También hay un compartimiento para el 0 (y en Estados Unidos, para el 00). En la ruleta, la rueda se pone en movimiento y se lanza una bola de marfil al "tazón" en dirección contraria a la que lleva la rueda. Cuando ésta se detiene, la bola se posa en uno de los compartimentos, y el número y el color determinan quién gana.

Los jugadores apuestan en contra de la banca (la persona encargada del dinero de las apuestas) y colocan el dinero o su equivalente en fichas en los espacios de la mesa de la ruleta que corresponden a los colores y números del disco. Las apuestas pueden hacerse a un número o a varios, a pares o a impares, a rojo o a negro, o a combinaciones. La banca paga de acuerdo con las posibilidades en contra de la apuesta o apuestas en particular. Por ejemplo, el pago clásico para un número sencillo que gana es de $36 por cada dólar de apuesta.

pérdida por cada jugador multiplicado por la gran cantidad de jugadores puede resultar en enormes utilidades para la casa.

EJEMPLO 5 Un tipo sencillo de *ruleta* se juega con una bola de marfil y una rueda que se pone en movimiento. La rueda contiene 38 compartimientos. De ellos, 18 son negros, 18 son rojos, uno se marca con "cero" y uno más se marca con "doble cero". (Estos dos últimos no son negros ni rojos.) En este caso, suponga que un jugador coloca $1 en el color rojo o en el negro. Si el jugador escoge el color correcto del compartimiento en el que termina la bola, el pago es de $2; de otra forma el pago es cero. Determine la ganancia neta esperada.

Por la fórmula del valor esperado, la ganancia neta esperada es de

$$(\$1)\frac{18}{38} + (-\$1)\frac{20}{38} = -\$\frac{1}{19}.$$

En este caso la pérdida neta esperada es de $1/19, o cerca de 5.3 centavos por juego. ■

En los negocios como en otras áreas, a menudo es necesario tomar decisiones en circunstancias llenas de incertidumbre. El valor esperado ofrece un medio razonable para enfrentar estas situaciones.

EJEMPLO 6 Michael Crenshaw, un mayorista de madera, está considerando comprar todo un carro de tren cargado con madera de diferentes tamaños. Tomando en cuenta su considerable experiencia, Michael calcula que las probabilidades de revender la carga en $10,000, $9000 u $8000 son de 0.22, 0.33 y 0.45, respectivamente. Para asegurar una utilidad *esperada* de al menos $3000, ¿cuánto debería pagar por el cargamento?

El valor esperado de ganancia (o ingreso) por la reventa puede determinarse como sigue.

Ingreso x	Probabilidad $P(x)$	Producto $x \cdot P(x)$
$10,000	.22	$2200
9000	.33	2970
8000	.45	3600

Ganancia esperada: $8770

En general, tenemos la relación

$$\text{utilidad} = \text{ganancia} - \text{costo}.$$

Por lo tanto, en términos de expectativas,

$$\text{utilidad esperada} = \text{ganancia esperada} - \text{costo}.$$

Así que $3000 = $8770 − costo o costo = $8770 − $3000 = $5770. Michael puede pagar hasta $5770 y aun así tener una utilidad esperada de al menos $3000. ■

EJEMPLO 7 Todd Hall quiere invertir $5000, por lo que destinará la cantidad total, durante seis meses, a la compra de acciones de una de tres empresas de tecnología. Los precios de estas acciones podrían verse afectados por diversas causas aleatorias, pero Todd tiene confianza, con base en su investigación, de que sólo uno de los posibles escenarios de utilidades se cumplirá para cada una de las acciones al

final de los seis meses. Su análisis completo se muestra en la tabla siguiente. (Por ejemplo, las acciones de *ABC* podrían perder \$400, ganar \$800 o ganar \$1500.)

Compañía *ABC*		Compañía *RST*		Compañía *XYZ*	
Utilidad o pérdida x	**Probabilidad $P(x)$**	**Utilidad o pérdida x**	**Probabilidad $P(x)$**	**Utilidad o pérdida x**	**Probabilidad $P(x)$**
−\$400	.2	\$500	.8	\$0	.4
800	.5	1000	.2	700	.3
1500	.3			1200	.1
				2000	.2

Determine la utilidad esperada para cada una de las tres acciones y, con base en estos cálculos, seleccione la mejor opción de Todd.

Aplique la fórmula del valor esperado.

$$ABC: \quad -\$400 \cdot (.2) + \$800 \cdot (.5) + \$1500 \cdot (.3) = \$770$$

$$RST: \quad \$500 \cdot (.8) + \$1000 \cdot (.2) = \$600$$

$$XYZ: \quad \$0 \cdot (.4) + \$700 \cdot (.3) + \$1200 \cdot (.1) + \$2000 \cdot (.2) = \$730$$

La mayor utilidad esperada es de \$770. Con base en este análisis, Todd debe invertir el dinero en las acciones de *ABC*. ■

Por supuesto, al invertir en las acciones de *ABC*, Todd de hecho podría *perder* \$400 en el lapso de seis meses. El rendimiento "esperado" de \$770 es sólo un promedio a largo plazo sobre muchas situaciones idénticas. Como esta situación de inversión en particular podría no volver a ocurrir nunca, usted quizá opine que el uso de valores esperados no es el mejor enfoque que Todd debía usar.

Una posible alternativa sería adoptar el punto de vista de un optimista, quien podría ignorar las diferentes probabilidades para esperar tan sólo la mejor posibilidad asociada con cada opción y tomar su decisión en consecuencia. Un pesimista, por otra parte, supondría que lo más probable es que ocurra el peor caso, y tomaría la decisión de acuerdo con este punto de vista.



La primera máquina tragamonedas (*Silver Solar Slot Machine*) fue fabricada en 1929 por la Fey Manufacturing Company, de San Francisco, empresa inventora de la máquina de pago automático con tres cilindros (1895).

EJEMPLO 8 Decida cuál de las acciones del ejemplo 7 debería seleccionar Todd en cada uno de los casos siguientes.

(a) Es un optimista.

Sin tomar en cuenta las probabilidades, él se enfocaría en lo mejor que podría suceder con cada acción. Como *ABC* podría tener un rendimiento de \$1500, *RST* uno de \$1000 y *XYZ* uno de \$2000, el mejor rendimiento es \$2000. Compraría la acción *XYZ*.

(b) Es un pesimista.

En este caso, se centraría en los peores casos posibles. Puesto que *ABC* podría rendir tan poco como −\$400 (es decir, una pérdida de \$400), *RST* rendir tan poco como \$500 y *XYZ* tan poco como \$0, compraría las acciones de *RST* (el mejor de los tres peores casos). ■

PARA REFLEXIONAR

Valores esperados en juegos de azar

Las máquinas tragamonedas son un juego popular para quienes prefieren perder su dinero con el menor esfuerzo mental. No podemos calcular un valor esperado que se aplique a todas las máquinas tragamonedas, ya que los pagos que proporcionan varían de acuerdo con cada máquina. Pero podemos calcular el "valor esperado común".



En 1988, este fanático de los Indios de Cleveland logró acertar cuatro sietes en una máquina tragamonedas progresiva del Sands Casino, en Las Vegas

Un jugador opera una máquina tragamonedas jalando una palanca luego de insertar en ella una o varias monedas. Entonces, los carretes dentro de la máquina giran y se detienen en un orden aleatorio. Suponga que tres carretes muestran las figuras que se mencionan en la tabla 8. Por ejemplo, de las 20 figuras del primer carrete, 2 son cerezas, 5 son naranjas, 5 son ciruelas, 2 son campanas, 2 son melones, 3 son barras y 1 es el número 7.

TABLA 8

	Carrete		
Figuras	**1**	**2**	**3**
Cerezas	2	5	4
Naranjas	5	4	5
Ciruelas	5	3	3
Campanas	2	4	4
Melones	2	1	2
Barras	3	2	1
Números 7	1	1	1
Totales	20	20	20

Una cereza en el primer carrete, pero no en el segundo, implica un pago de 3 monedas (ganancia *neta:* 2 monedas); una cereza en los dos primeros carretes pero no en el tercero equivale a un pago de 5 monedas (ganancia *neta:* 4 monedas). Todos los demás pagos se muestran en la tabla 9.

TABLA 9 Cálculo de la pérdida esperada en una máquina tragamonedas de tres carretes

Combinaciones ganadoras	Número de maneras de ganar	Probabilidad	Número de monedas recibidas	Ganancia neta (en monedas)	Probabilidad multiplicada por la ganancia
1 cereza (en el primer carrete)	$2 \times 15 \times 20 = 600$	600/8000	3	2	1200/8000
2 cerezas (en los primeros dos carretes)	$2 \times 5 \times 16 = 160$	160/8000	5	4	640/8000
3 cerezas	$2 \times 5 \times 4 = 40$	40/8000	10	9	360/8000
3 naranjas	$5 \times 4 \times 5 = 100$	100/8000	10	9	900/8000
3 ciruelas	$5 \times 3 \times 3 = 45$	45/8000	14	13	585/8000
3 campanas	$2 \times 4 \times 4 = 32$	32/8000	18	17	544/8000
3 melones (premio "jackpots")	$2 \times 1 \times 2 = 4$	4/8000	100	99	396/8000
3 barras (premio "jackpots")	$3 \times 2 \times 1 = 6$	6/8000	200	199	1194/8000
3 números 7 (premio "jackpots")	$1 \times 1 \times 1 = 1$	1/8000	500	499	499/8000
Totales	988				6318/8000

Ya que, de acuerdo con la tabla 8, existen 2 maneras de obtener cerezas en el primer carrete, 15 maneras de *no* obtener cerezas en el segundo carrete y 20 maneras de obtener cualquier figura en el tercer carrete, tenemos un total de $2 \times 15 \times 20 = 600$ maneras de obtener un pago neto de 2. Puesto que existen 20 figuras por carrete, hay un total de $20 \times 20 \times 20 = 8000$ posibles resultados. Por lo tanto, la probabilidad de recibir un pago neto de 2 monedas es de 600/8000. La tabla 9 toma en cuenta todos los resultados *ganadores*, con los productos necesarios para calcular las expectativas en la última columna. Sin embargo, como el resultado de *no ganar* puede ocurrir de $8000 - 988 = 7012$ maneras (con una ganancia de -1 moneda), también debemos incluir el producto de $(-1) \cdot 7012/8000$. De ahí que el valor esperado en esta máquina tragamonedas en particular sea

$$\frac{6318}{8000} + (-1) \cdot \frac{7012}{8000} \approx -.087 \text{ monedas.}$$

En una máquina que recibe monedas de un dólar por jugada, la *pérdida* esperada (por juego) es de alrededor de

$$(0.087)(1 \text{ dólar}) = 8.7 \text{ centavos.}$$

En las máquinas tragamonedas reales las pérdidas esperadas por dólar de juego varían. No obstante, Hornsby, uno de los autores de esta obra, fue capaz de ganarle a una máquina tragamonedas de Las Vegas en 1988. Véase la fotografía.

En la tabla 10, tomada de un artículo de Andrew Sterrett en *The Mathematics Teacher* (de marzo de 1967), se analizan las reglas de diversos juegos de azar y se calculan sus valores esperados. Él utiliza los valores esperados para determinar los tiempos esperados que tardaría en perder $1000, si jugase de manera continua a razón de $1 por juego y un juego por minuto.

Para análisis en grupo

1. Explique por qué las entradas en la columna "Ganancias netas" de la tabla 9 son todas menores en uno que las entradas correspondientes en la columna "Número de monedas recibidas".
2. Verifique todos los valores de la columna "Número de maneras de ganar" de la tabla 9. (Consulte la tabla 8.)
3. Para hacer que su dinero dure lo más posible en un casino, ¿qué juego debería jugar?

TABLA 10 Tiempo esperado para perder $1000

Juego	Valor esperado	Días	Horas	Minutos
Ruleta (con un 0)	−$.027	25	16	40
Ruleta (con 0 y 00)	−$.053	13	4	40
Chuck a luck	−$.079	8	19	46
Keno (un número)	−$.200	3	11	20
Números	−$.300	2	7	33
Apostar al fútbol (4 ganadores)	−$.375	1	20	27
Apostar al fútbol (10 ganadores)	−$.658	1	1	19

12.5 EJERCICIOS

1. Explique en palabras el significado de "valor esperado de una variable aleatoria".
2. Una pareja que está planeando su futuro dice: "Esperamos tener 1.5 hijos". Explique qué significa este enunciado.
3. ***Lanzar monedas*** Se lanzan al aire cinco monedas. Determine el número esperado de caras.
4. ***Sacar cartas*** Se sacan dos cartas, con reemplazo, de un mazo de 52 cartas estándar. Determine el número esperado de diamantes.

Ganancias esperadas en un juego de dados *En cierto juego que consiste en tirar un dado, los pagos son:* $3 *por un* 6, $2 *por un* 5, $1 *por un* 4 *y ningún pago con cualquier otro resultado.*

5. Determine las ganancias esperadas para este juego.
6. ¿Cuál es el precio justo que se debe pagar para jugar este juego?

Ganancias esperadas en un juego de dados *Para los ejercicios 7 y 8, considere un juego que consiste en tirar un dado y cuyos pagos son como sigue. Si aparece un número par en la cara superior, usted recibe ese número de dólares. Pero si aparece un número impar en la cara superior, debe pagar ese número de dólares.*

7. Determine las ganancias netas esperadas de este juego.
8. ¿Es este un juego justo, injusto en contra del jugador o injusto a favor del jugador?
9. ***Ganancias esperadas en un juego de lanzar monedas*** Cierto juego implica lanzar al aire 3 monedas, y paga 10¢ cuando salen 3 caras, 5¢ por 2 caras y 3¢ por 1 cara. ¿Son 5¢ un precio justo por jugar? (Esto es, ¿el precio de 5¢ por jugar hace de éste un juego justo?)
10. ***Ganancias esperadas en la ruleta*** En una ruleta algo diferente a la del ejemplo 5, una gerencia más generosa proporciona un disco que sólo tiene 37 compartimientos, de los cuales 18 son rojos, 18 negros y un cero. Determine las ganancias netas esperadas, si usted apuesta al rojo en este juego.
11. ***Número esperado de alumnos ausentes en una clase de matemáticas*** En cierta clase de matemáticas, se ha determinado de forma empírica la probabilidad del número de alumnos ausentes en cualquier día determinado. Estos valores aparecen en la tabla que se muestra a continuación. Determine el número esperado de ausencias en un día dado. (Escriba las respuestas hasta dos decimales.)

Número de ausencias	0	1	2	3	4
Probabilidad	.12	.32	.35	.14	.07

12. ***Utilidades esperadas de una compañía aseguradora*** Una compañía aseguradora protegerá una casa de 100,000 dólares por su valor total, a cambio de una prima anual de $330. Si la compañía gasta $20 anuales por el servicio de tal póliza, la probabilidad de pérdida total de dicha casa en un año dado es de 0.002, y suponiendo que ocurrirá una pérdida total o no ocurrirá pérdida alguna, ¿cuál es la ganancia (o utilidad) anual esperada de la compañía por cada póliza de este tipo?

Utilidades en la rifa de una fundación universitaria *La fundación de una universidad recaba fondos por medio de la venta de boletos para la rifa de un automóvil nuevo con un valor de* 36,000 *dólares.*

13. Si se venden 600 boletos a 120 dólares cada uno, determine
    (a) la ganancia *neta* esperada de una persona que compra uno de los boletos,
    (b) la utilidad total para la fundación, si suponemos que tuvieron que comprar el automóvil,
    (c) la utilidad total de la fundación, si suponemos que el automóvil fue donado.
14. Para la rifa que acabamos de describir, si se venden 720 boletos en 120 dólares cada uno, determine
    (a) los ingresos *netos* esperados de una persona que compra uno de los boletos,
    (b) la utilidad total para la fundación, suponiendo que tuvo que comprar el automóvil,
    (c) la utilidad total para la fundación, suponiendo que el automóvil fue donado.

Ganancias y utilidades en una rifa *Para una rifa, se venden* 5000 *boletos. Se concederá un primer premio de* 1000 *dólares, dos segundos premios de* 500 *dólares cada uno, y cinco terceros premios de* 100 *dólares cada uno. Todos los ganadores serán elegidos al azar.*

15. Si usted compró un boleto, ¿cuál es su ganancia esperada?
16. Si compró dos boletos, ¿cuál es su ganancia esperada?
17. Si los boletos se vendieron en $1 cada uno, ¿cuáles son los ingresos que le corresponden al patrocinador de la rifa?
18. ***Ventas esperadas en el restaurante de comida rápida de un cine*** Un teatro infantil determinó en una encuesta aleatoria que 65 clientes compraron un refrigerio, 40 compraron dos, 26 compraron tres, 14 compraron cuatro y 18 evitaron comprar en el restaurante. Utilice esta información para determinar el número esperado de refrigerios por cliente. (Redondee al décimo más cercano.)
19. ***Número esperado de niños que asisten a un parque de diversiones*** Un parque de diversiones, que está considerando poner nuevas atracciones, realizó un estudio durante varios días típicos y descubrió que, de 10,000 familias que asistían al parque, 1020 de ellas sólo llevaban un niño (definido como menor de 12 años), 3370 llevaban dos niños, 3510 llevaban tres niños, 1340 llevaban cuatro niños, 510 llevaban cinco niños, 80 llevaban seis niños y 170 no llevaban niños. Determine el número de niños esperado

por familia que asistirán al parque. (Redondee la respuesta al décimo más cercano.)



20. ***Sumas esperadas de números seleccionados al azar*** Cinco cartas se numeran del 1 al 5. Se escogen al azar dos de ellas de forma aleatoria (sin reemplazo), y se suman los números que tienen. Determine el valor esperado de esta suma.

21. ***Posibilidades de trabajos en electrónica en una ciudad*** En cierta ciudad de California, las proyecciones para el año entrante son de que existe un 20% de probabilidades de que los trabajos relacionados con la electrónica se incrementen en 1200, un 50% de probabilidades de que aumenten en 500 y un 30% de probabilidades de que disminuyan en 800. ¿Cuál es el cambio esperado en el número de trabajos de electrónica en esa ciudad para el año entrante?

22. ***Ganancias esperadas en keno*** En una de las versiones del juego denominado *keno*, la casa tiene una tómbola con 80 bolas, numeradas del 1 al 80. Un jugador compra un boleto por 1 dólar y marca un número en él (del 1 al 80). Entonces, la casa selecciona 20 de los 80 números en forma aleatoria. Si el número seleccionado por el jugador se encuentra dentro de los 20 seleccionados por la administración, al jugador le pagan $3.20. Determine las ganancias netas esperadas para este juego.

23. Consulte los ejemplos 7 y 8. Considerando los tres distintos enfoques (valores esperados, optimista y pesimista), ¿cuál le parece más razonable, y por qué?

Decisiones de un contratista con base en las utilidades esperadas *Kimberli Brownlee, una contratista de edificios comerciales, pondrá a su compañía a trabajar en uno de tres proyectos, dependiendo de su análisis de las utilidades o pérdidas potenciales como se muestra a continuación.*

Proyecto *A*		Proyecto *B*		Proyecto *C*	
Utilidad o pérdida *x*	**Probabilidad *P*(*x*)**	**Utilidad o pérdida *x***	**Probabilidad *P*(*x*)**	**Utilidad o pérdida *x***	**Probabilidad *P*(*x*)**
$40,000	.10	$0	.20	$60,000	.65
180,000	.60	210,000	.35	340,000	.35
250,000	.30	290,000	.45		

Determine cuál proyecto debe elegir Kimberli de acuerdo con cada uno de los enfoques siguientes. (Ejercicios 24 a 26.)

24. Valores esperados.

25. Un punto de vista optimista.

26. Un punto de vista pesimista.

Ganancias esperadas en un programa de concursos *Al participante en un programa de concursos se le ofrece la opción de recibir un sistema de cómputo con valor de* 2300 *dólares o la oportunidad de ganar ya sean unas vacaciones de lujo por valor de* 5000 *dólares, o un bote con un valor de* 8000. *Las probabilidades de ganar las vacaciones o el bote son de* .20 *y* .15, *respectivamente.*

27. Si el concursante rechaza la opción del sistema de cómputo y prefiere la oportunidad de ganar cualquiera de los otros dos premios, ¿cuál será su ganancia esperada?

28. En términos puramente monetarios, ¿cuál es la elección más sensata del concursante?

Valores esperados en cuentas de negocios *La tabla siguiente ilustra cómo estima un vendedor de Levi Strauss & Co. sus cuentas, considerando el volumen existente de cada cuenta más el volumen adicional posible.**

1	2	3	4	5	6	7
Número de cuenta	**Volumen existente**	**Volumen adicional posible**	**Probabilidad de lograr el volumen adicional**	**Valor esperado del volumen adicional**	**Volumen existente más valor esperado del volumen adicional**	**Clasificación**
1	$15,000	$ 10,000	.25	$2500	$17,500	
2	40,000	0	—	—	40,000	
3	20,000	10,000	.20	2000		
4	50,000	10,000	.10	1000		
5	5000	50,000	.50			
6	0	100,000	.60			
7	30,000	20,000	.80			

Utilice la tabla para resolver los ejercicios 29 a 32.

29. Calcule los valores esperados que faltan en la columna 5.

30. Calcule las cantidades que faltan en la columna 6.

31. En la columna 7, clasifique cada una de las cuentas de acuerdo con lo siguiente: clase A, si el valor correspondiente de la columna 6 es de $55,000 o más; clase B, si el valor correspondiente de la columna 6 es de por lo menos $45,000, pero menor que $55,000; clase C, si el valor de la columna 6 es menor de $45,000.

32. Considerando las siete cuentas de este vendedor, calcule el volumen total adicional que puede "esperar" obtener.

33. ***Ganancias esperadas en keno*** Recuerde que, en el juego de *keno* del ejercicio 22, la casa selecciona 20 números de forma aleatoria de entre los números naturales del 1 al 80. En la versión llamada *6-spot keno*, el jugador paga 60¢ por su boleto y marca 6 números a su elección. Si los 20 números seleccionados por la casa contienen por lo menos 3 de los escogidos por el jugador, obtiene un pago de acuerdo con este diagrama.

3 de los números del jugador dentro de los 20	$0.35
4 de los números del jugador dentro de los 20	2.00
5 de los números del jugador dentro de los 20	60.00
6 de los números del jugador dentro de los 20	1250.00

Determine la ganancia neta esperada del jugador en este juego. (*Una pista*: Las cuatro probabilidades que se requieren pueden determinarse por medio de combinaciones [sección 11.3], el principio fundamental de conteo [sección 11.2] y la fórmula de la probabilidad teórica [sección 12.1].)

*Esta información fue proporcionada por James McDonald, de Levi Strauss & Co., San Francisco.

12.6 Estimación de probabilidades por medio de la simulación

Un área importante de la teoría de la probabilidad es el proceso denominado **simulación**. Es posible estudiar un fenómeno complicado, o poco claro, por medio de la *simulación*, o imitación, de un fenómeno más sencillo que incluya las mismas probabilidades básicas. Por ejemplo, recuerde, de la sección 12.1, el descubrimiento de Mendel: cuando se cruzaban dos plantas de guisantes Rr (flores rojas portadoras de genes tanto para rojo como para blanco), los descendientes tenían flores rojas si recibían un gen R de cualquiera de los padres, o de ambos. Esto es porque el rojo es

		Segundo padre	
		R	**r**
Primer padre	**R**	RR	Rr
	r	rR	rr

dominante y el blanco es recesivo. La tabla 3, que se reproduce al margen, muestra que tres de las cuatro posibilidades igualmente probables tienen como resultado descendientes con flores rojas.

Ahora suponga que queremos saber (o al menos aproximarnos a) la probabilidad de que tres descendientes consecutivos tengan flores rojas. Es mucho más fácil (y rápido) lanzar monedas que cruzar plantas de guisantes. Y los resultados, igualmente probables, de cara o cruz, pueden utilizarse para simular la transferencia igualmente probable de genes, R y r. Si se lanzan dos monedas, digamos una de 10 centavos y una de 1 centavo, entonces podemos interpretar los resultados como sigue (h es cara y t es cruz).

hh ⇒ RR ⇒ gen rojo del primer padre, gen rojo del segundo padre
⇒ flores rojas

ht ⇒ Rr ⇒ gen rojo del primer padre, gen blanco del segundo padre
⇒ flores rojas

th ⇒ rR ⇒ gen blanco del primer padre, gen rojo del segundo padre
⇒ flores rojas

tt ⇒ rr ⇒ gen blanco del primer padre, gen blanco del segundo padre
⇒ flores blancas

Aunque unos cuantos lanzamientos no pueden probar nada, la ley de los grandes números indica que cuanto mayor sea el número de lanzamientos, mejores indicadores deberemos tener cada vez de las tendencias generales en el proceso genético.

EJEMPLO 1 Arroje al aire dos monedas 50 veces y utilice los resultados para aproximar la probabilidad de que al cruzar plantas de guisantes Rr producirán tres descendientes sucesivos con flores rojas.

De hecho lanzamos dos monedas al aire 50 veces y obtuvimos la siguiente secuencia.

th, hh, th, tt, th, hh, ht, th, ht, th, hh, hh,
tt, th, hh, ht, ht, ht, ht, th, hh, hh, hh, tt,
ht, tt, hh, ht, ht, hh, tt, tt, tt, th, tt, tt, hh,
ht, ht, ht, hh, tt, th, hh, tt, hh, ht, tt, tt, tt

Por medio de la interpretación de colores descrita anteriormente, esto da la siguiente secuencia de colores en los descendientes.

rojo-rojo-rojo-blanco-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-blanco-
rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-blanco-rojo-blanco-
rojo-rojo-rojo-rojo-blanco-blanco-blanco-rojo-blanco-blanco-rojo-rojo-
rojo-rojo-rojo-blanco-rojo-rojo-blanco-rojo-rojo-blanco-blanco-blanco

Ahora tenemos una lista experimental de 48 conjuntos de tres plantas consecutivas, las entradas primera, segunda y tercera, luego la segunda, tercera y cuarta entradas, etc. ¿Ve por qué hay 48 en total? Ahora sólo contamos el número de estos conjuntos de tres que son "rojo-rojo-rojo". Como hay 20 de éstos, nuestra probabilidad empírica de tres descendientes sucesivos de flores rojas, obtenido por medio de simulación, es de $20/48 = 5/12$, o cerca de .417. Aplicando la regla especial de la multiplicación (ya que aquí todos los resultados son independientes uno de otro), encontramos que el valor teórico es de $(3/4)^3 = 27/64$, o cerca de .422, de modo que nuestra aproximación obtenida por medio de la simulación fue muy cercana. ■

Los **métodos de simulación**, también llamados métodos "Monte Carlo", han sido utilizados con éxito en muchas áreas de estudio científico a lo largo de casi un siglo. En virtud de que la mayoría de las aplicaciones prácticas exigen enormes cifras de dígitos aleatorios, se emplean las computadoras para producirlos. Sin embargo, una computadora no puede lanzar monedas. Debe utilizar un proceso algorítmico, programado en su memoria, que se llama *generador de números aleatorios*. Es muy difícil evitar todos los patrones no aleatorios en los resultados, así que a los dígitos producidos se les denomina números "seudoaleatorios". Deben pasar por un conjunto de pruebas de aleatoriedad antes de que se les "apruebe para su uso".

Recientemente, los científicos de la computación y los físicos se han topado con dificultades inesperadas, incluso con los más complejos generadores de números aleatorios. Como se informó en la edición del 19 de diciembre de 1992 de *Science News* (página 422), parece que un generador de números aleatorios puede pasar todas las pruebas y funcionar bien para algunas aplicaciones de simulación, pero luego puede producir respuestas erróneas cuando se usa con una simulación diferente. Por lo tanto, los generadores de números aleatorios no pueden aprobarse de antemano para todos los usos, sino que deben verificarse cuidadosamente junto con cada nueva aplicación de simulación propuesta.

En los nacimientos humanos, en esencia es igualmente probable que nazcan niños que niñas. Por lo tanto, puede simularse un nacimiento individual con sólo lanzar una moneda al aire, pensando que la cara corresponda a una niña (m) y la cruz a un niño (h).

EJEMPLO 2 Una secuencia de 40 lanzamientos reales de una moneda produjo los resultados siguientes

hhmmh, mhhhm, mhmhh, hmmhm, hhhhm, mhhmm, mhhmm, hmhhm

(Por cada cara hemos escrito una m, de mujer; por cada cruz, una h, de hombre.) Remítase a esta secuencia para dar respuesta a las preguntas siguientes.

(a) ¿Cuántos pares de dos nacimientos sucesivos están representados en la secuencia anterior?

Si iniciamos con la pareja 1-2 y terminamos con la pareja 39-40, hay 39 pares.

(b) ¿Cuántas de estas parejas consisten en dos hombres?

Al observar la secuencia, contamos 11 pares que consisten ambos en hombres.

(c) Determine la probabilidad empírica, con base en esta simulación, de que en dos nacimientos sucesivos ambos sean hombres. Proporcione su respuesta hasta tres decimales.

Utilizando los incisos (a) y (b), tenemos $11/39 \approx .282$. ■

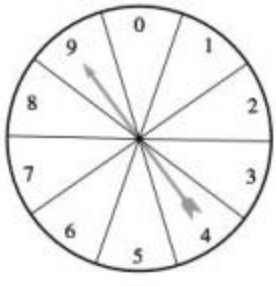


FIGURA 11

Otra manera de simular los nacimientos es generar una secuencia aleatoria de dígitos, tal vez interpretando dígitos pares como niñas y dígitos impares como niños. Los dígitos podrían generarse con sólo hacer girar una flecha en el disco de la figura 11. Resulta que muchas clases de fenómenos pueden simularse mediante dígitos aleatorios, de modo que podemos ahorrar mucho esfuerzo si usamos el disco para obtener una tabla de dígitos aleatorios, como en la tabla 11, y luego emplear esa tabla para realizar la simulación de cualquier experimento que necesitemos. Observe que los 250 dígitos aleatorios de la tabla 11 se han agrupado de manera conveniente para que podamos seguir con facilidad hacia abajo una columna o a lo largo un renglón.

TABLA 11

51592	73219
77876	55707
36500	48007
40571	65191
04822	06772
53033	94928
92080	15709
01587	39922
36006	96365
63698	14655
17297	65587
22841	76905
91979	12369
96480	54219
74949	89329
76896	90060
47588	06975
45521	05050
02472	69774
55184	78351
40177	11464
84861	84086
86937	51497
20931	12307
22454	68009

EJEMPLO 3 Una pareja planea tener cinco hijos. Use la simulación de números aleatorios para estimar las probabilidades de que la pareja tenga más de tres hijos varones.

Sea que cada secuencia de cinco dígitos, como aparecen en la tabla 11, represente una familia con cinco hijos; asociemos (de manera arbitraria) los dígitos impares con hombres y los dígitos pares con mujeres (recuerde que el cero es par). Compruebe que, de las 50 familias simuladas, 10 tengan más de 3 hijos hombres (4 o 5 hombres). Por lo tanto, la estimación (valor empírico) es

$$P(\text{más de 3 hombres}) = 10/50 = .20.$$ ■

Recuerde que el valor teórico de la probabilidad estimada en el ejemplo 3 que acabamos de revisar es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 3 de la sección 12.4. Fue de .1875, de modo que nuestra estimación anterior fue bastante cercana. A la luz de la ley de los grandes números, una muestra mayor de dígitos aleatorios (más de 50 familias simuladas) daría una aproximación más cercana. En publicaciones de investigación estadística aparecen a menudo extensas tablas de dígitos aleatorios. También las computadoras pueden programarse para generar secuencias de dígitos "seudoaleatorios", que sirven para los mismos propósitos. En la mayoría de los experimentos de simulación, se necesitan muestras mucho más grandes que las que usamos aquí para obtener resultados confiables. Con todo, los ejemplos mostrados aquí ilustran de manera adecuada el procedimiento.

EJEMPLO 4 Utilice la simulación de números aleatorios para estimar la probabilidad de que dos cartas sean del mismo palo, si se sacan de una baraja estándar con reemplazo.

Utilice esta correspondencia: 0 y 1 significan tréboles, 2 y 3 significan diamantes, 4 y 5 significan corazones, 6 y 7 significan espadas, 8 y 9 se descartan. Ahora lea las columnas de la tabla 11 de manera descendente. Suponga que (arbitrariamente) utilizamos el primer dígito de cada grupo de cinco dígitos. La primera vez de arriba hacia abajo se obtiene la secuencia siguiente:

5-7-3-4-0-5-0-3-6-1-2-7-7-4-4-0-5-4-2-2

(números, entre ochos y nueves.) Si iniciamos nuevamente en la parte superior, obtenemos

7-5-4-6-0-1-3-1-6-7-1-5-0-0-6-7-1-5-1-6

(De nuevo se omitieron cinco ochos y nueves.) Esta secuencia de 40 dígitos da lugar a la secuencia de palos que se indica a continuación.

corazones-espadas-diamantes-corazones-tréboles-corazones-tréboles-diamantes-espadas-tréboles-diamantes-espadas-espadas-corazones-corazones-tréboles-corazones-corazones-diamantes-diamantes-espadas-corazones-corazones-espadas-tréboles-tréboles-diamantes-tréboles-espadas-espadas-tréboles-corazones-tréboles-tréboles-espadas-espadas-tréboles-corazones-tréboles-espadas

Verifique que, de los 39 pares sucesivos de palos (corazones-espadas, espadas-diamantes, diamantes-corazones, etc.), 9 son pares del mismo palo. Esto hace que la probabilidad estimada sea de $9/39 \approx .23$. (En comparación, el valor teórico es de .25.) ■

12.6 EJERCICIOS

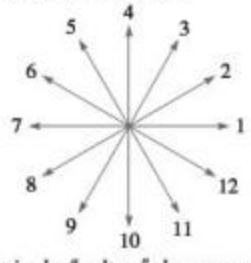
1. ***Simulación de reproducción de plantas de guisantes lanzando monedas al aire*** Explique por qué, en el ejemplo 1, lanzar monedas al aire 50 veces produjo sólo 48 conjuntos de tres descendientes consecutivos.
2. ***Simulación de reproducción de plantas de guisantes lanzando monedas al aire*** Utilice la secuencia de colores de flores del ejemplo 1 para aproximar la probabilidad de que *cuatro* descendientes consecutivos tengan flores rojas.
3. ***Comparar las probabilidades de que nazcan niños o niñas*** ¿La probabilidad de dos nacimientos consecutivos de mujeres debe ser diferente de la de dos nacimientos consecutivos de hombres?
4. ***Hallar la probabilidad empírica*** Simule 40 nacimientos lanzando monedas al aire, y obtenga una probabilidad empírica para el nacimiento consecutivo de dos mujeres.
5. ***Simulación de niños y niñas con números aleatorios*** Emplee la tabla 11 para simular 50 familias con tres hijos. Que 0-4 correspondan a hombres y 5-9 a mujeres, y utilice los tres dígitos centrales de cada grupo (159, 787, 650, etc.). Estime la probabilidad de que haya exactamente dos hombres en una familia de tres hijos. Compare esa estimación con la probabilidad teórica de que haya exactamente dos hombres en una familia de tres hijos, que es de $3/8 = .375$.

Simulación de tiros de falta uno a uno con números aleatorios *Los ejercicios 71 a 73 de la sección 12.3 tratan de los tiros libres uno a uno en baloncesto. Susan, quien tiene un récord de* 70% *en tiros libres, tiene probabilidades de* .30, .21 *y* .49, *respectivamente, de anotar* 0, 1 *o* 2 *puntos. Utilice la tabla 11 (donde los dígitos* 0-6 *representen un tiro anotado y* 7-9 *un tiro errado) para simular* 50 *oportunidades de tiro uno a uno para Susan. Inicie en la parte superior de la primera columna (*5, 7, 3, *etc., hacia abajo), luego pase a la segunda columna (*1, 7, 6, *etc.), hasta completar* 50 *oportunidades de tiro uno a uno. (Observe que algunas "oportunidades" comprenden un tiro, mientras que otras incluyen dos tiros.) Lleve un registro del número de veces que se anotan* 0, 1 *y* 2 *puntos. Con base en el registro, determine la probabilidad empírica de que, en una oportunidad dada, Susan anote como sigue (redondee su respuesta a dos decimales).*

Número de puntos	Cuenta
0	
1	
2	

6. ningún punto
7. 1 punto
8. 2 puntos

Determinar la trayectoria de una caminata aleatoria por medio de un dado y una moneda *En los ejercicios 52 a 59 de la sección 12.4 se ilustró una versión sencilla del concepto de "caminata aleatoria". Las partículas atómicas liberadas en la fisión nuclear también se mueven de manera aleatoria. Durante la Segunda Guerra Mundial, John von Neuman y Stanislaw Ulam usaron la simulación con números aleatorios para estudiar el movimiento de partículas en las reacciones nucleares. Von Neuman acuñó el término "Monte Carlo" para los métodos utilizados, y desde entonces los términos "métodos Monte Carlo" y "métodos de simulación" se han utilizado a menudo casi como sinónimos.*



La figura sugiere un modelo para el movimiento aleatorio en dos dimensiones. Suponga que una partícula se mueve en una serie de "saltos" de una unidad, cada uno en una dirección aleatoria, cualquiera de las 12 posibilidades igualmente probables. Una manera de seleccionar las direcciones es tirar un dado y lanzar una moneda. El dado determina una de las direcciones 1-6, si además cae cara en la moneda. Si en la moneda aparece cruz, se invierte la dirección del dado, es decir, el dado junto con cruz en la moneda da las direcciones 7-12. Así, 3h (que significa 3 en el dado y cara en la moneda) proporciona la dirección 3; 3t proporciona la dirección 9 (opuesta a 3), y así sucesivamente.

9. Simule el movimiento descrito anteriormente con 10 tiros de un dado (y los lanzamientos de una moneda). Dibuje la trayectoria de los 10 saltos que obtenga. Haga su dibujo lo suficientemente preciso como para que pueda estimar (midiendo) qué tan lejos llega la partícula desde el punto de inicio.

10. Repita el experimento del ejercicio 9 cuatro veces más. Mida la distancia desde el inicio al final para cada uno de los cinco "viajes aleatorios". Sume estas cinco distancias y divida la suma entre 5, para llegar a "una distancia neta esperada" para ese viaje.

En los ejercicios 11 y 12, considere otra caminata aleatoria bidimensional regida por las condiciones siguientes.

1. *Inicie desde la esquina de una calle determinada, y camine una manzana hacia el norte. En cada intersección:*
2. *Dé vuelta a la izquierda con probabilidad de* 1/6.
3. *Avance en línea recta con probabilidad de* 2/6 (= 1/3).
4. *Dé vuelta a la derecha con probabilidad de* 3/6 (= 1/2).

(Nunca se vuelva de regreso.)

11. ***Una caminata aleatoria usando un dado*** Explique cómo puede utilizarse un dado para simular esta caminata aleatoria.

12. ***Una caminata aleatoria por medio de una tabla de números aleatorios*** Utilice la tabla 11 para simular esta caminata aleatoria. Por cada 1 encontrado en la tabla, dé vuelta a la izquierda y avance una manzana. Por cada 2 o 3, siga de frente una manzana más. Por cada 4, 5 o 6, dé vuelta a la derecha y avance otra manzana. Descarte los demás dígitos. (¿Ve cómo este esquema satisface las probabilidades dadas anteriormente?) Esta vez empiece en la esquina superior derecha de la tabla, recorriendo hacia abajo de la columna los números 9, 7, 7, y así sucesivamente. Luego inicie con la parte superior de la siguiente columna a la izquierda, 1, 0, 0, y así sucesivamente, hacia abajo. Cuando haya utilizado estas dos columnas de dígitos, detenga la "caminata". Describa, en términos de distancia y dirección, en dónde terminó, en relación con el punto de inicio.

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

Cómo aproximar π por medio de la probabilidad

(La información en esta investigación se tomó de Burton's History of Mathematics: An Introduction, *tercera edición, de David M. Burton, publicado por Wm. C. Brown, 1995, p. 440.)*

El problema siguiente fue propuesto por Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788) en su *Histoire Naturelle*, en 1777.

Se marca un área grande del plano con líneas paralelas equidistantes; la distancia entre dos líneas consecutivas de la serie es a. Se lanza de manera aleatoria una aguja delgada, cuya longitud es $l < a$, sobre el plano. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja interseque una de estas líneas?

La respuesta a este problema puede encontrarse por cálculo integral, y se demuestra que la probabilidad es $p = (2l)/(\pi a)$. Despejando a π obtenemos la fórmula

$$\pi = \frac{2l}{pa}, \qquad (1)$$

que puede utilizarse para aproximar el valor de π de manera experimental. Esta observación fue hecha por primera vez por el matemático Pierre Simon Laplace y la realizó experimentalmente Johann Wolf, profesor de astronomía en Berna, en 1850. En esta investigación, realizaremos un experimento similar.

Temas para análisis

Divida la clase en grupos de 3 o 4 estudiantes cada uno. Cada grupo necesitará los siguientes materiales.

1. Una hoja blanca con una serie de líneas paralelas separadas a la misma distancia unas de otras.
2. Una aguja delgada, o un objeto parecido, con una longitud menor que la distancia entre las líneas paralelas de la hoja.

Cada grupo realizará los siguientes pasos.

1. Medir y registrar la distancia entre las líneas (a) y la longitud de la aguja (l), usando las mismas unidades para ambas.
2. Asignar a un miembro para arrojar la aguja sobre el papel, otro para determinar si la aguja "acierta" en la línea o no, y otro para llevar un conteo de los aciertos y fracasos.
3. Analizar formas para minimizar los sesgos, de modo que la posición y orientación de la aguja que se deja caer resulte tan aleatoria como sea posible.
4. Arrojar la aguja 100 veces, y registre el número de aciertos.
5. Calcular la probabilidad $p =$ (número de aciertos)/100. ¿La probabilidad es teórica o empírica?
6. Ingresar el valor calculado de p y los valores medidos de a y l en la fórmula (1) para obtener el valor de π. Redondee este valor a cuatro decimales.

Ahora registre con todo el grupo los diferentes valores obtenidos para π. Analice las preguntas siguientes.

1. El valor correcto de π, a cuatro decimales, es de 3.1416. ¿Cuál valor de π, reportado por los diferentes grupos, es más preciso? ¿Qué tan lejos quedó?
2. ¿Era necesario lanzar la aguja 100 veces, o se podrían haber utilizado más o menos lanzamientos?
3. Wolf lanzó su aguja 5000 veces y acertó 2532 ocasiones, con lo que llegó a un valor experimental de π igual a 3.1596. ¿Qué tan lejano fue el valor de Wolf?
4. ¿Cómo podría modificar el experimento para producir "mejores" valores de π?
5. ¿Por qué podrían utilizar los grupos diferentes valores para l y a y aun así todos obtener aproximaciones legítimas para π?

EXAMEN DEL CAPÍTULO 12

✎ **1.** Explique la diferencia entre probabilidad *empírica* y *teórica*.

✎ **2.** Formule la *ley de los números grandes* y lance una moneda para ilustrarla.

Sacar cartas *Se saca una carta al azar de una baraja estándar de 52 cartas. Determine las posibilidades en contra de que sea cada una de las siguientes cartas.*

3. un corazón

4. una reina roja

5. un rey o una carta negra de figura

La genética en la fibrosis quística *La tabla representa la transmisión genética de la fibrosis quística. C denota un gen normal mientras que c denota a un gen de fibrosis quística. (El gen normal es dominante.) En este caso, ambos padres son Cc, lo cual significa que heredaron cada uno de los genes y por lo tanto, son portadores pero no tienen la enfermedad.*

		Segundo padre
		C **c**
Primer padre	**C**	Cc
	c	

6. Complete la tabla, mostrando las cuatro combinaciones, igualmente probables, de genes.

7. Determine la probabilidad de que un hijo de esos padres también sea portador sin desarrollar enfermedad.

8. ¿Cuáles son las posibilidades en contra de que un hijo de estos padres realmente tenga fibrosis quística?

Día de descanso para trabajadores de una pizzería *El gerente de una pizzería (que opera siete días a la semana) permite a cada uno de tres empleados que elija un día de descanso la semana siguiente. Suponiendo que la selección se realiza aleatoriamente, determine la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes.*

9. Que los tres seleccionen días diferentes.

10. Que los tres seleccionen el mismo día.

11. Que exactamente dos de ellos seleccionen el mismo día.

Creación de números a partir de conjuntos de dígitos *Se eligen aleatoriamente dos números sin reemplazo del conjunto {1, 2, 3, 4, 5}. Determine la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes.*

12. Que ambos números sean pares.

13. Que ambos números sean primos.

14. Que la suma de los dos números sea impar.

15. Que el producto de los dos números sea impar.

Selección de comités *Se selecciona al azar un comité de tres miembros de un grupo que consta de tres hombres y dos mujeres.*

16. Sea x el número de hombres en el comité. Complete la tabla de distribución de probabilidad.

x	$P(x)$
0	0
1	
2	
3	

17. Determine la probabilidad de que los miembros del comité no sean todos hombres.

18. Determine el número esperado de hombres en el comité.

Tiro de dados *Se tira un par de dados. Determine lo siguiente.*

19. Las posibilidades en contra de "duplicar" (obtener el mismo número en ambos dados).

20. La probabilidad de que la suma sea mayor que 2.

21. Las posibilidades en contra de que la suma sea "7 u 11".

22. La probabilidad de que una suma sea par y menor que 5.

Hacer par en el golf *Greg Bucker tiene una oportunidad de .78 de hacer par en cada hoyo que juega. Hoy planea jugar sólo tres hoyos. Determine la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes. Redondee las respuestas a tres decimales.*

23. Consigue par en los tres hoyos.

24. Consigue par en exactamente dos de los tres hoyos.

25. Consigue par en al menos uno de los tres hoyos.

26. Consigue par en el primero y el tercer hoyos, pero no en el segundo.

Sacar cartas *Se sacan dos cartas, sin reemplazo, de una baraja estándar de 52 cartas. Determine la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes.*

27. Ambas cartas son rojas.

28. Ambas cartas son del mismo color.

29. La segunda carta es una reina, siempre que la primera sea un as.

30. La primera carta es una carta de figura y la segunda es negra.

Simulación de nacimientos con números aleatorios *Consulte la secuencia de 40 lanzamientos de una moneda del ejemplo 2 de la sección 12.6.*

31. ¿Cuántas ternas de 3 nacimientos consecutivos están listadas?

32. ¿Cuántas de estas ternas consisten en sólo mujeres?

33. ¿Cuál es la probabilidad empírica de que 3 nacimientos consecutivos sean sólo de mujeres?

capítulo

13 Estadística

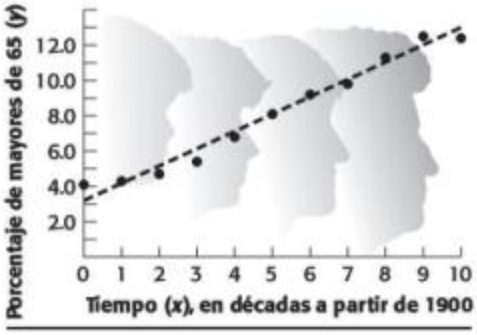


La tabla que aparece abajo muestra el envejecimiento de la población de Estados Unidos durante el siglo XX. La estadística proporciona una manera de analizar e interpretar esta información numérica. Si designamos los años como x y el porcentaje de personas de 65 años o más como y (y para simplificar, determinamos que $x = 0$ representa a 1900, $x = 1$ para 1910, y así sucesivamente), podemos trazar los datos en el plano de coordenadas xy. Los puntos resultantes, que se muestran abajo de la tabla, crean un patrón casi lineal. La técnica estadística denominada *regresión* permite obtener la única recta que se ajusta bien a los datos, lo que también se muestra en la gráfica. La ecuación de esta recta es

$$y = .96x + 3.27.$$

Año	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Porcentaje de mayores de 65 años	4.1	4.3	4.7	5.4	6.8	8.1	9.2	9.8	11.3	12.5	12.4

Envejecimiento de la población de Estados Unidos



La pendiente de la recta de regresión es .96. Esto muestra que la proporción de la población de Estados Unidos de 65 años o más aumentó casi un punto porcentual por década durante ese siglo. (Otros estudios estadísticos revelan algunas de las razones de que ocurra esta tendencia.) Para saber más sobre la regresión, vea la sección 13.6.

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2002, p. 385 (información de la Oficina de censos de Estados Unidos).

13.1 Distribuciones de frecuencias y gráficas

13.2 Medidas de tendencia central

13.3 Medidas de dispersión

13.4 Medidas de posición

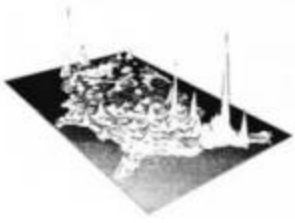
13.5 La distribución normal

Extensión: Cómo mentir con la estadística

13.6 Regresión y correlación

Investigación en grupo: Cómo combinar conjuntos de datos

Examen del capítulo 13

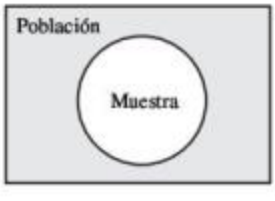


Densidades de población
Hay muchas clases diferentes de gráficas. Por ejemplo, la gráfica generada por computadora que aparece arriba muestra los picos de las densidades de población de Estados Unidos. Cuanto mayor sea el pico, más densa es la población en esa área. El mapa muestra que la más alta densidad de población se encuentra en el área de la ciudad de Nueva York. Las zonas en negro del oeste indican menos de dos habitantes por milla cuadrada.

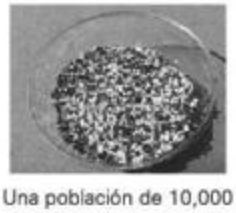
Los gobiernos recopilan y analizan una cantidad sorprendente de "estadísticas". El censo, por ejemplo, es un vasto proyecto de recopilación de datos, aunque no es una idea nueva; hace 2000 años María y José viajaron a Belén para que los contaran en un censo. Muchos años antes, los egipcios ya registraban información numérica que hoy se sigue estudiando. Durante mucho tiempo, de hecho, se entendió por "estadística" la información relacionada con el gobierno. La palabra misma se deriva del latín *statisticus*, que significa "del Estado".

El desarrollo de las teorías, los métodos, las pruebas y los diseños experimentales actuales de la estadística se debe al esfuerzo agregado de muchas personas. Por ejemplo, John Gaunt analizó los registros semanales de mortandad que consignaban las defunciones en Londres durante la primera mitad del siglo XVII. En 1662, publicó *Observations* en donde apuntaba que el número de varones nacidos era mayor que el de mujeres, pero que a la larga el número de ambos sexos se equilibraba. A partir de estos inicios se desarrollaron las compañías de seguros, que se basaban en posibilidad de pronosticar el número de muertes a partir de los datos en las tablas de mortalidad. En el campo de la biología, en el siglo XIX sir Francis Galton y Karl Pearson aportaron importantes contribuciones a la teoría estadística. William S. Gossett, alumno de Pearson, logró algunos de los primeros resultados obtenidos a partir de a muestras pequeñas. Gossett se sentía obligado a publicar bajo el seudónimo de "Student" (*alumno* en inglés); sus principales hallazgos se conocieron, a partir de entonces, como la prueba *t* de Student, una importante herramienta estadística.

Durante el siglo XX, la teoría y la metodología de la estadística avanzaron enormemente, y se han convertido en herramientas esenciales en casi todos los campos de la ciencia, el gobierno, el académico, el social y el empresarial. La labor de gente como sir Ronald Fisher, Gertrude Mary Cox y John Tukey fueron fundamentales a este respecto. Los métodos numéricos y gráficos de Tukey, que han adquirido gran popularidad en los últimos años, se conocen como **análisis exploratorio de datos**.



En estadística, a menudo resulta importante distinguir entre una **población**, que contiene a *todos* los elementos bajo estudio, y una **muestra**, que comprende sólo *algunos* (por lo general no todos) los elementos de la población. Por ejemplo, para predecir el resultado de una elección presidencial próxima, quizá nos interesarían las preferencias de voto de varios millones de personas (los votantes potenciales del país). Sin embargo, en la práctica, incluso las organizaciones de sondeo de votaciones nacionales, que cuentan con recursos considerables, sólo extraerían una muestra relativamente pequeña, digamos de 2000, de estas preferencias. En general una muestra puede ser cualquier subconjunto de una población. Vea el diagrama de Venn al margen.



Una población de 10,000

El estudio de la estadística puede dividirse en dos áreas principales. La primera, la **estadística descriptiva**, tiene que ver con la recopilación, organización, resumen y presentación de los datos (o información). Las principales herramientas de la estadística descriptiva son las tablas de números, varias clases de gráficas y diversas cantidades calculadas, tales como los promedios. Estas herramientas pueden aplicarse tanto a muestras como a poblaciones.



Una muestra aleatoria de 25

La segunda área principal de la estadística, la **estadística inferencial**, tiene que ver con la obtención de inferencias o conclusiones (por medio de conjeturas) acerca de poblaciones con base en la información tomada de las muestras. Es en esta área en la que mejor podemos ver la relación entre probabilidad y estadística.



Una muestra aleatoria de 100

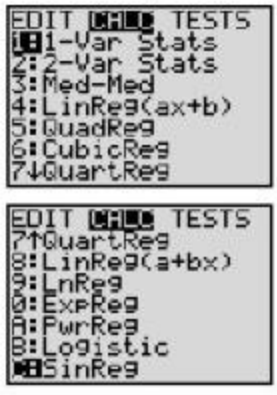
La Lansford Publishing Company, de San José, California, creó un demostrador de muestreo que consiste en un gran tazón con 10,000 cuentas de varios colores, junto con varias paletas para extraer con facilidad muestras de diversos tamaños. Al margen, debajo de la figura del tazón, presentamos dos muestras aleatorias, la primera de las cuales consta de 25 cuentas, 9 de ellas verdes. De esta muestra, podemos "inferir" que el tazón (la población) debe contener alrededor de 9/25, o 36%, de cuentas verdes, esto es, alrededor de 3600. Esto constituye un *razonamiento inductivo*. De una muestra particular hicimos una conjetura acerca de la población en general. Si aumentamos el tamaño

de nuestra muestra, entonces la proporción de cuentas verdes en esta segunda muestra probablemente dará una estimación más precisa de la proporción de la población. La segunda muestra, que aparece al margen, contiene 100 cuentas, 28 de las cuales son verdes. Así que la nueva estimación sería de alrededor de 28/100, o 28%, esto es, 2800 cuentas verdes en el tazón.

De hecho, sabemos que el tazón contiene 30%, o 3000 cuentas verdes. Así que la estimación de 2800, con base en la muestra más grande, fue considerablemente más precisa que la estimación de 3600 con la muestra más pequeña. Al conocer la proporción real de cuentas verdes en la población, podemos invertir la situación y aplicar el *razonamiento deductivo* para predecir la proporción de cuentas verdes en una muestra particular. Nuestro pronóstico para una muestra de 100 cuentas sería de 30% de 100, o 30. La muestra, por ser aleatoria, puede o no contener exactamente 30 cuentas verdes.

Para resumir nuestra exposición: si sabemos cómo es una población, entonces la teoría de la probabilidad nos permite concluir cómo está formada una muestra (razonamiento deductivo); si sabemos cómo es una muestra, entonces la estadística inferencial nos permite hacer generalizaciones acerca de la población (razonamiento inductivo).

13.1 Distribuciones de frecuencias y gráficas



Diferentes opciones estadísticas de la TI-83 Plus

La información que se recopila pero no se ha organizado aún se denomina **datos crudos**. Con frecuencia es **cuantitativa** (o **numérica**), pero también puede ser **cualitativa** (o **no numérica**), como se ilustra en la tabla 1.

TABLA 1 Ejemplos de datos crudos

El número de hermanos en 10 familias diferentes (datos cuantitativos): 3, 1, 2, 1, 5, 4, 3, 3, 8, 2
Las marcas de seis automóviles diferentes (datos cualitativos): Toyota, Ford, Nissan, Toyota, Chevrolet, Honda

Por lo general, los datos cuantitativos son más útiles cuando están **ordenados**, o dispuestos en orden numérico. En forma ordenada, la primera lista de la tabla 1 aparece como:

1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 8.

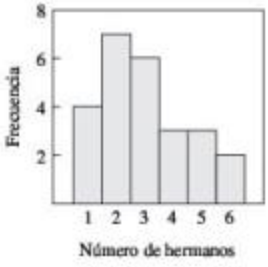
Cuando un conjunto de datos incluye elementos repetidos, puede organizarse en una **distribución de frecuencias**, que lista los distintos valores de datos (x) junto con sus frecuencias (f). La frecuencia indica el número de veces en que el elemento correspondiente aparece en el conjunto de datos. También es útil mostrar la **frecuencia relativa** de cada elemento en particular. Ésta es la fracción, o porcentaje, que representa el elemento dentro del conjunto de datos. Si n señala el número total de elementos, y un elemento dado, x, apareció f veces, entonces la frecuencia relativa de x es f/n. El ejemplo 1 ilustra estas ideas.

La mayoría de las calculadoras gráficas y científicas son capaces de realizar todos los cálculos que describimos en este capítulo, incluyendo la ordenación de datos (una vez que se hayan ingresado). Por lo tanto, su objetivo al estudiar este material debe ser comprender el significado de las diferentes cantidades que se calculan. Le recomendamos que los cálculos reales, en especial de conjuntos de datos de tamaño considerable, los lleve a cabo en una calculadora (o en una computadora con un programa estadístico adecuado).

EJEMPLO 1 Se realizó un sondeo entre 25 miembros de una clase de psicología acerca del número de hermanos que tenían en sus familias. Elabore una distribución de frecuencia y una distribución de frecuencia relativa de las respuestas que dieron, las cuales se muestran aquí:

2, 3, 1, 3, 3, 5, 2, 3, 3, 1, 1, 4, 2, 4, 2, 5, 4, 3, 6, 5, 1, 6, 2, 2, 2

Estos datos varían desde un valor inferior 1 hasta uno superior 6. Las frecuencias (obtenidas por inspección) y las frecuencias relativas se aprecian en la tabla 2 de la página siguiente.



Histograma

FIGURA 1



Polígono de frecuencias

FIGURA 2

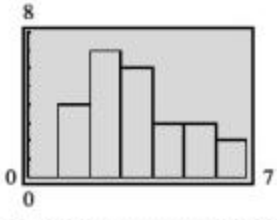
TABLA 2 Distribución de frecuencia y de frecuencias relativas del número de hermanos

Número x	Frecuencia f	Frecuencia relativa f/n
1	4	4/25 = 16%
2	7	7/25 = 28%
3	6	6/25 = 24%
4	3	3/25 = 12%
5	3	3/25 = 12%
6	2	2/25 = 8%

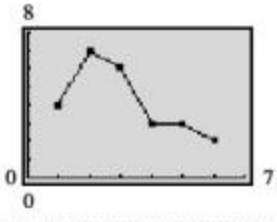
Los datos numéricos de la tabla 2 pueden interpretarse más fácilmente con la ayuda de un **histograma**, que es una serie de rectángulos cuyas longitudes representan las frecuencias, colocados uno al lado del otro como se muestra en la figura 1. Cada eje, horizontal y vertical, debe estar debidamente identificado y contener las escalas numéricas apropiadas.

La información presentada en el histograma de la figura 1 también puede expresarse por medio de un **polígono de frecuencia**, como se hizo en la figura 2. Simplemente se dibuja un punto a la altura indicada para cada frecuencia, se conectan los puntos con segmentos de recta y se completa el polígono con segmentos que lleguen al eje fuera de los límites del 1 y el 6.

Distribuciones de frecuencias para datos agrupados A menudo, los conjuntos de datos que contienen una gran cantidad de elementos se organizan en grupos, o *clases*. Todos los elementos son asignados a la clase que les corresponde; luego, se elabora una **distribución de frecuencias para datos agrupados**, la cual se representa mediante una gráfica. Aunque no hay reglas fijas para determinar las clases, la mayoría de los estudiosos de la estadística coincide en algunas normas generales, como las que siguen.



Este histograma se generó a partir de los datos de la tabla 2. Compárelo con la figura 1.



Esta gráfica lineal se parece al polígono de frecuencia de la figura 2. Se elaboró con los datos de la tabla 2.

Directrices para construir las clases en una distribución de frecuencias para datos agrupados

1. Asegúrese de que cada dato se ajuste a una, y solamente una, clase.
2. Trate de hacer que todas las clases tengan la misma extensión.
3. Asegúrese de que las clases sean mutuamente excluyentes.
4. Utilice de 5 a 12 clases. (Un número menor o mayor de clases podría oscurecer el comportamiento de los datos.)

EJEMPLO 2 A 40 estudiantes, elegidos de manera aleatoria en la cafetería de la escuela un lunes por la mañana, se les pidió que estimaran el número de horas que habían dedicado a estudiar la semana anterior (tanto las horas dentro como fuera de clase). He aquí el registro de sus respuestas.

18	60	72	58	20	15	12	26	16	29
26	41	45	25	32	24	22	55	30	31
55	39	29	44	29	14	40	31	45	62
36	52	47	38	36	23	33	44	17	24

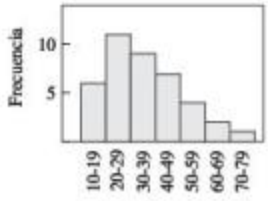
Construya una distribución de frecuencias para datos agrupados y una de frecuencia relativa, y elabore un histograma y un polígono de frecuencias para los datos proporcionados.

Si revisamos los datos, veremos que varían de un mínimo de 12 a un máximo de 72. Si hacemos que nuestras clases varíen de 10 a 19, de 20 a 29, y así sucesivamente, hasta 70 a 79, habremos cumplido con todas las normas anteriores y la extensión común de las clases será de 10 unidades. Ahora regresamos al conjunto de datos y marcamos cada elemento según la clase que le corresponda. El total de las marcas es la frecuencia de las clases, que a su vez produce frecuencias relativas, como se aprecia en la tabla 3. El histograma se muestra en la figura 3.

TABLA 3 Distribuciones de frecuencias para datos agrupados y frecuencias relativas para las horas de estudio a la semana

Límite de las clases	Marcas	Frecuencia f	Frecuencia relativa f/n
10-19	𝍸 |	6	6/40 = 15.0%
20-29	𝍸 𝍸 |	11	11/40 = 27.5%
30-39	𝍸 ||||	9	9/40 = 22.5%
40-49	𝍸 ||	7	7/40 = 17.5%
50-59	||||	4	4/40 = 10.0%
60-69	||	2	2/40 = 5.0%
70-79	|	1	1/40 = 2.5%

Total: $n = 40$



Histograma de frecuencias agrupadas

FIGURA 3

En la tabla 3 (y en la figura 3), los número 10, 20, 30, etc., se denominan **límites inferiores de clase**; se trata de los valores más pequeños posibles dentro de la clase respectiva. Los números 19, 29, 39, etc., se denominan **límites superiores de clase**. La **extensión de la clase** que es común a la distribución es la diferencia entre dos límites inferiores sucesivos de clase (como 30-20), o de cualesquiera dos límites sucesivos superiores de clase (como 59-49). La extensión de la clase para esta distribución es de 10.

Para elaborar un polígono de frecuencias, observe que, en una distribución de frecuencias para datos *agrupados,* cada uno de los datos en una clase determinada no siempre se repite. Podemos obtener el valor "intermedio", o la **marca de clase**, sumando los límites inferiores y superiores de las clases y dividiendo luego esta suma entre dos. Entonces colocamos todas las marcas de clase a lo largo del eje horizontal y trazamos los puntos por encima de estas mismas marcas. Las alturas de los puntos trazados representan las frecuencias de clase. Los puntos resultantes se conectan de la misma manera que en una distribución de frecuencias (no agrupadas). En este caso, el resultado se muestra en la figura 4. ■



Polígono de frecuencias agrupadas

FIGURA 4

TABLA 4 Distribución de frecuencias para datos agrupados para las horas de estudio a la semana

Límites de clase	Frecuencia
10-19	6
20-29	11
30-39	9
40-49	7
50-59	4
60-69	2
70-79	1

Diagramas de tallos y hojas

Observe que, en la tabla 3, las marcas mismas dan una buena idea de cómo están distribuidos los datos. (Por ejemplo, está claro que la frecuencia más alta ocurre en la clase 20-29 y que los elementos se concentran más en las clases inferiores.) En realidad, las marcas lucen casi como un histograma girado hacia un lado. Sin embargo, una vez que se hacen las marcas, por lo regular éstas se desechan y la distribución de frecuencia agrupada se presenta como en la tabla 4.

Ahora ya no existe la ventaja gráfica de las marcas. Además, tampoco podemos decir, con base en la distribución misma de frecuencias agrupadas (o con base en las marcas, para este caso), en qué consistió cada uno los elementos originales. Por ejemplo, sólo sabemos que en la clase 40-49 había siete elementos, pero no sabemos específicamente cuáles fueron éstos.

PARA REFLEXIONAR

Cuando se lanzan monedas, los resultados de una tirada en particular no pueden predecirse de manera confiable. Sin embargo, cuantos más lanzamientos se hagan, se vuelve más fácil predecir las posibles proporciones entre cara y cruz. Esto es una consecuencia de la "ley de los grandes números". Por ejemplo, si se lanzan cinco monedas, entonces el número de caras resultante, a la que designamos como x, es una "variable aleatoria", cuyos posibles valores son 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Si se lanzan de manera repetida las cinco monedas, digamos, 64 veces, entonces se puede utilizar la fórmula de la probabilidad binomial para obtener **frecuencias esperadas** (o **frecuencias teóricas**), como se muestra en la tabla de la derecha. Las primeras dos columnas de la tabla comprenden la **distribución de frecuencias esperadas** para 64 lanzamientos de cinco monedas. Si el experimento fuera real, obtendríamos **frecuencias observadas** (o **frecuencias empíricas**), que muy probablemente diferirían un poco de las frecuencias esperadas. Pero 64 repeticiones del experimento deberían ser suficientes para proporcionar bastante consistencia entre los valores esperados y los observados.

Número de caras x	Frecuencia esperada e	Frecuencia observada o
0	2	
1	10	
2	20	
3	20	
4	10	
5	2	

Para análisis en grupo

Haga que varios miembros del grupo lancen cinco monedas un total de 64 veces, y haga un registro de los resultados.

1. Escriba los resultados de su experimento en la tercera columna de la tabla anterior, para generar una **distribución de frecuencias observadas**.
2. Elabore dos histogramas, uno de la distribución de frecuencias esperadas y uno de su distribución de frecuencias observadas.
3. Compare ambos histogramas y explique por qué difieren entre sí.

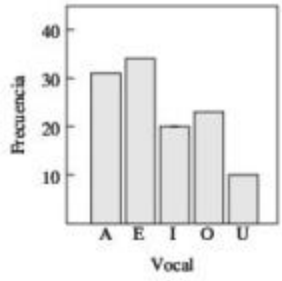
Para evitar las dificultades mencionadas al final de la página 727, podemos emplear una de las herramientas del análisis exploratorio de datos, el **diagrama de tallo y hojas**, que se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Presente los datos sobre las horas de estudio del ejemplo 2 como un diagrama de tallo y hojas.

Retomemos el ejemplo 2 para obtener los datos en crudo. Hemos acomodado los números en la tabla 5. Los 10 dígitos, a la izquierda de la línea vertical, son los "tallos", mientras que las cifras que le corresponden a cada uno son las "hojas". Hemos introducido todos los elementos de la primera fila de los datos originales, de izquierda a derecha, luego los elementos de la segunda fila, y así sucesivamente hasta los de la cuarta fila.

TABLA 5 Diagrama de tallo y hojas para las horas de estudio a la semana

1	8 5 2 6 4 7
2	0 6 9 6 5 4 2 9 9 3 4
3	2 0 1 9 1 6 8 6 3
4	1 5 4 0 5 7 4
5	8 5 5 2
6	0 2
7	2



Gráfica de barras

FIGURA 5

Observe que el diagrama de tallo y hojas del ejemplo 3 refleja a primera vista las mismas impresiones gráficas que el histograma sin necesidad de elaborar el dibujo. También conserva los valores exactos de los datos.

Gráficas de barras y gráficas circulares Es posible presentar una distribución de frecuencias de observaciones no numéricas en forma de una **gráfica de barras**, que es similar a un histograma salvo porque los rectángulos (barras) por lo regular no se tocan unos con otros y, algunas veces, se acomodan horizontalmente en lugar de hacerlo en forma vertical. La gráfica de barras de la figura 5 muestra la frecuencia de incidencias de las vocales A, E, I, O y U en un párrafo.

Hay una alternativa a la gráfica de barras, que se conoce como **gráfica circular**, o **gráfica de pastel**, que emplea un círculo para representar el total de todas las categorías y lo divide en sectores, o pedazos (como las rebanadas de un pastel), cuyo tamaño muestra las magnitudes relativas de las categorías. El ángulo del círculo completo mide 360°. Por ejemplo, una categoría que represente el 20% del total debe corresponder a un sector cuyo ángulo sea el 20% de 360°, esto es, .20(360°) = 72°.

TABLA 6 Gastos de un estudiante

Gastos	Porcentaje del total
Alimentación	30%
Renta	25%
Entretenimiento	15%
Ropa	10%
Libros	10%
Otros	10%

EJEMPLO 4 Nola Akala descubrió que, durante su primer semestre en la universidad, sus gastos cayeron dentro de las diversas categorías que se muestran en la tabla 6. Presente esta información en una gráfica circular.

El ángulo central del sector para alimentos es de .30(360°) = 108°. La renta es de .25(360°) = 90°. Calcule los otros cuatro ángulos de manera análoga. Luego, dibuje un círculo y mida los ángulos apropiados con un transportador. La gráfica circular completa aparece en la figura 6. ■



Categorías de gastos

FIGURA 6

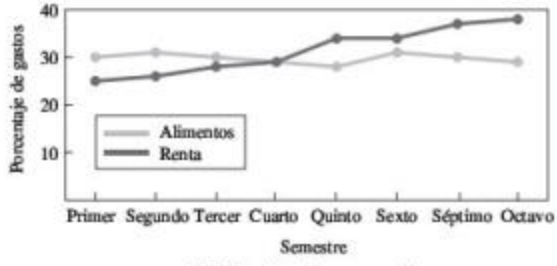
Una gráfica circular muestra, de un vistazo, las magnitudes relativas de las diversas categorías. Si estamos interesados en demostrar cómo *cambia* una cantidad, digamos, a lo largo del tiempo, podemos utilizar una **gráfica lineal**. Conectamos una serie de segmentos de línea que suben o bajan con respecto al tiempo, de acuerdo con la magnitud de la cantidad que se ilustra. Si queremos comparar los patrones de cambio de dos o más cantidades, podemos incluso trazar múltiples gráficas lineales. (Las gráficas lineales se parecen bastante al polígono de frecuencias, pero las cantidades que representan gráficamente no necesariamente son frecuencias.)

EJEMPLO 5 Nola, la misma del ejemplo 4, quiere seguirle la pista a sus gastos principales, alimentos y renta, durante los cuatro años que hará estudios superiores (ocho semestres), para ver cómo cambió cada porcentaje con el tiempo, y también cómo se comparan unos con otros. Emplee los datos que ella recabó (tabla 7) para mostrar esta información en un gráfica lineal, y formule cualesquiera conclusiones significativas que se desprendan de la misma.

TABLA 7 Porcentajes del gasto en alimentación y renta

Semestre	Alimentación	Renta
Primer	30%	25%
Segundo	31	26
Tercer	30	28
Cuarto	29	29
Quinto	28	34
Sexto	31	34
Séptimo	30	37
Octavo	29	38

Una gráfica lineal comparativa para los datos proporcionados (figura 7) muestra que el porcentaje de alimentos permaneció constante durante los primeros cuatro años (cercano a 30%), mientras que el porcentaje de la renta, que comenzó varios puntos por debajo de la línea de los alimentos, se elevó a un ritmo constante, superando a los alimentos después del cuarto semestre para terminar significativamente por encima de estos últimos.



Gráfica lineal comparativa

FIGURA 7

13.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 y 2, utilice los datos para realizar lo siguiente:

(a) *Elabore distribuciones de frecuencias y de frecuencias relativas en una tabla parecida a la tabla 2.*
(b) *Elabore un histograma.*
(c) *Elabore un polígono de frecuencias.*

1. ***Preguntas sin responder en un examen de matemáticas*** Los siguientes datos representan los números de preguntas que un grupo de 30 estudiantes no contestó de un examen de matemáticas.

1	0	3	0	0	2	1	2	2	0	0	5	1	1	3
4	2	0	2	0	1	0	1	2	3	3	4	0	1	0

2. ***Calificaciones de un cuestionario en una clase de economía*** Los siguientes datos representan las calificaciones de un cuestionario de los alumnos de una clase de economía.

8	5	6	10	4	7	2	7	6	3	1	7	4	9	
5	9	2	6	5	4	6	6	8	4	10	8	9	7	

En cada uno de los ejercicios 3 a 6, utilice los datos que se proporcionan para hacer lo siguiente:

(a) *Elabore las distribuciones de frecuencias para datos agrupados y de frecuencias relativas en una tabla parecida a la tabla 3. (En cada caso, siga las directrices sugeridas para los límites de las clases y la extensión de las clases.)*
(b) *Elabore un histograma.*
(c) *Elabore un polígono de frecuencias.*

3. ***Estaturas de los jugadores de béisbol*** A continuación aparecen las tallas (en pulgadas) de los 54 jugadores abridores en un torneo de béisbol.

53	51	65	62	61	55	59	52	62
64	48	54	64	57	51	67	60	49
49	59	54	52	53	60	58	60	64
52	56	56	58	66	59	62	50	58
60	63	64	52	60	58	63	53	56
58	61	55	50	65	56	61	55	54

Emplee cinco clases con una extensión de clase uniforme de 5 pulgadas y utilice un límite inferior de 45 pulgadas para la primera clase.

4. ***Saldos de cuentas de tarjeta de crédito*** Los siguientes datos en crudo representan los saldos mensuales de las cuentas (al dólar más cercano) de una muestra de 50 usuarios de una nueva clase de tarjeta.

138	78	175	46	79	118	90	163	88	107
126	154	85	60	42	54	62	128	114	73
129	130	81	67	119	116	145	105	96	71
100	145	117	60	125	130	94	88	136	112
118	84	74	62	81	110	108	71	85	165

Utilice siete clases con un extensión uniforme de 20 dólares, en las que el límite inferior de la primera clase sea de 40 dólares.

5. ***Temperaturas diarias más altas*** Los siguientes datos representan las temperaturas diarias más elevadas

(en grados Fahrenheit) para el mes de junio en una ciudad del suroeste de Estados Unidos.

79	84	88	96	102	104	99	97	92	94
85	92	100	99	101	104	110	108	106	106
90	82	74	72	83	107	111	102	97	94

Utilice nueve clases con una extensión uniforme de 5 grados, en las que el límite inferior de la primera clase sea de 70 grados.

6. ***Puntuaciones del cociente intelectual de alumnos de secundaria*** Los siguientes datos representan las puntuaciones de los IQ (cociente intelectual) de 50 alumnos de secundaria.

113	109	118	92	130	112	114	117	122	115
127	107	108	113	124	112	111	106	116	118
121	107	118	118	110	124	115	103	100	114
104	124	116	123	104	135	121	126	116	111
96	134	98	129	102	103	107	113	117	112

Utilice nueve clases con una extensión uniforme de 5, en las que el límite de la primera clase sea de 91.

Para cada uno de los ejercicios 7 a 10, elabore un diagrama de tallos y hojas para los datos que se proporcionan. En cada caso, trate las unidades como hojas. Para datos de un solo dígito, utilice el tallo como 0.

7. ***Juegos ganados en la Asociación Nacional de Baloncesto*** Para cierta fecha cercana a la mitad de la temporada, los equipos en la Asociación Nacional de Baloncesto (National Basketball Association, NBA) han ganado las siguientes cantidades de partidos.

20	29	11	26	11	12	7	26	18
19	14	13	22	9	25	11	10	15
10	22	23	31	8	24	15	24	15

8. ***Créditos acumulados*** A los estudiantes de una clase de cálculo se les pidió que dijeran cuántos créditos habían acumulado a la fecha. Sus respuestas fueron las siguientes.

12	4	13	12	21	22	15	17	33	24
32	42	26	11	53	62	42	25	13	8
54	18	21	14	19	17	38	17	20	10

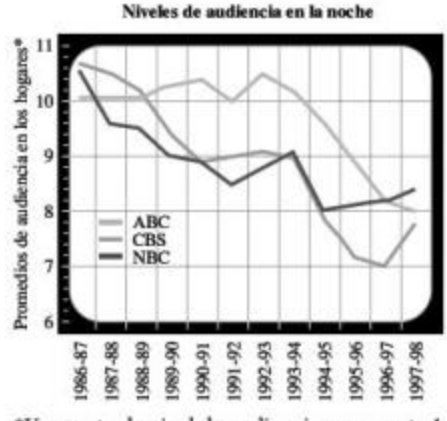
9. ***Distancia a la escuela*** Las siguientes son las distancias que 30 estudiantes elegidos al azar en una universidad de California recorren diariamente de ida y vuelta para ir a la escuela (en millas).

12	30	10	11	18	26	34	18	8	12
26	14	5	22	4	25	9	10	6	21
18	18	9	16	44	23	4	13	36	8

10. ***Yardas ganadas en la Liga nacional de fútbol*** Los datos siguientes representan las yardas netas que ganaron en cada juego durante una semana de la temporada los corredores de la Liga nacional de fútbol americano (National Football League, NFL).

28	19	36	73	37	88	67	33	54	123	79
12	39	45	22	58	7	73	30	43	24	36
51	43	33	55	40	29	112	60	94	86	62
42	29	18	25	41	3	49	102	16	32	46

Porcentajes de audiencia de las cadenas de televisión *Las gráficas de todas las clases a menudo se muestran de manera artística para atraer la atención o enfatizar algún significado. El siguiente ejemplo, presentado en la forma de una pantalla de televisión, muestra las tendencias de los índices de audiencia de los noticiarios nocturnos de las tres principales cadenas de televisión de Estados Unidos. Para los ejercicios 11 a 15 consulte esta gráfica.*



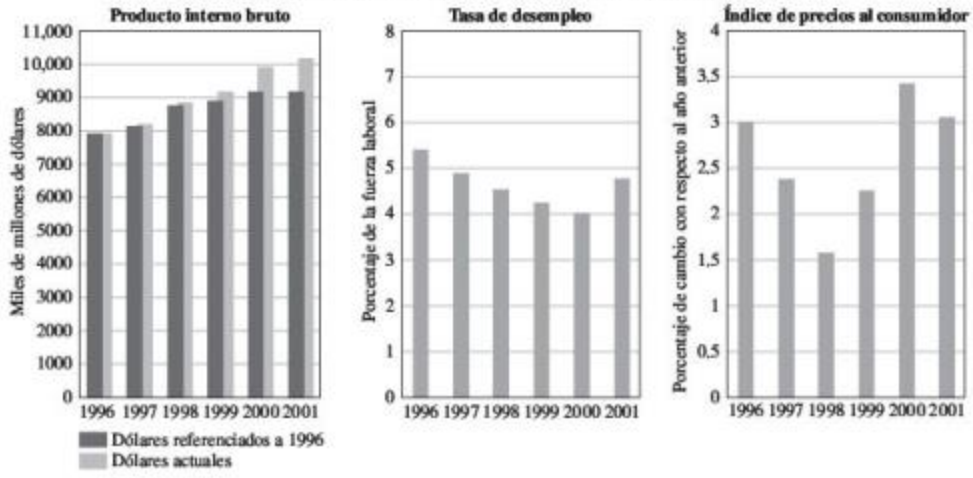
*Un punto de nivel de audiencia representa 1 por ciento del total de hogares de Estados Unidos con una televisión.

Fuente: Nielsen Media Research; *1999 World Book Year Book*, p. 301. World Book, Inc., 525 W. Monroe, Chicago, IL 60661.

11. De todos los hogares con televisores de Estados Unidos, ¿alrededor de qué porcentaje (al porcentaje entero más cercano) observaron las noticias de las tres cadenas durante 1986-1987?
12. De todos los hogares con televisores de Estados Unidos, ¿alrededor de qué porcentaje (al porcentaje entero más cercano) observaron las noticias en las tres cadenas durante 1997-1998?
13. ¿Cuál de los índices de audiencia cayó durante el periodo, y de cuánto fue la caída? (Estime al décimo más cercano del porcentaje.)
14. ¿En qué periodo de un año las tres cadenas *aumentaron* sus índices de audiencia?
15. En todo el periodo mostrado, ¿cuál fue la mayor diferencia entre la cadena con más audiencia y la que le siguió, cuál de las cadenas alcanzó el índice de audiencia más alto y en qué temporada lo alcanzó?

Leer gráficas de barras de indicadores económicos *Las siguientes gráficas de barras muestran las tendencias de diversos indicadores económicos durante el periodo 1996-2001. Consulte estas gráficas para los ejercicios 16 a 20.*

Selección de indicadores económicos clave de Estados Unidos



Fuente: Departamento de Comercio de Estados Unidos y Departamento del Trabajo de Estados Unidos, excepto las cifras de 2001, que son estimaciones de The Conference Board.

Fuente: 2002 World Book Year Book, p. 191. World Book, Inc., 233 N. Michigan Ave., Chicago, IL 60601.

16. ¿Aproximadamente cuál fue el producto interno bruto en 2001, en dólares referenciados a 1996?

17. Durante ese periodo de seis años, ¿más o menos cuál fue el Índice de precios al consumidor más alto y cuándo ocurrió?

18. ¿Cuál fue la variación más grande en desempleo de un año a otro y cuándo ocurrió?

19. Describa las tendencias aparentes tanto en dólares referenciados como en dólares actuales del producto interno bruto. ¿Será posible que uno de ellos disminuya el mismo año que el otro se incrementa? ¿Por qué sí o por qué no?

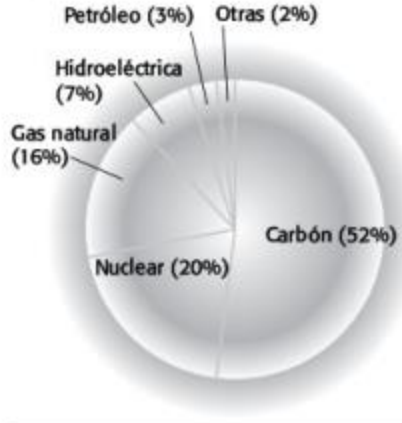
20. Explique por qué el producto interno bruto por lo general aumenta cuando la tasa de desempleo disminuye.

Leer gráficas circulares de fuentes primarias de energía *La gráfica circular de la derecha muestra las fuentes primarias de energía utilizadas para generar electricidad en los Estados Unidos en* 2000. *Consulte la gráfica para los ejercicios 21 y 22.*

21. ¿Cuál es el ángulo, al grado más cercano, del sector "Carbón"?

22. Suponiendo que la categoría "Otras" incluye cinco fuentes primarias, ¿en qué porcentaje (al décimo por ciento más cercano) contribuye en promedio cada una de las "otras" fuentes?

FUENTES PRIMARIAS DE ENERGÍA UTILIZADAS PARA LA GENERACIÓN DE ELECTRICIDAD EN 2000



Fuente: 2002 World Book Year Book, p. 201.

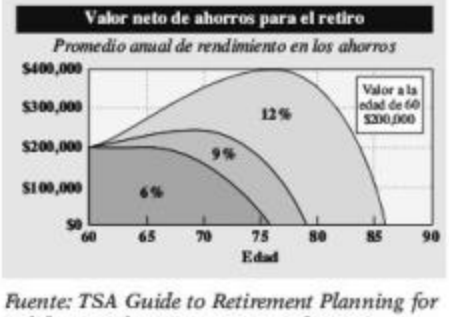
23. ***Fuentes de capacitación laboral*** En una encuesta realizada por la Oficina de Estadísticas Laborales se pidió a obreros de Estados Unidos que explicaran cómo fueron capacitados para sus trabajos. Los porcentajes de quienes respondieron en diferentes categorías se muestran en la tabla siguiente. Utilice la información de la tabla para elaborar una gráfica circular.

Principales fuentes de capacitación	Porcentaje aproximado de trabajadores
Capacitados en escuela	33%
Capacitación informal en el trabajo	25
Capacitación formal proporcionada por los empleadores	12
Capacitación en la milicia, o por correspondencia u otros cursos	10
Ninguna capacitación particular o no pudo identificar ninguna	20

24. ***Correspondencia entre educación e ingresos*** La información de la Oficina de Estadísticas Laborales para un año reciente mostró que los ingresos anuales de los trabajadores de Estados Unidos correspondían con su nivel educativo de acuerdo con la tabla siguiente. Elabore una gráfica de barras que muestre esta información.

Nivel educativo	Ingreso anual promedio
Menos de 4 años de bachillerato	$19,168
Bachillerato terminado	24,308
Cuatro años de universidad	38,620

Valor neto de los ahorros para el retiro *Dave Chwalik, quien desea retirarse cuando cumpla* 60 *años, está estudiando las gráficas lineales que aparecen aquí, las cuales muestran (bajo ciertos supuestos) cómo cambiará el valor neto de sus ahorros para el retiro (inicialmente de* 200,000 *dólares a la edad de* 60*) conforme envejezca, y a medida que retire sus ahorros para subsistir. Consulte la gráfica para los ejercicios 25 a 28.*



Fuente: TSA Guide to Retirement Planning for California Educators, invierno de 1993.

25. Suponiendo que Dave pudiese mantener una tasa promedio anual de 9%, ¿qué edad tendría cuando se terminaran sus ahorros?

26. Si pudiese ganar un promedio de 12% anual, ¿cuál es el valor neto máximo que alcanzaría? ¿A qué edad ocurriría ese máximo?

27. Suponga que Dave llega a los 70 años de edad gozando de buena salud, y la tasa promedio anual será de 6%.
(a) ¿Aproximadamente cuánto tiempo más puede esperar que le duren sus ahorros?
(b) ¿Qué opciones podría considerar para ampliar ese tiempo?

28. A los 77 años, ¿alrededor de cuántas veces más sería el valor neto de Dave, si la tasa promedio anual es de 12% en lugar de 9%?

Masa de muestras en un laboratorio de geología *Los diagramas de tallo y hojas pueden modificarse de varias formas para obtener un número razonable de tallos. Los datos siguientes, que representan las masas medidas (en gramos) de 30 muestras de mineral de un laboratorio de geología, se aprecian en un diagrama de* ***doble tallo*** *en la tabla 8.*

60.7	41.4	50.6	39.5	46.4
58.1	49.7	38.8	61.6	55.2
47.3	52.7	62.4	59.0	44.9
35.6	36.2	40.6	56.9	42.6
34.7	48.3	55.8	54.2	33.8
51.3	50.1	57.0	42.8	43.7

TABLA 8 Diagrama de tallo y hojas para masas de muestras de minerales

(30–34)	3	4.7	3.8				
(35–39)	3	9.5	8.8	5.6	6.2		
(40–44)	4	1.4	4.9	0.6	2.6	2.8	3.7
(45–49)	4	6.4	9.7	7.3	8.3		
(50–54)	5	0.6	2.7	4.2	1.3	0.1	
(55–59)	5	8.1	5.2	9.0	6.9	5.8	7.0
(60–64)	6	0.7	1.6	2.4			

29. Describa cómo se elaboró el diagrama de tallo y hojas de la tabla 8.

30. Explique por qué se denomina a la tabla 8 diagrama "de doble tallo".

31. En general, ¿cuántos tallos (en total) son adecuados para un diagrama de tallo y hojas? Explique su razonamiento.

32. De acuerdo con *The World Almanac and Book of Facts 2000* (página 231), las temperaturas más elevadas (en grados Fahrenheit) registradas en los 50 estados de Estados Unidos fueron las siguientes.

112	100	128	120	134	118	106	110	109	112
100	118	117	116	118	121	114	114	105	109
107	112	114	115	118	117	118	125	106	110
122	108	110	121	113	120	119	111	104	111
120	113	120	117	105	110	118	112	114	114

Presente estos datos en un diagrama de doble tallo.

33. ***Frecuencias de uso de las letras en la lengua inglesa*** La tabla siguiente muestra los porcentajes de incidencia generalmente aceptados de las diferentes letras del idioma inglés. (Las personas que se dedican a descifrar códigos han analizado estos porcentajes como una ayuda para descifrar códigos secretos.) Por ejemplo, observe que la E es la letra que aparece con mayor frecuencia, seguida de la T, la A, la O, la N, etc. Las letras Q y Z son las que aparecen con menor frecuencia. Observando la figura 5 del texto, ¿podría decir que las frecuencias de aparición de las vocales en ese párrafo fueron comunes o raras? Explique su razonamiento.

Letra	Porcentaje	Letra	Porcentaje
E	13	L	3 1/2
T	9	C, M, U	3
A, O	8	F, P, Y	2
N	7	W, G, B	1 1/2
I, R	6 1/2	V	1
S, H	6	K, X, J	1/2
D	4	Q, Z	1/5

Frecuencias y probabilidades de aparición de las letras *Los porcentajes que se mostraron en el ejercicio 33 se basaron en una muestra muy grande de texto escrito. Como se basan en experimentos, son "empíricos" más que "teóricos". Al convertir cada porcentaje en esa tabla a una fracción decimal, usted puede producir una* **distribución empírica de probabilidad**. *Por ejemplo, si se elige de manera aleatoria una sola letra de un fragmento de texto elegido al azar, la probabilidad de que sea una* E *es de* 0.13. *La probabilidad de que la letra así elegida sea una vocal* (A, E, I, O *o* U) *es de* .385 (.08 + .13 + .065 + .08 + .03).

34. Reescriba como una distribución empírica de probabilidad la distribución que se mostró en el ejercicio 33. Proporcione valores a tres decimales. Observe que las 26 probabilidades en esta distribución, una para cada letra del alfabeto, deben sumar 1 (salvo, tal vez, por pequeños errores de redondeo).

35. De la distribución que haya obtenido en el ejercicio 34, elabore una distribución de empírica probabilidad sólo para las vocales A, E, I, O y U. (*Una pista:* Divida entre .385 la probabilidad indicada para cada vocal en el ejercicio 34, para obtener una distribución cuyos cinco valores sumen 1.) Proporcione valores a tres decimales.

36. Elabore un diagrama de barras con las categorías adecuadas para su distribución del ejercicio 35.

37. Con base en la aparición de vocales en el párrafo que corresponde a la figura 5, elabore una distribución de probabilidades para las vocales. Las frecuencias son: A-31, E-34, I-20, O-23, U-10. Proporcione probabilidades hasta tres decimales.

38. ¿La distribución de probabilidades del ejercicio 37 es empírica o teórica? ¿Es diferente de la distribución del ejercicio 35? ¿Cuál es más precisa? Explique su razonamiento.

39. ***Frecuencias y probabilidades de horas de estudio*** Convierta la distribución de frecuencias para datos agrupados de la tabla 3 en una distribución empírica de probabilidad usando las mismas clases y ofreciendo valores de probabilidad hasta tres decimales.

40. ***Probabilidades de horas de estudio*** Recuerde que la distribución del ejercicio 39 se basó en horas de estudio a la semana para una muestra de 40 estudiantes. Suponga que se eligió al azar a uno de estos estudiantes. Por medio de su distribución, determine la probabilidad de que las horas de estudio durante la semana anterior para el estudiante elegido se ubiquen en cada uno de los siguientes intervalos.

(a) de 30 a 39 horas **(b)** de 40 a 59 horas
(c) menos de 30 horas **(d)** al menos 50 horas

Deportes favoritos entre estudiantes *A los 40 miembros de una clase de educación física se les pidió que nombraran su deporte favorito. La tabla siguiente muestra los números de quienes respondieron de diferentes maneras.*

Deporte	Número de estudiantes
Vela	9
Ala delta	5
Salto de *bungee*	7
Paracaidismo	3
Descenso en canoa	12
Descenso en rápidos	4

Utilice esta información en los ejercicios 41 a 44.

41. Si se elige a un miembro de esta clase al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el deporte favorito de la persona seleccionada sea el salto de *bungee*?

42. Con base en la información anterior, elabore una distribución de probabilidad. Proporcione las probabilidades hasta tres decimales.

43. **(a)** ¿La distribución del ejercicio 42 es teórica o empírica?

(b) Explique su respuesta al inciso (a).

44. Explique por qué ambos extremos de un polígono de frecuencias bajan hasta el eje mientras que los de una gráfica lineal por lo general no lo hacen.

13.2 Medidas de tendencia central

Recicladores de Video, un negocio local que vende películas "previamente vistas", genera a diario las siguientes ventas en un periodo de una semana:

$$\$305, \quad \$285, \quad \$240, \quad \$376, \quad \$198, \quad \$264.$$

Sería deseable tener un solo número que sirva como una especie de valor representativo para este conjunto completo de números, esto es, algún valor alrededor del cual todos los números del conjunto tiendan a agruparse, algo así como un número "intermedio" o una **medida de tendencia central**. En esta sección presentaremos tres de estas medidas.

Muchas calculadoras encuentran la media automáticamente al introducir en ellas un conjunto de datos. Para reconocer estas calculadoras, vea que tengan una tecla marcada con el símbolo $\boxed{\bar{x}}$ o quizás $\boxed{\mu}$.

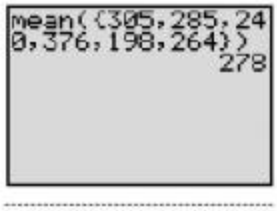
La media La medida de tendencia central más común es la **media** (llamada con más propiedad **media aritmética**). La media de una maestra se denota por $\bar{x}$ (que se lee "x barra"), mientras que la media de una población completa se denota por la letra griega μ (*mu*). A menudo, la inferencia estadística requiere tanto la media muestral como la media poblacional en un mismo estudio, pero para nuestros propósitos en este momento, los conjuntos de datos se considerarán como muestras, así que utilizaremos $\bar{x}$.

Para encontrar la media de un conjunto de datos, hay que sumarlos todos y dividir el resultado entre el número de datos. (La media es lo que la mayoría de la gente asocia con la palabra "promedio".) Puesto que agregar o sumar una lista de datos es un procedimiento común en estadística, usaremos el símbolo común para la suma, que es Σ (la letra mayúscula griega *sigma*). De este modo, la suma de n datos, digamos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, puede denotarse como $\Sigma x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ y la media se encuentra de la manera siguiente.

Media

La **media** de n datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se calcula por medio de la fórmula

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}.$$

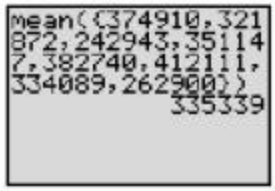


Hay calculadoras capaces de determinar la media de los elementos de una lista. Esta pantalla confirma el análisis del texto de las cifras de ventas diarias.

Ahora utilice esta fórmula para encontrar la tendencia central de las ventas diarias de Recicladores de Video:

$$\text{Media} = \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{305 + 285 + 240 + 376 + 198 + 264}{6} = \frac{1668}{6}$$
$$= 278.$$

El valor medio (el "promedio de ventas diarias") para la semana es de $278.



La pantalla confirma los resultados del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Las ventanas anuales del último año de ocho tiendas diferentes de flores fueron de

$374,910 $321,872 $242,943 $351,147
$382,740 $412,111 $334,089 $262,900.

La suma es $2,682,712. Ahora, determine la media.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{2{,}682{,}712}{8} = 335{,}339$$

La cantidad de ventas promedio anual es de $335,339. ■

Los *promedios de calificación* resultan muy familiares para los estudiantes universitarios. Por ejemplo, la tabla siguiente muestra los créditos y calificaciones obtenidos por un estudiante en el último periodo.

Curso	Calificación	Créditos
Matemáticas	A	3
Historia	C	3
Química	B	5
Arte	B	2
Educación física	A	1

En un sistema común para obtener el *promedio de calificaciones*, a la letra A se le asignan 4 puntos, a la letra B 3 puntos, a la C 2 y a la D 1. Encuentre el promedio de calificaciones multiplicando el número de créditos por asignatura y el número de puntos que corresponde a cada letra, y luego sume ambos productos. Por último, divida el resultado entre el número total de créditos.

Curso	Calificación	Puntos	Créditos	(Puntos) × (Unidades)
Matemáticas	A	4	3	12
Historia	C	2	3	6
Química	B	3	5	15
Arte	B	3	2	6
Educación física	A	4	1	4
		Totales:	14	43

$$\text{Promedio de calificación} = \frac{43}{14} = 3.07 \quad \text{(redondeado)}$$

Este estudiante obtuvo un promedio de calificación de 3.07.

El cálculo anterior del promedio de calificación es un ejemplo de *media ponderada*, puesto que las calificaciones de cada curso se ponderan de acuerdo con el número de créditos que tiene asignados. (Por ejemplo, cinco créditos de A es mejor que 2 créditos de A.) El número de créditos se denomina factor de peso (o *factor de ponderación*).

Media ponderada

La **media ponderada** de n números, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con factores de ponderación $f_1, f_2, \ldots, f_n$, respectivamente, se calcula por medio de la fórmula

$$\bar{w} = \frac{\Sigma \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}}{\Sigma \boldsymbol{f}}.$$

Salario x	Número de empleados f
\$12,000	8
\$16,000	11
\$18,500	14
\$21,000	9
\$34,000	2
\$50,000	1

Dicho con palabras, la media ponderada de un grupo de cantidades (ponderadas) es la suma de todos los productos de las cantidades multiplicados por sus factores de ponderación, divididos entre la suma de todos los factores de ponderación.

La fórmula de la media ponderada se usa por lo general para encontrar la media de una distribución de frecuencia. En este caso, los factores de ponderación son las frecuencias.

EJEMPLO 2 Encuentre el sueldo promedio para una compañía pequeña que paga salarios anuales a sus empleados como se muestra en la distribución de frecuencias al margen.

De acuerdo con la fórmula de la media ponderada, podemos realizar el trabajo de la manera siguiente.

Salario x	Número de empleados f	Salario × Número $x \cdot f$
\$12,000	8	\$ 96,000
\$16,000	11	\$176,000
\$18,500	14	\$259,000
\$21,000	9	\$189,000
\$34,000	2	\$ 68,000
\$50,000	1	\$ 50,000
Totales:	45	\$838,000

$$\text{Salario medio} = \frac{\$838{,}000}{45} = \$18{,}622 \quad \text{(redondeado)}$$

■

```
mean({12000,16000,18500,21000,34000,50000},{8,11,14,9,2,1})
                    18622.22222
```

En esta pantalla, que confirma el ejemplo 2, la primera lista contiene los salarios y la segunda lista contiene las frecuencias.

PARA REFLEXIONAR

En las estadísticas de béisbol, el "promedio de bateo" de un jugador proporciona el número promedio de *hits* por turno al bate. Por ejemplo, un jugador que ha obtenido 84 *hits* en 250 veces al bate tiene un promedio de bateo de 84/250 = 0.336. Este "promedio" puede interpretarse como la probabilidad empírica de que el jugador conecte un *hit* en el siguiente turno al bate.

Las siguientes son comparaciones reales de *hits* y turnos al bate de dos de los mejores jugadores de la liga mayor durante las temporadas de 1989 y 1990. Los números ilustran un acontecimiento estadístico enigmático conocido como **paradoja de Simpson**. (Estos datos fueron presentados por Richard J. Friedlander en la página 845 del número de noviembre de 1992 del *MAA Journal*.)

Para análisis en grupo

1. Complete los espacios en blanco de la tabla, dando el promedio de bateo hasta tres decimales.
2. ¿Qué jugador tuvo el mejor promedio de bateo en 1989?
3. ¿Qué jugador tuvo el mejor promedio en 1990?
4. ¿Qué jugador tuvo el mejor promedio combinados en 1989 y 1990?
5. ¿Le sorprendieron los resultados anteriores? ¿Cómo puede ser que el promedio de bateo de un jugador sea superior al promedio del otro durante cada uno de los dos años, y aun así su promedio combinado en ambos años sea menor que el otro?

	Dave Justice			Andy Van Slyke		
	Hits	Turnos al bate	Promedio de bateo	Hits	Turnos al bate	Promedio de bateo
1989	12	51	_____	113	476	_____
1990	124	439	_____	140	493	_____
Combinado (1989-90)	_____	_____	_____	_____	_____	_____

Con algunos conjuntos de datos, la media puede ser un indicador engañoso del promedio. Si no, piense en Shady Sam, quien dirige un negocio pequeño con cinco empleados cuyos salarios anuales son los siguientes.

$$\$16{,}500, \quad \$16{,}950, \quad \$17{,}800, \quad \$19{,}750, \quad \$20{,}000$$

Los empleados, al enterarse de que Sam acumula grandes ganancias, deciden irse a huelga para exigir un aumento. Para obtener un apoyo del público, aparecen en televisión y hablan sobre sus miserables salarios, señalando que el salario promedio en la compañía es de solamente

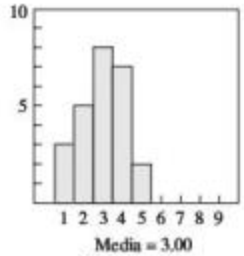
$$\bar{x} = \frac{\$16{,}500 + \$16{,}950 + \$17{,}800 + \$19{,}750 + \$20{,}000}{5}$$

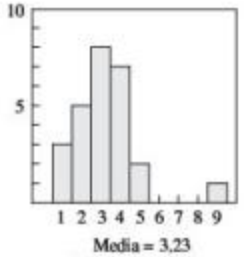
$$= \frac{\$91{,}000}{5} = \$18{,}200.$$

La estación de televisión local programa una entrevista con Sam para investigar el asunto. Sam, siempre previsor, calcula el salario promedio de *todos* los trabajadores (incluido su propio salario de $188,000):

$$\bar{x} = \frac{\$16{,}500 + \$16{,}950 + \$17{,}800 + \$19{,}750 + \$20{,}000 + \$188{,}000}{6}$$

$$= \frac{\$279{,}000}{6} = \$46{,}500.$$





La introducción de un punto "aislado" en la gráfica superior incrementa la media en un 8 por ciento, pero deja el valor de la mediana sin cambio.

Los puntos aislados en general deben considerarse como *posibles* errores en los datos.

Cuando llega el equipo de televisión, Sam les asegura con toda calma que no hay razón para que sus empleados se quejen, pues la compañía paga un generoso salario de $46,500 al año.

Por supuesto, los empleados argumentan que, al incluir Sam su propio sueldo en el cálculo, hizo que la media se volviera un indicador engañoso del promedio. Esto fue así porque el salario de Sam no es un salario característico; está a una gran distancia del grupo general de datos (los salarios). A esta clase de valores extremos se le conoce como valor aislado. Puesto que un valor *aislado*, como el de este ejemplo, puede tener un efecto significativo sobre el valor de la media, decimos que la media es "muy sensible a los valores extremos".

La mediana Otra medida de tendencia central, que no se ve afectada por los valores extremos, es la **mediana**. Este valor divide a un grupo de números en dos partes, de manera que la mitad de los números se encuentre por debajo de la mediana y la otra mitad se halle por encima de ella.

Mediana

Para encontrar la **mediana** de un grupo de datos:

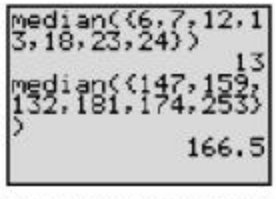
1. Distribuya los datos en orden numérico (del más pequeño al más grande).
2. Si el número de datos es *impar*, la mediana es el dato que se encuentra a la mitad de la lista.
3. Si el número de datos es *par*, la mediana es la media de los dos datos que se encuentran a la mitad de la lista.

En el caso de Shady Sam, todos los salarios (incluido el de Sam), dispuestos en orden numérico, aparecerían así:

$$\$16{,}500,\quad \$16{,}950,\quad \$17{,}800,\quad \$19{,}750,\quad \$20{,}000,\quad \$188{,}000,$$

de modo que $$\text{mediana} = \frac{\$17{,}800 + \$19{,}750}{2} = \frac{\$37{,}550}{2} = \$18{,}775.$$

Esta cifra es un promedio representativo, basado en los seis salarios, que los empleados seguramente considerarían más razonable.



La calculadora puede determinar la mediana de los componentes de una lista. Esta pantalla confirma los resultados de las partes (a) y (c) del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Encuentre la mediana de cada conjunto de números.

(a) 6, 7, 12, 13, 18, 23, 24

Este conjunto ya se encuentra ordenado numéricamente. El número de valores en el conjunto, 7, es impar, así que la mediana es el valor de en medio, es decir, 13.

(b) 17, 15, 9, 13, 21, 32, 41, 7, 12

Primero coloque los números en orden numérico del más pequeño al más grande.

$$7, 9, 12, 13, 15, 17, 21, 32, 41$$

Ahora puede sacarse el número de la mitad del conjunto; la mediana es 15.

(c) 147, 159, 132, 181, 174, 253

Primero coloque los números en orden ascendente.

$$132, 147, 159, 174, 181, 253$$

Puesto que el conjunto contiene un número par de datos, a saber 6, ningún dato queda justo a la mitad. Para encontrar la mediana, tome la media de los dos elementos a la mitad de la lista, 159 y 174.

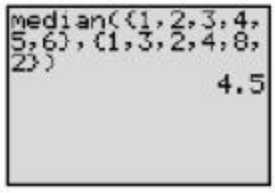
$$\frac{159 + 174}{2} = \frac{333}{2} = 166.5$$ ■

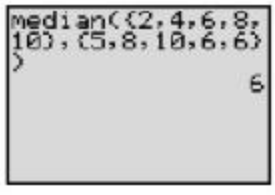
Cuando se trata de una distribución de frecuencias, localizar el dato medio (la mediana) es algo distinto. Primero, encuentre el número total de datos en el conjunto sumando las frecuencias ($n = \Sigma f$). Así, la mediana es el dato cuya *posición* está dada por la fórmula siguiente.

Posición de la mediana en una distribución de frecuencias

$$\textbf{Posición de la mediana} = \frac{n+1}{2} = \frac{\Sigma f + 1}{2}$$

Es importante observar que esta fórmula sólo proporciona la *posición*, no el valor de la mediana. El ejemplo siguiente muestra cómo se aplica la fórmula para encontrar la mediana.





Estas dos pantallas confirman los resultados del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Encuentre las mediana para las distribuciones siguientes.

(a)

Valor	Frecuencia	Frecuencia acumulada
1	1	1
2	3	4
3	2	6
4	4	10
5	8	18
6	2	20

Total: 20

Si sumamos las frecuencias, vemos que hay 20 datos en total, así que

$$\text{posición de la mediana} = \frac{20 + 1}{2} = \frac{21}{2} = 10.5.$$

Entonces, la mediana es el promedio de los datos décimo y undécimo. Para hallar estos datos, utilice las *frecuencias acumuladas*, las cuales indican, para cada valor diferente, cuántos datos tienen el mismo valor o un valor menor. Puesto que el valor 4 posee una frecuencia acumulada de 10 ($1 + 3 + 2 + 4 = 10$), es decir, 10 datos tienen un valor de 4 o menos, y 5 tienen una frecuencia acumulada de 18, el décimo dato es 4 y el undécimo es 5, lo cual da como resultado la mediana $(4 + 5)/2 = 9/2 = 4.5$.

(b)

Valor	Frecuencia	Frecuencia acumulada
2	5	5
4	8	13
6	10	23
8	6	29
10	6	35

Total: 35

Aquí hay 35 datos en total, de modo que

$$\text{de la mediana} = \frac{35 + 1}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

De la columna de frecuencia acumulada vemos que los datos desde el catorceavo hasta el vigésimo tercero son todos 6. Esto significa que el dato 18 es un 6, de modo que la mediana es 6. ■



Una nota en *The Wall Street Journal* afirmaba que durante una presentación televisada de la entrega de los premios Oscar, el ganador promedio se tomó 1 minuto y 39 segundos para agradecer a 7.8 amigos, parientes y colaboradores por "haber hecho posible el premio". ¿Aludían estos números a medias, medianas o modas?

La moda La tercera medida importante de tendencia central es la **moda**. Si en un examen de derecho mercantil 10 estudiantes obtienen los siguientes resultados:

74, 81, 39, 74, 82, 80, 100, 92, 74, 85,

vemos que el número de estudiantes que obtuvieron 74 fue mayor que los que obtuvieron cualquier otra calificación. Este hecho hace que 74 sea la moda de esta lista.

Moda

La **moda** de un conjunto de datos es el valor que aparece con mayor frecuencia.

EJEMPLO 5 Encuentre la moda para cada conjunto de datos.

(a) 51, 32, 49, 49, 74, 81, 92

El número 49 aparece con mayor frecuencia que cualquier otro. Por lo tanto, 49 es la moda. Observe que cuando se busca la moda, no es necesario colocar los datos en orden numérico.

(b) 482, 485, 483, 485, 487, 487, 489

Tanto 485 como 487 aparecen dos veces. Se dice que esta lista tiene dos modas, o que es *bimodal*.

(c) 10,708, 11,519, 10,972, 17,546, 13,905, 12,182

Aquí ningún número aparece más de una vez. Esta lista no tiene moda.

(d)

Valor	Frecuencia
19	1
20	3
22	8 ← Frecuencia máxima
25	7
26	4
28	2

La distribuciones de frecuencias muestran que el valor que aparece con mayor frecuencia (y por tanto la moda) es 22. ■

El que hayamos incluido la moda (junto a la media y la mediana) como medida de *tendencia central* tiene que ver con la tradición, probablemente porque en muchos tipos importantes de conjuntos de datos sus valores de incidencia más frecuentes se ubican "centralmente". Sin embargo, no hay una razón que impida que la moda sea uno de los valores más pequeños en el conjunto, o bien uno de los más grandes. En estos casos, la moda realmente no es buena medida de "tendencia central".

Cuando los datos de un estudio no son numéricos, es probable que la moda sea la única medida de tendencia central que pueda emplearse. Por ejemplo, la gráfica de barras de la figura 5 en la sección 13.1 mostró las frecuencias con que aparecían las vocales en un párrafo de muestra. Puesto que las vocales A, E, I, O y U no son números, no pueden sumarse, de modo que su media no existe. Además, las vocales no pueden distribuirse en un orden numérico significativo, por lo que tampoco existe su mediana. Sin embargo, en ese conjunto sí hay una moda; como puede apreciarse en la gráfica de barras, la moda es la letra E.

Puede ocurrir que una distribución contenga dos datos distintos que aparecen con mayor frecuencia que cualquier otro dato, como en el ejemplo 5(b) que vimos antes. Una distribución como ésta se llama **bimodal** (literalmente, "dos modas"). Cuando la distribución es grande, es común aplicar este término aun cuando las dos modas no aparezcan exactamente con la misma frecuencia. Cuando en una distribución hay tres o más datos diferentes que comparten la frecuencia de incidencia más alta, esta información a menudo no resulta útil. (Demasiadas modas tienden a oscurecer el significado de que existan estos datos "más frecuentes".) Por ello decimos que una distribución de esta naturaleza no tiene moda.

Medidas de tendencia central a partir de diagramas de tallos y hojas Como se mostró en la sección 13.1, los datos en ocasiones se presentan en forma de diagrama de tallos y hojas para ofrecer una impresión gráfica de su distribución. También se pueden calcular las medidas de tendencia central a partir de un diagrama de tallos y hojas. La mediana y la moda se identifican más fácilmente cuando las "hojas" están **clasificadas** (acomodadas en orden numérico) sobre sus "tallos".

En la tabla 9 reacomodamos las hojas de la tabla 5 de la sección 13.1 (en la que aparecen las horas de estudio a la semana del ejemplo 2 de dicha sección).

TABLA 9 Diagrama de tallo y hojas para las horas de estudio a la semana, con las hojas clasificadas

1	2 4 5 6 7 8
2	0 2 3 4 4 5 6 6 9 9 9
3	0 1 1 2 3 6 6 8 9
4	0 1 4 4 5 5 7
5	2 5 5 8
6	0 2
7	2

EJEMPLO 6 Encuentre la media, la mediana y la moda para los datos de la tabla 9.

Si usted introduce los datos en una calculadora con funciones estadísticas, la media se calculará automáticamente. De otra manera, sume todas las cantidades (leyéndolas del diagrama de tallo y hojas) y divida entre $n = 40$.

$$\text{media} = \frac{12 + 14 + 15 + \cdots + 60 + 62 + 72}{40} = \frac{1395}{40} = 34.875$$

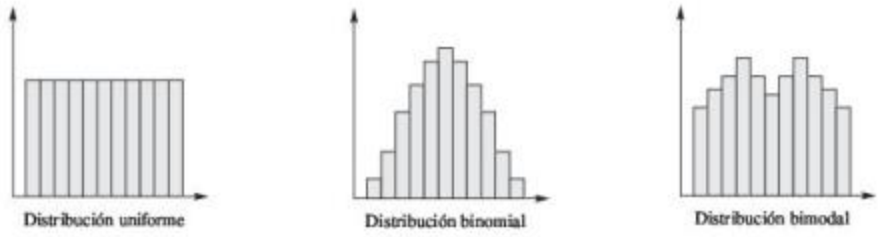
En este caso, $n = 40$ (un número par), de modo que la mediana es el promedio de los datos vigésimo y vigésimo primero, en orden. Contando las hojas vemos que éste será el tercero y cuarto elementos del tallo 3. Entonces,

$$\text{mediana} = \frac{31 + 32}{2} = 31.5.$$

Si examinamos bien, vemos que 29 apareció tres veces y que ningún otro valor tuvo esa frecuencia, de modo que

$$\text{moda} = 29.$$ ■

Simetría de conjuntos de datos A menudo, la manera más útil de analizar un conjunto de datos consiste en determinar si la distribución es **simétrica** o **asimétrica**. En una distribución "simétrica", conforme nos alejamos del punto central, el patrón de frecuencias es el igual (o casi igual) tanto a la izquierda como a la derecha. En una distribución "asimétrica" los patrones a la izquierda y a la derecha son diferentes. La figura 8 muestra varios tipos de distribuciones simétricas, mientras que la figura 9 presenta algunas distribuciones asimétricas. A una distribución asimétrica con una cola extendida a la izquierda se le llama **sesgada a la izquierda**. Si la cola se extiende a la derecha, la distribución es **sesgada a la derecha**. Observe que una distribución bimodal puede ser tanto simétrica como asimétrica.



Algunas distribuciones simétricas

FIGURA 8



Algunas distribuciones no simétricas

FIGURA 9

Resumen Resumiremos ahora las medidas estudiadas en esta sección.

Medidas comunes de tendencia central

La **media** de un conjunto de números se encuentra sumando todos los valores del conjunto y dividiendo el resultado entre el número de valores.

La **mediana**, por su parte, es una especie de número"de en medio". Para encontrar la mediana, primero distribuya los valores en orden numérico. Cuando el número de valores es *impar*, la mediana es el valor que está a la mitad del conjunto. Cuando el número de valores es *par*, la mediana es la media de los dos valores localizados a la mitad.

La **moda** es el valor que aparece con mayor frecuencia. En algunos conjuntos de números son dos los valores que aparecen con más frecuencia, por lo que son **bimodales**. Otros conjuntos carecen de moda (cuando no hay ningún valor que aparezca con más frecuencia que los demás, o cuando más de dos valores presentan la mayor frecuencia).

Concluimos esta sección con un resumen de las ventajas y desventajas relativas de la media, la mediana y la moda como medidas de tendencia central. Para distribuciones de datos numéricos siempre existirán la media y la mediana, mientras que podría no haber moda. Por otra parte, para datos no numéricos, podría ser que no hubiese ninguna de las tres medidas, o que sólo se encuentre la moda.

Puesto que incluso una sola modificación en los datos puede generar un cambio en la media, mientras que la mediana y la moda podrían no verse afectadas, la media es la más "sensible" de estas medidas. Cuando la distribución es simétrica, la media, la mediana y la moda (si hay una sola moda) serán todas iguales. En la distribución asimétrica, a menudo la media se ve afectada por valores extremos, por lo que podría no ser una buena medida representativa de tendencia central. Por ejemplo, las distribuciones salariales o de los ingresos familiares con frecuencia incluyen unos cuantos valores que son mucho más altos que el grueso de los datos. En tales casos, la mediana resulta una medida más útil. Cuando hay más datos de un lado de la media que del otro, se tiene entonces una asimetría extrema y la mediana es probablemente una mejor opción que la media.

La moda es la única de las tres medidas tratada aquí que debe ser siempre igual a uno de los datos de la distribución. De hecho, hay más datos iguales a la moda que a cualquier otro número. Para una tienda de modas que planea surtirse de una sola talla de sombreros para la próxima temporada, sería conveniente conocer la moda (la más común) de todas las tallas de sombreros entre sus clientes potenciales. Del mismo modo, a un diseñador de autos familiares le interesaría saber cuál es el tamaño más común de las familias. En ejemplos como éste, usar la media o la mediana para diseñar objetos de uso cotidiano podría no ser lo más adecuado para nadie.

13.2 EJERCICIOS

Calcule **(a)** *la media,* **(b)** *la mediana y* **(c)** *la moda o modas (si las hay) de cada una de las listas de datos siguientes. Redondee los valores de la media a la décima más cercana.*

1. 3, 7, 12, 16, 23

2. 21, 25, 32, 48, 53, 62

3. 128, 230, 196, 224, 196, 233

4. 26, 31, 46, 31, 26, 29, 31

5. 3.1, 4.5, 6.2, 7.1, 4.5, 3.8, 6.2, 6.3

6. 14,320, 16,950, 17,330, 15,470

7. .78, .93, .66, .94, .87, .62, .74, .81

8. .53, .03, .28, .18, .39, .28, .14, .22, .04

9. 12.3, 45.6, 78.9, 1.2, 34.5, 67.8, 90.1

10. .3, .8, .4, .3, .7, .9, .2, .1, .5, .9, .6

11. 128, 131, 136, 125, 132, 128, 125, 127

12. 8.97, 5.64, 2.31, 1.02, 4.35, 7.68

Sitios de la Web más visitados *Las tablas muestran los 20 sitios más visitados de Internet para julio de 2001. (Fuente de los datos: The World Almanac and Books of Facts 2002, p. 632.)*

Sitios de la Web más visitados, julio de 2001

Lugar	Sitio de la Web	Visitantes (en miles)	Lugar	Sitio de la Web	Visitantes (en miles)
1.	http://www.yahoo.com	62,180	11.	http://www.ebay.com	19,096
2.	http://www.msn.com	53,212	12.	http://www.netscape.com	17,538
3.	http://www.aol.com	42,779	13.	http://www.google.com	15,154
4.	http://www.x10.com	39,567	14.	http://www.fastclick.com	15,115
5.	http://www.microsoft.com	36,802	15.	http://www.excite.com	14,636
6.	http://www.passport.com	31,854	16.	http://www.about.com	14,517
7.	http://www.hotmail.com	28,656	17.	http://www.real.com	13,413
8.	http://www.lycos.com	27,359	18.	http://www.mapquest.com	13,116
9.	http://www.amazon.com	20,481	19.	http://www.tripod.com	13,057
10.	http://www.go.com	19,553	20.	http://www.cnet.com	12,057

Fuente: Media Metrix, Inc.

Usando la tabla de los sitios de la Web más visitados, encuentre **(a)** *la media del número de visitantes y* **(b)** *la mediana de los visitantes en cada uno de los siguientes casos. (Redondee sus respuestas hasta los miles más cercanos.)*

13. los sitios en los lugares 1 a 5

14. los sitios en los lugares 1 a 10

15. los sitios en los lugares 11 a 20

16. los sitios en los lugares 1 a 20

Pérdida de bosques y contaminación atmosférica *En medio de la preocupación por el calentamiento global y la destrucción de las selvas, el Instituto Mundial de Recursos informó sobre los cinco países con mayor promedio anual de pérdida de selvas para un periodo reciente de cinco años, así como los cinco mayores emisores de clorofluorocarbonos en un periodo de un año. Las estimaciones se muestran a continuación.*

País	Promedio anual de pérdida de bosques (en millas cuadradas)
Brasil	9700
Colombia	3400
Indonesia	2400
México	2375
Costa de Marfil	2000

País	Emisión de clorofluorocarbonos (en toneladas métricas)
Estados Unidos	130,000,000
Japón	95,000,000
Confederación de Estados Independientes	67,000,000
Alemania	34,000,000
Reino Unido	25,000,000

17. Encuentre el valor medio de pérdida anual de bosques por país para los cinco países listados. Dé su repuesta a la centena de millas cuadradas más cercana.

18. Encuentre el valor medio de emisión de clorofluorocarbonos por país para los cinco países en la lista. Dé su respuesta al millón de tonelada métrica más cercano.

Medida de tiempos transcurridos *Mientras realiza un experimento, un estudiante de física registra en su libreta de laboratorio la siguiente sucesión de tiempos transcurridos (en segundos):*

2.16, 22.2, 2.96, 2.20, 2.73, 2.28, 2.39.

19. Encuentre la media.

20. Encuentre la mediana.

Más tarde, cuando el estudiante revisa sus cálculos, se da cuenta de que la entrada 22.2 debió haberse registrado como 2.22, de modo que lleva a cabo este cambio en la lista.

21. Encuentre la media para la nueva lista.

22. Encuentre la mediana para la nueva lista.

23. ¿Qué medida, la media o la mediana, se vio más afectada por la corrección del error?

24. En general, ¿qué medida, la media o la mediana, es la menos afectada por la presencia de un valor extremo en los datos?

Calificaciones en exámenes de estadística *Jay Beckenstein obtuvo las siguientes puntuaciones en sus seis exámenes de estadística del semestre pasado.*

79, 81, 44, 89, 79, 90

25. Encuentre la media, la mediana y la moda de las calificaciones de Jay.

26. ¿Cuál de los tres promedios es probablemente el mejor indicador de la capacidad de Jay?

27. Si el profesor de Jay le diera la oportunidad de presentar un examen extra para reemplazar su calificación de 44, ¿cuál tendría que ser su calificación en el segundo examen para obtener un promedio general de 85?

Los ejercicios 28 y 29 presentan distribuciones de frecuencias para conjuntos de datos. Encuentre **(a)** *la media (a la centésima más cercana),* **(b)** *la mediana y* **(c)** *la moda o modas (si las hay alguna) de cada conjunto.*

28.

Valor	Frecuencia
2	5
4	1
6	8
8	4

29.

Valor	Frecuencia
603	13
597	8
589	9
598	12
601	6
592	4

30. ***Salario promedio de los empleados*** En una compañía, seis de sus empleados ganan 19,500 dólares, ocho ganan 23,000 dólares, cuatro ganan 28,300 dólares, dos ganan 36,900 dólares y uno gana 145,500 dólares. Encuentre el salario medio de los empleados (a la centena de dólares más cercana).

Calificaciones promedio *Encuentre la calificación promedio de cada uno de los siguientes estudiantes. Suponga que* A = 4, B = 3, C = 2, D = 1, F = 0. *Redondee a la centésima más cercana.*

31.

Créditos	Calificación
4	C
7	B
3	A
3	F

32.

Créditos	Calificación
2	A
6	B
5	C

Área y población en la Comunidad de Estados Independientes *La tabla que aparece a continuación proporciona la población y el área del territorio de los 11 países miembros fundadores de la Comunidad de Estados Independientes. (Todos antiguas repúblicas de la Unión Soviética.) Emplee la información de la tabla para los ejercicios 33 a 36. (Fuente de los datos:* The World Almanac and Book of Facts 2000, *pp. 768-877.)*

Nombre	Área (en millas cuadradas)	Población
Armenia	11,500	3,409,234
Azerbaiyán	33,400	7,908,224
Bielorrusia	80,200	10,401,784
Kazajstán	1,049,200	16,824,825
Kirguizistán	76,600	4,546,055
Moldavia	13,000	4,460,838
Rusia	6,592,800	146,393,569
Tayikistán	55,300	6,102,854
Turkmenistán	188,500	4,366,383
Ucrania	233,100	49,811,174
Uzbekistán	172,700	24,102,473

33. Encuentre el área media (a la milla cuadrada más cercana) para estos 11 estados.

34. Analice la verosimilitud del promedio calculado en el ejercicio 33.

35. Encuentre la media de la población (al millar más cercano) para los 11 estados.

36. Analice la verosimilitud del promedio calculado en el ejercicio 35.

Lenguas habladas en Estados Unidos *La siguiente tabla lista las 10 lenguas más comunes (aparte del inglés) que hablan los estadounidenses en su casa. Los números en la columna de la derecha indican el cambio (incremento o disminución) durante un decenio reciente en el número de estadounidenses que hablan los diferentes idiomas.* (Fuente de los datos: 1995 Información Please Almanac, *p. 835). Utilice la tabla para los ejercicios 37 a 40. (Las categorías sólo se dan para información; no entrarán en sus cálculos.)*

Idiomas más comunes entre los estadounidenses además del inglés		
Categoría	**Idioma**	**Cambio en el número de personas**
1	Español	5,789,839
2	Francés	129,901
3	Alemán	−59,644
4	Italiano	−324,631
5	Chino	617,476
6	Tagalo	391,289
7	Polaco	−102,667
8	Coreano	350,766
9	Vietnamita	303,801
10	Portugués	68,759

37. Encuentre el cambio promedio por idioma para los 10 idiomas.

38. Encuentre el cambio promedio por idioma para las siete categorías en que hubo un incremento.

39. Encuentre el cambio promedio por idioma para las tres categorías en que hubo una disminución.

40. Utilice las respuestas de los ejercicios 38 y 39 para encontrar la media ponderada del cambio por idioma para las 10 categorías. Compárela con el valor calculado en el ejercicio 37.

41. ***Carreras de la triple corona*** La tabla que sigue muestra al caballo ganador y el "premio para el ganador" de cada una de las carreras de caballos conocidas como la "Triple Corona", efectuadas en 2001. (En cada carrera, "el premio" o cantidad total distribuida fue de $1,000,000.) Encuentre el promedio que se pagó al ganador para las tres carreras. (*Fuente:* 2002 World Book Yearbook, *p. 245.*)

Carrera	Caballo ganador	Pago al ganador
Derby de Kentucky	Monarchos	$812,000
Preakness Stakes	Point Given	650,000
Belmont Stakes	Point Given	600,000

Medallero de los juegos olímpicos *En la parte superior de la página siguiente se muestran los 10 países con más medallas ganadas en los Juegos Olímpicos de Invierno 2002 en Salt Lake City. (Fuente:* The Gazette, *25 de febrero de 2002.) Use esta información para los ejercicios 42 a 45.*

Medallero de los Juegos Olímpicos de Invierno de 2002

País	Oro	Plata	Bronce	Total
Alemania	12	16	7	35
Estados Unidos	10	13	11	34
Noruega	11	7	6	24
Canadá	6	3	8	17
Rusia	6	6	4	16
Austria	2	4	10	16
Italia	4	4	4	12
Francia	4	5	2	11
Suiza	3	2	6	11
Países Bajos	3	5	0	8

Calcule lo siguiente para cada país mencionado.

42. El promedio de medallas de oro.

43. La mediana del número de medallas de plata.

44. La moda, o modas, para el número de medallas de bronce.

45. Para el número total de medallas, calcule
(a) media **(b)** mediana **(c)** moda o modas

En los ejercicios 46 y 47, utilice el diagrama de tallo y hojas para identificar **(a)** *la media,* **(b)** *la mediana y* **(c)** *la moda (si la hay) de los datos representados.*

46. ***Costo de la reparación de un automóvil*** El diagrama siguiente representa los precios (al dólar más cercano) que cobran 23 talleres diferentes de reparaciones por instalar un alternador nuevo. Dé las respuestas al centavo más cercano.

```
 9 | 7
10 | 2 4
10 | 5 7 9
11 | 1 3 4 4
11 | 5 5 8 8 9
12 | 0 4 4
12 | 5 7 7 9
13 | 8
```

47. ***Calificaciones en un examen de biología*** El diagrama que sigue representa las calificaciones sobre 100 puntos obtenidas en un examen por los 34 estudiantes de la clase de biología.

```
4 | 7
5 | 1 3 6
6 | 2 5 5 6 7 8 8
7 | 0 4 5 6 7 7 8 8 8 8 9
8 | 0 1 1 3 4 5 5
9 | 0 0 0 1 6
```

48. ***Calcular una calificación perdida*** La maestra de administración de Dinya Floyd perdió su libreta de registro de calificaciones, que contenía las calificaciones que obtuvo Dinya en los cinco exámenes del curso. Un resumen de las calificaciones (cada una de las cuales era un entero del 0 al 100) indica que la media fue 88, la mediana 87 y la moda 92. (El conjunto de datos no era bimodal.) ¿Cuál es el menor número posible entre las calificaciones perdidas?

49. Explique qué es un "dato aislado" (*outlier*) y cómo afecta las medidas de tendencia central.

50. ***Preferencias de los consumidores por los empaques de los alimentos*** Una compañía procesadora de alimentos que empaca envases individuales de sopa instantánea desea encontrar el mejor número de envases que deben incluirse en un paquete. En una encuesta a 22 consumidores, se descubrió que cinco prefieren un paquete de 1 envase, otros cinco prefieren un paquete de 2, tres prefieren un paquete de 3, seis prefieren un paquete de 4 y tres prefieren un paquete de 6.
(a) Calcule los valores de la media, la mediana y la moda del tamaño preferido de paquete.
(b) ¿Qué medida en la parte (a) debería utilizar la compañía?
(c) Explique su respuesta a la parte (b).

51. ***Calificaciones en un examen de matemáticas*** A continuación aparecen las calificaciones obtenidas por 15 estudiantes en un examen de matemáticas de 20 puntos.

0, 1, 3, 14, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 20

(a) Calcule los valores de la media, la mediana y la moda de estas calificaciones.
(b) ¿Qué medida de la parte (a) es la más representativa de los datos?
(c) Explique su respuesta a la parte (b).

En cada uno de los ejercicios 52 a 55, haga una lista de los números que se le indican, en orden, empezando por el menor. Continúe la lista hasta que la mediana de los números sea un múltiplo de 4. *Deténgase en ese punto y encuentre* **(a)** *la cantidad de números en la lista, y* **(b)** *la media de los números en la lista (hasta dos decimales).*

52. números naturales **53.** números primos

54. números de Fibonacci **55.** números triangulares

56. Siete números enteros no negativos consecutivos suman 147. ¿Cuál es el resultado cuando su media se resta de la mediana?

57. Si la media, la mediana y la moda son todas iguales para el conjunto $\{70, 110, 80, 60, x\}$, determine el valor de x.

58. Michael Coons desea agregar un quinto número, n, a los números 2, 5, 8 y 9, de tal modo que la media y la mediana de los cinco números sean iguales. ¿Cuántas elecciones puede hacer Michael para el número n y cuáles son éstas?

✎ **59. *Salario promedio de los empleados*** Consulte los datos sobre salarios del ejemplo 2. Explique cuál es el error de calcular simplemente la media de los salarios como sigue.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{\$12{,}000 + \$16{,}000 + \$18{,}500 + \$21{,}000 + \$34{,}000 + \$50{,}000}{6} = \$25{,}250$$

Para los ejercicios 60 a 62 utilice las distribuciones de frecuencias para datos agrupados mostradas aquí.

60. ¿Puede usted identificar cualquier dato específico que se haya dado en esta muestra?

61. ¿Puede usted calcular la media real de esta muestra?

✎ **62.** Describa cómo podría aproximar la media para esta muestra. Justifique su procedimiento.

Límites de las clases	Frecuencia *f*
21–25	5
26–30	3
31–35	8
36–40	12
41–45	21
46–50	38
51–55	35
56–60	20

13.3 Medidas de dispersión

La media es un buen indicador de la tendencia central de un conjunto de valores, pero no da la información completa de los datos. Para ver por qué, compare la distribución A con la distribución B en la tabla que se muestra al margen.

	A	B
	5	1
	6	2
	7	7
	8	12
	9	13
Media	7	7
Mediana	7	7

Ambas distribuciones de números tienen la misma media (y también la misma mediana), pero fuera de esto, son completamente diferentes. En la primera, el 7 es un valor característico aceptable, pero en la segunda, la mayor parte de los valores difiere bastante de 7. Lo que se necesita aquí es alguna medida de **dispersión**, de los datos. En esta sección estudiaremos dos de las medidas más comunes de dispersión: el *rango* y la *desviación estándar*.

Rango El **rango** de un conjunto de datos es una medida directa de dispersión que se define como sigue.

Rango

Para cualquier conjunto de datos, el **rango** del conjunto está dado por.

Rango = (valor mayor en el conjunto) − (valor menor en el conjunto).

Una vez que se han introducido los datos, la calculadora puede mostrar realmente el rango (entre otras cosas) o al menos separar los datos en categorías e identificar los datos mínimo y máximo. (Los símbolos asociados podrían ser algo parecido a [MIN Σ] y [MAX Σ], o min*X* y max*X*.) Dados estos dos valores, una simple resta nos conduce al rango.

Para un conjunto pequeño de datos, el cálculo del rango es algo sencillo. Cuando el conjunto es grande, resulta más difícil estar seguro de haber identificado correctamente los valores mayores y menores entre los datos.

En la distribución A, el valor mayor es 9 y el valor menor es 5. Así,

$$\text{Rango} = \text{mayor} - \text{menor} = 9 - 5 = 4.$$

En la distribución B,

$$\text{Rango} = 13 - 1 = 12.$$

Clavado	Mark	Myrna
1	28	27
2	22	27
3	21	28
4	26	6
5	18	27
Media	23	23
Mediana	22	27
Rango	10	22

El rango puede ser engañoso si se interpreta de manera poco juiciosa. Por ejemplo, imagine en una competencia de clavados, los tres jueces asignan puntos a Myrna y Mark en cinco clavados diferentes como se muestra en la tabla. Los rangos de ambos deportistas podrían llevarnos a concluir que Mark es más consistente que Myrna. Sin embargo, una verificación más minuciosa indica que Myrna es en realidad más consistente, con la excepción de una puntuación que fue muy mala. Esta calificación de 6 es un dato aislado que, si en realidad no se registra es un error, sin duda se debe a una circunstancia especial. (Observe que el dato aislado no afecta de manera seria la mediana de la puntuación de Myrna, la cual es más representativa para su conjunto de ejecuciones que la media de sus puntuaciones.)

Desviación estándar Una de las medidas más útiles de dispersión, la **desviación estándar**, se basa en las *desviaciones de la media* que presentan los datos. Para encontrar cuánto se desvía cada valor de la media, encuentre primero la media y luego reste esta media a cada uno de los datos.

EJEMPLO 1 Encuentre las desviaciones de la media de los datos siguientes:

$$32, 41, 47, 53, 57.$$

Sume estos valores y divida el resultado entre el número total de valores, 5. Este proceso muestra que la media es 46. Para encontrar las desviaciones de la media, reste 46 a cada uno de los datos.

Valores	32	41	47	53	57
Desviación	**−14**	**−5**	**1**	**7**	**11**

$32 - 46 = -14$ $\qquad$ $57 - 46 = 11$

Para verificar su procedimiento, sume las desviaciones. La suma de las desviaciones de un conjunto de datos siempre es 0. ■

Quizá en este punto se sienta tentado a encontrar la media de las desviaciones para determinar una medida de dispersión. Sin embargo, este número siempre es 0, independientemente de cuánta dispersión muestren los datos; esto se debe a que las desviaciones positivas anulan de manera exacta a las negativas. Este problema de números positivos y negativos que se anulan entre sí puede evitarse *elevando al cuadrado* cada desviación (el cuadrado de un número negativo es siempre positivo). La tabla siguiente muestra los cuadrados de las desviaciones anteriores.

Valores	32	41	47	53	57
Desviación	−14	−5	1	7	11
Cuadrado de la desviación	**196**	**25**	**1**	**49**	**121**

$(-14) \cdot (-14) = 196$ $\qquad$ $11 \cdot 11 = 121$

Ahora, para encontrar el promedio de los cuadrados de las desviaciones hay que dividir la suma de éstos entre el número de valores, n (5 en este caso), que es lo que haríamos si nuestros valores abarcaran una población. No obstante, dado que estamos considerando que estos datos son sólo una muestra, los dividimos entre $n - 1$.*

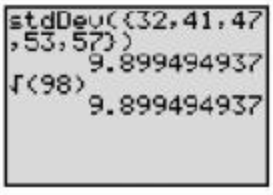
*Aunque las razones para hacerlo así no pueden explicarse a este nivel, dividir entre $n - 1$ en lugar de n produce una medida muestral más precisa para propósitos de inferencia. En la mayoría de los casos, los resultados al utilizar los dos distintos divisores dan resultados ligeramente diferentes.

La mayoría de las calculadoras, incluso las básicas, pueden encontrar raíces cuadradas como $\sqrt{98}$, con tantos dígitos como usted necesite, por medio de la tecla $\boxed{\sqrt{x}}$. En este libro daremos normalmente de dos a cuatro cifras significativas para tales cálculos.

El promedio resultante es una medida de dispersión, que se denomina *varianza*, pero una medida más común se obtiene al extraer la raíz cuadrada de la varianza. Esto da, en efecto, un tipo de promedio de las desviaciones de la media, y se denomina **desviación estándar** de la muestra. Se denota por la letra s. (La desviación estándar de una población se denota con σ, la letra griega sigma minúscula.)

Al continuar nuestros cálculos del diagrama de la página 749, obtenemos

$$s = \sqrt{\frac{196 + 25 + 1 + 49 + 121}{4}} = \sqrt{\frac{392}{4}} = \sqrt{98} \approx 9.90.$$



Esta pantalla confirma el análisis del texto. Observe que la desviación estándar que se muestra coincide con la aproximación para $\sqrt{98}$.

El algoritmo (proceso) descrito antes para encontrar la desviación estándar de una muestra puede resumirse como sigue.

Calcular la desviación estándar

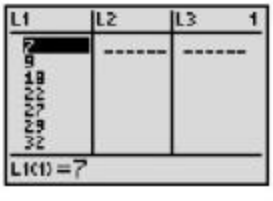
Sea una muestra de n datos numéricos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con una media de $\bar{x}$. Entonces, la **desviación estándar muestral**, s, de los números se obtiene por medio de

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{n - 1}}.$$

Los pasos individuales incluidos en este cálculo son los siguientes.

1. Calcule $\bar{x}$, la media de los números.
2. Determine las desviaciones de la media
3. Eleve al cuadrado cada desviación.
4. Sume los cuadrados de las desviaciones.
5. Divida la suma obtenida en el paso 4 entre $n - 1$.
6. Obtenga la raíz cuadrada del cociente obtenido en el paso 5.

La descripción que acabamos de hacer ayuda a mostrar por qué la desviación estándar mide la cantidad de dispersión en un conjunto de datos. Pero, cuando se trata de cálculos reales, recomendamos el uso de una calculadora científica o de una calculadora estadística, que harán automáticamente todos los pasos detallados. En el ejemplo siguiente ilustramos ambos métodos.



La muestra del ejemplo 2 se almacenó en una lista. (La última entrada, 40, no se muestra aquí.)

EJEMPLO 2 Encuentre la desviación estándar de la muestra

$$7, 9, 18, 22, 27, 29, 32, 40$$

(a) mediante el proceso paso por paso y **(b)** usando las funciones estadísticas de una calculadora.

(a) Realice los seis pasos resumidos:

Paso 1: Encuentre la media de los valores.

$$\frac{7 + 9 + 18 + 22 + 27 + 29 + 32 + 40}{8} = 23$$

Paso 2: Encuentre las desviaciones con respecto a la media.

Valores	7	9	18	22	27	29	32	40
Desviación	−16	−14	−5	−1	4	6	9	17



Las flechas señalan la media y las desviaciones estándar de la muestra y de la población. Vea el ejemplo 2.

Paso 3: Eleve al cuadrado cada desviación.

Cuadrados de las desviaciones: 256 196 25 1 16 36 81 289

Paso 4: Sume los cuadrados de las desviaciones.

$$256 + 196 + 25 + 1 + 16 + 36 + 81 + 289 = 900$$

Paso 5: Divida entre $n - 1 = 8 - 1 = 7$.

$$900/7 \approx 128.57$$

Paso 6: Obtenga la raíz cuadrada.

$$\sqrt{128.57} \approx 11.3$$

(b) Introduzca los ocho valores de los datos. (La tecla para introducir datos luce más o menos así: $\boxed{\Sigma+}$. Averigüe cuál es la tecla en su calculadora.) Presione entonces la tecla de desviación estándar. (Ésta podría verse como

$\boxed{\text{STDEV}}$ o $\boxed{\text{SD}}$ o $\boxed{s_{n-1}}$ o $\boxed{\sigma_{n-1}}$.

Si su calculadora tiene también una tecla semejante a $\boxed{\sigma_n}$, probablemente sea para la desviación estándar *de una población,* lo cual significa dividir entre n en vez de $n - 1$, como se mencionó antes.) El resultado debería ser de nuevo 11.3. (Si usted utilizó *erróneamente* la tecla de desviación estándar poblacional, el resultado será 10.6 en lugar de 11.3.) ■

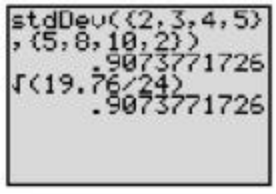
Para los datos dados en forma de distribución de frecuencias, ciertas calculadoras permiten el registro tanto de valores como de frecuencias, o bien cada valor puede introducirse por separado el número de veces indicado por su frecuencia. Luego hay que oprimir la tecla de la desviación estándar.

El ejemplo siguiente se incluye sólo para reafirmar la comprensión de las distribuciones de frecuencias y la desviación estándar, no como un algoritmo práctico para cálculo.

EJEMPLO 3 Encuentre la desviación estándar muestral para la siguiente distribución de frecuencias.

Valor	Frecuencia
2	5
3	8
4	10
5	2

Complete los cálculos ampliando la tabla como se muestra aquí. Para encontrar los números en la columna de "Desviación", primero halle la media y después réstela de los números en la columna de "Valor".



La pantalla confirma los resultados del ejemplo 3.

Valor	Frecuencia	Valor multiplicado por frecuencia	Desviación	Cuadrado de la desviación	Cuadrado de la desviación por frecuencia
2	5	10	−1.36	1.8496	9.2480
3	8	24	−.36	.1296	1.0368
4	10	40	.64	.4096	4.0960
5	2	10	1.64	2.6896	5.3792
Sumas	25	84			19.76

$$\bar{x} = \frac{84}{25} = 3.36 \qquad s = \sqrt{\frac{19.76}{24}} \approx \sqrt{.8233} \approx .91$$ ■



Buen promedio, mala consistencia



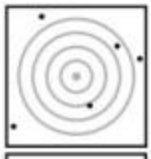
Buena consistencia, mal promedio

En este caso, un buen promedio (tendencia central mayor) es más deseable que una buena consistencia (menor dispersión).

La tendencia central y la dispersión (o "tendencia de separación") son propiedades diferentes e independientes de un conjunto de datos. Algunas veces una es de mayor importancia que otra. Por ejemplo, si tuviera que elegir entre dos canastas con una docena de tomates (del mismo precio), usted seguramente compraría la que tuviera el peso promedio más alto (por tomate) en vez de la que muestra el peso más consistente (desviación estándar menor). Esto maximiza el peso total de su compra. (Vea la ilustración al margen.)

Por otra parte, un tirador está más interesado (hasta cierto punto) en la consistencia que en la colocación promedio. La pistola con la que disparó a un lado del blanco de la parte inferior de la página necesita menos ajuste de la mira que la del que disparó al blanco de la parte superior, la cual exige un considerable esfuerzo a la hora de disparar. (En general, los errores consistentes pueden ser tratados y corregidos más fácilmente que los errores dispersos.)

Significado de las medidas de dispersión La desviación estándar (o cualquier otra medida de dispersión) indica el grado en que están "dispersos" los números en un conjunto de datos. A mayor medida, mayor dispersión. Aparte de esto, es difícil describir exactamente qué es lo que mide la desviación estándar. Sin embargo, hay un resultado útil, que lleva el nombre del matemático ruso Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894), y se aplica a todos los conjuntos de datos.



Buen promedio, mala consistencia



Buena consistencia, mal promedio

En este caso, una buena consistencia (menor dispersión) es más deseable que un buen promedio (tendencia central).

Teorema de Chebyshev

Para cualquier conjunto de datos, sin importar cómo estén distribuidos, la fracción de ellos que se encuentra dentro de k desviaciones estándar de su media (donde $k > 1$) es *al menos*

$$1 - \frac{1}{k^2}.$$



Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) fue un matemático ruso conocido principalmente por su obra sobre la teoría de los números primos. Chebyshev y el matemático y estadístico francés **Jules Bienaymé** (1796-1878) idearon, independientemente uno de otro, una desigualdad importante de probabilidad que se conoce ahora como desigualdad Bienaymé-Chebyshev.

Tome en cuenta las palabras *al menos* del teorema. En ciertas distribuciones, la fracción de objetos que cae dentro de k desviaciones estándar de la media podría ser más de $1 - 1/k^2$, pero en ningún caso será menos. El teorema es significativo para cualquier valor de k mayor que 1 (entero o no).

EJEMPLO 4 ¿Cuál es el porcentaje mínimo de datos de un conjunto que cae dentro de 3 desviaciones estándar de la media?

Con $k = 3$, calculamos

$$1 - \frac{1}{3^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx .889 = 88.9\%. \quad \leftarrow \text{Porcentaje mínimo}$$ ■

Recuerde que la inferencia estadística implica extraer conclusiones acerca de las poblaciones con base en los datos de las muestras. (Vea la página 724.) Como se vio antes, encontrar una probabilidad "empírica" significa en realidad obtener una inferencia estadística. En el ejemplo 2 de la sección 12.1 concluimos que, como una taza de poliestireno cae sobre su parte superior cinco veces en 50 lanzamientos, $P(\text{arriba}) = 5/50 = 1/10$. Esta probabilidad fue una inferencia sobre la población de *todos* los lanzamientos posibles de esa taza, con base en una muestra particular de 50 lanzamientos.

A menudo nos valemos de técnicas de inferencia para comparar dos (o más) poblaciones contrastando muestras procedentes de dichas poblaciones.

EJEMPLO 5 Dos compañías, A y B, venden frascos de café instantáneo de 12 onzas. Se seleccionaron al azar en los mercados cinco frascos de cada una de las compañías y se pesaron cuidadosamente sus contenidos. Los resultados fueron los siguientes.

A: 12.02, 12.08, 11.99, 11.96, 11.99

B: 12.40, 12.21, 12.36, 12.22, 12.27

Determine **(a)** qué compañía proporciona más café en sus frascos, y **(b)** qué empresa llena sus frascos de manera más consistente.

Muestra A	Muestra B
$\bar{x}_A = 12.008$	$\bar{x}_B = 12.292$
$s_A = .0455$	$s_B = .0847$

A partir de los datos proporcionados, calculemos los valores de la media y la desviación estándar de ambas muestras. Estos valores aparecen en el margen.

(a) Puesto que $\bar{x}_B$ es mayor que $\bar{x}_A$, *inferimos* que probablemente la compañía B proporciona más café (media mayor).

(b) Puesto que s_A es menor que s_B, *inferimos* que la compañía A parece más consistente (desviación estándar menor). ■

Las conclusiones obtenidas en el ejemplo 5 son tentativas, ya que las muestras fueron pequeñas. Podríamos tener mayor confianza en nuestras de inferencias si usáramos muestras más grandes, porque entonces aumentaría la probabilidad de que fueran representaciones precisas de sus respectivas poblaciones. En un estudio más pormenorizado de la inferencia estadística, usted aprendería técnicas más apropiadas para muestras pequeñas, lo mismo que técnicas que resultan más adecuadas para muestras grandes. También, aprendería a enunciar sus inferencias de manera más precisa, de modo que, junto con la conclusión básica, se proporcione el grado de incertidumbre.

13.3 EJERCICIOS

1. Si su calculadora encuentra ambos tipos de desviación estándar, la desviación estándar muestral y la desviación estándar poblacional, ¿cuál de las dos tendrá el valor numérico mayor para un conjunto dado de datos? (*Una pista:* Recuerde la diferencia entre las formas en que se calculan las dos desviaciones estándar.)

2. Si su calculadora encuentra sólo un tipo de desviación estándar, explique cómo determinaría si se trata de una desviación estándar muestral o poblacional (suponiendo que no tiene a la mano el manual de la calculadora).

Encuentre **(a)** *el rango y* **(b)** la desviación estándar *de cada muestra (ejercicios 3 a 12). Redondee las respuestas fraccionarias a la centésima más cercana.*

3. 2, 5, 6, 8, 9, 11, 15, 19

4. 8, 5, 12, 8, 9, 15, 21, 16, 3

5. 25, 34, 22, 41, 30, 27, 31

6. 67, 83, 55, 68, 77, 63, 84, 72, 65

7. 318, 326, 331, 308, 316, 322, 310, 319, 324, 330

8. 5.7, 8.3, 7.4, 6.6, 7.4, 6.8, 7.1, 8.0, 8.5, 7.9, 7.1, 7.4, 6.9, 8.2

9. 84.53, 84.60, 84.58, 84.48, 84.72, 85.62, 85.03, 85.10, 84.96

10. 206.3, 210.4, 209.3, 211.1, 210.8, 213.5, 212.6, 210.5, 211.0, 214.2

11.

Valor	Frecuencia
9	3
7	4
5	7
3	5
1	2

12.

Valor	Frecuencia
14	8
16	12
18	15
20	14
22	10
24	6
26	3

Aplique el teorema de Chebyshev en los ejercicios 13 a 28.

Encuentre la menor fracción posible de los números en un conjunto de datos que caen dentro del número dado de desviaciones estándar de la media. Dé sus respuestas como fracciones en su forma más simple.

13. 2 **14.** 4

15. 7/2 **16.** 11/4

Determine el menor porcentaje posible (al décimo por ciento más cercano) de los datos en una distribución que cae dentro del número dado de desviaciones estándar de la media.

17. 3 **18.** 5

19. 5/3 **20.** 5/2

En cierta distribución de números, la media es 70 y la desviación estándar es 8. ¿Qué fracción de los números está al menos entre los siguientes pares de números? Dé sus respuestas como fracciones en su forma más simple.

21. 54 y 86 **22.** 46 y 94

23. 38 y 102 **24.** 30 y 110

En la misma distribución (media de 70 y desviación estándar de 8), encuentre la mayor fracción de números que podrían satisfacer los siguientes requisitos. Dé sus respuestas como fracciones en su forma más simple.

25. Menor que 54 o mayor que 86.

26. Menor que 50 o mayor que 90.

27. Menor que 42 o mayor que 98.

28. Menor que 52 o mayor que 88.

Pago de un bono a un equipo de béisbol *Leigh Jacka tiene su propio equipo de béisbol en una liga menor. Cada vez que el equipo gana un juego, Leigh paga un bono a las nueve jugadores iniciadores, al entrenador y a dos asistentes, que corresponde a cierto porcentaje de sus salarios normales. Las cantidades pagadas se listan a continuación.*

$80, $105, $120, $175, $185, $190,
$205, $210, $215, $300, $320, $325

Utilice la distribución de los bonos anteriores para los ejercicios 29 a 34.

29. Encuentre la media de la distribución.

30. Encuentre la desviación estándar de la distribución.

31. ¿Cuántos montos de los bonos caen dentro de una desviación estándar de la media?

32. ¿Cuántos montos de los bonos caen dentro de dos desviaciones estándar de la media?

33. ¿Qué dice el teorema de Chebyshev acerca del número de cantidades que se ubican entre dos desviaciones estándar de la media?

34. Explique cualquier discrepancia entre sus respuestas a los ejercicios 32 y 33.

Vida útil de los módulos de control de un motor *Chris Christensen dirige el departamento de servicio de una compañía de camiones de transporte. Cada camión de la flota utiliza un módulo electrónico de control del motor que debe reemplazarse cuando falla. En realidad, son preferibles, desde luego, los módulos de mayor duración, pero un programa de reemplazo preventivo también puede evitar accidentes costosos en las carreteras. Por esta razón, es conveniente que los módulos tengan vidas útiles consistentes; esto es, todos deberían acercarse al mismo número de millas antes de fallar; de esta manera, el momento de hacer el reemplazo preventivo puede calcularse con exactitud. Chris probó una muestra de 20 módulos de la marca A que duraron en carretera 43,560 millas en promedio (media), con una desviación estándar de 2116 millas. La siguiente lista muestra cuánto duraron en millas los módulos de una muestra de 20 de la marca B.*

50,660, 41,300, 45,680, 48,840, 47,300,
51,220, 49,100, 48,660, 47,790, 47,210,
50,050, 49,920, 47,420, 45,880, 50,110,
49,910, 47,930, 48,800, 46,690, 49,040

Utilice los datos anteriores para los ejercicios 35 a 37.

35. De acuerdo con las muestras tomadas, ¿qué marca de módulo tiene el promedio de vida útil (millas en la carretera) más grande?

36. ¿Qué marca de módulo tiene aparentemente una vida útil (millas en carretera) más consistente (o uniforme)?

37. Si los únicos módulos disponibles son las marcas A y B, ¿cuál debería comprar Chris para su programa de mantenimiento? Explique su razonamiento.

Utilice la siguiente muestra para los ejercicios 38 a 43.

13, 14, 16, 18, 20, 22, 25

38. Calcule la media y la desviación estándar de la muestra (cada una al centésimo más cercano).

39. Ahora sume 5 a cada elemento de la muestra anterior y calcule la media y la desviación estándar de la nueva muestra.

40. Regrese a la muestra original. Ahora, reste 10 a cada uno de los elementos y calcule la media y la desviación estándar de la nueva muestra.

41. Con base en sus respuestas a los ejercicios 38 a 40, haga conjeturas acerca de lo que les sucede a la media y a la desviación estándar cuando a todos los elementos de la muestra se les suma o resta la misma constante k.

42. Vuelva una vez más a la muestra original. Esta vez multiplique cada elemento por 3 y calcule la media y la desviación estándar de la nueva muestra.

43. Con base en sus respuestas a los ejercicios 38 y 42, haga conjeturas sobre lo que les sucede a la media y a la desviación estándar cuando todos los elementos de la muestra se multiplican por la misma constante k.

44. En la sección 13.2 demostramos que la media, como medida de tendencia central, es muy sensible a los valores extremos. ¿Qué medida de dispersión, de las que hemos desarrollado en esta sección, sería más sensible a los valores extremos? Ilustre su respuesta con uno o más ejemplos.

45. ***Encuesta de marketing de un cereal*** Una compañía de alimentos llevó a cabo una investigación para determinar si la propuesta de incluir un premio en las cajas de su cereal era o no lo suficientemente atractiva como para generar nuevas ventas. Se tomaron cuatro ciudades como mercados de prueba, donde el cereal fue distribuido con el premio, y cuatro ciudades como mercado de control, donde el cereal se distribuyó sin el premio. Las ocho ciudades fueron elegidas con base en su semejanza en términos de población, ingreso per cápita y volumen total de cereal consumido. Los resultados aparecen en la siguiente tabla.

		Cambio mensual en el porcentaje de participación de mercado
Ciudades de prueba	1	+18
	2	+15
	3	+7
	4	+10
Ciudades de control	1	+1
	2	−8
	3	−5
	4	0

(a) Encuentre la media del cambio en la participación de mercado de las cuatro ciudades de prueba.

(b) Encuentre la media del cambio en la participación de mercado de las cuatro ciudades de control.

(c) Encuentre la desviación estándar del cambio en la participación de mercado de las cuatro ciudades de prueba.

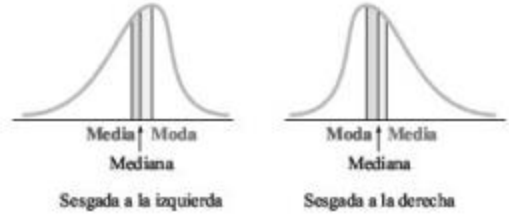
(d) Encuentre la desviación estándar del cambio en la participación de mercado de las cuatro ciudades de control.

(e) Encuentre la diferencia entre las medias de (a) y (b). Esta diferencia representa la estimación del cambio porcentual en ventas debido al premio.

(f) Las dos desviaciones estándar de (c) y (d) fueron empleadas para calcular un "error" de ± 7.95 para la estimación en (e). Con esta cantidad de error, ¿cuáles son las estimaciones más pequeña y más grande del incremento en ventas?

Con base en el intervalo estimado en la parte (f), la compañía decidió producir en masa cajas con premio y distribuirlas a nivel nacional.

En una distribución sesgada, la media estará más alejada hacia la cola que la mediana, como se aprecia en el diagrama.



Una forma de medir el grado de sesgo, que incluye tanto la tendencia central como la dispersión, es mediante el **coeficiente de sesgo**, *el cual se calcula como sigue.*

$$\frac{3 \times (\text{media} - \text{mediana})}{\text{desviación estándar}}$$

46. ¿Bajo qué condiciones el coeficiente de sesgo sería **(a)** positivo? **(b)** negativo?

47. Explique por qué la media de una distribución sesgada está siempre más alejada hacia la cola que la mediana.

48. Suponga que la permanencia promedio de los pacientes en los hospitales de Estados Unidos es de 2.7 días, con una desviación estándar de 7.1 días. Haga un diagrama de cómo se vería esta distribución.

En los ejercicios 49 a 51, utilice la distribución de frecuencias para datos agrupados que se muestra en la siguiente tabla. (También consulte los ejercicios 60 a 62 de la sección 13.2.)

Límites de la clase	Frecuencia f
21–25	5
26–30	3
31–35	8
36–40	12
41–45	21
46–50	38
51–55	35
56–60	20

49. ¿Puede identificar algún dato específico que aparecido en esta muestra?

50. ¿Puede calcular la desviación estándar real de esta muestra?

51. Describa cómo puede aproximar la desviación estándar de esta muestra. Justifique su procedimiento.

52. Suponga que la distribución de frecuencias del ejemplo 3 implica 50 o 100 valores distintos (o incluso más) de los datos, en lugar de sólo cuatro. Explique por qué el procedimiento de este ejemplo sería entonces muy ineficaz.

53. Una distribución en "forma de J" puede estar sesgada tanto a la derecha como a la izquierda.
   (a) En una distribución en forma de J segada a la derecha, ¿qué datos serían la moda, el elemento más grande o el más pequeño?
   (b) En una distribución en forma de J sesgada a la izquierda, ¿qué datos serían la moda, el elemento más grande o el más pequeño?
   (c) Explique por qué la moda es una medida poco confiable de tendencia central para una distribución en forma de J.

13.4 Medidas de posición

Las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión ofrecen un medio eficaz de caracterizar de manera global un conjunto de datos. La tendencia central muestra, a lo largo de una escala numérica, dónde está centrado el conjunto global de datos. La dispersión tiene que ver con la forma en que los datos están dispersos en relación con el punto de central. Y el teorema de Chebyshev, mencionado en la sección anterior, indica, en un sentido general, qué parte del conjunto de datos puede dispersarse a distintas cantidades a partir del punto central.

En muchos casos, nos interesan en especial ciertos elementos individuales del conjunto de datos más que el conjunto en sí. Aun en ese caso seguiremos necesitando un medio para medir de qué manera un elemento corresponde al conjunto, de qué modo se compara con otros elementos del conjunto o incluso cómo se compara con otro elemento de otro conjunto. Hay varias maneras comunes de crear tales medidas. Puesto que miden la posición de un elemento dentro de un conjunto de datos, por lo general se les llama **medidas de posición**.

La puntuación *z* A cada uno de los datos de una muestra puede asignársele una **puntuación *z***, la cual se define como se indica a continuación.

La puntuación *z*

Si x es un dato de una muestra cuya media es $\bar{x}$ y con desviación estándar s, entonces la **puntuación *z*** de x está dada por

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}.$$

Puesto que $x - \bar{x}$ proporciona la medida en que x difiere (o se desvía) de la media $\bar{x}$, $(x - \bar{x})/s$ proporciona el número de desviaciones estándar que x difiere de $\bar{x}$. Observe que z será positiva si x es mayor que $\bar{x}$ pero negativa si x es menor que $\bar{x}$. El teorema de Chebyshev afirma que, en una distribución cualquiera, al menos el 89% (aproximadamente) de los elementos caerán dentro de tres desviaciones estándar de la media. Esto es, al menos el 89% de los elementos tendrá puntuaciones z entre -3 y 3. De hecho, muchas distribuciones comunes, en especial las simétricas, tienen considerablemente más de 89% de sus elementos dentro de las tres desviaciones estándar de la media (como veremos en la sección siguiente). De aquí que una puntuación z mayor que 3 o menor que -3 sea rara.

EJEMPLO 1 A dos amigos, Reza y Weihua, que asisten a diferentes clases de historia, les devolvieron sus exámenes parciales el mismo día. El primero obtuvo 86, mientras que el segundo sólo 78. ¿Qué estudiante es relativamente mejor tomando como base los datos de clase que se muestran a continuación?

	Reza	Weihua
Media del grupo	73	69
Desviación estándar del grupo	8	5

Calcule como sigue.

$$\text{Reza: } z = \frac{86 - 73}{8} = 1.625 \qquad \text{Weihua: } z = \frac{78 - 69}{5} = 1.8$$

Como la puntuación z de Weihua es más elevada, quedó situada relativamente más arriba dentro de su clase de lo que se situó a Reza en la suya. ■

Percentiles Si usted se presentara al examen de aptitudes escolares (Scholastic Aptitude Test, SAT) o alguna otra prueba estandarizada realizada por un gran número de estudiantes, su puntuación bruta por lo general sería transformada en una puntuación **percentil**, la cual se define como sigue.

Percentil

Si aproximadamente n por ciento de los datos de una distribución son menores que el número x, entonces x es el ***n*-ésimo percentil** de la distribución.

Por ejemplo, si su calificación se ubicó en el percentil ochenta y tres del SAT, esto significa que superó las calificaciones de aproximadamente 83% de todos los que realizaron el examen. (Esto *no* significa que haya tenido el 83% de las respuestas correctas.) Como la puntuación percentil ubica a un elemento dentro del conjunto de datos, se trata de otra "medida de posición". El ejemplo que sigue aproxima percentiles para un conjunto de datos bastante pequeño.

EJEMPLO 2 Las siguientes cifras representan los números de clientes atendidos en un restaurante durante 40 días consecutivos. (Los números han sido ordenados de menor a mayor.)

46	51	52	55	56	56	58	59	59	59
61	61	62	62	63	63	64	64	64	65
66	66	66	67	67	67	68	68	69	69
70	70	71	71	72	75	79	79	83	88

Para este conjunto de datos, encuentre lo siguiente.

(a) El percentil treinta y cinco.

El percentil treinta y cinco puede tomarse como el dato debajo del cual está el 35% de los datos ordenados. Ya que 35 por ciento de 40 es (.35)(40) = 14, tomamos el dato décimo quinto, o 63, como el percentil treinta y cinco.

(b) El percentil ochenta y seis.

Como 86 por ciento de 40 = (.86)(40) = 34.4, redondeamos *hacia arriba* y establecemos el percentil ochenta y seis como el trigésimo quinto dato, o 72. ■

Técnicamente, los percentiles fueron concebidos originalmente como un conjunto de 99 valores (no necesariamente coincidentes con el valor numérico de los datos) a

lo largo de la escala que dividiría el conjunto de datos en 100 partes iguales. Se calculaban solamente para conjuntos muy grandes de datos. Con conjuntos de datos más pequeños, como en el ejemplo 2 de la página 757, al dividir los datos en 100 partes necesariamente dejaría vacías muchas de ellas. Sin embargo, las técnicas modernas del análisis exploratorio de datos buscan aplicar el concepto de percentil incluso a conjuntos pequeños de datos. Es por esto, pues, que nos valemos de las técnicas de aproximación como en el ejemplo 2. Otra opción es dividir los datos en un número menor de partes iguales (o aproximadamente iguales) como se muestra a continuación.

Deciles y cuartiles Los **deciles** son los nueve valores (que se designan como $D_1, D_2, \ldots, D_9$) a lo largo de la escala que dividen un conjunto de datos en 10 partes (aproximadamente) iguales, y los **cuartiles** son los tres valores (Q_1, Q_2 y Q_3) que dividen un conjunto de datos en cuatro partes (aproximadamente) iguales. Puesto que los deciles y los cuartiles sirven para ubicar datos particulares dentro de ciertas porciones de una distribución, también constituyen "medidas de posición".

Como un decil siempre equivale a cierto percentil, puede aproximarse, como se indica en el ejemplo 2.

EJEMPLO 3 Encuentre el cuarto decil para los datos sobre los clientes del restaurante del ejemplo 2.

Consulte la tabla de datos clasificados. El cuarto decil es el percentil cuarenta, y 40% de 40 = (.40)(40) = 16. El cuarto decil es el dato decimoséptimo, o 64. ■

Aunque los tres cuartiles también equivalen a sus percentiles correspondientes, tenga en cuenta que el segundo cuartil, Q_2, equivale asimismo a la mediana, una medida de tendencia central introducida en la sección 13.2. Una convención común para calcular los cuartiles nos regresa a la forma en que calculamos la mediana.

Determinación de cuartiles

Para cualquier conjunto de datos (clasificados en orden de menor a mayor):

El **segundo cuartil**, Q_2, es justamente la mediana, el elemento a la mitad del conjunto cuando el número de elementos es impar, o la media de los dos elementos de la mitad cuando el número de elementos es par.

El **primer cuartil**, Q_1, es la mediana de todos los elementos por debajo de Q_2.

El **tercer cuartil**, Q_3, es la mediana de todos los elementos por encima de Q_2.

EJEMPLO 4 Determine los tres cuartiles de los datos del ejemplo 2.

Consulte los datos clasificados. Los dos datos centrales son 65 y 66, de modo que

$$Q_2 = \frac{65 + 66}{2} = 65.5.$$

Los primeros 20 elementos (un número par) están por debajo de Q_2, y los dos elementos centrales en ese conjunto son 59 y 61.

$$Q_1 = \frac{59 + 61}{2} = 60$$

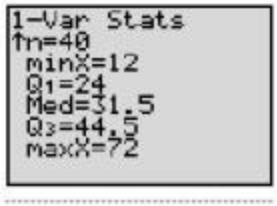
Los últimos 20 elementos están por encima de Q_2.

$$Q_3 = \frac{69 + 70}{2} = 69.5$$ ■

El diagrama de caja Un **diagrama de caja** (o **diagrama de caja y bigotes**) comprende la mediana (una medida de tendencia central), el rango (una medida de dispersión) y el primer y tercer cuartiles (ambos medidas de posición), y los incorpora a todos en una sencilla representación visual.

Diagrama de caja

Para un conjunto determinado de datos, un **diagrama de caja** (o de **caja y bigotes**) consiste en una caja rectangular colocada por encima de una recta numérica, la cual se extiende de Q_1 a Q_3, donde el valor de Q_2 (la mediana) se señala dentro de la caja, y con rayas o "bigotes" (segmentos de línea) que se extienden a izquierda y derecha por fuera de la caja hasta los valores mínimo y máximo de los datos.



Esta pantalla confirma los resultados del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Elabore un diagrama de caja para las horas de estudio por semana del ejemplo 2 de la sección 13.1.

Para determinar los cuartiles y los valores mínimo y máximo de manera más sencilla, usamos el diagrama de tallo y hojas (con hojas clasificadas) que aparece en la tabla 9 de la sección 13.2:

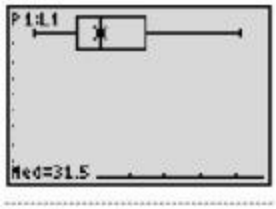
1	2	4	5	6	7	8					
2	0	2	3	4	4	5	6	6	9	9	9
3	0	1	1	2	3	6	6	8	9		
4	0	1	4	4	5	5	7				
5	2	5	5	8							
6	0	2									
7	2										

mediana (que ya determinamos antes, en el ejemplo 6 de la sección 13.2) es

$$\frac{31 + 32}{2} = 31.5.$$

A partir del diagrama de tallo y hojas,

$$Q_1 = \frac{24 + 24}{2} = 24 \quad \text{y} \quad Q_3 = \frac{44 + 45}{2} = 44.5.$$



Este diagrama de caja corresponde a los resultados del ejemplo 5. Indica la mediana en la parte inferior de la pantalla. La función TRACE de la TI–83 Plus localiza los valores mínimo, máximo y también los de los cuartiles.

Los elementos mínimo y máximo son 12 y 72. El diagrama de caja se muestra en la figura 10.

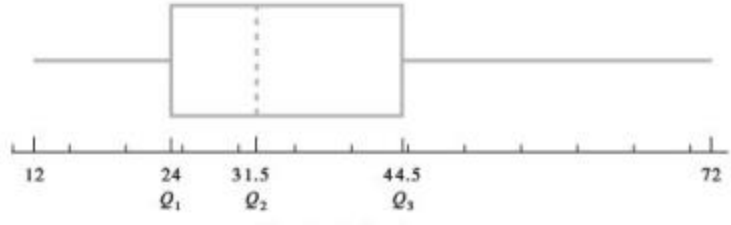


Diagrama de caja

FIGURA 10

Observe, en la figura 10, que el diagrama de caja muestra claramente lo siguiente:

1. la tendencia central (la posición de la mediana);
2. la ubicación de la mitad central de los datos (la extensión de la caja);
3. la dispersión (el rango es la extensión de los bigotes);
4. el sesgo (la asimetría tanto de la caja como de las líneas).

13.4 EJERCICIOS

Para cada uno de los ejercicios 1 a 4 haga uso de puntuaciones z.

1. ***Posiciones relativas en exámenes de cálculo*** En una clase de cálculo, Chris Dorant obtuvo un 5 en un examen para el que la media y la desviación estándar de la clase fueron 4.6 y 2.1, respectivamente. Lyn Colgin sacó 6 en otro examen para el cual la media y la desviación estándar de la clase fueron 4.9 y 2.3, respectivamente. En términos relativos, ¿qué estudiante se desempeñó mejor?

2. ***Desempeños relativos en eventos de pista*** Durante la fase del sábado de una competencia de atletismo, Ryan Flahive, deportista de salto de altura, brincó 6 pies con 3 pulgadas. Las marcas en la temporada pasada para este género de salto tuvieron una media de 6 pies y una desviación estándar de 3.5 pulgadas. Michael Drago, compañero de equipo de Ryan, logró un salto de longitud de 18 pies con 4 pulgadas. En esa competencia la media y la desviación estándar fueron 16 pies 6 pulgadas y un pie 10 pulgadas, respectivamente. De esta temporada, ¿quién tuvo mejor rendimiento el sábado con respecto a la temporada anterior?

3. ***Vida útil de neumáticos*** La vida útil de los neumáticos de la marca A se distribuye en una media de 45,000 millas y una desviación estándar de 4500 millas, mientras que la durabilidad de los neumáticos de la marca B es de sólo 38,000 millas en promedio (media) con una desviación estándar de 2080 millas. Los neumáticos de la marca A de Jutta duraron 37,000 millas, y los de la marca B de Arvid 35,000. En términos relativos, dentro de la marca que cada uno usó, ¿qué conductor obtuvo el mejor desempeño de los neumáticos?

4. ***Tasas relativas de pesca*** En cierto lago, el promedio de tamaño de la trucha es de 12 pulgadas y la desviación estándar es de 2.75 pulgadas. El róbalo promedia 4 libras en peso, con desviación estándar de 0.8 libras. Si Imelda capturó una trucha de 18 pulgadas y Timothy pescó un róbalo de 6 libras, entonces, en términos relativos, ¿quién obtuvo la mejor pesca?

Número de clientes de un restaurante *Consulte los datos de clientes de un restaurante del ejemplo 2. Aproxime cada uno de los siguientes puntos. (Utilice los métodos presentados en esta sección.)*

5. el percentil quince
6. el percentil setenta y cinco
7. el decil tres
8. el decil ocho

Líderes en rebotes en la Liga Nacional de Baloncesto (NBA) *Para los ejercicios de 9 a 19, consulte los datos sobre los 10 mejores recuperadores de rebotes de la temporada 2000–2001 de la NBA (National Basketball Association). (Fuente:* The World Almanac and Book of Facts 2002, *p. 937.)*

Líderes en rebotes	Partidos jugados	Rebotes a la ofensiva	Rebotes defensivos	Total de rebotes	Porcentaje de rebotes por juego
Dikembe Mutombo, Atlanta-Philadelphia	75	307	708	1015	13.5
Ben Wallace, Detroit	80	303	749	1052	13.2
Shaquille O'Neal, L.A. Lakers	74	291	649	940	12.7
Tim Duncan, San Antonio	82	259	738	997	12.2
Antonio McDyess, Denver	70	240	605	845	12.1
Kevin Garnett, Minnesota	81	219	702	921	11.4
Chris Webber, Sacramento	70	179	598	777	11.1
Shawn Marion, Phoenix	79	220	628	848	10.7
Antonio Davis, Toronto	78	274	513	787	10.1
Elton Brand, Chicago	74	285	461	746	10.1



Calcule las puntuaciones z para los ejercicios 9 a 12. (Dé sus respuestas hasta dos decimales.)

9. partidos jugados por Dikembe Mutombo

10. rebotes a la ofensiva de Shaquille O'Neal

11. promedio de rebotes por juego de Chris Webber

12. rebotes totales de Kevin Garnett

En los ejercicios 13 a 16, determine quién ocupó cada una de las posiciones siguientes.

13. el percentil treinta y cinco

14. el percentil setenta y tres

15. el decil seis en partidos jugados

16. el decil tres en rebotes promedio por juego

17. Determine quién tuvo un mejor desempeño en términos relativos: Shaquille O'Neal en rebotes a la ofensiva o Tim Duncan en rebotes a la defensiva.

18. Elabore un diagrama de caja para los datos de rebotes promedio por juego.

19. ¿Qué indica su diagrama de caja del ejercicio 18 acerca de lo siguiente?
(a) la tendencia central de estos datos
(b) la dispersión de estos datos
(c) el sesgo de estos datos

20. En el texto se señaló que, para cualquier distribución de datos, al menos el 89% de los elementos estará dentro de tres desviaciones estándar de la media. ¿Por qué no podríamos simplemente alejar algunos datos de la media para obtener una nueva distribución que viole esta condición?

21. Describa la diferencia básica entre una medida de tendencia central y una medida de posición.

En este capítulo se presentaron tres características principales (la tendencia central, la dispersión y la posición) y se desarrollaron varias formas de medirlas en datos numéricos. En cada uno de los ejercicios 22 a 26, se describe una nueva medida. Explique en cada caso cuál de las tres características piensa que mediría y por qué.

22. $\textbf{Semirrango} = \dfrac{\text{elemento mínimo} + \text{elemento máximo}}{2}$

23. $\textbf{Semicuartil} = \dfrac{Q_1 + Q_3}{2}$

24. $\textbf{Coeficiente de variación} = \dfrac{s}{\bar{x}} \cdot 100$

25. $\textbf{Rango intercuartil} = Q_3 - Q_1$

26. $\textbf{Rango semi-intercuartil} = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

27. "El coeficiente de sesgo" se definió en los ejercicios de la sección anterior y equivale a

$$\frac{3 \times (\bar{x} - Q_2)}{s}.$$

¿Es ésta una medida de datos individuales o de la distribución global?

28. En un examen nacional estandarizado, la calificación Jennifer se ubicó en el percentil noventa y dos. Si el examen lo hicieron 67,500 individuos, ¿alrededor de cuántas calificaciones fueron más altas que la de Jennifer?

29. Sean Q_1, Q_2, Q_3 los tres cuartiles (del más pequeño al más grande) de una población grande de calificaciones.
(a) ¿Es necesariamente verdadero que $Q_2 - Q_1 = Q_3 - Q_2$?
(b) Explique su respuesta a la parte (a).

En los ejercicios 30 a 33, responda sí *o* no *y explique su respuesta. (Consulte los ejercicios anteriores para las definiciones de algunas de estas medidas.)*

30. ¿El semicuartil es por fuerza igual a la mediana?

31. ¿El semicuartil es necesariamente igual al semirrango?

32. ¿El rango intercuartil es por fuerza la mitad del rango?

33. ¿El rango semi-intercuartil es necesariamente la mitad del rango intercuartil?

34. ***Posiciones relativas en un examen estandarizado de química*** Omer y Alesasandro participaron en el proceso de estandarización del nuevo examen estatal de química. Dentro del numeroso grupo de participantes, sus calificaciones y puntuaciones z correspondientes fueron las que se muestran aquí.

	Calificación	Puntuación z
Omer	60	.69
Alessandro	72	1.67

Determine la media global y la desviación estándar de la distribución de calificaciones. (Dé sus respuestas hasta dos lugares decimales.)

Desempeño de los quarterbacks en la Liga Nacional de Fútbol (NFL) *Desde que la NFL (National Football League) empezó a registrar las estadísticas oficiales en 1932, se ha clasificado la eficacia, de los* quarterbacks, *a saber, el número de pases que logran completar, mediante diferentes métodos. El sistema actual, adoptado en 1973, se basa en cuatro componentes de desempeño considerados como los más importantes: pases completos, anotaciones, yardas ganadas e interceptaciones, como porcentajes del número de pases intentados. Al parecer, ni los aficionados ni los cronistas deportivos acaban de entender muy bien el cálculo real de estas clasificaciones, pero esto se puede lograr mediante la fórmula siguiente.**

$$\text{Clasificación} = \frac{\left(250 \times \frac{C}{A}\right) + \left(1000 \times \frac{T}{A}\right) + \left(12.5 \times \frac{Y}{A}\right) + 6.25 - \left(1250 \times \frac{I}{A}\right)}{3},$$

donde A = pases intentados, C = pases completos, Y = yardas ganadas por pase, T = pases de anotación e I = intercepciones.

Además de los factores de peso (coeficientes) que aparecen en la fórmula, las cuatro razones de las categorías están limitadas a los máximos siguientes.

$$.775 \text{ para } \frac{C}{A}, \quad .11875 \text{ para } \frac{T}{A}, \quad 12.5 \text{ para } \frac{Y}{A}, \quad .095 \text{ para } \frac{I}{A}$$

Estas limitaciones tienen por objetivo impedir que cualquier componente de desempeño tenga un efecto excesivo en la calificación global. No se recurre, con frecuencia, a estos límites, pero en casos especiales pueden tener un efecto significativo. (Vea los ejercicios 46 a 49.)

La fórmula anterior clasifica a todos los quarterbacks *contra el mismo desempeño estándar y puede aplicarse, por ejemplo, después de un solo juego, de una temporada completa o de toda una carrera.*

En 2001, los mejores quarterbacks *de la Conferencia Nacional (NFC) y de la Conferencia Americana (AFC) fueron Kurt Warner, de los Carneros de San Luis, y Rich Gannon, de los* Raiders *de Oakland, respectivamente. Utilice los datos que se muestran aquí para los ejercicios 35 y 36. Calcule las respuestas hasta un decimal.*

	Warner	Gannon
Intentos	546	549
Completos	375	361
Yardas	4830	3828
Anotaciones	36	27
Intercepciones	22	9

Fuente: http://www.nfl.com.

35. Calcule el desempeño de la temporada de Warner.

36. Calcule el desempeño de la temporada de Gannon.

Las calificaciones de los 10 mejores quarterbacks, *en 2001 en cada conferencia, están clasificadas en la tabla siguiente. Para los ejercicios 37 a 40, determine las medidas que se le piden (hasta un decimal).*

Quarterback de la NFC	Puntos de clasificación	*Quarterback* de la AFC	Puntos de clasificación
Warner, San Luis	101.4	Gannon, Oakland	95.5
García, San Francisco	94.8	McNair, Tennessee	90.2
Favre, Green Bay	94.1	Brady, Nueva Inglaterra	86.5
McNabb, Filadelfia	84.3	Manning, Indianápolis	84.1
Chandler, Atlanta	84.1	Brunell, Jacksonville	84.1
Culpepper, Minnesota	83.3	Stewart, Pittsburgh	81.7
Plummer, Arizona	79.6	Fiedler, Miami	80.3
B. Johnson, Tampa Bay	77.7	Griese, Denver	78.5
Collins, Gigantes de N.Y.	77.1	Van Pelt, Búfalo	76.4
Batch, Detroit	76.8	Testaverde, Jets de N.Y.	75.3

Fuente: World Almanac and Book of Facts 2003.

*Joseph Farabee, del Colegio American River, dedujo la fórmula luego de examinar una enorme variedad de descripciones del sistema de clasificación en columnas deportivas y publicaciones de la NFL.

37. los tres cuartiles de las clasificaciones de la NFC

38. los tres cuartiles de las clasificaciones de la AFC

39. el octavo decil de todas las clasificaciones (las cifras de la NFC y la AFC combinadas)

40. el nonagésimo percentil de todas las clasificaciones (las cifras combinadas de la NFC y AFC)

41. Elabore diagramas de caja para ambas conferencias, uno encima del otro en el mismo dibujo.

Consulte los diagramas de caja del ejercicio 41 para los ejercicios 42 a 45. En cada caso, identifique la conferencia para la cual la medida dada es mayor, y estime qué tan grande es.

42. la mediana

43. el semicuartil

44. el rango

45. el rango intercuartil

Sid Luckman, de los Osos de Chicago, el campeón de pases en la temporada de 1943, tuvo las siguientes estadísticas pertinentes en ese año:

202 intentos, 110 completos, 28 anotaciones, 2194 yardas, 12 intercepciones.

Utilice estos números en la fórmula de clasificación para los ejercicios siguientes.

46. Calcule la clasificación de 1943 para Luckman, pero procure reemplazar, de ser necesario, cada razón en la fórmula por su máximo permitido.

47. Calcule la clasificación de Luckman suponiendo que las razones no tienen restricciones.

48. ¿En ese año, qué componente de las estadísticas de pases de Luckman fue en apariencia inusual, aun entre los *quarterbacks* más precisos?

49. Compare las dos clasificaciones de los ejercicios 46 y 47 con la marca de todos los tiempos para una temporada lograda por Steve Young, que fue de 112.8 (que la alcanzó en 1994).

13.5 La distribución normal

x	$P(x)$
0	.03125
1	.15625
2	.31250
3	.31250
4	.15625
5	.03125

Distribución de probabilidad

Una variable aleatoria que sólo puede asumir ciertos valores fijos se denomina **variable aleatoria discreta**. Por ejemplo, el número de veces en que una moneda cae en cara en 5 lanzamientos es una variable discreta, ya que sus únicos valores posibles son 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Una variable cuyos valores no tienen restricciones de este tipo es una **variable aleatoria continua**. Por ejemplo, el diámetro de los botones de las camelias sería una variable continua, pues se extiende por una escala que puede ir de 5 a 25 centímetros. Los valores no estarían restringidos a números enteros, o a décimos, o a centésimos, etc. Aunque en la práctica no podríamos medir los diámetros de manera más precisa que, digamos, en décimas de centímetros, los diámetros, en teoría, podrían asumir cualquier valor del número infinito que hay entre 5 y 25. En términos de la teoría de conjuntos, podemos decir que una variable aleatoria discreta puede asumir solamente un número contable de valores, mientras que una variable aleatoria continua puede asumir un número no contable de valores.

En contraste con la mayoría de las distribuciones que vimos anteriormente en este capítulo, las cuales eran empíricas (basadas en la observación), las distribuciones analizadas en esta sección y en la siguiente son teóricas (se basan en probabilidades teóricas). Conocer las distribuciones teóricas nos permite identificar en qué circunstancias las observaciones reales son inconsistentes con ciertas suposiciones formuladas de antemano, lo cual constituye la clave de la estadística inferencial.

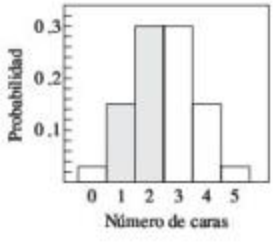


FIGURA 11

Al margen aparece la distribución de probabilidad teórica para la variable aleatoria discreta "número de veces que cae cara" cuando se lanzan 5 monedas, y en la figura 11 se proporciona el histograma correspondiente. Los valores de las probabilidades pueden determinarse mediante la fórmula de probabilidad binomial o utilizando el triángulo de Pascal.

Debido a que el ancho de cada rectángulo dentro de la figura 11 es de una unidad, el *área* del rectángulo también es igual a la probabilidad del número correspondiente de veces que cae caras. El área, y por lo tanto la probabilidad, para el evento "1 cara o

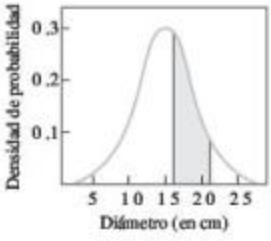


FIGURA 12

2 caras" se encuentra sombreada en la figura. La gráfica consiste en 6 rectángulos distintos, ya que el "número de caras" es una variable *discreta* con 6 valores posibles. La suma de las 6 áreas rectangulares es exactamente de una unidad cuadrada.

En contraste con la distribución discreta del "número de caras" señalada antes, una distribución de probabilidad para el diámetro de los botones de las camelias no puede tabularse o graficarse de la misma manera, pues es una variable *continua*. La gráfica se deslizaría en una curva "continua" en forma de campana (en lugar de un conjunto de rectángulos), como se aprecia en la figura 12. En este caso, la escala vertical de la gráfica muestra lo que conocemos como "densidad de probabilidad": la probabilidad por unidad a lo largo del eje horizontal.

Esta curva en particular alcanza su altura máxima cuando el valor del diámetro es igual a 15 centímetros, es decir, su punto central, y decae rápidamente de la misma forma hacia un nivel de cero en ambas direcciones. A una curva simétrica de campana de esta clase se la denomina **curva normal**. Cuando una variable aleatoria tiene una gráfica con esta forma característica, se dice que tiene una **distribución normal**. Una gran cantidad de variables aleatorias continuas posee este tipo de distribución normal, e incluso las distribuciones de variables aleatorias discretas pueden aproximarse a menudo por medio de curvas normales. Por estas razones vale la pena estudiar las curvas normales. (Por supuesto, no todas las distribuciones son normales, o ni siquiera de manera aproximada; por ejemplo, la distribución de los ingresos por lo regular no lo es.)



La curva normal fue desarrollada por primera vez por **Abraham De Moivre** (1667-1754), pero su trabajo pasó desapercibido durante muchos años. Fue desarrollado nuevamente y de manera independiente por Pierre Laplace (1749-1827) y Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss encontró muchos usos para esta curva que en ocasiones se denomina *curva gaussiana*.

En una curva normal, si la cantidad mostrada en el eje horizontal es el número de desviaciones estándar respecto de la media, en lugar de los valores de la variable aleatoria en sí, entonces a esta curva se le denomina **curva normal estándar**. En este caso, la dimensión horizontal mide los números de las desviaciones estándar, teniendo el valor 0 como media de la distribución. El número de desviaciones estándar, asociado con un punto en el eje horizontal, es una "medida normalizada" para dicho punto. Esto es lo mismo que la puntuación z analizada en la sección anterior.

El área por debajo de la curva a lo largo de un intervalo es, de forma numérica, igual a la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor dentro del intervalo correspondiente. El área total por debajo de la curva normal estándar es exactamente de una unidad cuadrada.

El área de la región sombreada en la figura 12 es igual a la probabilidad de que el diámetro de un botón de camelia elegido al azar caiga dentro del intervalo de exactamente 16.4 a 21.2 cm. Para determinar dicha área, primero convertimos 16.4 y 21.2 a unidades de desviaciones estándar. Con este enfoque, podemos trabajar con cualquier curva normal comparándola con la curva normal estándar. Entonces, una sola tabla de áreas de la curva normal estándar proporciona las probabilidades para todas las curvas normales, como se mostrará más adelante en esta sección.

A continuación se resumen diversas propiedades de la curva normal, las cuales se ilustran en la figura 13.

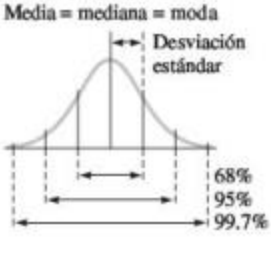


FIGURA 13

Propiedades de la curva normal

La gráfica de una curva normal tiene forma de campana y es simétrica respecto de la recta vertical que pasa por su centro.

La media, la mediana y la moda de una curva normal son todas iguales y concurren en el centro de la distribución.

Regla empírica Cerca del 68% de los valores de los datos de una curva normal se ubican a una desviación estándar de la media (en ambas direcciones), cerca del 95% se ubican a 2 desviaciones estándar y cerca del 99.7% a 3 desviaciones estándar.

Cerca, pero sin tocarse
Cuando una curva se aproxima cada vez más a una recta, sin que llegue en realidad a tocarla (como la curva normal que se aproxima al eje horizontal), la línea se denomina **asíntota** y se dice que la curva se aproxima a la recta en forma **asintótica**.

La regla empírica indica que sólo un pequeño porcentaje de los valores en una distribución normal se ubicará más allá de 3 desviaciones estándar de la media (aproximadamente el .3%, dividido igualmente entre los extremos [o colas] inferior y superior de la distribución). Conforme nos alejamos del centro, la curva cae rápidamente, y después, de manera gradual, se aproxima al eje. Pero de hecho *nunca* alcanza al eje. No importa qué tanto nos alejemos, siempre existe la posibilidad (aunque muy pequeña) de que asuma un valor superior. Por lo tanto, teóricamente el rango de una distribución normal es infinito.

Es importante tomar en cuenta que el porcentaje de valores de un intervalo es equivalente a la probabilidad de que un valor elegido al azar caiga dentro de dicho intervalo. Por lo tanto, un resultado de la regla empírica es que, si tomamos un número al azar de una distribución normal, la probabilidad de que se ubique a una desviación estándar de la media es de aproximadamente .68.

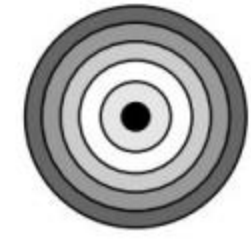


EJEMPLO 1 Suponga que 300 estudiantes de química hacen un examen semestral y que la distribución de sus resultados puede tomarse como normal. Determine el número de resultados que caen dentro de los siguientes intervalos.

(a) Dentro de una desviación estándar de la media

Mediante la regla empírica, el 68% de todos los resultados se ubican a una desviación estándar de la media. Puesto que hay un total de 300 resultados, el número de resultados a una desviación estándar es de

$$(68\%)(300) = (.68)(300) = 204.$$

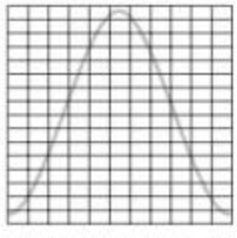


(b) Dentro de 2 desviaciones estándar de la media

En total, 95% de todos los resultados se ubican a 2 desviaciones estándar de la media. Esto sería

$$(.95)(300) = 285.$$ ■

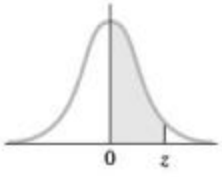
Casi todas las preguntas a las que necesitamos dar respuesta sobre las distribuciones normales involucran regiones que no caen dentro de 1, 2 o 3 desviaciones de la media. Por ejemplo, podríamos necesitar el porcentaje de los elementos a 1 1/2 o 2 1/5 desviaciones estándar de la media, o quizá el área bajo la curva de .8 a 1.3 desviaciones estándar por encima de la media. En tales casos, la regla empírica no es suficiente. El método tradicional consiste en consultar una tabla de valores de áreas, como la tabla 10 que aparece en la página 766. Los paquetes de software diseñados para aplicaciones estadísticas por lo general pueden proporcionar los valores que se les piden, e incluso muchas de las calculadoras actuales más avanzadas tienen esta capacidad. Esas herramientas son muy recomendables. Como método opcional, mostraremos la manera de usar la tabla 10.



En el juego de los dardos se presenta una **distribución normal** cuando el jugador siempre apunta al blanco, lanza un gran número de veces y la puntería en cada lanzamiento se ve influida por errores aleatorios independientes.

La tabla proporciona la fracción de todos los resultados de una distribución normal que caen entre la media y z desviaciones estándar de la media. *Debido a la simetría de la curva normal, la tabla puede usarse para valores tanto por arriba como por debajo de la media.* Podemos considerar que todos los elementos de la tabla corresponden con el área que está bajo la curva. El área total se arregla para que sea igual a 1.000 unidad cuadrada, con .500 unidades cuadradas a cada lado de la media. La tabla muestra que prácticamente toda el área que se toma en consideración se ubica a 3.30 desviaciones estándar de la media. Lo que queda fuera de este rango es tan pequeño que no aparece en los primeros tres decimales.

La columna *A* muestra la proporción del área por debajo de la curva entre $z = 0$ y un valor positivo de *z*.



Debido a que la curva es simétrica respecto del valor 0, el área entre $z = 0$ y un valor *negativo* de *z* puede determinarse mediante el valor positivo correspondiente de *z*.

TABLA 10 Áreas por debajo de la curva normal estándar

z	*A*	*z*	*A*	*z*	*A*	*z*	*A*	*z*	*A*	*z*	*A*
.00	.000	.56	.212	1.12	.369	1.68	.454	2.24	.487	2.80	.497
.01	.004	.57	.216	1.13	.371	1.69	.454	2.25	.488	2.81	.498
.02	.008	.58	.219	1.14	.373	1.70	.455	2.26	.488	2.82	.498
.03	.012	.59	.222	1.15	.375	1.71	.456	2.27	.488	2.83	.498
.04	.016	.60	.226	1.16	.377	1.72	.457	2.28	.489	2.84	.498
.05	.020	.61	.229	1.17	.379	1.73	.458	2.29	.489	2.85	.498
.06	.024	.62	.232	1.18	.381	1.74	.459	2.30	.489	2.86	.498
.07	.028	.63	.236	1.19	.383	1.75	.460	2.31	.490	2.87	.498
.08	.032	.64	.239	1.20	.385	1.76	.461	2.32	.490	2.88	.498
.09	.036	.65	.242	1.21	.387	1.77	.462	2.33	.490	2.89	.498
.10	.040	.66	.245	1.22	.389	1.78	.462	2.34	.490	2.90	.498
.11	.044	.67	.249	1.23	.391	1.79	.463	2.35	.491	2.91	.498
.12	.048	.68	.252	1.24	.393	1.80	.464	2.36	.491	2.92	.498
.13	.052	.69	.255	1.25	.394	1.81	.465	2.37	.491	2.93	.498
.14	.056	.70	.258	1.26	.396	1.82	.466	2.38	.491	2.94	.498
.15	.060	.71	.261	1.27	.398	1.83	.466	2.39	.492	2.95	.498
.16	.064	.72	.264	1.28	.400	1.84	.467	2.40	.492	2.96	.498
.17	.067	.73	.267	1.29	.401	1.85	.468	2.41	.492	2.97	.499
.18	.071	.74	.270	1.30	.403	1.86	.469	2.42	.492	2.98	.499
.19	.075	.75	.273	1.31	.405	1.87	.469	2.43	.492	2.99	.499
.20	.079	.76	.276	1.32	.407	1.88	.470	2.44	.493	3.00	.499
.21	.083	.77	.279	1.33	.408	1.89	.471	2.45	.493	3.01	.499
.22	.087	.78	.282	1.34	.410	1.90	.471	2.46	.493	3.02	.499
.23	.091	.79	.285	1.35	.411	1.91	.472	2.47	.493	3.03	.499
.24	.095	.80	.288	1.36	.413	1.92	.473	2.48	.493	3.04	.499
.25	.099	.81	.291	1.37	.415	1.93	.473	2.49	.494	3.05	.499
.26	.103	.82	.294	1.38	.416	1.94	.474	2.50	.494	3.06	.499
.27	.106	.83	.297	1.39	.418	1.95	.474	2.51	.494	3.07	.499
.28	.110	.84	.300	1.40	.419	1.96	.475	2.52	.494	3.08	.499
.29	.114	.85	.302	1.41	.421	1.97	.476	2.53	.494	3.09	.499
.30	.118	.86	.305	1.42	.422	1.98	.476	2.54	.494	3.10	.499
.31	.122	.87	.308	1.43	.424	1.99	.477	2.55	.495	3.11	.499
.32	.126	.88	.311	1.44	.425	2.00	.477	2.56	.495	3.12	.499
.33	.129	.89	.313	1.45	.426	2.01	.478	2.57	.495	3.13	.499
.34	.133	.90	.316	1.46	.428	2.02	.478	2.58	.495	3.14	.499
.35	.137	.91	.319	1.47	.429	2.03	.479	2.59	.495	3.15	.499
.36	.141	.92	.321	1.48	.431	2.04	.479	2.60	.495	3.16	.499
.37	.144	.93	.324	1.49	.432	2.05	.480	2.61	.495	3.17	.499
.38	.148	.94	.326	1.50	.433	2.06	.480	2.62	.496	3.18	.499
.39	.152	.95	.329	1.51	.434	2.07	.481	2.63	.496	3.19	.499
.40	.155	.96	.331	1.52	.436	2.08	.481	2.64	.496	3.20	.499
.41	.159	.97	.334	1.53	.437	2.09	.482	2.65	.496	3.21	.499
.42	.163	.98	.336	1.54	.438	2.10	.482	2.66	.496	3.22	.499
.43	.166	.99	.339	1.55	.439	2.11	.483	2.67	.496	3.23	.499
.44	.170	1.00	.341	1.56	.441	2.12	.483	2.68	.496	3.24	.499
.45	.174	1.01	.344	1.57	.442	2.13	.483	2.69	.496	3.25	.499
.46	.177	1.02	.346	1.58	.443	2.14	.484	2.70	.497	3.26	.499
.47	.181	1.03	.348	1.59	.444	2.15	.484	2.71	.497	3.27	.499
.48	.184	1.04	.351	1.60	.445	2.16	.485	2.72	.497	3.28	.499
.49	.188	1.05	.353	1.61	.446	2.17	.485	2.73	.497	3.29	.499
.50	.191	1.06	.355	1.62	.447	2.18	.485	2.74	.497	3.30	.500
.51	.195	1.07	.358	1.63	.448	2.19	.486	2.75	.497	3.31	.500
.52	.198	1.08	.360	1.64	.449	2.20	.486	2.76	.497	3.32	.500
.53	.202	1.09	.362	1.65	.451	2.21	.486	2.77	.497	3.33	.500
.54	.205	1.10	.364	1.66	.452	2.22	.487	2.78	.497	3.34	.500
.55	.209	1.11	.367	1.67	.453	2.23	.487	2.79	.497	3.35	.500



Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue uno de los más grandes pensadores matemáticos de la historia. En su *Disquisitiones arithmeticae*, publicado en 1798, reunió los trabajos realizados por sus predecesores y los enriqueció y combinó con su propia obra en un todo unificado. El libro se considera por muchos entendidos como el verdadero comienzo de la teoría de los números.

De sus principales contribuciones a la ciencia, actualmente el método estadístico de los mínimos cuadrados es el más ampliamente utilizado en la astronomía, la biología, la geodesia, la física y las ciencias sociales. A Gauss lo enorgullecían particularmente sus contribuciones al desarrollo del método. A pesar de su aversión por la enseñanza, durante los últimos 20 años de su vida impartió un curso anual sobre el método.

Se ha dicho que Gauss fue la última persona en dominar todo el conocimiento matemático de su época.

EJEMPLO 2 Utilice la tabla de la curva normal para determinar el porcentaje de todos los resultados que caen entre la media y los siguientes valores.

(a) Una desviación estándar por encima de la media

Aquí $z = 1.00$ (el número de desviaciones estándar, escrito como decimal a la centésima más cercana). Consulte la tabla 10. Encuentre 1.00 en la columna z. La entrada en la tabla es .341; por lo tanto, el 34.1% de todos los valores cae entre la media y una desviación estándar por encima de la media.

Esto mismo se puede expresar de otra manera cuando decimos que el área sombreada en la figura 14 representa el 34.1% del área total por debajo de la curva normal.

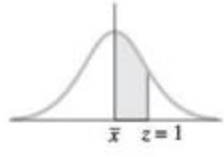


FIGURA 14

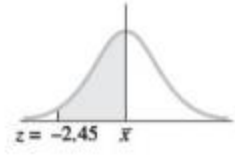


FIGURA 15

(b) 2.45 desviaciones estándar por debajo de la media

Aunque en este caso vamos por *debajo* de la media (a la izquierda), la tabla de la curva normal aún funciona, ya que la curva normal es simétrica respecto de la media. Localice 2.45 en la columna z. Un total de .493, o 49.3%, de todos los valores caen entre la media y 2.45 desviaciones estándar por debajo de ésta. Dicha región se muestra sombreada en la figura 15. ■

EJEMPLO 3 La duración de las llamadas de larga distancia de cierta ciudad se distribuye normalmente con una media de 6 minutos y una desviación estándar de 2 minutos. Si se elige al azar una llamada de los archivos de cierta compañía, ¿cuál es la probabilidad de que haya durado más de 10 minutos?

En este caso, 10 minutos se ubica a dos desviaciones estándar por encima de la media. La probabilidad de que exista tal llamada es igual a la región sombreada en la figura 16.

Si consultamos la tabla 10, el área entre la media y dos desviaciones estándar por encima de ella es .477 ($z = 2.00$). El área total a la derecha de la media es .500. Encuentre el área a partir de $z = 2.00$ hacia la derecha mediante la resta: $.500 - .477 = .023$. Por lo tanto, la probabilidad de que una llamada exceda los 10 minutos es de .023. ■

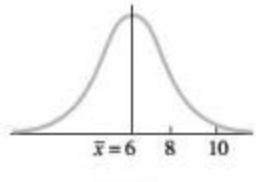


FIGURA 16

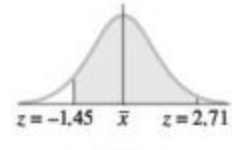


FIGURA 17

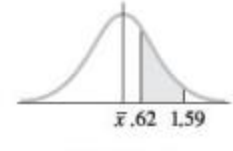


FIGURA 18

EJEMPLO 4 Encuentre las áreas totales indicadas en las regiones sombreadas en las figuras 17 y 18.

Para la figura 17, encuentre el área comprendida entre 1.45 desviaciones estándar por debajo de la media y 2.71 desviaciones estándar por encima de la media. De la tabla 10, $z = 1.45$ da un área de .426, mientras que $z = 2.71$ da .497. El área total es la suma de ambas, o $.426 + .497 = .923$.



Un papel básico para el consumidor Todo comenzó cuando un reportero para asuntos del consumidor de una estación de televisión de la región central de Estados Unidos recibió la queja de que los rollos de papel higiénico de la marca X, fabricados por la compañía Y, no tenían el número de hojas que aseguraban en la envoltura. Se suponía que la marca X tenía 375 hojas, pero se descubrió que tres rollos de esa marca tenían sólo 360, 361 y 363. Los ejecutivos de la compañía Y se sorprendieron. Dijeron que las **posibilidades en contra** de que seis rollos tuviesen menos de 375 hojas eran de 1000 millones contra una. Entonces contaron las hojas y descubrieron que varios rollos de la marca X de hecho tenían 380 hojas cada uno (las máquinas sólo pueden contar las hojas en múltiplos de 10). Los reporteros de televisión hicieron un recuento independiente y sus resultados coincidieron con los de la compañía Y.

Pero, ¿qué sucedió la primera vez? Pues bien, los reporteros en realidad no contaron las hojas, sino que midieron la longitud de los rollos y la dividieron entre la longitud de una hoja. Pueden esperarse variaciones pequeñas en la longitud, que sumadas en todo el rollo producen resultados falsos. Por así decirlo, se había aplicado, por primera vez, el método cuantitativo erróneo.

Esta historia verdadera quizá apunte a la diferencia que existe en probabilidad y estadística entre valores **discretos** y valores **continuos**.

Para determinar el área de la figura 18, consulte nuevamente la tabla 10. De la tabla, $z = .62$ da un área de .232, mientras que $z = 1.59$ da .444. Para obtener el área entre estos dos valores de z, reste las áreas: $.444 - .232 = .212$. ■

Los ejemplos 2, 3 y 4 enfatizan la *equivalencia* de tres cantidades de la siguiente forma.

Significado de las áreas de la curva normal

En una curva normal estándar, las siguientes tres cantidades son equivalentes.

1. **Porcentaje** (de todos los elementos que caen dentro de un intervalo)
2. **Probabilidad** (de que un elemento elegido al azar que caiga dentro de un intervalo)
3. **Área** (por debajo de la curva normal a lo largo de un intervalo)

En qué cantidad debemos pensar depende de la forma en que se formule cada pregunta. Todas ellas son evaluadas mediante los valores de la columna A de la tabla 10.

En general, cuando utilizamos la tabla 10, z es la puntuación z de un elemento x en particular. De la sección anterior, recuerde que la puntuación z se relaciona con la media $\bar{x}$ y con la desviación estándar s de la distribución por medio de la fórmula

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}.$$

Por ejemplo, suponga que una curva normal tiene una media de 220 y una desviación estándar igual a 12. Para determinar el número de desviaciones estándar a la que se encuentra un valor dado respecto de la media, utilice la fórmula anterior. Para el valor 247,

$$z = \frac{247 - 220}{12} = \frac{27}{12} = 2.25,$$

de modo que 247 se encuentra a 2.25 desviaciones estándar por encima de la media. Para 204,

$$z = \frac{204 - 220}{12} = \frac{-16}{12} \approx -1.33,$$

de modo que 204 se encuentra a 1.33 desviaciones estándar por *debajo* de la media. (Sabemos que es por debajo, no por encima de la media, debido a que la puntuación z es negativa, mas no positiva.)

EJEMPLO 5 En cierta área, un conductor promedio recorre una distancia de 1200 millas al mes, con una desviación estándar de 150 millas. Suponga que el número de millas se aproxima mediante una curva normal, y encuentre el porcentaje de todos los automovilistas que recorren las siguientes distancias.

(a) Entre 1200 y 1600 millas por mes

Comience por determinar a cuántas desviaciones estándar por encima de la media se ubican 1600 millas. Aplique la fórmula anterior para z

$$z = \frac{1600 - 1200}{150} = \frac{400}{150} \approx 2.67$$

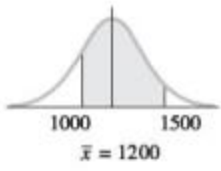


FIGURA 19

De la tabla 10, .496, o 49.6%, de todos los conductores recorren entre 1200 y 1600 millas al mes.

(b) Entre 1000 y 1500 millas al mes

Como se aprecia en la figura 19, hay que encontrar los valores de z tanto para 1000 como para 1500.

$$\text{Para 1000:}\quad z = \frac{1000 - 1200}{150} = \frac{-200}{150} \approx -1.33.$$

$$\text{Para 1500:}\quad z = \frac{1500 - 1200}{150} = \frac{300}{150} = 2.00.$$

De la tabla 10, $z = -1.33$ da un área de .408, mientras que $z = 2.00$ da .477. Esto significa que un área total de .408 + .477 = .855, u 88.5% de todos los automovilistas conducen entre 1000 y 1500 millas al mes. ■

Hasta este momento, los ejemplos han proporcionado un valor y después han requerido que se determine z. El siguiente ejemplo proporciona z y pide el valor correspondiente.

EJEMPLO 6 Cierta distribución normal tiene una media de $\bar{x} = 81.7$ y una desviación estándar de $s = 5.21$. ¿Qué valor de la distribución corresponderá a $z = -1.35$?

Sustituya los valores dados para z, $\bar{x}$ y s en la fórmula y despeje x.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$-1.35 = \frac{x - 81.7}{5.21}$$

$$-1.35(5.21) = \frac{x - 81.7}{5.21}(5.21)$$

$$-7.0335 = x - 81.7$$

$$74.6665 = x.$$

Redondeado a la décima más cercana, el valor que se pide es 74.7. ■

13.5 EJERCICIOS

Nota: Para los problemas en que se pide el cálculo de puntuaciones z o valores A, nuestras respuestas se basan en la tabla 10. Si utiliza una calculadora o un programa de cómputo, a menudo obtendrá una respuesta un poco más precisa.

Determine si las siguientes cantidades de variables son discretas *o* continuas.

1. el número de caras obtenidas en 50 lanzamientos de monedas
2. el número de bebés que nacen en un día en cierto hospital
3. el peso promedio de los bebés nacidos en una semana
4. la altura de los abetos sembrados de seis meses de edad
5. la hora, como aparece en un reloj digital
6. la hora, como aparece en un reloj de manecillas

Medir la masa de las muestras de un mineral *Suponga que 100 estudiantes de geología miden la masa de cierta muestra de un mineral. Debido a errores humanos y a las limitaciones en la fidelidad de la balanza, no todas las lecturas son iguales. Se descubre que los resultados se aproximan a una curva normal, con una media de 86 g y una desviación estándar de 1 g.*

Utilice la simetría de la curva normal y la regla empírica para estimar el número de estudiantes que hacen reportes de lectura dentro de los siguientes rangos.

7. más de 86 g

8. más de 85 g

9. entre 85 y 87 g

10. entre 84 y 87 g

Distribución de puntuaciones del IQ *En un examen estándar para determinar el IQ, la media es 100, con una desviación estándar de 15. Los resultados se aproximan a una curva normal. Suponga que se aplica un examen de IQ a un gran número de personas. Determine el porcentaje de personas cuyos resultados caen dentro de las siguientes categorías.*

11. menos de 100

12. más de 115

13. entre 70 y 130

14. más de 145

Determine el porcentaje del área por debajo de una curva normal entre la media y el número dado de desviaciones estándar de la media. (Observe que el signo positivo indica por encima de la media, mientras que el signo negativo quiere decir por debajo de la media.)

15. 1.50

16. 0.92

17. -1.08

18. -2.25

Determine el porcentaje del área total bajo una curva normal entre los valores dados de z.

19. $z = 1.41$ y $z = 1.83$

20. $z = -1.74$ y $z = -1.14$

21. $z = -3.11$ y $z = 2.06$

22. $z = -1.98$ y $z = 1.02$

Determine un valor de z tal que se cumplan las siguientes condiciones.

23. 10% del área total está a la derecha de z.

24. 4% del área total está a la izquierda de z.

25. 9% del área total está a la izquierda de z.

26. 23% del área total está a la derecha de z.

Vida útil de los focos *Los focos tienen un promedio de vida de 600 h, con una desviación estándar de 50 h. La vida útil de un foco puede aproximarse por medio de una curva normal. El administrador de un almacén compra e instala 10,000 de estos focos. Encuentre el número total de focos de los cuales se puede esperar que duren las siguientes cantidades de tiempo.*

27. al menos 600 h

28. entre 600 y 675 h

29. entre 675 y 740 h

30. entre 490 y 720 h

31. menos de 740 h

32. menos de 510 h

Peso de los pollos *Los pollos de la granja de Ben y Ann Rice tienen un peso promedio de 1850 g con una desviación estándar de 150 g. El peso de los pollos se aproxima mediante una curva normal. Determine el porcentaje de pollos que tienen los siguientes pesos.*

33. más de 1700 g

34. menos de 1800 g

35. entre 1750 y 1900 g

36. entre 1600 y 2000 g

Contenido de las cajas de cereal *Cierta marca de cereal se empaca en cajas de 24 oz. La máquina que llena dichas cajas está programada de forma tal que una caja contiene en promedio 24.5 oz. Las cajas llenadas por la máquina tienen un peso que puede aproximarse mediante una curva normal. ¿Qué fracción de las cajas llenadas por la máquina están por debajo del peso, si la desviación estándar es como sigue?*

37. .5 oz

38. .4 oz

39. .3 oz

40. .2 oz

41. ***Cantidad diaria recomendada de vitaminas*** En nutrición, la cantidad diaria recomendada de vitaminas es un número que determina el gobierno para guiar el consumo diario de vitaminas de los individuos. En realidad, los requerimientos vitamínicos varían enormemente de una persona a otra, pero dichos requerimientos pueden aproximarse mediante una curva normal. Para calcular el consumo diario recomendado, el gobierno determina primero el promedio necesario de vitaminas de las personas de la población, así como su desviación estándar. Entonces, el **consumo diario recomendado** se define como la media más 2.5 veces la desviación estándar. ¿Qué fracción de la población recibirá una cantidad de vitaminas adecuada con este plan?

Cantidad diaria recomendada de vitaminas *Encuentre el consumo diario recomendado de cada una de las vitaminas, si la media necesaria y la desviación estándar muestran la siguiente forma. (Vea el ejercicio 41.)*

42. media necesaria = 1800 unidades;
desviación estándar = 140 unidades

43. media necesaria = 159 unidades;
desviación estándar = 12 unidades

Suponga que las siguientes distribuciones son normales y utilice las áreas que están por debajo de la curva normal de la tabla 10 para determinar las áreas apropiadas.

44. ***Llenado de cartones de leche*** Una máquina que llena cartones de leche de un cuarto de galón está programada para vaciar en promedio 32.2 oz por cartón, con una desviación estándar de 1.2 oz. ¿Cuál es la probabilidad de que un cartón contenga menos de 32 oz de leche?

45. ***Tiempos de coagulación de la sangre*** El tiempo medio de coagulación de la sangre es de 7.47 segundos, con una desviación estándar de 3.6 segundos. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de coagulación de la sangre de cierto individuo sea menor que 7 segundos o mayor que 8 segundos?

46. ***Tamaño de los peces*** El tamaño promedio de un pez capturado en el lago Amotan es de 12.3 pulgadas, con una desviación estándar de 4.1 pulgadas. Determine la probabilidad de que un pez capturado en dicho lago supere las 18 pulgadas.

47. ***Calificación de huevos por tamaño*** Para ser calificado como extra grande, un huevo debe pesar por lo menos 2.2 oz. Si el peso promedio de un huevo es de 1.5 oz, con una desviación estándar de 0.4 oz, ¿cuántos huevos de entre cinco docenas de ellos elegidos al azar esperaría usted que calificaran como extra grandes?

Distribución de calificaciones de estudiantes *Anessa Davis imparte un curso de marketing. Ella usa el siguiente método para asignar a sus estudiantes sus calificaciones correspondientes.*

Calificación	Puntuación en clase
A	Mayor que $\bar{x} + (3/2)s$
B	$\bar{x} + (1/2)s$ a $\bar{x} + (3/2)s$
C	$\bar{x} - (1/2)s$ a $\bar{x} + (1/2)s$
D	$\bar{x} - (3/2)s$ a $\bar{x} - (1/2)s$
F	Por debajo de $\bar{x} - (3/2)s$

Con base en la información de la tabla, ¿qué porcentaje de los estudiantes recibe las siguientes calificaciones?

48. A **49.** B **50.** C

51. ¿Cree usted que este método sería más justo en una clase numerosa de estudiantes de primer año de psicología o en un seminario de cinco estudiantes graduados? ¿Por qué?

Distribución normal de calificaciones de estudiantes *Un profesor aplica un examen a un grupo grande de estudiantes. Los resultados se aproximan por medio de una curva normal. La media es de 75, con una desviación estándar de 5. Al profesor pretende calificar con A al 8% de más alto y con F al 8% más bajo de sus estudiantes. Al siguiente 15% le da una calificación de B, y lo mismo ocurre con la D. El resto de los estudiantes obtiene C. Determine el límite inferior (redondeando al entero más cercano) para cada uno de los siguientes calificaciones. (Una pista: Utilice la tabla 10 para determinar las puntuaciones z a partir de valores conocidos de A.)*

52. A **53.** B

54. C **55.** D

Una distribución normal tiene una media de 76.8 y una desviación estándar de 9.42. Siga el método del ejemplo 6 y determine los datos correspondientes a los siguientes valores de z. Redondee a la décima más cercana.

56. $z = .72$ **57.** $z = 1.44$

58. $z = -2.39$ **59.** $z = -3.87$

60. ¿Qué porcentaje de los resultados cae dentro de 1.25 desviaciones estándar de la media
- **(a)** en cualquier distribución (mediante el teorema de Chebyshev)?
- **(b)** en una distribución normal (con base en la tabla 10)?

61. Explique las diferencias entre las respuestas de las partes (a) y (b) del ejercicio 60.

EXTENSIÓN

Cómo mentir con la estadística

A Benjamín Disraeli, primer ministro de Inglaterra durante el reinado de la reina Victoria, se atribuye la afirmación de que hay "mentiras, mentirotas y estadística". Otras personas han dicho cosas aún más fuertes sobre la estadística. Con frecuencia, esta gran desconfianza en la estadística proviene de la creencia de que "uno puede demostrar cualquier cosa mediante números". Hay que admitir que, en efecto, a menudo surgen distorsiones conscientes o inconscientes en muchas de las estadísticas que se dan a conocer. Un libro que hoy es clásico sobre la tergiversación de estadística es *How to Lie with Statistics*, de Darrel Huff (publicado en 1972). Esta sección reproduce algunos métodos comunes de tergiversación que Huff nos ofrece en su libro.

(continúa)

LA MUESTRA CON SESGO INCLUIDO

Una vez se realizó una encuesta casa por casa para estudiar a los lectores de revistas. La pregunta clave era: ¿qué revistas se leen en su casa? La clasificación y el análisis de los resultados revelaron que a una gran cantidad de personas les gustaba *Harper's*, pero que no muchas leían *True Story*. Ahora bien, los editores contaban con cifras que mostraban con toda claridad que *True Story* tenía una circulación de millones en comparación con los cientos de miles de *Harper's*. "Tal vez preguntamos a las personas equivocadas", se decían los diseñadores de la encuesta. Pero no, las preguntas se habían hecho en toda clase de vecindarios a lo largo y ancho de Estados Unidos. Entonces, la única conclusión razonable era que una buena cantidad de los entrevistados, como se denomina a las personas que dan respuesta a tales preguntas, no dijo la verdad. Lo que la encuesta reveló eran sobre todo las pretensiones de los encuestados.

Al final se descubrió que si uno quiere saber lo que los demás leen, de nada sirve preguntarles. Se puede saber mucho más si uno va a sus casas y les dice que compra revistas viejas. Luego, todo lo que habría que hacer sería contar las *Yale Review* y las *Love Romance* que nos habrían vendido. Por supuesto, ni siquiera esta estratagema tan poco confiable puede indicar lo que la gente lee, sino sólo a lo que ha estado expuesta.

Por lo tanto, la próxima vez que se entere por sus lecturas de que el estadounidense promedio (en estos tiempos se dice una buena cantidad de cosas sobre él, casi todo bastante improbable) se cepilla los dientes 1.02 veces al día —una cifra obtenida al azar, pero que puede ser tan buena como cualquier otra— pregúntese: ¿cómo pudo alguien averiguar tal cosa? ¿Acaso cree usted que una mujer que ha leído en innumerables anuncios que quienes no se cepillan los dientes son transgresores sociales, va a confesarle a un extraño que no se los cepilla con regularidad? La estadística puede ofrecer datos para alguien que quiere saber lo que la gente dice acerca de cepillarse los dientes, pero no dice gran cosa acerca de la frecuencia con que el cepillo efectivamente se aplicó a los incisivos.

EL PROMEDIO BIEN ELEGIDO

Un truco común es utilizar en cada ocasión una clase diferente de promedio, debido a que la palabra "promedio" tiene un significado muy vago. Es un truco que emplean muy comúnmente algunas personas sin saberlo, pero a menudo otras lo emplean para influir en la opinión pública o vender espacios publicitarios. Cuando a uno le hablan del promedio de algo, no puede saber de qué se trata en realidad, a menos que averigüe de cuál de las medidas de tendencia central más comunes se trata: la media, la mediana o la moda.

Ponga a prueba su escepticismo con algunos de los datos encontrados en la "Carta del editor" de la revista *Time*. En ella, menciona de los nuevos suscriptores que "La mediana de sus edades es de 34 años y su ingreso familiar promedio es de $7270 al año". Una encuesta anterior de "antiguos lectores de TIME" arrojaba el resultado de que "la mediana de su edad era de 41 años... Su ingreso promedio, de $9535...". La pregunta lógica que cabe plantearse es por qué, si en ambos casos se da la mediana de las edades, tienen el cuidado de no especificar de qué clase de promedio de los ingresos se trata. ¿Podría ser que se utilizó, en su lugar, la media, por ser más alta, con lo cual se dejaría entrever a los compradores de espacio publicitario que su grupo de lectores es más pudiente?

Tenga cuidado cuando lea diagramas o gráficas, a menudo no ofrecen escala numérica ni unidades, lo cual hace que el diagrama tenga mucho menos significado. Huff ofrece un buen ejemplo de esto:

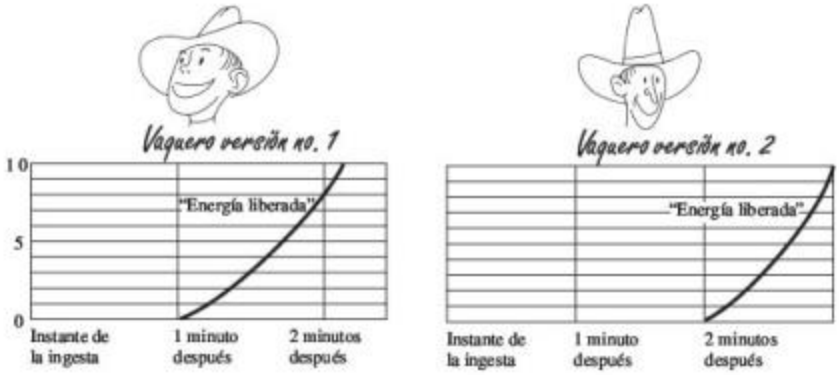
LAS PEQUEÑAS CIFRAS QUE NO SE VEN

Tengo frente a mí las envolturas de dos cajas de Corn Flakes con nueces y pasas. Son versiones ligeramente distintas, como lo indican los testimonios de los consumidores que aparecen en las cajas: una hace referencia a Two-Gun Pete y la otra dice

"Si quieres ser como Hoopy... ¡debes comer como Hoopy!". En ambas aparecen gráficas que muestran ("¡Los científicos han *comprobado* que es verdad!") que estas cajas de Corn Flakes "¡empiezan a darte energía a los 2 minutos!". En un caso, la gráfica, oculta en este mar de signos de admiración, mostraba números a un lado; en el otro caso los números se habían omitido. Esto no tiene gran importancia, ya que no hay la menor explicación de lo que significan estos números. Ambas gráficas muestran una línea marrón que asciende trazando una marcada pendiente ("liberación de energía"), pero una empieza al minuto de comer los Corn Flakes con nueces y pasas, y la otra a los dos minutos. Una de las líneas asciende casi dos veces más rápido que la otra, lo que sugiere que ni siquiera el dibujante pensó que estas gráficas tuvieran algún significado.





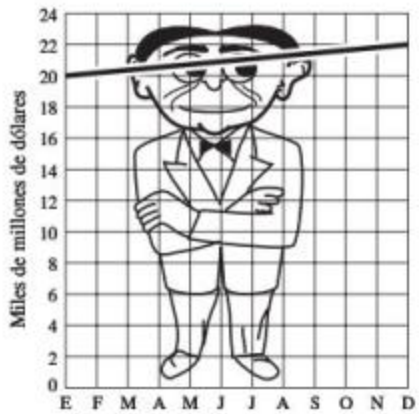


LA GRÁFICA INGENUA



La clase más sencilla de imagen estadística, o gráfica, es la de las líneas. Es muy útil para mostrar tendencias, algo que prácticamente todos están interesados en presentar o conocer o señalar o condenar o pronosticar. Haremos que nuestra gráfica muestre cómo el ingreso nacional aumentó en 10% en un año.

Comencemos con un papel cuadriculado. A lo largo del eje horizontal inferior, escriba los nombres de los meses. Escriba miles de millones de dólares sobre el eje vertical del lado izquierdo. Localice sus puntos y dibuje su línea, y su gráfica se verá como ésta:

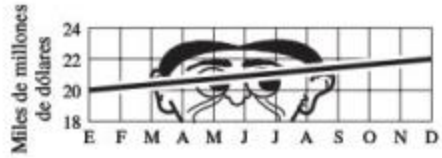


Ya tenemos la gráfica lo suficientemente clara. Muestra lo sucedido durante el año y lo muestra mes tras mes. Quien la revise puede apreciar y entender que la gráfica completa está en proporción y hay una línea cero en la parte inferior para comparación. Su 10% se ve como un 10%... una tendencia ascendente sustancial, aunque tal vez no extraordinaria.

(continúa)

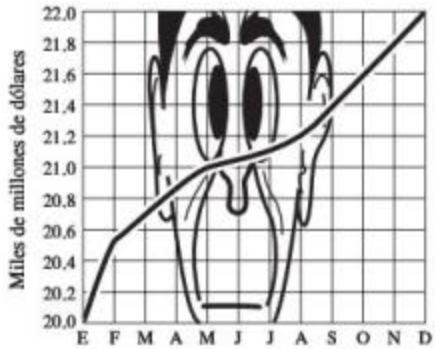
Levanten la mano para que los cuenten De acuerdo con una publicación de la Associated Press (AP) de 1988 (*The Sacramento Union*, 28 de septiembre), la Oficina del Censo de Estados Unidos anticipó que el registro de 1990 costaría más de 3000 millones de dólares (el costo en 1980 fue de 1100 millones). Aun así, habría problemas significativos para encontrar a los empleados necesarios para llevar a cabo el censo y obtener las respuestas de la población. El director del censo, John G. Keane, mencionó una atmósfera de deterioro en el país en cuanto a participar en censos y encuestas, debido a la actitud de los estadounidenses hacia el hecho de ser contados.

Hasta aquí está muy bien, si todo lo que uno quiere es transmitir información. Pero suponga que usted desea ganar en una discusión, impactar al lector, impulsarlo a que actúe, venderle algo. De ser así, esta gráfica carece de gracia. Entonces corte la parte de abajo.



Esto es más apropiado. (Además, ha ahorrado papel, algo que hay que destacar en caso de que alguien a quien le guste profundizar objete sus engañosas gráficas.) Las cifras son las mismas, al igual que la curva. Es la misma gráfica. Nada se ha falsificado, excepto la impresión que da. Lo que un lector apresurado ve ahora es una línea del ingreso nacional que ha ascendido a la mitad superior del papel en 12 meses, y todo porque la mayor parte del diagrama ya no aparece. Está "implícito", como las partes que faltan en los textos de análisis gramatical que le habrá tocado estudiar. Por supuesto, el ojo no "entiende" lo que no está, de modo que un pequeño aumento se ha convertido, visualmente, en uno grande.

Ahora que ya adquirió práctica en el engaño, ¿por qué detenerse? Usted cuenta con un truco adicional que vale por 1000, y hará que su modesto aumento de 10% parezca más sustancial que un 100%. Simplemente cambie la proporción entre los lados y la parte inferior. No existe una regla en contra, y esto le da a su gráfica una forma más hermosa. Todo lo que tiene que hacer es dejar que cada marca del eje vertical equivalga a sólo una décima parte de los dólares mencionados anteriormente.



Es impresionante, ¿o no? Cualquiera que vea la gráfica no puede sino sentir que la prosperidad palpita por las venas de la nación. Es el equivalente sutil de corregir la frase "El ingreso nacional se elevó 10%" para que diga "El incremento fue de un gigantesco 10%". No obstante, resulta infinitamente más eficaz, pues no contiene adjetivos o adverbios que estropeen la ilusión de objetividad. No hay nada de lo que puedan acusarlo.

Suponga ahora que Diana gana dos veces más que Mike. Una forma de mostrar esto es con una gráfica en la que se utilicen dólares de plata para representar el ingreso de cada uno. Si repartiéramos un dólar de plata para Mike y dos para Diana, estaríamos haciendo lo correcto, pero es más común utilizar dólares proporcionales. Lo usual es encontrar un dólar de un tamaño para Mike, y otro del doble de tamaño para Diana. Pero esto es incorrecto, pues el dólar más grande en realidad tiene cuatro veces el área del otro, lo que da la impresión de que Diana gana cuatro veces lo que Mike. Huff da otro ejemplo de esto:

LA IMAGEN UNIDIMENSIONAL

La revista *Newsweek* mostró una vez que "los ancianos estadounidenses viven ahora más años" por medio de una gráfica en la que aparecían dos figuras humanas, una que representaba la esperanza de vida de 68.2 años actual y la otra la esperanza de vida de 34 años de 1879 a 1889. Fue la vieja historia de siempre. Una figura tenía el doble de tamaño que la otra y, por lo tanto, ocho veces la masa o el peso. Esta imagen magnificó los hechos, impregnándolos de sensacionalismo para presentar mejor una historia. Podría considerarse una forma de periodismo amarillista.

Causa y efecto Muchos suponen con frecuencia que sólo porque dos cosas cambian al mismo tiempo una es causa de la otra. El ejemplo clásico es el hecho de que el salario de los maestros y el consumo de licor hayan aumentado a la vez en las últimas décadas. Ninguno de estos fenómenos fue causado por el otro, sino que ambos fueron provocados por el mismo crecimiento subyacente de la prosperidad nacional. Otro caso de razonamiento de causa y efecto errado se encuentra en la afirmación de que ir a la universidad aumenta los ingresos. Véanse los comentarios de Huff a continuación.

> Se han recopilado páginas y páginas de cifras que demuestran el valor en dólares de una educación universitaria, y se han publicado pilas de panfletos para atraer la atención de los estudiantes potenciales con estas cifras y las conclusiones más o menos basadas en ellas. No estoy en contra de la intención. Yo mismo estoy en favor de la educación, sobre todo si incluye algún curso de estadística elemental. Ahora bien, estas cifras demuestran de manera bastante concluyente que las personas que han ido a la universidad ganan más que las personas que no han ido. Por supuesto, las excepciones son numerosas, pero la tendencia es fuerte y clara.
>
> Lo único que está mal es que las cifras y los hechos llevan a una conclusión totalmente injustificada... Lo que estas cifras demuestran es que si usted (o su hijo, o su hija) asiste a la universidad probablemente gane más dinero que si decide ocupar los próximos cuatro años de otra manera. Esta conclusión no justificada tiene como base la suposición, igualmente arbitraria, de que si las personas con instrucción universitaria ganan más dinero, ello se debe a que cursaron estudios universitarios. Realmente, lo único que sabemos es que éstos son los individuos que habrían ganado más dinero aun cuando no hubiesen ido a la universidad. Hay un par de cosas que indican claramente que esto es así. A las universidades asiste un número desproporcionado de dos grupos de estudiantes: los brillantes y los ricos. Los brillantes podrían mostrar un buen potencial para ganar dinero, incluso sin contar estudios universitarios. Y en cuanto a los ricos... pues bien, dinero llama dinero, de varias formas obvias. Pocos hijos de padres ricos se clasifican dentro del nivel de los bajos ingresos, sea que vayan o no a la universidad.

Extrapolación Se refiere a la predicción del futuro únicamente con base en lo que sucedió en el pasado. Sin embargo, es muy raro que el futuro sea justamente igual al pasado; algo será diferente. Uno de los mejores ejemplos de extrapolación incorrecta lo dio Mark Twain:

> En el periodo de ciento setenta y seis años, el bajo Mississippi se ha acortado doscientas cuarenta y dos millas. Ello supone un promedio de una nimiedad de cerca de una milla y un tercio al año. Por lo tanto, cualquier persona ecuánime, que no esté ciega ni sea tonta, podrá percatarse de que, en el antiguo periodo silúrico oolítico, justo se cumplirá un millón de años el próximo noviembre, el bajo Mississippi tenía una longitud de más de un millón trescientas mil millas, y destacaba en el Golfo de México como una caña de pescar. Y por la misma razón, cualquier persona puede ver que, dentro de setecientos cuarenta y dos años, el bajo Mississippi sólo tendrá una milla y tres cuartos, y El Cairo y Nueva Orleans habrán unido sus calles, y se regirán con toda tranquilidad por un solo alcalde y una sola junta de concejales. Hay algo fascinante en la ciencia: uno obtiene una gran cantidad de conjeturas a cambio de una inversión insignificante de hechos.

(continúa)

EJERCICIOS DE EXTENSIÓN

Lectura de gráficas de línea *La estampilla postal noruega que aparece al lado presenta dos gráficas.*



1. ¿Qué representa la línea continua?
2. ¿Se ha incrementado mucho?
3. ¿Qué puede decir acerca de la línea punteada?
4. ¿La gráfica representa un periodo largo o un periodo corto de tiempo?

Cambio del valor de la libra británica *Las ilustraciones siguientes muestran la disminución del valor de la libra británica durante cierto periodo.*



$2.40



$1.72

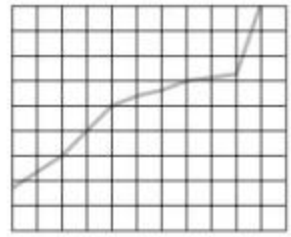
5. Calcule el porcentaje de disminución del valor por medio de la fórmula

$$\text{Porcentaje de disminución} = \frac{\text{valor anterior} - \text{nuevo valor}}{\text{valor anterior}}$$

6. Estimamos que el billete más pequeño que se muestra tiene un área cerca de 50% menor que el más grande. ¿Cree usted que esta proporción es lo suficientemente aproximada?

Descifrar las afirmaciones de la publicidad *A continuación aparecen varias frases publicitarias. Decida qué información adicional podría necesitar usted antes de decidirse a aceptar la oferta.*

7. El 98% de los autos Toyota que alguna vez se vendieron en Estados Unidos aún están circulando.
8. El tabaco para pipas Sir Walter Raleigh es 44% más fresco.
9. Ocho de cada 10 dentistas que respondieron a una encuesta prefirieron la goma de mascar Trident sin azúcar.
10. Un volvo tiene 2/3 la vuelta del radio de un Continental.
11. Ford LTD es tan silencioso como un planeador.
12. La circulación del *Wall Street Journal* se ha incrementado como se muestra en la gráfica siguiente.



Los ejercicios 13 a 16 provienen del libro de Huff. Decida cómo estos ejercicios describen la posibilidad de usar cifras engañosas.

13. ***El monto de los impuestos federales*** Cada uno de los mapas siguientes muestra qué parte del ingreso nacional de Estados Unidos está utilizando y gastando el gobierno federal. El mapa de arriba muestra lo anterior sombreando las áreas de la mayor parte de los estados al *oeste* del Mississippi, para indicar que el gasto federal ha sido igual a los ingresos totales de las personas de dichos estados. En el mapa de abajo se hace lo mismo para los estados que se encuentran al *este* del Mississippi.

Sombreado en oscuro
(Al estilo del oeste)



(Al estilo del este)



Para demostrar que no hacemos trampa, añadimos MD, DE y RI para una buena medida.

14. ***Matrimonios en el cuerpo docente con estudiantes*** Hace mucho, cuando la Universidad Johns Hopkins empezó a admitir estudiantes mujeres, alguien no muy

partidario de la universidad mixta informó de algo realmente impactante: ¡treinta y tres y un tercio por ciento de las mujeres en Hopkins se habían casado con miembros del cuerpo docente de la universidad!

15. *Comparación de tasas de mortalidad* La tasa de mortalidad en la marina durante la guerra Hispanoestadounidense fue de nueve por millar. Para los civiles de la ciudad de Nueva York, esta cifra durante el mismo periodo fue de 16 por millar. Poco después, los reclutadores de la marina utilizaron estas cifras para demostrar que era más seguro estar dentro de la marina que fuera de ella.

16. *Casos reportados de influenza y de neumonía* Si usted viese las últimas cifras disponibles sobre la influenza y la neumonía, podría llegar a la extraña conclusión de que estas enfermedades se localizan particularmente en tres estados del sur de Estados Unidos, los cuales cuentan con cerca del 80% de los casos informados.

Cuestionamiento de lo razonable de las muestras

Cuando se selecciona la muestra de una población, es importante decidir si ésta es razonablemente representativa de la población completa. Por ejemplo, una muestra de la población general que sólo tiene 20% *de mujeres parecería sospechosa. Lo mismo puede decirse de un cuestionario que preguntase: "¿Le gusta responder cuestionarios?"*

En cada ejercicio, elija la opción que dé la muestra más representativa. (Las técnicas de muestreo son una rama importante de la inferencia estadística.*)*

17. Una fábrica tiene 10% de empleados directivos, 30% de empleados de oficina y 60% de trabajadores en la línea de ensamble. Para analizar cómo repartir los lugares de estacionamiento se tomó una muestra de 50.

A. 4 directivos, 21 de oficina, 25 trabajadores de la línea de ensamble

B. 6 directivos, 15 de oficina, 29 trabajadores de la línea de ensamble

C. 8 directivos, 9 de oficina, 33 trabajadores de la línea de ensamble

18. Una universidad tiene 35% de alumnos de primer año, 28% de segundo año, 21% de tercer año y 16% de último año. Se selecciona una muestra de 80 a fin de analizar métodos para elegir a los miembros de los consejos de estudiantes.

A. 22 de primer año, 22 de segundo año, 24 de tercer año, 12 de último año

B. 24 de primer año, 20 de segundo año, 22 de tercer año, 14 de último año

C. 28 de primer año, 23 de segundo año, 16 de tercer año, 13 de último año

19. Una compañía de cómputo tiene plantas en Boca Ratón, Jacksonville y Tampa. La planta de Boca Ratón produce 42% de todos los productos de la compañía, mientras que Jacksonville y Tampa producen 27% y 31%, respectivamente. Se selecciona una muestra de 120 partes para pruebas de calidad.

A. 38 de Boca Ratón, 39 de Jacksonville, 43 de Tampa

B. 43 de Boca Ratón, 37 de Jacksonville, 40 de Tampa

C. 50 de Boca Ratón, 31 de Jacksonville, 39 de Tampa

20. En un complejo turístico estadounidense, el 56% de todos los huéspedes proviene del noreste, 29% de la región central del país y 15% de Texas. Se selecciona una muestra de 75 huéspedes para discutir el menú de la comida.

A. 41 del noreste, 21 de la región central, 13 de Texas

B. 45 del noreste, 18 de la región central, 12 de Texas

C. 47 del noreste, 20 de la región central, 8 de Texas

Utilice la información suministrada en los siguientes problemas y resuelva para las variables dadas.

21. *Categorías de empleos en una agencia de seguros* Una agencia de seguros tiene 7 gerentes, 25 agentes y 18 empleados de oficina. Se selecciona una muestra de 10.

(a) Sea m el número de gerentes en la muestra, a el número de agentes y c el número de empleados de oficina. Determine m, a y c, si

$$c = m + 2$$
$$a = 2c.$$

(b) Para verificar que su respuesta es razonable, calcule los números de integrantes del personal que *deberían estar* en la muestra, si todos los grupos están representados de manera proporcional.

22. *Categorías en el cuerpo docente de una universidad pequeña* Una universidad pequeña tiene 12 decanos, 24 profesores titulares, 39 profesores adjuntos y 45 profesores auxiliares. Se elige una muestra de 20 empleados para analizar quién será el orador en la graduación.

(a) Sea d el número de decanos de la muestra, f el número de profesores titulares, a el número de profesores adjuntos y s el número de profesores auxiliares. Encuentre d, f, a y s, si

$$f = 2d$$
$$a = f + d + 1$$
$$a = s.$$

(*Una pista:* Hay 2 decanos.)

(b) Para verificar que su respuesta es razonable, calcule el número de cada tipo de empleado que *debería* estar en la muestra, si todos los grupos están representados en forma proporcional.

13.6 Regresión y correlación

Una rama muy importante de la estadística inferencial, conocida como **análisis de regresión**, se utiliza para comparar cantidades o variables, para encontrar las relaciones que existen entre ellas y para formular estas relaciones de manera útil. Por ejemplo, suponga que un sociólogo reúne datos de unos cuantos (digamos, 10) residentes de un pequeño pueblo en un país remoto para darse una idea de cómo se relaciona el ingreso anual con la edad en ese pueblo. Los datos se presentan aquí, en la tabla 11.

TABLA 11 Edad contra ingreso

Residente	Edad	Ingreso anual
A	19	2150
B	23	2550
C	27	3250
D	31	3150
E	36	4250
F	40	4200
G	44	4350
H	49	5000
I	52	4950
J	54	5650

El primer paso para analizar estos datos es trazar la gráfica de los resultados, como se aprecia en el **diagrama de dispersión** de la figura 20. (Las calculadoras gráficas modernas pueden trazar estos diagramas.)

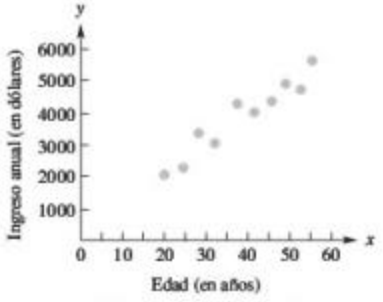
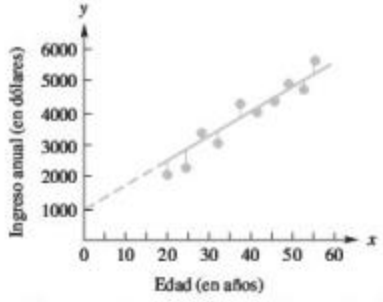


Diagrama de dispersión

FIGURA 20



Una recta de regresión tentativa estimada

FIGURA 21

Una vez que se ha trazado un diagrama de dispersión, podemos dibujar la curva que mejor se ajuste al patrón que presentan los puntos de la muestra. Esta curva puede adoptar una de muchas formas características, dependiendo de cómo estén relacionadas las cantidades de que se trata. Nos gustaría elaborar una gráfica de todos los puntos de la población para las cantidades relacionadas, pero sólo tenemos disponible una muestra de esos puntos, de modo que la curva que mejor representa la muestra se conoce como **curva estimada de regresión** (o simplemente curva de regresión). Si los puntos en el diagrama de dispersión, como en el ejemplo anterior, parecen extenderse en línea recta, se da por sentado que la relación es lineal, y la recta que mejor representa los puntos de datos se llama **recta de regresión estimada** (o simplemente recta de regresión).

Sea x que denota la edad y y el ingreso en los datos representados en la tabla 11, y suponiendo que la curva que mejor representa el conjunto es una recta, entonces la ecuación de esa línea adquirirá la forma

$$y = ax + b,$$

donde a es la pendiente de la línea y b es la ordenada de la intersección con el eje (el valor de y en el que la línea, si se extiende, intersecaría al eje y).

Para identificar por completo la línea de regresión estimada, debemos encontrar los valores de los "coeficientes de regresión" a y b, los cuales exigen ciertos cálculos. En la figura 21 se dibujó una recta tentativa en el diagrama de dispersión.

Por cada valor x en el conjunto de datos, el correspondiente valor de y, por lo regular, difiere del valor que tendría si el punto estuviese exactamente sobre la línea. Estas diferencias se aprecian en la figura por segmentos verticales. Elegir otra recta haría que algunas de estas diferencias fueran más grandes y otras más pequeñas. El procedimiento común es elegir la línea en la que la suma de los cuadrados de todas estas diferencias sea mínima. Esto se denomina **método de mínimos cuadrados**, y a la línea resultante se le llama **línea de mínimos cuadrados**.



Francis Galton (1822-1911) aprendió a leer a los tres años de edad, estuvo interesado en las matemáticas y las máquinas, pero en el Trinity College, en Cambridge, fue un estudiante de matemáticas común y corriente. Después de varios años de realizar viajes de ocio, comenzó a interesarse en los métodos de investigación para pronosticar el clima. Fue durantes esta indagación sobre el clima que Galton concibió las primeras nociones intuitivas sobre correlación y regresión y planteó el problema de la regresión múltiple.

La obra estadística clave de Galton es *Natural Inheritance*, en la que desarrolla sus ideas sobre le regresión y la correlación. Descubrió el coeficiente de correlación mientras ponderaba el esquema de Alphonse Bertillon para clasificar a los delincuentes según sus características físicas. La obra de Galton fue una contribución fundamental para los métodos estadísticos.

En la ecuación de la línea de mínimos cuadrados, la variable y' puede emplearse para distinguir los valores *pronosticados* (mismos que darían puntos sobre la línea de mínimos cuadrados) de los valores *observados* y (los que se dan en el conjunto de datos).

El criterio de los mínimos cuadrados mencionado arriba conduce a valores específicos de a y b. No proporcionaremos los detalles, pues implican cálculo diferencial, pero los resultados se dan aquí. (Σ, la letra griega *sigma*, representa la suma al igual que en secciones anteriores.)

Fórmulas de los coeficientes de regresión

La **línea de mínimos cuadrados** $y' = ax + b$ que proporciona la mejor representación del conjunto de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ tiene

$$a = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{\Sigma y - a(\Sigma x)}{n}.$$

EJEMPLO 1 Determine la ecuación de la línea de mínimos cuadrados para los datos de edad e ingreso proporcionados anteriormente. Trace la gráfica de la línea.

Inicie con las columnas de la izquierda en la siguiente tabla (las cuales sólo repiten los datos originales). Luego, encuentre los productos de $x \cdot y$ y los cuadrados de x^2.

x	y	$x \cdot y$	x^2
19	2150	40,850	361
23	2550	58,650	529
27	3250	87,750	729
31	3150	97,650	961
36	4250	153,000	1296
40	4200	168,000	1600
44	4350	191,400	1936
49	5000	245,000	2401
52	4950	257,400	2704
54	5650	305,100	2916
Sumas: 375	39,500	1,604,800	15,433

Con base en la tabla, $\Sigma x = 375$, $\Sigma y = 39{,}500$, $\Sigma xy = 1{,}604{,}800$ y $\Sigma x^2 = 15{,}433$. También, $n = 10$, ya que hay 10 pares de valores. Ahora encuentre a con la fórmula dada anteriormente.

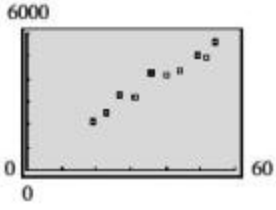
$$a = \frac{10(1{,}604{,}800) - 375(39{,}500)}{10(15{,}433) - (375)^2} = \frac{1{,}235{,}500}{13{,}705} \approx 90.15$$

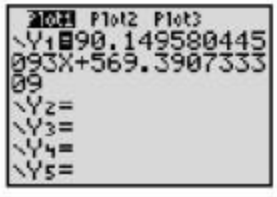
Por último, utilice este valor de a para encontrar b.

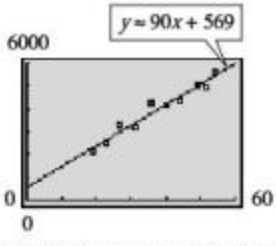
$$b = \frac{39{,}500 - 90.15(375)}{10} \approx 569.4$$

La ecuación de la línea de mínimos cuadrados (con coeficiente redondeados a números enteros) es

$$y' = 90x + 569.$$

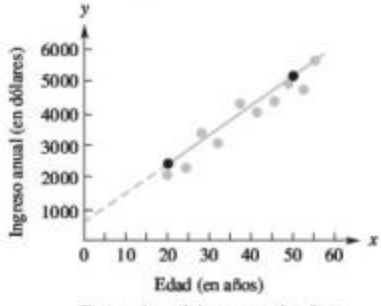






La información de la figura 22 y el análisis que la acompaña se confirma en estas pantallas.

Si decidimos que $x = 20$ en esta ecuación, se obtiene $y' = 2369$, y $x = 50$ implica $y' = 5069$. Los dos puntos (20, 2369) y (50, 5069) se utilizan para trazar la gráfica de la línea de regresión de la figura 22. Observe que las coordenadas de la intersección (0, 569) también corresponden a la línea extendida



Recta de mínimos cuadrados

FIGURA 22

Para encontrar los coeficientes de regresión, se recomienda usar una computadora o una calculadora científica, estadística o de gráficas. (Vea las notas al margen.) Así es como pueden evitarse cálculos tediosos como en el ejemplo 1, y la línea de regresión se produce de manera automática.

EJEMPLO 2 Utilice el resultado del ejemplo 1 para predecir el ingreso de un residente de 35 años de edad de un pueblo.

Emplee la ecuación $y' = 90x + 569$ y reemplace x con 35.

$$y' = 90(35) + 569 = 3719$$

Con base en los datos anteriores, una persona de 35 años de edad ganaría alrededor de $3719 por año.

Correlación Una vez que se ha encontrado una ecuación para la recta más representativa (la línea de mínimos cuadrados), es razonable preguntarse: "¿Qué tan buena es esta línea para la predicción?" Si los puntos ya observados se aproximan mucho a la línea, entonces puede esperarse que también lo hagan los pares futuros. Si los puntos están muy dispersos incluso en la línea "que mejor los representa", entonces las predicciones probablemente no serán muy precisas. En general, cuanto más próximos estén los puntos *muestrales* a la línea de mínimos cuadrados, más probable será que la *población* completa de puntos (x, y) realmente forme una línea, esto es, que x y y realmente estén relacionadas en forma lineal. De igual manera, cuanto mejor se ajuste, más confianza podemos tener de que nuestra línea de mínimos cuadrados (con base en la muestra) sea un buen medio para estimar la verdadera línea de la población.

Una medida común de la fuerza de la relación lineal en la muestra se denomina **coeficiente de correlación muestral** (o simplemente, coeficiente de correlación), y se denota por r. Se calcula a partir de los datos muestrales de acuerdo con la fórmula siguiente.

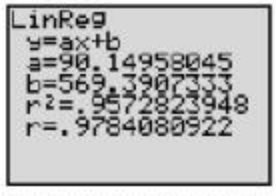
Fórmula para el coeficiente de correlación

En regresión lineal, la fuerza de la relación lineal se mide por medio del coeficiente de correlación

$$r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}.$$

El valor de r siempre está entre -1 y 1, o puede ser igual a -1 o a 1. Los valores exactamente iguales a 1 o -1 indican que la línea de mínimos cuadrados cruza exactamente todos los puntos de datos. Si r se acerca a 1 o -1, pero no es exactamente igual, entonces la línea está "cerca" de ajustarse a todas las puntuaciones de los datos, y decimos que la correlación entre x y y es "fuerte". Si r es igual a cero (0), no hay una correlación lineal, o la correlación es débil. Esto significaría que los puntos son un conglomerado totalmente desordenado. O puede ser que los puntos formen un patrón ordenado, pero no lineal. (En el ejemplo 3 que sigue se verá más sobre este caso.) Si r no está cerca de cero (0) ni cerca de 1 o -1, podríamos decir que la correlación lineal es "moderada".

Un valor positivo de r indica una línea de regresión con pendiente positiva, en cuyo caso decimos que la relación lineal entre x y y es directa; cuando x aumenta, y también aumenta. Un valor negativo de r significa que la línea tiene pendiente negativa, de modo que hay una relación inversa entre x y y: cuando x aumenta, y disminuye.



Aquí aparecen la pendiente a y la intersección b con el eje y de la ecuación de regresión, junto con el coeficiente de regresión, r y r^2. Compare con los ejemplos 1 y 3.

EJEMPLO 3 Encuentre r para los datos de edad e ingreso de la tabla 11.

Casi todos los valores necesarios para encontrar r se calcularon en el ejemplo 1.

$$n = 10 \qquad \Sigma x = 375$$
$$\Sigma y = 39{,}500 \qquad \Sigma xy = 1{,}604{,}800$$
$$\Sigma x^2 = 15{,}433$$

El único valor que falta es Σy^2. Si cada y se eleva al cuadrado en los datos originales y se suman estos cuadrados, se obtiene

$$\Sigma y^2 = 167{,}660{,}000.$$

Ahora, utilice la fórmula para encontrar r.

$$r = .98 \text{ (a dos decimales)}$$

Este valor de r cercano a 1 muestra que la edad y el ingreso en este pueblo están muy correlacionados. El hecho de que r sea positivo indica que la relación lineal es directa; cuando la edad aumenta, el ingreso también lo hace. ■

Como ya se mencionó, las curvas de mínimos cuadrados no siempre son líneas. Si un diagrama de dispersión revela que las cantidades representadas por los datos pueden no estar relacionadas linealmente, entonces puede buscarse una curva de mejor representación de algún otro tipo. Por ejemplo, para cualquier conjunto de pares ordenados, la calculadora de gráficas TI-83 Plus calculará curvas de mejor representación como las que se muestran en la tabla 12 (muchas de las cuales se examinaron en un capítulo anterior de este texto). Observe que un tipo común de relación en la naturaleza, la ley de los cuadrados inversos, se incluiría en las funciones de potencias (con $b = -2$).

TABLA 12 Opciones de ajuste de curvas en la TI-83 Plus

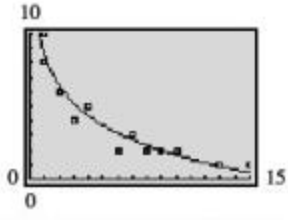
Tipo de curva	Ecuación
Lineal	$y = ax + b$
Cuadrática	$y = ax^2 + bx + c$
Cúbica	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Cuártica	$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
Logarítmica	$y = a + b \ln x$
Exponencial	$y = a \cdot b^x$
Potencia	$y = a \cdot x^b$

La calculadora también proporciona los coeficientes de correlación para la mayoría de los tipos de curvas de regresión, por lo que es fácil probar diferentes tipos de curvas para ver cuál se ajustará mejor a los datos muestrales. Los cálculos de los diferentes tipos de coeficientes son más complicados para las curvas no lineales, por lo que no mostraremos aquí esas fórmulas. Para el ejemplo 4, usaremos la TI-83 Plus.

EJEMPLO 4 Encuentre una curva razonable que se ajuste a los siguientes datos, los cuales relacionan el tiempo que los empleados han trabajado con el tiempo que les toma ensamblar cierta pieza.

Tiempo de trabajo, x (en semanas)	1	2	4	7	9	10	1	3	6	13	15	8
Tiempo para una tarea, y (en minutos)	8	6	5	3	2	2	10	4	2	1	1	2

El diagrama de dispersión se muestra en la figura 23. La relación probablemente no sea lineal. Intentamos cuatro posibilidades, como se aprecia en la tabla 13.



Ésta es una pantalla generada con calculadora que corresponde a la figura 24. En ella se utilizan los datos de la tabla 13 y la curva logarítmica correspondiente.

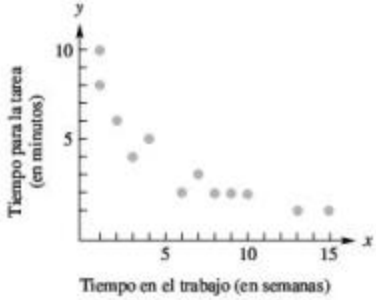
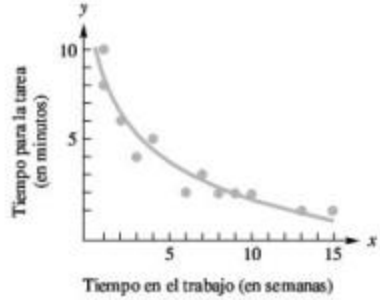


Diagrama de dispersión

FIGURA 23

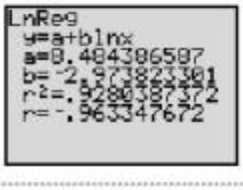


Curva de regresión estimada

FIGURA 24

TABLA 13 Tiempo de trabajo contra tiempo para una tarea

Tipo de curva	Coeficiente de correlación, r	a	b
Lineal	−.857	−.536	7.360
Logarítmica	−.963	8.484	−2.974
Exponencial	−.954	8.297	.855
Potencia	−.958	9.970	−.775



Éstos son los valores de a, b, r^2 y r, usando la ecuación $y = a + b \ln x$.

Los valores negativos de r obtenidos aquí verifican la naturaleza inversa de la relación (que también era clara en el diagrama de dispersión). Los cuatro tipos de curvas proporcionan una buena correlación (r cercano a -1). Pero, aparentemente, la mejor representación la da la curva logarítmica ($r = -.963$). En concreto, la mejor de todas las curvas logarítmicas es

$$y' = 8.484 - 2.974 \ln x.$$

En la figura 24 aparece la gráfica de esta curva superpuesta al diagrama de dispersión. ■

13.6 EJERCICIOS

Correlación entre fertilizante y tamaño de la espiga de maíz *En un estudio para encontrar la relación lineal entre la longitud (en decímetros) de una espiga de maíz (y) y la cantidad (en toneladas por acre) del fertilizante utilizado (x), se recabaron los siguientes datos.*

$$n = 10 \qquad \Sigma xy = 75$$
$$\Sigma x = 30 \qquad \Sigma x^2 = 100$$
$$\Sigma y = 24 \qquad \Sigma y^2 = 80$$

1. Encuentre una ecuación para la línea de mínimos cuadrados.
2. Encuentre el coeficiente de correlación.
3. Si se utilizan 3 toneladas de fertilizante por acre, ¿cuál sería la longitud (en decímetros) que pronosticaría la ecuación de regresión para una espiga de maíz?

Correlación entre grados Celsius y Fahrenheit *En un experimento para encontrar la relación entre las temperaturas de la escala Celsius (y) con los de la escala Fahrenheit (x), un estudiante obtuvo los siguientes resultados.*

$$n = 5 \qquad \Sigma xy = 28{,}050$$
$$\Sigma x = 376 \qquad \Sigma x^2 = 62{,}522$$
$$\Sigma y = 120 \qquad \Sigma y^2 = 13{,}450$$

4. Encuentre una ecuación para la línea de mínimos cuadrados.
5. Encuentre la lectura en la escala Celsius que corresponda a una lectura de 120° Fahrenheit, usando la ecuación del ejercicio 4.
6. Encuentre el coeficiente de correlación.

Correlación entre la estatura y el peso de hombres adultos *Una muestra de* 10 *hombres adultos arrojó la siguiente información acerca de sus alturas y pesos.*

Altura (en pulgadas) (x)	62	62	63	65	66
Peso (en libras) (y)	120	140	130	150	142
Altura (en pulgadas) (x)	67	68	68	70	72
Peso (en libras) (y)	130	135	175	149	168

7. Encuentre la ecuación para la línea de mínimos cuadrados.
8. Usando los resultados del ejercicio 7, pronostique el peso de un hombre cuya altura es de 60 pulgadas.
9. ¿Cuál será el peso pronosticado para un hombre cuya altura es de 70 pulgadas?
10. Calcule el coeficiente de correlación.

Correlación entre habilidad de lectura y el IQ *La siguiente tabla proporciona las puntuaciones en habilidad de lectura y los IQ (cociente intelectual) de un grupo de 10 individuos.*

Lectura (x)	83	76	75	85	74
IQ (y)	120	104	98	115	87
Lectura (x)	90	75	78	95	80
IQ (y)	127	90	110	134	119

11. Trace un diagrama de dispersión con la lectura en el eje horizontal.
12. Encuentre la ecuación de una recta de regresión.
13. Utilice la ecuación de la recta de regresión para estimar el IQ de una persona cuya puntuación de lectura es de 65.

Correlación de ventas anuales de una compañía *A continuación se muestran las ventas, en miles de dólares, de cierta compañía.*

Año (x)	0	1	2	3	4	5
Ventas (y)	48	59	66	75	80	90

14. Encuentre la ecuación de mínimos cuadrados.
15. Encuentre el coeficiente de correlación.
16. Si la tendencia lineal mostrada por estos datos continuase después del año 5, ¿qué monto de ventas pronosticaría para el año 7?

Comparación de las edades de perros y humanos *Con frecuencia se dice que si multiplicamos la edad de un perro por* 7 *obtendremos la edad humana equivalente. Una correspondencia más precisa (para los primeros* 14 *años) se muestra en esta tabla, tomada de* The Olds Farmer's Almanac, *edición* 2000, *p. 180.*

Edad del perro (x)	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7
Edad humana equivalente (y)	10	15	24	28	32	46	40	44
Edad del perro (x)	8	9	10	11	12	13	14	
Edad humana equivalente (y)	48	52	56	60	64	68	70.5	

17. Trace un diagrama de dispersión para los datos proporcionados.
18. Determine la ecuación de la recta de regresión, y coloque la gráfica de esta recta sobre el diagrama de dispersión del ejercicio 17.
19. Describa en dónde los puntos de los datos muestran la diferencia más pronunciada con la recta de regresión, y explique por qué ocurre esto.

20. Calcule el coeficiente de correlación..

Estadísticas en la migración de la población hacia el Oeste *La siguiente información (tomada de* The World Almanac and Book of Facts 2000, *p. 532) muestra el incremento en el porcentaje de población de Estados Unidos en el Oeste desde la época de la Fiebre del Oro.*

Año del censo	Tiempo en décadas a partir de 1850 (x)	Porcentaje en el Oeste (y)
1850	0	.8%
1870	2	2.6
1890	4	5.0
1910	6	7.7
1930	8	10.0
1950	10	13.3
1970	12	17.1
1990	14	21.2

21. Tomando a x y y como se indica en la tabla, determine la recta de regresión.

22. Calcule el coeficiente de correlación.

23. Describa el grado de correlación (por ejemplo, si es fuerte, moderada o débil).

24. ¿Cuál sería el valor de x en el año 2010? Utilice la recta de regresión para pronosticar el porcentaje poblacional en el Oeste para ese año.

Comparación de la población estatal con los salarios de los gobernadores *La tabla siguiente muestra los 10 estados más poblados de Estados Unidos (de acuerdo con el censo de 2000) y los salarios de sus gobernadores (para octubre de 2001). (Fuente:* The World Almanac and Book of Facts 2002, *p. 380 y p. 99.) Utilice la tabla para los ejercicios 25 a 28.*

Rango	Estado	Población, en miles (x)	Salario del gobernador, en miles de dólares (y)
1	California	33,872	175
2	Texas	20,852	115
3	Nueva York	18,976	179
4	Florida	15,982	123
5	Illinois	12,419	151
6	Pensilvania	12,281	105
7	Ohio	11,353	126
8	Michigan	9938	177
9	Nueva Jersey	8414	83
10	Georgia	8186	123

25. Determine la ecuación de la recta de regresión.

26. Calcule el coeficiente de correlación.

27. Describa el grado de correlación (por ejemplo, si es fuerte, moderada o débil).

28. ¿Qué salario para el gobernador pronosticaría este modelo lineal para un estado con una población de 15 millones de ciudadanos?

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

Cómo combinar conjuntos de datos

Divida a su clase en dos grupos, uno que conste de mujeres y el otro de hombres. Cada uno debe elegir a una persona que registre y escriba los resultados del grupo. Cada equipo debe realizar las tareas siguientes. (Debe idear método para que los miembros del grupo puedan proporcionar datos de manera anónima.)

1. Registre el número de miembros (n) en su grupo.
2. Recopile la información del tamaño de los zapatos (x) y las estaturas en pulgadas (y) de todos los miembros del grupo.
3. Calcule la media, la mediana y la(s) moda(s), en caso de haberlas, para cada uno de los dos conjuntos de datos.
4. Calcule la desviación estándar de cada uno de los dos conjuntos de datos.
5. Elabore un diagrama de caja para cada uno de los dos conjuntos de datos.
6. Trace un diagrama de dispersión para cada recopilación de datos x-y.
7. Encuentre la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados ($y' = ax + b$).
8. Evalúe el coeficiente de correlación (r).
9. Evalúe la fuerza de la relación lineal entre el tamaño de los zapatos y la altura para su grupo.

Ahora, junte a ambos grupos otra vez. Analice y realice las siguientes tareas.

1. Si es posible, calcule la media de las alturas del grupo combinado, usando sólo las medias de los dos grupos individuales y el número de miembros en cada uno de los dos grupos. Si esto no fuera posible, explique por qué y describa cómo *podría* encontrar la media combinada. Obtenga la media combinada.
2. Haga lo mismo que en la parte 1 anterior para la mediana de las alturas del grupo combinado.
3. Haga lo mismo para la moda de las alturas del grupo combinado.
4. Llene la tabla siguiente, referente a las estaturas, y analice cualquier relación aparente entre las estadísticas calculadas.

	Número de miembros	Media	Mediana	Moda
Mujeres				
Hombres				
Ambos				

EXAMEN DEL CAPÍTULO 13

Tendencias estadísticas de los trabajadores agrícolas y las granjas de Estados Unidos *Consulte las gráficas de barras y la gráfica lineal que se muestra aquí para los ejercicios 1 a 4.*

Reducción del número de trabajadores agrícolas, 1820-1994*

Fuente: Departamento de Agricultura de Estados Unidos, Servicio de Investigación Económica.

De los aproximadamente 2.9 millones de trabajadores en Estados Unidos en 1820, 71.8%, o alrededor de 2.1 millones, se empleaban en tareas agrícolas. El porcentaje de trabajadores agrícolas en Estados Unidos ha disminuido de manera drástica a lo largo del siglo, al grado que para 1994 sólo 2.5% de todos los trabajadores se emplearon en tareas agrícolas.

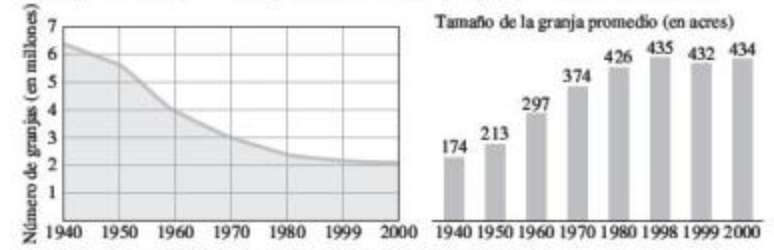


*Las cifras no reflejan datos posteriores a 1994. Los trabajadores en 1994 tenían de 15 años en adelante; el total de trabajadores de 1900 a 1960 eran miembros experimentados de la fuerza civil de 14 años en adelante; el total de trabajadores de 1820 a 1880 fueron trabajadores remunerados de 10 años en adelante.

Granjas de Estados Unidos, 1940-2000

Fuente: Servicio Nacional de Estadísticas Agrícolas, Departamento de Agricultura de Estados Unidos.

A partir de 1940, el número de granjas en Estados Unidos ha mostrado una disminución pronunciada, mientras que el tamaño de la granja promedio ha aumentado.



Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2002, p. 130.

1. De la información anterior, ¿cuándo diría usted que la mitad de los trabajadores de Estados Unidos trabajan en tareas agrícolas?
2. ¿Es cierto que había alrededor de 4 veces más trabajadores agrícolas en 1840 que en 1940? Explique su respuesta.
3. ¿Alrededor de cuántas granjas había en 1970?
4. ¿En qué año hubo la mayor cantidad de tierra destinada a la agricultura, 1940 o 2000? ¿Alrededor de cuánto excedió el porcentaje a la cantidad menor?

Contactos de clientes de un representante editorial *aura Griffin Hiller, representante de ventas de una compañía editorial, registró el siguiente número de contactos de clientes que vería durante los 22 días que estuvo de gira durante marzo. Utilice esta información para los ejercicios 5 a 7.*

12	8	15	11	20	18	14	22	13	26	17
19	16	25	19	10	7	18	24	15	30	24

5. Elabore distribuciones de frecuencias agrupadas y de frecuencias relativas. Utilice cinco clases uniformes cuya extensión sea de 5, de las cuales la primera clase tenga un límite inferior de 6. (Redondee las frecuencias relativas a dos decimales.)

6. A partir de la distribución de frecuencias del ejercicio 5, elabore **(a)** un histograma y **(b)** un polígono de frecuencias. Utilice escalas y nombres de categorías apropiados.

7. Para los datos anteriores, ¿cuántas clases uniformes se requerirían, si los límites de la primera clase son 7-9?

En los ejercicios 8 a 11, encuentre las medidas indicadas para la siguiente distribución de frecuencias.

Valor	8	10	12	14	16	18
Frecuencia	3	8	10	8	5	1

8. la media

9. la mediana

10. la moda

11. el rango

12. ***Calificaciones de un examen en una clase de física*** Los siguientes datos son las calificaciones que obtuvieron en un examen los estudiantes de una clase de física. Ordene los datos en un diagrama de tallo y hojas cuyas hojas estén clasificadas.

79	43	65	84	77	70	52	61	80	66
68	48	55	78	71	38	45	64	67	73
77	50	67	91	84	33	49	61	79	72

Utilice el diagrama de tallos y hojas que se muestra a continuación para los ejercicios 13 a 18.

2	3	3	4					
2	6	7	8	9	9			
3	0	1	1	2	3	3	3	4
3	5	6	7	8	8	9		
4	1	2	2	4				
4	5	7	9					
5	2	4						
5	8							
6	0							

Calcule las medidas que se piden en los ejercicios 13 a 17.

13. la mediana

14. la(s) moda(s), si la(s) hay

15. el rango

16. el tercer decil

17. el percentil ochenta y cinco

18. Elabore un diagrama de caja de los datos anteriores, que muestre los valores de las cinco cantidades importantes en la escala numérica.

Calificaciones en un instituto de capacitación *Cierto instituto de capacitación proporciona una prueba estandarizada para un número grande de candidatos de todo el país. Las puntuaciones resultantes forman una distribución normal con una media de* 80 *y una desviación estándar de* 5. *Encuentre el porcentaje de todos los candidatos con las siguientes puntuaciones. (Utilice la regla empírica.)*

19. entre 70 y 90

20. mayor que 95 o menor que 65

21. menor que 75

22. entre 85 y 90

Alturas de abetos *En cierto bosque joven, las alturas de los abetos se distribuyen normalmente con una media de* 5.5 *metros y una desviación estándar de* 2.1 *metros. Si se selecciona al azar un solo árbol, encuentre la probabilidad (al milésimo más cercano) de que su altura caiga dentro de cada uno de los siguientes intervalos.*

23. menos de 6.5 metros

24. entre 6.2 y 9.4 metros

Estadísticas de temporada en la Liga Mayor de Béisbol *Durante la temporada 2001 de la Liga Mayor de Béisbol, la mayoría de los equipos jugaron* 162 *juegos en la temporada regular. Las tablas siguientes proporcionan estadísticas de las tres divisiones de las dos ligas. En cada caso,* n = *número de equipos en la división,* $\bar{x}$ = *número promedio (media) de juegos ganados y* s = *desviación estándar del número de juegos ganados.*

Liga Americana		
División Este	**División Central**	**División Oeste**
$n = 5$ $\bar{x} = 76.4$ $s = 13.9$	$n = 5$ $\bar{x} = 78.0$ $s = 11.8$	$n = 4$ $\bar{x} = 91.5$ $s = 21.0$

Consulte las tablas para los ejercicios 25 a 27.

Liga Nacional		
División Este	**División Central**	**División Oeste**
$n = 5$ $\bar{x} = 80.0$ $s = 8.1$	$n = 6$ $\bar{x} = 78.3$ $s = 14.5$	$n = 5$ $\bar{x} = 78.3$ $s = 14.5$

25. En total, ¿quién tiene el promedio más alto de victorias, los equipos del este, los equipos del centro o los equipos del oeste?

26. En total, ¿en dónde se ubican los equipos más "consistentes" en cuanto al número de victorias, en el este, el centro o el oeste?

27. Encuentre (a la décima más cercana) el número promedio de juegos ganados por los 30 equipos.

Realice lo que se le pide para los valores de parejas de datos que se muestran aquí. (En los ejercicios 29 a 31, proporcione todos los valores calculados hasta dos decimales.)

x	1	4	6	7
y	9	7	8	1

28. Trace un diagrama de dispersión.

29. Encuentre la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados.

30. Utilice la ecuación que obtuvo en el ejercicio 29 para pronosticar y cuando $x = 3$.

31. Encuentre el coeficiente de correlación para los datos proporcionados.

32. Evalúe la fuerza de la relación lineal de los datos anteriores. ¿Cuánta certeza tiene de su evaluación? Explique su respuesta.

33. Relacione los conceptos de *inferencia estadística* y *razonamiento inductivo.*

capítulo

14 Matemáticas del consumidor



Es tan fácil posponer la cuestión del ahorro para el futuro. El retiro puede parecer distante y con frecuencia hay muchas razones para no iniciar un plan de ahorro. ¿Retrasar el inicio de un fondo para el retiro tendrá un efecto importante en la cantidad de dinero que un individuo obtendrá al llegar a los 65 años de edad? Considere dos planes de jubilación. En el plan A, una persona empieza a ahorrar a los 20 años y deposita $2000 en un fondo de retiro cada año, desde los 21 hasta los 30 años. Después de esta edad, no hace más contribuciones. En el plan B, la persona espera hasta los 30 años de edad para empezar a ahorrar y entonces deposita $2000 en el fondo de retiro en cada cumpleaños entre los 31 y los 65 años de edad. Si el fondo de retiro paga 8% de interés, ¿qué plan implicará una mayor cantidad acumulada de dinero? La tabla indica la cantidad de dinero (en dólares) en el fondo para cada plan a distintas edades.

Edad	Plan A	Plan B
20	0	0
25	11,733	0
30	28,973	0
35	42,571	11,733
40	62,551	28,973
45	91,908	54,304
50	135,042	91,524
55	198,422	146,212
60	291,547	226,566
65	428,378	344,634

El plan A da como resultado una acumulación de $428,378, mientras que el plan B genera $344,634. Hacer contribuciones a una edad temprana puede significar una diferencia sustancial. En este capítulo, usted aprenderá acerca del interés compuesto. El interés compuesto durante el tiempo es lo que permite que una cantidad relativamente pequeña, es decir, $20,000 se convierta en cerca de $430,000.

14.1 El valor del dinero en el tiempo

Extensión: Anualidades

14.2 Crédito al consumidor

14.3 La verdad sobre los préstamos

14.4 Compra de una casa

14.5 Inversión

Investigación en grupo: ¿Comprar o rentar?

Examen del capítulo 14

Como miembros de la economía internacional, a casi todos nos llega en ocasiones el deseo de obtener algo para lo que, de momento, no tenemos el dinero suficiente o en lo que no queremos comprometerlo. En tal caso, una opción común consiste en pedir dinero prestado (esto es, "solicitar un *préstamo*") para la compra, con lo que nos endeudamos. Asimismo, algunas veces tenemos más dinero del que necesitamos para ciertos periodos, en cuyo caso podemos prestar nuestro dinero a alguien más. Esto puede consistir en depositar fondos en una simple cuenta de ahorros o bien destinarlo a alguno de los muchos tipos de "inversión" que existen.

En las situaciones mencionadas, pedimos prestado (o nosotros prestamos) algún dinero, por el cual esperamos pagar (o recibir) una remuneración. Las matemáticas utilizadas para calcular la remuneración que corresponde a la cantidad que nos prestan o que prestamos (y la evaluación de ciertos costos relacionados) es lo que se conoce como "matemáticas del consumidor".

Al estudiar este material, usted adquirirá el dominio de algunas herramientas útiles para administrar su dinero, para comparar fuentes alternas de préstamo y para considerar inversiones potenciales.

14.1 El valor del dinero en el tiempo

Para determinar el valor del dinero, no sólo consideramos la cantidad (número de dólares), sino también el punto particular en el tiempo en que se determina dicho valor. Si pedimos prestada una cantidad de dinero ahora, la cantidad que tendremos que pagar más adelante será mayor. Este incremento en el valor se conoce como **interés**. El dinero *aumenta su valor con el tiempo*.

Por otra parte, en términos del número equivalente de bienes y servicios que cierta cantidad de dinero permitirá comprar, por lo regular es mayor ahora que en el futuro. Esta disminución en el valor se conoce como **inflación**. El dinero *pierde valor con el tiempo*. Estos conceptos se resumen dentro de la expresión "el valor del dinero en el tiempo".

Interés La cantidad de un préstamo o de un depósito se conoce como **principal**.* El interés se calcula usualmente como un porcentaje del principal. A este porcentaje se le conoce como **razón de interés** (o **tasa de interés** o simplemente **tasa**). La tasa de interés siempre se considera una tasa anual, a menos que se establezca otra cosa.

Al interés que se calcula sólo sobre el principal se le conoce como **interés simple**. El interés que se calcula sobre el principal más cualquier interés generado previamente se denomina **interés compuesto**. Por lo general, el interés simple se utiliza para préstamos a un año o menos, mientras que el interés compuesto se emplea para préstamos más largos. Los bancos siempre pagan interés compuesto sobre el dinero depositado en ellos.

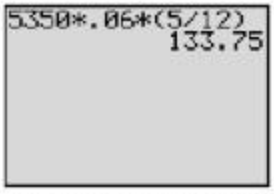
Interés simple El interés simple se calcula de acuerdo con la siguiente fórmula.

Interés simple

Si P = principal, r = tasa de interés anual y t = tiempo (en años), entonces el **interés simple** I está dado por

$$I = Prt$$

*N. del Ed.: También se conoce como *capital* en otras regiones del mundo.



Éste es el cálculo requerido para resolver el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Calcule el interés simple de un préstamo de $5350 a 5 meses al 6%.

Aquí $P = \$5350$, $r = 6\% = .06$ y $t = 5/12$ (ya que 5 meses son 5/12 de un año). El interés es

$$I = Prt = \$5350(.06)\left(\frac{5}{12}\right) = \$133.75. \quad \blacksquare$$

Valor futuro y valor presente En el ejemplo 1, al cabo de los 5 meses, el prestatario tendrá que pagar

$$\text{Principal} + \text{interés} = \$5350 + \$133.75 = \$5483.75.$$

La cantidad total reembolsada a veces se denomina **valor al vencimiento** (o simplemente **valor**) del préstamo. Por lo general nos referimos a ella como **valor futuro**, o la **cantidad futura**, ya que cuando se establece un préstamo, el reembolso ocurrirá en el futuro. Usaremos A para denotar el valor futuro. En este sentido, el principal original, que se denota con P, también puede considerarse como el **valor presente** (o **valor actual**). El valor futuro depende del principal (valor presente) y del interés, como indica la siguiente fórmula.

$$A = P + I = P + Prt = P(1 + rt)$$

Resumimos esta relación en las fórmulas siguientes.



El **rey Hammurabi** trató de mantener las tasas de interés en 20% para la plata y el oro, pero los prestamistas hicieron caso omiso de sus decretos.

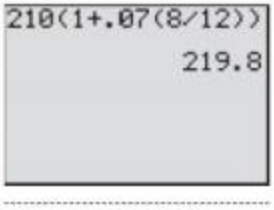
Valores futuro y presente para el interés simple

Si se pide prestado un principal P a un interés simple durante t años a una tasa de interés anual de r, entonces el **valor futuro** del préstamo, designado como A, está dado por

$$A = P(1 + rt).$$

Del mismo modo, el **valor presente**, P, está dado por

$$P = \frac{A}{1 + rt}$$



Éste es el cálculo requerido para resolver el ejemplo 2.

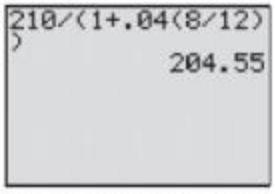
EJEMPLO 2 Alex Ortega obtuvo un préstamo por 210 dólares a interés simple para comprar libros de texto y material escolar. Si la tasa de interés anual es de 7% y debe pagar el préstamo dentro de 8 meses, determine el valor futuro (el valor al vencimiento) del préstamo.

Al aplicar la fórmula del valor futuro para el interés simple,

$$A = P(1 + rt) = \$210\left[1 + .07\left(\frac{8}{12}\right)\right] = \$219.80.$$

Al final de los 8 meses, Alex deberá reembolsar $219.80. $\blacksquare$

EJEMPLO 3 Suponga que a Alex (el del ejemplo 2) se le concede, en lugar de un préstamo, un *plazo* de 8 meses para el pago de $210. Esto es, en lugar de incurrir en intereses durante 8 meses, tendrá que pagar sólo los $210 al final del periodo. Si él tiene dinero extra ahora y puede ganar 4% de interés simple ahorrándolo, ¿qué suma total debe depositar ahora para tener 210 dólares disponibles después de 8 meses?



Este es el cálculo requerido para resolver el ejemplo 3.

Aplicamos la fórmula del valor presente para el interés simple.

$$P = \frac{A}{1 + rt} = \frac{\$210}{1 + (.04)(8/12)} = \$204.55$$

Un depósito de $204.55 ahora, que crece al 4% de interés simple, sumará $210 al cabo de un periodo de 8 meses. ■

Interés compuesto Como ya se mencionó, el interés que se paga sobre la suma del principal más el interés se denomina interés compuesto. Para ver cómo funciona esto, suponga que se depositan $1000 en una cuenta de ahorros que paga una tasa de 4% de interés. Durante el primer año que el dinero está en depósito, la cuenta generaría un interés de

$$I = Prt = \$1000\,(.04)\,(1) = \$40.$$

Esta cantidad de interés se *acredita* (se añade) a la cuenta, de modo que al inicio del segundo año la cuenta tendría la cantidad de

$$\$1000 + \$40 = \$1040.$$

Durante el segundo año, la cuenta generaría un interés de

$$\$1040\,(.04)\,(1) = \$41.60.$$

Al inicio del tercer año, la cuenta tendría la cantidad de

$$\$1040 + \$41.60 = \$1081.60.$$

El interés que se ganó durante el segundo año fue mayor que el obtenido durante el primero. El interés generado durante el primer año se añadió al principal y entonces se utilizó para el cálculo de la cantidad de interés que se pagó durante el segundo año. Así funciona el interés compuesto.

Para generalizar, ahora se desarrollará una fórmula que permita conocer la cantidad en la cuenta en cualquier momento futuro, esto es, el **valor futuro** de la cuenta. En realidad, los intereses devengados pueden acreditarse a una cuenta a intervalos de tiempo diferentes a un año (por lo regular, más a menudo). Por ejemplo, pueden ser semestrales, trimestrales, mensuales o diarios. (La composición diaria es una práctica muy común.) Este intervalo se denomina **periodo de composición** (o simplemente **periodo**). Comencemos por definir lo siguiente.

P = principal original depositado
r = tasa de interés anual
m = número de periodos por año
n = número total de periodos

Durante cada periodo de composición individual, el interés se genera de acuerdo con la fórmula de interés simple y una vez que se añade el interés, el principal empieza a aumentar de un periodo al siguiente. Durante el primer periodo, el interés que se obtiene está dado por

$$\text{Interés} = (\text{Principal})\,(\text{tasa})\,(\text{tiempo})$$

$$= P(r)\left(\frac{1}{m}\right) \qquad \text{Un periodo} = \frac{1}{m}\ \text{año}$$

$$= P\left(\frac{r}{m}\right). \qquad \text{Reescriba } (r)\left(\frac{1}{m}\right) \text{ como } \left(\frac{r}{m}\right).$$

El siguiente artículo muestra cómo una comunidad planifica utilizar el poder del interés compuesto para ayudarse a planificar el futuro. (Informe de noticias © CBS Inc. 1977. Todos los derechos reservados. Transmitido originalmente por la CBS Radio Network como parte de *Hourly News*, por Charles Osgood el 2 de marzo de 1977.)

"Eli Hooker, de Union City, Michigan, no quiere que su comunidad se quede sin recursos cuando llegue el festejo del tricentenario en el año 2076. Hooker, ex presidente del comité local del bicentenario, dice que el año pasado el comité no tenía suficiente dinero. De modo que, para planear con anticipación, le pidió a 42 residentes de Union City 25 dólares a cada uno y depositándolos en un banco local. Al 7% de interés compuesto, el fondo tendría 1 millón de dólares para el año 2076.

"Hooker espera que ese dinero sea suficiente para los desfiles y los fuegos artificiales que exigirá la celebración del tricentenario. Pero no está siendo un patriota totalmente desinteresado con respecto a todo esto: desea que uno de los grandes eventos del 4 de julio de 2076 sea la develación de un monumento a las 42 personas de Union City que hicieron su contribución con 99 años de anticipación."

Por desgracia, ese millón de dólares no tendrá tanto valor como podríamos pensar. Si la comunidad decidiera contratar personal para desfilar con disfraces históricos, en 1976 les habría pagado a $4 la hora. El salario correspondiente para 2076, si suponemos un 7% de inflación anual durante 100 años, sería de unos $3000 por hora.

Entonces, al final del primer periodo, la cuenta tiene

Cantidad al final = cantidad al inicio + interés

$$= P + P\left(\frac{r}{m}\right)$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{m}\right). \qquad \text{Factorice } P \text{ de ambos términos.}$$

Ahora, durante el segundo periodo, el interés que se devenga está dado por

Interés = [Principal] (tasa) (tiempo)

$$= \left[P\left(1 + \frac{r}{m}\right)\right](r)\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{m}\right)\left(\frac{r}{m}\right),$$

de modo que, al final del segundo periodo, la cuenta tiene

Cantidad al final = cantidad al inicio + interés

$$= P\left(1 + \frac{r}{m}\right) + P\left(1 + \frac{r}{m}\right)\left(\frac{r}{m}\right)$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{m}\right)\left[1 + \frac{r}{m}\right] \qquad \text{Factorice } P\left(1 + \frac{r}{m}\right) \text{ de ambos términos.}$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^2.$$

Considere un periodo más, a saber, el tercero. El interés generado es

Interés = [Principal] (tasa) (tiempo)

$$= \left[P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^2\right](r)\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^2\left(\frac{r}{m}\right),$$

de modo que la cuenta culmina el tercer periodo con

Cantidad al final = cantidad inicial + interés

$$= P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^2 + P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^2\left(\frac{r}{m}\right)$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^2\left[1 + \frac{r}{m}\right] \qquad \text{Factorice } P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^2 \text{ de ambos términos.}$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^3.$$

En la tabla 1 se resumen los resultados anteriores. El razonamiento inductivo permite obtener la fila inferior de expresiones para el periodo número n.

TABLA 1 Cantidad compuesta

Número de periodo	Cantidad al inicio	Interés generado durante el periodo	Cantidad final
1	P	$P\left(\frac{r}{m}\right)$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)$
2	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r}{m}\right)$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2$
3	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2\left(\frac{r}{m}\right)$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^3$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n-1}$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n-1}\left(\frac{r}{m}\right)$	$\boldsymbol{P\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}$

La entrada inferior derecha de la tabla proporciona las siguientes fórmulas.

Valores futuro y presente para el interés compuesto

Si P dólares se depositan a una tasa de interés anual de r, compuesto m veces por año, y el dinero se deja en depósito durante un total de n periodos, entonces el **valor futuro**, $\boldsymbol{A}$ (la cantidad final en depósito), está dado por

$$\boldsymbol{A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^n},$$

y el **valor presente (actual)**, $\boldsymbol{P}$, está dado por

$$\boldsymbol{P = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}}.$$

En estas fórmulas, la cantidad $\left(1+\frac{r}{m}\right)^n$ puede evaluarse por medio de la tecla y^x en una calculadora científica o $\wedge$ en una calculadora gráfica.

EJEMPLO 4 Determine el valor futuro (cantidad final en depósito) y el monto de los intereses generado por los siguientes depósitos.

(a) \$18,950 al 6% compuesto trimestralmente durante 5 años

Tenemos $P = \$18{,}950$, $r = 6\% = .06$, $m = 4$. Y durante un periodo de 5 años, obtenemos $n = 5m = (5)(4) = 20$.



Las funciones financieras de la calculadora TI-83 Plus permiten al usuario conocer una cantidad faltante considerando el valor del dinero en el tiempo. La flecha indica los resultados que apoyan la respuesta en el ejemplo 4(a).

Usando la fórmula del valor futuro y una calculadora, obtenemos

$$A = \$18{,}950\left(1 + \frac{.06}{4}\right)^{20} = \$25{,}522.90.$$

Para determinar el interés generado, reste la cantidad depositada originalmente (valor presente) del valor futuro:

$$\begin{aligned}\text{Interés generado} &= \text{valor futuro} - \text{valor presente}\\ &= \$25{,}522.90 - \$18{,}950\\ &= \$6572.90.\end{aligned}$$

(b) \$6429 al 2.7% compuesto mensualmente durante 30 meses.

Aquí $P = \$6429$, $r = 2.7\% = .027$, $m = 12$ y $n = 30$, de modo que

$$A = \$6429\left(1 + \frac{.027}{12}\right)^{30} = \$6877.42.$$

$$\begin{aligned}\text{Interés devengado} &= \text{valor futuro} - \text{valor presente}\\ &= \$6877.42 - \$6429\\ &= \$448.42.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 La hija del señor Cebelinskis necesitará \$17,000 en 5 años para ayudarse a costear su educación universitaria. ¿Qué suma total depositada hoy al 7% compuesto trimestralmente, producirá la cantidad que necesita?

Esta pregunta requiere que encontremos el valor presente P basado en lo siguiente.

Valor futuro:	$A = \$17{,}000$
Tasa anual:	$r = 7\% = .07$
Periodos por año:	$m = 4$
Número total de periodos:	$n = (5)(4) = 20$



La flecha indica el resultado que apoya la respuesta del ejemplo 5.

La fórmula del valor presente da como resultado

$$P = \frac{A}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n}} = \frac{\$17{,}000}{\left(1 + \frac{.07}{4}\right)^{20}} = \$12{,}016.02.$$

Suponiendo que pueda mantenerse un interés del 7% compuesto trimestralmente, un depósito de \$12,016.02 hoy se incrementará a \$17,000 dentro de cinco años. ■

En el siguiente ejemplo se usan logaritmos. Para auxiliarse en estos pasos, repase el uso de logaritmos presentados en un capítulo anterior (o consulte el manual de su calculadora).

EJEMPLO 6 En una cuenta de ahorros que paga 3% de interés, compuesto diariamente, ¿en qué momento la cantidad en la cuenta será el doble del principal original?

En la fórmula del valor futuro, éste debe ser igual a dos veces el valor presente, así que sustituimos A por $2P$.

$$2P = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n$$

$$2 = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^n \qquad \text{Divida ambos lados entre } P.$$

$$2 = \left(1 + \frac{.03}{365}\right)^n \qquad \text{Sustituya los valores de } r \text{ y } m.$$

$$\log 2 = \log\left(1 + \frac{.03}{365}\right)^n \qquad \text{Obtenga el logaritmo de ambos lados.}$$

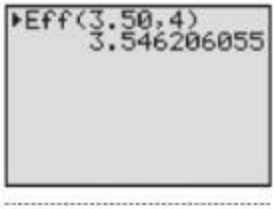
$$\log 2 = n \log\left(1 + \frac{.03}{365}\right) \qquad \text{Utilice la propiedad de potencia de los logaritmos.}$$

Ahora, al despejar para n, se obtiene

$$n = \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{.03}{365}\right)} = 8434 \quad \text{(redondeado al entero más cercano).}$$

Como n denota el número de periodos, que en este caso son días, el tiempo necesario es de 8434 días, o 23 años, 39 días (sin contar años bisiestos). ■

Rendimiento anual efectivo Los bancos, las asociaciones de crédito y otras instituciones de ahorro con frecuencia proporcionan dos cantidades cuando anuncian las tasas que pagarán. La primera, la tasa de interés anualizada real, es la **tasa nominal** (tasa "establecida"). La segunda cantidad es la tasa equivalente que generaría la misma cantidad final, o valor futuro, al final de un año, si el interés que se paga fuese simple en lugar de compuesto. Ésta se denomina "tasa efectiva", o más comúnmente **rendimiento anual efectivo**. Como el interés por lo general se compone varias veces por año, la tasa efectiva regularmente es un poco mayor que la tasa nominal.



Las calculadoras científicas están programadas para calcular la tasa de interés efectiva. Compare con el resultado del ejemplo 7.

EJEMPLO 7 ¿Cuál es el rendimiento anual efectivo de una cuenta que paga una tasa nominal de 3.50% compuesto trimestralmente?

Basado en los datos proporcionados, $r = .035$ y $m = 4$. Suponga que el depósito fue de $P = \$1$ y lo dejamos durante 1 año ($n = 4$). Entonces la fórmula del valor futuro compuesto proporciona

$$A = \left(1 + \frac{.035}{4}\right)^4 \approx 1.03546.$$

El depósito inicial de \$1, al cabo de 1 año, creció a \$1.03546. Como de costumbre, el interés generado = valor futuro − valor presente = 1.0355 − 1 = .0355 = 3.55%. Una tasa nominal de 3.50% tiene como resultado un rendimiento anual efectivo de 3.55%. ■

Generalizando el procedimiento del ejemplo 7 se obtiene la siguiente fórmula.

Rendimiento anual efectivo

Una tasa de interés nominal de r, compuesta m veces por año, es equivalente a un **rendimiento anual efectivo** de

$$Y = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1.$$

Los consumidores pueden hacer un uso práctico del concepto de rendimiento anual efectivo cuando buscan préstamos u oportunidades de ahorro. Un prestatario debe buscar la tasa efectiva más baja posible, mientras que un depositante debe buscar la más alta.

EJEMPLO 8 Tamara Johnson-Draper quiere depositar $2800 en una cuenta de ahorros y ha reducido sus opciones a las tres instituciones aquí representadas. ¿Cuál es la mejor?

Institución	Tasa sobre depósitos de $1000 a $5000
Asociación de Crédito	Tasa anual de 2.08%, compuesto mensualmente
Ahorros Premier	Rendimiento anual de 2.09%
Banco Tu Amigo	2.05% compuesto diariamente

Compare los rendimientos anuales efectivos de las tres instituciones:

De Asociación de Crédito, $Y = \left(1 + \frac{.0208}{12}\right)^{12} - 1 = .0210 = 2.10\%.$

De Premier, $Y = 2.09\%.$

De Tu Amigo, $Y = \left(1 + \frac{.0205}{365}\right)^{365} - 1 = .0207 = 2.07\%.$

El mejor de los tres rendimientos, 2.10%, lo ofrece Asociación de Crédito. ■

TABLA 2 Índice de precios al consumidor (IPC-U) 1970-2002 [Periodo de 1982 a 1984: 100]

Año	IPC-U promedio	Cambio porcentual en el IPC-U
1970	38.8	5.7
1971	40.5	4.4
1972	41.8	3.2
1973	44.4	6.2
1974	49.3	11.0
1975	53.8	9.1
1976	56.9	5.8
1977	60.6	6.5
1978	65.2	7.6
1979	72.6	11.3
1980	82.4	13.5
1981	90.9	10.3
1982	96.5	6.2
1983	99.6	3.2
1984	103.9	4.3
1985	107.6	3.6
1986	109.6	1.9
1987	113.6	3.6
1988	118.3	4.1
1989	124.0	4.8
1990	130.7	5.4
1991	136.2	4.2
1992	140.3	3.0
1993	144.5	3.0
1994	148.2	2.6
1995	152.4	2.8
1996	156.9	3.0
1997	160.5	2.3
1998	163.0	1.6
1999	166.6	2.2
2000	172.2	3.4
2001	177.1	2.8
2002	179.9	1.6

Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales de Estados Unidos.

Inflación Componer los incrementos de una cantidad, como se puede atestiguar en el valor futuro del interés compuesto, también se presenta en fenómenos diferentes de las ganancias o el pago de intereses. Un ejemplo importante es la **inflación**, el aumento periódico en el costo de la vida.

La inflación en una economía usualmente se expresa como una tasa mensual o anual de aumento en los precios, que las oficinas gubernamentales estiman de manera sistemática. En Estados Unidos, la Oficina de Estadísticas Laborales publica las cifras del **índice de precios al consumidor (IPC)**, las cuales reflejan los precios de ciertos artículos que son comprados por una gran cantidad de personas. La lista abarca desde alimentos hasta vivienda, automóviles, gasolina y ropa. No se incluyen, en cambio, artículos como yates o joyería fina.

Aunque las cifras del IPC se actualizan mensualmente, las cifras anuales ofrecen una información adecuada para la mayoría de los consumidores. La tabla 2 proporciona los valores del índice primario, que representa a "todos los consumidores urbanos" (el IPC-U). El valor correspondiente a un año específico es en realidad un promedio (media aritmética) de las cifras de los 12 meses de ese año. El valor del cambio porcentual para un año dado muestra el cambio del IPC-U con respecto al año que le precede. Por ejemplo, el IPC-U promedio para 2002 (179.9) fue 1.6% mayor que el valor promedio para 2001 (177.1).

La **inflación** depende de los precios de muchos bienes y servicios (de la denominada "canasta básica" o "canasta del mercado") sobre la cual se basan los cálculos del IPC. La selección de los artículos de la canasta básica y la recopilación y el análisis de los precios y de la información de gastos es una tarea enorme para la Oficina de Estadísticas Laborales (OEL), pero es crucial, ya que millones de trabajadores jubilados y miembros de programas se ven afectados cada año de manera directa por las cifras del IPC. También los ingresos exentos de impuestos, las deducciones y los límites de los rangos de impuestos están sujetos al IPC.

La OEL constantemente intenta afinar y mejorar la precisión de los índices calculados. Por ejemplo, en agosto de 2002 se introdujo un índice adicional, el índice de precios al consumidor sujeto a todos los consumidores urbanos, designado como C-IPC-U. Este índice sigue los cambios en los precios relativos entre categorías y busca reflejar el grado al cual los consumidores cambian a artículos alternos conforme los precios fluctúan. Se espera que estos enfoques alternativos conduzcan a medidas más precisas de la tasa real de inflación. Los datos actualizados se publican regularmente en línea en la página principal del IPC para Estados Unidos, http://www.bls.gov/cpi.

De 1913 a la fecha, el récord de la tasa de inflación ocurrió en el año 1918 y fue de 18.0%. El récord de la tasa de **deflación** (donde los niveles de los precios se reducen de un año al otro) ocurrió en 1921 y fue de −10.5%. Desde la década de 1930 no han ocurrido deflaciones severas. Un periodo breve de deflación moderada, acompañada de una disminución global en la economía general, por lo regular se denomina **recesión** (en lugar de deflación). Una recesión en los negocios *puede* coincidir con una inflación en los precios.

A diferencia de los valores contables bajo el interés compuesto, que dan saltos repentinos en ciertos puntos precisos del tiempo (por ejemplo, cada trimestre, cada mes o cada día), los niveles de los precios tienden a fluctuar de manera gradual a lo largo del tiempo. Por ello es apropiado, para estimar la inflación, utilizar la fórmula para el interés compuesto continuo (que se introdujo en un capítulo anterior).

Valor futuro para la composición continua

Si un depósito inicial de P dólares genera un interés compuesto de manera continua a una tasa anual r durante un periodo de t años, entonces el **valor futuro**, A, puede calcularse por

$$A = Pe^{rt}.$$

EJEMPLO 9 Suponga que gana un salario de $24,000 por año. ¿Qué salario necesitará dentro de 20 años para mantener su poder adquisitivo en caso de que la tasa de inflación persistiera en cada uno de los siguientes niveles?

(a) 2% (aproximadamente el nivel de 1999, en Estados Unidos)

En este caso, podemos utilizar la fórmula del valor futuro para la composición continua donde $P = \$24{,}000$, $r = 0.02$ y $t = 20$. Empleando la tecla e^x de la calculadora, encontramos

$$A = Pe^{rt} = (\$24{,}000)e^{(.02)(20)} = \$35{,}803.79.$$

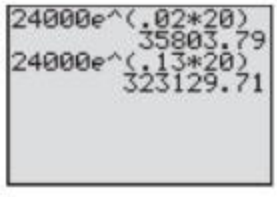
El salario requerido dentro de 20 años sería aproximadamente de $36,000.

(b) 13% (aproximadamente el nivel en 1980)

Para este nivel de inflación, tendríamos

$$A = Pe^{rt} = (\$24{,}000)e^{(.13)(20)} = \$323{,}129.71.$$

El salario requerido dentro de 20 años sería de alrededor de $323,000. ■



Éstos son los cálculos requeridos para resolver las dos partes del ejemplo 9.

Observe que en el ejemplo 9, expresamos los salarios necesarios en números redondos, $36,000 y $323,000. En primer lugar, las tasas de inflación fueron redondeadas. Además, incluso las cifras más precisas del IPC publicadas por el gobierno son sólo un intento por reflejar el costo de vida en un promedio muy amplio. Por último, la suposición de que cualquier tasa dada continuará sin cambio durante 20 años es en sí una estimación especulativa. (Si no, considere las fluctuaciones de la tabla 2.) Por éstas y muchas otras razones, debe considerar cualquier proyección inflacionaria hacia el futuro sólo como un pronóstico aproximado.

De manera particular cuando se trabaja con cantidades como la inflación, en la que prevalecen fluctuaciones continuas e inexactas, con frecuencia desarrollamos "reglas empíricas" para obtener estimaciones rápidas. Un ejemplo es la estimación de los **años para duplicarse**, que es el número de años que habrán de transcurrir para

que el nivel general de precios se duplique a una tasa de inflación anual determinada. Podemos deducir una regla de estimación como sigue, empezando con la fórmula del valor futuro para la composición continua.

$$A = Pe^{rt}$$

$$2P = Pe^{rt} \qquad \text{Los precios se duplican.}$$

$$2 = e^{rt} \qquad \text{Divida ambos lados entre } P.$$

$$\ln 2 = rt \qquad \text{Determine el logaritmo natural de ambos lados.}$$

$$t = \frac{\ln 2}{r} \qquad \text{Despeje para } t.$$

$$t = \frac{100 \ln 2}{100r} \qquad \text{Multiplique por 100 el numerador y el denominador.}$$

$$\textbf{años para duplicarse} \approx \frac{\textbf{70}}{\textbf{tasa de inflación anual}} \qquad 100 \ln 2 \approx 70$$

(Como r es la tasa de inflación como un *decimal*, $100r$ es la tasa de inflación como *porcentaje*.)

Generalmente al resultado anterior se le denomina **regla del 70**. El resultado debe redondearse *hacia arriba* al siguiente número entero de años.

```
(100*ln(2))/2.3
      30.13683394
70/2.3
      30.43478261
```

Debido a que $100 \ln 2 \approx 70$, los dos resultados que se muestran son casi iguales. Véase el ejemplo 10 y el análisis que le precede.

EJEMPLO 10 Calcule los años que tardarán en duplicarse los precios a una tasa de inflación anual de 2.3%.

Por medio de la regla del 70,

$$\text{Años en duplicarse} \approx \frac{70}{2.3} = 30.43.$$

Con una tasa de inflación sostenida de 2.3%, los precios se duplicarían más o menos dentro de 31 años. ■

14.1 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, cuando sea el caso y a menos que se diga lo contrario, hay 12 meses por año, 30 días por mes y 365 días por año.

Determine el interés simple que se adeuda para cada uno de los siguientes préstamos.

1. $1400 al 8% durante 1 año

2. $8000 al 5% durante 1 año

3. $650 al 6% durante 9 meses

4. $6000 al 7% durante 4 meses

5. $2675 al 8.2% durante $2\frac{1}{2}$ años

6. $1460 al 7.82% durante 22 meses

Determine el valor futuro de cada uno de los depósitos siguientes si la cuenta paga **(a)** *un interés simple, y* **(b)** *un interés compuesto anualmente.*

7. $700 al 3% durante 6 años

8. $2000 al 4% durante 5 años

9. $2500 al 2% durante 3 años

10. $5000 al 8% durante 5 años

Resuelva los siguientes problemas relacionados con el interés.

11. ***Interés simple en el pago de impuestos atrasados sobre bienes*** George Atkins se demoró en el pago de los impuestos de su propiedad al condado. Debía $7500 y pagó el impuesto 4 meses después. El condado cobra una multa de 8% de interés simple. Determine la cantidad de la multa.

12. ***Interés simple en un préstamo para uniformes de trabajo*** Michael Bolinder compró un nuevo suministro de uniformes de reparto. Pagó $815 por los uniformes y acordó pagarlos en 5 meses al 9% de interés simple. Determine la cantidad de interés que adeudará.

13. ***Interés simple en un préstamo para una pequeña empresa*** Chris Campbell inició un servicio de seguridad el primero de marzo. Para pagar muebles de oficina y perros guardianes, Campbell pidió un préstamo al banco por $14,800 y acordó pagar el préstamo en 10 meses al 9% de interés simple. Determine la *cantidad total* que debe pagar.

14. ***Interés simple en pagos en exceso de impuestos*** El IRS (Servicio de Recaudación Fiscal de Estados Unidos) le debe $260 a David Fontana porque pagó impuestos en exceso el año pasado. El IRS pagará la cantidad al 6% de interés simple. Determine la *cantidad total* que recibirá Fontana, si el interés se paga por 8 meses.

Determine las cantidades finales (valor futuro) y/o los intereses devengados que faltan.

	Principal	Tasa	Compuesto	Tiempo	Cantidad final	Interés compuesto
15.	$ 975	4%	trimestral	4 años	$1143.26	_____
16.	$1150	7%	semestral	6 años	$1737.73	_____
17.	$ 480	6%	semestral	9 años	_____	$337.17
18.	$2370	10%	trimestral	5 años	_____	_____
19.	$7500	$3\frac{1}{2}$%	anual	25 años	_____	_____
20.	$3450	2.4%	semestral	10 años	_____	_____

Para cada uno de los depósitos siguientes, determine el valor futuro *(cantidad final del depósito) cuando se compone* **(a)** *anualmente,* **(b)** *semestralmente y* **(c)** *trimestralmente.*

	Principal	Tasa	Tiempo
21.	$1000	10%	3 años
22.	$3000	5%	7 años
23.	$12,000	8%	5 años
24.	$15,000	7%	9 años

En ocasiones, una cuenta de ahorros puede pagar un interés compuesto de manera continua. Para cada uno de los depósitos siguientes, determine el interés generado *si éste se compone* **(a)** *semestralmente,* **(b)** *trimestralmente,* **(c)** *mensualmente,* **(d)** *diariamente y* **(e)** *continuamente. (Recuerde que interés = valor futuro – valor presente.)*

	Principal	Tasa	Tiempo
25.	$1040	7.6%	4 años
26.	$1550	2.8%	33 meses [para las partes (d) y (e), suponga 1003 días]

✎ **27.** Describa el efecto de un interés compuesto cada vez con mayor frecuencia. En particular, ¿qué tan bueno es el interés compuesto de manera continua?

Resuelva los siguientes problemas relacionados con el interés.

28. ***Determine la cantidad recibida en un préstamo a interés simple*** Chris Siragusa solicita un préstamo con un 7% de interés simple a pagarse en 15 meses, fecha en la que tendrá que pagar $815.63 ¿Qué cantidad le prestaron a Chris?

29. ***Determine la cantidad recibida en un préstamo a interés simple*** ¿Cuál es la cantidad máxima de un préstamo que usted puede solicitar hoy si debe pagarla en 4 meses a un interés simple del 8%, y usted sabe que en esa fecha no podrá liquidar más de $1500?

✎ **30.** Para desarrollar en este texto la fórmula del valor futuro para el interés compuesto, se emplearon al menos cuatro estrategias específicas para resolver problemas. Identifique, mencionándolas, tantas como pueda, y describa su uso en este caso.

Determine el valor presente de cada uno de los siguientes valores futuros.

31. $1000 (6% compuesto anualmente durante 5 años).

32. $14,000 (4% compuesto trimestralmente durante 3 años).

33. $9860 (8% compuesto semestralmente durante 10 años).

34. $15,080 (5% compuesto mensualmente durante 4 años).

Determine el valor presente de una cuenta de retiro con interés compuesto *Tom y Louise desean abrir una cuenta que les ayude a complementar sus ingresos por concepto de jubilación dentro de 30 años. Para cada una de las tasas de interés siguientes, determine la suma total que deben depositar ahora, de modo que al momento de jubilarse tengan disponibles $500,000.*

35. 8% compuesto trimestralmente

36. 6% compuesto trimestralmente

37. 8% compuesto diariamente

38. 6% compuesto diariamente

Determine el rendimiento anual efectivo de una cuenta de ahorros *Suponga que una cuenta de ahorros y préstamo paga una tasa nominal de 5% en depósitos de ahorro. Determine el rendimiento anual efectivo si el interés se compone como se indica en los ejercicios 39 a 45. (Dé respuestas al milésimo por ciento más cercano.)*

39. anualmente

40. semestralmente

41. trimestralmente

42. mensualmente

43. diariamente

44. 1000 veces por año

45. 10,000 veces por año

46. Considerando los ejercicios 39 a 45, ¿cuál supone que sea el rendimiento anual efectivo, si una tasa nominal de 5% se compone de manera continua? Explique su razonamiento.

Compare tasas de interés en certificados de depósito *Durante la semana del 25 al 31 de diciembre de 2002, la Unión de Escuelas de Crédito Financiero de Sacramento publicó las siguientes tasas de ahorro para certificados de depósito de tasa privilegiada en varias categorías. Use esta información para los ejercicios 47 y 48.*

		Balance mínimo $1000	Balance mínimo $2500
6 meses	Tasa	1.50%	1.60%
	Rendimiento	1.51%	1.61%
12 meses	Tasa	1.85%	1.95%
	Rendimiento	1.86%	1.96%

47. Si usted coloca $20,000 en la opción a 12 meses, ¿cuánto tendría en un año?

48. ¿Con qué frecuencia se compone el interés en estas cuentas?

Resuelva los siguientes problemas relacionados con el interés.

49. ***Determine los años para duplicarse*** ¿Cuánto tardará en duplicarse su dinero si usted lo tiene en una cuenta que paga 6% compuesto cada trimestre? (Dé su respuesta en años y días, sin tomar en cuenta los años bisiestos.)

50. ***Compare el principal y los montos de interés*** ¿Después de qué periodo el interés generado es igual al principal original si la cuenta paga 6% compuesto diariamente? (Dé su respuesta en años y días, sin tomar en cuenta los años bisiestos.)

51. ***Determine la tasa nominal de una cuenta de ahorros*** En Orangevale Savings el interés se compone mensualmente y la tasa efectiva es de 2.95%. ¿Cuál es la tasa nominal?

52. ***Compare tasas en cuentas de ahorro bancarias*** En Carmichael, California, el banco A paga en los depósitos una tasa nominal de 3.800% compuesto diariamente. El banco B produce el mismo rendimiento anual que el primero, pero sólo compone el interés trimestralmente y no paga intereses en fondos depositados por menos de un trimestre completo.

(a) ¿Cuál es la tasa nominal del banco B (hasta el milésimo por ciento más cercano)?

(b) ¿Qué banco debe elegir Paty Demko si desea depositar $2000 durante 10 meses? ¿Cuánto más ganará en intereses con respecto al otro banco?

(c) ¿Qué banco debe elegir Sashaya Davis si desea depositar $6000 para depositar durante un año? ¿Cuánto interés ganará

53. Despeje r de la fórmula de rendimiento anual efectivo para obtener una fórmula general para la tasa nominal en términos del rendimiento y del número de periodos de composición por año. [Utilice la fórmula para verificar sus respuestas a los ejercicios 51 y 52(a).]

Estimar los años de duplicación por medio de la regla de 70 *Emplee la regla de 70 para estimar los años en duplicarse las siguientes tasas de inflación anual.*

54. 1%

55. 2%

56. 8%

57. 9%

Estimar la tasa de inflación por medio de la regla de 70 *Emplee la regla de 70 para estimar la tasa de inflación anual (al décimo por ciento más cercano) que haría que el nivel general de precios se duplicara en los siguientes periodos.*

58. 5 años

59. 7 años

60. 16 años

61. 22 años

Resuelva los siguientes problemas relacionados con la inflación.

62. Deduzca una regla para estimar "los años en triplicarse", esto es, el número de años necesarios para que el nivel general de precios se triplique dada una tasa anual de inflación determinada.

63. ¿Cómo llamaría usted a su regla del ejercicio 62? Explique su razonamiento.

Estimar los precios futuros para una inflación anual constante *A continuación se dan los precios de 2003 para varios artículos. Determine los costos futuros estimados que faltan para llenar los espacios en la tabla. (Dé cifras significativas que concuerden con los precios proporcionados de 2003.)*

	Artículo	Precio en 2003	Precio para 2010 con 2% de inflación	Precio para 2020 con 2% de inflación	Precio para 2010 con 10% de inflación	Precio para 2020 con 10% de inflación
64.	Casa	$165,000	_____	_____	_____	_____
65.	Comida diaria	$ 4.89	_____	_____	_____	_____
66.	Galón de gasolina	$ 1.65	_____	_____	_____	_____
67.	Auto pequeño	$ 13,500	_____	_____	_____	_____

Estimar precios futuros para una inflación variable *Según lo observado en la tabla 2, las tasas de inflación no suelen permanecer constantes a lo largo de los años. Por ejemplo, de 1996 a 1997 el índice creció de* 156.9 *a* 160.5, *o* 2.3%, *mientras que el año siguiente, 1997 a 1998, aumentó de* 160.5 *a* 163.0, *sólo* 1.6%. *Suponga que los precios de los siguientes artículos aumentaron de acuerdo con las tasas anuales promedio que se muestran en la tabla 2. Considerando los aumentos para todos los años señalados, determine los precios que faltan en la última columna de la tabla. Redondee al dólar más cercano.*

	Artículo	Precio	Año de compra	Precio en 2002
68.	Sofá	$ 650	1999	_____
69.	Una docena de rosas	$ 78	1996	_____
70.	Esquíes	$ 149	1995	_____
71.	Motocicleta	$6388	1994	_____

Resuelva los siguientes problemas relacionadas con el interés.

72. ***Determine el valor presente de una compra futura de bienes raíces*** Un matrimonio de California desea vender su pequeña granja a un agente de bienes raíces. La pareja estará en una categoría fiscal más baja dentro de 3 años, y desean aplazar la recaudación de dinero hasta entonces. Determine la suma total que el agente puede depositar ahora, al 3% compuesto trimestralmente, de modo que sea suficiente para pagar $750,000 dentro de 3 años.

73. ***Determine el valor presente de una compra futura de equipo*** La secuencia del genoma humano es una importante área de investigación de la biotecnología. Una compañía (PE Biosystems) prestó 300 de sus máquinas de secuencias a una compañía subsidiaria (Celera). Si Celera fue capaz de generar 7% compuesto cada trimestre sobre su dinero invertido, ¿qué cantidad total necesita invertir para comprar esas máquinas dentro de 18 meses a un precio de $300,000 cada una? (*Fuente: Forbes*, 21 de febrero de 2000, p. 102.)

74. Escriba un informe del IPC (índice de precios al consumidor) y proponga cambios, tanto en la "canasta del mercado" como en los métodos utilizados para calcular los efectos en los diferentes artículos.

EXTENSIÓN

Anualidades

Algunos conceptos importantes de las matemáticas financieras dependen de la capacidad de sumar los términos de una **progresión geométrica**. En la progresión geométrica, cada término, después del primero, se genera multiplicando el término anterior por la **razón común**, un número que permanece constante en toda la sucesión o progresión. Por ejemplo, una progresión geométrica cuyo primer término es 3 y cuya razón común es 2 se inicia como sigue:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots.$$

En general, si el primer término se denota con a, la razón común se denota con r y en total hay n términos, entonces la progresión completa es

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}.$$

(Verifique por razonamiento inductivo que el n-ésimo término sea realmente ar^{n-1}.)

La suma de todos los términos de la progresión geométrica anterior puede escribirse como

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

Multiplique ambos lados de esta ecuación por r:

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Ahora, coloque estas dos ecuaciones una bajo la otra y reste una de la otra, como sigue.

$$\begin{array}{rlllll} S = a & + ar & + ar^2 & + \cdots + ar^{n-2} & + ar^{n-1} \\ Sr = ar & + ar^2 & + ar^3 & + \cdots + ar^{n-1} & + ar^n \\ \hline S - Sr = (a - ar) & + (ar - ar^2) & + (ar^2 - ar^3) & + \cdots + (ar^{n-2} - ar^{n-1}) & + (ar^{n-1} - ar^n) \end{array}$$

Podemos ahora acomodar y reagrupar los términos de la derecha para obtener lo siguiente.

$$\begin{aligned} S - Sr &= a + (ar - ar) + (ar^2 - ar^2) + \cdots + (ar^{n-1} - ar^{n-1}) - ar^n \\ &= a + 0 + 0 + \cdots + 0 - ar^n \end{aligned}$$

Observe que todos los términos de la derecha, excepto a y $-ar^n$, se acomodaron en parejas para cancelarlas. Así que obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} S - Sr &= a - ar^n \\ S(1 - r) &= a(1 - r^n) && \text{Se factorizan ambos lados.} \\ S &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} && \text{Despejar la suma } S. \end{aligned}$$

La suma de una progresión geométrica

Si una progresión geométrica tiene un primer término a y una razón común r, y tiene un total de n términos, entonces la suma de todos los n términos está dada por

$$\boldsymbol{S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}}.$$

Veamos ahora cómo la fórmula para la suma anterior puede aplicarse a planes de ahorro sistemático o a planes de inversión. Considere la siguiente situación.

> Cuando deposito dinero a cierta cuenta, puedo ganar interés a una tasa anual r, compuesto m veces al año. Suponga que haré un depósito regular de R (dólares), *al final* de cada periodo de composición. ¿Cuál será el valor total de mi cuenta después de n periodos?

Este tipo de cuenta, que recibe depósitos periódicos regulares *al final* de cada uno de los periodos de composición, se conoce como cuenta de **anualidad ordinaria**. El plazo total (periodo) en el que se hacen los depósitos, que constan de n periodos de composición, se denomina **periodo de acumulación** de la anualidad.

Cuando cada depósito R ingresa en la cuenta, empieza a generar interés y crece de acuerdo con la fórmula del valor futuro para el interés compuesto. En la siguiente tabla listamos los n depósitos, comenzando con el último, que se efectúa al final del n-ésimo periodo de composición. Puesto que el último depósito (depósito número n) no tiene tiempo para acumular interés, su valor final es justamente R.

Valor de una anualidad

Número de depósito	Valor futuro del depósito
n	R
$n-1$	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)$
$n-2$	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^2$
⋮	⋮
3	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n-3}$
2	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n-2}$
1	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n-1}$

(¿Por qué el exponente del valor futuro del primer depósito es $n-1$ y no n?)

El valor futuro de la cuenta debe ser la suma de los valores futuros de todos los depósitos individuales, que es la suma de las entradas en la columna de la derecha de la tabla. Pero esas entradas constituyen la progresión geométrica. El primer término es R, la razón común es $\left(1+\frac{r}{m}\right)$, y el número de términos es n. De modo que, en este caso, la suma de la progresión (el **valor futuro de la anualidad**) está dada por

$$\text{Suma} = \frac{R\left[1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^n\right]}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)}.$$

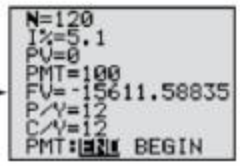
(continúa)

Un poco de álgebra nos da la siguiente fórmula.

Valor futuro de una anualidad ordinaria

Si el dinero de una anualidad genera interés a una tasa anual r, compuesto m veces por año y se hacen depósitos regulares a esta cuenta por la cantidad de R al final de cada periodo de composición, entonces el valor final (o **valor futuro**) de la cuenta al final de n periodos está dado por

$$V = \frac{R\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n - 1\right]}{\frac{r}{m}}.$$



Compare el valor futuro indicado por la flecha con el resultado de la parte (a) del ejemplo.

EJEMPLO Peter Harris abre una cuenta de anualidad ordinaria con su asociación de crédito. Comenzando dentro de un mes, cumplido a partir de hoy, él depositará $100 al mes y los depósitos generarán 5.1% anuales, compuestos mensualmente. Determine **(a)** el valor de la cuenta de Peter dentro de 10 años, **(b)** el total de sus depósitos durante los 10 años y **(c)** el interés total que se devengó.

(a) En este caso, $R = \$100$, $r = 5.1\% = .051$, $m = 12$ y $n = 10 \times 12 = 120$. La fórmula para el valor futuro de una anualidad ordinaria da como resultado:

$$V = \frac{\$100\left[\left(1 + \frac{.051}{12}\right)^{120} - 1\right]}{\frac{.051}{12}} = \$15{,}611.59.$$

(b) Durante los 10 años, los depósitos de $100 totalizarán

$$\$100 \times 10 \times 12 = \$12{,}000.$$

(c) Interés generado = valor futuro − depósitos totales

$$= \$15{,}611.59 - \$12{,}000$$

$$= \$3611.59.$$

El valor futuro de la cuenta de Peter, dentro de 10 años, será de $15,611.59. Este valor resulta de un total de $12,000 en depósitos que, al cabo de los 10 años, generan una cantidad adicional de $3611.59 en intereses. ■

EJERCICIOS DE EXTENSIÓN

Determinar los ingresos generados por una anualidad ordinaria *Para cada una de las siguientes cuentas de anualidades, determine* **(a)** *el valor futuro de la cuenta (al final del periodo de acumulación),* **(b)** *el total de todos los depósitos y* **(c)** *el interés total generado.*

	Depósito regular	Composición	Tasa de interés anual	Periodo de acumulación
1.	$ 1000	anual	8.5%	10 años
2.	$ 2000	anual	4.5%	20 años
3.	$50	mensual	6.0%	5 años
4.	$75	mensual	7.2%	10 años
5.	$20	semanal	5.2%	3 años
6.	$30	semanal	7.8%	5 años

Una cuenta de anualidad en la que se hacen depósitos regularmente al inicio de cada periodo de composición, en lugar de hacerse al final, se denomina ***anualidad anticipada*** *(Es usual que se suponga que cada depósito se hace al final del periodo de composición número n, de modo que el valor futuro de una anualidad anticipada es la acumulación de n + 1 depósitos en lugar de sólo n.)*

7. Si la tasa de interés, la cantidad de depósito regular, la frecuencia de la composición y el periodo de acumulación son iguales en ambos casos, ¿el valor futuro de una anualidad anticipada sería menor o mayor que el de una anualidad ordinaria? Explique su respuesta.

8. Modifique la deducción de la fórmula del valor futuro de una anualidad ordinaria (que se presentó en el texto) para mostrar que el **valor futuro de una anualidad anticipada** está dado por

$$V = \frac{R\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n+1} - 1\right]}{\frac{r}{m}}.$$

Determinar los ingresos de una anualidad anticipada *Aplique la fórmula del ejercicio 8 para determinar el valor futuro de cada una de las anualidades anticipadas dadas a continuación.*

	Depósito regular	Composición	Tasa de interés anual	Periodo de acumulación
9.	$50	mensual	6.0%	5 años
10.	$75	mensual	7.2%	10 años
11.	$20	semanal	5.2%	3 años
12.	$30	semanal	7.8%	5 años

13. ¿Cree usted que para una institución financiera (o una compañía de seguros), sea práctico garantizar que se le pagará una tasa de interés establecida para años futuros en su cuenta de anualidades? ¿Por qué sí o por qué no?

Entreviste a algunos amigos o conocidos, a maestros o a otros empleados de escuelas, hospitales o de otras instituciones no lucrativas y pregúnteles acerca de las "anualidades con impuestos diferidos" o "anualidades exentas de impuestos". Explique las características de estas cuentas.

14. su propósito básico

15. sus ventajas fiscales

16. sus tasas de interés (en comparación con las de las cuentas ordinarias de ahorros)

17. las sanciones por depósitos excesivos o por retiros anticipados

18. el "periodo de anualización" (en oposición al periodo de acumulación)

14.2 Crédito al consumidor

Cuando le pide prestada la podadora a su vecino, usted se la devuelve completa (así lo espera él) una vez haya terminado de usarla. Sin embargo, cuando se pide prestado *dinero* (cualquier cantidad significativa), la devolución a tiempo del dinero es mucho más factible si la deuda se liquida en un tiempo determinado y en una serie de pagos más pequeños.

Pedir prestado para financiar compras y liquidar con pagos periódicos se conoce como **comprar a plazos**. En esta sección analizaremos los dos tipos generales de créditos a plazos para el consumidor. El **crédito limitado** es el préstamo de una cantidad determinada que se recibe de una sola vez y que se devuelve mediante una serie de pagos en cantidades iguales hasta que se haya saldado la cantidad total del préstamo. Por lo regular, ciertos artículos como muebles, electrodomésticos y automóviles se financian por medio del crédito limitado (que también se conoce como **préstamo de mensualidades fijas**).

En el segundo tipo de crédito a plazos al consumidor, el crédito **abierto**, no se estipula un número fijo de pagos, y el consumidor continúa pagando hasta que no adeude balance alguno. Con este tipo de crédito, el crédito adicional se extiende antes de que la cantidad inicial se haya pagado. Algunos ejemplos de créditos abiertos incluyen la mayor parte de las cuentas de los grandes almacenes y las tarjetas de crédito bancarias como MasterCard y VISA.

Crédito limitado Los préstamos establecidos con crédito limitado a menudo se basan en los **intereses añadidos**. Esto significa que si se presta una cantidad P a una tasa de interés anual r y los pagos se extienden durante t años, entonces el interés requerido se calcula mediante la fórmula del interés simple: $I = Prt$. Usted sólo "añade" está cantidad de interés al principal que se prestó para obtener el total del débito (o cantidad que se liquidará).

$$\text{Cantidad que se liquidará} = \text{cantidad que se prestó} + \text{intereses que se deben}$$
$$= P + Prt$$

Luego, esta deuda total se divide entre los pagos (por lo regular mensuales) por realizarse durante los t años.

EJEMPLO 1 Los Hoang acaban de casarse. Han gastado \$2700 en muebles y aparatos para arreglar su primer apartamento. Deben pagar \$500 al inicio y acuerdan pagar el balance a una tasa añadida de 7% durante 2 años. Determine la cantidad total que deben y los pagos mensuales que tienen que realizar.

Financian un total de \$2700 − \$500 = \$2200. El interés que se cobra es

$$I = Prt$$
$$I = \$2200 \times .07 \times 2 = \$308.$$

La deuda total es

$$\$2200 + \$308 = \$2508,$$

con pagos mensuales de

$$\frac{\$2508}{24} = \$104.50. \quad \blacksquare$$

Observe que la cantidad que se debe reembolsar en el ejemplo 1 fue exactamente la misma ($P + Prt$) que la cantidad final A en una cuenta de ahorros que paga un interés simple de r durante t años. (Vea la sección anterior.) Pero, en el caso de los ahorros, el banco conserva todo su dinero durante el periodo completo. En el ejemplo 1, los Hoang no tenían la cantidad total del principal durante el periodo completo,



El uso de tarjetas de crédito entre los estudiantes se ha elevado, según

collegecreditcounseling.com.

Cerca de 65% de los 9 millones de estudiantes de Estados Unidos tienen por lo menos una tarjeta de crédito. El estudiante universitario promedio cuenta con tres tarjetas de crédito. Y al graduarse, el estudiante promedio saldrá del colegio con una deuda de $2500 en tarjetas de crédito.

Una ley creada en 2002 en California, la Ley de protección y responsabilidad financiera del estudiante, prohíbe la distribución de regalos a estudiantes que soliciten una tarjeta de crédito y exige educación y programas de orientación sobre las deudas en las universidades, además de requerir que los promotores de las tarjetas se registren en la administración de las escuelas. (*Fuente:* http://horizons.eraunews.com)

de modo que lo liquidaron en 24 pagos mensuales. La tasa añadida de 7% resulta ser equivalente a una tasa de "interés anual real" mucho más alta, como veremos en la sección siguiente.

Otro tipo de préstamo de mensualidades fijas, la **hipoteca de bienes raíces**, por lo general implica cantidades de principal mucho mayores y periodos de pago más largos que los que se usan en los préstamos al consumidor cubiertos en esta sección. En la sección 14.4 se estudiarán las hipotecas.

Crédito de plazo abierto En las cuentas típicas de los grandes almacenes o las tarjetas bancarias se establece inicialmente un límite de crédito y el consumidor puede hacer muchas compras durante un mes (hasta llegar al límite de su crédito). El pago mensual exigido puede variar de un mínimo establecido (que depende del balance de la cuenta) hasta el balance total.

Para compras hechas en un almacén o en otro comercio, el cliente autoriza que se añada el precio de la compra a su cuenta firmando un "recibo". La autorización también puede hacerse por teléfono para órdenes postales, servicios, contribuciones y otros gastos. Tales transacciones también pueden realizarse de manera directa en Internet, aunque no todos los consumidores se sienten seguros de hacerlo así.

Al final de cada periodo de facturación, normalmente una vez al mes, el cliente recibe una **facturación detallada** donde aparece la lista de compras y pagos, el balance total que adeuda, el pago mínimo exigido y tal vez información adicional de la cuenta. Cualquier cargo que rebase el precio de contado de un artículo se denomina **cargo por financiamiento**. Los cargos por financiamiento pueden incluir el interés, la cuota anual, la cobertura de un seguro de crédito, cargos por diferencias en los plazos de pago o los cargos por manejo de cuenta.

Unos cuantos prestamistas de plazo abierto todavía utilizan alguno de los métodos más sencillos para calcular cargos por financiamiento, como el **método del saldo insoluto** que se ilustra en el ejemplo 2. Típicamente, usted comenzaría con el saldo insoluto de la cuenta al *final del mes anterior* (o *periodo de facturación*), al cual tendría que aplicarle la tasa de interés del mes actual (o la tasa diaria multiplicada por el número de días en el periodo de facturación actual). Cualquier compra o devolución en el periodo actual no afecta el cálculo de los cargos por financiamiento.

EJEMPLO 2 La siguiente tabla muestra la actividad de la cuenta VISA de Karin De Jamaer durante un periodo de 2 meses. Si el banco cobra un interés de 1.1% mensual en el saldo insoluto y no hay otros cargos por financiamiento, encuentre las cantidades que faltan en la tabla, así como los cargos totales por financiamiento para los 2 meses.

Mes	Saldo insoluto al inicio del mes	Cargo por financiamiento	Compras durante el mes	Devoluciones	Pago	Balance insoluto al final del mes
Julio	$179.82	_____	$101.58	$ 0	$30	_____
Agosto	_____	_____	$ 19.84	$42.95	$85	_____

El cargo por financiamiento para julio es el 1.1% de $179.82, es decir, $1.98. Entonces, al sumar los cargos por financiamiento y las compras y restar las devoluciones y los pagos, obtenemos el saldo insoluto al final de julio (e inicio de agosto):

$$\$179.82 + \$1.98 + \$101.58 - \$30 = \$253.38.$$

Un cálculo análogo proporciona el cargo por financiamiento de agosto, que es

$$1.1\% \text{ de } \$253.38 = .011 \times \$253.38 = \$2.79,$$

y un saldo insoluto al final de agosto de

$$\$253.38 + \$2.79 + \$19.84 - \$42.95 - \$85 = \$148.06.$$

Los cargos totales por financiamiento para los dos meses fueron de

$$\$1.98 + \$2.79 = \$4.77.$$ ■



La siguiente rima le ayudará a resolver problemas como el que aparece en el ejemplo 3.

Treinta días tiene septiembre, como abril, junio y noviembre; los demás, treinta y uno. Excepto febrero, mocho, que sólo tiene veintiocho; o veintinueve, si es bisiesto.

La mayor parte de los créditos de plazo abierto en la actualidad calculan los cargos por financiamiento por medio del **método del balance** o **saldo diario promedio**. Desde el punto de vista del banco, esto parece lo más justo, ya que considera los balances de todos los días del periodo de facturación y, por lo tanto, es lo más cercano a cobrarle al cliente el crédito que realmente utiliza. El método del balance promedio diario se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 A continuación aparece la actividad de la cuenta MasterCard de Paige Dunbar para un solo periodo de facturación. Si el balance anterior (del 3 de marzo) fue de $209.46 y el banco cobra 1.3% mensual sobre el balance diario promedio, determine **(a)** el balance promedio diario para la siguiente facturación (del 3 de abril) y **(b)** el cargo por financiamiento que aparecerá en la facturación del 3 de abril.

3 de marzo	Fecha de facturación	
12 de marzo	Pago	$50.00
17 de marzo	Ropa	$28.46
20 de marzo	Compra por correo	$31.22
1 de abril	Accesorios para automóviles	$59.10

(a) Primero haga una tabla que muestre la fecha de inicio del periodo de facturación y las fechas de todas las transacciones en dicho periodo. Junto con cada una de éstas, calcule el balance que se debe en cada fecha.

Fecha	Balance adeudado
3 de marzo	$209.46
12 de marzo	$209.46 − $50 = $159.46
17 de marzo	$159.46 + $28.46 = $187.92
20 de marzo	$187.92 + $31.22 = $219.14
1 de abril	$219.14 + $59.10 = $278.24

A continuación, tabule las cifras del balance adeudado, junto con el número de días hasta que cambie el balance. Multiplique cada cantidad del balance por el número de días. La suma de estos productos proporciona la "suma de los balances diarios".

Fecha	Balance adeudado	Número de días hasta que cambia el balance	(Balance adeudado) × (Número de días)
3 de marzo	$209.46	9	$ 1885.14
12 de marzo	$159.46	5	$ 797.30
17 de marzo	$187.92	3	$ 563.76
20 de marzo	$219.14	12	$ 2629.68
1 de abril	$278.24	2	$ 556.48
		Totales: 31	$ 6432.36

$$\text{Balance promedio diario} = \frac{\text{Suma de los balances diarios}}{\text{Días del periodo de facturación}} = \frac{\$6432.36}{31} = \$207.50.$$

Dunbar pagará un cargo por financiamiento basado en el balance promedio diario que es de $207.50.



El **comercio-e**, o comercio electrónico, se refiere al uso de Internet como medio de venta de bienes y servicios. Las compras en línea pueden ser tan sencillas como si se hicieran en las compañías tradicionales. Pero la dinámica de Internet también facilita la creación de nuevas clases de compañías y asociaciones, que con frecuencia comercian productos y servicios antes inimaginables.

Durante la fiebre de compras de la Navidad de 2002, las ventas comunes y corrientes se mantuvieron casi iguales que el año anterior. Al mismo tiempo, las ventas en línea tuvieron un incremento de 20% con respecto al año anterior.

(b) El cargo por financiamiento para la facturación del 3 de abril será de

$$1.3\% \text{ de } \$207.50 = .013 \times \$207.50 = \$2.70.$$

(c) El balance de la cuenta al 3 de abril será el último balance adeudado más el cargo por financiamiento: $\$278.24 + \$2.70 = \$280.94$. ■

Las cuentas de tarjetas bancarias y de otros créditos de plazo abierto por lo regular exigen cierto mínimo mensual, que depende de alguna manera del balance que tenga usted en su cuenta. Pero si tuviera que atrasar el pago, puede arrastrar la mayor parte de su balance mes con mes, y pagar los cargos por financiamiento resultantes. Cualquiera que sea el método utilizado para calcular los cargos por financiamiento, puede evitarlos totalmente en la mayoría de los casos pagando el total del balance en la fecha de pago de cada mes. De hecho, ésta es la práctica más razonable, ya que esta clase de cuentas de crédito, aunque convenientes, son relativamente caras. Las compras que se cargan a su cuenta durante el mes no se facturarán sino hasta la siguiente fecha de pago de la deuda, e incluso, la mayoría de las instituciones que ofrecen el crédito otorgan un periodo de gracia (que puede ser de 20 días o más) entre la fecha de facturación y la fecha de pago. Esto significa que, con una sincronización cuidadosa, usted puede comprar un artículo y no tener que pagarlo realmente sino hasta casi dos meses después, sin pagar intereses.

Aunque los ejemplos de créditos abiertos de esta sección se han enfocado principalmente a los cargos por intereses reales, estas cuentas poseen otras características que pueden ser por lo menos tan importantes como los intereses. Por ejemplo:

1. ¿Se requiere el pago de una cuota anual? Si es así, ¿a cuánto asciende?
2. ¿Ofrecen una tasa especial por "introducción"? Si es así, ¿cuánto tiempo durará?
3. ¿Existen otros incentivos, como descuentos, créditos para ciertas compras o devolución de cargos por intereses por el uso a largo plazo?

14.2 EJERCICIOS

Redondee todas las respuestas monetarias al centavo más cercano, a menos que se indique otra cosa. Suponga, cuando sea apropiado, que hay 12 meses por año, 30 días por mes y 365 por año, a menos que se indique otra cosa.

Financiamiento en la compra de electrodomésticos *Suponga que compra aparatos electrodomésticos a un costo de* $2150 *en un gran almacén que carga el* 12% *de intereses añadidos, y usted hace un pago inicial de* $500.

1. Determine la cantidad total que estará financiando.
2. Encuentre el interés total si al cabo de 2 años usted habrá pagado el préstamo.
3. Determine la cantidad total que debe.
4. La cantidad del ejercicio 3 se pagará en 24 mensualidades. Determine el pago mensual.

Financiamiento en la compra de un nuevo automóvil *Suponga que desea un auto nuevo que cuesta* $16,500. *No tiene efectivo, sino sólo su automóvil usado, que puede tomarse como parte del pago por un valor de* $3000.

5. ¿Cuánto necesita financiar para comprar el nuevo auto?
6. El vendedor le dice que la tasa es de 9% de interés añadido, durante 3 años. Determine el interés total.
7. Determine la cantidad total adeudada.
8. Determine el pago mensual.

En los siguientes ejercicios, encuentre el interés total y el pago mensual usando el método del interés añadido para calcular intereses.

	Monto del préstamo	Plazo del préstamo	Tasa de interés
9.	$4500	3 años	9%
10.	$2700	2 años	8%
11.	$ 750	18 meses	7.4%
12.	$2450	30 meses	9.2%
13.	$1580	10 meses	6%
14.	$2100	14 meses	12%
15.	$ 535	16 meses	11.1%
16.	$ 798	29 meses	10.3%

Resuelva los siguientes problemas. Proporcione respuestas monetarias al centavo más cercano, a menos que se indique lo contrario.

17. ***Determinar el pago mensual de un préstamo con intereses añadidos para la compra de muebles*** Los Giordano compraron muebles con valor de $8500 para su casa nueva, y dieron $3000 como depósito inicial. La tienda cobra 10% de interés añadido. Los Giordano liquidarán los muebles en 30 mensualidades ($2\frac{1}{2}$ años). Determine el pago mensual.

18. ***Determine el pago mensual de un préstamo con intereses añadidos para la compra de un automóvil*** Encuentre el pago mensual exigido para saldar un préstamo para automóvil por $9780 durante 3 años, si la tasa de interés añadidos es de 9.3%.

19. ***Determine el pago mensual de un préstamo con intereses añadidos para la compra de aparatos eléctricos para el hogar*** El precio total de compra de un nuevo sistema de entretenimiento para el hogar es de $14,240. Si el depósito inicial es de $2900 y el balance se financiará durante 48 meses a 10% de interés añadido, ¿cuál es el pago mensual?

20. ***Determine el pago mensual de un préstamo con intereses añadidos*** ¿Cuáles son los pagos mensuales que hace Donna De Simone por un préstamo de $1680 durante un periodo de 10 meses, si se le cobra un 9% de interés añadido?

21. ***Determine el monto prestado en un préstamo con intereses añadidos para la compra de un automóvil*** Joshua Eurich extravió el contrato de venta de su auto y no puede recordar la cantidad que se financió originalmente. Sabe que la tasa de interés añadido fue de 9.8% y que el préstamo requería un total de 48 pagos mensuales de $314.65 cada uno. ¿Cuánto pidió prestado Joshua (al dólar más cercano)?

22. ***Determinar una tasa de interés añadido*** Susan Dratch realiza pagos mensuales de $207.31 para saldar un préstamos de $6400 en $3\frac{1}{2}$ años. ¿Cuál es su tasa de interés añadido (al dólar más cercano)?

23. ***Determine el término de un préstamo con intereses añadidos*** ¿Cuánto tiempo (en años) le tomará a Michael Garbin saldar un préstamo de $8000 mediante pagos mensuales de $172.44, si la tasa de interés añadido es de 9.2%?

24. ***Determinar el número de pagos de un préstamo con intereses añadidos*** ¿Cuántos pagos mensuales debe hacer Jawann a un préstamo de $10,000, si paga $417.92 mensuales y la tasa de interés añadido es de 10.15%?

Determinar el cargo por financiamiento de una cuenta a plazo abierto *Determine el cargo por financiamiento de las siguientes cuentas a plazo abierto. Suponga que el interés se calcula sobre el saldo insoluto de la cuenta.*

	Saldo insoluto	Tasa de interés mensual
25.	$325.50	1.0%
26.	$450.25	1.2%
27.	$242.88	1.12%
28.	$655.33	1.21%

Determinar el saldo insoluto de una cuenta a plazo abierto *Complete cada una de las siguientes tablas, mostrando el saldo insoluto al final de cada mes. Suponga una tasa de interés mensual del* 1.1% *sobre el saldo insoluto.*

29.

Mes	Saldo insoluto al inicio del mes	Cargo por financiamiento	Compras durante el mes	Devoluciones	Pago	Saldo insoluto al final del mes
Febrero	$319.10	_____	$86.14	0	$50	_____
Marzo	_____	_____	109.83	$15.75	60	_____
Abril	_____	_____	39.74	0	72	_____
Mayo	_____	_____	56.29	18.09	50	_____

30.

Mes	Saldo insoluto al inicio del mes	Cargo por financiamiento	Compras durante el mes	Devoluciones	Pago	Saldo insoluto al final del mes
Octubre	$828.63	_____	$128.72	$23.15	$125	_____
Noviembre	_____	_____	291.64	0	170	_____
Diciembre	_____	_____	147.11	17.15	150	_____
Enero	_____	_____	27.84	139.82	200	_____

31.

Mes	Saldo insoluto al inicio del mes	Cargo por financiamiento	Compras durante el mes	Devoluciones	Pago	Saldo insoluto al final del mes
Agosto	$684.17	_____	$155.01	$38.11	$100	_____
Septiembre	_____	_____	208.75	0	75	_____
Octubre	_____	_____	56.30	0	90	_____
Noviembre	_____	_____	190.00	83.57	150	_____

32.

Mes	Saldo insoluto al inicio del mes	Cargo por financiamiento	Compras durante el mes	Devoluciones	Pago	Saldo insoluto al final del mes
Marzo	$1230.30	_____	$308.13	$74.88	$250	_____
Abril	_____	_____	488.35	0	350	_____
Mayo	_____	_____	134.99	18.12	175	_____
Junio	_____	_____	157.72	0	190	_____

Determinar los cargos por financiamiento *Determine el cargo por financiamiento de cada una de las siguientes cuentas. Suponga que el interés se calcula sobre el balance promedio diario de la cuenta.*

	Balance promedio diario	Tasa de interés mensual
33.	$ 249.94	1.0%
34.	$ 450.21	1.06%
35.	$1073.40	1.125%
36.	$1320.42	1.375%

Determinar los cargos por financiamiento y los balances de las cuentas por medio del método de balance promedio diario *Para cada una de las siguientes cuentas de tarjetas de crédito, suponga un mes entre las fechas de facturación (utilizando el número apropiado de días en el mes) y un interés de 1.2% mensual sobre el balance promedio diario. Determine* **(a)** *el balance promedio diario,* **(b)** *los cargos mensuales por financiamiento y* **(c)** *el balance de la cuenta para la siguiente facturación.*

37. Balance anterior: $728.36

9 de mayo	Fecha de facturación	
17 de mayo	Pago	$200
30 de mayo	Cena	$ 46.11
3 de junio	Boletos de teatro	$ 64.50

38. Balance anterior: $514.79

27 de enero	Fecha de facturación	
9 de febrero	Dulces	$11.08
13 de febrero	Devoluciones	$26.54
20 de febrero	Pago	$59
25 de febrero	Reparaciones	$71.19

39. Balance anterior: $462.42

11 de junio	Fecha de facturación	
15 de junio	Devoluciones	$106.45
20 de junio	Joyería	$115.73
24 de junio	Alquiler de automóvil	$ 74.19
3 de julio	Pago	$115
6 de julio	Flores	$ 68.49

40. Balance anterior: $983.25

17 de agosto	Fecha de facturación	
21 de agosto	Compra por correo	$ 14.92
23 de agosto	Devoluciones	$ 25.41
27 de agosto	Bebidas	$ 31.82
31 de agosto	Pago	$108
9 de septiembre	Devoluciones	$ 71.14
11 de septiembre	Boletos para concierto	$110
14 de septiembre	Retiro de efectivo	$100

Determinar cargos por financiamiento *En los ejercicios 41 y 42 suponga que no se hicieron compras ni devoluciones.*

41. Al inicio del periodo de facturación de 31 días, Margaret Dent-Dzierzanowski tiene un saldo insoluto de $720 en su tarjeta de crédito. Tres días antes del fin del periodo de facturación, ella paga $600. Determine el cargo por financiamiento a 1.0% mensual mediante los métodos siguientes.
(a) método del saldo insoluto
(b) método del balance promedio diario

42. La factura VISA del 14 de abril de Christine Grexa muestra un saldo insoluto de $1070. Cinco días antes del 14 mayo, fecha final del periodo de facturación, Grexa hace un pago de $900. Determine el cargo financiero al 1.1% mensual utilizando los siguientes métodos.
(a) método del saldo insoluto
(b) método del balance promedio diario

Análisis de una oferta de "90 días sin intereses" *Cierta "tarjeta importante para compras" ofrece su propia versión de la promoción "90 días sin intereses" y establece un cargo a la cuenta de* 1.3167% *de interés mensual sobre el balance de la cuenta. Los intereses que se cobran se suman al balance de la cuenta, para formar parte del balance sobre el que se calculan los intereses del mes siguiente. Si usted salda el cargo de la compra original dentro de los* 3 *meses, todos los intereses se cancelan. De otra forma, usted está sujeto al pago de todos los intereses. Suponga que, con este plan, compra alfombras por* $2900.

43. Determine el cargo por intereses que se suma al balance de la cuenta final del
(a) primer mes, **(b)** segundo mes,
(c) tercer mes.

44. Suponga que salda la cuenta con un día de retraso (3 meses más 1 día). ¿Cuál es la cantidad total de intereses que debe pagar? (Para propósitos de cálculo de intereses, ignore el día extra.)

45. Trate los 3 meses como 1/4 de año y determine la tasa de interés simple equivalente para esta compra (al décimo por ciento más cercano).

Diversos cargos de una cuenta de tarjeta bancaria *La cuenta de la tarjeta bancaria de Carole cobra* 1.1% *mensual sobre el balance promedio diario, así como las siguientes cuotas especiales:*

Comisión por retiro de efectivo:	*2% (no menos de $2 ni más de $10)*
Comisión por demora:	*$15*
Comisión por sobregiro en el límite de crédito:	*$5*

En el mes de junio, el balance promedio diario de Carole fue de $1846. *Se fue de vacaciones durante el mes y no recibió su estado de cuenta a tiempo, lo que provocó que se retrasara su pago y también generó cargos acumulados que excedieron su límite de crédito. Además, Carole utilizó su tarjeta para seis retiros de* $100 *mientras estaba de vacaciones. Determine lo siguiente basado en las transacciones de la cuenta en ese mes.*

46. los cargos de interés a la cuenta

47. comisiones especiales cargadas a la cuenta

✎ *Dé respuesta a cada una de las siguientes preguntas.*

48. ¿Es posible utilizar una tarjeta de crédito bancaria para hacer compras sin pagar por el crédito? Si es así, explique cómo.

49. Obtenga solicitudes o folletos explicativos de varios programas de tarjetas bancarias, compare sus características (incluidas las que figuran en la letra pequeña) y explique cuál ofrece lo mejor y por qué.

50. Investigue y explique la diferencia, si existe, entre una tarjeta "de crédito" y una tarjeta "de débito".

51. Muchas tarjetas de crédito ofrecen la opción de un seguro de cobertura de compras a crédito. Este seguro se encargaría de sus pagos mensuales si usted llegara a quedar incapacitado por razones de salud y no pudiese trabajar y/o saldaría la cuenta si usted falleciera. Investigue los detalles de al menos una de estas ofertas y comente por qué o por qué no la aceptaría.

52. Haga una lista de los "incentivos especiales" ofrecidos por tarjetas bancarias con las que esté familiarizado, y describa brevemente las ventajas y desventajas de cada una.

53. Un banco ofreció una tarjeta con una "tasa baja de introducción" de 5.9%, válida hasta el final del año. Además, ofrecía devolverle al cliente un porcentaje (¡hasta el 100%!) de todos los intereses que pagara, como se aprecia en la tabla.

El cliente usa su tarjeta durante:	2 años	5 años	10 años	15 años	20 años
Le devuelven:	10%	25%	50%	75%	100%

(Tan pronto como la persona obtiene el reembolso, el tiempo vuelve a empezar.) Como finalmente el cliente puede reclamar que todos sus intereses le sean devueltos, ¿piensa usted que es un buen negocio esta tarjeta? Explique por qué sí o por qué no.

54. Recuerde alguna experiencia que haya tenido en la compra de un automóvil o visite algún concesionario de autos nuevos y entreviste a un vendedor. Haga una descripción por escrito del procedimiento que se utiliza en la compra de un automóvil a crédito.

Comparación de cuentas de tarjetas bancarias *Daniel y Nora Onishi consideran dos ofertas de tarjetas bancarias que son iguales en todos los aspectos, salvo que el banco A no cobra comisión anual y carga un interés mensual de* 1.18% *sobre el saldo insoluto, mientras que el banco B cobra una comisión anual de* $30 *y un interés mensual de* 1.01% *sobre el saldo insoluto. En sus registros, los Onishi han descubierto que el saldo insoluto que suelen arrastrar de un mes a otro es muy consistente y promedia* $900.

55. Estime su costo anual por el uso de la tarjeta, si escoge la tarjeta del
(a) banco A. **(b)** banco B.

56. ¿Qué tarjeta es su mejor opción?

14.3 La verdad sobre los préstamos

Durante la década de los sesenta, el Congreso de Estados Unidos aprobó varias medidas para proteger la salud, la seguridad y el bienestar de los consumidores de ese país. Una de ellas fue la Ley de protección a los usuarios de crédito, aprobada en 1968, y que entró en vigor en 1969, conocida comúnmente como **Ley de la verdad sobre los préstamos**.

En esta sección analizaremos dos aspectos importantes de esta ley:

1. ¿Cómo puedo saber la tasa real anual de interés que me cobra un prestamista?
2. ¿Qué monto de los cargos por financiamiento me puedo ahorrar si decido liquidar un préstamo antes de lo estipulado?

La Comisión Federal de Comercio de Estados Unidos ofrece en el sitio http://www.ftc.gov un enorme cúmulo de **información gratuita para el consumidor**. Por ejemplo, se puede conocer sobre "abuso en los préstamos", "crédito", "robo de identidad", "inversiones", "privacidad" y muchos otros temas para el consumidor. En Estados Unidos, los consumidores pueden reportar un fraude en este sitio llenando una forma o llamando a este número: 1-877 FTC HELP.

Tasa anual de interés (TAI) La primera de las preguntas anteriores surgió porque cada prestamista calculaba y describía los intereses que cobraba de forma diferente. Por ejemplo, ¿cómo se compara el 1.5% mensual en Sears con el 9% de interés añadido anual en una mueblería? La Ley de la verdad sobre los préstamos estandarizó la llamada tasa real de interés anual", o **tasa anual de interés**, que se designa por lo general como **TAI**. Todos los vendedores (distribuidores de automóviles, tiendas, bancos, agentes de seguros, compañías de tarjetas de crédito, etc.) deben informar al cliente de todos los detalles de la TAI cuando éste pregunte por ella, y el contrato debe estipular la TAI, aunque el cliente no lo pida de manera expresa. Esto le permite al prestatario comparar con mayor facilidad los verdaderos costos de los distintos préstamos.

En teoría, usted como prestatario no tendría que calcular la TAI personalmente, pero puede verificar el valor que indica el prestamista, si usted así lo desea. Como las fórmulas para determinar la TAI son muy complicadas, resulta más sencillo usar la tabla que proporciona el Banco de la Reserva Federal de Estados Unidos. Nosotros le mostramos una versión abreviada en la tabla 3. En ella identificamos los valores de la TAI al medio por ciento más cercano a partir de 8.0% y hasta 14.0%, que es el rango que debe regir en la mayor parte de los casos. (Puede obtener una tabla más completa en su banco local.) Nuestra tabla está diseñada para aplicarse a préstamos que exigen pagos *mensuales* y que muestran las extensiones más comunes en préstamos al consumidor, de 6 a 60 meses. Aparte de las hipotecas de las casas, que se estudian en la sección siguiente, estas condiciones caracterizan a la mayor parte de los préstamos de plazo fijo para el consumidor.

La tabla 3 relaciona las tres cantidades siguientes.

TAI = tasa real de interés anual (se muestra a lo largo de la parte superior)

n = número total de pagos mensuales programados (se muestra en la parte izquierda)

h = cargo por financiamiento por cada \$100 de cantidad financiada (se muestra en el cuerpo de la tabla)

Más adelante en esta sección, proporcionaremos una fórmula que se relaciona con esta tabla. Sin embargo, como verá entonces, expresa h en términos de n y de la TAI y *no* es fácil despejar para expresar la TAI en términos de n y h. De aquí que proporcionemos la tabla para determinar los valores de la TAI.

La aplicación de la tabla 3 se ilustra en el ejemplo siguiente, en donde encontrarmos la tasa real anual de interés (TAI) para el ejemplo 1 de la sección anterior.

TABLA 3 Tasa anual de interés (TAI) para préstamos con pagos mensuales

Número de pagos mensuales (n)	Tasa de interés anual (TAI)												
	8.0%	**8.5%**	**9.0%**	**9.5%**	**10.0%**	**10.5%**	**11.0%**	**11.5%**	**12.0%**	**12.5%**	**13.0%**	**13.5%**	**14.0%**
	(Cargo por financiamiento por cada \$100 de monto financiado) (h)												
6	\$2.35	\$2.49	\$2.64	\$2.79	\$2.94	\$3.08	\$3.23	\$3.38	\$3.53	\$3.68	\$3.83	\$3.97	\$4.12
12	4.39	4.66	4.94	5.22	5.50	5.78	6.06	6.34	6.62	6.90	7.18	7.46	7.74
18	6.45	6.86	7.28	7.69	8.10	8.52	8.93	9.35	9.77	10.19	10.61	11.03	11.45
24	8.55	9.09	9.64	10.19	10.75	11.30	11.86	12.42	12.98	13.54	14.10	14.66	15.23
30	10.66	11.35	12.04	12.74	13.43	14.13	14.83	15.54	16.24	16.95	17.66	18.38	19.10
36	12.81	13.64	14.48	15.32	16.16	17.01	17.86	18.71	19.57	20.43	21.30	22.17	23.04
48	17.18	18.31	19.45	20.59	21.74	22.90	24.06	25.23	26.40	27.58	28.77	29.97	31.17
60	21.66	23.10	24.55	26.01	27.48	28.96	30.45	31.96	33.47	34.99	36.52	38.06	39.61

EJEMPLO 1 Recuerde que los Hoang (del ejemplo 1 de la sección 14.2) pagaron \$500 en efectivo sobre una compra de \$2700 y aceptaron pagar el balance a una tasa de 7% de interés añadido durante dos años. Determine la TAI para su préstamo.

Como se mostró en la sección anterior, la cantidad total financiada fue

$$\text{Precio de compra} - \text{pago en efectivo} = \$2700 - \$500 = \$2200,$$

y el cargo por financiamiento (interés) fue de

$$I = Prt = \$2200 \times .07 \times 2 = \$308.$$

```
2200*.07*2
                308
(308/2200)*100
                 14
```

Éstos son los cálculos que se necesitan para la solución del ejemplo 1.

A continuación, encuentre el cargo por financiamiento por cada $100 de la cantidad financiada. Para ello, divida el cargo por financiamiento entre la cantidad financiada, y luego multiplíquelo por $100.

$$\begin{pmatrix}\text{Cargo por financiamiento}\\ \text{por cada \$100 financiados}\end{pmatrix} = \frac{\text{Cargo por financiamiento}}{\text{Cantidad financiada}} \times \$100$$

$$= \frac{\$308}{\$2200} \times \$100 = \$14$$

Esta cantidad, $14, representa h, es decir, el cargo por financiamiento por cada $100 de la cantidad financiada. Puesto que el préstamo fue pactado a 24 meses, busque el renglón que corresponde a "24 pagos mensuales" en la tabla ($n = 24$). Después recórrala a lo largo hasta dar con el valor más cercano a $14.00, que es $14.10. Desde ese punto, busque hacia arriba en esa columna para encontrar la TAI, 13.0% (al medio por ciento más cercano). En este caso, un interés añadido de 7% equivale a una TAI de 13.0%. ■

```
48*185-7454
             1426.00
(1426/7454)*100
              19.13
```

Éstos son los cálculos que se necesitan para la solución del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Después de hacer un adelanto por su automóvil nuevo, usted aún debe $7454. Si acepta liquidar el balance en 48 pagos mensuales de $185 cada uno, ¿cuál es la TAI sobre su préstamo?

Primero, determine el cargo por financiamiento.

$$\begin{aligned}\text{Cargo por financiamiento} &= \text{total de pagos} - \text{cantidad financiada}\\ &= 48 \times \$185 - \$7454\\ &= \$1426\end{aligned}$$

Ahora, determine el cargo por financiamiento por cada $100 financiados, como en el ejemplo 1.

$$\begin{pmatrix}\text{Cargo por financiamiento}\\ \text{por cada \$100 financiados}\end{pmatrix} = \frac{\text{Cargo por financiamiento}}{\text{Cantidad financiada}} \times \$100$$

$$= \frac{\$1426}{\$7454} \times \$100 = \$19.13$$

Encuentre el renglón correspondiente a "48 pagos" en la tabla, lea a lo largo hasta encontrar el número más cercano a 19.13, que es 19.45. Desde ahí busque hacia arriba para encontrar la TAI, que es de 9.0%. ■

Interés no devengado La pregunta 2 al inicio de esta sección surge cuando un prestatario decide, por una u otra razón, liquidar un préstamo a plazo fijo antes de lo programado. En tal caso, lo que ocurre es que el prestamista no ha prestado la cantidad ni en el tiempo que se había planeado y, por lo tanto, en realidad no ha "devengado" el cargo total por financiamiento que se había pactado.

Si un préstamo se salda antes, la cantidad en que se reduce el cargo por financiamiento original se denomina **interés no devengado**. Estudiaremos dos métodos comunes para calcularlo, el **método actuarial** y la **regla del 78**. La Ley de la verdad sobre los préstamos exige que el método para calcular este reembolso (o reducción) de un cargo por financiamiento se informe en el momento en que se inicia el préstamo. Cualquiera que sea el método utilizado, el prestatario en realidad no puede ahorrar todos los intereses no devengados, ya que el prestamista tiene derecho a imponer una **sanción por pago anticipado** para recuperar ciertos costos en los que hubiera incurrido. La intención del prestamista de imponer una sanción en caso de ocurrir un pago anticipado también debe estipularse claramente al otorgarse el préstamo.

Consumer Information Center
Pueblo, CO 81009
www.pueblo.gsa.gov
719-948-4000

Los **derechos y obligaciones** se aplican a todas las cuentas de crédito, y el consumidor debe leer todas las cláusulas que provee el prestamista. Las leyes de *Facturación clara de los créditos* y de *Informe claro de los créditos* regulan, entre otras cosas, los procedimientos de facturación y de inconformidades en la facturación, así como cuestiones relacionadas con la revelación de información sobre los consumidores.

Si usted ha solicitado una cuenta de crédito, un préstamo personal, un seguro o un empleo, entonces la información de su trabajo y su domicilio, la manera en que paga sus cuentas y si ha estado demandado, ha sido arrestado o ha caído en bancarrota aparece en los archivos de las Agencias de Crédito al Consumidor (Buró de Crédito) que venden esta información a los acreedores, patrones, aseguradores y otros negocios.

Para información más completa de temas sobre el consumidor, puede solicitar de forma gratuita el *Consumer Information Catalog* del Centro de Información al Consumidor. (La información del contacto aparece en la parte superior de esta nota.)

Ahora formularemos e ilustraremos ambos métodos para el cálculo del interés no devengado.

Interés no devengado: método actuarial

Para un préstamo a plazo fijo que exija pagos *mensuales* y que se liquide antes de lo programado, supongamos que

R = pago mensual regular

k = número restante de pagos programados (*después* del pago actual)

h = cargo por financiamiento por cada \$100, correspondientes a un préstamo con el mismo TAI y k pagos mensuales

Por lo tanto, el **interés no devengado**, u, está dado por

$$u = kR\left(\frac{h}{\$100 + h}\right).$$

Una vez que se haya calculado (por cualquier método) el interés no devengado, u, la cantidad requerida para saldar el préstamo, de manera anticipada, se determina con facilidad. Consiste en el pago regular presente más los k pagos futuros adicionales, menos el interés no devengado.

Monto de liquidación de un préstamo

Un préstamo a plazo fijo que exige R pagos mensuales regulares puede saldarse anticipadamente, junto con el pago actual. Si el préstamo original tiene k pagos adicionales programados (después del pago actual) y el interés no devengado es u, sin considerar posibles sanciones por pago anticipado, el **monto de la liquidación** está dada por

$$\textbf{Monto de liquidación} = (k+1)R - u$$

EJEMPLO 3 Suponga que obtiene un aumento de sueldo que no esperaba y desea liquidar el préstamo de su automóvil del ejemplo 2, al final de 3 años en lugar de pagar durante 4 años como se había convenido originalmente. Determine **(a)** el interés no devengado (la cantidad que se ahorrará por pagar el préstamo de manera anticipada), y **(b)** el "monto de la liquidación" (la cantidad requerida para saldar el préstamo al cabo de 3 años).

(a) Del ejemplo 2, recuerde que R = \$185 y la TAI = 9.0%. El pago actual es el número 36, de modo que $k = 48 - 36 = 12$. Utilice la tabla 3, con 12 pagos y una TAI del 9.0%, para obtener h = \$4.94. Por último, mediante la fórmula del método actuarial,

$$u = 12 \times \$185\left(\frac{\$4.94}{\$100 + \$4.94}\right) = \$104.51.$$

Mediante el método actuarial, ahorrará \$104.51 en intereses por saldar el préstamo anticipadamente.

```
12*185(4.94/(100
+4.94))
              104.51
(12+1)*185-104.5
1
             2300.49
```

Éstos son los cálculos necesarios para la solución del ejemplo 3.

(b) El monto de liquidación puede determinarse como sigue.

$$\text{Monto de liquidación} = (12 + 1)\$185 - \$104.51 = \$2300.49.$$

El pago necesario para liquidar el préstamo al cabo de 36 meses es de $2300.49. ■

En virtud de que el método actuarial está basado en el valor de la TAI, es quizá el mejor método. Sin embargo, algunos prestamistas aún emplean el segundo método, la **regla del 78**, que se basa en una hipótesis de aproximación. La regla del 78 funciona como sigue.

Interés no devengado: regla del 78

Para un préstamo a plazo fijo que exija pagos *mensuales* y que se liquida antes de lo programado, sea

F = cargo por financiamiento original

n = número de pagos programados originalmente

k = número restante de pagos programados (*después* del pago actual)

Por lo tanto, el **interés no devengado**, u, está dado por

$$u = \frac{k(k+1)}{n(n+1)} \times F.$$

```
(12(12+1))/(48(4
8+1))*1426
              94.58
(12+1)*185-94.58
             2310.42
```

Éstos son los cálculos necesarios para la solución del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Suponga de nuevo que el préstamo del ejemplo 2 se liquida al momento de pagar la mensualidad número 36. Aplique la regla del 78 para determinar **(a)** el interés no devengado y **(b)** la cantidad que deberá pagar para saldar el préstamo.

(a) Según el ejemplo 2, el cargo por financiamiento original es $F = \$1426$. Además, $n = 48$ y $k = 12$. Por la regla del 78,

$$u = \frac{12(12 + 1)}{48(48 + 1)} \times \$1426 = \$94.58.$$

Por medio de la regla del 78, ahorrará $94.58 en intereses, que es $9.93 *menos* que el ahorro obtenido por el método actuarial.

(b) En este caso, el monto de liquidación está dado por

$$\text{Monto de liquidación} = (12 + 1)\$185 - \$94.58 = \$2310.42.$$

El monto de liquidación es de $2310.42, es decir, $9.93 *más* que el monto de liquidación que se calculó por medio del método actuarial en el ejemplo 3. ■

Cuando la regla del 78 se introdujo por primera vez en la ley financiera (por parte de la legislatura de Indiana en 1935), los préstamos por lo común se pactaban a un año o menos, las tasas de interés eran relativamente bajas y las cantidades que se prestaban eran menores que las que suele haber ahora. Por estas razones, la regla del 78 era en ese entonces, aceptablemente precisa. Sin embargo, en la actualidad, con tablas y/o calculadoras tan precisas, la regla del 78 se utiliza con mucha menor frecuencia que antes.*

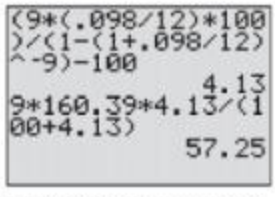
*Para un excelente análisis de las deficiencias de la regla del 78, vea el artículo de Alonzo F. Johnson, "The Rule of 78: A Rule that Outlived Its Useful Life", en *Mathematics Teacher*, septiembre de 1988.

Suponga que desea calcular con toda precisión el interés no devengado (en otras palabras, no confía en la regla del 78), pero el valor de la TAI, o el número de pagos programados, o el número restante de pagos (o al menos uno de los tres) no está incluido en la tabla 3. Entonces, ¿qué sigue? En realidad, con el método actuarial usted puede evaluar h (el cargo por financiamiento por cada \$100 financiados) utilizando la misma fórmula que la aplicada para generar la tabla 3.

Cargo por financiamiento por cada \$100 financiados

Si un préstamo a plazo fijo exige n pagos mensuales iguales y la TAI denota la tasa real de interés anual para el préstamo (como un decimal), entonces h, el **cargo por financiamiento por cada \$100 financiados**, está dado por

$$h = \frac{n \times \frac{\text{TAI}}{12} \times \$100}{1 - \left(1 + \frac{\text{TAI}}{12}\right)^{-n}} - \$100.$$



Éstos son los cálculos necesarios para la solución del ejemplo 5(a).

EJEMPLO 5 Sergei pidió \$4000 prestados para comprar un equipo de música para su banda. El contrato de su préstamo establece una TAI de 9.8% y estipula 28 pagos mensuales de \$160.39 cada uno. Sergei decide liquidar la totalidad del préstamo al llegar al decimonoveno pago. Determine **(a)** el interés no devengado y **(b)** el monto de liquidación.

(a) Primero determine h a partir de la fórmula del cargo por financiamiento que dimos anteriormente. (No olvide utilizar el número restante de pagos, 28 – 19, como el valor de n.)

$$h = \frac{9 \times \frac{.098}{12} \times \$100}{1 - \left(1 + \frac{.098}{12}\right)^{-9}} - \$100 = \$4.13$$

Ahora utilice la fórmula actuarial para el interés no devengado.

Pago mensual regular: $R = \$160.39$

Número restante de pagos: $k = 28 - 19 = 9$

Cargo por financiamiento por cada \$100: $h = \$4.13$

$$u = 9 \times \$160.39 \times \frac{\$4.13}{\$100 + \$4.13} = \$57.25$$

La cantidad de intereses que Sergei ahorrará es de \$57.25.

(b) El monto de liquidación = (9 + 1)(\$160.39) − \$57.25 = \$1546.65.
Para saldar el préstamo, Sergei debe pagar \$1546.65. ■

PARA REFLEXIONAR

Para saber por qué la regla del 78 (para intereses no devengados) tiene ese nombre , considere un préstamo a 12 meses. Primero, calcule la suma de los números naturales del 1 al 12:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78.$$

Imagine que el cargo total por financiamiento se divide en 78 partes iguales y el principal prestado en 12 partes iguales. *Suponga* que, para los diferentes meses del préstamo, la fracción del principal utilizado por el prestatario y por lo tanto, la fracción del cargo por financiamiento que se debe, sería como se muestra en la tabla de la derecha.

Ahora, suponga que el préstamo se liquida anticipadamente, digamos cuando aún quedan cuatro pagos por hacer. La parte (fracción) del cargo por financiamiento que uno se ahorraría puede encontrarse comenzando desde la parte inferior de la columna derecha de la tabla:

$$\frac{1}{78} + \frac{2}{78} + \frac{3}{78} + \frac{4}{78} = \frac{1+2+3+4}{78} = \frac{10}{78}.$$

Mes	Fracción del principal del préstamo utilizado por el prestatario	Fracción del cargo por financiamiento que se adeuda
1	12/12	12/78
2	11/12	11/78
3	10/12	10/78
4	9/12	9/78
5	8/12	8/78
6	7/12	7/78
7	6/12	6/78
8	5/12	5/78
9	4/12	4/78
10	3/12	3/78
11	2/12	2/78
12	1/12	1/78
		78/78 − 1

Para análisis en grupo

Divida a la clase en tres (o más) grupos. Cada uno deberá repetir el desarrollo anterior para los siguientes ejemplos de préstamos. (Los grupos adicionales eligen otros números.)

(a) 10 pagos en total; liquidar cuando restan 3 pagos
(b) 18 pagos en total; liquidar cuando restan 5 pagos
(c) 24 pagos en total; liquidar cuando restan 8 pagos

1. Como antes, obtenga la parte del cargo por financiamiento que debe ahorrarse en su caso particular.
2. Determine cómo están relacionados el numerador y el denominador de su fracción con el número restante de pagos, k, y el número total de pagos, n, respectivamente.
3. ¿Ha demostrado usted la fórmula para la regla del 78? (*Una pista:* Escriba la fracción del cargo por financiamiento que se ahorrará como N/D.) Justifique cada uno de los siguientes enunciados.

$$N = 1 + 2 + \cdots + (k-1) + k$$

También,

$$N = k + (k-1) + \cdots + 2 + 1$$

$$2N = (k+1) + (k+1) + \cdots + (k+1) + (k+1)$$

$$2N = k(k+1)$$

$$N = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Del mismo modo, $D = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

De ahí que $$\frac{N}{D} = \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}.$$

Reúna a los grupos y si es necesario combine sus esfuerzos para justificar cada uno de los enunciados anteriores.

4. Explique por qué el nombre de "regla del 78" no es un nombre apropiado para este método para calcular los intereses no devengados.

14.3 EJERCICIOS

Redondee todas las respuestas monetarias al centavo más cercano, a menos que se indique lo contrario.

Determinar la verdadera tasa anual de interés *Determine la TAI (tasa anual de interés) al medio por ciento más cercano en cada uno de los ejercicios siguientes.*

	Monto financiado	Cargo por financiamiento	Número de pagos mensuales
1.	$1000	$75	12
2.	$1700	$202	24
3.	$6600	$750	30
4.	$5900	$1150	48

Determinar el pago mensual *Determine el pago mensual para cada uno de los siguientes puntos.*

	Precio de compra	Pago inicial	Cargo por financiamiento	Número de pagos mensuales
5.	$3000	$500	$250	24
6.	$4280	$450	$700	36
7.	$3950	$300	$800	48
8.	$8400	$2500	$1300	60

Determinar la verdadera tasa anual de interés *Determine la TAI (tasa anual de interés) al medio por ciento más cercano en cada uno de los siguientes puntos.*

	Precio de compra	Pago inicial	Tasa de interés añadido	Número de pagos
9.	$4190	$390	6%	12
10.	$3250	$750	7%	36
11.	$7480	$2200	5%	18
12.	$12,800	$4500	6%	48

Interés no devengado por medio del método actuarial *Cada uno de los siguientes préstamos se liquidó por completo antes de la fecha de vencimiento.* **(a)** *Consulte el valor de h en la tabla 3. Luego* **(b)** *utilice el método actuarial para determinar el monto de los intereses no devengados y* **(c)** *encuentre el monto de liquidación.*

	Pago mensual regular	TAI	Número restante de pagos programados después de la liquidación
13.	$346.70	11.0%	18
14.	$783.50	8.5%	12
15.	$595.80	9.5%	6
16.	$314.50	10.0%	24

Determinar el cargo por financiamiento y la verdadera tasa anual de interés *Para cada uno de los siguientes préstamos, determine* **(a)** *el cargo por financiamiento y* **(b)** *la TAI.*

17. Frank Barry financió la compra de una computadora de $1990 mediante 24 pagos mensuales de $91.50 cada uno.

18. Pat Peterson compró un remolque para caballos por $5090. Dio un pago inicial de $1240 y el resto a $152.70 mensuales durante $2\frac{1}{2}$ años.

19. Después de dar el pago inicial, a Mike Karelius aún le quedan por pagar $2000 por su nuevo tractor para jardín. Aceptó pagar mensualmente durante 18 meses al 6% de interés añadido.

20. Phil Givant liquidó el préstamo de $15,000 para su auto, a un plazo de 3 años con pagos mensuales de $487.54 cada uno.

Comparar el método actuarial y la regla del 78 para intereses no devengados *Cada uno de los siguientes préstamos se pagó por anticipado. Determine el interés no devengado mediante* **(a)** *el método actuarial y* **(b)** *la regla del 78.*

	Monto financiado	Pago mensual regular	Número total de pagos programados	Número restante de pagos programados después de la liquidación
21.	$3310	$201.85	18	6
22.	$10,230	$277.00	48	12
23.	$29,850	$641.58	60	12
24.	$16,730	$539.82	36	18

Interés no devengado mediante el método actuarial *Cada uno de los préstamos se liquidó antes de la fecha de vencimiento.* **(a)** *Obtenga el valor de h mediante la fórmula apropiada. Luego,* **(b)** *utilice el método actuarial para determinar el monto de los intereses no devengados y* **(c)** *determine el monto de liquidación.*

	Pago mensual regular	TAI	Número restante de pagos programados después de la liquidación
25.	$212	8.6%	4
26.	$575	9.33%	8

Comparación de opciones de préstamos *Wei-Jen Luan necesita un préstamo de* $5000 *para pagar los boletos de la temporada de los Kings para su familia. Ella puede pedir prestados los* $5000 *a una compañía financiera (al* 6.5% *de interés añadido por* 3 *años) o solicitar un préstamo de una asociación de crédito que exige* 36 *pagos mensuales de* $164.50 *cada uno. Utilice esta información para los ejercicios 27 al 30.*

27. Determine la TAI (al medio por ciento más cercano) de cada uno de los préstamos y decida cuál es la mejor opción para Wei-Jen.

28. Suponga que Wei-Jen toma el préstamo de la asociación de crédito. En el momento de su mensualidad número 30 decide que este préstamo es una carga incómoda y decide saldarlo. Si la asociación de crédito aplica la regla del 78 para calcular los intereses no devengados, ¿cuánto se ahorrará si paga el total ahora?

29. Si ella pagó el total en la mensualidad número 30 y la asociación de crédito aplica el método actuarial para calcular los intereses no devengados, ¿cuánto se ahorraría en el momento del pago número 30?

30. Bajo las mismas condiciones del ejercicio 29, ¿qué cantidad debe pagar Wei-Jen para saldar su préstamo?

✎ **31.** Describa por qué, en el ejemplo 1, la TAI y la tasa de interés añadido difieren. ¿Qué circunstancia es más legítima? ¿Por qué?

Aproximación de la TAI de una tasa de interés añadido *Para convertir una tasa de interés añadido a su correspondiente TAI, algunas personas recomiendan aplicar la fórmula*

$$\text{TAI} = \frac{2n}{n+1} \times r,$$

donde r es la tasa añadida y n es el número total de pagos.

32. Aplique la fórmula anterior para calcular la TAI (al medio por ciento más cercano) del préstamo del ejemplo 1 ($r = .07$, $n = 24$).

✎ **33.** Compare el valor de la TAI que obtuvo en el ejercicio 32 con su valor en el ejemplo 1. ¿Cuál es su conclusión?

La regla del 78 con sanción por pago anticipado *El contrato de crédito de un comerciante designa la regla del 78 para calcular los intereses no devengados, y también impone una "sanción por pagar antes del vencimiento". Si ocurriera cualquier pago antes de la fecha de vencimiento, se cargará un* 10% *adicional del cargo por financiamiento original. Determine el menor valor de k (pagos restantes después del pago actual) que daría como resultado cualquier ahorro neto en cada uno de los siguientes casos.*

34. 24 pagos programados originalmente

35. 36 pagos programados originalmente

36. 48 pagos programados originalmente

✎ *El método actuarial para calcular los intereses no devengados supone que, a lo largo de la vigencia del préstamo, el prestatario paga un interés a la tasa dada por la TAI por el dinero que en realidad está utilizando el prestatario. Cuando considere el pago completo, junto con el pago actual, piense en los pagos futuros k como si se aplicaran a un préstamo separado con la misma TAI, mientras que h sería el cargo por financiamiento por cada* $100 *de ese préstamo. Consulte la fórmula siguiente.*

$$u = kR\left(\frac{h}{\$100 + h}\right)$$

37. Describa en sus propias palabras la cantidad representada por

$$\frac{h}{\$100 + h}.$$

38. Describa en palabras la cantidad representada por kR.

39. Explique por qué el producto de las dos cantidades anteriores representa el interés no devengado.

✎ *Escriba sus respuestas a los ejercicios siguientes.*

40. ¿Cómo se puede justificar que un prestamista imponga una sanción por pago anticipado?

41. Discuta las razones por las que un prestatario podría querer saldar un préstamo anticipadamente.

42. Averigüe con qué agencia federal estadounidense puede ponerse en contacto si tiene dudas sobre el cumplimiento de la Ley de la verdad sobre los préstamos. (Cualquier banco o departamento de crédito de cualquier comercio debe poder ayudarle al respecto, o bien investigue a través de Internet.)

14.4 Compra de una casa



La **calefacción de una casa** es otro costo que puede llevarlo a lidiar con bancos y sujetarse a tasas de interés luego de que finalmente ha conseguido tener un techo sobre su cabeza. El techo que se aprecia en la fotografía cumple otras funciones, aparte de proteger a sus inquilinos de la lluvia. Tiene tubos receptores solares de vidrio que son parte del sistema de calefacción solar del edificio.

Durante décadas, ser propietario de una casa se ha considerado el punto central del "sueño americano". Y como las casas y los condominios, con el paso de los años, generalmente se han mantenido a la par de la tasa de inflación, han constituido también sólidas inversiones. Para la mayoría de la gente, comprar una casa representa la operación financiera más grande de su vida y ciertamente merece una cuidadosa atención.

Un préstamo, por una cantidad sustancial, con el fin de comprar una casa u otra propiedad o cualesquiera bienes raíces, cuyo pago se extiende por un largo periodo (tal vez 30 años) en el cual la propiedad misma se da en garantía del préstamo, se denomina **hipoteca**. (En algunas áreas, una hipoteca también se conoce como **escritura de fideicomiso**.) El tiempo hasta el pago final constituye el **plazo** de la hipoteca. La parte del precio de compra de la casa que el comprador paga al inicio se conoce como **pago inicial** (o *enganche* en algunas regiones). El **principal de la hipoteca** (la cantidad otorgada en préstamo) se determina restando el pago inicial del precio de compra.

Analizaremos ahora los tipos más comunes de hipotecas. Las agrupamos en dos categorías, **hipotecas de tasa fija** e **hipotecas de tasa ajustable**.

Hipotecas de tasa fija

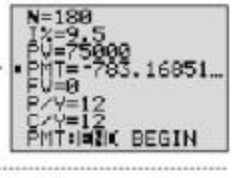
En una **hipoteca de tasa fija**, la tasa de interés permanece constante a lo largo del plazo y el balance del principal inicial junto con los intereses correspondientes al préstamo, se saldan al prestamista por medio de pagos regulares (de cantidad constante) y periódicos (suponemos que mensuales). A esto se le denomina **amortización** del préstamo. (Más adelante se estudian otros temas, además del principal y los intereses, que también pueden influir en el monto de las mensualidades.)

El pago mensual regular que se necesita para amortizar un préstamo depende de la cantidad financiada, el plazo del préstamo y la tasa de interés. Puede determinarse por medio de la siguiente fórmula.

Pago mensual regular

El **pago mensual regular** que se requiere para saldar un préstamo de P dólares, junto con los intereses a una tasa anual de r, en un plazo de t años, está dado por

$$R = \frac{P\left(\frac{r}{12}\right)\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}-1}.$$



La flecha indica un pago de $783.17, lo cual confirma el resultado del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Determine el pago mensual necesario para amortizar una hipoteca de $75,000 al 9.5% de interés anual durante 15 años.

Si aplicamos la fórmula anterior, encontramos

$$R = \frac{\$75{,}000\left(\frac{.095}{12}\right)\left(1+\frac{.095}{12}\right)^{(12)(15)}}{\left(1+\frac{.095}{12}\right)^{(12)(15)}-1} = \$783.17.$$

■

Si tiene una calculadora programable o una calculadora financiera, puede almacenar la fórmula anterior y minimizar el trabajo. Otro método consiste en usar una herramienta como la tabla 4, que proporciona valores de pago (por cada $1000 de principal) para los intervalos típico de plazos de las hipotecas y sus tasas de interés. Las entradas en la tabla muestran cinco lugares decimales, de modo que pueda alcanzarse la precisión, al centavo más cercano, para mostrar los importes de hipotecas normales. El ejemplo 2 ilustra el uso de la tabla 4.



Bajo las condiciones del ejemplo 2, el pago mensual es de $822.41. Compare este resultado con el método de la tabla.

EJEMPLO 2 Determine el pago mensual necesario para amortizar una hipoteca de $98,000 al 9% durante 25 años.

En la tabla 4, localice el renglón de 9% y luego vaya a la columna de 25 años, donde encontrará la entrada de 8.39196. Como éste es el importe del pago mensual necesario para amortizar una hipoteca de $1000 y el préstamos que nos ocupa es por $98,000, el pago mensual necesario será de

$$98 \times \$8.39196 = \$822.41.$$

■

TABLA 4 Pagos mensuales para saldar el principal y los intereses sobre una hipoteca de $1000

Tasa anual (r)	Plazo de la hipoteca (en años) (t)					
	5	10	15	20	25	30
5.0%	$18.87123	$10.60655	$7.90794	$6.59956	$5.84590	$5.36822
5.5%	19.10116	10.85263	8.17083	6.87887	6.14087	5.67789
6.0%	19.33280	11.10205	8.43857	7.16431	6.44301	5.99551
6.5%	19.56615	11.35480	8.71107	7.45573	6.75207	6.32068
7.0%	19.80120	11.61085	8.98828	7.75299	7.06779	6.65302
7.5%	20.03795	11.87018	9.27012	8.05593	7.38991	6.99215
8.0%	20.27639	12.13276	9.55652	8.36440	7.71816	7.33765
8.5%	20.51653	12.39857	9.84740	8.67823	8.05227	7.68913
9.0%	20.75836	12.66758	10.14267	8.99726	8.39196	8.04623
9.5%	21.00186	12.93976	10.44225	9.32131	8.73697	8.40854
10.0%	21.24704	13.21507	10.74605	9.65022	9.08701	8.77572
10.5%	21.49390	13.49350	11.05399	9.98380	9.44182	9.14739
11.0%	21.74242	13.77500	11.36597	10.32188	9.80113	9.52323
11.5%	21.99261	14.05954	11.68190	10.66430	10.16469	9.90291
12.0%	22.24445	14.34709	12.00168	11.01086	10.53224	10.28613
12.5%	22.49794	14.63762	12.32522	11.36141	10.90354	10.67258
13.0%	22.75307	14.93107	12.65242	11.71576	11.27835	11.06200
13.5%	23.00985	15.22743	12.98319	12.07375	11.65645	11.45412
14.0%	23.26825	15.52664	13.31741	12.43521	12.03761	11.84872
14.5%	23.52828	15.82868	13.65501	12.79998	12.42163	12.24556
15.0%	23.78993	16.13350	13.99587	13.16790	12.80831	12.64444

La ley de reforma a los impuestos de 1986 ofrece otra ventaja a los propietarios de viviendas y también alienta a los compradores a elegir pagos mínimos para el pago inicial e hipotecas más grandes. Básicamente, el interés sobre la cantidad, originalmente prestada, para la compra de una casa sigue siendo deducible de impuestos, mientras que la mayor parte de los otros gastos de intereses no lo son. El propietario de una casa que ha logrado reducir, con el paso de los años, su deuda (mediante pagos al principal) puede obtener un *préstamo de ahorro para vivienda* para otros propósitos y seguir deduciendo los pagos de intereses (por la cantidad de la hipoteca original de la casa). Las tasas en los préstamos de ahorro para viviendas (segundas hipotecas) por lo general son de uno o dos puntos porcentuales más que las tasas para las primeras hipotecas.

Como el prestatario paga intereses sólo sobre el dinero que debe realmente en un mes, los intereses en los préstamos de bienes raíces se calculan sobre el balance decreciente del préstamo. Cada pago mensual igual se aplica primero al interés para el mes anterior. El resto del pago se aplica, luego para reducir el principal que se adeuda. Los pagos de los primeros años de un préstamo de bienes raíces se destinan en su mayor parte a los intereses; sólo una pequeña cantidad se usa para reducir el principal. El monto de los intereses disminuye cada mes, de modo que cada vez serán mayores las cantidades que se irán aplicando al pago del principal. Durante los últimos años del préstamo, la mayor parte de los pagos mensuales se aplica al principal. (Vea la tabla 5 en la página 825.)

Una **tabla de amortización** (o **programa de pagos**) muestra la asignación de pagos para intereses y principal, así como el balance del principal para cada mes durante la vigencia del préstamo. Para obtener tablas con estos desgloses uno puede acudir directamente con el prestamista, o bien hacer el cálculo en una hoja electrónica. Los pasos siguientes muestran cómo funcionan los cálculos. (Observe que en el paso 1 se aplica la fórmula del interés simple $I = Prt$.)

Paso 1: $\text{Interés para el mes} = \left(\begin{matrix}\text{Balance anterior}\\ \text{del principal}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{Tasa anual}\\ \text{de interés}\end{matrix}\right)\left(\frac{1}{12}\text{ año}\right)$

Paso 2: $\text{Pago al principal} = \left(\begin{matrix}\text{Pago}\\ \text{mensual}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{Interés para}\\ \text{el mes}\end{matrix}\right)$

Paso 3: $\text{Balance nuevo del principal} = \left(\begin{matrix}\text{Balance anterior}\\ \text{del principal}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{Pago al}\\ \text{principal}\end{matrix}\right)$

Esta secuencia de pasos se hace al final de cada mes. El balance nuevo obtenido en el paso 3 se convierte en el balance del paso 1 para el mes siguiente.

EJEMPLO 3 Los Peterson pagaron durante muchos años una hipoteca de $60,000 a un plazo de 30 años y una tasa de interés de 4.5%. Prepare una tabla de amortización para los primeros dos meses de su hipoteca.

Ya que la tabla 4 no incluye tasas de interés tan bajas como 4.5%, apliquemos la fórmula para el pago regular mensual.

$$R = \frac{\$60{,}000\left(\frac{.045}{12}\right)\left(1+\frac{.045}{12}\right)^{(12)(30)}}{\left(1+\frac{.045}{12}\right)^{(12)(30)}-1} = \$304.01$$

Las **casas y condominios** en ocasiones se pueden comprar mediante un pago inicial muy bajo (en Estados Unidos, por medio del inventario del Departamento de desarrollo urbano y de la vivienda). Para información actualizada, consulte a sus compañías locales de bienes raíces.

Ahora aplique los pasos 1 a 3.

Paso 1: Interés para el mes = $60,000(.045)(1/12) = $225

Paso 2: Pago al principal = $304.01 − $225 = $79.01

Paso 3: Balance nuevo del principal = $60,000 − $79.01 = $59,920.99

Ahora, empezando con el balance anterior de $59,920.99, repita los mismos pasos para el segundo mes.

Interés para el mes = $59,920.99(.045)(1/12) = $224.70

Pago al principal = $304.01 − $224.70 = $79.31

Balance nuevo del principal = $59,920.99 − $79.31 = $59,841.68

Estos cálculos se resumen a continuación.

Tabla de amortización

Número de pagos	Pago a los intereses	Pago al principal	Balance del principal
			$60,000.00
1	$225.00	$79.01	$59,920.99
2	$224.70	$79.31	$59,841.68

■

Las tasas de interés prevalecientes para las hipotecas han variado de manera considerable a lo largo de los años. La tabla 5 muestra parte del programa de amortización para el préstamo del matrimonio Peterson, del ejemplo 3, y también presenta los valores que habrían tenido que pagar si su tasa de interés hubiera sido de 14.5% en vez de 4.5%. Observe qué papel tan importante juegan los intereses incluidos en la hipoteca de esta casa. A una tasa de 4.5% (baja), se pagaron $49,444.03 de intereses junto con el principal de $60,000. A una tasa de 14.5%, la suma se elevará, sólo en intereses, a un total de $204,504.88.

TABLA 5 Programas de amortización para una hipoteca de $60,000 a 30 años

Interés de 4.5% Pago mensual: $304.01				Interés de 14.5% Pago mensual: $734.73			
Número de pago	**Pago a los intereses**	**Pago al principal**	**Balance del principal**	**Número de pago**	**Pago a los intereses**	**Pago al principal**	**Balance del principal**
Inicial→			60,000.00	Inicial→			60,000.00
1	225.00	79.01	59,920.99	1	725.00	9.73	59,990.27
2	224.70	79.31	59,841.68	2	724.88	9.85	59,980.42
3	224.41	79.60	59,762.08	3	724.76	9.97	59,970.45
12	221.68	82.33	59,032.06	12	723.63	11.11	59,875.11
60	205.47	98.54	54,694.75	60	714.96	19.77	59,149.53
175	152.47	151.54	40,506.65	175	656.05	78.69	54,214.82
176	151.90	152.11	40,354.54	176	655.10	79.64	54,135.18
236	113.60	190.41	30,102.65	236	571.02	163.72	47,092.76
237	112.88	191.13	29,911.52	237	569.04	165.70	46,927.07
240	110.73	193.28	29,333.83	240	562.96	171.78	46,417.87
303	59.33	244.68	15,575.66	303	368.65	366.09	30,142.47
304	58.41	245.60	15,330.05	304	364.22	370.51	29,771.96
359	2.27	301.74	302.88	359	17.44	717.29	725.96
360	1.14	302.88	0.00	360	8.77	725.96	0.00
Totales:	49,444.03	60,000.00		Totales:	204,504.88	60,000.00	

Además del principal y de los intereses de su hipoteca, los propietarios de casas también deben pagar al menos otros gastos periódicos importantes: los **impuestos sobre la propiedad** (por lo regular, determinados por la ciudad o el condado) y el **seguro del propietario** (que cubre daños potenciales contra incendio, accidentes climáticos y otros). Éstos suelen pagarse de una **cuenta de reserva** (también llamada **entrega en depósito** o **cuenta en depósito**) que conserva el prestamista. El prestatario debe pagar una cantidad cada mes, junto con los costos de amortización, de modo que la cuenta en reserva sea suficiente para cubrir impuestos y primas de seguro cuando deban pagarse. (En algunos casos, el propietario de la casa paga los impuestos de manera directa a la autoridad correspondiente y las primas de seguros directamente a una compañía de seguros, de forma totalmente separada de los pagos de la hipoteca al prestamista.)

EJEMPLO 4 El señor y la señora Carlton han adquirido una hipoteca de $105,000 a 8.5% durante 20 años. Los impuestos sobre la propiedad ($1040 por año) y el seguro del propietario ($480 por año) sobre su casa nueva se pagarán de la cuenta de reserva del prestamista. Determine los pagos mensuales que deben hacer al prestamista.

Los costos mensuales de amortización del préstamo (principal e intereses) se determinan usando la entrada 8.67823 de la tabla 4.

$$\text{Pago de principal e intereses} = 105 \times \$8.67823 = \$911.21$$

Los pagos mensuales de impuestos y seguro serán una doceava parte de los importes anuales.

$$\text{Pago de impuestos y seguro} = \frac{\$1040 + \$480}{12} = \$126.67$$

El pago mensual necesario es de:

$$\begin{aligned}\text{Principal e intereses} + \text{impuestos y seguro} &= \$911.21 + \$126.67 \\ &= \$1037.88.\end{aligned}$$

■

Hipotecas de tasa ajustable La industria de los préstamos ha introducido muchas variaciones a la hipoteca básica de tasa fija, con el propósito de reducir el riesgo para los prestamistas, pero también para permitir que los préstamos para viviendas sean accesibles a más personas. Una **hipoteca de tasa ajustable (HTA)**, también conocida como **hipoteca de tasa variable (HTV)**, por lo general comienza con una tasa más baja que la de préstamos análogos de tasa fija, pero la tasa cambia periódicamente para reflejar los cambios en las tasas prevalecientes. Para entender cómo funcionan las HTA, es necesario conocer sobre *índices, márgenes, descuentos, topes, amortización negativa* y *capacidad de emisión.*

La tasa de interés de una HTA puede cambiar cada 1, 3 o 5 años (en ocasiones, más a menudo). Al cambio de frecuencia en la tasa se le conoce como **periodo de ajuste**. Por ejemplo, una HTA con un periodo de ajuste de 1 año se denomina HTA de 1 año. Cuando la tasa cambia, por lo regular también se modifica el pago. Estos ajustes son provocados por las fluctuaciones en el **índice** sobre el cual está basada la tasa de la hipoteca. Los índices que se utilizan varían mucho, e incluyen las tasas de seguridad de los Bonos del Tesoro de Estados Unidos a 1, 3 y 5 años. También se utilizan índices de los "costos de los fondos" nacionales o regionales.

Para determinar una tasa de interés particular, el prestamista añadirá unos cuantos puntos porcentuales, que se denominan **margen**, al índice aplicable. Tanto el índice como el margen son importantes para determinar el costo del préstamo.

EJEMPLO 5 Suponga que usted paga $20,000 de pago inicial por una casa de $180,000 y adquiere una HTA de 1 año por un plazo de 30 años. El prestamista utiliza el índice del Tesoro a 1 año (actualmente al 6%) y un margen de 3%.

(a) Determine su pago mensual para el primer año.

Primero determine el monto de su hipoteca:

$$\begin{aligned}\text{Monto de la hipoteca} &= \text{costo de la casa} - \text{pago inicial} \\ &= \$180{,}000 - \$20{,}000 \\ &= \$160{,}000.\end{aligned}$$

La tasa de interés en su primer año será de

$$\text{Tasa de interés de la HTA} = \text{tasa del índice} + \text{margen} = 6\% + 3\% = 9\%.$$

Las **hipotecas respaldadas por el gobierno de Estados Unidos**, incluidos los préstamos de la Administración federal de la vivienda (Federal Housing Administration, FHA) y los préstamos de la Administración de veteranos (Veterans Administration, VA), llevan una garantía gubernamental para proteger al prestamista en caso de que el prestatario deje de pagar el préstamo. A los que no califiquen para estos préstamos y en su lugar obtienen un préstamo convencional, por lo común se les solicita que compren un seguro privado de hipoteca como parte del paquete del préstamo.

En la segunda mitad del siglo XX, la cantidad de crédito en seguros de vida (para propósitos de cobertura de deuda del consumidor) creció 500 veces, mientras que el seguro de vida colectivo sólo aumentó 200 veces, los seguros ordinarios de vida aumentaron alrededor de 60 veces y los seguros de vida industriales disminuyeron en términos reales. (*Fuente*: American Council of Life Insurance.)

Ahora, de la tabla 4 (utilizando 9% durante 30 años) obtenemos 8.04623, de modo que

$$\text{Pago mensual durante el primer año} = 160 \times \$8.04623 = \$1287.40.$$

(b) Suponga que después de un año el índice del Tesoro a 1 año aumentó a 7.3%. Determine el pago mensual para el segundo año.

Durante el primer año, se pagó una pequeña cantidad del principal de la hipoteca, de modo que, en términos efectivos ahora tendremos un nuevo "importe de la hipoteca". (Además, el plazo será de 1 año menos que el plazo original.) El programa de amortización para el primer año (que no se muestra aquí) arroja un balance del préstamo, después del duodécimo pago mensual, de $158,906.83.

Asimismo, para el segundo año,

$$\text{Tasa de interés de la HTA} = \text{tasa del índice} + \text{margen} = 7.3\% + 3\% = 10.3\%.$$

Como la tabla 4 no incluye un interés de 10.3%, recurrimos a la fórmula del pago mensual regular, utilizando el nuevo balance de la hipoteca y aplicando también 29 años como plazo restante.

$$\text{Pago mensual durante el segundo año} = \frac{\$158{,}906.83\left(\frac{.103}{12}\right)\left(1+\frac{.103}{12}\right)^{348}}{\left(1+\frac{.103}{12}\right)^{348}-1}$$

$$= \$1437.38$$

El primer ajuste a la tasa de interés de la HTA hizo que el pago mensual se elevara a $1437.38, que es un aumento de $149.98 sobre el pago mensual inicial. ■

En ocasiones, las tasas iniciales ofrecidas sobre una HTA son menores que la suma del índice y el margen. Tal **descuento** suele ocurrir porque el vendedor (por ejemplo, un constructor de casas nuevas) le paga al prestamista una cantidad para reducir la tasa de interés inicial del comprador. Esta operación se denomina "reducción al comprador". Los descuentos dan como resultado pagos mensuales iniciales más bajos, pero con frecuencia se combinan con comisiones iniciales más altas, o incluso con un aumento en el precio de la casa. Además, cuando la reducción o descuento expira, uno puede experimentar un aumento considerable en los pagos mensuales.

EJEMPLO 6 Retomando el ejemplo 5, suponga que con el descuento al comprador su tasa inicial (al primer año) se reduce en 2%. Determine sus pagos mensuales para el primero y el segundo año.

La tasa del índice del 6% se descuenta a 4%. Sumando el 3% del margen se obtiene una tasa para el primer año de 7% (en lugar del 9% del ejemplo 5), de modo que la entrada en la tabla 4 es de 6.65302, y

$$\text{Pago mensual durante el primer año} = 160 \times \$6.65302 = \$1064.48.$$

El programa de amortización muestra un balance al final del primer año de $158,374.76. En ese momento expira el descuento el índice aumenta a 7.3%, de modo que el segundo año,

$$\text{Tasa de interés de la HTA} = \text{tasa del índice} + \text{margen} = 7.3\% + 3\% = 10.3\%.$$

Si aplicamos la fórmula del pago mensual, con $r = 10.3\%$ y $t = 29$,

$$\text{Pago mensual durante el segundo año} = \frac{\$158{,}374.76\left(\frac{.103}{12}\right)\left(1+\frac{.103}{12}\right)^{348}}{\left(1+\frac{.103}{12}\right)^{348}-1}$$

$$= \$1432.57.$$

En este caso, el pago mensual de $1064.48 parece considerablemente mejor que el de $1287.40 del ejemplo 5, pero al inicio del segundo año, los pagos mensuales aumentan $368.09. Tal ajuste le podría provocar una "crisis de pagos". ■

Para reducir el riesgo de sufrir una crisis de pagos, asegúrese de que la HTA que obtenga incluya algún **tope**. Un **tope en la tasa de interés** limita la cantidad a la que puede aumentar la tasa de interés. Un **tope periódico** limita cuánto puede aumentar la tasa de un periodo de ajuste al siguiente (por lo común, alrededor de 1% por cada 6 meses o 2% por año). Un **tope global** limita la cantidad que puede aumentar la tasa durante la vigencia del préstamo (por lo común, alrededor de 5% en total). La mayor parte de las HTA, por ley, deben tener topes globales, y muchas también incluyen topes periódicos. Algunas HTA también tienen **topes de pago** que limitan cuánto puede aumentar el *pago* en cada ajuste. Sin embargo, como esta clase de topes limita el pago pero no la tasa de interés, es posible que su pago ni siquiera cubra el interés que debe. En ese caso, podría encontrarse con que debe más capital al final de un periodo de ajuste que lo que debía al principio. Esta situación se denomina **amortización negativa**. Para compensar los intereses perdidos, el prestamista podría incrementar el monto de sus pagos en el futuro, o tal vez extender el plazo del préstamo.

Otra manera de reducir el riesgo es mediante alguna cláusula de **capacidad de emisión**. Esto permite, en ciertos periodos del préstamo, optar por convertir la hipoteca a una tasa fija. Esto tendría sentido si decide que no puede manejar la incertidumbre de los ajustes periódicos en sus pagos. Si elige la conversión, su tasa fija se determinará por medio de las tasas vigentes en el momento de la conversión. Si piensa que tal vez preferiría liquidar por completo, o parcialmente, el capital del préstamo antes de lo programado, intente negociar una HTA sin **sanciones por pagos anticipados**. Esto significa que podría hacer pagos anticipados al capital sin pagar comisiones especiales, y sus pagos anticipados se destinarían en su totalidad a la reducción del principal.

Costos de cierre Además del pago inicial y los costos periódicos que implican comprar una casa (que incluyen los pagos al principal y los intereses, el impuestos sobre la propiedad y los seguros), existen algunos gastos importantes que se aplican tanto a las hipotecas de tasa fija como a las de tasa ajustable y que deben pagarse una sola vez, cuando se establece la hipoteca. A todos estos cargos se les conoce con el nombre genérico de **costos de cierre** (o **cargos por convenio**.) El **cierre** o **convenio** ocurre cuando se han determinado todos los pormenores de la transacción y se ha firmado el contrato final. Es el proceso formal por medio del cual el título de propiedad se transfiere del vendedor al comprador. Tres días después de solicitar el préstamo, el prestamista le tiene que enviar por correo o por mensajería ciertos documentos entre los que se encuentran una "estimación de buena fe" de los costos de cierre. Ése es el momento de hacer las preguntas apropiadas, aclarar todos los costos propuestos y, si usted lo desea, buscar otros proveedores de servicios para esta transacción, pues al momento de cerrarse la operación quizá sea demasiado tarde para evitar pagar por servicios que ya le han sido proporcionados. En el ejemplo siguiente ilustraremos los costos más comunes de cierre.

El **refinanciamiento** significa iniciar una nueva hipoteca de la casa y saldar la anterior. En tiempos de tasas relativamente bajas de interés, los prestamistas, con frecuencia, alientan a los propietarios de casas a refinanciar sus deudas. Pero, debido a que un nuevo préstamo implica costos, asegúrese de tener una buena razón antes de refinanciar. Algunas posibles razones son:

1. El nuevo préstamo puede ser comparable al préstamo actual, con una tasa lo suficientemente baja para reembolsar los costos en unos cuantos años.
2. Tal vez quiera liquidar su balance más rápido cambiándolo por un préstamo a menor plazo.
3. Quizá quiera pedir prestado para cubrir otros gastos mayores, como la educación de sus hijos.
4. Su préstamo actual puede tener una gran cantidad de intereses y necesita refinanciarlos.
5. Puede sentirse incómodo con su tasa de interés variable (y por tanto incierta) y quiere cambiarla por un préstamo con tasa fija.

(*Fuente:* http://www.business-to-business-resources.com)

EJEMPLO 7 Para una hipoteca de $58,000, al prestatario se le cobraron los siguientes costos de cierre.

Comisión por la apertura del crédito (1% del monto de la hipoteca)	$____
Comisión al corredor del préstamo	1455
Comisiones por documentos del prestamista y contrato	375
Comisión por trámites e impuestos	205
Comisión para el emisor del título de propiedad	200
Comisión por el seguro del título de propiedad	302
Comisión por el trámite del título de propiedad	65
Comisión por el registro de la documentación	35

Calcule el total de los costos de cierre para esta hipoteca.

Por lo general, a las "comisiones por la apertura del crédito" se les conoce como **puntos**. Cada "punto" equivale a 1% del importe de la hipoteca. Al imponer puntos, el prestamista puede elevar de manera efectiva la tasa de interés sin elevar los pagos mensuales (ya que los puntos normalmente se pagan al cierre, en lugar de pagarse a lo largo de la vida del préstamo). En este caso, "un punto" se traduce en $580. Al sumar esto a las otras cantidades que se listaron, el total de los costos de cierre asciende a $3217. ■

No todos los préstamos hipotecarios incluyen los mismos costos de cierre. Usted debe investigar exactamente cuáles son los servicios que le proporcionarán y si sus costos son razonables. El riesgo de sufrir abusos en torno a los costos de cierre es considerable. Por esta razón, en 1974 el Congreso de Estados Unidos aprobó la **Ley de procedimientos para el acuerdo de bienes raíces** (*Real Estate Settlement Procedures Act,* o **RESPA**) para estandarizar la práctica de la verdad en los préstamos en el área de hipotecas para los consumidores. El prestamista está obligado a proporcionarle información clara, entre la que se incluye la TAI de su hipoteca. La TAI, es decir, el costo de un préstamo como la tasa anual, quizá sea más alta que la tasa de interés establecida, ya que debe reflejar todos los puntos y otras comisiones que se pagan directamente para el crédito, además del interés real.

14.4 EJERCICIOS

Redondee todas las respuestas monetarias al centavo más cercano, a menos que se indique lo contrario.

Pago mensual sobre una hipoteca con tasa fija *Determine el pago mensual necesario para amortizar el principal y los intereses de cada una de las siguientes hipotecas a tasa fijas. Puede emplear la fórmula del pago mensual regular o bien, cuando sea apropiado, la tabla 4.*

	Monto del préstamo	Tasa de interés	Plazo
1.	$70,000	10.0%	20 años
2.	$50,000	11.0%	15 años
3.	$57,300	8.7%	25 años
4.	$85,000	7.9%	30 años

	Monto del préstamo	Tasa de interés	Plazo
5.	$227,750	12.5%	25 años
6.	$95,450	15.5%	5 años
7.	$132,500	7.6%	22 años
8.	$205,000	5.5%	10 años

Amortización de una hipoteca con tasa fija *Complete el primero o los dos primeros meses (según se requiera) de los siguientes programas de amortización para hipotecas a tasa fija.*

9. Hipoteca: $58,500
Tasa de interés: 10.0%
Plazo del préstamo: 30 años

Programa de amortización

Número de pago	Pago total	Pago a los intereses	Pago al principal	Balance del principal
1	(a) _____	(b) _____	(c) _____	(d) _____

10. Hipoteca: $87,000
Tasa de interés: 8.5%
Plazo del préstamo: 20 años

Programa de amortización

Número de pago	Pago total	Pago a los intereses	Pago al principal	Balance del principal
1	(a) _____	(b) _____	(c) _____	(d) _____

11. Hipoteca: $143,200
Tasa de interés: 6.5%
Plazo del préstamo: 15 años

Programa de amortización

Número de pago	Pago total	Pago a los intereses	Pago al principal	Balance del principal
1	(a) _____	(b) _____	(c) _____	(d) _____
2	(e) _____	(f) _____	(g) _____	(h) _____

12. Hipoteca: $124,750
Tasa de interés: 9%
Plazo del préstamo: 25 años

Programa de amortización

Número de pago	Pago total	Pago a los intereses	Pago al principal	Balance del principal
1	(a) _____	(b) _____	(c) _____	(d) _____
2	(e) _____	(f) _____	(g) _____	(h) _____

13. Hipoteca: $113,650
Tasa de interés: 8.2%
Plazo del préstamo: 10 años

Programa de amortización

Número de pago	Pago total	Pago a los intereses	Pago al principal	Balance del principal
1	(a) _____	(b) _____	(c) _____	(d) _____
2	(e) _____	(f) _____	(g) _____	(h) _____

14. Hipoteca: $150,000
Tasa de interés: 6.25%
Plazo del préstamo: 16 años

Programa de amortización

Número de pago	Pago total	Pago a los intereses	Pago al principal	Balance del principal
1	(a) _____	(b) _____	(c) _____	(d) _____
2	(e) _____	(f) _____	(g) _____	(h) _____

Determinar los pagos mensuales de una hipoteca *Determine el pago total mensual, incluidos impuestos y seguro, de cada una de las siguientes hipotecas.*

	Hipoteca	Tasa de interés	Plazo del préstamo	Impuestos anuales	Seguro anual
15.	$ 62,300	7%	20 años	$610	$220
16.	$ 51,800	10%	25 años	$570	$145
17.	$ 89,560	6.5%	10 años	$915	$409
18.	$ 72,890	5.5%	15 años	$1850	$545
19.	$115,400	8.8%	20 años	$1295.16	$444.22
20.	$128,100	11.3%	30 años	$1476.53	$565.77

Comparar el principal total y los intereses de una hipoteca *Suponga que después de hacerse el pago inicial, todavía se adeudan* $140,000 *de una casa. Los pagos mensuales para el principal y los intereses al* 8.5% *durante* 30 *años son de* $140 \times \$7.68913 = \$1076.48$.

21. ¿Cuántos pagos mensuales se harán?

22. ¿Cuál es la cantidad total que se pagará al principal y a los intereses?

23. El interés total que se cobra es la cantidad total pagada menos la cantidad financiada. ¿Cuál es el interés total?

24. ¿Qué es más, el importe financiado o el interés total pagado? ¿Por cuánto es la diferencia?

Efecto a largo plazo de las tasas de interés *Quizá recuerde haber visto que las tasas de interés de las hipotecas para viviendas fluctúan ampliamente en un periodo de pocos años. Los siguientes ejercicios muestran el efecto de los cambios en las tasas de interés. Consulte la tabla 5, donde se compara la amortización de una hipoteca a* 30 *años de* $60,000 *para tasas de* 4.5% *y* 14.5%. *Proporcione los valores de cada uno de los siguientes para* **(a)** *una tasa de* 4.5% *y* **(b)** *una tasa de* 14.5%.

25. pagos mensuales

26. porcentaje del primer pago mensual que va al principal

27. balance del principal después de 1 año

28. balance del principal después de 20 años

29. el primer pago mensual que transfiere más hacia el principal que hacia los intereses

30. el monto de los intereses comprendidos en el último pago

Efectos del plazo sobre la cantidad total pagada *Suponga que una hipoteca de* $60,000 *se amortizará al* 7.5% *de interés. Determine la cantidad total de intereses que se pagarían para cada uno de los siguientes plazos.*

31. 10 años **32.** 20 años **33.** 30 años **34.** 40 años

Efectos de las tasas variables sobre los pagos mensuales *Para cada una de las siguientes hipotecas, a tasa variable, determine* **(a)** *el pago mensual inicial,* **(b)** *el pago mensual para el segundo periodo de ajuste y* **(c)** *el cambio en el pago mensual en el primer ajuste. (El "balance ajustado" es el balance del principal en el momento de la primera tasa de ajuste. Suponga que no se aplican topes.)*

	Balance inicial	Plazo	Tasa inicial del índice	Margen	Periodo de ajuste	Tasa ajustada del índice	Balance ajustado
35.	$75,000	20 años	6.5%	2.5%	1 año	8.0%	$73,595.52
36.	$44,500	30 años	7.2%	2.75%	3 años	6.6%	$43,669.14

Efecto de las tasas tope en hipotecas con tasa variable *Jeff Walenski tiene una HTA a 1 año por* $50,000 *con un plazo de* 20 *años. El margen es de* 2% *y la tasa de índice empieza en* 7.5% *y aumenta a* 10.0% *en el primer ajuste. El balance del principal al término del primer año es de* $49,119.48. *La HTA incluye una cobertura de tasa periódica tope de* 2% *por periodo de ajuste. (Aplique esta información a los ejercicios 37 a 40.)*

37. Determine **(a)** el interés que se adeuda y **(b)** el pago mensual para el primer mes del primer año.

38. Determine **(a)** el interés que se adeuda y **(b)** el pago mensual para el primer mes del segundo año.

39. ¿Cuál es el ajuste al pago mensual al final del primer año?

✎ **40.** Si la tasa del índice disminuye ligeramente al final del segundo año, ¿los pagos para el tercer año disminuirán necesariamente? ¿Por qué sí o por qué no?

Costos de cierre de una hipoteca *Para los ejercicios 41 a 44, consulte la siguiente tabla de costos de cierre para la compra de una casa de* $175,000 *que exige un pago inicial del* 20%.

Prima del seguro de propiedad	$240
Comisión por el registro de la documentación	30
Comisión por el préstamo (dos puntos)	____
Comisión por avalúo	225
Impuestos sobre la propiedad prorrateados	685
Prima de seguro contra incendio prorrateada	295

Determine cada uno de los siguientes:

41. el monto de la hipoteca

42. la comisión del préstamo

43. los costos totales del cierre

44. la cantidad total de efectivo exigida por el comprador en el momento del cierre (incluido el pago inicial)

✎ *Basado en el material de esta sección o en su propia investigación, dé respuestas breves, por escrito, a cada uno de los siguientes apartados.*

45. Suponga que su HTA permite la conversión a un préstamo a tasa fija en cada una de las primeras cinco fechas de ajuste. Describa las circunstancias en las que desearía hacer la conversión.

46. Describa cada uno de los siguientes tipos de hipoteca.

Pago gradual

Pago de aumentos

Capital creciente

Capital compartido

Sociedad

47. ¿Debe el comprador de una vivienda dar siempre el menor pago inicial que le permitan hacer? Explique su respuesta.

48. ¿Debe un prestatario elegir siempre el plazo más corto posible para minimizar el gasto total en intereses? Explique su respuesta.

49. ¿En qué condiciones una HTA sería probablemente una mejor elección que una hipoteca a tasa fija?

50. ¿Por qué son (ligeramente) menores los pagos mensuales del segundo año en el ejemplo 6 que en el ejemplo 5, a pesar de que tanto el término de 29 años, como la tasa de interés de 10.3%, son las mismas en ambos casos?

51. ¿Piensa usted que el descuento en el ejemplo 6 realmente hace que el costo total de la hipoteca sea menor? Explique su respuesta.

52. Analice el concepto de "crisis de los pagos" mencionado al final del ejemplo 6.

53. Indique qué significan los siguientes términos y describa algunas de las características de cada uno de ellos.

Hipoteca respaldada por la Administración general de vivienda de Estados Unidos.

Hipoteca respaldada por la Administración de veteranos de Estados Unidos.

Hipoteca convencional.

14.5 Inversión

En términos generales, una *inversión* es la manera de poner ciertos recursos a trabajar para que (en el mejor de los casos) se incrementen. Al final de esta sección (en el apartado Para reflexionar: Resumen sobre las inversiones) se compararán diferentes tipos de inversiones para el "consumidor", desde las inversiones en efectivo, pasando por los bienes raíces, los objetos de colección o incluso un negocio propio. Pero nuestra atención se centrará en los aspectos matemáticos de una clase restringida de inversiones financieras, a saber, las *acciones,* los *bonos* y los *fondos mutuos.*

Acciones Comprar las acciones de una compañía lo convierte a usted en propietario parcial de la misma. Así, usted compartirá cualquier ganancia que obtenga la

compañía; a esta participación de las ganancias se le denomina **dividendo**. Si la compañía prospera (o si aumenta el número de inversionistas que confían en que prosperará en el futuro), las acciones que usted posea le resultarán atractivas a otras personas, al grado que quizá estén dispuestas a pagarle un buen precio por ellas, de modo que, si las vende, obtenga por ellas cierta ganancia. La ganancia obtenida al vender algo a un precio mayor que el que se pagó en un principio se denomina **ganancia de capital**. Cuando uno vende en menos de lo que pagó inicialmente produce una ganancia negativa, o **pérdida de capital**. Cuando mencionamos el **rendimiento sobre la inversión** nos referimos a la diferencia neta entre lo que uno recibe (incluidos el precio de venta y los dividendos recibidos, si los hay) y lo que uno pagó (el precio de compra más cualesquiera otros pagos por la compra o venta de las acciones).

EJEMPLO 1 El 15 de enero de 2002, Brenda Cochrane compró 100 acciones de la compañía A a un precio de $30 cada una. Para el 15 de enero de 2003, recibió un dividendo de $0.50 por acción, además de que el precio había llegado $30.85 por acción. (Ignore otros costos diferentes al precio de compra.)

(a) Determine el costo total de las acciones de Brenda.

$$(\$30 \text{ por acción}) \times (100 \text{ acciones}) = \$3000$$

Ella pagó en total $3000.

(b) Determine el monto total de los dividendos.

$$(\$0.50 \text{ por acción}) \times (100 \text{ acciones}) = \$50$$

El monto de los dividendos fue de $50.

(c) Determine la ganancia de capital de Brenda, si vendió las acciones el 15 de enero de 2003.

$$\text{Ganancia de capital} = (\text{Cambio en el precio por acción}) \times (\text{Número de acciones})$$
$$= (\$30.85 - \$30.00) \times 100 = \$0.85 \times 100 = \$85$$

La ganancia de capital fue de $85.

(d) Determine el rendimiento total para Brenda por poseer estas acciones durante un año.

$$\text{Rendimiento total} = \text{Dividendos} + \text{Ganancia de capital} = \$50 + \$85 = \$135$$

El rendimiento total sobre la inversión fue de $135.

(e) Determine el porcentaje del rendimiento.

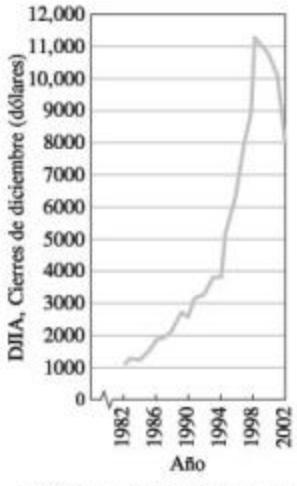
$$\text{Porcentaje del rendimiento} = \frac{\text{Rendimiento total}}{\text{Costo total}} \times 100\% = \frac{\$135}{\$3000} \times 100\% = 4.5\%$$

El porcentaje del rendimiento sobre la inversión fue de 4.5%. ■

El precio de una acción es determinada por la ley de la oferta y la demanda en instituciones conocidas como **bolsas de valores**. En Estados Unidos, la más grande y antigua de todas es la Bolsa de Valores de Nueva York (NYSE, *New York Stock Exchange*), fundada en 1792 en Wall Street en la ciudad de Nueva York.

El público no va directamente a la bolsa de valores para comprar y vender acciones, sino que las compran por mediación de los **corredores de bolsa**, personas que sí tienen acceso a la Bolsa. Estos intermediarios cobran una comisión por comprar o vender acciones.

Determinar precios Para conocer los precios actuales de las acciones se pueden consultar diversos diarios o bien buscar la información en los sitios de Internet que ya ofrecen este servicio. La tabla de la siguiente página muestra sólo una pequeña parte de las actividades de la Bolsa de Valores de Nueva York, en un día reciente de transacciones.



El **promedio Dow Jones industrial** (**DJIA**, por sus siglas en inglés o simplemente el "**Dow**") ha sido la medida más popular de tendencias de precios desde su aparición en 1896. Una época importante de aumento de precios se conoce como **bull market** o "mercado a la alza", mientras que un periodo de disminución de precios es un **bear market** o "mercado a la baja". El Dow se compone de 30 acciones de diferentes sectores de la economía, que en ocasiones se cambian para mantener una lista representativa de la economía global.

Históricamente, las tendencias de los precios de las acciones han sido hacia arriba, pero con mucha variación dentro de ese patrón general. Un fuerte mercado a la alza que inició en agosto de 1982 vio que el Dow se triplicó en 5 años, hasta el 19 de octubre de 1987 (conocido como el lunes negro), cuando el Dow perdió 22.6% de su valor en un solo día. El alza pronto retomó fuerza y continúo hasta la década de 1990, cuando se presentó otra baja al mercado. A partir de 2000, el Dow disminuyó durante 3 años seguidos, un evento históricamente muy raro. (*Fuente: The World Book Year Books*, 1983-2003.)

YTD %CHG	52-WEEK HI	52-WEEK LO	STOCK (SYM)	DIV	YLD %	PE	VOL 100s	CLOSE	NET CHG
4.3	39.80	18	AgilentTch **A**		...	dd	24333	29.75	-1.30
46.8	15.80	7.70	◆AgnicoEgl **AEM**	.02g	.1	dd	4609	14.49	-0.20
0.1	20.60	14.40	AgreeRlty **ADC**	1.84	9.9	10	115	18.50	-0.06
-7.0	12.20	8.72	Agrium **AGU**	.11g	1.1	dd	4229	9.86	0.09
-23.4	31.95	21.75	Ahold **AHO**	.65e	2.9	...	1969	22.52	0.02
4.7	11.05	4.70	AirNetSys **ANS**		...	18	73	8.63	-0.02
11.3	53.52	32.25	AirProduct **APD**	.80	1.5	22	6726	52.19	-0.04
↓ 55.4	23.10	7	Airbornelnc **ABF**	.16	.7	cc	4386	23.05	0.15
11.3	20.74	9.20	Airgas **ARG**		...	26	3201	16.83	0.11
↑ -36.4	11.20	4.01	Airlease **FLY**	.44e	10.6	69	502	4.16	-0.09
-9.5	12.25	2.60	AirTranHldg **AAI**		...	dd	1732	5.97	0.23
10.9	17.15	12.60	AlamoGp **ALG**	.24	1.5	15	113	15.80	0.05
-52.6	20	3	Alamosa **APS**		...	dd	584	5.65	0.17
-0.5	33.90	17.40	AlaskaAir **ALK**		...	dd	2160	28.94	0.09
18.4	30.65	14.18	◆Albanylnt **AIN**	.15e	.6	27	1650	25.70	0.05
30.7	32.60	16.50	Albemarle **ALB**	.52	1.7	23	1304	31.36	-1.16
26.8	57.91	37.35	AlbertoCl **ACV**	.36	.6	27	2872	56.72	-0.47
30.5	51.95	31.70	AlbertoCl A **ACVA**	.36	.7	24	517	51	-0.48
6.8	36.99	26.88	Albertsons **ABS**	.76	2.3	27	13617	33.62	0.01
10.6	48.75	28	Alcan **AL**	.60g	1.5	dd	32069	39.74	0.96
-22.7	33.20	10.53	Alcatel ADS **ALA**	.14e	1.1	...	7869	12.80	0.07
1.5	45.71	27.36	Alcoa **AA**	.60	1.7	46	37587	36.07	-0.18
12.9	39.30	29.90	Alcon **ACL** n		...	...	7187	38.40	1.40
19.1	68	55.75	Alexanders **ALX**		...	55	1	67.75	0.17
9.4	46.98	35.86	AlexREEq **ARE**	2.00f	4.4	26	300	44.98	-0.01
0.9	219.84	176.47	Alghny **Y** s	stk	...	dd	83	190.30	0.05
-2.3	55.09	31.89	AlghnyEngy **AYE**	1.72	4.9	10	13036	35.40	0.13
4.0	21.07	12.50	AlghnyTch **ATI**	.80	4.6	dd	2639	17.42	0.26
-26.6	15	5.66	AllenTele **ALN**		...	dd	664	6.24	-0.06
-20.2	93.30	56.06	◆Allergan **AGN** x	.36	.6	37	7596	59.87	0.06
19.4	31.10	21.14	Alleto **ALE**	1.10	3.7	17	1850	30.08	-0.13
-6.7	15.06	13.33	AllianceCal. **AKP** n	.91	6.5	...	34	14	...
-8.9	54.32	38.60	AllncCapMgt **AC**	2.64e	6.0	16	1326	44.03	0.17
21.5	26.20	11.05	AllianceData **ADS** n		...	...	549	23.27	0.52
4.9	14.40	9.85	Alliance **AIQ** n		...	31	109	12.80	...
-9.3	15.05	12.90	AllianceNa **AFB** n	.16e	1.2	...	432	13.61	0.01
-6.9	15.11	13.24	AllianceNY **AYN** n	.15e	1.1	...	87	13.96	0.12
-9.1	32.29	27.50	AlliantEngy **LNT**	2.00	7.2	...	2241	27.61	-0.24
38.4	115.40	56.07	AlliantTech **ATK** s		...	31	4258	106.85	-1.15
-0.8	30.20	18	Allianz ADS **AZ**	.13e	.6	...	704	23.42	-0.18
0.0	29	20	◆AlldCap **ALD**	2.20f	8.5	12	8286	25.99	-0.25
↓ 22.9	27.70	16.80	AlldIrishBk ADS **AIB**	.77e	2.7	...	1485	28.40	0.74
-18.1	19.90	8.90	AlldWaste **AW**		...	...	10393	11.52	-0.03
6.4	57.50	36.70	AllmericaFnl **AFC**	.25	.5	99	1376	47.42	0.02
16.0	45.90	30	Allstate **ALL**	.84f	2.1	26	18794	39.08	-0.32
-18.8	65.15	46.74	Alltel **AT**	1.36	2.7	18	17160	50.12	1.06
↓ 1.0	50	47.95	Alltel un n		...	...	9443	50.25	0.75
134.0	37.50	10.70	Alltrista **ALC**		...	dd	366	36.74	0.74
-28.2	**32.47**	**13.75**	**Alpharma A ALO**	**.18**	**.9**	**dd**	**4863**	**18.98**	**1.29**
-34.1	2.15	1.10	AlpineGp **AGI**		...	dd	2	1.12	-0.03
10.3	30.30	10.35	Alstom ADS **ALS**	.47e	3.8	...	140	12.52	0.05
16.1	24.70	16.67	AluCpChina **ACH** n	.21p	...	...	5	20.30	-0.05
13.5	66.50	42.20	◆AmbacFnl **ABK**	.36	.5	16	5436	65.70	0.22
-0.7	25.95	24.26	◆Ambac **AKB**	1.77	7.1	...	385	25.07	-0.03
0.6	26.10	23.80	◆Ambac 7% wi **AFK** n	.80e	3.1	...	195	25.40	0.01
-4.8	25.80	13.20	AmBev ADS plC **ABV**	.32e	1.7	...	6013	19.32	-0.30
-8.9	9.25	4.75	Amcastlnd **AIZ**	.56	11.4	dd	257	4.90	-0.05
-41.3	57.34	16.35	AmdocTr **AAE**	1.51	8.6	...	1040	17.62	0.27
-47.5	66.50	16.11	Amdocs **DOX**		...	57	20114	17.82	-0.03
30.2	90.40	53.75	AmerHess **AHC**	1.20	1.5	10	10071	81.38	-0.06
2.7	45.48	36.53	Ameren **AEE**	2.54	5.8	13	4478	43.43	-0.12
3.6	27.45	25.50	Ameren ACES **AEEE** n		...	...	119	27	-0.04
4.5	9.59	7	◆AmFstMtg **MFA**	1.20	13.1	...	647	9.14	0.01
-3.5	23	11.75	AmMovil ADS **AMX**	.09e	.5	...	9682	18.80	0.26
1.7	10.71	1.45	AmWstHldg **B AWA**		...	dd	2536	3.56	0.05
69.3	36.20	10.15	AmerAxle **AXL**		...	14	2476	36.19	0.54
3.1	51.20	39.70	◆AEP **AEP**	2.40	5.4	16	7929	44.86	-0.85
25.7	46.55	24.20	AmExpress **AXP**	.32	.7	44	44846	44.87	0.38
13.0	30.75	18.35	AmFnl **AFG**	.50	1.8	79	1270	27.74	-0.26
↑ -17.0	87.10	66	AmIntGp **AIG**	.17	.3	...	161049	65.90	-2.17
7.4	14.14	11.68	AmLandLse **ANL**	1.00	7.1	29	109	14.07	0.02
61.0	20.60	4.80	AmMedSecGp **AMZ**		...	20	1308	20.05	-0.05
12.8	10.30	8.29	AmRE Ptnrs **ACP** s		...	8	75	9.70	0.30
-23.9	13	6.40	AmRltyInv **ARL**		...	6	34	7.51	0.11
138.1	6	1.60	AmResdntInv **INV**		...	dd	227	5	-0.10
15.1	4.15	1	AmRetire **ACR**		...	...	192	2.75	0.10
4.2	10.35	8.08	AmSftyIns **ASI**	.24e	2.6	9	7	9.25	0.02
↓ 13.2	77.73	51.24	AmStandard **ASD**		...	20	5376	77.24	-0.31
8.7	42	29.70	AmStateWtr **AWR**	1.30	3.4	18	306	38	0.50
-58.0	27.48	3.50	AmTower A **AMT**		...	dd	16194	3.98	-0.10
3.5	44.33	28.81	◆AmWtrWks **AWK**	.98	2.3	28	3276	43.21	-0.04
23.6	64.90	14	◆AmeriCredit **ACF**		...	11	14745	39.01	-0.99
3.0	25.35	18.05	Amerigas **APU**	2.20	9.5	31	318	23.05	0.12
19.4	79.70	51.06	◆AmeriSrcBrg **ABC**	.08e	.1	30	11825	75.86	0.63
5.7	80	47.50	Ameroninit **AMN**	1.28	1.8	11	61	73.11	0.56

YTD %CHG	52-WEEK HI	52-WEEK LO	STOCK (SYM)	DIV	YLD %	PE	VOL 100s	CLOSE	NET CHG
-52.8	14	3.51	ParametTch **PMTC**		...	dd	63445	3.69	0.01
65.1	4.36	1.12	Paravant **PVAT**		...	39	906	3.88	-0.07
2.0	20	10.14	Parexel **PRXL**		...	70	740	14.63	0.50
12.0	21.48	17.06	ParkBcp **PFED**	.48	2.4	...	8	19.90	-0.30
↓ 80.8	5.90	1.65	ParkOH **PKOH**		...	dd	223	5.75	0.10
11.7	29.51	13.18	ParkerVision **PRKR**		...	dd	118	23.46	-0.09
-19.4	16.80	8.55	Parlex **PRLX**		...	dd	43	12.70	-0.05
2.4	3.53	1.56	ParluxFrag **PARL**		...	dd	161	1.90	0.07
-20.0	15.35	2.70	PrthusTchl		...	dd	32	4	...
-27.0	7.67	3.85	◆PrtnrComm **PTNR**		...	...	878	5	0.05
13.4	16.41	13.50	PtnrsTr **PRTR** n		...	...	252	15.90	0.12
46.6	1.79	0.25	Partsbase **PRTS**		...	dd	71	1.07	-0.05
124.8	18.30	4.80	PartyCity **PCTY** n		...	23	593	16.88	-0.07
-5.8	25.96	18.90	Pathmark **PTMK**		...	dd	546	23.22	0.33
-12.8	10.27	5.50	Pathmark wt		...	...	2	7.41	-0.27
26.8	9.94	5.45	Patrickind **PATK**	.16	1.8	dd	3	9	-0.12
32.4	15	8.46	PatriotBkCp **PBIX**	.40f	2.8	13	116	14.10	-0.19
49.7	35	15	PatriotTrns **PATR**		...	35	1	29.37	1.12
12.5	47.48	30.26	PattrsnDentl **PDCO**		...	35	1123	46.06	0.06
37.5	**35.65**	**11.06**	**PattersnUtiEngy PTEN**		...	**19**	**14575**	**32.04**	**-1.98**
-32.6	5.30	0.14	PaulaFnl **PFCO**	.12j	...	dd	285	0.91	0.11
5.3	43.49	28.27	Paychex **PAYX**	.44	1.2	50	13503	36.69	1.13
15.5	**28.70**	**12**	**PayPal PYPL** n		...	...	**6058**	**23.20**	**-1.40**
-4.7	**5.10**	**1.38**	**PCMall MALL**		...	**11**	**802**	**3.87**	**-0.23**
-46.7	**22.61**	**9.65**	**PDF Sol PDFS** n		...	dd	**1088**	**11.20**	**-0.65**
4.0	8.50	5	Peakint **PEAK**		...	dd	71	7.80	-0.02
13.4	14.10	5.63	PediatricSvc **PSAI** n		...	...	344	9.48	0.18
-5.8	23.50	11.40	PeerlsMfg **PMFG** s	.06	.4	9	87	17	...
56.0	2.27	0.78	PeerlessSys **PRLS**		...	dd	759	1.95	0.10
38.3	16.70	6.01	PeetsCof&Tea **PEET**		...	71	861	15.60	...
-81.0	23.04	1.65	PegasComm A **PGTV**		...	...	12579	1.98	-0.04
32.0	21.22	7.67	PegasusSol **PEGS**		...	dd	1393	18.75	-0.43
93.1	9.50	2.11	Pegasys **PEGA**		...	19	910	8.40	0.24
48.3	30.71	9.50	PemcoAviato **PAGI**		...	7	93	23.50	-0.94
-78.0	**18.55**	**1.31**	**Penstar PNTR**		...	**dd**	**14316**	**2.64**	**0.18**
34.1	17.60	8.94	Penford **PENX**	.24	1.4	cc	47	16.70	-0.25
18.9	41.77	12.95	PennNtl **PENN**		...	21	2973	36.08	-0.66
85.3	11	3.50	PennTraf **PNFT**		...	dd	303	9.82	0.22
-0.9	26.10	24.55	PennFed pf **PFSBP**	2.23	8.9	...	4	25.15	-0.05
10.6	27.70	18.25	PennFedFnl **PFSB**	.24	.9	15	117	27.45	-0.05
12.6	32.40	19.50	Pennichuck **PNNW** s	.78	2.6	19	115	30.40	-0.05
↓ 36.0	29.66	16.81	◆PennRkFnl **PRFS**	.84	2.8	15	75	30.24	0.59
-3.5	35.50	31.15	PnsWdsBcp **PWOD** n	1.01e	3.0	...	9	33.77	0.47
-0.7	21.51	12.07	PenwstPharm **PPCO**		...	dd	540	19.91	0.66
11.2	18.93	14.70	PeopBcp IN **PFDC**	.60	3.4	12	15	17.90	0.15
48.8	28.33	15.20	PeopBcp OH **PEBO** s	.60b	2.2	14	97	27.30	0.96
23.5	20	13.20	PeopBcpNC **PEBK**	.40b	2.3	14	15	17.72	0.22
↓ 31.2	27.82	20.66	PeopBkCT **PBCT**	1.44f	5.2	21	1465	27.90	0.32
↓ 13.7	11.25	9.10	PeopSdmyFnl **PSFC**	.36	3.0	26	25	11.82	0.72
-40.1	51	15.78	Peoplesoft **PSFT**		...	...	72883	24.08	-0.30
13.2	13.45	5.83	PerSeTch **PSTI**		...	cc	639	12.17	0.16
40.9	1.98	0.87	Perceptron **PRCP**		...	dd	76	1.86	0.16
-89.1	33.55	0.73	PeregSys **PRGN**		...	dd	103056	1.61	0.16
8.0	39.21	21.81	PerfmFdGp **PFGC**		...	32	2409	38	0.28
-37.7	17.65	6.25	PerfmncTech **PTIX**		...	24	787	8.30	-0.18
-1.6	18.88	10.80	PericmSemi **PSEM**		...	dd	1464	14.27	0.18
2.7	**18.30**	**10.56**	**Perrigo PRGO**		...	**17**	**4926**	**12.14**	**-0.75**
↓ 34.9	13.05	5.10	PerryEllis **PERY**		...	13	155	12.81	-0.19
-35.5	2.08	0.15	PrstncSftwr **PRSW**		...	dd	100	0.80	0.02
53.8	**5.24**	**1.08**	**PervasvSftwr PVSW**		...	**20**	**6572**	**4.49**	**0.93**
6.7	25.75	19	Petco **PETC**		...	...	356	23.40	-0.10
3.2	8.85	4.38	◆PetriDev **PETD**		...	9	101	6.37	-0.01
22.2	8.99	3.95	PetrqstEngy **PQUE**		...	33	584	6.50	0.23
57.0	16.60	4.09	PETsMART **PETM**		...	50	7448	15.45	0.20
↓ 10.3	14.96	12	PFS Bcp Inc **PBNC** n	.05g	...	...	7	15	0.04
-20.7	38.36	19.48	PharmPdtDev **PPDI**		...	69	9466	25.61	0.10
-17.4	25.25	9.70	◆Pharmacopia **PCOP**		...	dd	1822	11.48	0.18
-46.7	34.25	5.01	Pharmacyclics **PCYC**		...	dd	569	5.30	0.08
5.9	11.57	5.05	Pharmaneutics **PHAR**		...	dd	373	7.68	0.18
-52.6	3.74	0.16	PharmChem **PCHM**		...	dd	44	0.45	-0.15
12.4	44.29	24.35	◆PhiCons Hldg **PHLY**		...	24	435	42.37	1.41
-29.5	3.56	0.63	PhipSecs **PSCD**		...	dd	85	1.03	-0.02
15.6	15.63	8.35	PhnxTch **PTEC**		...	...	521	13.46	-0.04
-19.5	5.40	0.49	PhotoMedex **PHMD**		...	dd	417	1.49	-0.06
-4.4	54.50	20.06	◆PhotonDyn **PHTN**		...	dd	6779	43.65	0.90
-9.1	**35.57**	**16.85**	**Photronics PLAR**		...	cc	**56258**	**20.50**	**-4.74**
19.7	18.25	11.85	PHSB Fin **PHSB**	.32	2.2	17	14	14.30	0.02
-45.4	4.90	0.50	Physiomtrx **PHYX**		...	dd	230	1.19	0.09
-87.9	8.39	0.03	PinachHldg **BIGT**		...	dd	16510	0.04	-0.02
↓ **33.1**	**10.17**	**2.15**	**PinnacleSys PCLE**		...	**dd**	**30907**	**10.57**	**0.92**
-2.1	15.50	7.40	◆PionrStdElec **PIOS**	.12	1.0	dd	1719	12.43	0.53
-21.9	24.70	2.36	◆Pivotal **PVTL**		...	dd	1381	4.80	0.06
20.9	46.49	30.38	Pixar **PIXR**		...	61	2156	43.49	0.22
-29.1	35.74	7.81	Pixelworks **PXLW**		...	dd	4084	11.38	-0.67
14.2	32	13.80	◆PlanarSys **PLNR**		...	26	2324	24.10	-0.35
-22.0	27.30	11.17	PLATO Learn **TUTR** s		...	45	2226	12.95	-0.03

Los encabezados en la parte superior de las columnas indican el significado de los números que están a lo largo del renglón. Por ejemplo, la información para las acciones de Albertsons (cuyo símbolo es ABS) aparece como sigue.



El **NASDAQ (National Association of Securities Dealears Advanced Quotations)**, a diferencia del NYSE (mercado de acciones de Nueva York) y de otros mercados que realmente llevan a cabo transacciones en sitios específicos, es una red electrónica de agentes de bolsa establecida en 1971 para facilitar el comercio de acciones en el mercado secundario (*over the counter*). La mayoría de las acciones de compañías de alta tecnología, las cuales han crecido muy rápidamente, como grupo, en la década de 1980 y en especial en la década de 1990 (y muchas de las cuales decayeron muy rápidamente en 2000-2002) son (o fueron) listadas en el mercado Nasdaq.

YTD %CHG	52-WEEK HI	52-WEEK LO	STOCK (SYM)	DIV	YLD %	PE	VOL 100s	CLOSE	NET CHG
6.8	36.99	26.88	Albertsons **ABS**	.76	2.3	27	13617	33.62	0.01

El número 6.8 muestra que el valor de las acciones de Albertsons se incrementó 6.8% hasta este momento del año. Los siguientes dos números muestran que el precio más alto alcanzado por la acción en las últimas 52 semanas es de $36.99, mientras que el más bajo es $26.88. Después del símbolo de la compañía aparece el número 0.76, que indica que la compañía paga actualmente un dividendo anual de 76 centavos por acción. Como se mencionó antes, el dividendo es el dinero que una compañía le paga a los propietarios de las acciones. Por lo general, los dividendos aumentan cuando la compañía prospera y disminuyen cuando los negocios van mal. A continuación aparece 2.3, que es el **rendimiento actual** sobre las acciones de la compañía, en tantos por ciento. El dividendo de 76 centavos por acción representa el 2.3% del precio actual de compra de la misma.

El número 27 que aparece después del 2.3 es la **razón precio-ganancia**, el precio de compra por acción dividido entre las ganancias por acción. Luego del 27 vemos un 13617, que es el número de acciones vendidas ese día, en cientos. En el día en cuestión, se había vendido un total de $13,617 \times 100 = 1,361,700$ acciones de Albertsons. El siguiente número en el listado, 33.62, indica que la acción cerró el día a $33.62 por acción. Esto es, la negociación final de las acciones de Albertsons, antes del cierre del mercado a las 4 P.M., tiempo del Este, se realizó en ese precio. El último número que se muestra, 0.01, indica que el precio de cierre de ese día fue 1 centavo más que el del día anterior de negociaciones.

EJEMPLO 2 Utilice la tabla de acciones para encontrar las cantidades que se le piden a continuación.

(a) El precio más alto de Alcoa (AA) en las últimas 52 semanas.

Encuentre el renglón correspondiente en la tabla de acciones.

1.5 45.71 27.36 Alcoa **AA** .60 1.7 46 33587 36.07 −0.18

El precio más alto que alcanzaron estas acciones durante las últimas 52 semanas (52-WEEK HI) es de $45.71.

(b) El dividendo de Pioneer-Standard Electronics (PIOS).

El dividendo aparece justo después del símbolo de la compañía. En la tabla, encuentre el dividendo para Pioneer-Standard Electronics, que es de 0.12 o 12¢. (Observe el símbolo especial ✤ que precede al nombre de la compañía en la lista. Esto significa que Pioneer-Standard Electronics es una de las muchas compañías cuyos informes anuales pueden obtener gratuitamente los lectores del *Wall Street Journal*.) ■

EJEMPLO 3 Determine el costo total de 100 acciones de Allstate (ALL), al precio de cierre para ese día.

Determine el costo total de la compra multiplicando el precio por acción por el número de acciones que se van a comprar. En la tabla de acciones, el precio de cierre de Allstate fue de $39.08 por acción.

$$\text{Costo total} = 100 \times \$39.08 = \$3908.00$$

Un centenar de acciones costará $3908.00, más las comisiones de los corredores de bolsa (que se analizarán en las páginas siguientes). ■

En el listado de un día determinado, cada acción puede tener una variedad de características especiales. Éstas se indican mediante símbolos que se explican en donde se publican los listados. A continuación se mencionan unas cuantas de las características más importantes.

Algunas características especiales en los listados de acciones

1. Una línea listada en negritas sirve para distinguir a una acción cuyo precio cambió 5% o más (siempre que el precio de cierre del día anterior fuese de al menos $2).
2. Un renglón subrayado en la lista indica una acción con un volumen especialmente alto en el mercado de valores para el día en relación con el volumen usual. En el caso de las listas de la NYSE y del mercado estadounidense de la Nasdaq, los 40 líderes que poseen los volúmenes más altos en porcentaje se indican de esta manera.
3. Las siglas "pf" entre el nombre de la compañía y el símbolo indican una acción "preferencial", una categoría especial de acciones que algunas compañías emiten además de sus acciones normales o "comunes". Una compañía está obligada a pagar dividendos a los tenedores de sus acciones preferenciales antes de pagarle dividendos a los tenedores de sus acciones comunes. Entre las ventajas adicionales de las acciones preferenciales se encuentran sus atractivos rendimientos, un ingreso estable de dividendos y ventajas impositivas para inversionistas corporativos.
4. El símbolo ▲ que aparece a la izquierda indica un nuevo precio más alto en 52 semanas, mientras que el símbolo ▼ indica un nuevo precio más bajo en 52 semanas.

Determinar comisiones Para comprar o vender una acción, es necesario emplear a un corredor (aunque un número creciente de compañías venden sus acciones directamente a los inversionistas, lo cual ahorra gastos de corretaje). Un corredor tiene representantes en la Bolsa encargados de llevar a cabo las órdenes del comprador. El corredor cobra una **comisión** (gastos de corretaje) por ejecutar una orden. Antes de 1974, las tasas de las comisiones se establecían según las reglas del mercado de valores, y no variaban de un corredor a otro. Sin embargo, desde entonces a la fecha, estas tasas se han vuelto competitivas y varían considerablemente, de un corredor a otro.

Los **corredores de servicio completo**, quienes ofrecen investigaciones, opiniones profesionales sobre la compra y venta de emisiones individuales y otros servicios relacionados, tienden a cobrar las comisiones más altas por las transacciones que realizan. Por otra parte, muchos **corredores de descuento** se limitan a comprar y vender acciones para sus clientes, sin ofrecer servicios adicionales.

Durante la década de 1990, cuando parecía que cualquier inversionista sería capaz de obtener ganancias prácticamente con cualquier acción que eligiera de manera razonable, surgieron varias compañías en Internet que ofrecían transacciones más baratas que se podían conseguir a través de corredores convencionales. Como consecuencia, las compañías tradicionales de corretaje, así como la mayoría de los corredores de préstamos, introdujeron sus propios servicios automatizados (en línea). Hoy en día, los inversionistas tienen la posibilidad de comparar diferentes opciones antes de decidir cuál corredor puede proporcionarles los mejores servicios de inversión que necesitan.

Las comisiones, por lo regular, consisten básicamente en algún porcentaje del valor de la compra o la venta (denominado **principal**). Algunas compañías cobran

montos adicionales en ciertos casos. Por ejemplo, las tasas podrían depender de si la orden es por un **lote completo** de acciones (múltiplos de 100) o por un **lote incompleto** (cualquier orden por menos de 100 acciones). Los lotes incompletos suelen incluir un **diferencial por lote incompleto** (digamos, 10 centavos por acción). También es posible colocar una **orden límite**, en la cual al corredor se le pide ejecutar una compra o venta sólo cuando la acción alcance un precio preestablecido. Por este tipo de orden puede agregarse una comisión extra. Las empresas más importantes de corretaje no cobran estos gastos adicionales, pero utilizan una estructura de comisiones niveladas según la cantidad del principal de la compra o venta, además de que distinguen entre las transacciones **asistidas por un corredor** y las **automatizadas**, como se muestra a continuación.

Estructura común de las comisiones

Transacción asistida por un corredor

Monto del principal	Comisión
Hasta $2499.99	$35 + 1.7% del principal
$2500.00-$6249.99	$65 + .66% del principal
$6250.00-$19,999.99	$76 + .34% del principal
$20,000.00-$49,999.99	$100 + .22% del principal
$50,000.00-$499,999.99	$155 + .11% del principal
$500,000.00 o más	$255 + .09% del principal

Transacción automatizada

Número de acciones	Comisión
Hasta 1000	$29.95
Más de 1000	3¢ por acción

Además de las comisiones para el corredor, la SEC (*Securities and Exchange Commission*, Comisión controladora de acciones y valores de Estados Unidos), la cual se encarga de regular los mercados de acciones, impone su propia **comisión** que va a parar al fondo de las actividades de la SEC y sólo se evalúan sobre las ventas de acciones (no sobre las compras). De acuerdo con la ley más reciente, este gravamen es de aproximadamente 3.01¢ por cada $1000 del principal (redondeado *hacia arriba* al siguiente centavo). Por ejemplo, para encontrar la comisión por una venta de $1600, primero hay que dividir $1600 entre $1000 y multiplicarlo por 3.01¢.

$$\frac{\$1600}{\$1000} \times 3.01¢ = 4.816¢$$

Redondeado hacia arriba, se obtiene el pago a la SEC: 5¢.

EJEMPLO 4 Determine el costo total (incluidos los gastos) de una compra, asistida por un corredor, de 765 acciones de Air Lease a $4.22 por acción. Use la estructura común de comisiones mostrada antes.

El costo básico de las acciones se determina multiplicando el precio por acción por el número de acciones:

(Precio por acción) × (Número de acciones) = $4.22 × 765 = $3228.30.

Como este principal cae en el segundo nivel de la estructura de las comisiones, la comisión para el corredor es de $65 + 0.66% de este monto, o

Comisión para el corredor = $65 + .0066 × $3228.30 = $65 + $21.31 = $86.31.

Determine el costo total de las acciones como sigue.

$3228.30	Costo básico
+ 86.31	Comisión del corredor
$3314.61	

El costo total de esta compra es de $3314.61. ■

EJEMPLO 5 Determine la cantidad que recibió la persona encargada de ejecutar la venta automatizada de 1500 acciones de ParkerVision (PRKR) a $23.46 por acción.

El precio básico de la acción es de

$$(\$23.46 \text{ por acción}) \times (1500 \text{ acciones}) = \$35{,}190.00.$$

Como se vendieron más de 1000 acciones, la comisión para el corredor es de

$$(3¢ \text{ por acción}) \times (1500 \text{ acciones}) = \$45.00.$$

Determine el pago a la SEC como se describió previamente.

$$\frac{\$35{,}190.00}{\$1000} \times 3.01¢ = 105.9219¢$$

Al redondear hacia arriba, obtenemos el pago a la SEC, que es de $1.06. Proceda como sigue:

$35,190.00	Precio básico
− 45.00	Comisión para el corredor
− 1.06	Pago a la SEC
$35,143.94	

El vendedor recibe $35,143.94. ■

Bonos En lugar de otorgar su capital (dinero) a una compañía, con la esperanza de que los empleados de la misma serán capaces de generar un rendimiento atractivo para usted y para el resto de los accionistas (propietarios), quizá preferiría *prestar* este dinero a la compañía, por el cual recibiría una tasa de interés acordada de antemano por el uso de su dinero. En este caso, lo que estaría haciendo sería comprar un bono de la compañía en lugar de comprar acciones. El bono (préstamo) es emitido en un plazo establecido (duración), después del cual el bono "madura" (o vence) y el principal (o **valor nominal**) debe reembolsársele. Al término del plazo, la compañía le paga una tasa de interés fija, que depende de las tasas de interés prevalecientes al momento de la emisión (y que dependen hasta cierto punto de la calificación de crédito de la compañía), en lugar del valor subyacente de la compañía.

El tenedor de un bono corporativo no participa de las ganancias de la compañía, pero con (toda) probabilidad recibirá el pago oportuno de los intereses. El rendimiento potencial por lo común es menor, pero también lo es el riesgo de pérdida. Si una compañía no es capaz de pagar tanto los intereses sobre los bonos como los dividendos de las acciones, los tenedores de bonos tienen prioridad.

EJEMPLO 6 Chris Campbell invierte $10,000 en un bono corporativo a cinco años, que paga un interés anual de 6%, pagaderos semestralmente. Determine el rendimiento total de su inversión, suponiendo que Chris conserva el bono hasta su vencimiento (es decir, transcurridos los cinco años). No tome en cuenta los honorarios del corredor.

Por medio de la fórmula del interés simple (vea la sección 14.1),

$$I = Prt = \$10{,}000 \times .06 \times 5 = \$3000.$$

Observe que esta cantidad, $3000, es el rendimiento *total* sobre el periodo de cinco años, no el rendimiento anual. Además, el hecho de que los intereses se paguen dos veces al año (3% del valor nominal cada vez) carece de importancia, ya que aquí no ocurre composición alguna. ■

Históricamente, la tasa de rendimiento global ha sido mayor para las acciones que para los bonos, en la mayoría de los periodos. Este hecho (aunado al gusto generalizado por la posesión) ha motivado a algunos inversionistas a evitar por completo los bonos. Por otra parte, los bonos ofrecen menos incertidumbre, además de que el capital de un inversionista en bonos está sujeto a un riesgo menor. Estos hechos son quizá lo que hace a los bonos más atractivos que las acciones, en especial para inversionistas jubilados quienes dependen de un flujo de ingresos estable proveniente de sus inversiones. Con todo, muchos inversionistas buscan crear un portafolio equilibrado que incluya tanto bonos como acciones.

Una gran cantidad de información acerca de los fondos mutuos está disponible en Internet. Por ejemplo, el Investment Company Institute (ICI), la asociación nacional de compañías de inversión en Estados Unidos, proporciona material en el sitio http://www.ici.org/.

Fondos mutuos Un **fondo mutuo*** es una bolsa de dinero que una compañía de inversión reúne de muchos individuos y/o instituciones para luego invertirla en diversas acciones, bonos u otros instrumentos del mercado de dinero (quizá varias combinaciones de todas éstas). La industria de los fondos mutuos han crecido de manera extraordinaria. A finales de la década de 1990, aproximadamente 5 billones de dólares se invirtieron en más de 7000 fondos diferentes. En 2000, más de 50 millones de hogares en Estados Unidos participaban en fondos mutuos, siendo las cuentas de retiro la categoría más grande de éstos.

Fondos mutuos *versus* acciones y bonos individuales

Ventajas de los fondos mutuos

1. *Sencillez*

   Alguien más se encarga del trabajo.

2. *Diversificación*

   Al formar parte de un fondo mayor, resulta más fácil tener intereses en muchas acciones diferentes, lo cual disminuye la vulnerabilidad ante grandes pérdidas de una sola acción o de un sector particular de la economía.

3. *Acceso a nuevas emisiones*

   Las oferta públicas iniciales (OPI) en ocasiones pueden ser bastante fructíferas. Mientras que a los inversionistas individuales se les dificulta obtener una de éstas, los grandes activos de un fondo mutuo le permiten a sus administradores mucha más influencia.

4. *Economías de escala*

   Las grandes compras de acciones por lo regular generan menores gastos por dólar invertido. Además, los gastos son compartidos por un gran número de inversionistas.

5. *Administración profesional*

   Es más probable que los administradores profesionales cuenten con la experiencia para seleccionar las acciones y los tiempos de compra que les permitan alcanzar mejor los objetivos establecidos por el fondo.

(continúa)

*N. del Ed.: En algunas regiones se denominan "sociedades de inversión".

6. *Catalogación*

Con una administración mínima, un fondo indexado puede mantener un portafolio que imite algún índice popular (como el S&P 500). Esto facilita que los inversionistas individuales de los fondos puedan obtener rendimientos al menos parecidos al de dichos índices.

Desventajas de los fondos mutuos

1. *Impacto de los cobros iniciales y los gastos recurrentes*

Los cargos por ventas, gastos de administración, honorarios por concepto de "12b-1" (utiliza para pagar a los representantes de ventas) y gastos del fondo pueden acumularse, al grado de resultar difíciles de identificar. Además, los gastos de administración no garantizan tener una administración *de calidad.*

2. *Costos ocultos de corretaje*

Para obtener la *razón de gastos* de un fondo se suman los gastos y honorarios recurrentes. Pero las comisiones pagadas por el fondo para la compra y venta de acciones son adicionales a la razón de gastos. (Desde 1995, se ha requerido que los fondos revelen sus comisiones promedio en sus informes anuales.)

3. *Algunos riesgos ocultos por la posesión de un porcentaje del fondo*
   - **(a)** En el caso de una caída del mercado, librarse del fondo puede significar aceptar títulos en lugar de efectivo, los cuales pueden resultar difíciles de redimir a un precio justo.
   - **(b)** Los administradores podrían no cumplir las estrategias establecidas para el fondo.
   - **(c)** Como los impuestos al pasivo se trasladan a los inversionistas del fondo, y éstos dependen de las compras y ventas realizadas por los administradores del fondo, los inversionistas quizá sean incapaces de evitar heredar una base fiscal inherente no deseada.

Fuente: Forbes Guide to the Markets, John Wiley & Sons, Inc., 1999.



Nuevas formas de proporcionar servicios financieros han surgido en los últimos años. Al llegar el nuevo siglo, los consumidores de Estados Unidos destinaron alrededor de 350,000 millones de dólares anualmente a gastos y comisiones a bancos, seguros y servicios de corredores de bolsa. Una legislación comprensiva a finales de 1999 abolió muchas barreras legales y de regulación entre compañías que operan en esas tres áreas.

Un resultado de las nuevas leyes fue un aumento en el número de fusiones entre compañías que ofrecen la venta de seguros, inversiones y servicios bancarios. (*Fuente: The Sacramento Bee*, 13 de noviembre de 1999.)

Puesto que los fondos mutuos poseen diferentes acciones, cada una de sus acciones posee un interés parcial de cada una de esas compañías. En un fondo de "plazo abierto" (por mucho, el tipo más común), se crean nuevas acciones, las cuales son emitidas para los compradores mientras que la compañía del fondo absorbe las acciones de los vendedores. Cada día, el valor de una acción en el fondo (denominado *valor neto del activo* o *VNA*) se determina como sigue.

Valor neto del activo de un fondo mutuo

El valor neto del activo está dado por

$$VNA = \frac{A - L}{N}$$

donde A = Activos totales del fondo,
L = Pasivos totales del fondo y
N = Número de acciones en circulación.

EJEMPLO 7 Suponga que en un día determinado, un fondo mutuo cuenta con $500 millones en acciones, $500,000 en efectivo (no invertido) y $300,000 en otros activos. Los pasivos totales ascienden a $4 millones y hay 25 millones de acciones en circulación. Si Laura Griffin Hiller invierte $50,000 en este fondo, ¿cuántas acciones podría obtener?

Tenemos que

$$A = \$500{,}000{,}000 + \$500{,}000 + \$300{,}000 = \$500{,}800{,}000,$$
$$L = \$4{,}000{,}000 \text{ y}$$
$$N = 25{,}000{,}000$$

De modo que $VNA = \dfrac{\$500{,}800{,}000 - \$4{,}000{,}000}{25{,}000{,}000} = \$19{,}872.$

Puesto que $\dfrac{\$50{,}000}{\$19.872} \approx 2516$, la inversión de $50,000 de Laura comprarán (al entero más cercano) 2516 acciones. ■

Evaluar los rendimientos sobre la inversión Sin importar el tipo de inversión que usted posea o que esté considerando hacer (acciones, bonos, fondos mutuos u otros), es importante que pueda hacer una evaluación precisa y sea capaz de comparar los diversos rendimientos (ganancias y pérdidas). Aunque el desempeño en el pasado nunca es garantía de rendimientos futuros, constituye una información importante. Muchas publicaciones (por ejemplo, el *Wall Street Journal* y el *Barron's Weekly*), así como numerosas fuentes de Internet (por ejemplo, Nasdaq.com), ofrecen una gran cantidad de información tanto sobre los mercados de acciones y de bonos como de los fondos mutuos.

La medida más importante de desempeño de una inversión es la **tasa anual de rendimiento**. Ésta no es *necesariamente* igual al porcentaje de rendimiento como se calculó en el ejemplo 1, ya que la tasa anual de rendimiento depende del periodo de que se trate. Algunos de los periodos más comunes son el diario, el semanal, el mensual, el mensual al vencimiento, el trimestral, el trimestral al vencimiento, el anual, el anual al vencimiento, el bianual, cada 3 años, cada 5 años, cada 10 años, cada 20 años y "desde el inicio" (desde que arrancó el fondo u otro vehículo de inversión).

Los ejemplos 8 y 9 ilustran algunas de las muchas complicaciones que surgen cuando uno trata de evaluar y comparar diferentes inversiones. Sin embargo, es importante comparar los diferentes desempeños sobre una misma base.

EJEMPLO 8 Todd Hall es poseedor de 50 acciones. El informe de su agente de bolsa para fines de agosto mostró que sus acciones cerraron ese mes a un precio de $40 (por acción), mientras que el informe para fines de septiembre mostró un precio de cierre de $40.12. Para simplificar el ejemplo, no se toman en cuenta los dividendos, y suponemos que el dinero ganado en un mes determinado no tiene oportunidad de generar rendimientos adicionales. (Es decir, dichas ganancias no pueden "reinvertirse".)

(a) Determine el valor total de estas acciones fines de agosto.

$$\begin{aligned}\text{Valor} &= (\text{Precio por acción}) \times (\text{Número de acciones}) = \$40 \times 50\\ &= \$2000\end{aligned}$$

(b) Determine el rendimiento mensual de estas acciones para Todd.

$$\begin{aligned}\text{Rendimiento} &= (\text{Cambio en el precio por acción}) \times (\text{Número de acciones})\\ &= (\$40.12 - \$40) \times 50\\ &= \$6\end{aligned}$$

(c) Determine el porcentaje del rendimiento mensual.

$$\text{Porcentaje del rendimiento} = \frac{\text{Rendimiento total}}{\text{Valor total}} \times 100\% = \frac{\$6}{\$2000} \times 100\%$$
$$= .3\%$$

(d) Tomando como base las hipótesis establecidas en los incisos anteriores, determine la tasa anual de rendimiento.

Puesto que los rendimientos mensuales no generan más rendimientos, aquí utilizamos un "rendimiento aritmético". Sólo sumamos .3% 12 veces (o multiplicamos 12 por .3%), para obtener 3.6%. La tasa anual de rendimiento es 3.6%. ■

EJEMPLO 9 Erika Gutiérrez posee 80 acciones de un fondo mutuo con un valor neto del activo de $10 al 1 de octubre. Suponga, para simplificar, que el único rendimiento que el fondo genera es el de los dividendos de .4% mensual, que se reinvierten de manera automática.

(a) Determine el valor de la cartera de Erika en este fondo al 1 de octubre.

$$\text{Valor} = \text{VNA} \times \text{Número de acciones} = \$10 \times 80 = \$800$$

(b) Determine el rendimiento mensual.

$$\text{Rendimiento} = .4\% \text{ de } \$800 = \$3.20$$

(c) Determine la tasa anual de rendimiento.

En este caso, los rendimientos mensuales se reinvierten. Se lleva a cabo una composición de intereses. Por lo tanto, usamos un rendimiento "geométrico" en lugar de uno aritmético. Para realizar este cálculo, primero hay que determinar el "rendimiento relativo", que es de 1 más la tasa mensual de rendimiento: $1 + .4\% = 1 + .004 = 1.004$. Luego se multiplica este rendimiento relativo 12 veces (es decir, se eleva a la potencia de 12) para obtener el rendimiento anual relativo: $1.004^{12} \approx 1.049$. Por último, se resta 1 y se multiplica por 100 para convertirlo a una tasa porcentual. La tasa porcentual anual es de 4.9%. ■

Un rendimiento geométrico, tal como el del fondo del ejemplo 9 anterior, a menudo se denomina "tasa anual efectiva de rendimiento". (Observe que el cálculo de un rendimiento aritmético habría pasado por alto la composición por reinversión y habría subestimado la tasa anual efectiva de rendimiento en .1%, ya que $12 \times .4\% = 4.8\%$.)

PARA REFLEXIONAR

Resumen sobre las inversiones

El siguiente resumen de diversos tipos de inversiones está basado en casos promedio y su único fin es servir como una comparación general de las distintas oportunidades de inversión. Hay numerosas excepciones a las características que se muestran. Por ejemplo, aunque la tabla no muestra comisiones de venta para los fondos mutuos, esto sólo rige para los fondos llamados "sin cargo". Los fondos "con cargo" cobran "comisiones por reembolso anticipado" u otra clase de cargos de venta. Sin embargo, esto no indica que los fondos sin cargo sean necesariamente mejores. Por ejemplo, la ausencia de comisiones por venta podría estar compensada mediante "comisiones por manejo" más altas.

Estos costos, así como otros factores importantes, deben estar claramente especificados en los folletos informativos de cada fondo y es necesario estudiarlos cuidadosamente antes de tomar la decisión de comprar. Se requiere cier-

ta habilidad para invertir en fondos mutuos, aunque es menos necesaria que para otras opciones como las compras directas de acciones, de terrenos o de piezas de arte o de colección.

Para utilizar la tabla, lea a lo largo de las columnas para conocer las características generales de cada inversión. La liquidez se refiere a la posibilidad de obtener, rápidamente, efectivo de la inversión.

Inversión	Protección del principal	Protección contra la inflación	Tasa de rendimiento (%)	Seguridad del rendimiento	Gastos de venta	Liquidez	Crecimiento a largo plazo	Requiere trabajo por parte de usted	Requiere conocimiento de un experto
Efectivo	excelente	ninguna	0			excelente	no	no	no
Seguro de vida ordinario	buena	mala	2-4	excelente	altos	excelente	no	no	no
Bonos de ahorro	excelente	mala	3-5	excelente	ninguno	excelente	no	no	no
Ahorros en el banco	excelente	mala	2-4	excelente	ninguno	excelente	no	no	no
Asociación de crédito	excelente	mala	3-4	excelente	ninguno	excelente	no	no	no
Bonos corporativos	buena	mala	5-7	excelente	bajos	buena	no	poco	poco
Bonos municipales exentos de impuestos	excelente	mala	2-5	excelente	medios	buena	no	no	poco
Acciones corporativas	buena	buena	3-12	buena	medios	buena	sí	poco	poco
Acciones preferenciales	buena	mala	4-8	excelente	medios	buena	no	poco	poco
Fondos mutuos	buena	buena	3-12	buena	ninguna	buena	sí	no	no
Su propia casa	buena	buena	4-10	buena	medios	mala	sí	sí	no
Hipotecas en casas de otros	adecuada	mala	5-8	adecuada	altos	mala	no	sí	poco
Terrenos	adecuada	buena	?	adecuada	medios	mala	sí	no	sí
Renta de propiedades	buena	buena	4-8	adecuada	medios	mala	sí	sí	poco
Estampillas, monedas, antigüedades	adecuada	buena	0-10	adecuada	altos	mala	sí	sí	sí
Su propio negocio	adecuada	buena	0-20	mala	altos	mala	sí	sí	sí

Para análisis en grupo

Mencione (a) algunas inversiones que usted le recomendaría tomar en consideración y (b) algunas que le recomendaría evitar a un amigo cuyo objetivo principal es el siguiente.

1. Evitar la pérdida de dinero.
2. Evitar la pérdida de poder de compra.
3. Evitar tener que aprender sobre inversiones.
4. Evitar tener que trabajar en inversiones.
5. Estar seguro de obtener ganancia.
6. Estar capacitado para tener efectivo en cualquier momento.
7. Obtener el mayor rendimiento posible.
8. Estar capacitado para tener efectivo sin tener que pagar comisiones.
9. Obtener ganancias rápidas.
10. Obtener crecimiento a largo plazo.

14.5 EJERCICIOS

Leer las tablas de acciones *Consulte la tabla de acciones de la p. 834 para resolver los ejercicios 1 a 36.*

Encuentre lo siguiente:

1. El precio de cierre para Agilent Technologies (A)
2. Las ventas del día para Airborne (ABF)
3. El cambio con respecto al día anterior para Party City (PCTY)
4. El precio de cierre para Peet's Coffee & Tea (PEET)
5. El precio más alto en 52 semanas para Patterson Dental (PDCO)
6. El precio más bajo en 52 semanas para Alaska Air Group (ALK)
7. El dividiendo para Allegheny Energy (AYE)
8. El dividiendo para las acciones preferentes de Penn-Fed Financial Services (PFSBP)
9. Las ventas del día para Perceptron (PRCP)
10. El cambio con respecto al día anterior para Alltrista (ALC)
11. El cambio porcentual de un año a la fecha para Alcan (AL)
12. El cambio porcentual de un año a la fecha para PeopleSoft (PSFT)
13. La razón de precio a ingresos para Patriot Transportation (PATR)
14. La razón de precio a ingresos para AirNet Systems (ANS)

Determinar los costos de acciones *Determine el costo básico (ignore cualquier comisión para el corredor) de cada una de las siguientes compras de acciones a los precios de cierre del día.*

15. 200 acciones de Albany International (AIN)
16. 400 acciones de Ameren (AEE)
17. 300 acciones de PC Mall (MALL)
18. 700 acciones de PetsMart (PETM)

Determinar los costos de acciones *Determine el costo, al precio de cierre del día, de cada uno de las siguientes compras de acciones. Incluya la comisión típica de un corredor de préstamos como se describió en el texto.*

	Acción	Símbolo	Número de acciones	Tipo de transacción
19.	Paychex	PAYX	60	con un agente
20.	Amerada Hess	AHC	70	con un agente
21.	Alltel	AT	355	automatizada
22.	Performance Food Group	PFGC	585	automatizada
23.	Agrium	AGU	2500	con un agente
24.	Pixelworks	PXLW	1500	automatizada
25.	Pathmark Stores	PTMK	2400	automatizada
26.	Alamosa	APS	10,000	con un agente

Determinar los ingresos por venta de acciones *Determine la cantidad que recibe el vendedor de las siguientes acciones (a los precios de cierre del día). Deduzca los gastos de venta como se explicó en el texto.*

	Acción	Símbolo	Número de acciones	Tipo de transacción
27.	Albemarle	ALB	400	con un agente
28.	PartsBase	PRTS	600	con un agente
29.	Pharmacopeia	PCOP	500	automatizada
30.	Alberto Culver	ACV	700	automatizada
31.	PLATO Learning	TUTRs	1350	automatizada
32.	American Greetings	AM	2740	automatizada
33.	American States Water	AWR	1480	con un agente
34.	Photronics	PLAB	1270	con un agente

Determinar los resultados netos de transacciones combinadas *Para cada una de las siguientes transacciones combinadas (realizadas al precio de cierre del día), determine la cantidad* neta *pagada. Suponga gastos típicos como se mencionó en el texto.*

35. Paul Borge compró 100 acciones de Alpine Group (AGI) y vendió 20 acciones de Peak International (PEAK), ambas transacciones realizadas por medio de un corredor de bolsa.
36. Nara Lee compró 800 acciones de PETCO Animal Suplies (PETC) y vendió 1200 acciones de Alaska Air Group (ALK), ambas transacciones realizadas de manera automatizada.

Costos y rendimientos de inversiones en acciones *Para cada una de las siguientes inversiones en acciones, determine* **(a)** *el precio total de compra,* **(b)** *el monto total de los dividendos,* **(c)** *la ganancia o pérdida de capital,* **(d)** *el rendimiento total y* **(e)** *el rendimiento porcentual.*

	Número de acciones	Precio de compra por acción	Dividendo por acción	Precio de venta por por acción
37.	40	$20	$2	$44
38.	20	$25	$1	$22
39.	100	$12.50	$1.08	$10.15
40.	200	$ 8.80	$1.12	$11.30

Rendimiento total de inversiones en bonos *Determine el rendimiento total devengado por cada uno de los siguientes bonos.*

	Valor nominal	Tasa anual de interés	Plazo de rendimiento
41.	$ 1000	5.5%	5 años
42.	$ 5000	6.4%	10 años
43.	$10,000	7.11%	3 meses
44.	$50,000	4.88%	6 meses

Valor neto del activo de un fondo mutuo *La siguiente información se aplica al día de la inversión en un fondo mutuo. En cada caso, determine* **(a)** *el valor neto del activo y* **(b)** *el número de acciones compradas.*

	Monto invertido	Total de activos en el fondo	Total de pasivos en el fondo	Acciones totales en circulación
45.	$ 3500	$875 millones	$ 36 millones	80 millones
46.	$ 1800	$643 millones	$102 millones	50 millones
47.	$25,470	$2.31 mil millones	$135 millones	263 millones
48.	$83,250	$1.48 mil millones	$ 84 millones	112 millones

Determinar los rendimientos mensuales y anuales de inversiones *Para cada una de las siguientes inversiones, suponga que no hay oportunidad de reinvertir los rendimientos. En cada caso encuentre* **(a)** *el rendimiento mensual,* **(b)** *el rendimiento anual y* **(c)** *el rendimiento porcentual anual. (Utilice el rendimiento mensual, redondeado al centavo más cercano, para calcular el rendimiento anual.)*

	Monto invertido	Rendimiento porcentual anual
49.	$ 645	1.3%
50.	$ 895	.9%
51.	$2498	2.3%
52.	$4983	1.8%

Tasa anual efectiva de rendimiento en inversiones de fondos mutuos *Suponga que cada una de las siguientes inversiones en fondos mutuos genera rendimientos mensuales que son reinvertidos y, a su vez, generan ganancias a la misma tasa. En cada caso, determine* **(a)** *el valor inicial de la inversión,* **(b)** *el primer rendimiento mensual y* **(c)** *la tasa efectiva de rendimiento anual.*

	VNA inicial	Número de acciones compradas	Rendimiento porcentual mensual
53.	$ 9.63	125	1.5%
54.	$12.40	185	2.3%
55.	$11.94	350	1.83%
56.	$18.54	548	2.22%

Determinar comisiones *Para cada una de las transacciones siguientes, determine las cantidades que faltan en las columnas (a), (b) y (c).*

	Número de acciones	Precio por acción	(a) Monto del principal	(b) Comisión para el corredor de bolsa	(c) Comisión por el uso automatizado
57.	10	$1.00	_____	_____	_____
58.	10	$100.00	_____	_____	_____
59.	400	$1.00	_____	_____	_____
60.	400	$100.00	_____	_____	_____
61.	4000	$1.00	_____	_____	_____
62.	4000	$100.00	_____	_____	_____

63. Con los datos de los ejercicios 57 a 62, rellene los espacios en el siguiente enunciado.

Una compra por medio de un agente es más barata que una compra automatizada sólo cuando se compra un número relativamente _____ de acciones a un precio relativamente _____ por acción.

✎ *Escriba un breve ensayo para responder a los ejercicios 64 y 65. Puede requerir alguna investigación.*

64. Describa el concepto de "costo promedio del dólar" y relaciónelo con la ventaja número 1 de los fondos mutuos como se mencionaron en el texto.

65. Analice la ventaja número 3 de los fondos mutuos como se mencionó en el texto.

Leer tablas de acciones *Consulte la tabla de acciones mostrada anteriormente para responder las siguientes preguntas.*

66. ¿Qué característica especial es cierta con respecto a Allied Capital (ALD)?

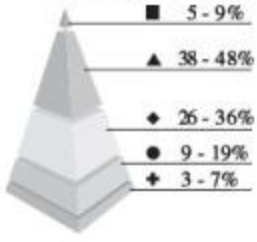
67. Proporcione un ejemplo de una acción que posea las tres siguientes características especiales:
(1) El precio de este día fue el nuevo precio más alto de las últimas 52 semanas.
(2) El precio cambió en 5% o más respecto al día anterior.
(3) La acción estuvo entre las 40 acciones líderes en volumen porcentual de este día.

✎ **68.** Ahora que hablamos de invertir en las corporaciones estadounidenses, explique la diferencia entre ser propietario de valores y ser prestamista.

Inversiones en fondos mutuos entre clases de activos *Los fondos mutuos (así como otras clases de inversiones) normalmente se clasifican en una de varias "clases de activos", de acuerdo con la clase de acciones y otros valores que los conforman. Los fondos pequeños de capitalización son los más agresivos, mientras que el efectivo es más conservador. Muchos inversionistas, a menudo con la ayuda de un asesor, tratan de crear sus portafolios de acuerdo con cada etapa de su vida. Básicamente, la idea es que una persona joven pueda permitírsele ser más agresivo (y asumir un mayor riesgo), mientras que un inversionista de mayor edad debe ser más conservador (asumir menos riesgo). Las pirámides de inversión que aparecen aquí, muestran los rangos de porcentajes recomendados por Edward Jones, una de las compañías de inversión más grandes de Estados Unidos en términos del número de oficinas que atienden a inversionistas individuales. En cada uno de los siguientes ejercicios, divida el dinero de cada inversionista en cinco categorías de modo que su posición quede a la mitad del rango recomendado.*

Clases de activos
Crecimiento agresivo (poco capital) ■
Crecimiento ▲
Crecimiento e ingresos ◆
Ingresos ●
Efectivo ✚

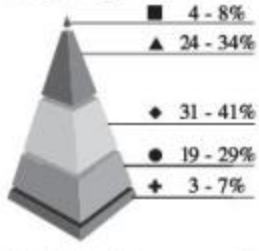
69. Michelle Clayton, en sus primeros años como inversionista, con $20,000 para invertir



Primeros años como inversionista
Relativamente pocos valores

Perspectiva de inversiones a largo plazo

70. Jeff Hubbard, en sus años de mayores ingresos, con $250,000 para invertir.

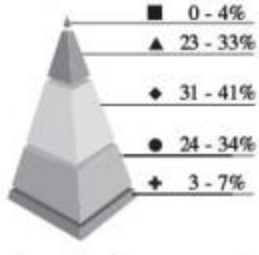


Años de buenos ingresos
Diez o más años para el retiro

Perspectivas de inversión a largo plazo

Pocas necesidades de bajos ingresos en las inversiones

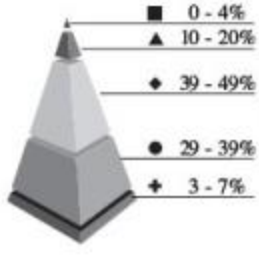
71. Paul Crockett, en sus años de altos ingresos/ahorros, con $400,000 para invertir



Años de altos ingresos/ahorros
Menos de 10 años para el retiro

Pocas responsabilidades financieras

72. Amy Donlin, en sus años de retiro, con $845,000 para invertir



Años de retiro
Reducido poder de ingresos

Grandes necesidades de ingresos en las inversiones

El efecto de los impuestos sobre los rendimientos de las inversiones *Una consideración importante, que no mencionamos en el texto, es el efecto de los impuestos en los rendimientos de las inversiones. Por ejemplo, los ingresos de los bonos municipales por lo regular están exentos del impuesto federal al ingreso, y los bonos emitidos dentro de su estado también podrían estar exentos de impuestos estatales. Para un inversionista con una tasa fiscal marginal federal y estatal combinada de* 35%, *un rendimiento sujeto a impuesto de* 6% *sólo rendiría* 3.9% (65% de 6%). *De modo que a esa tasa de interés, una tasa de rendimiento exenta de im-*

puestos de 3.9% es equivalente a un rendimiento sujeto a impuesto de 6%. Determine la tasa de rendimiento exenta de impuestos que es equivalente a la tasa de rendimiento sujeto a impuesto para cada uno de los inversionistas siguientes.

	Inversionistas	Tasa fiscal marginal combinada	Tasa de rendimiento sujeto a impuesto
73.	Paul Altier	25%	5%
74.	Eileen Burke	30%	7%
75.	Carol Britz	35%	8%
76.	Greg Brueck	40%	10%

Tasa real de rendimiento *Cuando seleccionan bonos a largo plazo, los inversionistas deben poner atención a la tasa real de rendimiento (TRR), definida como la tasa de interés menos la tasa de inflación. (Desde 1955, la TRR promedio ha sido de 3.3%.) Determine la TRR en cada uno de los siguientes casos. (Fuente: Edward Jones and Company: Income Advantage, septiembre/octubre de 2002, p. 11.)*

	Año	Tasa a largo plazo del bono	Tasa de inflación
77.	1981	14.2%	8.9%
78.	2002	6.6%	1.3%

79. A la luz de los ejercicios 77 y 78, describa la importancia de la tasa real de rendimiento para los inversionistas en bonos.

Escriba un breve ensayo para responder a cada uno de los siguientes ejercicios. Puede requerir un poco de investigación.

80. Describa qué son los planes DRIP e investigue en Internet sobre su disponibilidad.

81. Investigue el sitio www.fraud.org y escriba un informe sobre las preguntas que la Comisión controladora de acciones y valores de Estados Unidos recomienda hacer acerca de inversiones potenciales.

82. Ingrese a www.napfa.org para investigar acerca de los planificadores financieros. Luego informe lo que usted buscaría en un planificador.

83. Se han realizado muchas investigaciones con el objetivo de comprender y predecir las tendencias en los mercados de acciones. Analice el término *ingeniería financiera*. En esta área de estudio, ¿qué es un *cuanto*?

84. En relación con los fondos mutuos, analice la diferencia entre una cuenta *front end* y un *cobro de venta contingente diferido*.

85. ¿Cuál es el significado de los términos *crecimiento de la acción* e *ingreso de la acción*?

86. Describa el significado de la gráfica siguiente.



Fuente: Edward Jones and Company, 2002.

INVESTIGACIÓN EN GRUPO

¿Comprar o rentar?

Divida la clase en dos grupos de al menos cuatro estudiantes cada uno. Cada grupo primero leerá lo siguiente.

> Scott y Aimee, una joven pareja con un hijo, viven en un apartamento alquilado. Scott gana, después de impuestos, $36,000 al año, mientras que Aimee gana en su trabajo de tiempo parcial $6000 al año. En el futuro inmediato, sus ingresos probablemente se mantendrán a la par de la inflación. Lo siguiente es el presupuesto mensual de Scott y Aimee.
>
Alquiler	$1050
Alimentos	600
Guardería	525
Ropa	420
Utilidades	120
Entretenimiento	300
Ahorros	450
Otros	300
>
> Han acumulado $29,000 en ahorros.
>
> Después de encontrar una casa que les gustaría comprar y de haber consultado con varias instituciones de préstamos, han descubierto que, en el mejor de los casos, la compra de la casa implicaría los costos que se muestran a continuación.
>
Precio de la casa	$127,500
Pago inicial exigido (20%)	_____
Costos de cierre (necesarios al cierre):	
Comisión por préstamo (1 punto)	_____
Comisión por avalúo	300
Prima por seguro sobre la propiedad	375
Comisión por registro y documentación	70
Impuestos a la propiedad prorrateados	650
Prima de seguro contra incendio prorrate	270
Otros	230
Total:	_____
Hipoteca a tasa fija a 30 años al 7.5%	
Impuestos anuales:	$1350
Seguro anual contra incendio:	$540
>
> Para poder tener una casa propia, Scott y Aimee están dispuestos a reducir, cada uno, en 30% sus gastos en ropa y entretenimiento y podrían reducir lo que destinan para ahorro en 20%. (Parte de los ahorros serán necesarios para comprar los muebles adicionales que necesitarían y para los gastos futuros de una familia en crecimiento.) También calculan que la casa nueva y el jardín requerirán un gasto de $130 mensuales para su mantenimiento, y que los servicios costarán el doble de lo que pagaban en el apartamento. Fuera de esto, los demás gastos de su presupuesto permanecerán iguales.

Ahora, divida su grupo en dos "subgrupos". El primer subgrupo debe responder estas preguntas:

1. ¿En qué gastos inmediatos incurrirían Scott y Aimee por el costo de la compra de la casa?
2. ¿Tienen a la mano suficiente efectivo?

El segundo grupo responderá estas preguntas:

3. ¿A cuánto ascenderían los costos de la casa para Scott y Aimee, con un régimen de pagos mensuales?
4. ¿Qué cantidad del presupuesto mensual les permitirá cubrir este costo?
5. ¿Pueden cubrir los gastos mensuales que tendrían al ser propietarios de una casa?

Dentro de su grupo, decida si Scott y Aimee tienen la posibilidad de comprar la casa. Elija a un representante para que informe a la clase los resultados del grupo.

Compare las evaluaciones de los distintos grupos y trate de resolver las discrepancias, si las hay.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 14

Determine todas las respuestas monetarias al centavo más cercano. Si es necesario, utilice las tablas del capítulo.

Determinar el valor futuro de un depósito *Encuentre el valor futuro de cada uno de los siguientes depósitos.*

1. $100 durante 5 años a 6% de interés simple.
2. $50 durante 2 años a 8% compuesto trimestralmente.

Resuelva cada problema.

3. ***Rendimiento anual efectivo de una cuenta*** Determine el rendimiento anual neto, al centésimo por ciento más cercano de una cuenta que paga 3% de interés compuesto mensualmente.
4. ***Años para duplicar por medio de la regla del 70*** Utilice la regla del 70 para estimar los años para duplicarse a una tasa de inflación del 5%.
5. ***Determinar el valor presente de un depósito*** ¿Qué cantidad depositada hoy, en una cuenta que paga 4% compuesto semestralmente crecería a $100,000 en 10 años?
6. ***Determinar el interés en una tarjeta bancaria por medio del método del balance diario promedio*** El estado de cuenta de la tarjeta MasterCard de Peg Cheever muestra un balance diario promedio de $680. Determine el interés que se adeuda si la tasa es de 1.6% mensual.

Análisis de un préstamo al consumidor *Jeff Howard compra un collar de turquesas para su esposa en su aniversario. El importe del collar es de $4000, con $1000 iniciales. El vendedor cobra un interés añadido de 8% por año. Jeff accede a hacer pagos mensuales durante 24 meses. Utilice esta información para los ejercicios 7 a 10.*

7. Determine la cantidad total de intereses que pagará.
8. Determine el pago mensual.
9. Determine el valor de la TAI para este préstamo (al medio por ciento más cercano).
10. Determine el interés no devengado, si liquida el préstamo totalmente cuando quedan seis pagos por hacer. Utilice el método más preciso disponible.
11. ***Tasa real de interés de un financiamiento al consumidor*** Newark Hardware quiere incluir en su publicidad los términos de financiamiento. Si el precio de una enceradora de pisos es de $150 y el cargo por financiamiento sin pago inicial es de $5 durante 6 meses (seis pagos mensuales iguales), determine la tasa real de interés anual (TAI).
12. Explique qué es un fondo mutuo y analice cuáles son sus ventajas y desventajas.

Determinar el pago mensual de la hipoteca de una casa *Determine el pago mensual necesario para cada uno de los siguientes préstamos hipotecarios.*

13. La hipoteca es por $150,000 a una tasa fija de 7% durante 20 años. Amortice sólo el principal y los intereses.
14. El precio de compra de una casa es de $218,000. El pago inicial equivale al 20%. El interés es de 8.5% fijo durante un plazo de 30 años. Los impuestos anuales son de $1500 y el seguro anual es de $750.

Resuelva cada problema.

15. ***Costo de los puntos en el préstamo para una casa*** Si el prestamista del ejercicio 14 cobra dos *puntos*, ¿a cuánto asciende el costo del préstamo?
16. Explique en general lo que son los *costos de cierre*. ¿Son diferentes a los *cargos por contrato*?
17. ***Ajuste de la tasa en una hipoteca con interés variable*** Para comprar su casa, usted obtiene una HTA de 1 año con 2.25% de margen y una tasa periódica tope de 2%. El índice inicia en 7.85% pero aumenta después a 10.05% en la primera fecha de ajuste. ¿Qué tasa de interés deberá pagar durante el segundo año?
18. ***Leer tablas de acciones*** Consulte la tabla de acciones de la página 834. ¿Cuántas acciones de Patterson Dental (PDCO) fueron cambiadas el día que se representó?

Determinar el rendimiento de una inversión en acciones *Kathryn Campbell compró 1000 acciones en $12.75 cada una. Recibió un dividendo de $1.38 por acción poco después de la compra y otro dividendo de $1.02 por acción, un año después. Dieciocho meses después de la compra, vendió las acciones a un precio de $10.36 por acción.*

19. Determine el rendimiento total de Kathryn por estas acciones.
20. Determine el rendimiento porcentual. ¿Es ésta la *tasa de rendimiento anual* en esta transacción de la acción? ¿Por qué sí o por qué no?

APÉNDICE

El sistema métrico



Joseph Louis Lagrange (1736-1813) nació en Turín, Italia, y ejerció la docencia desde la edad de 19 años. En 1776 se trasladó a Berlín, a petición de Federico El Grande, para ocupar el puesto que dejó Euler. Después de 10 años, se estableció de manera permanente en París. Napoleón fue una de las muchas personas que lo admiraron y respetaron.

La mayor parte de su obra se desarrolló en el campo de la teoría y las aplicaciones del cálculo; además, continuó e impulsó el trabajo de Euler, al establecer bases sólidas algebraicas para el cálculo mediante su teoría de las funciones. En su *Mecánica analítica* (1788), aplicó el cálculo al movimiento de los objetos. Sus contribuciones al álgebra tuvieron gran influencia en Galois y, por tanto, en la teoría de grupos. También escribió numerosos trabajos sobre la teoría de los números; por ejemplo, demostró que cualquier entero positivo es la suma de, a lo más, cuatro cuadrados. En materia de astronomía, sus estudios sobre la Luna abrieron el camino a métodos para determinar longitudes.

El sistema métrico de pesos y medidas tiene como base los números decimales y las potencias de 10. Por esta razón, las operaciones de cálculos y cambios de unidades con el sistema métrico son mucho más fáciles que con el sistema inglés. El sistema métrico fue desarrollado por un comité de la Academia Francesa, al terminar la Revolución Francesa en 1789. El presidente de dicho comité fue el matemático Joseph Louis Lagrange.

Se aprecian las ventajas del sistema métrico cuando se compara con el sistema inglés. En éste, una pulgada es la doceava parte de un pie, mientras que un pie equivale a un tercio de yarda. Una milla es equivalente a 5280 pies, o 1760 yardas. Obviamente, no hay consistencia en las subdivisiones. En el sistema métrico, se utilizan prefijos para indicar multiplicaciones o divisiones con potencias de 10. Por ejemplo, la unidad básica de longitud en el sistema métrico es el *metro* (que es un poco mayor que una yarda). Para indicar 1000 metros, añadimos al término metro el prefijo "kilo", y obtenemos kilómetro. Para indicar la centésima parte de un metro, usamos el prefijo "centi", y obtenemos centímetro. Estos prefijos son ejemplos de los que se usan para medidas de longitud, de peso y de volumen, en el sistema métrico. En la tabla siguiente se muestra una lista completa de los prefijos del sistema métrico, aparecen en negritas prefijos utilizados más comúnmente.

Prefijos del sistema métrico

Prefijo	Múltiplo	Prefijo	Múltiplo
exa	1,000,000,000,000,000,000	deci	.1
peta	1,000,000,000,000,000	**centi**	.01
tera	1,000,000,000,000	**mili**	.001
giga	1,000,000,000	micro	.000001
mega	1,000,000	nano	.000000001
kilo	1000	pico	.000000000001
hecto	100	femto	.000000000000001
deca	10	ato	.000000000000000001

Longitud, área y volumen Lagrange propuso al Comité de la Academia de Ciencias de París diseñar el sistema métrico con el fin de encontrar una unidad natural para medir la longitud, y de la cual pudieran derivarse medidas de volumen y de peso. Se convino en que el **metro (m)** sería la unidad básica de longitud, y se le definió como la diezmillonésima parte de la distancia desde el ecuador al Polo Norte. De acuerdo con, Paul G. Hewitt, en *Conceptual Physics*, 7a. edición (HarperCollins, 1993):

En esa época, se calculó que esta distancia era cercana a los 10,000 kilómetros. La diezmillonésima parte de ella, el metro, fue cuidadosamente determinada y marcada, por medio de incisiones efectuadas sobre la superficie de una barra de platino iridiado. Esta barra se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Francia. A partir de entonces, el metro patrón en Francia se calibró en función de la longitud de onda de la luz: equivale a 1,650,763.73 veces la longitud de onda de la radiación de la luz anaranjada emitida por los átomos del gas kriptón 86. En la actualidad, el metro se define como la longitud de la trayectoria que recorre la luz en el vacío durante un intervalo de 1/299,792,458 de segundo.

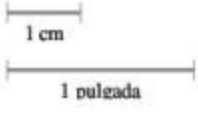


FIGURA 1

Para obtener medidas mayores que el metro, se añaden prefijos griegos, mientras que para medidas menores que el metro, se utilizan prefijos latinos. Un metro es un poco más largo que una yarda (casi 39.37 pulgadas). Las medidas aún más pequeñas suelen medirse en micrómetros, centímetros y milímetros. Un **centímetro** es la centésima parte del metro, y equivale aproximadamente a 2/5 de pulgada. (Vea la figura 1.) El símbolo del centímetro es cm.

Dado que el sistema métrico se basa en decimales y potencias de 10, las conversiones al interior de este sistema son muy fáciles, pues implican, simplemente, multiplicar y dividir con potencias de 10. Por ejemplo, para convertir 2.5 metros a centímetros, multiplique 2.5 por 100 (ya que 100 centímetros = 1 metro) para obtener 250 centímetros. Por otra parte, para convertir 18.6 centímetros a metros, divida entre 100 para obtener .186 metros. Otras conversiones se hacen de la misma manera, utilizando los significados de los prefijos. ¿Por qué 42 metros equivalen a 42,000 milímetros (mm)?

Las distancias largas suelen medirse en kilómetros. Un **kilómetro** (simbolizado km) equivale a 1000 metros y es igual a .6 de milla, aproximadamente. La figura 2 muestra la razón de 1 kilómetro a 1 milla.

Las conversiones de metros a kilómetros, y viceversa, se hacen multiplicando o dividiendo por 1000, según sea necesario. Por ejemplo, 37 kilómetros equivalen a 37,000 metros, mientras que 583 metros equivalen a .583 km.

El área de una figura puede medirse en unidades métricas cuadradas. La figura 3 muestra un cuadrado que tiene 1 centímetros de lado; por lo tanto, su área o superficie es de un **centímetro cuadrado (cm²)**. Un metro cuadrado (m^2) es el área de un cuadrado con lados de un metro de largo, ¿Cuántos cm^2 hay en un m^2?

En septiembre de 1999, se perdió el *Climate Orbiter* de Marte debido a "una falla en el uso de unidades métricas en un archivo de un programa en Tierra...". De acuerdo con Edward Weiler, administrador asociado para la Oficina de Ciencia Espacial de la NASA, el error en la conversión al sistema métrico que condujo a la pérdida "debió haber sido detectado de diversas formas", pero no fue así. (*Fuente:* "NASA's Mars Losses Spark Anger and Opportunity" de Leonard David, Washington Contributing Editor para www.space.com.)

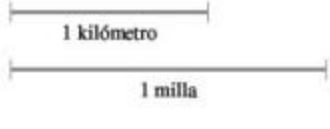


FIGURA 2

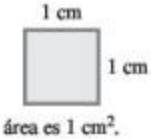


FIGURA 3

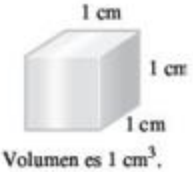


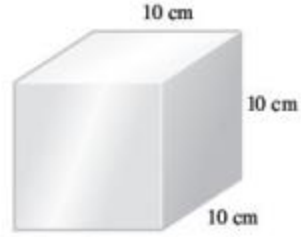
FIGURA 4

El volumen de una figura tridimensional se mide en unidades cúbicas. Si, por ejemplo, las dimensiones se dan en centímetros, el volumen puede determinarse por las fórmulas apropiadas de la geometría, y se dará en **centímetros cúbicos (cm³)**. Vea la figura 4, que ilustra el esquema de una caja cuyo volumen es de un centímetro cúbico.

Volumen y peso En el sistema métrico un **litro (l)** es la cantidad de líquido que puede alojarse en una caja de 10 centímetros de lado. (Vea la figura 5, en la página siguiente.) Un litro es un poco más de un cuarto de galón. (Vea la figura 6, en la página siguiente.) Observe la ventaja de esta definición sobre la equivalente para el

Comparación a distancia	
Longitud en metros	**Distancias aproximadas**
10^{19}	Distancia a la Estrella del Norte
10^{12}	Distancia de Saturno al Sol
10^{11}	Distancia de Venus al Sol
10^{9}	Diámetro del Sol
10^{8}	Diámetro de Júpiter
10^{7}	Diámetro de la Tierra: distancia de Washington D.C. a Tokio
10^{6}	Distancia de Chicago a Wichita, Kansas
10^{5}	Longitud promedio del Lago Michigan
10^{4}	Ancho promedio del Gran Cañón
10^{3}	Longitud del puente Golden Gate
10^{2}	Longitud de un campo de fútbol
10^{1}	Altura promedio de una casa de dos pisos
10^{0}	Ancho de una puerta
10^{-1}	Ancho de la mano
10^{-2}	Diámetro de un pedazo de tiza (gis)
10^{-3}	Grosor de una moneda de 10 centavos de dólar (*dime*)
10^{-4}	Grosor de una hoja de papel
10^{-5}	Diámetro de un glóbulo rojo
10^{-7}	Grosor de una pompa de jabón
10^{-8}	Distancia promedio entre las moléculas de aire en una habitación
10^{-9}	Diámetro de una molécula de aceite
10^{-14}	Diámetro de un núcleo atómico
10^{-15}	Diámetro de un protón

sistema inglés: con el uso de una regla graduada en centímetros es posible construir el volumen de 1 litro (símbolo, 1 L). Por otra parte, dada una regla graduada en pulgadas, sería difícil construir el volumen de un cuarto de galón.



El volumen de esta caja es 1 litro.

FIGURA 5



1 litro 1 cuarto

FIGURA 6

Los prefijos mencionados anteriormente se usan con todas las medidas del sistema métrico, de modo que un **mililitro (ml)** es la milésima parte de un litro, el **centilitro (cl)** es la centésima parte de un litro, el **kilolitro (kl)** equivale a 1000 litros, etc. El mililitro es una medida que se usa ampliamente en las ciencias y la medicina. Muchas bebidas se venden por mililitros y por litros. Por ejemplo, 750 ml es la medida común de una botella de vino, y muchos refrescos se venden actualmente en botellas de 1 y 2 litros.

En virtud de que definimos el litro como el volumen de una caja de 10 centímetros de lado,

$$1\text{ L} = 10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm} = 1000\text{ cm}^3$$

o $$\frac{1}{1000}\text{ L} = 1\text{ cm}^3.$$

Puesto que, $\frac{1}{1000}\text{ L} = 1\text{ ml}$, tenemos la relación siguiente.

$$\mathbf{1\text{ ml} = 1\text{ cm}^3}$$

Por ejemplo, el volumen de una caja, con medidas de 8 por 6 por 5 centímetros puede darse como 240 cm^3 o como 240 ml.

La caja en la figura 4 es de 1 por 1 por 1 centímetros, de modo que su volumen es de 1 cm^3, o 1 ml. Por definición, el peso del agua que llena tal caja es de **1 gramo (g)**. El *nickel,* o moneda de 5 centavos de dólar, pesa cerca de 5 gramos, o 5 g. El volumen equivalente al gramo es muy pequeño, de modo que el gramo se utiliza para pesar cantidades pequeñas. Para uso cotidiano, es más práctico el **kilogramo (kg)**, o 1000 gramos. Un kilogramo equivale a alrededor de 2.2 libras, y una abreviatura común para esta medida es la palabra **kilo**.

Los pesos todavía más pequeños pueden medirse con **miligramos (mg)** y **centigramos (cg)**. Estas medidas son tan pequeñas que, al igual que los centilitros y mililitros, se utilizan principalmente en las ciencias y en la medicina.

Temperatura En el sistema métrico, la temperatura se mide en **grados Celsius**. En la escala Celsius de temperaturas, el agua se congela a 0° y hierve a 100°. Estas



Se emitió esta estampilla postal sueca en honor de **Anders Celsius** y de su escala para medir la temperatura. La escala original tenía el punto de congelación del agua en 100° y el punto de ebullición en 0°, pero el biólogo Carl von Linne invirtió la escala, dejándonos la escala Celsius tal y como la conocemos en la actualidad.

dos cifras son más fáciles de recordar que las correspondientes a la escala Fahrenheit, que son 32° y 212°.

El termómetro en la figura 7 muestra algunas temperaturas típicas en Celsius y en Fahrenheit. Por ejemplo, la temperatura ambiente en una habitación es de 22°C, o 70°F, y la temperatura del cuerpo humano es alrededor de 37°C, o 99°F.

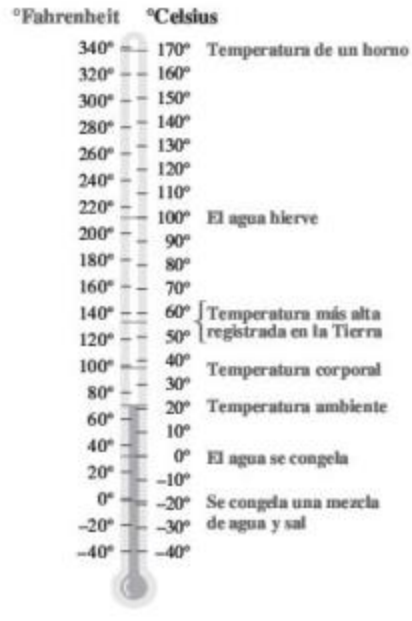


FIGURA 7

Las fórmulas dadas a continuación pueden utilizarse para hacer conversiones entre escalas Celsius y Fahrenheit.

Fórmulas de conversión Celsius-Fahrenheit

Para convertir una lectura de Fahrenheit a Celsius, utilice la fórmula

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Para convertir de Celsius a Fahrenheit, utilice la fórmula

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$







El **cambio** de un país al sistema métrico precisa de una enorme campaña educativa. Las estampillas que se muestran aquí fueron parte de una de tales campañas. Muestran varias unidades métricas y cosas que pueden medirse en esas unidades.

Conversiones métricas Debido a una legislación aprobada por el Congreso estadounidense, el sistema métrico ya se utiliza en Estados Unidos, y el objetivo final es que los dos sistemas lleguen a usarse indistintamente, y que ambos tengan una aceptación generalizada. Son muchas las industrias que utilizan hoy día el sistema métrico. En particular lo emplean las industrias que exportan una gran cantidad de bienes, ya que es compatible con la mayor parte de los países con los que realizan intercambio comercial.

Información adicional sobre el sistema métrico puede obtenerse de la Asociación Métrica de Estados Unidos, 10245, Andasol Avenue, Northridge, CA 91325-1504.

Algunas calculadoras científicas están programadas para realizar conversiones entre los sistemas inglés y métrico. Se pueden hacer las conversiones apropiadas con la ayuda de las siguientes tablas.

Métrico a inglés

Para convertir de	a	Multiplique por
metros	yardas	1.0936
metros	pies	3.2808
metros	pulgadas	39.37
kilómetros	millas	.6214
gramos	libras	.0022
kilogramos	libras	2.20
litros	cuartos	1.0567
litros	galones	.2642

Inglés a métrico

Para convertir de	a	Multiplique por
yardas	metros	.9144
pies	metros	.3048
pulgadas	metros	.0254
millas	kilómetros	1.609
libras	gramos	454
libras	kilogramos	.454
cuartos	litros	.9464
galones	litros	3.785

Ejercicios del apéndice

Realice las conversiones siguientes multiplicando o dividiendo por la potencia apropiada de 10.

1. 8 m a milímetros
2. 14.76 m a centímetros
3. 8500 cm a metros
4. 250 mm a metros
5. 68.9 cm a milímetros
6. 3.25 cm a milímetros
7. 59.8 mm a centímetros
8. 3.542 mm a centímetros
9. 5.3 km a metros
10. 9.24 km a metros
11. 27,500 m a kilómetros
12. 14,592 m a kilómetros

Utilice la regla métrica para realizar las mediciones siguientes, primero en centímetros y luego en milímetros.

13. |——|
14. |——————|
15. |————————————|

16. Con base en sus medidas del segmento de línea del ejercicio 13, ¿a cuántos centímetros, aproximadamente, equivale una pulgada? ¿A cuántos milímetros?

Realice las siguientes conversiones, multiplicando o dividiendo por la correspondiente potencia de 10.

17. 6 L a centilitros
18. 4.1 L a mililitros
19. 8.7 L a mililitros
20. 12.5 L a centilitros
21. 925 cl a litros
22. 412 ml a litros
23. 8974 ml a litros
24. 5639 cl a litros
25. 8000 g a kilogramos
26. 25,000 g a kilogramos
27. 5.2 kg a gramos
28. 12.42 kg a gramos
29. 4.2 g a miligramos
30. 3.89 g a centigramos
31. 598 mg a gramos
32. 7634 cg a gramos

Utilice las fórmulas dadas en el texto para realizar las conversiones siguientes. Si es necesario, redondee al grado más cercano.

33. 86°F a Celsius
34. 536°F a Celsius
35. −114°F a Celsius
36. −40°F a Celsius
37. 10°C a Fahrenheit
38. 25°C a Fahrenheit
39. −40°C a Fahrenheit
40. −15°C a Fahrenheit

Resuelva cada uno de los problemas siguientes. Cuando sea necesario consulte las fórmulas de geometría.

41. Una moneda de 5 centavos de dólar (*nickel*) pesa 5 g. ¿Cuántos *nickels* hay en 1 kg?

42. El agua del mar contiene aproximadamente 3.5 g de sal por 1000 ml de agua. ¿Cuántos gramos de sal habrá en un litro de agua?

43. El helio pesa alrededor de .0002 g por mililitro. ¿Cuánto pesará un litro de helio?

44. Aproximadamente 1500 g de azúcar pueden disolverse en un litro de agua tibia. ¿Cuánta azúcar podría disolverse en un mililitro de agua tibia?

45. La Fundición del Norte necesitó siete tiras de metal, cada una de 67 centímetros de largo. Determine el costo total de las tiras, si se vende a $8.74 el metro.

46. Confecciones Urbanas compró 15 piezas de encaje, cada una de 384 mm de longitud. El encaje se vende a $54.20 el metro. Determine el costo de las 15 piezas.

47. El mármol importado para cubiertas de escritorio cuesta $174.20 el metro cuadrado. Encuentre el costo de una pieza de mármol de 128 por 174 centímetros.

48. Un papel especial para fotografía se vende a $63.79 por metro cuadrado. Determine el costo de 80 piezas de papel, cada una de 9 por 14 centímetros.

49. Un importador recibió una carga de café especial en grano, en una caja de 82 centímetros por 1.1 metros por 1.2 metros. Proporcione el volumen de la caja, tanto en centímetros cúbicos como en metros cúbicos.

50. Una fábrica de textiles recibe rollos de tejido de lana empacados en cajas cuya medidas son 1.5 metros por 74 centímetros por 97 centímetros. Halle el volumen de la caja en centímetros cúbicos y en metros cúbicos.

51. Un medicamento se vende en botellas pequeñas que contienen 800 ml cada una. ¿Cuántas de estas botellas pueden llenarse de un tanque que contiene 160 L del medicamento?

52. ¿Cuántas botellas de 2 litros de refresco serían necesarias para un banquete de bodas, si se tiene previsto que asistan 80 personas a la recepción, y que cada una de ellas beba 400 ml de refresco?

Realice las conversiones siguientes. Utilice una calculadora o la tabla del texto, según sea necesario.

53. 982 yd a metros

54 12.2 km a millas

55. 125 mi a kilómetros

56. 1000 mi a kilómetros

57. 1816 g a libras

58. 1.42 lb a gramos

59. 47.2 lb a gramos

60. .68 kg a libras

61. 28.6 L a cuartos de galón

62. 28.6 L a cuartos de galón

63. 28.2 gal a litros

64. 16 cuartos de galón a litros

Las medidas métricas son muy comunes en medicina. Puesto que convertimos las medidas métricas recorriendo el punto decimal, los errores en la posición del punto decimal en las dosis médicas no son raros. Decida si las siguientes dosis de medicina parecen razonables o irrazonables.

65. Tome 2 kilogramos de aspirinas tres veces al día.

66. Tome 4 litros de Mylanta cada noche, antes de acostarse.

67. Tome 25 mililitros de jarabe para la tos diariamente.

68. Sumerja los pies en 6 litros de agua caliente.

69. Inyecte 1/2 litro de insulina cada mañana.

70. Aplique 40 gramos de ungüento en una cortada en su dedo.

Seleccione la opción más razonable para cada uno de los casos siguientes.

71. Longitud de una vaca adulta
A. 1 metro **B.** 3 metros **C.** 5 metros

72. Longitud de un Cadillac
A. 1 metro **B.** 3 metros **C.** 5 metros

73. La distancia de Seattle a Miami
A. 500 kilómetros **B.** 5000 kilómetros
C. 50,000 kilómetros

74. Longitud promedio de una nariz
A. 3 centímetros **B.** 30 centímetros
C. 300 centímetros

75. Ancho de la página de un libro
A. 1.93 milímetros **B.** 19.3 milímetros
C. 193 milímetros

76. El peso de un libro
A. 1 kilogramo **B.** 10 kilogramos
C. 1000 kilogramos

77. El peso de un automóvil grande
A. 1300 kilogramos **B.** 130 kilogramos
C. 13 kilogramos

78. El volumen de una botella de 12 onzas de líquido
A. 35 mililitros **B.** 355 mililitros
C. 3550 mililitros

79. La estatura de una persona
A. 180 centímetros **B.** 1800 centímetros
C. 18 centímetros

80. El diámetro de la Tierra
A. 130 kilómetros **B.** 1300 kilómetros
C. 13,000 kilómetros

81. La longitud de un tren grande de carga
A. 8 metros **B.** 80 metros **C.** 800 metros

82. El volumen de una toronja
A. 1 litro **B.** 4 litros **C.** 8 litros

83. La longitud de un par de pantalones (Levis)
A. 70 centímetros **B.** 700 centímetros
C. 7 centímetros

84. El peso de una persona
A. 700 kilogramos **B.** 7 kilogramos
C. 70 kilogramos

85. La medida diagonal de la pantalla de un televisor para mesa
A. 5 centímetros **B.** 50 centímetros
C. 500 centímetros

86. El ancho de una puerta estándar del cuarto de una casa
A. 1 metro **B.** 3 metros **C.** 5 metros

87. El grosor de una cinta estándar de audiocasete
A. .9 milímetros **B.** 9 milímetros
C. 90 milímetros

88. La longitud de un lado de un álbum para discos fonográficos
A. 300 milímetros **B.** 30 milímetros
C. 3000 milímetros

89. La temperatura en la superficie de un lago congelado
A. 0°C **B.** 10°C **C.** 32°C

90. La temperatura en el Valle de la Muerte en una tarde de julio
A. 25°C **B.** 40°C **C.** 65°C

91. La temperatura de la superficie de arena de un desierto en un día caluroso de verano
A. 30°C **B.** 60°C **C.** 90°C

92. El agua hirviendo
A. 100°C **B.** 120°C **C.** 150°C

93. La temperatura del aire en un día en que usted necesita suéter
A. 30°C **B.** 20°C **C.** 10°C

94. La temperatura del aire cuando va a nadar
A. 30°C **B.** 15°C **C.** 10°C

95. La temperatura del horno cuando cocina un pastel
A. 120°C **B.** 170°C **C.** 300°C

96. La temperatura del agua para un baño
A. 35°C **B.** 50°C **C.** 65°C

Respuestas a ejercicios seleccionados

CAPÍTULO 1 El arte de resolver problemas

1.1 Ejercicios (página 7)

1. deductivo **3.** inductivo **5.** deductivo **7.** deductivo **9.** inductivo **11.** inductivo

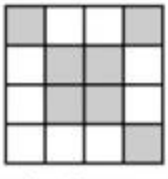
13. Las respuestas pueden variar. **15.** 21 **17.** 3072 **19.** 63 **21.** $\frac{11}{12}$ **23.** 216 **25.** 52

29. Las respuestas pueden variar. Una de tales listas es $10, 20, 30, 40, 50, \ldots$. **31.** $(98{,}765 \times 9) + 3 = 888{,}888$

33. $3367 \times 15 = 50{,}505$ **35.** $33{,}334 \times 33{,}334 = 1{,}111{,}155{,}556$ **37.** $3 + 6 + 9 + 12 + 15 = \frac{15(6)}{2}$

39. $5(6) + 5(36) + 5(216) + 5(1296) + 5(7776) = 6(7776 - 1)$ **41.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 1 - \frac{1}{32}$

43. 20,100 **45.** 320,400 **47.** 15,400 **49.** 2550 **51.**



53. 1 (Se trata de los repiques de las campanas de un reloj que inician a las 12 en punto, y que toca el número de horas a la hora y 1 repique a la media hora). **55. (a)** El dígito de en medio siempre es 9, y la suma del primer y tercer dígito siempre es 9 (considerando 0 como el primer dígito, si la diferencia sólo tiene dos dígitos). **57.** 142,857; 285,714; 428,571; 571,428; 714,285; 857,142. Cada resultado consiste en los mismos seis dígitos, pero en orden diferente. $142{,}857 \times 7 = 999{,}999$

59. 21 **61.** Las respuestas pueden variar.

1.2 Ejercicios (página 16)

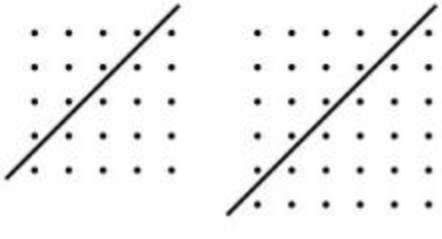
1. 79 **3.** 450 **5.** 4032 **7.** 32,758 **9.** 57; 99 **11.** $(4321 \times 9) - 1 = 38{,}888$

13. $999{,}999 \times 4 = 3{,}999{,}996$ **15.** $21^2 - 15^2 = 6^3$ **17.** $5^2 - 4^2 = 5 + 4$

19. $1 + 5 + 9 + 13 = 4 \times 7$ **21.** 45,150 **23.** 228,150 **25.** 2601 **27.** 250,000

29. $S = n(n + 1)$ **33.** fila 1: 28, 36; fila 2: 36, 49, 64; fila 3: 35, 51, 70, 92; fila 4: 28, 45, 66, 91, 120; fila 5: 18, 34, 55, 81, 112, 148; fila 6: 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176 **35.** $8(1) + 1 = 9 = 3^2$; $8(3) + 1 = 25 = 5^2$; $8(6) + 1 = 49 = 7^2$; $8(10) + 1 = 81 = 9^2$ **37.** El patrón es $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$.

39.



40. (a) $\frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \frac{25}{36}, \frac{36}{49}, \frac{49}{64}, \frac{64}{81}$ **(b)** $\frac{3}{6}, \frac{6}{10}, \frac{10}{15}, \frac{15}{21}, \frac{21}{28}, \frac{28}{36}, \frac{36}{45}$

(c) La fracción formada por dos números cuadrados consecutivos siempre está en su mínima expresión, mientras que la fracción formada por dos números triangulares consecutivos nunca está reducida a su mínima expresión.

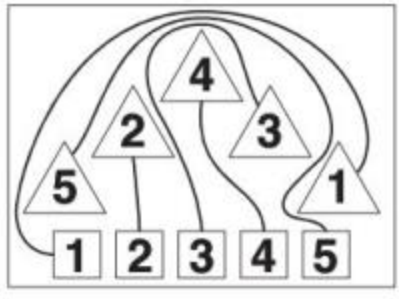
41. (a) un número triangular **(b)** un número triangular

43. 256 **45.** 117 **47.** 235 **49.** $N_n = \frac{n(7n - 5)}{2}$ **51.** un número cuadrado **53.** un cubo perfecto

1.3 Ejercicios (página 25)

1. Debe seleccionar un calcetín de la caja rotulada *calcetines rojos y verdes*. Ya que está mal rotulada, sólo contiene calcetines rojos o sólo calcetines verdes, determinada por el calcetín que usted saque. Si el calcetín es verde, coloque en esta caja el rótulo *calcetines verdes* (debe quitar este rótulo de una de las otras dos cajas). Como las otras dos cajas estaban mal rotuladas, cambie el rótulo restante a la caja que en este momento quedó sin rotular y finalmente coloque el que indica *calcetines rojos y verdes* en la caja que quedó sin rotular. Ninguna otra elección garantiza una rotulación correcta, ya que sólo está permitido sacar un solo calcetín.

3. D **5.** A **7.** Un ejemplo de solución es el siguiente:



9. 9 7 2 14 11 5 4 12 13 3 6 10 15 1 8

(o el mismo arreglo si se lee de derecha a izquierda)

11. Ésta es una solución.



13. D **15.** $\frac{1}{3}$

17. Una posible sucesión se muestra a continuación. Los números representan el número de galones en cada cubeta en cada etapa sucesiva.

Grande	7	4	4	1	1	0	7	5	5
Pequeña	0	3	0	3	0	1	1	3	0

19. 90 **21.** 55 millas por hora **23.** 07

25. Un kilogramo de monedas de \$10 de oro tiene el doble de valor que medio kilogramo de monedas de \$20 de oro. (¡La denominación no tiene importancia en la respuesta!) **27.** 3 **29.** 5 **31.** 3 calcetines **33.** 35 **35.** 6

37. el décimo noveno día

39.



41. 1967 **43.** Eva tiene \$5 y Adán \$7. **45.** El problema correcto es

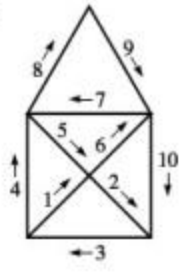
$$\begin{array}{r} 402 \\ \times\ 39 \\ \hline 15{,}678. \end{array}$$

47.

6	12	7	9
1	15	4	14
11	5	10	8
16	2	13	3

49. 25 lanzamientos (El lanzador del equipo visitante retira 24 bateadores de manera consecutiva a lo largo de las primeras ocho entradas, a condición de usar sólo un lanzamiento por jugador. Su equipo no anotó tampoco. Cuando inicia la parte baja de la novena entrada están empatados a cero, el primer bateador del equipo de casa y en el primer lanzamiento conecta un cuadrangular. El lanzador tiro 25 lanzamientos y pierde el juego con un marcador de 1–0).

51. Los dos niños cruzan el río. Uno permanece en la orilla opuesta y el otro regresa. Un soldado cruza el río, y el niño en la orilla opuesta regresa. Los dos niños cruzan el río. Uno se queda y el otro regresa. Ahora otro soldado cruza. Este proceso continúa hasta que todos los soldados han cruzado. **53.** La persona toma a la cabra cruza y regresa sola. En el segundo viaje, toma al lobo cruza y regresa con la cabra. En el tercer viaje, la cabra se queda en el primer lado, mientras la persona toma las coles y cruza. Luego la persona regresa sola y lleva a la cabra a la otra orilla. **55.** Q **57.** 28 **59.**



61. 8 **63.** La persona que ocupa la dirección general es una mujer.

65. Dan (36) está casado con Jessica (29); James (30) está casado con Cathy (31) **67.** 12; todos los meses tiene 28 días. **69.** Ninguna, ya que no hay polvo en un hoyo. **71.** "Nada, yo soy Adán." **73.** 6

	X	X
X		X
X	X	

Una de varias posibilidades

1.4 Ejercicios (página 35)

1. 43.8 **3.** 2.3589 **5.** 7.48 **7.** 7.1289 **9.** 6340.338097 **11.** 1 **13.** 1.061858759
15. 2.221441469 **17.** 3.141592653 **19.** sí **21.** positivo **23.** 1 **25.** el mismo que él **27.** 0
29. positivo **31.** Las respuestas pueden variar. **35.** BEBE **37.** BESOS **39.** Las respuestas pueden variar.
41. 48 **43.** 14 **45.** B **47.** A **49.** D **51.** DIRECTV; 45% **53.** 10,200,000 **55.** 150,000,000
57. 1998 **59.** entre 1993 y 1994 **61.** 1996; casi $2000; 1999; casi $1300 **63.** 70s **65.** caluroso y tormentoso **67.** Texas

Examen del capítulo 1 (página 47)

1. inductivo **2.** deductivo **3.** 256, 3125 (El enésimo término de la sucesión es n^4). **5.** 351 **6.** 31,375
7. 65; $65 = 1 + 7 + 13 + 19 + 25$ **8.** 1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176; El patrón es $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$.
9. Los primeros dos términos son 1. Cada término a partir del tercero se determina sumando los dos términos que le preceden. **10.** 21 **11.** 9 **12.** 35 **13.** $629 + 154 = 783$ es una de varias soluciones **14.** 8, 53 y 54
15. 3 **16.** La suma de los dígitos siempre es 9. **17.** 9.907572861 (Las respuestas pueden variar debido al modelo de la calculadora que se utilice). **18.** 34.328125 **19.** B **20.** **(a)** 1990-2000 **(b)** 1990 **(c)** 1980

CAPÍTULO 2 Conceptos básicos de la teoría de conjuntos

2.1 Ejercicios (página 54)

1. C **3.** E **5.** B **7.** H **9.** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **11.** $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ **13.** $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
15. $\{-15, -13, -11, -9, -7, -5, -3, -1\}$ **17.** $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$ **19.** $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
21. $\{21, 22, 23, \ldots\}$ **23.** {Lago Erie, Lago Hurón, Lago Michigan, Lago Ontario, Lago Superior}
25. $\{5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$ **27.** $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$
En los ejercicios 29 y 31, existen otras formas de describir a los conjuntos.
29. $\{x \mid x$ es un número racional$\}$ **31.** $\{x \mid x$ es un número natural impar menor que 76$\}$ **33.** finito **35.** infinito
37. infinito **39.** infinito **41.** 8 **43.** 500 **45.** 26 **47.** 39 **49.** 28 **53.** bien definido

55. no está bien definido **57.** no está bien definido **59.** $\in$ **61.** $\notin$ **63.** $\in$ **65.** $\notin$ **67.** falso **69.** verdadero **71.** verdadero **73.** verdadero **75.** falso **77.** verdadero **79.** verdadero **81.** falso **83.** verdadero **87.** {2} y {3, 4} (Es posible dar otros ejemplos). **89.** {a, b} y {a, c} (Son posibles otros ejemplos). **91. (a)** {Viacom (Clase B), Trans World Airline, Harken Energy, Echo Bay Mines} **(b)** {Echo Bay Mines, JTS, Nabor Industries, Hasbro, Royal Oak Mines, Grey Wolf Industries, IVAX}

2.2 Ejercicios (página 61)

1. F **3.** C **5.** A **7.** $\not\subseteq$ **9.** $\subseteq$ **11.** $\subseteq$ **13.** $\not\subseteq$ **15.** ambos **17.** $\subseteq$ **19.** ambos **21.** ninguno **23.** verdadera **25.** falsa **27.** verdadera **29.** verdadera **31.** verdadera **33.** verdadera **35.** falsa **37.** falsa **39.** verdadera **41.** falsa **43.** 8; 7 **45.** 64; 63 **47.** 32; 31 **49.** {2, 3, 5, 7, 9, 10} **51.** {2} **53.** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} o U **55.** {Costo alto, Costo bajo, Educativo, Más tiempo para pasear, Menos tiempo para pasear, No poder visitar a parientes a lo largo del camino, Poder visitar a parientes a lo largo del camino} **57.** {Costo alto, Más tiempo para pasear, No poder visitar a parientes a lo largo del camino} **59.** $\emptyset$ **61.** {A, B, C, D, E} (Todas están presentes). **63.** {A, B, C}, {A, B, D}, {A, B, E}, {A, C, D}, {A, C, E}, {A, D, E}, {B, C, D}, {B, C, E}, {B, D, E}, {C, D, E} **65.** {A}, {B}, {C}, {D}, {E} **67.** 32 **69. (a)** 15 **(b)** 16; (Ahora es posible *no* seleccionar billetes). **71. (a)** s **(b)** s **(c)** $2s$ **(d)** Al agregar un elemento siempre se duplica el número de subconjuntos, por lo que la expresión 2^n en general es verdadera.

2.3 Ejercicios (página 73)

1. B **3.** A **5.** E **7.** {a, c} **9.** {a, b, c, d, e, f} **11.** {a, b, c, d, e, f, g} **13.** {b, d, f} **15.** {d, f} **17.** {a, b, c, e, g} **19.** {a, c, e, g} **21.** {a} **23.** {e, g} **25.** {d, f} **27.** {e, g}

En los ejercicios 29 a 33, puede haber otras descripciones aceptables.

29. el conjunto de todos los elementos que están en A, o no están en B y no están en C **31.** el conjunto de todos los elementos que están en C, pero no en B, o bien están en A **33.** el conjunto de todos los elementos que están en A pero no en C, o en B pero no en C **35.** {e, h, c, l, b} **37.** {l, b} **39.** {e, h, c, l, b} **41.** el conjunto de todas las devoluciones de impuestos mostrando los ingresos del negocio o archivadas en 2003 **43.** el conjunto de todas las devoluciones de impuestos archivadas en 2003 sin deducciones **45.** el conjunto de todas las devoluciones de impuestos con deducciones o que muestran los ingresos del negocio, pero que no fueron seleccionadas para auditoría **47.** siempre verdadero **49.** siempre verdadero **51.** no es siempre verdadero **53.** siempre verdadero **55. (a)** {1, 3, 5, 2} **(b)** {1, 2, 3, 5} **(c)** Para cualesquiera conjuntos X y Y, $X \cup Y = Y \cup X$.

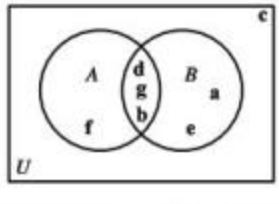
57. (a) {1, 3, 5, 2, 4} **(b)** {1,3, 5, 2, 4} **(c)** Para cualesquiera conjuntos X, Y y Z, $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$.

59. (a) {4} **(b)** {4} **(c)** Para cualesquiera conjuntos X y Y, $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$. **61. (a)** {1, 3, 5} **(b)** Para cualquier conjunto X, $X \cup \emptyset = X$. **63.** verdadero **65.** falso **67.** verdadero **69.** verdadero

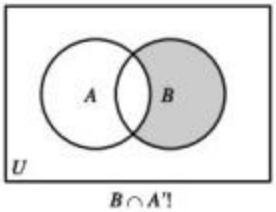
71. $A \times B = \{(2,4), (2,9), (8,4), (8,9), (12,4), (12,9)\}$; $B \times A = \{(4,2), (4,8), (4,12), (9,2), (9,8), (9,12)\}$
$B \times A = \{(6,3), (6,6), (6,9), (6,12), (8,3), (8,6), (8,9), (8,12)\}$

73. $A \times B = \{(d, p), (d, i), (d, g), (o, p), (o, i), (o, g), (g, p), (g, i), (g, g)\}$;
$B \times A = \{(p, d), (p, o), (p, g), (i, d), (i, o), (i, g), (g, d), (g, o), (g, g)\}$ **75.** $n(A \times B) = 6$; $n(B \times A) = 6$

77. $n(A \times B) = 210$; $n(B \times A) = 210$ **79.** 3 **81.**

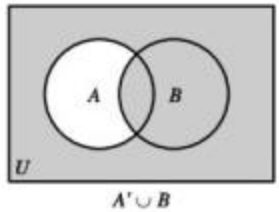


83.



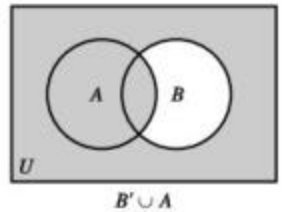
$B \cap A'$

85.



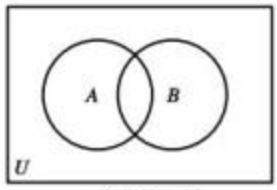
$A' \cup B$

87.



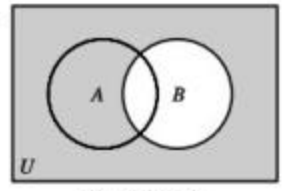
$B' \cup A$

89.



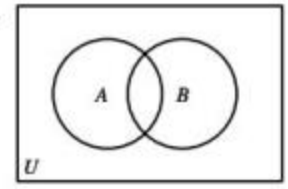
$B' \cap B = \emptyset$

91.



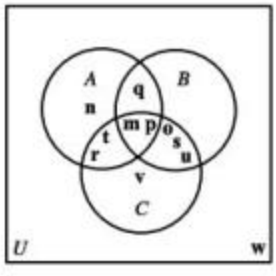
$B' \cup (A' \cap B')$

93.

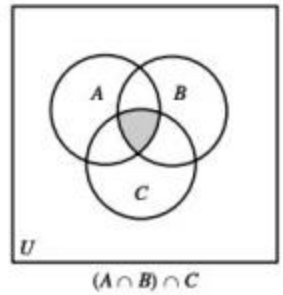


$U' = \emptyset$

95.

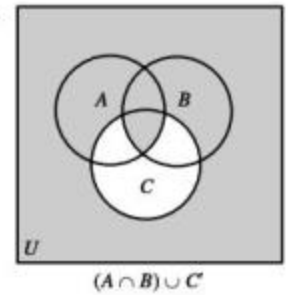


97.



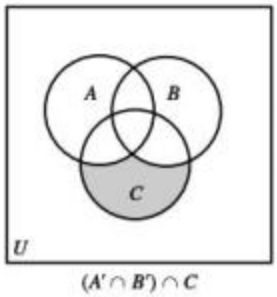
$(A \cap B) \cap C$

99.



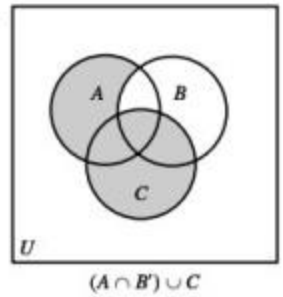
$(A \cap B) \cup C'$

101.



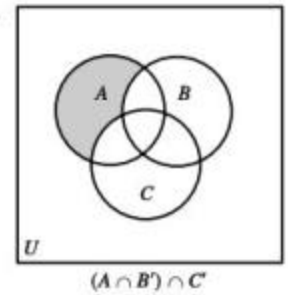
$(A' \cap B') \cap C$

103.



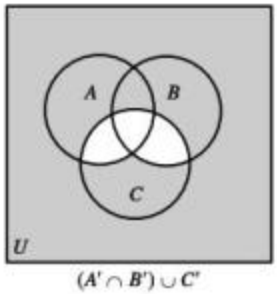
$(A \cap B') \cup C$

105.



$(A \cap B') \cap C'$

107.



$(A' \cap B') \cup C'$

109. $A' \cap B'$ o $(A \cup B)'$

111. $(A \cup B) \cap (A \cap B)'$ o $(A \cup B) - (A \cap B)$

113. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ o $A \cap (B \cup C)$

115. $(A \cap B) \cap C'$ o $(A \cap B) - C$ **117.** $A \cap B = \emptyset$

119. El enunciado es verdadero para cualquier conjunto A. **121.** $A = \emptyset$

123. $A = \emptyset$ **125.** $A = \emptyset$ **127.** siempre es verdadero

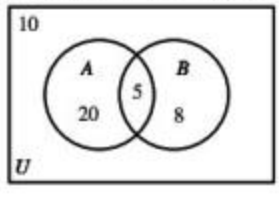
129. siempre es verdadero **131.** no siempre es verdadero

133. siempre es verdadero

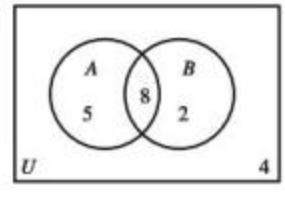
2.4 Ejercicios (página 79)

1. (a) 1 (b) 9 (c) 6 (d) 2 (e) 5 **3.** (a) 1 (b) 2 (c) 6 (d) 7 (e) 8 (f) 3 (g) 4 (h) 5 **5.** 17

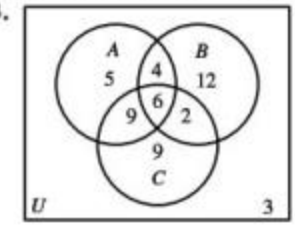
7. 16 **9.**



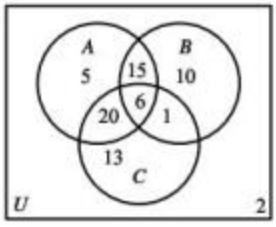
11.



13.



115.



17. (a) 3 (b) 2 (c) 10 **19.** (a) 24 (b) 2 (c) 3 (d) 16
21. (a) 0 (b) 4 (c) 3 (d) 0 (e) 6
23. (a) 51 (b) 31 (c) 18 (d) 15 (e) 33 (f) 23 **25.** 225
27. (a) 1 (b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
(c) 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11 (d) 5, 8, 13
29. (a) 6 (b) 473 (c) 835 (d) 50 (e) 297 (f) 386

2.5 Ejercicios **(página 88)**

1. B; 1 **3.** A; $\aleph_0$ **5.** F; 0 **7.** (Son posibles otras correspondencias)

$$\{\text{I, II, III}\}$$
$$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow$$
$$\{\text{x, y, z}\}$$

9. (Son posibles otras correspondencias) **11.** 11 **13.** 0 **15.** $\aleph_0$ **17.** $\aleph_0$ **19.** $\aleph_0$ **21.** 12

$$\{\text{a, d, i, t, o, n}\}$$
$$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow$$
$$\{\text{a, n, s, w, e, r}\}$$

23. $\aleph_0$ **25.** ambas **27.** equivalentes **29.** equivalentes **31.**

$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots\}$$
$$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \ \updownarrow$$
$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$$

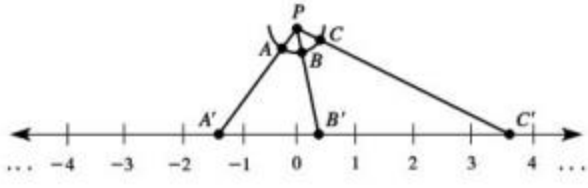
33.

$$\{1{,}000{,}000,\ 2{,}000{,}000,\ 3{,}000{,}000,\ \ldots,\ 1{,}000{,}000n,\ \ldots\}$$
$$\updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \ \updownarrow$$
$$\{\ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$$

35.

$$\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots,\ 2^n,\ \ldots\}$$
$$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \ \updownarrow$$
$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$$

37. Este enunciado no siempre es verdadero. Por ejemplo, sea $A =$ al conjunto de números naturales, $B =$ el conjunto de los números reales. **39.** El enunciado no siempre es verdadero. Por ejemplo, A podría ser el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los reales, entonces $n(A)$ sería un número infinito *mayor* que c.
41. (a) Los rayos que salen del punto P establecerán una correspondencia geométrica entre los puntos del semicírculo con los puntos de la recta.



(b) El conjunto de los números reales es infinito, se ha establecido una correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de él mismo.

43.

$$\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \ldots,\ 3n,\ \ldots\}$$
$$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \ \updownarrow$$
$$\{6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \ldots,\ 3n+3,\ \ldots\}$$

45.

$$\{3/4,\ 3/8,\ 3/12,\ 3/16,\ \ldots,\ 3/(4n),\ \ldots\}$$
$$\updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \ \updownarrow$$
$$\{3/8,\ 3/12,\ 3/16,\ 3/20,\ \ldots,\ 3/(4n+4),\ \ldots\}$$

47.

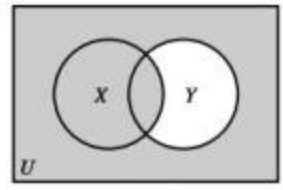
$$\{1/9,\ 1/18,\ 1/27,\ \ldots,\ 1/(9n),\ \ldots\}$$
$$\updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \ \updownarrow$$
$$\{1/18,\ 1/27,\ 1/36,\ \ldots,\ 1/(9n+9),\ \ldots\}$$

Examen del capítulo 2 **(página 91)**

1. {a, b, c, d, e} **2.** {a, b, d} **3.** {c, f, g, h} **4.** {a, c} **5.** verdadero **6.** falso **7.** verdadero
8. verdadero **9.** falso **10.** verdadero **11.** verdadero **12.** verdadero **13.** 8 **14.** 15

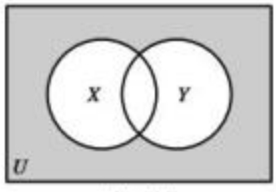
En los ejercicios 15 a 18, las respuestas pueden variar.

15. el conjunto de enteros impares entre -4 y 10 **16.** el conjunto de los meses del año **17.** $\{x \mid x$ es un entero negativo$\}$ **18.** $\{x \mid x$ es un múltiplo de 8 entre 20 y 90$\}$ **19.** $\subseteq$ **20.** ninguno **21.**



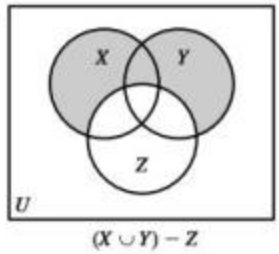
$X \cup Y'$

22.



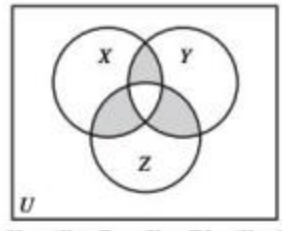
$X' \cap Y'$

23.



$(X \cup Y) - Z$

24.



$[(X \cap Y) \cup (Y \cap Z) \cup (X \cap Z)] - (X \cap Y \cap Z)$

25. {Máquina de afeitar eléctrica} **26.** {Máquina sumadora, Barómetro, Reloj de péndulo, Termómetro}
27. {Máquina de afeitar eléctrica} **29. (a)** 22 **(b)** 12 **(c)** 28 **30. (a)** 16 **(b)** 32 **(c)** 33 **(d)** 45 **(e)** 14 **(f)** 26

CAPÍTULO 3 Introducción a la lógica

3.1 Ejercicios (página 99)

1. proposición **3.** no es proposición **5.** proposición **7.** proposición **9.** proposición **11.** no es proposición **13.** proposición **15.** compuesta **17.** no es compuesta **19.** no es compuesta
21. compuesta **23.** El nombre de su tía no es Lucia. **25.** Al menos un perro no tiene su día. **27.** Ningún libro es más extenso que este libro. **29.** Al menos un técnico en computación no puede jugar *black jack*.
31. Alguien no ama a alguien en algún momento. **33.** $y \leq 12$ **35.** $q < 5$ **39.** Ella no tiene ojos verdes.
41. Ella tiene ojos verdes y él tiene 48 años de edad. **43.** Ella no tiene ojos verdes o él tiene 48 años de edad.
45. Ella no tiene ojos verdes o él no tiene 48 años de edad. **47.** No es el caso de que ella no tiene ojos verdes y él tiene 48 años de edad. **49.** $p \wedge \sim q$ **51.** $\sim p \vee q$ **53.** $\sim(p \vee q)$, o de forma equivalente, $\sim p \wedge \sim q$
57. C **59.** A, B **61.** A, C **63.** B **65.** verdadera **67.** verdadera **69.** verdadera **71.** verdadera **73.** falsa **77.** Cada uno aquí ha hecho eso en un momento u otro.

3.2 Ejercicios (página 111)

1. falso **3.** verdadero **5.** Ambos deben ser falsos. **7.** V **9.** V **11.** F **13.** V **15.** V
17. V **19.** Es una disyunción, ya que significa "$3 > 1$ o $3 = 1$". **21.** V **23.** F **25.** V **27.** V
29. F **31.** V **33.** V **35.** V **37.** 4 **39.** 16 **41.** 128 **43.** seis

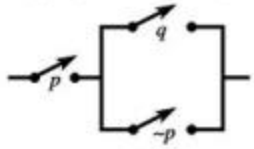
En los ejercicios del 45 al 59, damos los valores de verdad que aparecen en la columna final de la tabla de verdad, cuando la tabla de verdad se construye en el formato que se describió en la sección.

45. FFVF **47.** FVVV **49.** VVVV **51.** FFFV **53.** VFFF **55.** FFFFVFFF **57.** FVFVVVVV
59. VVVVVVVVVVVVFVVV **61.** Puede pagarme ahora y no puede pagarme después. **63.** No es verano o hay nieve. **65.** Yo no dije sí o ella no dijo no. **67.** $5 - 1 \neq 4$ o $9 + 12 = 7$ **69.** Ni Cupid ni Vixen conducirán el trineo de Santa la próxima Navidad. **71.** V **73.** V **75.** FVVF **77.** F **79.** V

3.3 Ejercicios (página 120)

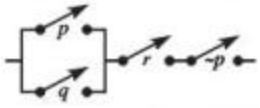
1. Si está respirando, entonces debe estar vivo. **3.** Si es verano, entonces Lorri Morgan visita Hawai.
5. Si es una pintura, entonces cuenta una historia. **7.** Si es un conejillo de indias, entonces no es un sabio.
9. Si él es *Oso Corredor*, entonces él ama a *Pequeña Paloma Blanca*. **11.** verdadera **13.** verdadera

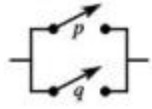
15. falsa **17.** verdadera **21.** V **23.** F **25.** V **27.** Si ellos no trepan como monos, entonces él entrena ponnies. **29.** Si ella tiene una serpiente como mascota, entonces ellos trepan como monos. **31.** Si él no entrena ponnies, entonces ellos no trepan como monos o ella tienen una serpiente como mascota. **33.** $r \rightarrow b$
35. $\sim b \rightarrow \sim r$ **37.** $b \vee (p \rightarrow r)$ **39.** $\sim r \rightarrow b$ **41.** V **43.** F **45.** V **47.** F **49.** V **51.** V
En los ejercicios del 55 al 65, damos los valores de verdad determinados en el orden en el que aparecen en la última columna de la tabla de verdad, cuando ésta se construye en el formato que se describió en la sección 3.2.
55. VVVF **57.** VVFV **59.** VVVV; tautología **61.** VFVF **63.** VVVVVVFV
65. VVVVVVVVVVVVVVFV **67.** Ésa es una auténtica alfombra persa y yo no estoy sorprendido. **69.** Las medidas inglesas no están convertidas a medidas métricas y la nave espacial no se estrelló en la superficie de Marte.
71. Quiere ser feliz el resto de su vida y tomará por esposa a una mujer bonita. **73.** Si no cuidas tus plantas con ternura y cariño o ellas no florecerán. **75.** Ella lo hace o ella lo hará. **77.** La persona no es residente de Butte o es un residente de Montana. **79.** equivalente. **81.** equivalente. **83.** equivalente. **85.** no equivalente.
87. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$; La proposición se simplifica a p. **89.** $p \vee (\sim q \wedge r)$ **91.** $\sim p \vee (p \vee q)$; La proposición se reduce a V. **93.** La proposición se simplifica a $p \wedge q$. **95.** La proposición se simplifica a F.





97. La proposición se simplifica a $(r \wedge \sim p) \wedge q$. **99.** La proposición simplifica a $p \vee q$.





3.4 Ejercicios **(página 128)**

1. (a) Si usted fuera una hora, entonces la belleza sería un minuto. **(b)** Si la belleza no fuera un minuto, entonces usted no sería una hora. **(c)** Si usted no fuera una hora, entonces la belleza no sería un minuto. **3. (a)** Si no lo repara, entonces no está roto. **(b)** Si está roto, entonces lo repara. **(c)** Si lo repara, entonces está roto.
5. (a) Si es peligroso para su salud, entonces camina enfrente de un automóvil en movimiento. **(b)** Si no camina enfrente de un automóvil en movimiento, entonces no es peligroso para su salud. **(c)** Si no es peligroso para su salud, entonces no camina enfrente de un automóvil en movimiento. **7. (a)** Si está con su pareja, entonces son ovejas. **(b)** Si no son ovejas, entonces no están con su pareja. **(c)** Si no están con su pareja, entonces no son ovejas.
9. (a) Si él viene, entonces usted lo construye. **(b)** Si no lo construye, entonces él no vendrá. **(c)** Si el no viene, entonces usted no lo construyó. **11. (a)** $\sim q \rightarrow p$ **(b)** $\sim p \rightarrow q$ **(c)** $q \rightarrow \sim p$ **13. (a)** $\sim q \rightarrow \sim p$ **(b)** $p \rightarrow q$ **(c)** $q \rightarrow p$ **15. (a)** $(q \vee r) \rightarrow p$ **(b)** $\sim p \rightarrow (\sim q \wedge \sim r)$ **(c)** $(\sim q \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$ **19.** Si está fangoso, entonces utilizaré mis botas. **21.** Si 17 es positivo, entonces 17 + 1 es positivo. **23.** Si un número es un entero, entonces es un número racional. **25.** Si resuelvo crucigramas, entonces me estoy volviendo loco. **27.** Si Greg Tobin se afeita, entonces le creció la barba durante el día. **29.** Si yo voy de Boardwalk a Connecticut, entonces paso por donde dice "siga". **31.** Si un número es entero no negativo, entonces es un entero. **33.** Si sus lanzamientos mejoran, entonces los Indios ganarán el gallardete. **35.** Si la figura es un rectángulo, entonces es un paralelogramo con un ángulo recto. **37.** Si un triángulo tiene dos lados de la misma longitud, entonces es isósceles.
39. Si un número de dos dígitos cuyo dígito de las unidades es cinco se eleva al cuadrado, entonces terminará en 25.
41. D **45.** verdadera **47.** falsa **49.** falsa **51.** contraria **53.** consistente **55.** contraria
57. Las respuestas pueden variar. Un ejemplo es: Ese hombre es Kent Merryl; Ese hombre vende libros.

3.5 Ejercicios **(página 132)**

1. válido **3.** no válido **5.** válido **7.** no válido **9.** no válido **11.** no válido **13.** sí
15. Personas que se someten a cirugía mayor deben ir al hospital. **17.** válido **19.** no válido **21.** válido
Julianne Peterson tiene cirugía mayor.

Julianne Peterson debe ir al hospital.

23. no válido **25.** no válido **27.** no válido **29.** válido

Ejercicios de extensión (página 135)

1. Lauren, Sr. Maier, jugó con el heno; Raven, Sra. Fedor, hizo sidra; Tara, Sra. Reed, tienda de suministros; Xander, Sr. Morgan, recolectar manzanas; Zach, Sr. Hanson, alimentar a los animales **3.** Sr. Crow, cupidos, hija; Sr. Evans, duendes, tío; Sr. Hurley, reno, hermana; Sr. Speigler, caritas sonrientes, suegro

3.6 Ejercicios (página 145)

1. válido por transitividad **3.** válido, por modus ponens **5.** falacia por falacia del recíproco
7. válido por modus tollens **9.** falacia por falacia del inverso **11.** válido por silogismo disyuntivo
13. no válido **15.** válido **17.** no válido **19.** válido **21.** no válido **23.** no válido **27.** válido
29. no válido **31.** no válido **33.** válido **35.** válido **37.** Si yo le digo la hora, entonces mi vida será miserable.

Las respuestas en los ejercicios del 39 al 45 pueden reemplazarse por sus contrapositivas.

39. Si es mi ave de granja, entonces es un pato. **41.** Si es un conejillo de indias, entonces es ignorante de la música. **43.** Si es un gatito que aprende con facilidad, entonces no tiene los ojos verdes. **45.** Si yo puede leerlo, entonces yo no tengo que archivarlo. **47. (a)** $p \rightarrow \sim s$ **(b)** $r \rightarrow s$ **(c)** $q \rightarrow p$ **(d)** Ninguna de mis aves de corral es oficial. **49. (a)** $r \rightarrow \sim s$ **(b)** $u \rightarrow t$ **(c)** $\sim r \rightarrow p$ **(d)** $\sim u \rightarrow \sim q$ **(e)** $t \rightarrow s$ **(f)** Todos los prestamistas son honestos. **51. (a)** $r \rightarrow w$ **(b)** $\sim u \rightarrow \sim t$ **(c)** $v \rightarrow \sim s$ **(d)** $x \rightarrow r$ **(e)** $\sim q \rightarrow t$ **(f)** $y \rightarrow p$ **(g)** $w \rightarrow s$ **(h)** $\sim x \rightarrow \sim q$ **(i)** $p \rightarrow \sim u$ **(j)** No puedo leer ninguna de las cartas de Brown.

Examen del capítulo 3 (página 149)

1. $6 - 3 \neq 3$ **2.** Algunos hombres no son creados iguales. **3.** Ningún miembro de la clase fue al viaje de campo. **4.** Ésa es la manera que usted siente, y yo la aceptaría. **5.** Ella no pasó por donde dice "siga" y no recolectó $200. **6.** $\sim p \rightarrow q$ **7.** $p \rightarrow q$ **8.** $\sim q \rightarrow \sim p$ **9.** Usted no me amará y yo no lo amaré.
10. No es el caso que usted me amará o yo no lo amaré. (De forma equivalente: Usted no me amará y yo lo amaré.)
11. V **12.** V **13.** V **14.** F **16. (a)** El antecedente debe se verdadero y el consecuente debe ser falso. **(b)** Ambas proposiciones componentes deben ser verdaderas. **(c)** Ambas proposiciones deben ser falsas.

En los ejercicios 17 y 18, damos los valores de verdad, determinados en el orden en el que aparecen en la columna final de la tabla de verdad, cuando ésta se construye en el formato descrito en el capítulo.

17. VFFF **18.** VVVV (tautología) **19.** falsa **20.** verdadera

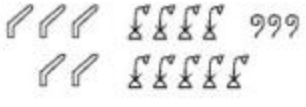
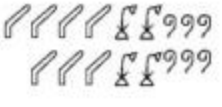
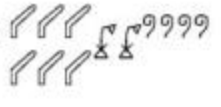
La redacción puede variar en las respuestas de los ejercicios 21 a 26.

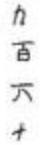
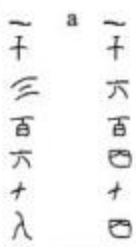
21. Si el número es un entero, entonces es un número racional. **22.** Si un polígono es un rombo, entonces es un cuadrilátero. **23.** Si un número es divisible entre 9, entonces es divisible entre 3. **24.** Si ella saca huesos de dinosaurios, entonces ella es una paleontóloga. **25. (a)** Si la gráfica me ayuda a entenderlo, entonces un dibujo dice más que mil palabras. **(b)** Si un dibujo dice más que mil palabras, entonces la gráfica me ayudará a entenderlo. **(c)** Si la gráfica no me ayuda a entenderlo, entonces un dibujo no dice más que mil palabras. **26. (a)** $(q \wedge r) \rightarrow \sim p$ **(b)** $p \rightarrow (\sim q \vee \sim r)$ **(c)** $(\sim q \vee \sim r) \rightarrow p$ **27.** válido **28. (a)** A **(b)** F **(c)** C **(d)** D **29.** válido **30.** no válido

CAPÍTULO 4 Numeración y sistemas matemáticos

4.1 Ejercicios (página 158)

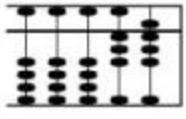
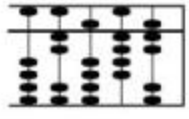
1. 13,036 **3.** 7,630,729 **5.**  **7.** 

9.  **11.**  **13.**  **15.** 935

17. 3007 **19.**  **21.**  **23.**  a **25.**  a **27.** 216 **29.** 53,601

31. 113 **33.** 7598 **35.** 1378 **37.** 5974 **39.** 622,500 shekels **45.** 99,999 **47.** 3124
49. $10^d - 1$ **51.** $7^d - 1$

4.2 Ejercicios (página 167)

1. $(7 \times 10^1) + (3 \times 10^0)$ **3.** $(3 \times 10^3) + (7 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (4 \times 10^0)$
5. $(4 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (4 \times 10^0)$
7. $(1 \times 10^7) + (4 \times 10^6) + (2 \times 10^5) + (0 \times 10^4) + (6 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (0 \times 10^0)$
9. 42 **11.** 6209 **13.** 70,401,009 **15.** 89 **17.** 32 **19.** 109 **21.** 733 **23.** 6 **25.** 206
27. 256 **29.** 63,259 **31.**  **33.**  **35.** 1885 **37.** 38,325

39. 3,035,154 **41.** 496 **43.** 217,204 **45.** 242 **47.** 49,801 **49.** 460 **51.** 32,798

4.3 Ejercicios (página 176)

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 **3.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22 **5.** 13_{cinco}; 20_{cinco} **7.** $\text{B6E}_{\text{dieciséis}}$; $\text{B70}_{\text{dieciséis}}$ **9.** 3 **11.** 11 **13.** el menor: $1000_{\text{tres}} = 27$; el mayor: $2222_{\text{tres}} = 80$ **15.** 14 **17.** 11 **19.** 956 **21.** 881 **23.** 28,854 **25.** 139 **27.** 5601
29. 321_{cinco} **31.** 10011_{dos} **33.** $93_{\text{dieciséis}}$ **35.** 2131101_{cinco} **37.** 1001001010_{dos} **39.** 102112101_{tres}
41. 111134_{seis} **43.** 32_{siete} **45.** 1031321_{cuatro} **47.** 11110111_{dos} **49.** 467_{ocho} **51.** 11011100_{dos}
53. $2D_{\text{dieciséis}}$ **55.** 37_{ocho} **57.** 1427 **59.** 1000011_{dos} **61.** 1101011_{dos} **63.** CHUCK
65. $1001111111001011011001100101110000111011101110011_{\text{dos}}$ **67.** 27 y 63 **71.** 7 **73.** no **75.** no
77. no **79.** no **83.** sí **85.** no

4.4 Ejercicios (página 183)

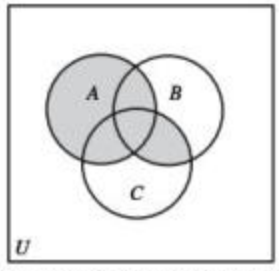
1. todas las propiedades; 1 es el elemento identidad; 1 es su propio inverso, como también lo es 2. **3.** propiedades conmutativa, asociativa y de la identidad; 1 es el elemento de identidad; 2, 4 y 6 no tienen inversos. **5.** todas las propiedades excepto el inverso; 1 es el elemento de identidad; 5 no tienen inverso. **7.** todas las propiedades; F es el elemento de identidad; A y B son inversos; F es si propio inverso. **9.** todas las propiedades; t es elemento de identidad; s y r son inversos; t y u son sus propios inversos. **11.** a **13.** a **15.** fila b: d; fila renglón c: d, b; fila d: b, c **17.** asociativa, conmutativa, identidad (U), cierre o clausura **19.** Las respuestas pueden variar. Una posibilidad es como sigue.

	a	***b***	***c***	***d***
a	*a*	*b*	*c*	*d*
b	*b*	*a*	*d*	*c*
c	*c*	*d*	*a*	*b*
d	*d*	*c*	*b*	*a*

21. no

23. **(a)** verdadero **(b)** verdadero **(c)** verdadero **(d)** verdadero **25.** $a + b + c = 1$ o $a = 0$
27. **(a)** $a = 0$ **(b)** $a = 0$ **29.** Cada lado se simplifica a e. **31.** Cada lado se simplifica a d.

33.



$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

35. Ambas columnas finales son VVVVVFFF, cuando se configura en la forma que se describe en el capítulo 3.

4.5 Ejercicios (página 192)

1. No se especifica operación alguna. **3.** sí **5.** no; cierre, inverso **7.** sí **9.** no; inverso **11.** no; asociativa, identidad e inverso **13.** no; inverso **15.** sí **17.** no; cierre, identidad, inverso **21.** S **23.** N **25.** Cada lado es igual a M. **27.** Cada lado es igual a Q. **29.** N **31.** R **33.** T **35.** no **37.** sí

Examen del capítulo 4 (página 194)

1. egipcio antiguo; 2536 **2.** 8364 **3.** $(6 \times 10^4) + (0 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (3 \times 10^0)$
4. 1998 **5.** 22,184 **6.** 12,827 **7.** 114 **8.** 38 **9.** 43,020 **10.** 111010_{dos}
11. 24341_{cinco} **12.** 256_{ocho} **13.** $101101010010_{\text{dos}}$ **14.** Hay menos repetición de símbolos.
15. Hay menor cantidad de símbolos diferentes por aprender. **16.** Hay menos dígitos en los numerales. **17.** 0
18. $\frac{1}{3}$ **19.** conmutativa **21.** **(a)** sí **(b)** o **22.** **(a)** sí **23.** **(a)** no **24.** **(a)** no **25.** **(a)** no

CAPÍTULO 5 Teoría de números

5.1 Ejercicios (página 203)

1. verdadero **3.** falso **5.** falso **7.** verdadero **9.** falso **11.** falso **13.** 1, 2, 3, 4, 6, 12
15. 1, 2, 4, 5, 10, 20 **17.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120 **19.** **(a)** no **(b)** sí **(c)** no **(d)** sí **(e)** no **(f)** no **(g)** sí **(h)** no **(i)** no **21.** **(a)** no **(b)** no **(c)** no **(d)** sí **(e)** no **(f)** no **(g)** no **(h)** no **(i)** no **23.** **(a)** no **(b)** sí **(c)** no **(d)** no **(e)** no **(f)** no **(g)** sí **(h)** no **(i)** no
25. **(b)** 13 **(c)** raíz cuadrada; raíz cuadrada; raíz cuadrada **(d)** primo **27.** 2, 3; no **29.** Debe ser 0.
31. $2^4 \cdot 3 \cdot 5$ **33.** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ **35.** $3 \cdot 13 \cdot 17$ **37.** sí **39.** no **41.** sí **43.** no **45.** El número es divisible entre 3 y 5. Es decir, la suma de los dígitos debe ser divisible entre 3 y el último dígito debe ser 5 o 0.
47. 0, 2, 4, 6, 8 **49.** 0, 4, 8 **51.** 0, 6 **53.** 6 **55.** 9 **57.** 12 **59.** 27 **61.** año bisiesto
63. no es un año bisiesto **65.** año bisiesto **71.** $41^2 - 41 + 41 = 41^2$, y 41^2 no es primo. **73.** B
75. **(a)** 65,537 **(b)** 251 **81.** 63 **83.** $2^p - 1$ **85.** 3 y 31

5.2 Ejercicios (página 210)

1. verdadero **3.** verdadero **5.** verdadero **7.** falso **9.** verdadero **11.** La suma de los divisores propios es 496: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$. **13.** 8191 es primo; 33,550,336
15. $1 + 1/2 + 1/3 + 1/6 = 2$ **17.** abundante **19.** deficiente **21.** 12, 18, 20, 24
23. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 15 + 21 + 27 + 35 + 45 + 63 + 105 + 135 + 189 + 315 = 975$, y $975 > 945$, 945 es abundante. **25.** $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210$ y $1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184$ **27.** $3 + 11$ **29.** $3 + 23$
31. Sean $a = 5$ y $b = 3$; $11 = 5 + 2 \cdot 3$ **33.** 71 y 73 **35.** 137 y 139 **37.** **(a)** $5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2$ **(b)** $11 = 36 - 25 = 6^2 - 5^2$ **39.** $5^2 + 2 = 27 = 3^3$ **43.** No; para los primeros seis, la sucesión es 6, 8, 6, 8, 6, 6. **47.** B **49.** 7; sí **51.** 15; no **53.** 27; no **55.** 24; 23; 25; sí; no **59.** B

5.3 Ejercicios (página 218)

1. verdadero **3.** verdadero **5.** falso **7.** verdadero **9.** verdadero **11.** 10 **13.** 120 **15.** 7 **17.** 12 **19.** 10 **21.** 6 **23.** 12 **25.** 12 **27.** 70 **31.** 120 **33.** 672 **35.** 840 **37.** 96 **39.** 225 **41.** 2160 **43.** 180 **45.** 1260 **47.** 1680 **49.** **(a)** $p^b q^c r^c$ **(b)** $p^a q^a r^b$ **51.** 30 **53.** 15 **55.** 12 **57.** **(a)** 6 **(b)** 36 **59.** **(a)** 18 **(b)** 216 **61.** p y q son primos relativos. **65.** 144o. **67.** 48 **69.** \$600; 25 libros

5.4 Ejercicios (página 228)

1. 5 **3.** 6 **5.** fila 2: 0, 6, 10; fila 3: 9, 0, 9; fila 4: 0, 4, 0, 8, 0; fila 5: 1, 9, 2, 7; fila 6: 6, 0, 0; fila 7: 4, 11, 6, 8, 3, 5; fila 8: 8, 4, 0 0; fila 9: 6, 3, 9, 3, 9, 6, 3; fila 10: 6, 4, 0, 10, 8, 6, 4; fila 11: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 **7.** sí **9.** fila 1: 0; fila 2: 0; fila 3: 0, 1, 2; fila 4: 0, 1, 2 **11.** sí **13.** sí (0 es su propio inverso, 1 y 4 son inversos de entre sí, y 2 y 3 son inversos entre sí). **15.** sí **17.** sí (es un elemento de identidad). **19.** 3 **21.** 4 **25.** 0700 **27.** 0000 **29.** falso **31.** verdadero **33.** 3 **35.** 3 **37.** 1 **39.** 10 **43.** 5 **45.** 4 **47.** **(a)** fila 1: 0; fila 2: 2, 3, 4, 5, 6, 0, 1; fila 3: 3, 4, 5, 6, 0, 1, 2; fila 4: 4, 5, 6, 0, 1, 2, 3; fila 5: 5, 6, 0, 1, 2, 3, 4; fila 6: 6, 0, 1, 2, 3, 4, 5 **(b)** Se satisfacen las cuatro propiedades. **(c)** 0 es su propio inverso, 1 y 6 son inversos uno del otro, 2 y 5 son inversos uno del otro y 3 y 4 son inversos uno del otro. **49.** **(a)** 1 **(b)** Todas las propiedades se satisfacen. **(c)** 1 es su propio inverso y 2 es su propio inverso. **(51).** **(a)** fila 2: 1, 3, 7; fila 3: 3, 0; fila 4: 3, 2, 1; fila 5: 6, 7, 4; fila 7: 3, 1, 6, 4; fila 8: 6, 5, 2 **(b)** no tiene la propiedad del inverso. **(c)** 1 es su propio inverso, al igual que 8; 2 y 5 son inversas entre sí, al igual que 4 y 7; 3 no tiene inverso, y 6 tampoco. **53.** {3, 10, 17, 24, 31, 38, ...} **55.** identidad **57.** 100,000 **59.** 62 **61.** **(a)** 365 **(b)** Viernes **63.** Chicago: 23 y 29 de julio; Nueva Orleans: 5 de julio y 16 de agosto; San Francisco: 9 de agosto **65.** -1 **67.** 1 **69.** Lunes **71.** Miércoles **73.** Septiembre y diciembre **75.** Junio **77.** incorrecto **79.** 6 **81.** 7

5.5 Ejercicios (página 237)

1. 2584 **3.** 46,368 **5.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **7.** $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 21 - 1$; Cada expresión es igual a 20.

9. $1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 = 144$; cada expresión es igual a 144. **11.** $13^2 - 5^2 = 144$; Cada expresión es igual a 144. **13.** $1 - 2 + 5 - 13 + 34 - 89 = -8^2$; Cada expresión es igual a -64. **15.** (Existen otras formas de hacer esto.) **(a)** $37 = 34 + 3$ **(b)** $40 = 34 + 5 + 1$ **(c)** $52 = 34 + 13 + 5$ **17.** **(a)** El mayor factor común de 10 y 4 es 2, y el mayor factor común de $F_{10} = 55$ y $F_4 = 3$ es $F_2 = 1$. **(b)** El mayor factor común de 12 y 6 es 6, y el mayor factor común de $F_{12} = 144$ y $F_6 = 8$ es $F_6 = 8$. **(c)** El mayor factor común de 14 y 6 es 2, y el mayor factor común de $F_{14} = 377$ y $F_6 = 8$ es $F_2 = 1$. **19.** **(a)** $5 \cdot 34 - 13^2 = 1$ **(b)** $13^2 - 3 \cdot 55 = 4$ **(c)** $2 \cdot 89 - 13^2 = 9$ **(d)** la diferencia será 25, ya que estamos obteniendo los cuadrados de los términos de la secuencia de Fibonacci. $13^2 - 1 \cdot 144 = 25 = 5^2$. **21.** 199 **23.** Cada suma es 2 menos que un número de Lucas. **25.** **(a)** $8 \cdot 18 = 144$; Cada expresión es igual a 144. **(b)** $8 + 21 = 29$; Cada expresión es igual a 29. **(c)** $8 + 18 = 2 \cdot 13$; Cada expresión es igual a 26. **27.** 3, 4, 5 **29.** 16, 30, 34 **31.** Las sumas son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. Son términos de la sucesión de Fibonacci. **33.** $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618033989$ y $(1 - \sqrt{5})/2 \approx 2.618033989$. Los decimales tienen los mismos dígitos. **35.** 377 **37.** 17,711 **39.** F_{2n} **41.** F_{2n-2}

Ejercicios de extensión (página 241)

1.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

3.

11	10	4	23	17
18	12	6	5	24
25	19	13	7	1
2	21	20	14	8
9	3	22	16	15

5.

15	16	22	3	9
8	14	20	21	2
1	7	13	19	25
24	5	6	12	18
17	23	4	10	11

7.

24	9	12
3	15	27
18	21	6

La suma mágica es 45.

9.

$\frac{17}{2}$	12	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{15}{2}$
$\frac{23}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	7	8
2	3	$\frac{13}{2}$	10	11
5	6	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{11}{2}$	9	$\frac{25}{2}$	1	$\frac{9}{2}$

La suma mágica es $32\frac{1}{2}$.

11. 479 **13.** 467 **15.** 269 **17.** **(a)** 73 **(b)** 70 **(c)** 74 **(d)** 69
19. **(a)** 7 **(b)** 22 **(c)** 5 **(d)** 4 **(e)** 15 **(f)** 19 **(g)** 6 **(h)** 23

21.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

23. Cada suma es igual a 34. **25.** Cada suma es igual a 68.
27. Cada suma es igual a 9248. **29.** Cada suma es igual a 748.
31.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

La segunda y la tercera columnas se intercambiaron.

33.

18	20	10
8	16	24
22	12	14

35.

39	48	57	10	19	28	37
47	56	16	18	27	36	38
55	15	17	26	35	44	46
14	23	25	34	43	45	54
22	24	33	42	51	53	13
30	32	41	50	52	12	21
31	40	49	58	11	20	29

La suma mágica es 238.

37. 260
39. $52 + 45 + 16 + 17 + 54 + 43 + 10 + 23 = 260$

41.

5	13	21	9	17
6	19	2	15	23
12	25	8	16	4
18	1	14	22	10
24	7	20	3	11

42.

9	3	22	16	15
21	20	14	8	2
13	7	1	25	19
5	24	18	12	6
17	11	10	4	23

Examen del capítulo 5 **(página 245)**

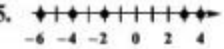
1. falsa **2.** verdadera **3.** verdadera **4.** verdadera **5.** verdadera **6.** **(a)** sí **(b)** sí **(c)** no **(d)** sí **(e)** sí **(f)** no **(g)** sí **(h)** sí **(i)** no **7.** **(a)** compuesto **(b)** ninguno **(c)** primo **8.** $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$ **10.** **(a)** deficiente **(b)** perfecto **(c)** abundante **11.** C **12.** 41 y 43 **13.** 90 **14.** 360 **15.** Lunes **16.** 46,368 **17.** $89 - (8 + 13 + 21 + 34) = 13$; Cada expresión es igual a 13. **18.** B **19.** 3 **20.** $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ **21.** **(a)** 1, 5, 6, 11, 17, 28, 45, 73 **(b)** El proceso arrojará 19 para cualquier término que se elija. **22.** A

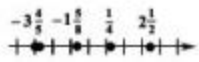
CAPÍTULO 6 El sistema de los números reales

6.1 Ejercicios (página 254)

1. 4 **3.** 0 **5.** $\sqrt{12}$ (Hay otros). **7.** verdadera **9.** verdadera **11.** **(a)** 3, 7 **(b)** 0, 3, 7 **(c)** $-9, 0, 3, 7$ **(d)** $-9, -1\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}, 0, 3, 5.9, 7$ **(e)** $-\sqrt{7}, \sqrt{5}$ **(f)** Todos son números reales. **15.** 568,488 **17.** $-30°$

19. $-34{,}841$ **21.** -8 **23.** **(a)** Océano Pacífico, Océano Índico, Mar Caribe, Mar de China, Golfo de California **(b)** Point Success, Rainer, Matlalcuéyetl, Steele, McKinley **(c)** verdadera **(d)** falsa

25. 

27. 

29. **(a)** A **(b)** A **(c)** B **(d)** B **31.** **(a)** 2 **(b)** 2

33. **(a)** -6 **(b)** 6 **35.** **(a)** -3 **(b)** 3 **37.** **(a)** 0 **(b)** 0 **39.** $a - b$ **41.** -12 **43.** -8 **45.** 3
47. $|-3|$ o 3 **49.** $-|-6|$ o -6 **51.** $|5 - 3|$ o 2 **53.** verdadera **55.** verdadera **57.** verdadera
59. falsa **61.** verdadera **63.** falsa **65.** video/equipo de audio de 1995 a 1996 **67.** 1996 a 1997
69. servicio de cómputo/procesamiento de datos

Las respuestas pueden variar en los ejercicios del 71 al 75.

71. $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, 1\frac{3}{4}$ **73.** $-3\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{7}$ **75.** $\sqrt{5}, \pi, -\sqrt{3}$

6.2 Ejercicios (página 265)

1. negativo **3.** $-3; 5$ **7.** -20 **9.** -4 **11.** -11 **13.** 9 **15.** 20 **17.** 4 **19.** 24
21. -1296 **23.** 6 **25.** -6 **27.** 0 **29.** -6 **31.** -4 **33.** 27 **35.** 39 **37.** -2
39. no es un número real **41.** 13 **43.** A, B, C **45.** propiedad conmutativa de la suma
47. propiedad asociativa de la suma **49.** propiedad del inverso para la suma **51.** propiedad de la identidad de la multiplicación **53.** propiedad de identidad para la suma **55.** propiedad distributiva **57.** propiedad de cierre de la suma **59.** **(a)** $-2, 2$ **(b)** conmutativa **(c)** sí; elija $a = b$. Por ejemplo, $a = b = 2 : 2 - 2 = 2 - 2$.
61. **(a)** desarreglar su cuarto **(b)** gastar dinero **(c)** disminuir el volumen de su reproductor de CD **63.** identidad **65.** no **69.** -81 **71.** 81 **73.** -81 **75.** -81 **77.** **(a)** \$25.1 mil millones **(b)** $-$\$11.3 mil millones **(c)** \$5.0 mil millones **(d)** $-$\$2.2 mil millones **79.** **(a)** 2000: \$129 mil millones; 2010: \$206 mil millones; 2020: \$74 mil millones; 2030: $-$\$501 mil millones **81.** $-$\$35.00 **83.** 45° F **85.** $-41°$ F
87. 14,776 pies **89.** 365 libras **91.** 37 yardas **93.** 17 **95.** \$323.83

6.3 Ejercicios (página 279)

1. A, C, D **3.** C **5.** $\frac{1}{3}$ **7.** $-\frac{3}{7}$

En los ejercicios 9 y 11, las respuestas variarán. Damos 3 de un número infinito de posibles respuestas.

9. $\frac{6}{16}, \frac{9}{24}, \frac{12}{32}$ **11.** $-\frac{10}{14}, -\frac{15}{21}, -\frac{20}{28}$ **13.** **(a)** $\frac{1}{3}$ **(b)** $\frac{1}{4}$ **(c)** $\frac{2}{5}$ **(d)** $\frac{1}{3}$

15. los puntos en la intersección del triángulo y el rectángulo como parte de los puntos en la figura completa

17. **(a)** O'Brien **(b)** Bravener **(c)** Bravener **(d)** Kelly **(e)** Taylor y Britz; $\frac{1}{2}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** $\frac{43}{48}$

23. $-\frac{5}{24}$ **25.** $\frac{23}{56}$ **27.** $\frac{27}{20}$ **29.** $\frac{5}{12}$ **31.** $\frac{1}{9}$ **33.** $\frac{3}{2}$ **35.** $\frac{3}{2}$ **37.** **(a)** $4\frac{1}{2}$ tazas **(b)** $\frac{7}{8}$ taza

39. $\frac{13}{2}$ **41.** $\frac{29}{10}$ **43.** $6\frac{3}{4}$ **45.** $6\frac{1}{8}$ **47.** $-17\frac{7}{8}$ **49.** $\frac{9}{16}$ pulgada **51.** 3 **53.** $\frac{3}{7}$ **55.** $-\frac{103}{89}$

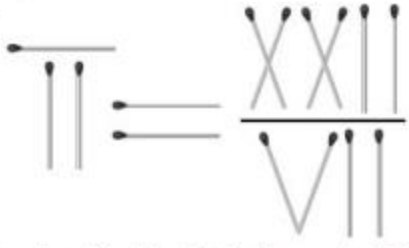
57. $\frac{25}{9}$ **59.** $\frac{5}{8}$ **61.** $\frac{19}{30}$ **63.** $-\frac{3}{4}$ **65.** \$12.60 **67.** $\frac{14}{19}$ **69.** $\frac{13}{29}$ **71.** $\frac{5}{2}$

73. Proporcione el número racional a la mitad entre los dos enteros (su promedio). **75.** .75 **77.** .1875

79. $.\overline{27}$ **81.** $.\overline{285714}$ **83.** $\frac{2}{5}$ **85.** $\frac{17}{20}$ **87.** $\frac{467}{500}$ **89.** se repite **91.** termina
93. termina **95.** **(a)** $.\overline{3}$ o .333... **(b)** $.\overline{6}$ o .666... **(c)** $.\overline{9}$ o .999... **(d)** $1 = .\overline{9}$

6.4 Ejercicios **(página 290)**

1. racional **3.** irracional **5.** racional **7.** racional **9.** irracional **11.** irracional **13.** racional
15. **(a)** $.\overline{8}$ **(b)** irracional, racional
En los ejercicios del 17 al 35, el número de dígitos variará entre los diferentes modelos de calculadoras.
17. 6.244997998 **19.** 3.885871846 **21.** 29.73213749 **23.** 1.060660172 **25.** $5\sqrt{2}$; 7.071067812
27. $5\sqrt{3}$; 8.660254038 **29.** $12\sqrt{2}$; 16.97056275 **31.** $\frac{5\sqrt{6}}{6}$; 2.041241452 **33.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$; 1.322875656
35. $\frac{\sqrt{21}}{3}$; 1.527525232 **37.** $3\sqrt{17}$ **39.** $4\sqrt{7}$ **41.** $10\sqrt{2}$ **43.** $3\sqrt{3}$
45.



47. El resultado es 3.1415929, que coincide con los primeros siete dígitos en la forma decimal de π.
49. 2.5 segundos **51.** 8.2 millas
53. 392,000 millas cuadradas **55.** 5.4 pies
57. **(a)** 70.5 millas por hora **(b)** 59.8 millas por hora
(c) 53.9 millas por hora
59. 4 **61.** 7 **63.** 6 **65.** 1 **67.** 4 **69.** 8
En los ejercicios 71 a 75, el número de dígitos que se muestra variará entre diferentes modelos de calculadoras.
71. 3.50339806 **73.** 5.828476683 **75.** 10.06565066 **77.** 5.8 pies **79.** **(a)** 1.414213562
(b) 2.645751311 **(c)** 3.633180425 **(d)** 5 **81.** Los valores parece que se aproximan al valor de e.

6.5 Ejercicios **(página 302)**

1. verdadera **3.** falsa **5.** verdadera **7.** verdadera **9.** falsa **11.** 11.315 **13.** −4.215
15. .8224 **17.** 47.5 **19.** 31.6 **21.** Filadelfia; la población disminuyó 10.6%. **23.** tres (y le quedará .01¢)
25. **(a)** \$1572 **(b)** \$2434 **(c)** \$3296 **27.** **(a)** .031 **(b)** .035 **29.** 297 **31.** **(a)** 78.4 **(b)** 78.41
33. **(a)** .1 **(b)** .08 **35.** **(a)** 12.7 **(b)** 12.69 **37.** 42% **39.** 36.5% **41.** .8% **43.** 210%
45. 20% **47.** 1% **49.** $37\frac{1}{2}\%$ **51.** 150% **55.** **(a)** 5 **(b)** 24 **(c)** 8 **(d)** .5 o $\frac{1}{2}$ **(e)** 600
57. No, el precio es \$57.60. **59.** .577; .503; .446 **61.** 124.8 **63.** 2.94 **65.** 150% **67.** 600
69. 1.4% **71.** A **73.** C **75.** aproximadamente 67% **77.** **(a)** .5% **(b)** .6% **79.** \$1385.80
81. casi 22.7% **83.** \$4.50 **85.** \$.75 **87.** \$12.00 **89.** \$36.00

Ejercicios de extensión **(página 309)**

1. $12i$ **3.** $-15i$ **5.** $i\sqrt{3}$ **7.** $5i\sqrt{3}$ **9.** −5 **11.** −18 **13.** −40 **15.** $\sqrt{2}$ **17.** $3i$
19. 6 **23.** 1 **25.** −1 **27.** $-i$ **29.** i

Examen del capítulo 6 **(página 311)**

1. **(a)** 12 **(b)** 0, 12 **(c)** −4, 0, 12 **(d)** $-4, -\frac{3}{2}, -.5, 0, 4.1, 12$ **(e)** $-\sqrt{5}, \sqrt{3}$ **(f)** $-4, -\sqrt{5}, -\frac{3}{2}, -.5,$
$0, \sqrt{3}, 4.1, 12$ **2.** **(a)** C **(b)** B **(c)** D **(d)** A **3.** **(a)** falsa **(b)** verdadera
(c) verdadera **(d)** falsa **4.** 4 **5.** 3 **6.** 10 **7.** **(a)** −11,478 **(b)** −17,776 **(c)** C **(d)** C
8. 5296 pies **9.** 8929; −10,936; −14,575; −430; 803 **10.** **(a)** E **(b)** A **(c)** B **(d)** D **(e)** F **(f)** C

11. (a) Whitney (b) Moura y Dawkins (c) Whitney (d) Pritchard y Miller; $\frac{2}{5}$ **12.** $\frac{11}{16}$ **13.** $\frac{57}{160}$

14. $-\frac{2}{5}$ **15.** $\frac{3}{2}$ **16.** (a) .45 (b) $.41\overline{6}$ **17.** (a) $\frac{18}{25}$ (b) $\frac{58}{99}$ **18.** (a) irracional (b) racional (c) racional (d) racional (e) irracional **19.** (a) 12.247448714 (b) $5\sqrt{6}$ **20.** (a) 4.913538149 (b) $\frac{13\sqrt{7}}{7}$ **21.** (a) −45.254834 (b) $-32\sqrt{2}$ **23.** (a) 13.81 (b) −.315 (c) 38.7 (d) −24.3

24. (a) 9.04 (b) 9.045 **25.** (a) 16.65 (b) 101.5 **26.** (a) $26\frac{2}{3}\%$ (b) $66\frac{2}{3}\%$ **27.** D

28. 345; 210; 38%; 15% **29.** (a) 200 (b) 90; Ya que 26% es el doble de 13%, esperaríamos que el doble del número de personas tenga a Carlitos como su favorito, en comparación con Linus. **30.** casi 13.5%

CAPÍTULO 7 Conceptos básicos de álgebra

7.1 Ejercicios (página 322)

1. A y C **3.** Al evaluar, ambos lados dan 30, 6 es la solución. **5.** conjunto solución **7.** B **9.** {−1}

11. {3} **13.** {−7} **15.** {0} **17.** $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$ **19.** $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **21.** {2} **23.** {−2} **25.** {7} **27.** {2}

29. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **31.** {−5} **33.** {3} **37.** {−6} **39.** {0} **41.** {−5} **43.** {100} **45.** {7000}

47. {60} **49.** A **51.** contradicción; ∅ **53.** condicional; {−8} **55.** condicional; {0}

57. identidad; {todos los números reales} **59.** D **61.** $t = \frac{d}{r}$ **63.** $b = \frac{A}{h}$ **65.** $a = P - b - c$

67. $h = \frac{2A}{b}$ **69.** $h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$ o $h = \frac{S}{2\pi r} - r$ **71.** $F = \frac{9}{5}C + 32$ **73.** $H = \frac{A - 2LW}{2W + 2L}$

75. (a) 9.65 millones (b) 1992 **77.** 1995-1996 y 1996-1997

7.2 Ejercicios (página 334)

1. expresión **3.** ecuación **5.** expresión **7.** sí **9.** $x - 18$ **11.** $(x - 9)(x + 6)$

13. $\frac{12}{x}$ $(x \neq 0)$ **17.** $2x + \frac{x}{6} = x - 8$ **19.** $12 - \frac{2}{3}x = 10$ **21.** *Paso 2:* el número de vendedores en una pequeña cadena de librerías independientes *Paso 3:* x; $(x - 70)$ *Paso 4:* 256 *Paso 5:* 256; 186 *Paso 6:* gran cadena de vendedores: 70; vendedores en una pequeña cadena: 442 **23.** Camry: 421.5 miles; Accord: 406.5 miles

25. Ruth: 2873 hits; Hornsby: 2930 hits **27.** alquiler: $6.63 mil millones; $3.18 mil millones **29.** California: 59 pantallas; Nueva York: 48 pantallas **31.** 35 mililitros **33.** $350 **35.** $14.15 **37.** 4 litros

39. $18\frac{2}{11}$ litros **41.** 5 litros **43.** $4000 al 3%; $8000 al 4% **45.** $10,000 a 4.5%; $19,000 a 3%

47. $58,000 **49.** 17 peniques, 17 *dimes*, 10 *quarters* **51.** 305 estudiantes, 105 no estudiantes **53.** 54 asientos en la fila 1, 51 asientos en la fila 2 **55.** 54 monedas de $10, 26 monedas de $20 **57.** 3.808 horas **59.** 1.715 horas **61.** 7.91 metros por segundo **63.** 8.42 metros por segundo **65.** 530 millas

69. $1\frac{3}{4}$ horas **71.** 10:00 a.m. **73.** 18 millas **75.** 8 horas

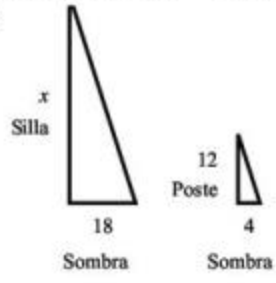
7.3 Ejercicios (página 348)

1. $\frac{5}{8}$ **3.** $\frac{1}{4}$ **5.** $\frac{2}{1}$ **7.** $\frac{3}{1}$ **9.** D **13.** verdadera **15.** falsa **17.** verdadera **19.** {35} **21.** {27}

23. {−1} **25.** 6.875 onzas **27.** $670.48 **29.** $9.30 **31.** 4 pies **33.** 12,500 peces

35. (a) $\frac{26}{100} = \frac{x}{350}$; \$91 millones (b) \$112 millones; \$11.2 millones (c) \$119 millones **37.** paquete de 30 **39.** tamaño de 31 onzas **41.** tamaño de 32 onzas **43.** 4 **45.** 1

47. (a)



(b) 54 pies **49.** \$242 **51.** \$270 **53.** \$287 **55.** 9 **57.** 125 **59.** $\frac{4}{9}$ **61.** \$40.32 **63.** 20 millas por hora **65.** aproximadamente 302 libras **67.** 100 libras por pulgada cuadrada **69.** 20 libras por pie cuadrado **71.** 144 pies **73.** 23 **75.** 11.8 libras

7.4 Ejercicios (página 357)

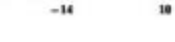
1. D **3.** B **5.** F **9.** $[5,\infty)$  **11.** $(7,\infty)$ 

13. $(-4,\infty)$  **15.** $(-\infty,-40]$  **17.** $(-\infty,4]$ 

19. $\left(-\infty,-\frac{15}{2}\right)$  **21.** $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$  **23.** $(3,\infty)$ 

25. $(-\infty,4)$ **27.** $\left(-\infty,\frac{23}{6}\right]$ **29.** $\left(-\infty,\frac{76}{11}\right)$

31. $(-\infty,\infty)$ **33.** $\emptyset$ **37.** $(1,11)$  **39.** $[-14,10]$ 

41. $[-5,6]$ **43.** $\left[-\frac{14}{3},2\right]$ **45.** $\left[-\frac{1}{2},\frac{35}{2}\right]$ 

47. $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right]$  **49.** Abril, mayo, junio y julio **51.** Enero, febrero, marzo, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre **53.** de las 2:30 p.m. a las 6:00 p.m., aproximadamente **55.** aproximadamente 84°F-91°F **57.** 2 millas **59.** al menos 80 **61.** 50 millas **63.** (a) 140 a 184 libras (b) Las respuestas pueden variar. **65.** 26 cintas

7.5 Ejercicios (página 369)

1. A **3.** A **5.** D **7.** 625 **9.** -32 **11.** -8 **13.** -81 **15.** $\frac{1}{49}$ **17.** $-\frac{1}{49}$ **19.** -128 **21.** $\frac{16}{5}$ **23.** 125 **25.** $\frac{25}{16}$ **27.** $\frac{9}{20}$ **29.** 1 **31.** 1 **33.** 0 **35.** recíproco: inverso aditivo **37.** D **39.** x^{16} **41.** 5 **43.** $\frac{1}{27}$ **45.** $\frac{1}{81}$ **47.** $\frac{1}{t^7}$ **49.** $9x^2$ **51.** $\frac{1}{a^5}$ **53.** x^{11} **55.** r^6 **57.** $-\frac{56}{k^2}$ **59.** $\frac{1}{z^4}$ **61.** $-\frac{3}{t^7}$ **63.** $\frac{27}{a^{18}}$ **65.** $\frac{x^5}{y^2}$ **67.** D **69.** 2.3×10^2 **71.** 2×10^{-2} **73.** 6500 **75.** .0152 **77.** 6×10^5 **79.** 2×10^5 **81.** 2×10^5 **83.** $\$1.37574 \times 10^{10}$ **85.** 1×10^9; 1×10^{12}; 2.128×10^{12}; 1.44419×10^5 **87.** 1×10^{10} **89.** 2,000,000,000 **91.** 26,000 o 2.6×10^4 **93.** aproximadamente 9.474×10^{-7} pársec **95.** 300 segundos **97.** aproximadamente 5.87×10^{12} millas **99.** 20,000 horas **101.** 1.23×10^5 **103.** 4.24×10^5 **105.** 4.4×10^5

7.6 Ejercicios (página 379)

1. $x^2 - x + 3$ **3.** $9y^2 - 4y + 4$ **5.** $6m^4 - 2m^3 - 7m^2 - 4m$ **7.** $-2x^2 - 13x + 11$ **9.** $x^2 - 5x - 24$
11. $28r^2 + r - 2$ **13.** $12x^5 + 8x^4 - 20x^3 + 4x^2$ **15.** $4m^2 - 9$ **17.** $16m^2 + 16mn + 4n^2$
19. $25r^2 + 30rt^2 + 9t^4$ **21.** $-2z^3 + 7z^2 - 11z + 4$ **23.** $m^2 + mn - 2n^2 - 2km + 5kn - 3k^2$
25. $a^2 - 2ab + b^2 + 4ac - 4bc + 4c^2$ **27.** A **31.** $2m^2(4m^2 + 3m - 6)$ **33.** $4k^2m^3(1 + 2k^2 - 3m)$
35. $2(a + b)(1 + 2m)$ **37.** $(m - 1)(2m^2 - 7m + 7)$ **39.** $(2s + 3)(3t - 5)$ **41.** $(t^3 + s^2)(r - p)$
43. $(8a + 5b)(2a - 3b)$ **45.** $(5z - 2x)(4z - 9x)$ **47.** $(x - 5)(x + 3)$ **49.** $(y + 7)(y - 5)$
51. $6(a - 10)(a + 2)$ **53.** $3m(m + 1)(m + 3)$ **55.** $(3k - 2p)(2k + 3p)$ **57.** $(5a + 3b)(a - 2b)$
59. $x^2(3 - x)^2$ **61.** $2a^2(4a - b)(3a + 2b)$ **65.** $(3m - 2)^2$ **67.** $2(4a - 3b)^2$ **69.** $(2xy + 7)^2$
71. $(x + 6)(x - 6)$ **73.** $(y + w)(y - w)$ **75.** $(3a + 4)(3a - 4)$ **77.** $(5s^2 + 3t)(5s^2 - 3t)$
79. $(p^2 + 25)(p + 5)(p - 5)$ **81.** $(2 - a)(4 + 2a + a^2)$ **83.** $(5x - 3)(25x^2 + 15x + 9)$
85. $(3y^3 + 5z^2)(9y^6 - 15y^3z^2 + 25z^4)$ **87.** $(x + y)(x - 5)$ **89.** $(m - 2n)(p^4 + q)$ **91.** $(2z + 7)^2$
93. $(10x + 7y)(100x^2 - 70xy + 49y^2)$ **95.** $(5m^2 - 6)(25m^4 + 30m^2 + 36)$ **97.** $(6m - 7n)(2m + 5n)$
99. $4^2 + 2^2 = 20$ y $(4 + 2)(4 + 2) = 36$: $20 \neq 36$

7.7 Ejercicios (página 385)

1. 4, 5, −9 **3.** Dos **5.** $\{-3, 9\}$ **7.** $\left\{\frac{7}{2}, -\frac{1}{5}\right\}$ **9.** $\{-3, 4\}$ **11.** $\{-7, -2\}$ **13.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right\}$
15. $\{-2, 4\}$ **17.** $\{\pm 8\}$ **19.** $\{\pm 2\sqrt{6}\}$ **21.** $\emptyset$ **23.** $\{4 \pm \sqrt{3}\}$ **25.** $\left\{\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$ **27.** $\left\{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}\right\}$
29. $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right\}$ **31.** $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$ **33.** $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}\right\}$ **35.** $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}\right\}$ **37.** $\emptyset$ **43.** 0; (c)
45. 121; (a) **47.** 360; (b) **49.** 5.2 segundos **51.** Encuentre s cuando $t = 0$. **53.** **(a)** 1 segundo y 8 segundos **(b)** 9 segundos después de que se lanza **55.** 2.3, 5.3, 5.8 **57.** 412.3 pies **59.** nave en dirección este: 80 millas; nave en dirección sur: 150 millas **61.** 5 centímetros, 12 centímetros, 13 centímetros
63. longitud: 2 centímetros; ancho 1.5 centímetros **65.** 1 pie **67.** longitud: 26 metros; ancho: 16 metros.
69. 0.35 o 3.5% **71.** $.80 **73.** 5.5 metros por segundo **75.** 5 o 14

Examen del capítulo 7 (página 391)

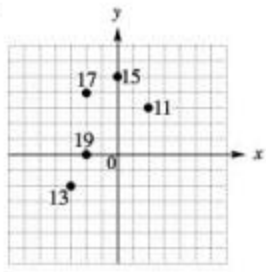
1. $\{2\}$ **2.** $\{4\}$ **3.** identidad; {todos los números reales} **4.** $v = \frac{S + 16t^2}{t}$ **5.** Hawai: 4021 millas cuadradas; Maui: 728 millas cuadradas; Kauai: 551 millas cuadradas **6.** 5 litros **7.** 2.2 horas **8.** 8 rebanadas por $2.19 **9.** 2300 millas **10.** 200 amps **11.** $(-\infty, 4]$  **12.** $(-2, 6]$
13. C **14.** al menos 82 **15.** $\frac{16}{9}$ **16.** -64 **17.** $\frac{64}{27}$ **18.** 0 **19.** $\frac{216}{p^4}$ **20.** $\frac{1}{m^{14}}$ **21.** 3×10^{-4}
22. alrededor de 15,300 segundos **23.** 1995: 1.028×10^{11}; 1997: 1.149×10^{11}; 1999: 1.236×10^{11}
24. $4k^2 + 6k + 10$ **25.** $15x^2 - 14x - 8$ **26.** $16x^4 - 9$ **27.** $3x^3 + 20x^2 + 23x - 36$ **28.** Un ejemplo es $t^5 + 2t^4 + 3t^3 - 4t^2 + 5t + 6$. **29.** $(2p - 3q)(p - q)$ **30.** $(10x + 7y)(10x - 7y)$
31. $(3y - 5x)(9y^2 + 15yx + 25x^2)$ **32.** $(4 - m)(x + y)$ **33.** $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ **34.** $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}\right\}$
35. .87 segundos

CAPÍTULO 8 Funciones, gráficas y sistemas de ecuaciones y de desigualdades

8.1 Ejercicios (página 399)

1. **(a)** x representa el año; y representa el porcentaje de mujeres dedicadas a profesiones de matemáticas o de ciencias de la computación. **(b)** 1990-2000 **(c)** 1990 **(d)** 1980 **3.** x **5.** $(0, 0)$ **7.** **(a)** I **(b)** III **(c)** II **(d)** IV **(e)** ninguno **9.** **(a)** I o III **(b)** II o IV **(c)** II o IV **(d)** I o III

11-20.



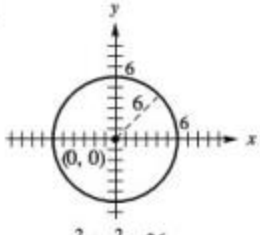
21. (a) $\sqrt{34}$ (b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ **23.** (a) $\sqrt{61}$ (b) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

25. (a) $\sqrt{146}$ (b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **27.** B **29.** D **31.** $x^2 + y^2 = 36$ **33.** $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$

35. $x^2 + (y - 4)^2 = 3$ **37.** centro: $(0, 0)$; radio: r **39.** centro: $(-2, -3)$; radio: 2

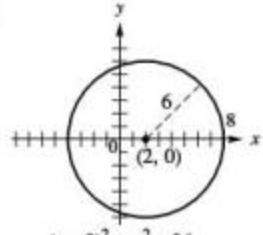
41. centro: $(-5, 7)$; radio: 9 **43.** centro: $(2, 4)$; radio: 4

45.



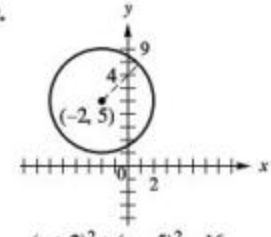
$x^2 + y^2 = 36$

47.



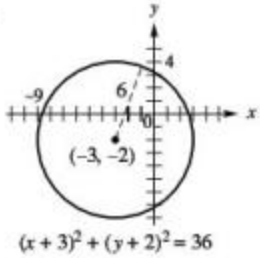
$(x - 2)^2 + y^2 = 36$

49.



$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$

51.

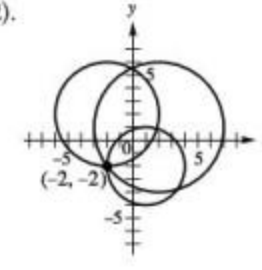


$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 36$

53. (a) $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ (b) $(-1, 4)$ **55.** \$12,698.50

57. 1965: 3495 dólares; 1985: 10,887 dólares

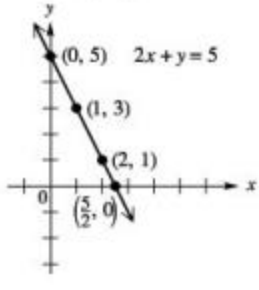
63. El epicentro es $(-2, -2)$.

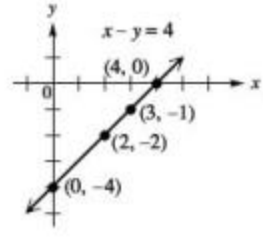


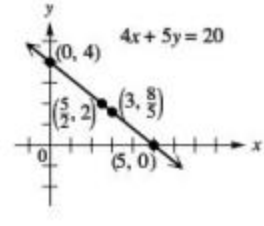
67. $(9, 18)$

8.2 Ejercicios **(página 409)**

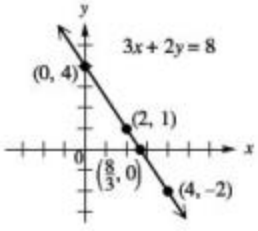
1. $(0, 5), \left(\frac{5}{2}, 0\right), (1, 3), (2, 1)$ **3.** $(0, -4), (4, 0), (2, -2), (3, -1)$ **5.** $(0, 4), (5, 0), \left(3, \frac{8}{5}\right), \left(\frac{5}{2}, 2\right)$

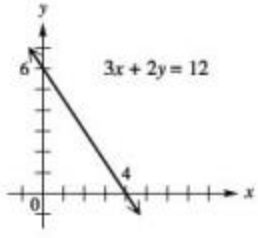


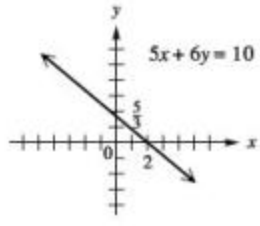




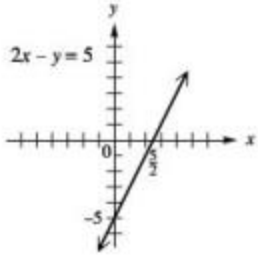
7. $(0,4), \left(\frac{8}{3},0\right), (2,1), (4,-2)$ **11.** A **13.** $(4,0)$; $(0,6)$ **15.** $(2,0)$; $\left(0,\frac{5}{3}\right)$

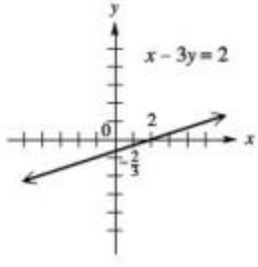


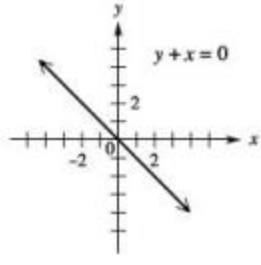




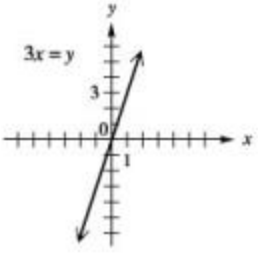
17. $\left(\frac{5}{2},0\right)$; $(0,-5)$ **19.** $(2,0)$; $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ **21.** $(0,0)$; $(0,0)$

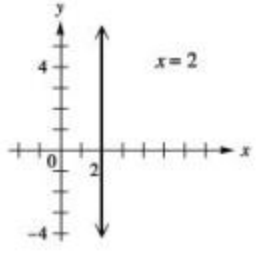


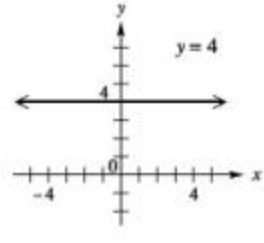




23. $(0,0)$; $(0,0)$ **25.** $(2,0)$; ninguna **27.** ninguna; $(0,4)$



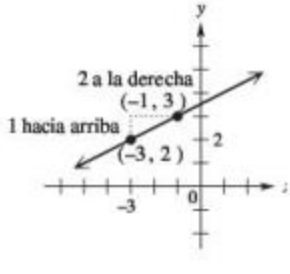




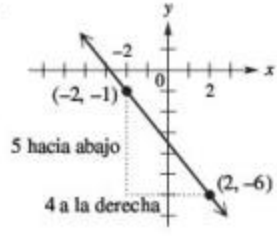
29. C **31.** A **33.** D **35.** B **37.** $\frac{3}{10}$ **39.** **(a)** $\frac{3}{2}$ **(b)** $-\frac{7}{4}$ **41.** 8 **43.** $-\frac{5}{6}$ **45.** 0

47. **(a)** pendiente = 232 (Esto representa matriculación en miles). **(b)** positiva; aumenta **(c)** 232,000 estudiantes **(d)** −1.66 **(e)** negativo; decreciente **(f)** 1.66 estudiantes por computadora

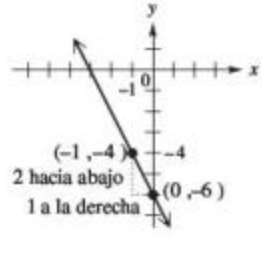
49.



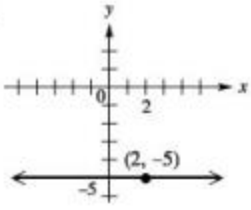
51.



53.



55.



57. paralelas **59.** perpendiculares **61.** ni paralelas ni perpendiculares

63. $\frac{7}{10}$ **65. (a)** \$200 millones por año **67. (a)** 1000 millones por año; 1000 millones por año; 1000 millones por año; La tasa de cambio promedio es la misma. Esto es cierto para los puntos que se encuentran en la línea recta **(b)** Todas son iguales.

8.3 Ejercicios (página 418)

1. D **3.** B **5.** $y = 3x - 3$ **7.** $y = -x + 3$ **9.** A **11.** C **13.** H **15.** B

17. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ **19.** $y = -2x + 18$ **21.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$ **23.** $y = 4x - 12$ **25.** $y = 5$

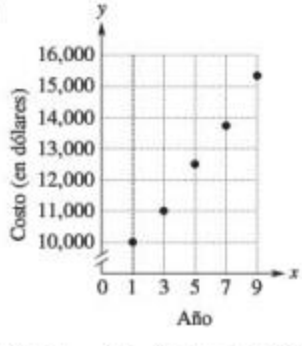
27. $x = 9$ **29.** $x = .5$ **31.** $y = 8$ **33.** $y = 2x - 2$ **35.** $y = -\frac{1}{2}x + 4$ **37.** $y = \frac{2}{13}x + \frac{6}{13}$

39. $y = 5$ **41.** $x = 7$ **43.** $y = -3$ **45.** $y = 5x + 15$ **47.** $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$ **49.** $y = \frac{2}{5}x + 5$

53. (a) $y = -x + 12$ **(b)** -1 **(c)** $(0, 12)$ **55. (a)** $y = -\frac{5}{2}x + 10$ **(b)** $-\frac{5}{2}$ **(c)** $(0, 10)$

57. (a) $y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$ **(b)** $\frac{2}{3}$ **(c)** $\left(0, -\frac{10}{3}\right)$ **59.** $y = 3x - 19$ **61.** $y = \frac{1}{2}x - 1$ **63.** $y = -\frac{1}{2}x + 9$

65. $y = 7$ **67. (a)**



(b) $y = \frac{4355}{6}x + 8847.5$

(c) \$18,283

69. $y = -176.25x + 29{,}362$ **71. (a)** $y = 838.5x + 19{,}180.5$ **(b)** \$23,373; Es cercano al valor real.

73. (a) $y = -.96x + 5.6$ **(b)** .8 millones u 800,000 toneladas **(c)** durante 2001 (Ya que $.83333(12) = 10$, la capacidad será 0 en octubre). **75. (a)** $Y_1 = \frac{3}{4}X + 1$ **(b)** $Y_1 = -4X - 2$

8.4 Ejercicios (página 431)

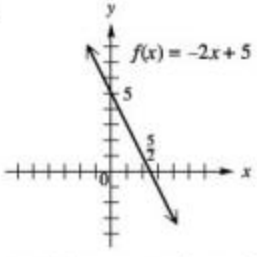
3. Es la variable independiente. **5.** función; dominio: $\{2, 3, 4, 5\}$; rango: $\{5, 7, 9, 11\}$

7. no es función; dominio: $(0, \infty)$; rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

9. función; dominio: {Hispano, nativos estadounidenses, estadounidenses asiáticos, afroamericanos, blancos}; rango en millones: $\{21.3, 1.6, 8.2, 24.6, 152.0\}$ **11.** función; dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(-\infty, 4]$ **13.** no es función; dominio: $[-4, 4]$; rango: $[-3, 3]$ **15.** función; dominio: $(-\infty, \infty)$ **17.** no es función; dominio: $[0, \infty)$

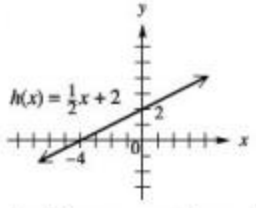
19. no es función; dominio: $(-\infty, \infty)$ **21.** función; dominio: $[0, \infty)$ **23.** función; dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ **25.** función; dominio: $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ **27.** función; dominio: $(-\infty, 9) \cup (9, \infty)$ **29.** **(a)** $[0, 3000]$ **(b)** 25 horas; 25 horas **(c)** 2000 galones **(d)** $f(0) = 0$; La alberca está vacía en el instante 0. **31.** Éste es un ejemplo: el costo de la gasolina; número de galones comprados: costo; número de galones **33.** 5 **35.** 2 **37.** -1 **39.** -13

41.



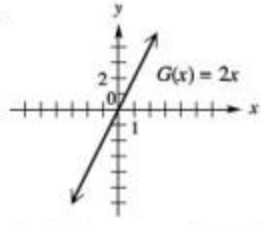
dominio y rango: $(-\infty, \infty)$

43.



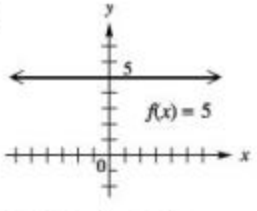
dominio y rango: $(-\infty, \infty)$

45.



dominio y rango: $(-\infty, \infty)$

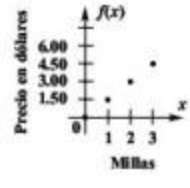
47.



dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $\{5\}$

49. **(a)** $f(x) = 3 - 2x^2$ **(b)** -15 **51.** **(a)** $f(x) = \dfrac{8 - 4x}{-3}$ **(b)** $\dfrac{4}{3}$

53. línea; -2; $-2x + 4$; -2; 3; -2 **55.** **(a)** \$0; \$1.50; \$3.00; \$4.50 **(b)** $1.50x$ **(c)**



57. **(a)** 194.53 centímetros **(b)** 177.29 centímetros **(c)** 177.41 centímetros **(d)** 163.65 centímetros

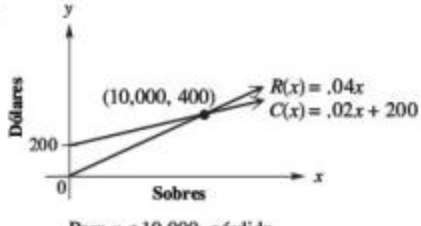
59. **(a)** 39,851 **(b)** 39,485 **(c)** 39,119 **(d)** En 1992, hubo 39,668 oficinas postales en Estados Unidos.

61. **(a)** $C(x) = .02x + 200$

(b) $R(x) = .04x$

(c) 10,000

(d)



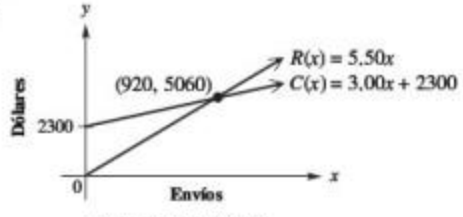
Para $x < 10{,}000$, pérdida
Para $x > 10{,}000$, ganancia

63. **(a)** $C(x) = 3.00x + 2300$

(b) $R(x) = 5.50x$

(c) 920

(d)

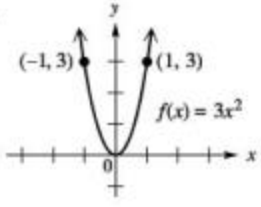


Para $x < 920$, pérdida
Para $x > 920$, ganancia

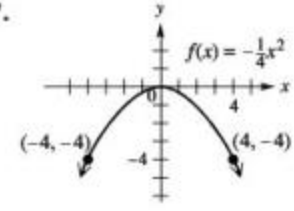
8.5 Ejercicios (página 442)

1. F **3.** C **5.** E **9.** (0, 0) **11.** (0, 4) **13.** (1, 0) **15.** (−3, −4) **19.** hacia abajo; más angosta
21. hacia arriba; más ancha **23.** **(a)** I **(b)** IV **(c)** II **(d)** III

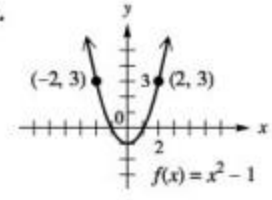
25.



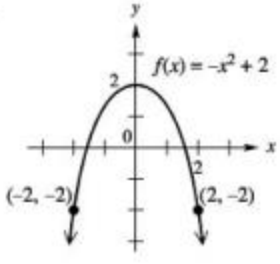
27.



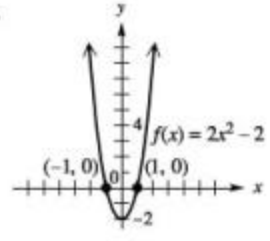
29.



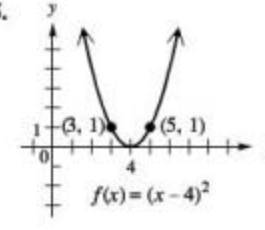
31.



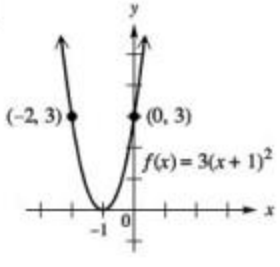
33.



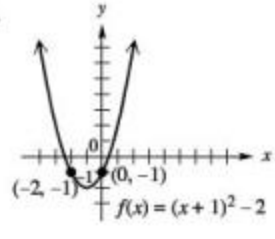
35.



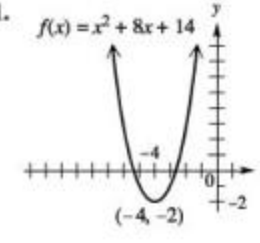
37.



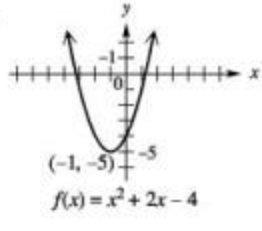
39.



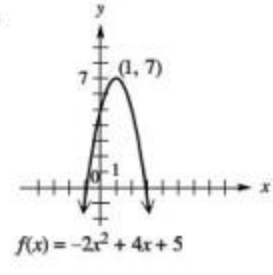
41.



43.

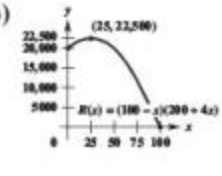


45.



47. 25 metros **49.** 16 pies; 2 segundos **51.** 4.1 segundos; 81.6 metros **53.** **(a)** mínimo
(b) 1995; 1.7% **55.** **(a)** El coeficiente de x^2 es negativo, porque la parábola se abre hacia abajo.
(b) (18.45, 3860) **(c)** En 2018, los activos de Seguro Social alcanzarán su máximo de $3860 mil millones.

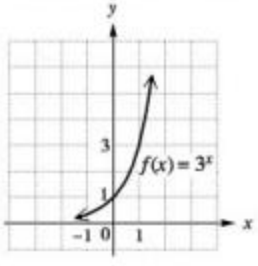
57. **(a)** $R(x) = (100 - x)(200 + 4x) = 20{,}000 + 200x - 4x^2$ **(b)**



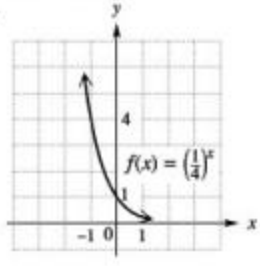
(c) 25 **(d)** $22,500

8.6 Ejercicios (página 452)

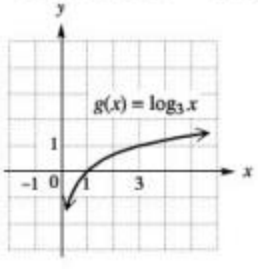
1. sube, baja **3.** no **5.** sube, baja **7.** no **9.** 2.56425419972 **11.** 1.25056505582
13. 7.41309466897 **15.** .0000210965628481
17.



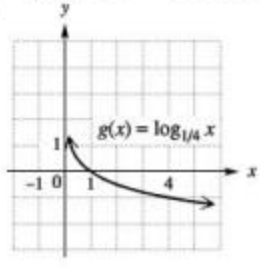
19.



21. 20.0855369232 **23.** .018315638889
25. $2 = \log_4 16$ **27.** $-3 = \log_{2/3}\left(\frac{27}{8}\right)$ **29.** $2^5 = 32$ **31.** $3^1 = 3$ **33.** 1.38629436112
35. −1.0498221245 **37.** **(a)** .5°C **(b)** .35°C **39.** **(a)** 1.6°C **(b)** .5°C
41.



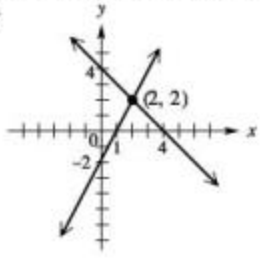
43.



45. $7686.32 **47.** $76,855.95
49. **(a)** $26,281.78 **(b)** $32,100.64 **(c)** $41,218.03 **51.** **(a)** 132,359 miles de toneladas **(b)** 97,264 miles de toneladas **(c)** Es un poco menor que lo que proporciona el modelo (93,733 miles de toneladas).
53. **(a)** 176,000 **(b)** 202,171 **(c)** Se incrementará en casi 15%. **55.** 32,044 millones de dólares.
57. **(a)** 100 gramos **(b)** 31.25 gramos **(c)** .30 gramo **59.** **(a)** 645 sitios **(b)** 962 sitios
61. casi 4 veces la potencia

8.7 Ejercicios (página 470)

1. **(a)** 1989-1997 **(b)** 1997; NBC; 17% **(c)** 1989, 20% del mercado; 1998, 16% del mercado **(d)** NBC y ABC; (2000, 16) **3.** sí **5.** no **7.** $\{(2,2)\}$ **9.** $\{(3,-1)\}$ **11.** $\{(2,-3)\}$



13. $\left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right\}$ **15.** $\left\{\left(\frac{6-2y}{7}, y\right)\right\}$ **17.** $\{(2,-4)\}$ **19.** $\emptyset$ **21.** $\{(1,2)\}$ **23.** $\left\{\left(\frac{22}{9}, \frac{22}{3}\right)\right\}$
25. $\{(2,3)\}$ **27.** $\{(5,4)\}$ **29.** $\left\{\left(-5, -\frac{10}{3}\right)\right\}$ **31.** $\{(2,6)\}$ **35.** $\{(1,4,-3)\}$ **37.** $\{(0,2,-5)\}$
39. $\left\{\left(-\frac{7}{3}, \frac{22}{3}, 7\right)\right\}$ **41.** $\{(4,5,3)\}$ **43.** $\{(2,2,2)\}$ **45.** $\left\{\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)\right\}$ **47.** ganados: 95; perdidos: 67
49. longitud: 78 pies; ancho: 36 pies **51.** Exxon Mobil: $214 mil millones; General Motors: $185 mil millones
53. longitud: 12 pies; ancho: 5 pies **55.** marcador: $1.10; hojas de colores: $.40

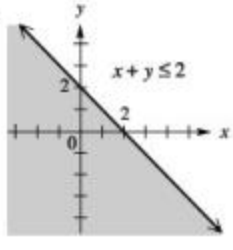
57. Liga Nacional de Hockey: \$219.74; Asociación Nacional de Baloncesto: \$203.38 **59.** sencilla: \$2.09; doble: \$3.19 **61.** unidades de estambre: 6; unidades de hilo: 2 **63.** **(a)** 6 onzas **(b)** 15 onzas **(c)** 24 onzas **(d)** 30 onzas **65.** $\$.99x$ **67.** 6 galones al 25%; 14 galones al 35% **69.** 3 litros de ácido puro; 24 litros al 10% **71.** 50 libras de palanquetas de nuez de \$3.60; 30 libras de trufas de chocolate de \$7.20 **73.** 76 de admisión general; 108 estudiantes con identificación **75.** \$1000 al 2%; \$2000 al 4% **77.** tren de carga: 50 kilómetros por hora; tren expreso: 80 kilómetros por hora **79.** velocidad máxima: 2100 millas por hora; velocidad de viento: 300 millas por hora **81.** Independiente: 38; Demócrata: 34; Republicano: 28 **83.** más corto: 12 centímetros; medio: 25 centímetros; más largo: 33 centímetros **85.** A: 180 estuches; B: 60 estuches; C: 80 estuches **87.** \$10 boletos: 350; \$18 boletos: 250; \$30 boletos: 50

Ejercicios de extensión **(página 480)**

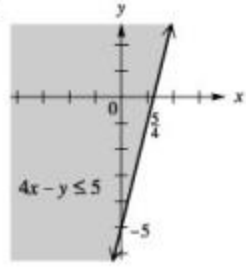
1. $\{(2,3)\}$ **3.** $\{(-3,0)\}$ **5.** $\left\{\left(\frac{7}{2},-1\right)\right\}$ **7.** $\{(1,-4)\}$ **9.** $\{(-1,23,16)\}$ **11.** $\{(2,1,-1)\}$ **13.** $\{(3,2,-4)\}$ **14.** $\{(-1,2,-2)\}$ **15.** $\{(0,1,0)\}$

8.8 Ejercicios **(página 485)**

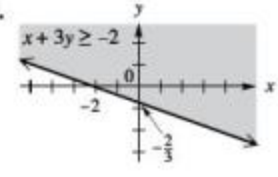
1. C **3.** B **5.**



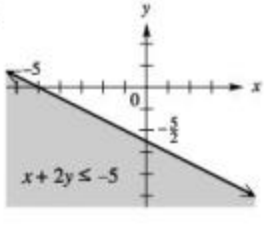
7.



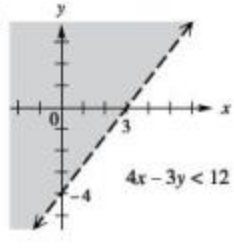
9.



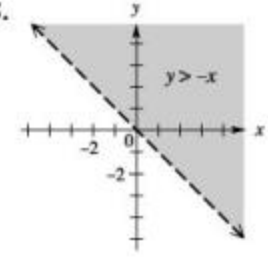
11.



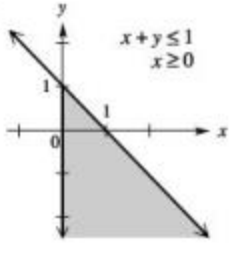
13.



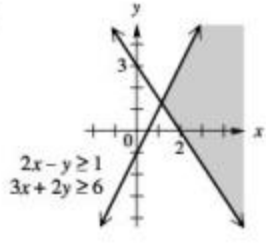
15.



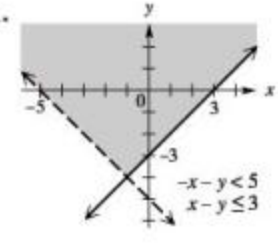
17.



19.



21.

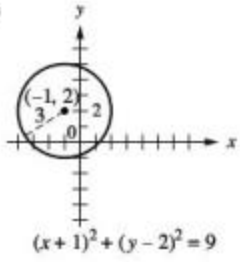


23. máximo de 65 en (5, 10); mínimo de 8 en (1, 1) **25.** $\left(\frac{6}{5},\frac{6}{5}\right); \frac{42}{5}$ **27.** $\left(\frac{17}{3},5\right); \frac{49}{3}$

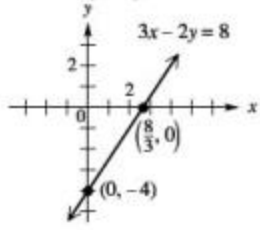
29. Enviar 20 para A y 80 para B, para un costo mínimo de \$1040. **31.** Tomar 3 píldoras rojas y 2 píldoras azules, para un costo mínimo de 70¢ por día. **33.** Producir 6.4 millones de galones de gasolina y 3.2 millones de galones de gasóleo, para un máximo de \$16,960,000. **35.** Enviar 4000 suministros médicos y 2000 contenedores de agua.

Examen del capítulo 8 (página 489)

1. $\sqrt{41}$ **2.** $(x+1)^2+(y-2)^2=9$



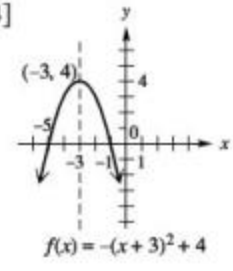
3. intercepción con el eje x: $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$;



4. $\frac{2}{7}$ **5. (a)** $y=-\frac{2}{5}x+\frac{13}{5}$ **(b)** $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ **(c)** $y=-\frac{1}{2}x+2$ **6.** B **7. (a)** $y = 1379.25x + 15{,}496.75$ **(b)** aproximadamente \$25,152; Es cercano al valor real. **8.** $y = .05x + .50$; (1, .55), (5, .75), (10, 1.00)

9. $y=\frac{2}{3}x+1$ **10. (a)** $(-\infty,\infty)$ **(b)** 22 **11.** $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$ **12.** 500 calculadoras; \$30,000

13. eje: $x = -3$; vértice: $(-3,4)$; dominio: $(-\infty,\infty)$; rango: $(-\infty,4]$

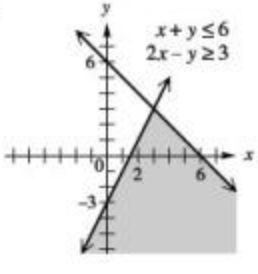


14. 80 pies por 160 pies **15. (a)** 2116.31264888 **(b)** .157237166314 **(c)** 3.15955035878 **16.** A

17. (a) \$13,521.90 **(b)** \$13,529.96 **18. (a)** 1.62 gramos **(b)** 1.18 gramos **(c)** .69 gramo **(d)** 2.00 gramos

19. $\{(4,-2)\}$ **20.** $\{(2,0,-1)\}$ **21.** $\{(1, 2z+3, z)\}$ **22.** *Pretty Woman:* \$178.4 millones: *Runaway Bride*: \$152.3 millones **23.** \$40,000 al 10%; \$100,000 al 6%; \$140,000 al 5%

24.



25. Fabricar 0 anillos VIP y 24 anillos SST, para una utilidad máxima de \$960.

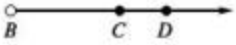
CAPÍTULO 9 Geometría

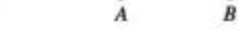
9.1 Ejercicios (página 499)

1. 90 **3.** igual **5.** verdadera **7.** falsa **9.** verdadera **11.** verdadera **13.** falsa

15. (a) $\overleftrightarrow{AB}$ **(b)** 

17. (a) $\overleftrightarrow{CB}$ **(b)** 

19. (a) $\overrightarrow{BC}$ **(b)** 

21. (a) $\overleftarrow{BA}$ **(b)** 

23. (a) $\overleftarrow{CA}$ **(b)** 

25. F **27.** D **29.** B **31.** E

En los ejercicios 33 a 39, puede haber otras formas correctas.

33. $\overleftrightarrow{MO}$ **35.** $\overleftrightarrow{MO}$ **37.** $\emptyset$ **39.** $\overrightarrow{OP}$ **41.** 62° **43.** 1° **45.** $(90 - x)°$ **47.** 48° **49.** 154° **51.** $(180 - y)°$ **53.** $\measuredangle CBD$ y $\measuredangle ABE$; $\measuredangle CBE$ y $\measuredangle DBA$ **55. (a)** 52° **(b)** 128° **57.** 107° y 73° **59.** 75° y 75° **61.** 139° y 139° **63.** 65° y 115° **65.** 35° y 55° **67.** 117° y 117° **69.** 141° y 141° **71.** 80° **73.** 52° **75.** Las medidas se dan en orden numérico, se inicia con el ángulo 1: 55°, 65°, 60°, 65°, 60°, 120°, 60°, 60°, 55°, 55°.

9.2 Ejercicios (página 506)

1. cuerda **3.** equilátero (o equiángulo) **5.** falsa **7.** falsa **9.** verdadera **13.** ambas **15.** cerrada **17.** cerrada **19.** ninguna de las dos **21.** convexa **23.** convexa **25.** no convexa **27.** rectángulo, escaleno **29.** acutángulo, equilátero **31.** rectángulo, escaleno **33.** rectángulo, isósceles **35.** obtusángulo, escaleno **37.** acutángulo, isósceles **43.** $A = 50°$; $B = 70°$; $C = 60°$ **45.** $A = B = C = 60°$ **47.** $A = B = 52°$; $C = 76°$ **49.** 165° **51.** 170° **53. (a)** O **(b)** $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ **(c)** $\overleftrightarrow{AC}$; $\overleftrightarrow{BD}$ **(d)** $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ **(e)** $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ **(f)** $\overleftrightarrow{AE}$

55. (e) La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a 180° (ya que el lápiz ha dado la mitad de una vuelta completa).

Ejercicios de extensión (página 511)

1. Abra el compás con un radio mayor que la mitad de la longitud PQ, coloque la punta del compás en P y trace un arco arriba y abajo de la recta r. Luego con el mismo radio y la punta del compás en Q, trace dos arcos más por arriba y por abajo de la recta r. Ubique los dos puntos de intersección de los arcos superiores e inferiores, y denomínelos A y B. Con una regla, una A y B. AB es la mediatriz de PQ. **3.** Con el radio del compás mayor que la distancia de P a r, coloque la punta del compás en P y trace un arco que interseque a la recta r en dos puntos. Llame a estos puntos A y B. Trace arcos de radio igual a lo que queda de la recta r, con la punta del compás en A y en B, que interseca en el punto Q. Con una regla, una P y Q. PQ es la perpendicular de P a la recta r. **5.** Con cualquier radio, coloque la punta del compás en P y trace arcos a la izquierda y derecha, que intersequen a la recta r en dos puntos. Llame a estos puntos A y B. Con un arco de longitud suficiente, coloque la punta del compás, primero en A y luego en B, y trace arcos por arriba y por abajo de la recta r, que se intersequen en el punto Q. Con una regla, una P y Q. PQ es la perpendicular a la recta r en P. **7.** Con cualquier radio, coloque la punta del compás en el vértice A y trace un arco que interseque ambos lados del ángulo. A estos puntos de intersección llámeles P y Q. Con un arco suficientemente grande, coloque la punta del compás primero en P y luego en Q y trace arcos en el interior del ángulo, que se intersequen en el punto B. Con una regla, una A y B. AB es la bisectriz del ángulo. **9.** Utilice la construcción 3 para trazar una perpendicular a la recta en un punto. Luego utilice la construcción 4 para bisecar uno de los ángulos rectos que se forman. Con esto se obtiene un ángulo de 45°.

9.3 Ejercicios (página 518)

1. 12 **3.** 6 **5.** $9\sqrt{3}$ **7.** 12 cm² **9.** 5 cm² **11.** 8 pulg² **13.** 4.5 cm² **15.** 418 mm² **17.** 8 cm² **19.** 3.14 cm² **21.** 1017.36 m² **23.** 4 m **25.** 300 pies, 400 pies, 500 pies **27.** 46 pies **29.** 23,800.10 pies² **31.** perímetro **33.** 12 pulgadas, 12π pulgadas, 36π pulgadas² **35.** 5 pies, 10π pies, 25π pies² **37.** 6 cm, 12 cm, 36π cm² **39.** 10 pulgadas, 20 pulgadas, 20π pulgadas **41.** 14.5 **43.** 7 **45.** 5.1 **47.** 5 **49.** 5 **51.** 2.4 **53. (a)** 20 cm² **(b)** 80 cm² **(c)** 180 cm² **(d)** 320 cm² **(e)** 4 **(f)** 3; 9 **(g)** 4; 16 **(h)** n^2 **55.** $800 **57.** n^2 **59.** 80 **61.** 76.26 **63.** 132 pies² **65.** 5376 cm² **67.** 145.34 m² **69.** pizza de 14 pulgadas **71.** pizza de 14 pulgadas **73.** 26 pulgadas **75.** 625 pies² **77.** 648 pulgadas² **79.** $\dfrac{(4 - \pi)r^2}{4}$

9.4 Ejercicios (página 530)

1.

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $AC = BD$	1. Dado
2. $AD = BC$	2. Dado
3. $AB = AB$	3. Propiedad reflexiva
4. $\triangle ABD \cong \triangle BAC$	4. Propiedad de congruencia L.L.L.

3.

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\overleftrightarrow{DB}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$	1. Dado
2. $AB = BC$	2. Dado
3. $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD$	3. Ambos son ángulos rectos, por definición de perpendicularidad
4. $DB = DB$	4. Propiedad reflexiva
5. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$	5. Propiedad de congruencia LAL.

5.

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\measuredangle BAC = \measuredangle DAC$	1. Dado
2. $\measuredangle BCA = \measuredangle DCA$	2. Dado
3. $AC = AC$	3. Propiedad reflexiva
4. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$	4. Propiedad de congruencia ALA

7. 67°; 67° **9.** 6 pulgadas

13. $\measuredangle A$ y $\measuredangle P$; $\measuredangle C$ y $\measuredangle R$; $\measuredangle B$ y $\measuredangle Q$; $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{PR}$; $\overleftrightarrow{CB}$ y $\overleftrightarrow{RQ}$; $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ **15.** $\measuredangle H$ y $\measuredangle F$; $\measuredangle K$ y $\measuredangle E$; $\measuredangle HGK$ y $\measuredangle FGE$; $\overleftrightarrow{HK}$ y $\overleftrightarrow{FE}$; $\overleftrightarrow{GK}$ y $\overleftrightarrow{GE}$; $\overleftrightarrow{HG}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ **17.** $\measuredangle P = 78°$; $\measuredangle M = 46°$; $\measuredangle A = \measuredangle N = 56°$

19. $\measuredangle T = 74°$; $\measuredangle Y = 28°$; $\measuredangle Z = \measuredangle W = 78°$ **21.** $\measuredangle T = 20°$; $\measuredangle V = 64°$; $\measuredangle R = \measuredangle U = 96°$

23. $a = 20$; $b = 15$ **25.** $a = 6$; $b = \frac{15}{2}$ **27.** $x = 6$ **29.** $x = 110$ **31.** $c = 111\frac{1}{9}$ **33.** 30 m

35. 500 m, 700 m **37.** 112.5 pies **39.** $506\frac{2}{3}$ pies **41.** $c = 17$ **43.** $a = 13$ **45.** $c = 50$ m

47. $a = 20$ pulgadas **49.** La suma de los cuadrados de los dos lados más cortos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado del lado más largo. **51.** (3, 4, 5) **53.** (7, 24, 25) **55.** (12, 16, 20) **59.** (3, 4, 5)

61. (7, 24, 25) **65.** (4, 3, 5) **67.** (8, 15, 17) **71.** 24 m **73.** 16 pies **75.** 4.55 pies **77.** 19 pies, 3 pulgadas **79.** 28 pies, 10 pulgadas **81.** **(a)** $\frac{1}{2}(a + b)(a + b)$ **(b)** PWX: $\frac{1}{2}ab$; PZY: $\frac{1}{2}ab$; PXY: $\frac{1}{2}c^2$

(c) $\frac{1}{2}(a + b)(a + b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$. Cuando se simplifica, esto da $a^2 + b^2 = c^2$. **83.** $24 + 4\sqrt{6}$

85. 10 **87.** $256 + 64\sqrt{3}$ **89.** 5 pulgadas

9.5 Ejercicios (página 542)

1. verdadera **3.** verdadera **5.** falsa **7.** **(a)** $3\frac{3}{4}$ m^3 **(b)** $14\frac{3}{4}$ m^2 **9.** **(a)** 96 pulgadas^3 **(b)** 130.4 pulgadas^2 **11.** **(a)** 267,946.67 pies^3 **(b)** 20,096 pies^2 **13.** **(a)** 549.5 cm^3 **(b)** 376.8 cm^2 **15.** **(a)** 65.94 m^3

(b) 100.00 m^2 **17.** 168 pulgadas^3 **19.** 1969.10 cm^3 **21.** 427.29 cm^3 **23.** 508.68 cm^3

25. 2,415,766.67 m^3 **27.** .52 m^3 **29.** 12 pulgadas, 288π pulgadas^3, 144π pulgadas^2 **31.** 5 pies, $\frac{500}{3}\pi$ pies^3, 100π pies^2 **33.** 2 centímetros, 4 centímetros, 16π cm^2 **35.** 1 m, 2 m, $\frac{4}{3}\pi$ m^3 **37.** volumen **39.** $\sqrt[3]{2}x$

41. \$8100 **43.** \$37,500 **45.** 2.5 **47.** 6 **49.** 210 pulgadas^3 **51.** $\frac{62{,}500}{3}\pi$ pulgadas^3 **53.** 2 a 1

55. 288

9.6 Ejercicios (página 554)

1.



3.

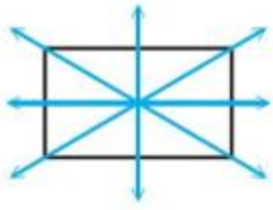


5.



7. La figura es su propia reflexión.

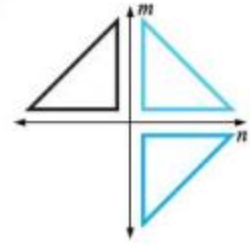
9.



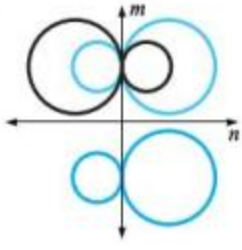
11.



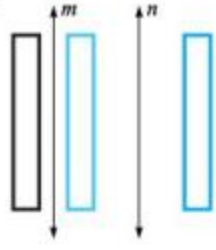
13.



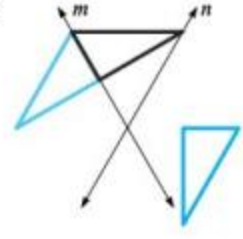
15.



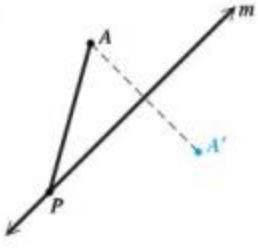
17.



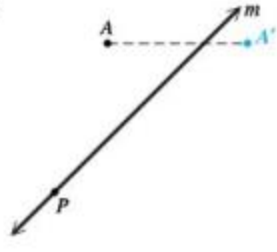
19.



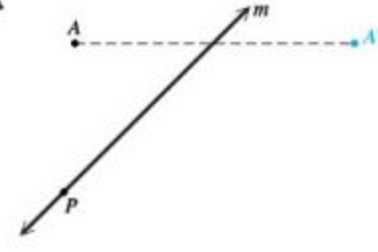
21.



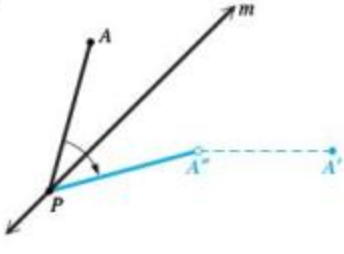
23.



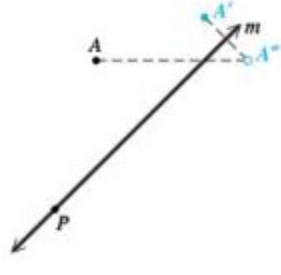
25.



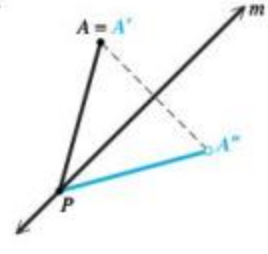
27.



29.

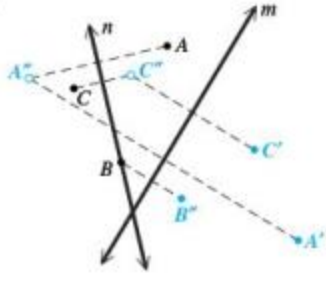


31.

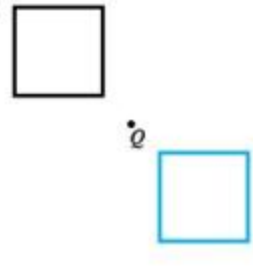


33. sí

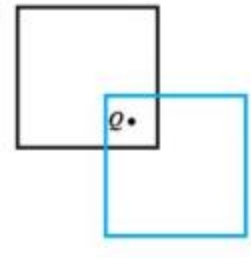
35.



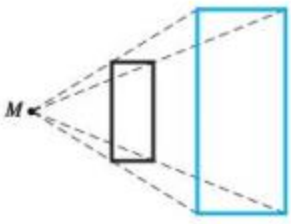
37.



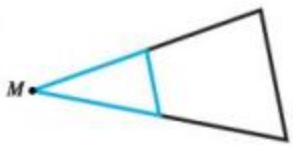
39.



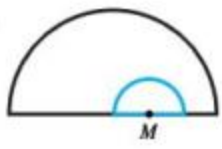
41.



43.



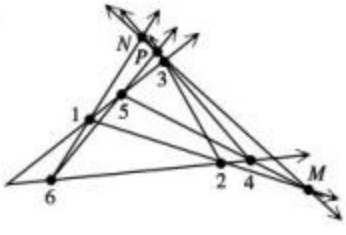
45.



9.7 Ejercicios (página 563)

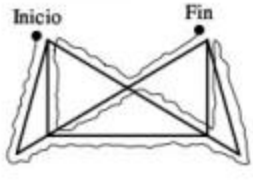
1. Euclidiana **3.** Lobachevskiana **5.** Mayor que **7.** Riemanniana **9.** Euclidiana

11. (g)

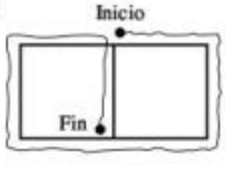


(h) Suponga que un hexágono está inscrito en un ángulo. Haga que cada par de lados opuestos se prolonguen de modo que se intersequen. Luego los tres puntos de intersección así obtenidos estarán en una recta.

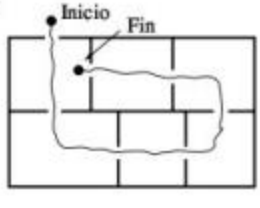
13. C **15.** A, E **17.** A, E **19.** ninguna de ellas **21.** no **23.** sí **25.** 1 **27.** 3
29. 1 **31.** *A*, *C*, *D* y *F* son pares; *B* y *E* son impares. **33.** *A*, *B*, *C* y *F* son impares; *D*, *E* y *G* son pares.
35. *A*, *B*, *C* y *D* son impares; *E* es par. **37.** es transitable **39.** no es transitable



41. es transitable



43. sí



45. no

9.8 Ejercicios (página 570)

1. 4 **3.** 2 **5.** $4/1 = 4$ **7.** $4/1 = 4$; $16/1 = 16$ **9.** Cada razón en la fila es el cuadrado del factor de escala en la fila superior. **11.** 4, 9, 16, 25, 36, 100 **13.** Las respuestas variarán. Algunos ejemplos son: $3^d = 9$, por tanto $d = 2$; $5^d = 25$, así $d = 2$; $4^d = 16$, por tanto $d = 2$. **15.** $2/1 = 2$; $8/1 = 8$ **17.** Cada razón en la fila inferior es el cubo del factor de escala en la fila superior. **19.** $3/1 = 3$ **21.** 1.262 o $\dfrac{\ln 4}{\ln 3}$

23. 3 **25.** 1.585 o $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ **27.** .842, .452, .842, .452, ... Los dos atractores son .842 y .452.

Examen del capítulo 9 (página 574)

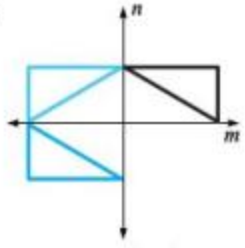
1. (a) 52° **(b)** 142° **(c)** agudo **2.** 40°, 140° **3.** 45°, 45° **4.** 30°, 60° **5.** 130°, 50°
6. 117°, 117° **8.** C **9.** ambas **10.** ninguna **11.** 30°, 45°, 105° **12.** 72 cm^2
13. 60 pulgadas^2 **14.** 68 m^2 **15.** 180 m^2 **16.** 24π pulgadas **17.** 1978 pies **18.** 57 cm^2

19.

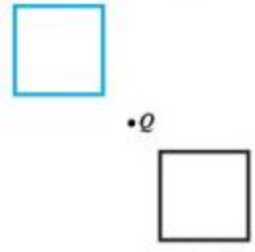
AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\measuredangle CAB = \measuredangle DBA$	1. Dado
2. $DB = CA$	2. Dado
3. $AB = AB$	3. Propiedad reflexiva
4. $\triangle ABD \cong \triangle BAC$	4. Propiedad de congruencia LAL

20. 20 pies **21.** 29 m

22.



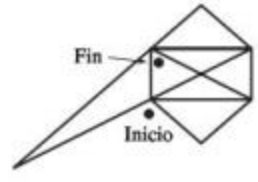
23.



24. (a) 904.32 pulgadas^3 (b) 452.16 pulgadas^2

25. (a) 864 pies^3 (b) 552 pies^2 **26.** (a) 1582.56 m^3 (b) 753.60 m^3 **27.** Las respuestas variarán.

28. (a) sí (b) no **29.** (a) sí (b) no **30.** El único atractor es .5238095238.



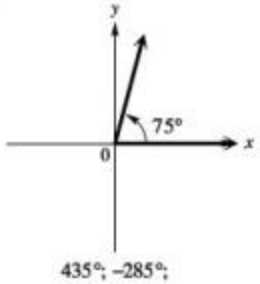
CAPÍTULO 10 Trigonometría

10.1 Ejercicios (página 581)

1. (a) 60° (b) 150° **3.** (a) 45° (b) 135° **5.** (a) 1° (b) 91° **7.** $90 - x$ grados **9.** 83°59′
11. 119°27′ **13.** 38°32′ **15.** 17°1′49″ **17.** 20.900° **19.** 91.598° **21.** 274.316°
23. 31°25′47″ **25.** 89°54′1″ **27.** 178°35′58″ **29.** 320° **31.** 235° **33.** 179° **35.** 130°
37. $30° + n \cdot 360°$ **39.** $60° + n \cdot 360°$

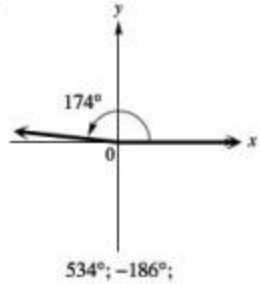
En los ejercicios 41 a 47, es posible dar otros ángulos a los que se proporcionan.

41.



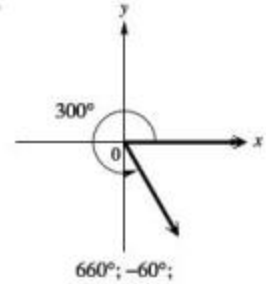
435°; –285°;
I cuadrante

43.



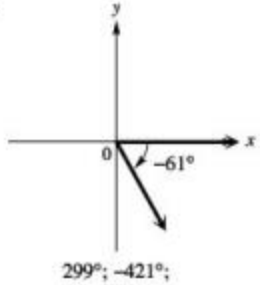
534°; –186°;
II cuadrante

45.



660°; –60°;
IV cuadrante

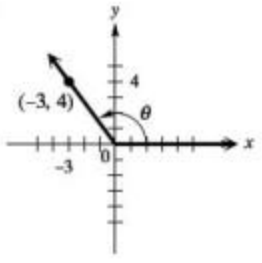
47.



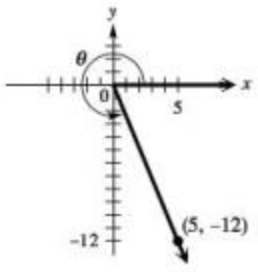
299°; –421°;
IV cuadrante

10.2 Ejercicios (página 585)

1.



3.



En los ejercicios del 5 al 13, proporcionamos en orden, seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

5. $\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; -\frac{4}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{3}; \frac{5}{4}$ **7.** 1; 0; indefinida; 0; indefinida; 1 **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; 2; \frac{2\sqrt{3}}{3}$

11. $\frac{5\sqrt{34}}{34}; \frac{3\sqrt{34}}{34}; \frac{5}{3}; \frac{3}{5}; \frac{\sqrt{34}}{3}; \frac{\sqrt{34}}{5}$ **13.** 0; −1; 0; indefinida; −1; indefinida **17.** Es la distancia del punto (x,y), en el lado terminal del ángulo, al origen. **19.** positivo **21.** negativo **23.** positivo **25.** negativo **27.** 0 **29.** indefinido **31.** indefinido **33.** 0 **35.** 0 **37.** 1 **39.** 0

10.3 Ejercicios (página 590)

1. $-\frac{1}{3}$ **3.** $\frac{1}{3}$ **5.** -5 **7.** $2\sqrt{2}$ **9.** $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **11.** $\frac{2}{3}$ **13.** II **15.** I **17.** II **19.** II o III

En los ejercicios 21 al 29 dimos signos, primero del seno y la cosecante, luego del coseno y secante, y finalmente de tangente y cotangente.

21. +; +; + **23.** −; −; + **25.** −; +; − **27.** +; +; + **29.** −; +; − **31.** $-2\sqrt{2}$ **33.** $\frac{\sqrt{15}}{4}$ **35.** $-2\sqrt{2}$ **37.** $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

En los ejercicios del 39 al 45 damos, en orden, seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

39. $\frac{15}{17}; -\frac{8}{17}; -\frac{15}{8}; -\frac{8}{15}; -\frac{17}{8}; \frac{17}{15}$ **41.** $-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; \frac{4}{3}; \frac{3}{4}; -\frac{5}{3}; -\frac{5}{4}$ **43.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -2; -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

45. $\frac{\sqrt{5}}{7}; \frac{2\sqrt{11}}{7}; \frac{\sqrt{55}}{22}; \frac{2\sqrt{55}}{5}; \frac{7\sqrt{11}}{22}; \frac{7\sqrt{5}}{5}$

10.4 Ejercicios (página 598)

En los ejercicios 1 a 5, damos, en orden, seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

1. $\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{3}{4}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{5}{3}$ **3.** $\frac{21}{29}; \frac{20}{29}; \frac{21}{20}; \frac{20}{21}; \frac{29}{20}; \frac{29}{21}$ **5.** $\frac{n}{p}; \frac{m}{p}; \frac{n}{m}; \frac{m}{n}; \frac{p}{m}; \frac{p}{n}$

En los ejercicios 7 y 9, damos, en orden, el lado desconocido, seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

7. $c = 13; \frac{12}{13}; \frac{5}{13}; \frac{12}{5}; \frac{5}{12}; \frac{13}{5}; \frac{13}{12}$ **9.** $b = \sqrt{13}; \frac{\sqrt{13}}{7}; \frac{6}{7}; \frac{\sqrt{13}}{6}; \frac{6\sqrt{13}}{13}; \frac{7}{6}; \frac{7\sqrt{13}}{13}$ **11.** cot 40°

13. sec 43° **15.** cot 64.6° **17.** sen 76°30′ **19.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **21.** $\frac{1}{2}$ **23.** $\sqrt{2}$ **25.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **27.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

29. $\sqrt{3}$ **31.** 82° **33.** 45° **35.** 30°

En los ejercicios 37 al 55, damos, en orden, seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

37. $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; -2; \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **39.** $\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; -\sqrt{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2$

41. $-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -2; -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **43.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1; -1; \sqrt{2}; -\sqrt{2}$

45. $\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; 2; \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **47.** $\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -1; -1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$ **49.** $\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; 2$

51. $\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; 2; \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **53.** $-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; -\sqrt{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; -2$ **55.** $\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; 2; \frac{2\sqrt{3}}{3}$

57. $\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}$ **59.** $\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **61.** $-1; -1$ **63.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **65.** 210°, 330°

67. 45°, 225° **69.** 60°, 120° **71.** 120°, 240° **73.** 225°, 315° **75.** 120°, 300°

10.5 Ejercicios (página 606)

1. .5657728 **3.** 1.1342773 **5.** 1.0273488 **7.** .6383201 **9.** 1.7768146 **11.** .4771588

13. −5.7297416 **15.** 1.9074147 **17.** 57.997172° **19.** 30.502748° **21.** 46.173581°

23. 81.168073° **25.** $B = 53°40'$; $a = 571$ m; $b = 777$ m **27.** $M = 38.8°$; $n = 154$ m; $p = 198$ m

29. $A = 47.9108°$; $c = 84.816$ cm; $a = 62.942$ cm **31.** $B = 62.00°$; $a = 8.17$ pies; $b = 15.4$ pies

33. $A = 17.00°$; $a = 39.1$ pulgadas; $c = 134$ pulgadas **35.** $c = 85.9$ yardas; $A = 62°50'$: $B = 27°10'$

37. $b = 42.3$ cm; $A = 24°10'$; $B = 65°50'$ **39.** $B = 36°36'$; $a = 310.8$ pies; $b = 230.8$ pies

41. $A = 50°51'$; $a = .4832$ m; $b = .3934$ m **43.** 9.35 metros **45.** 88.3 metros **47.** 26.92 pulgadas

49. 583 pies **51.** 28.0 metros **53.** 469 metros **55.** 146 metros **57.** 34.0 millas

59. $a = 12, b = 12\sqrt{3}, d = 12\sqrt{3}, c = 12\sqrt{6}$

10.6 Ejercicios (página 616)

1. $C = 95°, b = 13$ m, $a = 11$ m **3.** $B = 37.3°, a = 38.5$ pies, $b = 51.0$ pies

5. $C = 57.36°, b = 11.13$ pies, $c = 11.55$ pies **7.** $B = 18.5°, a = 239$ yd, $c = 230$ yd

9. $A = 56°00', AB = 361$ pies, $BC = 308$ pies **11.** $B = 110.0°, a = 27.01$ m, $c = 21.36$ m

13. $A = 34.72°, a = 3326$ pies, $c = 5704$ pies **15.** $C = 97°34', b = 283.2$ m, $c = 415.2$ m

17. 118 metros **19.** 10.4 pulgadas **21.** 12 **23.** 7 **25.** 30° **27.** $c = 2.83$ pulgadas, $A = 44.9°, B = 106.8°$

29. $c = 6.46$ m, $A = 53.1°, B = 81.3°$ **31.** $a = 156$ cm, $B = 64°50', C = 34°30'$

33. $b = 9.529$ pulgadas, $A = 64.59°, C = 40.61°$ **35.** $a = 15.7$ m, $B = 21.6°, C = 45.6°$

37. $A = 30°, B = 56°, C = 94°$ **39.** $A = 82°, B = 37°, C = 61°$ **41.** $A = 42.0°, B = 35.9°, C = 102.1°$

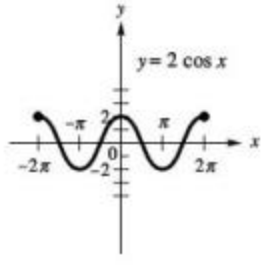
43. 257 metros **45.** 22 pies **47.** 36° con 45 pies cable y 26° con 60 pies de cable

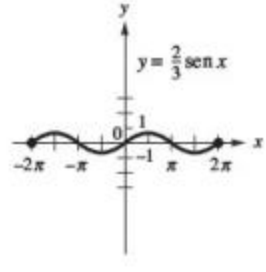
49. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **51.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **53.** 46.4 m^2 **55.** 356 cm^2 **57.** 722.9 pulgadas^2 **59.** $24\sqrt{3}$ **61.** 78 m^2

63. 12,600 cm^2 **65.** 3650 pies^2 **67.** 100 m^2 **69.** 33 latas

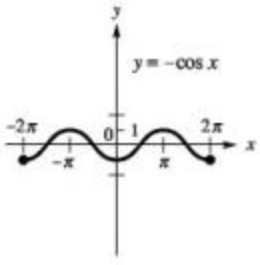
10.7 Ejercicios (página 625)

1. G **3.** E **5.** B **7.** F **9.** $2\pi; 2$ **11.** $2\pi; \frac{2}{3}$

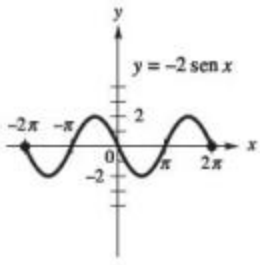




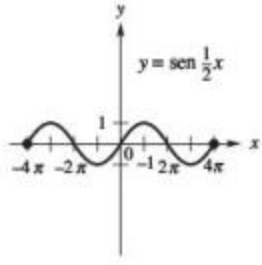
13. 2π; 1



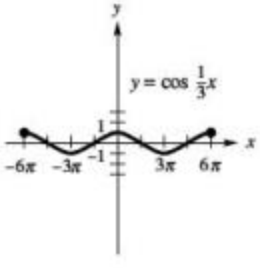
15. 2π; 2



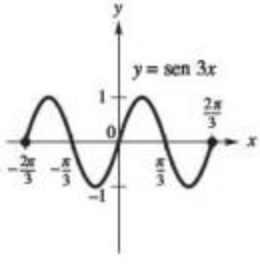
17. 4π; 1



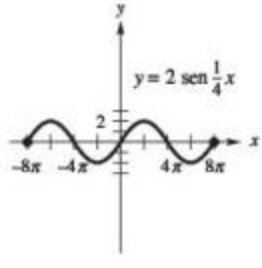
19. 6π; 1



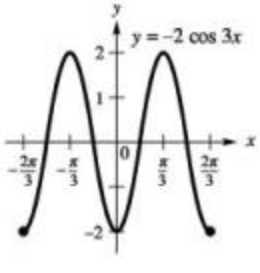
21. $\frac{2\pi}{3}$; 1



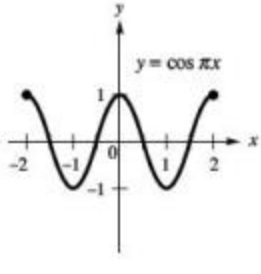
23. 8π; 2



25. $\frac{2\pi}{3}$; 2



27. 2; 1



29. **(a)** 80°; 50° **(b)** 15°
(c) cerca de 35,000 años **(d)** hacia abajo

31. **(a)** 20 **(b)** 75

Examen del capítulo 10 **(página 627)**

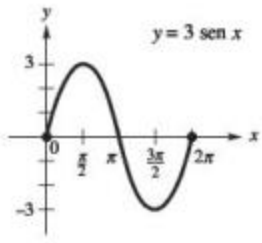
1. 74.2983° **2.** 203° **3.** $\operatorname{sen}\theta = -\frac{5\sqrt{29}}{29}; \cos\theta = \frac{2\sqrt{29}}{29}; \tan\theta = -\frac{5}{2}$

4. III **5.** $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}; \tan\theta = -\frac{3}{4}; \cot\theta = -\frac{4}{3}; \sec\theta = \frac{5}{4}; \csc\theta = -\frac{5}{3}$

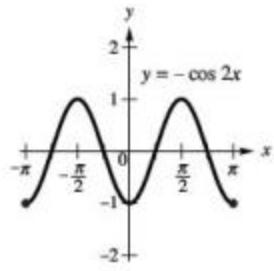
6. $\operatorname{sen}A = \frac{12}{13}; \cos A = \frac{5}{13}; \tan A = \frac{12}{5}; \cot A = \frac{5}{12}; \sec A = \frac{13}{5}; \csc A = \frac{13}{12}$ **7.** **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** 1 **(c)** indefinido **(d)** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(e)** indefinido **(f)** $-\sqrt{2}$ **8.** **(a)** .97939940 **(b)** .20834446 **(c)** 1.9362132

9. 16.16664145° **10.** 135°, 225° **11.** $B = 31°30', a = 638, b = 391$ **12.** 15.5 pies **13.** 137.5°
14. 180 km **15.** 49.0° **16.** 4300 km^2 **17.** 264 unidades cuadradas **18.** 2.7 millas **19.** 5500 metros
20. la distancia entre la primera y la tercera base: 63.7 pies; la distancia a la segunda base: 66.8 pies

21. 3; 2π



22. 1; π



CAPÍTULO 11 Métodos de conteo

11.1 Ejercicios (página 635)

1. *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, *BA*, *BC*, *BD*, *BE*, *CA*, *CB*, *CD*, *CE*, *DA*, *DB*, *DC*, *DE*, *EA*, *EB*, *EC*, *ED*; 20 maneras

3. *AC*, *AE*, *BC*, *BE*, *CA*, *CB*, *CD*, *DC*, *DE*, *EA*, *EB*, *ED*; 12 maneras

5. *ACE*, *AEC*, *BCE*, *BEC*, *DCE*, *DEC*; 6 maneras

7. *ABC*, *ABD*, *ABE*, *ACD*, *ACE*, *ADE*, *BCD*, *BCE*, *BDE*, *CDE*; 10 maneras **9.** 1 **11.** 3 **13.** 5

15. 5 **17.** 3 **19.** 1 **21.** 18 **23.** 15 **25.**

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

27. 11, 22, 33, 44, 55, 66

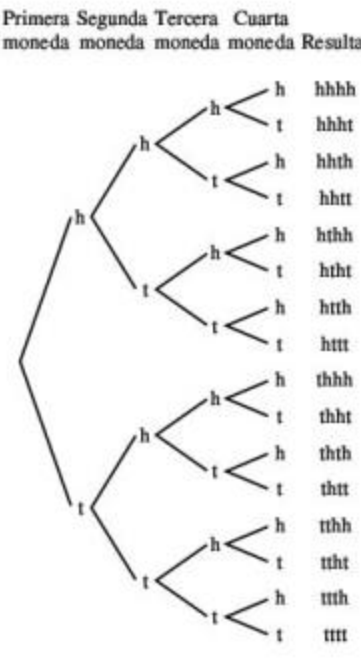
29. 11, 13, 23, 31, 41, 43, 53, 61 **31.** 16, 25, 36, 64 **33.** 16, 32, 64

35. **(a)** tttt

(b) hhhh, hhht, hhth, hhtt, hthh, htht, htth, thhh, thht, thth, tthh

(c) httt, thtt, ttht, ttth, tttt

(d) hhhh, hhht, hhth, hhtt, hthh, htht, htth, httt, thhh, thht, thth, thtt, tthh, ttht, ttth



37. 16 **39.** 36 **41.** 17 **43.** 72 **45.** 12 **47.** 10 **49.** 6 **51.** 3 **53.** 54 **55.** 18
57. 138 **59.** 16 **61.** 13 **63.** 4 **65.** 883 **67.** 3

En los ejercicios 69 y 71 la redacción de las respuestas puede variar.

69. **(a)** Determine el número de pares ordenados de dígitos que pueden ser seleccionados del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} si se permite la repetición de dígitos. **(b)** Determine el número de pares ordenados de dígitos que pueden seleccionarse del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}, si la selección se realiza con reemplazo. **71.** **(a)** Encuentre el número de maneras para seleccionar tres letras del conjunto $\{A, B, C, D, E\}$ si no está permitida la repetición de las letras. **(b)** Encuentre el número de maneras de seleccionar tres letras del conjunto $\{A, B, C, D, E\}$ si la selección está hecha sin reemplazo.

11.2 Ejercicios (página 644)

3. **(a)** no **5.** 24 **7.** 336 **9.** 20 **11.** 84 **13.** 840 **15.** 39,916,800 **17.** 95,040
19. 1716 **21.** 184,756 **23.** $4.151586701 \times 10^{12}$ **25.** $2^3 = 8$ **29.** $6^3 = 216$ **31.** $5! = 120$
33. $3 \cdot 2 = 6$ **35.** $3 \cdot 3 = 9$ **37.** $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ **39.** $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ **41.** $2^6 = 64$
43. $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 180$ **45.** $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 108$ **47.** $3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 27$ **49.** $2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$
51. $5! = 120$ **53.** **(a)** 6 **(b)** 5 **(c)** 4 **(d)** 3 **(e)** 2 **(f)** 1; $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
55. **(a)** 3 **(b)** 3 **(c)** 2 **(d)** 2 **(e)** 1 **(f)** 1; $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 36$ **59.** 450; no

11.3 Ejercicios (página 655)

1. 360 **3.** 455 **5.** 143,640 **7.** 252 **9.** 4.3609104×10^{10} **15.** **(a)** permutación **(b)** permutación **(c)** combinación **(d)** combinación **(e)** permutación **(f)** combinación **(g)** permutación **17.** $P(8, 5) = 6720$
19. $P(12, 2) = 132$ **21.** $P(25, 5) = 6{,}375{,}600$ **23.** **(a)** $P(4, 4) = 24$ **(b)** $P(4, 4) = 24$
25. $C(18, 5) = 8568$ **27.** **(a)** $C(13, 5) = 1287$ **(b)** $C(26, 5) = 65{,}780$ **(c)** 0 (imposible)
29. **(a)** $C(6, 3) = 20$ **(b)** $C(6, 2) = 15$ **31.** $C(25, 2) = 300$ **33.** **(a)** 5 **(b)** 9
35. $P(26, 3) \cdot P(10, 3) \cdot P(26, 3) = 175{,}219{,}200{,}000$ **37.** $2 \cdot P(25, 3) = 27{,}600$
39. $7 \cdot P(12, 8) = 139{,}708{,}800$ **41.** **(a)** $7^7 = 823{,}543$ **(b)** $7! = 5040$
43. $C(25, 3) \cdot C(22, 4) \cdot C(18, 5) \cdot C(13, 6) = 2.473653743 \times 10^{14}$ **45.** $C(20, 3) = 1140$
47. **(a)** $P(7, 2) = 42$ **(b)** $3 \cdot 6 = 18$ **(c)** $P(7, 2) \cdot 5 = 210$ **49.** $P(8, 3) = 336$
51. **(a)** $C(6, 2) \cdot C(6, 3) \cdot C(6, 4) = 4500$ **(b)** $3! \cdot C(6, 2) \cdot C(6, 3) \cdot C(6, 4) = 27{,}000$ **53.** **(a)** $8! = 40{,}320$
(b) $2 \cdot 6! = 1440$ **(c)** $6! = 720$ **55.** **(a)** $2 \cdot 4! = 48$ **(b)** $3 \cdot 4! = 72$ **57.** Cada una es igual a 220.
59. **(a)** 1

11.4 Ejercicios (página 662)

1. 4 **3.** 15 **5.** 28 **7.** 36 **9.** $C(7, 1) \cdot C(3, 3) = 7$ **11.** $C(7, 3) \cdot C(3, 1) = 105$
13. $C(8, 3) = 56$ **15.** $C(8, 5) = 56$ **17.** $C(9, 4) = 126$ **19.** $1 \cdot C(8, 3) = 56$ **21.** 1 **23.** 10
25. 5 **27.** 32 **29.** **(a)** Todos son múltiplos del número de la fila. **(b)** Se cumple el mismo patrón. **(c)** Se cumple el mismo patrón. **31.** ..., 8, 13, 21, 34, ...; Un número en esta secuencia es la suma de los dos términos que le preceden. Ésta es la sucesión de Fibonacci. **33.** fila 8 **35.** La suma de los cuadrados de las entradas que están en la fila superior es igual a la entrada en el vértice inferior.

Para los ejercicios 37 y 39, la redacción puede variar.

37. suma = N; Cualquier entrada en el arreglo es igual a la suma de las dos entradas que están inmediatamente arriba de ella y la que se encuentra a la izquierda. **39.** suma = N; Cualquier entrada en el arreglo es igual a la suma de la fila de entradas de la celda que se encuentra inmediatamente arriba de ella hasta el extremo izquierdo del arreglo. **41.** $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$ **43.** $z^3 + 6z^2 + 12z + 8$
45. $16a^4 + 160a^3b + 600a^2b^2 + 1000ab^3 + 625b^4$ **47.** $b^6 - 6b^5h + 15b^4h^2 - 20b^3h^3 + 15b^2h^4 - 6bh^5 + h^6$
49. $n + 1$ **51.** $n = 14$, $r = 5$; $\dfrac{14!}{10!\,4!}x^{10}y^4 = 1001x^{10}y^4$

11.5 Ejercicios (página 669)

3. $2^4 - 1 = 15$ **5.** $2^7 - 1 = 127$ **7.** 120 **9.** 6 **11.** $6 + 6 - 1 = 11$ **13.** $90 - 9 = 81$
15. **(a)** $C(8, 3) = 56$ **(b)** $C(7, 3) = 35$ **(c)** $56 - 35 = 21$ **17.** $C(7, 3) - C(5, 3) = 25$
19. $P(8, 3) - P(6, 3) = 216$ **21.** $P(10, 3) - P(7, 3) = 510$ **23.** $C(25, 4) - C(23, 4) = 3795$

25. $13 + 4 - 1 = 16$ **27.** $30 + 15 - 10 = 35$ **29.** $2{,}598{,}960 - C(13,5) = 2{,}597{,}673$
31. $2{,}598{,}960 - C(40,5) = 1{,}940{,}952$ **33.** $C(12,0) + C(12,1) + C(12,2) = 79$ **35.** $2^{12} - 79 = 4017$
37. $26^3 \cdot 10^3 - P(26,3) \cdot P(10,3) = 6{,}344{,}000$ **39.** $C(4,3) + C(3,3) + C(5,3) = 15$
41. $C(12,3) - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 160$

Examen del capítulo 11 **(página 672)**

1. $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ **2.** $6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$ **3.** $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ **4.** $6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$ terminan en 0; $5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$ terminan en 5; $30 + 25 = 55$ **5.** 13 **6.**

Primer lanzamiento	Segundo lanzamiento	Tercer lanzamiento	Cuarto lanzamiento
h	h	h	h
			t
		t	h
			t
	t	h	h
			t
		t	h
			t
t	h	h	h
			t
		t	h
			t
	t	h	h
			t
		t	h
			t

7. $4! = 24$ **8.** 12 **9.** 120

10. 336 **11.** 11,880 **12.** 35 **13.** $P(26,5) = 7{,}893{,}600$ **14.** $32^5 = 33{,}554{,}432$
15. $C(12,4) = 495$ **16.** $C(12,2) \cdot C(10,2) = 2970$ **17.** $C(12,5) \cdot C(7,5) = 16{,}632$
18. $2^{12} - [C(12,0) + C(12,1) + C(12,2)] = 4017$ **19.** $2^4 = 16$ **20.** $2^2 = 4$ **21.** $2 \cdot 2^2 = 8$
22. 8 **23.** 2 **24.** $16 - (1 + 4) = 11$ **25.** $C(6,3) = 20$ **26.** $C(5,2) = 10$ **27.** $2 \cdot C(5,3) = 20$
28. $C(5,2) = 10$ **29.** $C(5,4) + C(2,1) \cdot C(5,3) = 25$ **30.** $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
31. $495 + 220 = 715$ **32.** los números naturales

CAPÍTULO 12 Probabilidad

12.1 Ejercicios **(página 681)**

1. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ **3.** (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{6}$ **5.** (a) $\{1, 2, 3\}$ (b) 2 (c) 1 (d) 3 (e) $\frac{2}{3}$ (f) 2 a 1

7. (a) $\{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{4}{9}$ **9.** (a) 4 a 7 (b) 5 a 6 (c) 2 a 9

11. (a) $\frac{1}{50}$ (b) $\frac{2}{50} = \frac{1}{25}$ (c) $\frac{3}{50}$ (d) $\frac{4}{50} = \frac{2}{25}$ (e) $\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$ **13.** (a) $\frac{1}{36}$ (b) $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ (c) $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
(d) $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ (e) $\frac{5}{36}$ (f) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (g) $\frac{5}{36}$ (h) $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ (i) $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ (j) $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ (k) $\frac{1}{36}$

15. (a) $\frac{38{,}550}{75{,}320} \approx .512$ (b) $\frac{36{,}770}{75{,}320} \approx .488$ **19.** $\frac{1}{4}$ **21.** $\frac{1}{4}$ **23.** (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ **25.** $\frac{1}{250{,}000} = .000004$

27. $\frac{1}{4}$ **29.** $\frac{1}{4}$ **31.** $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ **33.** $\frac{1}{500} = .002$ **35.** Alrededor de 160 **37.** $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ **39.** (a) 0 (b) no
(c) sí **43.** $\frac{12}{31}$ **45.** $\frac{36}{2{,}598{,}960} \approx .00001385$ **47.** $\frac{1}{13} \cdot \frac{624}{2{,}598{,}960} \approx .00001847$

49. $\frac{6^2 - 4^2 + 2^2}{8^2} = \frac{3}{8} = .375$ **51.** $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6; \frac{6}{720} = \frac{1}{120} \approx .0083$ **53.** $4 \cdot 3! \cdot 3! = 144;$
$\frac{144}{720} = \frac{1}{5} = .2$ **55.** $\frac{2}{C(7,2)} = \frac{2}{21} \approx .095$ **57.** $\frac{C(5,3)}{C(12,3)} = \frac{1}{22} \approx .045$ **59.** $\frac{1}{P(36,3)} \approx .000023$

61. $\frac{3}{28} \approx .107$ **63.** (a) $\frac{8}{9^2} = \frac{8}{81} \approx .099$ (b) $\frac{4}{C(9,2)} = \frac{1}{9} \approx .111$ **65.** $\frac{9 \cdot 10}{9 \cdot 10^2} = \frac{1}{10}$

12.2 Ejercicios (página 689)

1. sí **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** $\frac{5}{6}$ **9.** $\frac{2}{3}$ **11.** **(a)** $\frac{2}{13}$ **(b)** 2 a 11 **13.** **(a)** $\frac{11}{26}$ **(b)** 11 a 15

15. **(a)** $\frac{9}{13}$ **(b)** 9 a 4 **17.** $\frac{2}{3}$ **19.** $\frac{7}{36}$ **21.** $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$ **23.** .005365

25. .971285 **27.** .76 **29.** .92 **31.** 6 a 19 **33.**

x	$P(x)$
3	.1
4	.1
5	.2
6	.2
7	.2
8	.1
9	.1

35. $n(A') = s - a$

37. $P(A) + P(A') = 1$ **39.** 180 **41.** $\frac{2}{3}$ **43.** 1

12.3 Ejercicios (página 698)

1. independiente **3.** independiente **5.** independiente **7.** $\frac{42}{100} = \frac{21}{50}$ **9.** $\frac{68}{100} = \frac{17}{25}$ **11.** $\frac{19}{34}$

13. $\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$ **15.** $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{49}$ **17.** $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$ **19.** $\frac{1}{6}$ **21.** 0 **23.** $\frac{12}{51} = \frac{4}{17}$ **25.** $\frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} = \frac{11}{221}$

27. $\frac{4}{52} \cdot \frac{11}{51} = \frac{11}{663}$ **29.** $\frac{1}{3}$ **31.** 1 **33.** $\frac{3}{10}$ (el mismo) **35.** $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ **37.** .640 **39.** .008

41. .95 **43.** .23 **45.** $\frac{1}{35}$ **47.** $\frac{3}{7}$ **49.** $\frac{3}{7}$ **51.** **(a)** $\frac{3}{4}$ **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{5}{16}$ **53.** .2704 **55.** .2496

59. $\frac{1}{64} \approx .0156$ **61.** 10 **63.** .400 **65.** .080 **67.** $(.90)^4 = .6561$

69. $C(4,2) \cdot (.10) \cdot (.20) \cdot (.70)^2 = .0588$ **71.** .30 **73.** .49

12.4 Ejercicios (página 705)

1. $\frac{1}{8}$ **3.** $\frac{3}{8}$ **5.** $\frac{3}{4}$ **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $\frac{3}{8}$ **11.** x, n, n **13.** $\frac{7}{128}$ **15.** $\frac{35}{128}$ **17.** $\frac{21}{128}$ **19.** $\frac{1}{128}$

21. $\frac{25}{72}$ **23.** $\frac{1}{216}$ **25.** .041 **27.** .268 **33.** .016 **35.** .020 **37.** .198 **39.** .448

41. .656 **43.** .002 **45.** .883 **49.** .091 **51.** .018 **53.** $\frac{45}{1024} \approx .044$ **55.** 0

57. $\frac{210 + 120 + 45 + 10 + 1}{1024} = \frac{193}{512} \approx .377$ **59.** $\frac{252}{1024} = \frac{63}{256} \approx .246$

12.5 Ejercicios (página 713)

3. $\frac{5}{2}$ **5.** \$1 **7.** 50¢ **9.** no (ganancias netas esperadas: $-\frac{3}{4}$¢) **11.** 1.72 **13.** **(a)** −\$60 **(b)** \$36,000

(c) \$72,000 **15.** 50¢ **17.** \$2500 **19.** 2.7 **21.** un incremento de 250 **25.** Proyecto C **27.** \$2200

29. columna 5: 25,000, 60,000, 16,000 **31.** columna 7: C, C, C, B, C, A, B **33.** casi −15¢

12.6 Ejercicios (página 719)

3. no **5.** $\frac{18}{50} = .36$ (Esto es muy aproximado a .375, el valor teórico.) **7.** $\frac{11}{50} = .22$

9. Las respuestas variarán.

Examen del capítulo 12 (página 721)

3. 3 a 1 **4.** 25 a 1 **5.** 11 a 2 **6.**

	C	c
C	CC	Cc
c	cC	cc

7. $\frac{1}{2}$ **8.** 3 a 1 **9.** $\frac{7}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{7}=\frac{30}{49}$

10. $\frac{7}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{49}$ **11.** $1-\left(\frac{30}{49}+\frac{1}{49}\right)=\frac{18}{49}$ **12.** $\frac{C(2,2)}{C(5,2)}=\frac{1}{10}$ **13.** $\frac{C(3,2)}{C(5,2)}=\frac{3}{10}$ **14.** $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

15. $\frac{3}{10}$ **16.**

x	$P(x)$
0	0
1	3/10
2	6/10
3	1/10

17. $\frac{9}{10}$ **18.** $\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$ **19.** 5 a 1 **20.** $1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$ **21.** 7 a 2

22. $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ **23.** $(.78)^3\approx .475$ **24.** $C(3,2)(.78)^2(.22)\approx .402$ **25.** $1-(.22)^3\approx .989$

26. $(.78)(.22)(.78)\approx .134$ **27.** $\frac{25}{102}$ **28.** $\frac{25}{51}$ **29.** $\frac{4}{51}$ **30.** $\frac{3}{26}$ **31.** 38 **32.** 1 **33.** .026

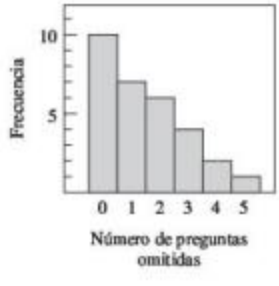
CAPÍTULO 13 Estadística

13.1 Ejercicios (página 730)

1. (a)

x	f	f/n
0	10	10/30 ≈ 33%
1	7	7/30 ≈ 23%
2	6	6/30 = 20%
3	4	4/30 ≈ 13%
4	2	2/30 ≈ 7%
5	1	1/30 ≈ 3%

(b)



(c)

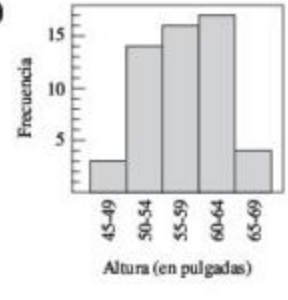


3. (a)

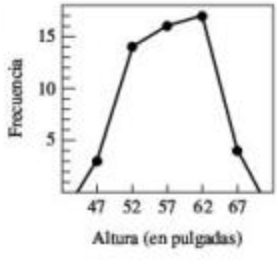
Límites de clase	Marcas	Frecuencia f	Frecuencia relativa f/n
45-49	|||	3	3/54 ≈ 5.6%
50-54	|||| |||| ||||	14	14/54 ≈ 25.9%
55-59	|||| |||| |||| |	16	16/54 ≈ 29.6%
60-64	|||| |||| |||	17	17/54 ≈ 31.5%
65-69	||||	4	4/54 ≈ 7.4%

Total: $n = 54$

(b)



(c)

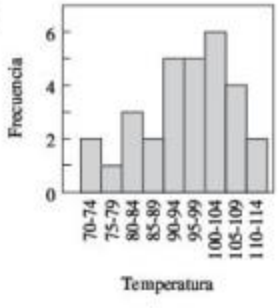


5. (a)

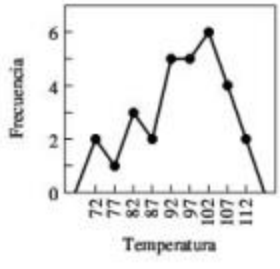
Límites de clase	Marcas	Frecuencia f	Frecuencia relativa f/n
70-74	||	2	2/30 ≈ 6.7%
75-79	|	1	1/30 ≈ 3.3%
80-84	|||	3	3/30 = 10.0%
85-89	||	2	2/30 ≈ 6.7%
90-94	𝍸 ||	5	5/30 ≈ 16.7%
95-99	𝍸 ||	5	5/30 ≈ 16.7%
100-104	𝍸 |	6	6/30 = 20.0%
105-109	||||	4	4/30 ≈ 13.3%
110-114	||	2	2/30 ≈ 6.7%

Total: $n = 30$

(b)



(c)



7.

0	7 9 8
1	1 1 2 8 9 4 3 1 0 5 0 5 5
2	0 9 6 6 2 5 2 3 4 4
3	1

9.

0	8 5 4 9 6 9 4 8
1	2 0 1 8 8 2 4 0 8 8 6 3
2	6 6 2 5 1 3
3	0 4 6
4	4

11. cerca del 31% **13.** CBS; cerca del 2.9% **15.** cerca de 1.6%; ABC; 1994-95 **17.** 3.4% en 2000

21. 187° **23.**



25. cerca de 79 años **27. (a)** cerca de 6 años

35.

Letra	Probabilidad
A	.208
E	.338
I	.169
O	.208
U	.078

37.

Letra	Probabilidad
A	.263
E	.288
I	.169
O	.195
U	.085

39.

Límites de clase	Probabilidad
10-19	.150
20-29	.275
30-39	.225
40-49	.175
50-59	.100
60-69	.050
70-79	.025

41. 7/40

43. (a) empírica

13.2 Ejercicios **(página 744)**

1. (a) 12.2 **(b)** 12 **(c)** ninguno **3. (a)** 201.2 **(b)** 210 **(c)** 196 **5. (a)** 5.2 **(b)** 5.35 **(c)** 4.5 y 6.2
7. (a) .8 **(b)** .795 **(c)** ninguno **9. (a)** 47.2 **(b)** 45.6 **(c)** ninguno **11. (a)** 129 **(b)** 128 **(c)** 125 y 128
13. (a) 46,908,000 **(b)** 42,779,000 **15. (a)** 14,770,000 **(b)** 14,577,000 **17.** 4000 millas cuadradas

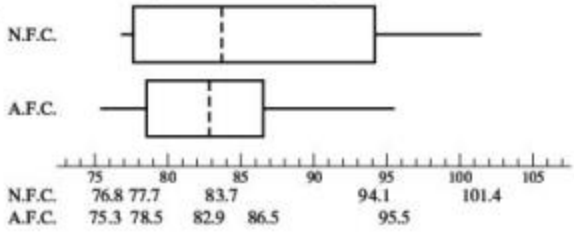
19. 5.27 seg **21.** 2.42 seg **23.** la media **25.** media = 77; mediana = 80; moda = 79 **27.** 92
29. **(a)** 597.42 **(b)** 598 **(c)** 603 **31.** 2.41 **33.** 773,300 millas cuadradas **35.** 25,302,000
37. 716,489 **39.** −162,314 **41.** $687,333.33 **43.** 5 **45.** **(a)** 18.4 **(b)** 16 **(c)** 11 y 16
47. **(a)** 74.8 **(b)** 77.5 **(c)** 78 **51.** **(a)** media = 13.7; mediana = 16; moda = 18 **(b)** mediana
53. **(a)** 4 **(b)** 4.25 **55.** **(a)** 6 **(b)** 9.33 **57.** 80 **61.** no

13.3 Ejercicios **(página 753)**

1. la desviación estándar muestra **3.** **(a)** 17 **(b)** 5.53 **5.** **(a)** 19 **(b)** 6.27 **7.** **(a)** 23 **(b)** 7.75
9. **(a)** 1.14 **(b)** .37 **11.** **(a)** 8 **(b)** 2.41 **13.** 3/4 **15.** 45/49 **17.** 88.9% **19.** 64%
21. 3/4 **23.** 15/16 **25.** 1/4 **27.** 4/49 **29.** $202.50 **31.** seis **33.** al menos nueve
35. Marca B ($\bar{x}_B = 48{,}176 > 43{,}560$) **39.** 23.29; 4.35 **45.** **(a)** 12.5 **(b)** −3.0 **(c)** 4.9 **(d)** 4.2
(e) 15.5 **(f)** 7.55 y 23.45 **49.** no **53.** **(a)** el más pequeño **(b)** el más grande

13.4 Ejercicios **(página 760)**

1. Lynn (desde $z = .48 > .19$) **3.** Arvind (desde $z = -1.44 > -1.78$) **5.** 58 **7.** 62 **9.** −.30
11. −.50 **13.** Antonio McDyess **15.** Shawn Marion **17.** Tim Duncan (desde $z = 1.08 > .79$)
19. **(a)** La mediana es 11.8. **(b)** El rango es 3.4. **(c)** La mitad del rango va de 10.7 a 12.7.
27. la distribución global **29.** **(a)** no **35.** 101.4 **37.** $Q_1 = 77.7$; $Q_2 = 83.7$; $Q_3 = 94.1$ **39.** 94.1
41.



43. N.F.C.; cerca de 3 unidades
45. N.F.C.; cerca de 8 unidades **47.** 114.2

13.5 Ejercicios **(página 769)**

1. discreta **3.** continua **5.** discreta **7.** 50 **9.** 68 **11.** 50% **13.** 95% **15.** 43.3%
17. 36.0% **19.** 4.5% **21.** 97.9% **23.** 1.28 **25.** −1.34 **27.** 5000 **29.** 640 **31.** 9970
33. 84.1% **35.** 37.8% **37.** 15.9% **39.** 4.7% **41.** .994 o 99.4% **43.** 189 unidades **45.** .888
47. aproximadamente 2 huevos **49.** 24.2% **53.** 79 **55.** 68 **57.** 90.4 **59.** 40.3

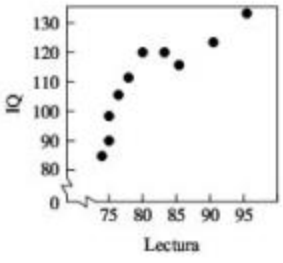
Ejercicios de extensión **(página 776)**

1. No tenemos forma de saber lo que significa. **3.** Sólo podemos decir que sube y que luego desciende.
5. 28% **7.** ¿Cuántos Toyotas se han vendido en Estados Unidos? ¿Contra qué otras marcas se están comparando? **9.** ¿Sobre qué prefieren los dentistas a la goma de mascar Trident sin azúcar? ¿Cuáles y cuántos dentistas fueron encuestados? ¿Qué porcentaje respondió? **11.** En realidad, ¿qué tan silencioso es un planeador?
13. Los mapas transmiten sus impresiones en términos de distribución del *área*, mientras que la distribución del ingreso personal puede ser muy diferente. El mapa superior probablemente implica un nivel demasiado alto en el fasto del gobierno, mientras que el mapa inferior implica un nivel demasiado bajo. **15.** Desde el momento en que la cifras se utilizaron, las circunstancias han cambiado bastante. (La Marina era mucho más grande.) Además, la ciudad de Nueva York, quizá no sea típica de la nación como un todo. **17.** B **19.** C **21.** **(a)** $m = 1, a = 6, c = 3$
(b) Deben ser 1.4 administradores, 5 agentes y 3.6 empleados de oficina.

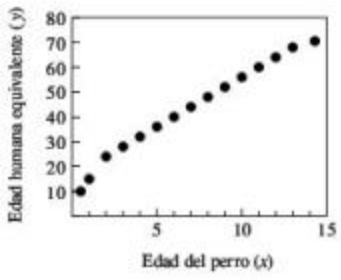
13.6 Ejercicios **(página 783)**

11. $y' = .3x + 1.5$ **3.** 2.4 decímetros **5.** 48.9 **7.** $y' = 3.35x - 78.4$ **9.** 156 lb

11.



13. 79 **15.** $r = .996$ **17.**



21. $y' = 1.44x - .39$ **23.** La correlación lineal es fuerte. **25.** $y' = .00197x + 105.7$
27. La correlación lineal es moderada.

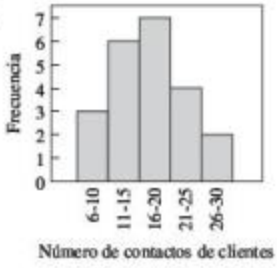
Examen del capítulo 13 **(página 785)**

1. cerca de 1890 **2.** No. El *porcentaje* era 4 veces mayor, no el número de trabajadores. **3.** cerca de 3 millones
4. La cantidad de tierra de cultivo en 1940 era aproximadamente del 26 al 28% mayor que la cantidad en 2000.

5.

Límites de clase	Frecuencia f	Frecuencia relativa f/n
6-10	3	$3/22 \approx .14$
11-15	6	$6/22 \approx .27$
16-20	7	$7/22 \approx .32$
21-25	4	$4/22 \approx .18$
26-30	2	$2/22 \approx .09$

6. (a)



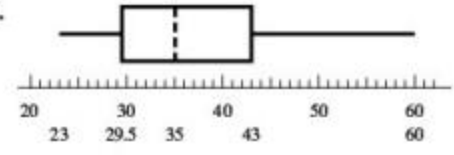
(b)



7. 8 **8.** 12.4 **9.** 12 **10.** 12 **11.** 10 **12.**

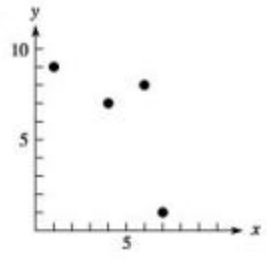
3	3	8							
4	3	5	8	9					
5	0	2	5						
6	1	1	4	5	6	7	7	8	
7	0	1	2	3	7	7	8	9	9
8	0	4	4						
9	1								

13. 35 **14.** 33 **15.** 37 **16.** 31 **17.** 49 **18.**



19. cerca de 95% **20.** cerca de .3% **21.** casi 16% **22.** aproximadamente 13.5% **23.** .684

24. .340 **25.** Oeste **26.** Este **27.** 80.0 **28.**



29. $y' = -.98x + 10.64$ **30.** 7.70 **31.** −.72

CAPÍTULO 14 Matemáticas del consumidor

14.1 Ejercicios (página 798)

1. $112 **3.** $29.25 **5.** $548.38 **7.** **(a)** $826 **(b)** $835.84 **9.** **(a)** $2650 **(b)** $2653.02 **11.** $200 **13.** $15,910 **15.** $168.26 **17.** $817.17 **19.** $17,724.34; $10,224.34 **21.** **(a)** $1331 **(b)** $1340.10 **(c)** $1344.89 **23.** **(a)** $17,631.94 **(b)** $17,762.93 **(c)** $17,831.37 **25.** **(a)** $361.56 **(b)** $365.47 **(c)** $368.13 **(d)** $369.44 **(e)** $369.48 **29.** $1461.04 **31.** $747.26 **33.** $4499.98 **35.** $46,446.11 **37.** $45,370.91 **39.** 5.000% **41.** 5.095% **43.** 5.127% **45.** 5.127% **47.** $20,392 **49.** 11 años, 233 días **51.** 2.91% **53.** $r = m[(Y + 1)^{1/m} - 1]$ **55.** 35 años **57.** 8 años **59.** 10.0% **61.** 3.2% **65.** $5.62; $6.87; $9.85; $26.77 **67.** $15,500; $19,000; $27,200; $73,900 **69.** $89 **71.** $7759 **73.** $81,102,828.75

Ejercicios de extensión (página 805)

1. **(a)** $14,835.10 **(b)** $10,000 **(c)** $4835.10 **3.** **(a)** $3488.50 **(b)** $3000 **(c)** $488.50 **5.** **(a)** $3374.70 **(b)** $3120 **(c)** $254.70 **9.** $3555.94 **11.** $3398.08

14.2 Ejercicios (página 809)

1. $1650 **3.** $2046 **5.** $13,500 **7.** $17,145 **9.** $1215; $158.75 **11.** $83.25; $46.29 **13.** $79.00; $165.90 **15.** $79.18; $38.39 **17.** $229.17 **19.** $330.75 **21.** $10,850 **23.** 6 años **25.** $3.26 **27.** $2.72

29.

Mes	Saldo insoluto al inicio del mes	Cargo financiero	Compras durante el mes	Devoluciones	Pago	Saldo insoluto al final del mes
Febrero	$319.10	$3.51	$86.14	0	$50	$358.75
Marzo	358.75	3.95	109.83	$15.75	60	396.78
Abril	396.78	4.36	39.74	0	72	368.88
Mayo	368.88	4.06	56.29	18.09	50	361.14

31.

Mes	Saldo insoluto al inicio del mes	Cargo financiero	Compras durante el mes	Devoluciones	Pago	Saldo insoluto al final del mes
Agosto	$684.17	$7.53	$155.01	$38.11	$100	$708.60
Septiembre	708.60	7.79	208.75	0	75	850.14
Octubre	850.14	9.35	56.30	0	90	825.79
Noviembre	825.79	9.08	190.00	83.57	150	791.30

33. $2.50 **35.** $12.08 **37.** **(a)** $607.33 **(b)** $7.29 **(c)** $646.26 **39.** **(a)** $473.96 **(b)** $5.69 **(c)** $505.07 **41.** **(a)** $7.20 **(b)** $6.62 **43.** **(a)** $38.18 **(b)** $38.69 **(c)** $39.20 **45.** 16.0% **47.** $32 **55.** **(a)** $127.44 **(b)** $139.08

14.3 Ejercicios (página 820)

1. 13.5% **3.** 8.5% **5.** $114.58 **7.** $92.71 **9.** 11.0% **11.** 9.5% **13. (a)** $8.93 **(b)** $511.60 **(c)** $6075.70 **15. (a)** $2.79 **(b)** $97.03 **(c)** $4073.57 **17. (a)** $206 **(b)** 9.5% **19. (a)** $180 **(b)** 11.0% **21. (a)** $41.29 **(b)** $39.70 **23. (a)** $420.68 **(b)** $368.47 **25. (a)** $1.80 **(b)** $14.99 **(c)** $1045.01 **27.** TAI de la compañía financiera: 12.0%; unión de crédito TAI: 11.5%; elija la unión de crédito **29.** $32.27 **35.** 12

14.4 Ejercicios (página 829)

1. $675.52 **3.** $469.14 **5.** $2483.28 **7.** $1034.56 **9. (a)** $513.38 **(b)** $487.50 **(c)** $25.88 **(d)** $58,474.12 **11. (a)** $1247.43 **(b)** $775.67 **(c)** $471.76 **(d)** $142,728.24 **(e)** $1247.43 **(f)** $773.11 **(g)** $474.32 **(h)** $142,253.92 **13. (a)** $1390.93 **(b)** $776.61 **(c)** $614.32 **(d)** $113,035.68 **(e)** $1390.93 **(f)** $772.41 **(g)** $618.52 **(h)** $112,417.16 **15.** $552.18 **17.** $1127.27 **19.** $1168.44 **21.** 360 **23.** $247,532.80 **25. (a)** $304.01 **(b)** $734.73 **27. (a)** $59,032.06 **(b)** $59,875.11 **29. (a)** pago 176 **(b)** pago 304 **31.** $25,465.20 **33.** $91,030.80 **35. (a)** $674.79 **(b)** $746.36 **(c)** un aumento de $71.57 **37. (a)** $395.83 **(b)** $466.07 **39.** $65.02 **41.** $140,000 **43.** $4275

14.5 Ejercicios (página 844)

1. $29.75 **3.** 7¢ menos por acción **5.** $47.48 **7.** $1.72 por acción **9.** 7600 acciones **11.** 10.6% más alto **13.** 35 **15.** $5140.00 **17.** $1161.00 **19.** $2273.82 **21.** $17,822.55 **23.** $24,804.23 **25.** $55,800.00 **27.** $12,424.96 **29.** $5709.88 **31.** $17,441.47 **33.** $56,021.45 **35.** $30.56 pago neto **37. (a)** $800 **(b)** $80 **(c)** $960 **(d)** $1040 **(e)** 130% **39. (a)** $1250 **(b)** $108 **(c)** −$235 **(d)** −$127 **(e)** −10.16% **41.** $275 **43.** $177.75 **45. (a)** $10.49 **(b)** 334 **47. (a)** $8.27 **(b)** 3080 **49. (a)** $8.39 **(b)** $100.68 **(c)** 15.6% **51. (a)** $57.45 **(b)** $689.40 **(c)** 27.6% **53. (a)** $1203.75 **(b)** $18.06 **(c)** 19.56% **55. (a)** $4179 **(b)** $76.48 **(c)** 24.31% **57. (a)** $10.00 **(b)** $35.17 **(c)** $29.95 **59. (a)** $400.00 **(b)** $41.80 **(c)** $29.95 **61. (a)** $4000.00 **(b)** $91.40 **(c)** $120.00 **63.** grande, bajo **67.** Pinnacle Systems (PCLE)

	Crecimiento agresivo	Crecimiento	Crecimiento e ingreso	Ingreso	Efectivo
69.	$ 1400	$ 8600	$ 6200	$ 2800	$ 1000
71.	$ 8000	$112,000	$144,000	$116,000	$20,000

73. 3.75% **75.** 5.2% **77.** 5.3%

Examen del capítulo 14 (página 849)

1. $130 **2.** $58.58 **3.** 3.04% **4.** 14 años **5.** $67,297.13 **6.** $10.88 **7.** $480 **8.** $145 **9.** 14.5% **10.** $35.63 **11.** 11.5% **13.** $1162.95 **14.** $1528.48 **15.** $3488 **17.** 12.1% **18.** 112,300 acciones **19.** $10 **20.** .078%; No, puesto que el rendimiento dado no fue para un periodo de un año.

Apéndice El sistema métrico (página A-5)

1. 8000 mm **3.** 85 m **5.** 689 mm **7.** 5.98 cm **9.** 5300 m **11.** 27.5 km **13.** 2.54 cm; 25.4 mm **15.** 5 cm; 50 mm **17.** 600 cl **19.** 8700 ml **21.** 9.25 L **23.** 8.974 L **25.** 8 kg **27.** 5200 g **29.** 4200 mg **31.** .598 g **33.** 30°C **35.** −81°C **37.** 50°F **39.** −40°F **41.** 200 nickels **43.** .2 g **45.** $40.99 **47.** $387.98 **49.** 1,082,400 cm^3; 1.0824 m^3 **51.** 200 botellas **53.** 897.9 m **55.** 201.1 km **57.** 3.995 lb **59.** 21,428.8 g **61.** 30.22 cuartos de galón **63.** 106.7 L **65.** no razonable **67.** razonable **69.** no razonable **71.** B **73.** B **75.** C **77.** A **79.** A **81.** C **83.** A **85.** B **87.** B **89.** A **91.** B **93.** C **95.** B

Créditos

1 AP/Wide World Photos, 7 © Reuters NewMedia Inc./CORBIS, 14 Hulton Getty/Liaison Agency, Inc., 20(L) Chuck Painter/Stanford News Service, 20(C) From *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* by George Polya. Copyright 1945, © 1973 renewed by Princeton University Press. Excerpt reprinted with permission of Princeton University Press., 22 © Aaron Horowitz/CORBIS, 23 © PhotoDisc/Getty Images, 25(B) Reprinted with permission from *Mathematics Teacher*, © 2003 by the National Council of Teachers of Mathematics. All rights reserved., 25(T) Bill Greenblatt/Liaison Agency, Inc., 25–28 (Exercises 1–25) Reprinted with permission from *Mathematics Teacher*, © The National Council of Teachers of Mathematics. All rights reserved., 27 ©2000 Daniel J. Cox/Stone, 28(L) © PhotoDisc/Getty Images, 28(R) © Eyewire/Getty Images, 31 Courtesy of Texas Instruments, 32 Courtesy of Texas Instruments, 33(T) © PhotoDisc/Getty Images, 33(C) AP/Wide World Photos, 33(B) © CORBIS, 37(R) © Michael & Patricia Fogden/CORBIS, 38 © ORIGLIA FRANCO/CORBIS SYGMA, 47 © PhotoDisc/Getty Images, 47–48 (Exercises 10–15) Reprinted with permission from *Mathematics Teacher*, volume 96, Number 2, February 2003. © 2003 by the National Council of Teachers of Mathematics. All rights reserved., 49(T) © Digital Vision/Getty Images, 49(C) From Watt, *3D Computer Graphics*. © 1993 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley., 50 Bavaria-Verlag, 54 ©Corbis-UPI/Bettmann, 77(L) © Reuters NewMedia Inc./CORBIS, 77(R) © Reuters NewMedia Inc./CORBIS, 80 Hulton Getty/Liaison Agency, Inc., 81 © Richard Hamilton Smith/CORBIS, 83 © Royalty-Free/CORBIS, 84 Silvio Fiore/Superstock, 87 ELDER NEVILLE/CORBIS SYGMA, 88 © Reuters NewMedia Inc./CORBIS, 89 © Peter Christopher Canadian Beer Brewery, Ontario, Canada, 92 © Underwood & Underwood/CORBIS, 93 © Deborah Davis/Photo Edit, 94 Courtesy of Sony Electronics, 95 ©Corbis-Bettmann Archive, 97 Erich Lessing/Art Resource, NY, 104 (Adaptation) From "Raymond Smullyan" by Ira Mothner, *Mathematical People*. Copyright © 1985 by Berkhauser Boston. Reprinted by permission., 105 Library of Congress, 107 Library of Congress, 112 © Jay Freis/Getty Images, 113 Photofest, 123 ©Bettmann/Corbis, 129 ©Corbis-Bettmann Archive, 133, 135, 136 Copyright © 1999 Dell Magazines, a division of Crosstown Publications. Reprinted by permission., 140 © Richard Hamilton Smith/CORBIS, 143(LC) © Reuters NewMedia Inc./CORBIS, 143(RC) ©Tribune Media Services, Inc. All Rights Reserved. Reprinted with permission., 147 © VCG/Getty Images, 148-149 Copyright © 1999 Dell Magazines, a division of Crosstown Publications. Reprinted by permission., 151 © PhotoDisc/Getty Images, 152(T) John Bulenkant/Photo Researchers, 152(B) Courtesy, Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 153(T) © Bridgeman Art, 153(B) The Metropolitan Museum of Art, Egyptian Expedition, Rogers Fund, 1930., 156 Transparency no. 5001(3) Courtesy Department of Library Services, American Museum of Natural History., 158 British Museum, 163 © Trinity College. Reprinted by permission of the Master and Fellows of Trinity College Cambridge., 165(TC) Courtesy, IBM Corporation, 171(T) ©Corbis-Bettmann Archive, 176 Registered trademarks of Kellogg Company, 187 Courtesy, Professor Noether, 195 © BZB/Getty Images, 199 Hugh C. Williams, University of Manitoba., 200 This program was written by Charles W. Gantner and is provided courtesy of Texas Instruments., 202 Roger Viollet/Liaison Agency, Inc., 209(T) Roger Viollet/Liaison Agency, Inc., 209(B) Princeton University Library, University Archives, Department of Rare Books and Special Collections, 213 Giraudon/Art Resource, NY, 223 Tom Wurt/Stock Boston, 234(R, L) Roy Morsch/Stock Market, 236(TL) Scala, Art Resource, NY, 236(B) ©The Walt Disney Company, 237 James Randkley/Tony Stone Images, 241(L) ©Corbis-Bettmann Archive, 241(R) Benjamin Franklin Collection/Sterling Memorial Library/Yale University, 242(L) Stadtmuseum, Aachen/ET Archive, London/SuperStock., 242(R) Metropolitan Museum of Art/Harris Brisbane Dick Fund, 1943, 247 © Eyewire/Getty Images, 255 From Lial *Intermediate Algebra*, 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (p. 185.), 267 From Lial *Introductory Algebra*, 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (p. 262.), 269 © Wayne R Bilenduke/Getty Images, 273 M. Lial, J. Hornsby, C. Miller, *Introductory Algebra* 6/e, p. 262. © 1998 Addison Wesley Longman Inc. Reprinted with permission., 274(T, B), 280(L) Photos by Doug Plasencia courtesy of Bowers and Merena Galleries., 280(R) From Lial *Introductory Algebra*, 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (p. 262.), 281(R) © PhotoDisc/Getty Images, 281(L) © PhotoDisc/Getty Images, 286 David Blatner, *The Joy of Pi*, www.joyofpi.com., 291 Courtesy www.joyofpi.com, 296 Herman is reprinted with permission from Laughing Stock Licensing, Inc., Ottawa, Canada. All rights reserved., 300 © Richard Cummins/CORBIS, 301 Courtesy of John Hornsby, 305(L) From Lial *Introductory Algebra*, 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (p. 196.), 305(R) Photography courtesy of HeritageCoin.com, 306 AP/Wide World Photos, 313(B) From Lial *Intermediate Algebra*, 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (p. 254.), 314 © Reuters NewMedia Inc./CORBIS, 321 © Reuters NewMedia Inc./CORBIS, 336(B) © Jack Hollingsworth/CORBIS, 342 © Natalie Fobes/CORBIS, 349(B) From Lial *Beginning Algebra*, 9e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission., 369 © Gary Buss/Getty Images, 372 From Lial *Intermediate Algebra*, 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (p. 321.), 393 AP/Wide World Photos, 399(T) © George Hall/CORBIS, 399(T, B) From Lial *Intermediate Algebra*, 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (p. 173.), 406 © Royalty-

Free/CORBIS, 411(BR), 412(TL) From Lial *Intermediate Algebra,* 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (p. 189.), 417(R) © David Young-Wolff/Photo Edit, 420(TR, BR) From Lial *Intermediate Algebra,* 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (p. 201.), 422 © Tony Freeman/Photo Edit, 424, 432 From Lial *Intermediate Algebra,* 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (pp. 213, 225.), 438 National Optical Astronomy Observatories, 443 From Lial *Intermediate Algebra,* 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (pp. 606, 662.), 454(L) © Stephanie Maze/CORBIS, 454(R) © Barry Yee/Getty Images, 455(L) © Eyewire/Getty Images, 456 From Lial *Intermediate Algebra,* 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (p. 248.), 465 © Eyewire/Getty Images, 470(L), 472 From Lial *Intermediate Algebra,* 7e. © 2002 Pearson Education, Inc. Publishing as Pearson Addison Wesley. Reprinted with permission. (p. 261, 281.), 473 © Chuck Savage/CORBIS, 475(TR) © Owen Franken/CORBIS, 475(BR) AP/Wide World Photos, 484 Stanford University News Service, 491 Courtesy of the University of Kuopio, Department of applied physics, Inverse Problems Group, 492 From Eves' History, 506 ©Corbis-Bettmann Archive, 509 Alinari/Art Resource, NY, 510 Reprinted with permission from *The Trisection Problem,* copyright © 1971 by the National Council of Teachers of Mathematics. All rights reserved., 518 Bill Debold/Liaison Agency, Inc., 524 George Arthur Plimpton Collection, Columbia University, 526 Peter French/DRK Photo, 527 Courtesy, John Hornsby, 528 Reprinted with permission from *The Pythagorean Proposition.* Copyright © The National Council of Teachers of Mathematics., 537(R) 2072 from *On Growth and Form* by Arch Wentworth Thompson. Cambridge University Press. Abridged edition edited by John Tyler Bonner., 541 Superstock, Inc., 547(T) Courtesy of Gwen Hornsby, 547(B) © Alan Majchrowicz/Getty Images, 548 © David Trood Pictures/Getty Images, 549 © Geoff du Feu/Getty Images, 550(T) M.C. Escher's Symmetry Drawing E66 (Winged Lions) © 2003 Cordon Art B.V. - Baarn - Holland. All rights reserved., 550(B) M.C. Escher's Waterfall © 2003 Cordon Art B.V. - Baarn - Holland. All rights reserved., 551–553 The authors wish to thank The Math Forum at Drexel and Suzanne Alejandre for permission to reprint this article., 553 coolmath.com, 556 ©Corbis-Hulton/UPI Bettmann, 557(C) Courtesy, John Hornsby, 557(B) Courtesy, John Hornsby, 558 Noriyuki Yoshida/Superstock, Inc., 559 ©Corbis-Bettmann Archive, 560 Reprinted with permission from *Science News,* the weekly newsmagazine of science, copyright 1982 by Science Service Inc., 568 AP/Wide World Photos, 569(BL) NASA, 569(C) Courtesy of Philip P. Marcus, 570(B) Stephen Johnson/Tony Stone Images, 570–573 (Exercises 1–25) Pages 1–4 from *National Council of Teachers of Mathematics Student Math Notes,* November 1991. Reprinted by permission of the National Council of Teachers of Mathematics., 576 © PhotoDisc/Getty Images, 587 © Katz 1998, 605(L) Courtesy of John Hornsby, 610(B) © Dean Conger/CORBIS, 613(B) Courtesy of John Hornsby, 629 © Tony Stone Imaging/Getty Images, 631 British Museum, 634(B) (Map) From "Ride with the Wind" by Linda Garmon, *Science News,* Vol. 119, June 27, 1981. Reprinted by permission of Wind Ship Development Corporation., 640 National Museum of American Art, Washington D.C./Art Resource, NY, 649 Washington National Cathedral, 670(TR) © Randy Wells/CORBIS, 673 © PhotoDisc/Getty Images, 675 © CORBIS, 676 Lithograph by Rudolf Hoffmann, 1859, after photoprint by Maull and Polyblanck/Library of Congress Prints and Photographs Division, 684 (Exercise 64) Problem #6 from *Mathematics Teacher,* January 1989, p. 38. Reprinted by permission., 684 (Exercise 65) Problem #2 from *Mathematics Teacher,* November 1989, p. 626. Reprinted by permission., 686 Stock Montage, Inc./Historical Pictures Service, 694 ©Bettmann/CORBIS, 695(LC) © Eyewire/Getty Images, 696 Philippe Psaila/Liaison Agency, Inc., 699 Courtesy of NASA, 700 © Jonathan Nourok/Photo Edit, 702 Museum fur Volkerlunde un Schweizerishches, 706 © Reuters NewMedia Inc./CORBIS, 710 Superstock, Inc., 711 From David G. Christensens' Slot Machines, A Pictorial History 1889–1972, 712 Courtesy, John Hornsby, 715 ©LWA-Stephen Welstead/CORBIS, 723 © David Young-Wolff/Photo Edit, 724(T) Drawn by SYMVU, Harvard University Software Program, Laboratory for Computer Graphics and Spatial Analysis, Harvard Graduate School of Design, 724(L) Courtesy, Vern Heeren, 731, 732 (Exercises 11–22) From 1999 *World Book Yearbook,* © 1999 World Book, Inc., 733 (Exercises 25–28) Graph "Retirement Saving Net Worth" from *TSA Guide to Retirement Planning for California Educators,* Winter 1993. Reprinted by permission of John L. Kattman., 740(B) AP/Wide World Photos, 744 Reprinted with permission from *The World Almanac and Book of Facts 2000.* Copyright © 1999 World Almanac Education Group. All rights reserved., 752 Sovfoto, 760 AP/Wide World Photos, 764(C) North Wind Picture Archives, 768 ©Greer & Associates, Inc./SuperStock, 771–777 From *How to Lie with Statistics* by Darrell Huff, illustrated by Irving Geis. Copyright 1954 and renewed © 1982 by Darrell Huff and Irving Geis. Reprinted by permission of W. W. Norton & Company, Inc., 779 Library of Congress, 785 From the *World Almanac and Book of Facts.* Copyright © World Almanac Education Group, 2003., 788 © Peter M. Fisher/CORBIS, 790 Oriental Institute Museum, The University of Chicago, 792 Originally broadcast over the CBS Radio Network as part of the Hourly News by Charles Osgood on March 2, 1977. Copyright © 1977 CBS, Inc. All Rights Reserved. Reprinted by permission., 807 Wells Fargo Bank, 809 ©2000 David Young-Wolff/Stone, 822 Cameramann International, Ltd., 835 © Jean Miele/CORBIS, 840 ©2000 Frank Herholdt/Stone, 847 Edward Jones and Company, 2002. Used by permission.

Índice analítico

A

A Budget of Paradoxes (De Morgan), 23
A History of Pi, 287
Aaron, Hank, 393
Ábaco, 164, 167
Abel, Niels Henrik, 186
Acciones
  comisiones por comprar o vender, 836-838
  explicación de las, 833, 842, 843
  fondos mutuos en comparación con las, 839-840
  precio de las, 833-836
Acciones, lote incompleto de, 837
Adleman, Leonard M., 195
ADN (ácido desoxirribonucleico), 629
Agnesi, Maria Gaetana, 413
Agrupación,
  explicación de, 153
  multiplicativa, 156-157
Ajuste de curva, 416-417
Al-Biruni, 616
Álgebra
  antecedentes históricos del, 315, 319
  desigualdades lineales y, 352-357
  ecuaciones cuadráticas y, 381-385
  ecuaciones lineales y, 315-322, 325-334
  exponentes y, 360-366
  factorización y, 375-379
  notación científica y, 366-369
  polinomios y, 372-379
  proporción y, 340-343
  razones y, 339-340
  traducir palabras al, 325-326
  variaciones y, 343-347
Algoritmo(s)
  alternativos, 151
  de Euclides, 214-5
  explicación de los, 155, 193
Alicia en el país de las maravillas (Carroll), 40
Al-Khowârizmî, Muhammed ibn Mûsâ, 315, 319, 869
Amortización
  de un préstamo, 8, 823
  negativa, 828
  programas de, 824, 825
Análisis
  de argumentos
    con diagramas de Euler, 129-131
    con tablas de verdad, 317, 319
  de datos, 724
  de regresión, 778
  del punto de equilibrio, 430-431
  exploratorio de datos, 724
Ángulo(s)
  agudo, 495, 503, 578
  complementarios, 496, 497, 578
  correspondientes, 498
  coterminales, 580-581
  cuadrantal, 580, 584, 585
  de depresión, 604
  de elevación, 604, 605
  de referencia, 596-598
  dígitos significativos para un, 602
  en posición estándar o normal, 580
  en un sistema de coordenadas, 580-581
  explicación de, 494-498
  exterior, 498, 504
    alterno, 498
  función trigonométrica de los, 582-585, 593-598
  interiores, 498, 504
    alterno, 498
    explicación de los, 498, 504
    medición de los, 504-505
  llano, 495, 578
  medida en grados de, 577-580
  negativo, 577
  obtuso, 495, 503, 578
  recto, 495, 503, 578, 600-605
  rotación de un, 494-495
  suplementarios, 496, 497, 578
  terminología para los, 577
  vertical, 495-496
Antecedente, 113, 123
Antiguos
  egipcios, 2, 153-155, 285, 317, 319
  griegos, 2, 14 155, 199, 207, 248, 352, 492, 506, 594
Antología griega, 327
Anualidad(es), 802-804
  ordinaria, 803, 805
Apolonio, 441
Árbol
  de factores, 200
  diagramas de, 59, 631-634
Arco(s)
  de redes, 561
  de un círculo, 506
Área
  de la superficie
    de un cilindro circular recto, 539-540
    de un cono circular recto, 541
    de una caja, 538-539
    de una esfera, 540
    de una pirámide, 541
    explicación del, 538
  de un círculo, 517-518
  de un cuadrado, 514
  de un paralelogramo, 515
  de un rectángulo, 514
  de un trapecio, 515
  de un triángulo, 516
  en el sistema métrico, A-2
  explicación de, 512
Argand, Robert, 307
Argumentos
  lógicos
    elementos de los, 129, 130
    explicación de los, 3

válidos y no válidos, 129
y las tablas de verdad, 136, 143
y los diagramas de Euler, 129-131, 136
no válidos (*véase* Falacias)
válidos
explicación de los, 129, 131
formas de los, 141
y las tablas de verdad, 136-143
y los diagramas de Euler, 129-131, 136
Aristóteles, 97
Aritmética
del reloj, 220-223
en el sistema indo-arábigo, 160-167
práctica, 257
Arquímedes, 2, 288, 352,597
Aryabhata, 283
ASCII (American Standard Code for Information Interchange, Código estadounidense estándar para el intercambio de información), 178
Ascher, Marcia, 156
Asíntota
explicación, 765
horizontal, 445
vertical, 449
Asociación
de Fibonacci, 233
métrica de Estados Unidos, A-5
AAUW (American Association of University Women, Asociación estadounidense de mujeres universitarias), 691
Autosemejanza, 568, 569
Axioma(s)
de Euclides, 556
de simetría, 318
de sustitución, 318
reflexivo, 318
transitivo, 318

B

Bacon, Francis, 650
Banda de Möbius, 560
Banneker, Benjamin, 271
Bases
conversión entre, 169-176
explicación de las, 153, 160
para aplicaciones con computadora, 172-176
potencias de números alternativos, 169
Bastones para contar, 152
Beckman, Petr, 287
Bernoulli, James, 701, 702
Bessel, Friedrich, 576
Bicondicionales, 126-127
Bienaymé, Jules, 652
Binomio,
cuadrado de un, 375
factorización, 378-379
Bitácora de aprendizaje, 40, 41
Bohr, Niels, 170
Bolsa de Valores de Nueva York (New York Stock Exchange, NYSE), 273, 833-835
Bolyai, Janos, 557
Bolzano, Bernard, 180
Bonds, Barry, 393
Bonos
explicación de los, 838-839, 842, 843
fondos mutuos en comparación con los, 839-840
Boole, George, 105
Bosquejos, 24-25
Botella de Klein, 560
Bragg, sir Lawrence, 537
Briggs, Henry, 451
Brin, Sergei, 360
Brokers (corredores de bolsa), 836-837
Brown, Robert, 676
Buleo, J., 652
Burton, David M., 671
Búsqueda de inteligencia extraterrestre (Search for extraterrestrial intelligence, SETI), 695, 696

C

Cábala, 85
Caballo de fuerza, 303
Caja, 538-539
Calculadora(s)
científica
conversión entre los sistemas métrico e inglés con, A-5
estadística por medio de las, 725
explicación de las, 31
logaritmos en las, 451-452
para conversión de bases, 173
potencias de *e* en las, 446
valor futuro en las, 793
de cuatro funciones, 31
en modo de radianes, 621
estadísticas por medio de las, 725
gráficas
componentes de las, 32
estadística por medio de las, 725
explicación de las, 31
potencias de *e* en las, 446
solución de ecuaciones por medio de las, 316
uso de las, 31-33
valor futuro con las, 793
obtención de raíces cuadradas por medio de, 284-285
para aproximar valores de funciones trigonométricas, 600-601
para convertir entre bases, 170-173
potencias de *e* en las, 446
Texas Instruments
SR-10, 31
TI-1795 SV, 31
TI-83 plus, 200, 233, 316, 793
Cálculo, 396, 440
con los dedos, 157
Cameron, Michael, 203
Cantor, Georg, 50, 83, 639
Caos, 568-570
Capital (*véase* Principal)
Cardano, Girolamo, 383
Cardinalidad
conjuntos infinitos y su, 83-88
explicación de, 51, 83
Cargos
por convenio, 828-829
por financiamiento, 807, 818
Carissan, Eugene Olivier, 199
Carmen de Algorismo (de Villa Dei), 163
Carroll, Lewis, 40, 142, 143
Catetos de un triángulo rectángulo, 527
Celsius
Anders, A-4
escala de temperaturas, A-3, A-4
Centigramo (cg), A-3
Centilitro (cl), A-3
Centímetro (cm), A-2
cuadrado (cm^2), A-2
cúbico (cm^3), A-2
Centro, 396
de rotación, 548
Cero
división de y entre, 261
factorial, 642
orígenes del, 248
Cifrado bilateral, 650
Cilindro circular recto
ejemplo del, 539
explicación del, 538
volumen y área de la superficie del, 539-540
Circuitos
explicación de, en serie y en paralelo, 118-119
simplificación de, 119-120

Círculo(s)
área, 517-518
circunferencia del, 517
ecuaciones de los, 397-399
explicación de los, 397, 441, 505-506, 538
unitario, 620
Circunferencia, 250, 517
Cocientes, 260
de números reales, 260
Codificación por computadora, 197
Código(s), 195, 197, 201-202
RSA, 195, 197
Coeficiente(s)
binomiales, 660-661
de correlación, 780, 782
muestral, 780
de sesgo, 755
de variación, 761
Cole, F. N., 198
Colinealidad, 546
Combinaciones
explicación de las, 649-650
fórmulas factoriales para las, 650
guías para el uso de las, 651-653
Comercio electrónico, 809
Cometa Halley, 346
Comisión(es), 836-838
de la SEC, 837
Complemento de un conjunto, 57, 70
Completar el cuadrado, 382
Componentes de un par ordenado, 394
Composición continua
fórmula para la, 447, 450
valor futuro para la, 797-798
Compra a plazos, 806
Computadoras
dígitos seudoaleatorios generados por medio de, 718
diseño de elementos de las, 94
palmtop, 164
resolver problemas por medio de, 1
sistemas de base utilizados en las, 172-176
Concentración de alcohol en la sangre, 303
Conclusiones de argumentos lógicos, 129-131
Conectivos (lógicos)
explicación de los, 95
símbolos para los, 96-97
Congruente módulo, 223-225
Conjetura(s)
de Goldbach, 208
de primos gemelos, 208
explicación de, 2, 7
Conjunciones
cuantificadores usados con, 105
explicación de, 102, 118, 355
tabla de verdad para las, 127
Conjunto(s)
complemento de los, 57
correspondencia uno a uno entre, 84-86
de datos, 742
de números naturales, 84, 87, 88, 152
de soluciones, 315
designación para los, 50
diagramas de Venn, 70-72, 78
diferencia de los, 66-67
disjuntos, 64
equivalentes, 84
explicación de los, 50-51
finito, 51-52, 87
iguales, 53
infinito, 52, 83-88
explicación de, 52, 85
números cardinales de, 83-88
intersección de, 63-64
nulo, 51
numerables (contables), 87
números cardinales de los, 83-88
operaciones con, 69-70
producto cartesiano de los, 68-69
solución, 315
subconjunto de un, 57-58
subconjuntos propios de los, 58-60
unión de, 64-66
universal, 56
vacío, 51
y las leyes de De Morgan, 72
Cono circular recto, 538, 541
Consecuente, 113, 123
Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM), 40, 41, 691
Constante de variación, 343
Construcciones geométricas, 509-510
Contradicciones, 319, 320
Contraejemplos, 2, 7
Contrapositiva de una proposición, 123, 124
Conversión de una hipoteca, 828
Convexo, 502
Conway, John C., 539
Coordenadas, 394
Corredores
de bolsa (brokers), 836-837
de préstamos, 836
de servicio completo, 836
Correlación, 780, 782
Correspondencia uno a uno, 84-86
Cosecante, 582
Coseno(s)
amplitud del, 622-623
explicación del, 582
ley de los, 611-614
Costos de cierre, 828-829
Cotangente, 582
Cox, Gertrude Mary, 724
Crecimiento exponencial, 448
Crédito
abierto, 806-809
de plazo abierto, 807-809
de plazo fijo, 806-807
explicación del, 806
Criba de Eratóstenes, 197-198, 208
Criterio
de divisibilidad, 196-197
de uniformidad, 638
Cronómetro, 221
Cuadrado(s)
área del, 514
explicación del, 503
mágicos, 29, 240-241
perímetro del, 513
Cuadrantes, 394
Cuadriláteros, 502, 503
Cuantificadores
existenciales, 97, 99
explicación de los, 97, 99
universales, 97, 99
uso con conjunciones y disyunciones, 105
Cuartiles, 758
Cubo(s)
de Rubik, 630
diferencia de los, 378
explicación de los, 536
suma de, 378-379
Cuenta
de reserva (en depósito), 825
de tarjetas de crédito, 807, 816
Cuotas por apertura de un préstamo, 829
Curva(s), 502
cerradas, 502
de mínimos cuadrados, 781
de regresión estimada, 778, 782
gaussiana, 764 (*véase también* Curva normal)
normal
ejemplos de, 768-769
equivalencia en una, 768
estándar, 764
explicación de, 764
propiedades de la, 764-765
normal estándar
área debajo de la, 765, 766

equivalencia en la, 768
explicación de la, 764
simples, 502
Chebyshev, Pafnuty Lvovich, 674, 752
Chu Shih-chieh, 659
Chudnovsky
David, 286
Gregory, 286

D

Dantzig, George B., 484, 485
Dato(s), 725
aislado (outlier), 738
crudos, 725
cualitativos, 725
cuantitativos, 725
Châlete, Emilie, marquesa de, 107, 129
De Méré, Chevalier, 674
De Moivre, Abraham, 671, 764
De Morgan, Augustus, 23
Decaimiento exponencial, 451
Deciles, 758
Decimales
multiplicación y división de, 294
números reales como, 251
que se repiten, 276-278, 283
que terminan, 276-278, 283
redondeo de, 294-296
suma y diferencia de, 293-294
y la conversión entre porcentaje, 297
y los números irracionales, 283-285
Dedekind, Richard, 639
Dedos, conteo con los, 162
Demostración(es), 506
por contradicción, 201, 284
DeRise, George, 9
Desargues, Gerard, 558
Desarrollo general de un binomio, 661
Desastres naturales, 694
Descartes, René, 68, 394, 395, 558
Descuentos, 827
Desigualdades
aplicaciones de las, 356-357
con tres partes, 355-357
equivalentes, 352
lineales, 352-357, 481-482
con dos variables, 481
con tres partes, 355-357
con una variable, 352
gráficas de, 481-483
soluciones de, 352-357
propiedad de la suma de, 352-353
propiedad de multiplicación de las, 354-355
símbolo para las, 58
sistemas de, 482-483
Desviación estándar
cálculo de la, 750-752
explicación de la, 749-750
muestral, 750
Diagrama de caja, 759-760
y bigotes, 759-760
Diagramas, 21-22 (*véase también* Gráficas)
de árbol, 59, 631-634
de dispersión, 778, 782
de Euler, 129-131, 136
de tallo y hojas
explicación de los, 728-729
tendencia central a partir de, 741-742
de Venn
explicación de los, 56
y los conjuntos, 70-72, 78
Diámetro, 250, 505
Diamond, Jared, 152
Diarios, 40, 41
Diferencia
de conjuntos, 66-67, 70
de cuadrados, 378-379
de cubos, 378
de números reales, 258
Diferencial por lote incompleto, 837
Dígitos
explicación de los, 161
seudoaleatorios, 718
significativos, 601-602
Dinámica molecular, 1
Dinero (*véase* Valor del dinero en el tiempo)
Diofanto, 259
Discriminante de una ecuación cuadrática, 386
Diseño de residuos (Residue Designs), 231
Disraeli, Benjamin, 771
Distancia
en el sistema métrico, A-3
fórmula de la, 332-334, 394-396
Distribución
bimodal, 741, 743
de frecuencias
esperadas, 728
explicación de las, 725
observadas, 728
para datos agrupados, 726-727
posición de la mediana en las, 739-740
de probabilidad, 689, 702
binomial, 702
explicación de la, 689
teórica, 763
esperada de frecuencias, 728
no simétrica, 742
normal, 763-769
ejemplos de, 765, 767-769
explicación de, 764-765
sesgada, 742
simétrica, 742
Disyunciones,
cuantificadores usados con, 105
exclusivas, 112
explicación de las, 102-103
inclusivas, 103
tabla de verdad de las, 127
Dividendos de acciones, 833
Divisibilidad, 196-197
División
de decimales, 294
de números racionales, 274-275
de números reales, 260-261
de y entre cero, 261
símbolo de la, 259
Divisor, 196
Dodecaedro, 536
Dodgson, Charles, 40
Dominio, 425-436
Donald en el País de las Matemáticas, 44, 236
Duplicación, años para la, 797-798
Durero, Alberto, 558

E

e, 285, 445-446
Ecuación(es)
como contradicciones, 319
como identidades, 320
como modelos, 320-321
condicional, 319, 320
cuadráticas, 381-385
discriminante de las, 386
explicación de las, 381-384
y la propiedad de la raíz cuadrada, 382
y la propiedad del factor cero, 381
de circunferencias, 397-399
de primer grado, 325-318
con dos variables, 403, 724
explicación de las, 315-318
de rectas, 412-416
diferenciales, 320
equivalentes, 325
lineales, 315-322, 325-334, 402-408, 456
aplicaciones de, 325-334
clases especiales de, 319-322
con dos variables, 402-404
con una variable, 315-318

forma pendiente-intercepto-pendiente de, 414-416
forma punto-pendiente de, 413-414
resumen de formas de, 416
sistemas de (*véase* Sistemas lineales)
soluciones de, 315-322
modelo lineal, 416-417
sistemas de, 456-470
Eddin, Nassir, 613
Edward Jones y compañía, 846, 847
Efecto invernadero, 450-451
Eje
de las X
como asíntota horizontal, 445
explicación del, 394
de las Y, 394
de una parábola, 435
Elemento(s)
identidad
de la multiplicación, 65, 263
de la suma, 65, 265
de conjuntos, 50, 51, 60
de Euclides (Playfair), 556
de un conjunto, 50
Eliasberg, Louis, 274
Elipse, 438
Elway, John, 143, 144
Embaldosado (teselaciones), 550-553
Ensayo
de Bernoulli, 701, 706
y error, 23-24, 317
Enteros, 51, 249
Eratóstenes, 198
Escala de temperatura Fahrenheit, A-4
Escalamiento, 568
Escott, E. B., 203
Escritura de fideicomiso, 822 (*véase también* Hipoteca)
Escher, M. C., 550
Esferas, 540
Espacio muestral, 674
Esperanza matemática (*véase* Valor esperado)
Estadística(s)
descriptiva, 724
explicación de, 723-725
inferencial, 724
mentir con la, 771-775
y la correlación, 780-782
y la distribución de frecuencias, 725-730
y la distribución normal, 763-769
y la regresión, 778-780
y las medidas de dispersión, 748-753
y las medidas de posición, 756-760
y las medidas de tendencia central, 735-744
Estallido supersónico, 440
Estimación, 33
Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas (Ascher), 156
Euclides, 2, 201, 207, 208, 492, 556, 557
Euler, Leonardo, 129, 203, 445, 537, 561, 562
Eventos
dependientes, 639
explicación de los, 674
independientes, 693-694
mutuamente excluyentes, 688, 691
que incluyen "no" y "o", 684-689
que incluyen "y", 691-697
Eventos mutuamente excluyentes, 688, 691
Eves, Howard, 5
Experimentos, 674
explicación de, 375
de trinomios, 376-377
por agrupación, 376
Exponente(s)
cero, 362, 365
definiciones y reglas de los, 365
explicación de los, 153, 160, 360
negativos, 362-363, 365, 366
explicación de los, 362-363, 365
reglas especiales para los, 363, 365
número racional, 293
regla del cociente para los, 363-364
regla del producto para los, 361-362
reglas de potencia para los, 364-365
Expresiones algebraicas, 315
Expresiones exponenciales
evaluación de las, 360-361
explicación de las, 160, 161
Extensión de la clase, 727
Extremos, 340

F

Factor de escala, 571
Factor de ponderación, 736-737
Factor(es)
al factorizar el máximo común, 375-376
explicación de los, 196, 375
Factorial(es)
aproximación, 671
explicación de, 642
uso de, 646
Factorización, 196
aproximación, 671
Factorización prima
de números compuestos, 199-201, 206
determinación de máximos factores comunes por medio de, 212-215
Facturación detallada, 807
Falacia(s)
del inverso, 139
del recíproco, 138
ejemplo de, 130
en la publicidad, 143-144
explicación de las, 129
forma de las, 141
Fenómeno aleatorio, 674
Fenómeno determinista, 674
Fermat, Pierre, 202, 209, 213, 44, 674
Fey, James T., 35
Fibonacci, 21, 258, 257, 289, 330
asociación de, 233
patrones de, 233-234
sucesión de, 10, 21, 22, 232-234
Figuras
en el espacio, 536-538
espaciales, 536-538
planas, 536
Fisher, sir Ronald, 806
Fondos mutuos
clases de activos en los, 846
explicación de los, 839-840, 842, 843
valor neto de los activos de los, 840-841
Forma
decimal, 276-278
estándar de una ecuación lineal, 403
pendiente-intercepto, 414-416, 430
punto pendiente, 413-414, 416
Fórmula(s)
cuadrática, 382-385
de combinaciones, 650
de la suma de cuadrados mágicos, 240
de la tasa, 332, 333
de permutaciones, 647
de Stirling, 671
del coeficiente de regresión, 779
del punto medio, 396-397
explicación de las, 320
factorial
explicación de la, 642
para combinaciones, 650
para permutaciones, 648
para el área
de Herón, 516, 616
de triángulos, 614-615
para los números cardinales, 78

soluciones por medio de, 320-321, 332-333
Fracciones
convertidas a porcentajes, 297-299
términos más simples de las, 19
Fractales, 569, 572
Franklin, Benjamin, 241
Frecuencia(s)
empíricas, 728
observadas, 728
relativa, 725
teóricas, 728
Función(es)
de crecimiento exponencial, 447
criterio de la recta vertical para las, 427-428
cuadráticas, 434-441
explicación de las, 434-435
gráficas de las, 435-439
explicación de las, 423
exponenciales
aplicaciones de las, 446-447
explicación de las, 444-445
gráficas de, 445-446
identificación de, 426-428
lineal, 429-431
logarítmicas
explicación de las, 447-449
gráficas de, 449-450
naturales, 449
objetivo, 484
periódicas, 620
explicación de las, 620
gráficas de las, 622-624
trigonométricas
calculadoras para aproximar valores de, 600-601
de ángulos, 582-585, 587
gráficas de, 622-624
variantes de la definición de las, 428
y las relaciones, 423-425
Fundación Electronics Frontier, 203

G

Galilei, Galileo, 84, 440
Galois, Évariste, 189, A-1
Galton, sir Francis, 724, 778
Ganancia de capital, 833
Gantner, Charles W., 200
Gaunt, John, 724
Gauss, Carl Friedrich, 8, 14, 307, 557, 764, 767
Gematria, 85
Genética, probabilidad en, 678-679, 682, 683
Geodesia, 495
Geometría
con coordenadas, 395
constructiva de sólidos, 49
de transformaciónes, 545-551
explicación de la, 545
y las reflexiones, 545-547
y las transformaciones de tamaño, 549-551
y las traslaciones y rotaciones, 547-549
de triángulos, 523-530
euclidiana, 556-558, 563
explicación de, 492
fractal, 569-570
no euclidiana,
explicación de la, 557, 563
orígenes de la, 557-559
perímetro y área en, 512-516
proyectiva, 558
y el caos, 567-569
y la topología, 559-560
y las curvas, 502
y las figuras en el espacio, 526-538
y las redes, 561-562
y los ángulos, 494-498
y los círculos, 505-506, 517-518
y puntos, rectas y planos, 492-493
y triángulos y cuadriláteros, 502-505
y volumen y área de superficie, 538-541
Germain, Sophie, 209
GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search, Gran búsqueda en Internet de primos de Mersenne) 202, 203
Gleick, James, 570
Goldbach, Christian, 208
Google, 360
Googol, 360
Googolplex, 360
Gossett, William S., 724
Grado(s)
de un polinomio, 372
decimal, 579
explicación de, 577-580
Gráficas
circulares (de pastel), 33, 34, 729-730
de barras, 33, 34, 729-730
de densidad de población, 724
de desigualdades lineales, 481-482
de funciones cuadráticas, 434-441
de funciones exponenciales, 445-446
de funciones logarítmicas, 449-450
de funciones periódicas, 620-624
de funciones seno y coseno, 623, 624
de líneas, 33, 34
de números, 249
de pares ordenados, 394, 425-426
de relaciones, 425-426
de sistemas lineales, 457, 461-462
de tallos y hojas, 728-729
explicación de las, 33
planteamiento de ecuaciones para ajustar, 416-417
tipos de, 33, 34
y las distribuciones de frecuencias, 725-730
Gramo (g), A-3
Gran búsqueda en Internet de primos de Mersenne (Great Internet Mersenne Prime Search, GIMPS), 202, 203
Greene, Bob, 143
Grupos
abelianos, 186, 192
de Galois, 189
de permutación, 190-191
de simetrías de un cuadrado, 187-189
explicación de los, 186-187
monster, 190

H

Halley, Edmund, 346
Hammurabi, 790
Hardy, G. H., 208
Harrison, John, 221
Hermandad pitagórica, 14
Herón de Alejandría, 516, 616
Herramientas euclidianas, 510
Hewitt, Paul G., A-1-A-2
Hexaedros, 536
Hilbert, David, 187
Hiparco, 582, 587
Hipérbola, 440, 441
Hipotecas
con tasa fija, 435, 822-826
con tasa variable, 826-828
de bienes raíces, 807
explicación de las, 822
monto principal de las, 822
respaldadas por el gobierno, 827
Hipotenusa, 527
Histogramas, 726, 727, 729
Holiedro, 539
How to Lie with Statistics (Huff), 771-775
How to Solve It (Polya), 20
HTA (hipotecas de tasa variable), 826-828

Huff, Darrell, 771-775
Huygens, Christiaan, 675

I

I Ching, 170
Icosaedros, 536
Identidades
de cofunción, 592-593
ejemplo de, 320
explicación de las, 227, 319, 586
trigonométricas
cocientes, 589-590
explicación de las, 586-590
pitagóricas, 588-589
recíprocas, 586
Igualdad
axiomas de la, 318
de conjuntos, 53, 68
de números racionales, 270, 271
explicación de la, 250
propiedades de la suma y la multiplicación de la, 315-316
símbolos para la, 250, 251
Impuestos, 846
a la propiedad, 825
In Mathematical Circles (Eves), 5
Índice
de masa corporal (IMC), 351, 359
de precios
al consumidor (IPC), 350, 396, 796
del fabricante (IPF), 264-265
Dow Jones (DJIA), 834
Inducción matemática, 12
Infinito, símbolo para el, 52
Inflación, 796-798
Inteligencia extraterrestre, búsqueda de (Search for extraterrestrial intelligence, SETI), 695, 696
Interés
añadido, 806
compuesto (*véase también* Interés)
ejemplo de, 792
explicación de, 791-793
fórmula para el, 446-447
función del, 788
valores futuro y presente para el, 793-795
y rendimiento anual, 795-796
explicación de, 798
no devengados, 815-818
simple
explicación del, 789-790
valores futuro y presente para el, 790-791
y los valores futuros y valores presentes, 790-791
Intersección(es), 404
con el eje de las X
explicación de la, 403-404
y la graficación de funciones cuadráticas, 439
con el eje de las Y
explicación de la, 403-404
y la graficación de funciones cuadráticas, 439
de conjuntos, 63-64, 70
símbolo de la, 63
Intervalo en una recta numérica, 353
Inversiones,
acciones como, 833-838
bonos como, 838-839
efecto de los impuestos en las, 846
evaluación de rendimientos en las, 841-842
explicación de las, 832
fondos mutuos como, 839-841
rendimiento de las, 833
resumen de las, 842-843
Inverso
aditivo, 252
en la aritmética del reloj, 222
explicación del, 252-253, 263
de una proposición, 123, 124
multiplicativo
definición de la división por medio del, 274
explicación del, 252-253, 263
Investigación de Operaciones (IO), 484
Investment Company Institute (ICI), 839

J

Jefferson, Thomas, 271, 273, 394
Juego(s)
justo, 709
Olímpicos de verano, 314

K

Kanada, Yasumasa, 285
Kasner, Edward, 360
Kepler, Johann, 346, 438
Khayyam, Omar, 659
Kilogramo (kg), A-3
Kilolitro (kl), A-3
Kilómetro (km), A-2
Klein, Félix, 560
Koch, H. von, 570
Kolmogorov, Andrei Nikolaevich, 674
Kovlevskaya, Sofia, 320

L

Laberti, Leone Barrista, 558
Lados
explicación de, 494
iniciales, 577
terminales, 577
Lagrange, Joseph Louis, 209, A-1
Lambert, J. H., 286
Laplace, Pierre Simon de, 674, 675, 685, 686, 764
Lasker, Emmanuel, 222
Leblanc, M., 209
Leibniz, Gottfried, 95, 124, 170, 259, 702
Leonardo Da Vinci, 558
Leonardo de Pisa (*véase* Fibonacci)
Ley
de contraposición, 139
de De Morgan, 72, 110
de Hooke, 344
de la verdad sobre los préstamos, 813, 815
de los cosenos, 611-614
de los grandes números, 677-678
de los senos, 609-611
de procedimientos para el finiquito de bienes raíces (Real Estate Settlement Procedures Act, RESPA), 829
de reforma a los impuestos de 1986, 823
de separación, 137
de tensiones, 293
del silogismo hipotético, 140
Liber Abaci (Fibonacci), 21, 232, 330
Límites
inferiores de clase, 727
superiores de clase, 727
Línea(s)
de reflexión, 545-546
desfasadas, 494
ecuaciones de, 412-416
gráficas de, 404
horizontal, 406
paralelas, 407, 493, 497
pendiente de, 405-408, 412
perpendiculares, 407-408
que se intersecan, 493
secante, 505
vertical, 406
Liquidez, 843
Litro (l), A-2
Lobachevski, Nikolai Ivanovich, 557-558, 563
Logaritmos
en calculadoras científicas, 451-452

fundamentos de los, 165
interés compuesto mediante el uso de, 794-795
Lógica
simbólica, 95-97
y las condicionales, 113-118, 123-127
y las proposiciones, 95-97
y las tablas de verdad, 102-109, 127, 136-143
y los circuitos, 118-120
y los cuantificadores, 97-99
y los diagramas de Euler, 129-131
y proposiciones equivalentes, 109-110
Logística (Buteo), 652
Longitud, 221, A-1, A-2
Loomis, Elisha Scott, 528
Lote completo de acciones, 836-837

M

Magnitud, 548
Mandelbrot, Benoit, 569, 570
Máquina de factorización, 199
Marca, 152
de clase, 727
Marcadores, 158
Margen de una hipoteca, 826
Maris, Roger, 393
Markov, A. A., 674
Matemáticas
babilónicas, 2, 157, 158, 169, 248, 319, 524, 576, 577
de computadora, 172-176
del consumidor, 788-848
crédito al consumidor, 806-809
y el valor del dinero en el tiempo, 789-798
y la compra de casas, 822-829
y la verdad sobre los préstamos, 813-818
y las anualidades, 802-804
y las inversiones, 832-842
egipcias, 2, 153-155, 285, 317, 319, 576
fundamento histórico, 2
griegas, 2, 14, 155, 199, 207, 148, 352, 492, 506, 576, 594
sitios de Internet para información sobre, 45
uso de la escritura para aprender acerca de, 40-42
Mathematics Teacher, 43-45
Matriz, 476
aumentada, 476
Mattang, 458
Máximo factor común (MFC)
explicación del, 212-213
factorización, 375-376
métodos para determinar el, 213-215
Mayas, 169, 248
"Mayor que", 250
McGwire, Mark, 393
Media
ejemplos de, 737-738
explicación de la, 340, 735-736, 743
método para determinar la, 275
ponderada, 736-737
ventajas y desventajas de la, 743, 744
Mediana
explicación de la, 738-739, 743
posición en una distribución de frecuencias, 739-740
ventajas y desventajas de la, 743, 744
Medida(s)
de tendencia central
de un diagrama de tallo y hojas, 741-742
diagrama de caja como una, 759-760
explicación de las, 735, 743-744
media como, 735-738, 743
mediana como, 738-740, 743
moda como, 740-741, 743
de dispersión,
desviación estándar como, 749-752
diagrama de caja como, 759-760
explicación de las, 748
rango como, 748-749
significado de las, 752-753
de posición
deciles y cuartiles como, 758
diagrama de caja como, 759-760
explicación de las, 756
percentiles como, 757-758
puntuación z como, 756-757
Mendel, Gregor Johann, 678-679
"Menor que", 250
Mercado
a la alza (*bull*), 834
a la baja (*bear*), 834
de valores, 833
de Estados Unidos, 273
Mersenne, Marin, 202, 558
Método(s)
actuarial, 815-818
de complemento a nueve, 151
de conteo
guías para seleccionar, 653
mediante el principio fundamental del conteo, 637-643
mediante el teorema del binomio, 660-661
mediante el triángulo de Pascal, 658-660
mediante permutaciones y combinaciones, 664-654
para problemas que incluyen "no" y "o", 664-668
por medio de un listado sistemático, 630-634
y el código genético, 629
de diferencias sucesivas
explicación del, 10-11
y la sucesión de Fibonacci, 11
y los números figurados, 16
de eliminación
explicación del, 457
resolución de sistemas lineales por medio del, 458-460, 462, 476
de enumeración sistemática
explicación de los, 630
para tareas de una fase, 630
por medio de diagramas de árbol, 631-634
por medio de tablas de producto, 630-631, 634
variados, 634
de la cuadrícula, 164-166
de los mínimos cuadrados, 778
de los productos cruzados,
aplicaciones del, 342
explicación del, 340, 341
de triangulación, 619
del campesino ruso, 166-167
del saldo
insoluto, 807
promedio diario, 808
Gauss-Jordan
aplicación del, 479-480
explicación del, 477
Monte Carlo, 717
PADU, 374, 376, 377
Metro (m), A-1
cuadrado (m^2), A-2
Miligramo (mg), A-3
Mililitro (ml), A-3
Milímetro (mm), A-2
Mínimo común múltiplo (MCM)
explicación del, 214
fórmula del, 217
métodos para determinar el, 216-218
Minuto, como una medida de ángulos, 579
Möbius, August Ferdinand, 560
Moda
explicación de la, 740-741, 743
ventajas y desventajas de la, 743, 744

Modelo(s)
de costo, 430-431
de ingresos, 430-431
de optimización, 440-441
en la investigación de operaciones, 484
explicación de los, 320-321
exponenciales, 450-451
lineal, 416-417
Modus
ponens, 137
tollens, 139
Monedas, 274
Monomios, 372
Monto de liquidación, 816-817
Muestras, 724
Multiplicación
cruzada, 340
de decimales, 294
de números racionales, 272-273
de números reales, 258-260, 262-264
de polinomios, 373-374
en sistemas modulares, 224-225
método de las casillas, 164-166
método del campesino ruso para la, 166-167
propiedades de la, 65, 263-264
símbolo para la, 259
Multiplicativo(a)
agrupación, 156-7
inverso (*véase* Inverso multiplicativo)
Múltiplo, 196
Müller, Johanne, 613

N

Napier, John, 165
NASDAQ (National Association of Securities Dealers Advanced Quotations), 835
Nash, John, 568
Negaciones
de proposiciones, 96, 98
de proposiciones condicionales, 117-118
tabla de verdad para las, 103, 115, 127
Negativo(a)
amortización, 828
ángulo, 557
exponente (*véase* Exponentes negativos)
números (*véase* Números negativos)
regla del doble, 252-253
Netz, Reviel, 597
Newton, sir Isaac, 127, 440
Nodos, 561
Noether, Amalie, 187, 222
Notación
científica
conversión a, 367
conversión a partir de la, 368
ejemplos de, 368-369
explicación de la, 366
de construcción de conjuntos, 50, 249
de intervalo, 353, 354
funcional, 428-429
por enumeración, 50
Numeración
china, 155-158
posicional, 157-158
Numerales, 152
romanos, 154
Numeralia, 35
Número(s)
abundantes, 207
aburridos, 208
amigables, 207-208
cardinales (cardinalidad)
de conjuntos, 50-52
de conjuntos infinitos, 52, 88
de subconjuntos, 76
del producto cartesiano, 69
explicación de los, 51, 83
y técnicas para resolver problemas, 76-79
complejos
explicación los, 306-309
uso de los, 290
compuestos,
explicación de, 197-199
factorización prima de, 199-201, 206
con signo, 248
cuadrados, 14, 15, 19, 244-245
de conteo (*véase también* Números naturales)
conjunto de los, 84, 87, 88, 152
correspondencia uno a uno entre los, 84-85
explicación de los, 2-3, 34, 51, 99
suma de, impares, 12-13
de Fermat, 202
de Kaprekar, 16
de Mersenne, 202
de Smith, 206
deficientes, 207
enteros no negativos
conjunto de los, 248
explicación de los, 51, 99
figurados
cuadrados, 14, 15, 19
explicación de, 14-15
heptagonales, 18-19
hexagonales, 18-19
nonagonales, 19
octagonales, 18-19
pentagonales, 14, 15
triangulares, 14, 15, 19
y el método de las diferencias sucesivas, 16
heptagonales, 18, 19
hexagonales, 18, 19
imaginarios, 308
irracionales
explicación de, 51, 99, 249-250, 283-285
y la representación decimal, 283-385
mixto, 281
naturales (*véase también* Números de conteo)
abundantes, 207
amigables, 208
conjuntos de los, 248
criterios de divisibilidad para los, 198-199
deficientes, 207
divisibilidad de los, 196-197
explicación de los, 2-3, 52, 99
perfectos, 206-207
negativos
aplicaciones de los, 249, 264
explicación de los, 248
nonagonales, 19
octagonales, 18, 19
palíndromos, 27
peculiares, 207
pentagonales, 14, 15
perfectos, 206-207
positivos, 248
primos
búsqueda de, grandes, 201-203
de Sophie Germain, 209
definición alterna de, 197-198
explicación de, 197
gemelos, 208-209
infinitud de los, 200-201
primorial, 209
relativos, 213
racionales
como decimales, 251
como exponentes, 293
división de, 274-275
ejemplos de, 249
explicación de los, 51, 99, 249, 270
forma decimal de, 276-278
multiplicación de, 272-273
propiedad de densidad de, 275-276

propiedad fundamental de los, 270
prueba del producto cruzado para igualdad de, 270, 271
suma y resta de, 272
reales
aplicaciones de los, 264
como decimales, 251
conjuntos de, 248-251, 263
división de, 260-261
explicación de los, 51, 65, 87, 99, 250, 251
inverso aditivo y valor absoluto de, 252-254
multiplicación de, 258-260
operaciones con, 257-262
orden y, 250
propiedades de suma y multiplicación de, 262-265
resta de, 258
suma de, 257-258
uso de, 247
valor absoluto de los, 253
y las operaciones con decimales, 293-296
y las operaciones con porcentajes, 297-300
y los números complejos, 306-309
y los números irracionales, 270, 283-290
y los números racionales, 270-279
sociables, 208
triangulares, 14, 15, 19
NYSE (Bolsa de Valores de Nueva York), 273, 833-835

O

Objetos en caída libre, 440
Octaedro, 536
On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy (Fey), 35
Onda senoidal, 621
Operaciones
aritméticas, 65, 69
con decimales, 293-294
con números reales, 257-262
con porcentaje, 297-300
en expresiones algebraicas, 315-316
explicación de las, 69
orden de las, 261-262
sobre conjuntos 69-70
sobre filas de una matriz, 476-480
Opuestos, 252
Orden
de cuadrados mágicos, 240
de operaciones, 261-262
explicación de, 250
límite, 837
Origen, 394
Orr, A. C., 288
Outlier, 738

P

π (pi)
cálculo de, 285-287
fundamento histórico de, 285
valor de, 288, 517
Pago
inicial, 822
mensual regular
explicación del, 822-823
fórmula para el, 824
Palimpsesto de Arquímedes, 597
Palmtop, 164
Papiro
de Moscú, 2
matemático del Cairo, 529
Papiro Rhind, 153
Par de torsión, aproximación al, 303
Parábolas
explicación de las, 434-435, 437, 441
foco de las, 435
vértice de las, 435, 437, 440
Paradoja(s)
de Galileo, 84
de Simpson, 737
de Zenón, 90
del barbero, 87
explicación de las, 84
Paralelepípedo rectangular, 536
Paralelogramos
área de los, 515
explicación de los, 503, 514-515
Pares ordenados
en ecuaciones lineales, 403
explicación de los, 67-68, 394, 395
gráficas de, 394, 425-426
iguales, 68
Parte
imaginaria, 308
real, 308
Partenón, 236
Pascal, Blaise, 659, 674
Patrones, 24, 107-108
de Fibonacci, 233-234
de Moiré, 497
de números
explicación de los, 12-14
y el método de las diferencias sucesivas, 10-11
y los números figurados, 14-16
Pearson, Karl, 724
Peirce, Benjamin, 285
Peitgen, H. O., 570
Pendiente(s)
de rectas, 405-408, 412
explicación de las, 405-406
positiva y negativa, 407
Pensamiento creativo, 25
Percentiles, 757-758
Pérdida de capital, 833
Perímetro, 512, 513
Periodo
de acumulación de una anualidad, 803
de ajuste, 826
de composición, 791
Permutaciones
explicación de las, 191, 647-648
fórmula factorial para las, 648
guías para el uso de las, 648, 649, 653
Peso, A-3
Peterson, Ivars, 199
Philosophiae naturalis principia mathematica (Newton), 127
Pi (*véase* π [pi])
Pierce, Charles Sanders, 113
Pirámide(s)
explicación de las, 538
tronco de las, 2
volumen y área de la superficie de las, 541
Pisano, Leonardo (*véase* Fibonacci)
Pitágoras 2, 14, 528
Planos, 494
paralelos, 494
que se intersecan, 494
Platón, 97
Playfair, John, 556
Plazo de una hipoteca, 822
Plimpton *322*, 524
Población, 724
Poliedros, 536-537
Polígonos, 502, 726
de frecuencia, 726
regulares, 502
Polinomios
cuadrado de, 375
en x, 372
explicación de los, 372-373
fórmulas para, 203
multiplicación de, 373-375
primos, 375
suma y resta de, 373
y factorización, 375-379
Polya, George, 20, 326

Pollaiolo, Antonio de, 509
Poncelet, Jean-Victor, 558
Póquer, 654
Porcentaje
  aumento y disminución en el, 300
  conversión de fracciones a, 297-299
  ecuaciones con, 328
  explicación del, 297
  y conversión entre decimales, 297
Posibilidades, 680-681 (*véase también* Probabilidad)
Posición estándar (normal) de un ángulo, 580
Postulados de Euclides, 556
Potencias
  de *i*, 308, 309
  explicación de las, 153
  términos en orden descendente, 373
Premisas
  de argumentos lógicos, 129-131, 141
  explicación de las, 3
Préstamo
  a plazo fijo, 806-807
  con pagos fijos, 822-826, 828
Primer componente en un par ordenado, 67
Primitivos geométricos, 49
Primos
  de Mersenne, 202, 203, 207
  de Sophie Germain, 209
  gemelos, 208-209
  primoriales, 209
Principal (capital)
  de transacciones con acciones, 836
  de un préstamo o depósito, 789
  de una hipoteca, 822
Principia Mathematica (Whitehead y Russell), 123, 124, 127
Principio
  aditivo de conteo
    especial, 666-667
    general, 667-668
  de los complementos de conteo, 665-66
    de probabilidad, 686-687
  fundamental de conteo,
    ejemplos del, 639-641
    explicación del, 637-638
    y el criterio de uniformidad para tareas de múltiples fases, 638
    y el ordenamiento de *n* objetos, 643
    y las factoriales, 642
Prismas, 538
Probabilidad
  binomial, 701-705
    ejemplos de, 704-705
    explicación de la, 701-703
    fórmula para la, 704
  condicional, 691-692
  de eventos que incluyen "no" y "o", 684-689
  de eventos que incluyen "y", 691-697
  definición clásica de la, 675
  empírica, 675-676, 734
  explicación de la, 673-675
  regla del complemento de la, 686-687
  teórica, 675, 677, 684-685, 718
  y el valor esperado, 707-711
Problema
  de los cumpleaños, 697
  de los puentes de Königsberg, 561
  del agente viajero, 642
Proceso de resolución de problemas de Polya, 20-21
Producto
  cartesiano de conjuntos, 68-70
  de números reales, 258
  de suma y diferencia de dos términos, 374-375
  explicación de, 258-259
Programación
  de pagos, 824
  lineal, 484-485
Promedio, 275, 332
Propiedad(es)
  asociativas
    de la multiplicación, 65, 263
    de la suma, 65, 263
    explicación de las, 179 181
    y el sistema del reloj de 12 horas, 221
  conmutativas,
    de la suma, 65, 263
    del producto, 65, 263
    explicación de las, 179, 180
  de cierre o clausura, 179, 180, 263
  de congruencia
    ángulo-lado-ángulo (ALA), 524
    lado-ángulo-lado (LAL), 524
    lado-lado-lado (LLL), 524
  de densidad, 275-276
    de la multiplicación, 263
    de la suma, 263
    explicación de las, 180
    y el sistema del reloj de 12 horas, 221
  de la multiplicación
    en desigualdades, 354-355
    en la igualdad, 315-317
  de la suma
    de desigualdades, 352-354
    de igualdades, 315-316
  de las longitudes de los lados de un triángulo, 611
  de semejanza ángulo-ángulo (AA), 526-527
  del inverso
    de la multiplicación, 263
    de la suma, 263
    en la aritmética del reloj, 222
    explicación de las, 180
  distributivas
    de la multiplicación, 182, 263
    de la suma, 263
    explicación de las, 65, 162-167, 181-183, 316
    forma general de las, 182
    y las ecuaciones lineales, 316-318
  fundamental de los números racionales, 270
Proporción
  ejemplos de la, 341-343
  explicación de la, 340
Proposición(es)
  componentes, 95
  compuesta, 95-96, 113, 116
    bicondicional, 126-127
    explicación de, 95
    y circuitos, 119
  condicional, 113-118, 123-127
    características de las, 115
    explicación de las, 113-114
    negación de, 117-118
    recíproca, inversa y contrapositiva, 123-125
    tablas de verdad para, 115-117, 127
    y formas alternas de "si p, entonces q", 125-126
    y la bicondicional, 126-127
  directa, 123, 124
  equivalente, 109-110
    explicación de las, 109-110, 124
    y los circuitos, 119
  explicación de las, 95-96
  matemáticas, 104-105
  negación de las, 96, 98
Prueba
  de los productos cruzados, 270, 271
  t de Student, 724
Ptolomeo, Claudio, 582, 587
Publicaciones matemáticas, 40-41
Publicidad, falacias en la, 143-144

Punto(s), 492-493, 829
de fuga, 340
de reflexión, 549
decimal, 301, 367
invariante, 546
extremos, 494
Puntuación z, 756-757

Q

Quinto postulado de Euclides, 556-557
Quipú, 156

R

Racionalización del denominador, 289
Radicales, 288
con raíz cuadrada
forma simplificada de, 288
suma y resta de, 289-290
semejantes, 289
Radicando, 288
Radio, 396, 505
Radiolaria, 537
Raíces cuadradas
explicación de las, 287
regla del cociente para las, 288-290
regla del producto para las, 287-288
Ramanujan, Srinivasa, 208
Rango
explicación del, 425, 748-749
intercuartil, 761
medio, 761
semi-intercuartil, 761
Rayos, 493, 494
Razón
áurea, 235-236, 384
común, 802
explicación de la, 339-340
precio
a ingresos, 835
-ganancia, 835
Razonamiento
deductivo, 2, 3, 14, 129, 725
explicación del, 2, 3, 129
para determinar una suma de números naturales, 14
uso del, 275
indirecto, 139
inductivo, 2-7, 10-16, 129, 724-725
conclusiones falsas a partir del, 4
ejemplos de, 3, 5, 724-725
errores del, 5-6, 60
explicación del, 2, 129
fundamento histórico del, 2
resolver problemas por medio del, 2-7, 10-16, 107-108
y los patrones de números, 10-16
por transitividad, 140
Recíproco, 252-253, 263
de una proposición, 123
del teorema de Pitágoras, 529-530
Recorde, Robert, 250
Recta(s)
de mínimos cuadrados, 778-779, 781
de regresión estimada, 778
de simetría, 547
horizontales, 406, 416
inclinadas, 494
paralelas
explicación de las, 493, 497
pendientes de las, 407
perpendiculares, 407-408
que se intersecan, 493
secantes, 505
verticales, 406, 416
Rectángulo
área de un, 514
áureo, 512
explicación de, 503
perímetro de un, 512
Redes, 561-562
Reducción al absurdo, 284
Refinanciamiento, 829
Reflejo de una imagen, 545-546
Reflexión(es), 549, 551
desplazamiento de la, 545-547
explicación de la, 545-547, 551
producto de dos, 547
Regiomontanus, 613
Región de solución factible, 484
Regla
de la falsa posición, 317
de la multiplicación de probabilidades
especial, 694-697
general, 692-694
de la potencia, 364-365
de la suma de probabilidades
especial, 688-689
general, 687-688
del *70*, 798
del *78*, 815, 817-819
del cociente
para exponentes, 363-365
para raíces cuadradas, 288-290
del doble negativo, 252-253
del producto
para exponentes, 361-362, 365
para raíces cuadradas, 287-288
empírica, 764-765
especial
para la multiplicación de probabilidades, 694-697
para la suma de probabilidades, 688-689
general de la multiplicación para probabilidades, 692-694
general de la suma de probabilidades, 687-688
en genética, 678-679, 682, 683
posibilidades, 680-681
propiedades de la, 685-686
regla especial de la multiplicación de la, 694-697
regla especial de la suma de la, 688-689
regla general de multiplicación de la, 692-694
simulación para estimar la, 716-719
teórica, 675, 677, 684-685, 718
y la ley de los grandes números, 677-678
Regresión, 723, 778-779
Relación de tiempo, fórmula para la, 332, 333
Relaciones
explicación de las, 423
gráfica de, 425-426
y las funciones, 423-425
Reloj de ajedrez, 223
Rendimiento
actual, 835
anual, 795-796
efectivo, 795-796
de la inversión, 833
Resolver problemas (*véase también* Soluciones)
cálculos a alta velocidad para, 1
estrategias para, 20-25, 326
la importancia de concentrarse en, 22
por medio de la estimación, 33
por medio de la lectura de gráficas, 33-34
por razonamiento inductivo, 2-7, 10-16
usando cálculos, 31-33
Resta
de decimales, 294
de números racionales, 272
de polinomios, 373
definición de la, 258
en la aritmética del reloj, 221-223
en sistemas modulares, 224-225
símbolo de la, 259
Resultados, 674
Richter, P. H., 570
Riemann, Georg Friedrich, 558, 559, 563
Riese, Adam, 257

Rivest, Ronald L., 195, 197
Rombo, 503
Rompecabezas lógicos
  ejemplos de, 148-149
  explicación de los, 104, 133
  soluciones de los, 133-135
Rotación
  explicación de la, 548-549, 551
  magnitud de la, 548
Rubik, cubo de, 630
Ruleta, 710
Russell, Bertrand, 87, 113, 123, 124, 127
Ruth, Babe, 393

S

Saccheri, Girolamo, 556-557
Sagan, Carl, 448, 695
Sanción por pago anticipado, 828
SEC, Comisión controladora de acciones y valores (Securities and Exchange Commission), 837
Secante, 582
Secciones cónicas, 441
Segmentos, de recta, 493, 577
Segundo
  componente en un par ordenado, 67
  como una medida de ángulos, 579
Seguro del propietario, 825
Semicircunferencias
  ángulos inscritos en, 506
  explicación de las, 250, 505
Semicuartil, 761
Semirrectas, 492-493
Senoide, 620
Senos
  amplitud de los, 622-623
  explicación de los, 582
  ley de los, 609-611
Sentido común, 25
Seudoesfera, 558
Shallit, Jeffrey, 199
Shamir, Adi, 195
Shanks, William, 286
Shannon, Claude, 118
Signo de porcentaje (%), 297
Silogismo disyuntivo, 140
Símbolo(s),
  de radicales, 289
  explicación de los, 152
  para desigualdades, 58
  para el conjunto vacío, 51
  para igualdades, 250, 251
  para infinito, 52
  para intersecciones, 63
  para operaciones básicas, 259
  para puntos, rectas y planos, 492-494
  para subconjuntos, 58
  usados con lógica, 96-97
Simetría
  de la curva normal, 765
  de un cuadrado, 187-189
  en conjuntos de datos, 742
Simulación
  estimación de probabilidades por medio de la, 717-719
  explicación de la, 716-717
Sistema(s)
  binario, 171-173
  coordenado, 580-581
  criptográficos, 201
  de coordenadas rectangulares, 394-396
  de numeración
    antecedentes históricos de los, 152, 248
    del antiguo Egipto, 153-155, 285
    explicación de los, 152
    indoarábigo, 157-158, 248, 319
    tradicional chino, 155-157
  decimal 164
  del reloj de 12 horas, 220-223
  duodecimal, 177
  hexadecimal, 172-175
  indoarábigo
    aritmética en el, 160-167, 257
    explicación del, 157-158, 169, 248
  inglés, A-4, A-5
  lineales
    aplicaciones de, 464-470
    con dos variables, 456-460
    con tres variables, 461-463
    gráficas de, 457, 461-462
    método de eliminación para resolver, 458-460. 462, 476
    método de sustitución para resolver, 459
    operaciones con filas para resolver, 476-480
  matemáticos
    explicación de los, 152
    finitos, 179-183
    grupos como, 186
  matemáticos finitos
    explicación de los, 179, 220
    y la propiedad asociativa, 179
    y la propiedad conmutativa, 179
    y la propiedad de cierre o clausura, 179
    y la propiedad de la identidad, 180
    y la propiedad del inverso, 180
    y la propiedad distributiva, 181-183
  métrico
    área en el, A-1, A-2
    conversión a y desde el, A-4, A-5
    explicación del, A-1
    longitud en el, A-1, A-2
    peso en el, A-3
    temperatura en el, A-3, A-4
    volumen en el, A-1-A-3
  modular
    explicación de, 223-227
    y los cambios cíclicos, 225
  octal, 172-175
Sitios de Internet, 45
Smullyan, Raymond, 104
Soluciones (*véase también* Resolver problemas)
  a problemas aplicados, 326-334
  de ecuaciones, 315
Somerville, Mary, 686
Sperbeck, Jeff, 143
Sperry, Pauline, 613
Stevin, Simon, 276
Stirling, James, 671
Subconjunto(s)
  de conjuntos, 57-60
  número de, propios, 60
  números cardinales de, 76
  números de, 60
  propios, 58-60
  símbolo para, 58
Sucesión(es)
  aritmética, 10
  de Fibonacci, 10, 21, 22, 232-234
  de Lucas, 238
  de números, 10-11
  geométricas, 10, 802-803
Suma
  de cubos, 378-379
  de decimales, 294
  de número reales, 257-258, 262-264
  de números racionales, 272
  de polinomios, 373
  elemento identidad para la, 65, 263
  en un sistema modular, 224-225
  propiedades de la, 65, 263-264
  símbolo para la, 259
Symbolic Logic (Carroll), 40

T

Tabla, 21-22, 329-331
  de la curva normal, 765-767
  de Napier, 165

de operación, 179
de productos, 630-631, 634
de verdad
análisis de argumentos con, 136-143
construcción de, 105-109
explicación de las, 102
para determinar los valores de verdad de proposiciones matemáticas, 104-105
para la conjunción, 102
para la disyunción, 103
para la negación, 103, 115
para proposiciones bicondicionales, 127
para proposiciones condicionales, 113-117
resumen, 127
Tales, 506
Tangente, 505, 582
Tangramas, 503
Tartaglia, Niccolo, 383
Tasa(s)
anual
de interés (TAI), 813-815
de rendimiento, 841, 842
de rendimiento
anual, 841, 842
real, 847
nominal, 795
promedio de cambio, 408
real de rendimiento (TRR), 847
tope
de pago, 828
global, 828
periódica, 828
de interés
ecuaciones con, 328
explicación de las, 789
topes en las, 828
Tautologías, 116
Teaching Children Mathematics, 42-44
Temperatura, A-3, A-4
Teorema(s), 199, 506
de Desargues, 564
de factorización única, 200
de Lasker-Noether, 223
de Pitágoras
aplicaciones del, 601, 604
demostración del, 528
explicación del, 3, 209, 527-529
recíproco del, 529-530
y la fórmula de distancia, 394, 395
del binomio, 660-661
fundamental de la aritmética, 199, 200
Teoría
de conjuntos
símbolos y terminología para la, 50-53
y conjuntos infinitos y sus cardinalidades, 83-88
y diagramas de Venn y subconjuntos, 56-60
y números cardinales y encuestas, 76-79
y operaciones con conjuntos y productos cartesianos, 63-72
de gráficas, 561-562
de las catástrofes, 569
de los números
explicación de la, 196
y el máximo factor común, 212-215
y el mínimo común múltiplo, 215-218
y el último teorema de Fermat, 209
y la aritmética del reloj, 220-223
y la conjetura de Goldbach, 206-209
y la regla áurea, 235-236
y la sucesión de Fibonacci, 232-234
y los números deficientes y abundantes, 207-208
y los números perfectos, 106-207
y los números primos y compuestos, 196-203.
y los sistemas modulares, 223-227
Términos más simples, 270
Terna
ordenada, 461
pitagórica, 529
Tetraedros, 536
The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers (Wells), 210
The Pythagorean Proposition (Loomis), 528
The Whetstone of Witte (Recorde), 250
Thom, René, 568, 569
Tomografía de impedancia eléctrica (TIE), 491
Tope en la tasa de interés, 828
Topología, 559-560
Toro, 538, 561
Trabajar de atrás hacia adelante, 22-23
Trabajos de investigación, 41, 45
Tractriz, 558
Transformaciones
de tamaño, 549-551
explicación de las, 546
Transportadores, 495
Transversales, 497, 498
Trapecios, 503, 515
Traslación
de gráficas, 436
explicación de la, 548-549, 551
idéntica, 548
Triángulo(s)
acutángulos, 503
área del, 516, 615
congruentes, 523-526
de Pascal, 45, 239, 658-660
actividades usando el, 45
explicación del, 239, 658-660
equiláteros, 503
escalenos, 503
explicación de los, 502
isósceles, 503, 525
oblicuos, 608-609
obtusángulo, 608-609
perímetro de los, 512
rectángulos
aplicaciones de los, 600-605
explicación de los, 503, 591
y los valores funcionales, 591-598
semejantes, 525-527
suma de ángulos de los, 504, 573
tipos de, 503
uso de la trigonometría para resolver, 603-604
Trigg, Charles, 242
Trigonometría
antecedentes históricos de la, 576, 578, 582, 587
triángulos rectángulos y valores de funciones, 591-598
y el círculo unitario y las gráficas, 620-624
y la ley de los senos y de los cosenos, 608-616
y las aplicaciones de triángulos rectángulos, 600-605
y los ángulos y sus medidas, 577-581
Trinomio(s)
cuadrado perfecto, 377
explicación de los, 373
factorización de, 376-377
Tronco de una pirámide, 2
Trucos con cartas, 227-228
Tsu, Ch'ung-chih, 283
Tukey, John, 724

U

Último teorema de Fermat, 209
Unión de conjuntos, 64-66, 70
Universal Algebra (Whitehead), 123
Universo del discurso, 56

V

Valor(es)
  absoluto, 253-254
  al vencimiento, 790
  continuos, 768
  de funciones trigonométricas, 626-627
  de verdad
    de conjunciones, 102
    de proposiciones matemáticas, 104-105
    explicación de los, 95, 104
  del dinero en el tiempo
    explicación del, 789
    y el interés, 789-796
    y la inflación, 796-798
  discretos, 768
    en comparación con continuos, 768
  esperado
    ejemplos que incluyen el, 708-711
    en los juegos de azar, 712-713
    explicación del, 707-708
  futuros
    de anualidades, 803-804
    de anualidades anticipadas, 805
    explicación de, 790, 791
    para el interés compuesto, 793-795, 797-798
  monetarios, 331-332
  neto de los activos en un fondo mutuo, 840-841
  nominal, 157, 838
  presente(s)
    explicación de, 790-791
    para el interés compuesto, 793-795
  relativo, 157
Variable(s)
  aleatoria, 689
    continuas, 763
    discretas, 763
    explicación de las, 689
  dependiente, 423
  específica, resolver una, 320-321
  independiente, 423-425
Variación
  coeficiente de, 761
  combinada, 347
  constante de, 343
  directa, 343
    como potencia, 344-345
    explicación de la, 343
  explicación de la, 343
  inversa, 345
  y la resolución de problemas, 344-347
Varianza, 750
Varillas de Napier, 165, 166
Velocidad de un automóvil, 303
Venn, John, 56
Vértice(s)
  de un ángulo, 494, 577
  de una parábola, 435, 437, 440
  explicación de los, 485, 561
  fórmula para los, 438
  impar, 562
  par, 561
Vida media, 451
Viète, François, 318
Vinson, Jade P., 539
Voltaire, François, 52, 107, 129
Volumen
  de un cilindro circular recto, 539-540
  de un cono circular recto, 541
  de una caja, 538-539
  de una esfera, 540
  de una pirámide, 541
  en el sistema métrico, A-1, A-3
  explicación del, 538
von Linneo, Carl, A-4

W

Wallis, John, 52,
Wells, David, 210
Whitehead, Alfred North, 123, 127
Wilansky, Albert, 206
Wiles, Andrew, 209

Y

Yin-yang, 170
Yorke, James A., 568
Yu, emperador chino, 240

Índice de aplicaciones

Astronomía

Contaminación en el sitio de lanzamiento del transbordador espacial, 699-700
Datos astronómicos, 371
Distancia a las estrellas, 576
Distancia de los planetas al Sol, 371, 693, 698
Distancia de un objeto a la Luna, 371
Ventas de la industria aeroespacial, 392
Lanzamiento de cohetes, 371, 707
Millas en un año luz, 371
Órbita del cometa Halley, 438
Órbitas elípticas, 346
Peso de un astronauta, 346
Presupuesto de la NASA, 370
Revoluciones de mercurio, 38

Automóvil

Cobro por reparaciones automotrices, 747
Lecturas en odómetros, 230
Matrículas de automóviles, 640, 670
Mezcla anticongelante, 337, 474
Módulos de control de un motor, 754
Número de millas recorridas en auto al mes, 768-769
Producción de automóviles, 255
Reconstrucción de un accidente, 292
Registro de vehículos de motor, 370
Resbalamiento de un automóvil, 352, 387
Ser detenido por exceso de velocidad, 706
Ventas de automóviles, 335
Vida útil de neumáticos, 760

Biología y ciencias de la vida

Abejas macho, 234
Actividades de un animal nocturno, 626
Alturas de abetos, 786
Ballenas jorobadas, 268-269
Clasificación de huevos por tamaño, 771
Correlación entre fertilizante y tamaño de la espiga de maíz, 783
Crecimiento de un lirio acuático, 28
Distancia entre átomos, 617
Doble espiral de una margarita, 234
Edad, 26, 30, 327, 464, 763
Estaturas y pesos de hombres adultos, 783
Estudios forenses, 433
Genética, 678-679, 682
Germinación de semillas, 682
Hermanos, 30, 725-726
Investigación sobre dinosaurios, 389
Lenguas habladas por los estadounidenses, 746
Manada de camellos, 23-24
Masas de muestras geológicas, 733
Números de identificación en una investigación, 656
Pajarera para golondrinas, 33
Peces, 342, 349, 352, 771
Perfil del ADN, 629
Pesos de animales, 269, 351, 770
Piñas de pinos, 234
Producción de plantas de guisantes, 716-717, 719
Rana que escala la pared, 28
Reproducción de conejos, 21-22
Salto de una pulga, 5
Supervivencia de naranjos a heladas, 706
Tamaño de un acuario para nutrias marinas, 433
Violetas africanas, 37

Construcción

Altura de un edificio, 533, 607
Altura de una torre, 255, 533, 534, 607
Análisis de un préstamo al consumidor, 849
Ángulo entre vigas y cables, 618
Área de la Capilla Sixtina, 38
Arrendamientos, 357
Cantidad requerida de pintura, 619
Carga máxima de una columna con sección circular, 347
Cargo de la deuda en los consumidores, 305
Compra y venta de un barco, 305
Consumo de electricidad, 432
Contratista de acabados, 227
Costo, 348, 433, 473, 487, A-6
Costo promedio de vivienda, 282
Decisiones de un contratista con base en las ganancias esperadas, 715
Descuento, 302
Dimensiones de una lámina metálica, 389
Diseño de una casa de juguete, 618
Distancia determinada por una topógrafa, 613
Distancia entre puntos de una grúa, 618
Dividir un tablón en pedazos, 327-328
El Partenón, 236
Empaques de los productos para el consumidor, 747
Escalera inclinada, 388, 529, 606
Ferretería, 30, 475
Inclinación de la tribuna superior, 411
Inclinación de una rampa, 411

Deportes y entretenimiento

Ajedrez, 223, 636
Apuestas en una carrera, 22-23
Artículos para practicar deportes en equipo, 299
Asientos en un teatro o en un concierto, 633, 641, 645-646
Asistencia a un evento, 337, 338
Baloncesto, 48, 83, 312, 335, 656, 672, 701, 719, 731, 760-761

Béisbol, 29, 218, 277, 279, 280, 335, 393, 472, 628, 656, 705, 706, 737, 754, 786-787
Bolos, 135
Carrera de 100 metros para damas, 683
Carrera de *500* millas de Indianápolis, 333
Carrera de cangrejos, 402
Carreras, 219, 297, 338, 390, 655
Carreras de caballos, 657, 684, 746
Cata de vinos, 81
Cenas fuera de casa, 636, 645, 669
Clavados, 749
Conteo de manos de cartas, 657
Deportes favoritos entre estudiantes, 734-735
Espectáculos de Broadway, 324, 669
Estrategia en el juego de tres en línea, 26
Eventos de pista, 760
Excursionismo, 268
Éxitos de taquilla de Julia Roberts, 490
Futbol, 33, 38, 218, 269, 731, 762-763
Ganadores de premios, 696-697
Ganancias esperadas, 709, 714, 715, 716
Golf, 641, 690, 722
Hábitos de los televidentes de deportes, 82
Índice de costo del aficionado, 473
Ingresos de conciertos, 335
Intercambio de estampas, 37
Juegos de azar, 710, 712-713, 714, 715, 716
Lectura, 657
Manos de póquer, 651, 654, 656, 670, 677, 683, 690
Música, 77-78, 81, 470-471, 656-657, 669, 681, 684
Nado estilo libre, 314, 333
Niños en un parque de diversiones, 714-715
Olimpiadas, 326-327, 338, 349, 359, 424, 475, 746-747
Pantallas de cines al aire libre, 336
Patinaje de velocidad de 500 metros, 321-322
Películas, 81, 217
Pesca, 760
Porcentaje de ganados, 301, 304
Precios y venta de boletos, 324, 465-466, 473, 474, 475, 476
Preescolares en un parque, 643
Profundidades al bucear, 269
Programas de noticias, 470
Puntuación en triominos, 269
Renta de videos, 313, 336
Televisión, 336, 687, 731
Tiempo de descenso en esquí de una colina, 269
Tina de remojo, 148-149
Tiro de dardos, 683
Truco de cartas, 227-228

Economía

Acciones, 56, 305, 711, 833-835, 841-844, 846, 849
Año de graduación de preparatoria, 29
Asistencia, 689
Ausencias en la clase de matemáticas, 714
Ayuda financiera a estudiantes, 81, 93
Cálculo de una calificación perdida, 747
Calificación de los estudiantes, 658, 771
Calificación mínima para aprobar, 302
Calificaciones de exámenes, 730, 740, 745, 747, 757, 765, 786
Cambio del valor de la libra británica, 776
Categorías en el cuerpo docente de una universidad pequeña, 777
Comparación entre el sexo y la inclinación por una profesión en los estudiantes universitarios, 698
Correspondencia entre educación e ingresos, 733
Créditos escolares acumulados, 731
Devolución de impuestos, 74
Disminución en el poder de compra del dólar, 397
Distancia a la escuela, 731

Educación

Elección de tareas escolares, 669
Encuesta a estudiantes, 90-91
Ensayos de inglés, 643
Estudiantes por computadora, 410
Estudiantes que disfrutan la música y la literatura, 670
Estudiantes que poseen computadora personal, 706
Examen de opción múltiple, 698, 706
Formar en línea de niños de preescolar, 681
Fraternidad Alfa-Beta-Gamma, 652
Fuentes primarias de energía, 732
Gastos escolares, 729-730
Grados de licenciatura obtenidos, 454, 666-667
Habilidad de lectura, 783
Horas de estudio, 726-727, 728, 734, 742, 759
Importaciones de petróleo de Estados Unidos, 425
Impuesto sobre la venta, 348
Impuestos a los rendimientos de inversiones, 846
Impuestos sobre la propiedad, 302
Índice de precios al consumidor, 350, 396, 732
Influencia de la monedas españolas en los precios de las acciones, 273
Informe oral, 694
Inscripción y colegiaturas, 401, 420
Inversiones en bonos, 838-839, 845
Matrícula en colegios de dos años, 401
Matrícula escuelas públicas, 410
Matrimonios entre miembros del cuerpo docente y estudiantes, 777
Monedas de cobre de Estados Unidos, 280
Mujeres en las matemáticas, 48
Necesidad de maestros para quinto grado, 37
Objetivos de los estudiantes, 82
Oferta y demanda, 389
Posiciones relativas en un examen, 760, 761
Preguntas sin responder en un examen de matemáticas, 730
Probabilidad de que los estudiantes capacitados ingresen a la universidad, 706
Producto interno bruto, 732
Puntos promedio de calificaciones, 359, 391, 736, 746
Puntuaciones de exámenes, 356-357
Puntuaciones del IQ, 731, 770, 783
Reportes de clase, 684
Selección de aulas, 662
Selección de comités de la facultad, 669
Selección de respuestas en un examen, 645
Selección de un calendario de clases, 645, 684
Tarea, 688-689
Tasa de cambio, 27, 348
Tasa de inflación, 796-798, 800, 801
Tasa de interés, 389
Valor de las monedas, 25, 28, 305, 336

Estadística y demografía

Área y población de la Comunidad de Estados Independientes, 746
Censo, 724
Comparación de las poblaciones de los estados con los salarios de sus gobernadores (en Estados Unidos), 784

Envejecimiento de la población de Estados Unidos, 723
Estadística en la migración de personas hacia el Oeste, 784
Habitantes por milla cuadrada, 37
Inmigrantes en Estados Unidos, 280
Llenado de un cuestionario, 659
Población, 255, 300, 302, 305, 454

Finanzas
Fondos mutuos, 839-841, 842, 845, 846
Hipoteca de tasa ajustable, 826-828, 831, 832, 849
Hipoteca de tasa fija, 829-830
Intensidad de un terremoto, 455
Interés compuesto, 446-447, 450, 793-795
Interés generado, 336, 351, 793, 799
Interés no devengado, 816-818, 819, 820, 821
Interés simple, 790, 798, 799
Inversión, 292, 328, 330-331, 337, 444, 446-447, 450, 453, 473, 474, 49, 710-711, 838-842, 844, 845, 846
La fortuna de Adán y Eva, 29
Mezcla de insecticida, 337
Monedas de medio centavo, 338
Monto de liquidación de un préstamo, 816-818
Pago mensual de una compra, 806, 810, 820
Pagos mensuales de una hipoteca, 822-828, 831, 849
Pedir un préstamo, 799
Pérdida de bosques y contaminación atmosférica, 745
Planes de retiro, 255, 733, 788, 797
Préstamo con interés añadido, 810
Presupuesto para la compra de un automóvil, 310
Principal total e interés sobre una hipoteca, 831
Profundidad de mares y alturas de montañas, 255, 268, 534, 608
Rayos solares ultravioleta, 247
Rendimiento anual efectivo, 795, 800, 849
Resultados netos de transacciones combinadas, 844
Sanción por pago anticipado, 821
Sitios de desechos peligrosos, 455
Tasa anual de interés, 814-815, 820, 821, 849
Tasa nominal de una cuenta de ahorro, 800
Tasa real de rendimiento, 847
Techo de nubes, 607
Temperatura, 265, 268, 359, 421-422, 625, 731, 734, 783, A-3, A-4, A-6
Transacciones bancarias, 302-303
Valor futuro, 790, 793-794, 798, 799, 849
Valor presente de una cuenta, 800, 801, 849
Viento helado, 255

Física
Altura de un proyectil, 386, 387, 443
Ángulo formado que forman los radios de engranes, 617
Cuerpo que cae, 345, 351
Estallido supersónico, 440
Fuerza necesaria para comprimir un resorte, 351
Iluminación con una fuente de luz, 351
Ley de Hooke para un resorte elástico, 344
Ley de tensiones, 293
Objetos lanzados hacia arriba, 385
Periodo de un péndulo, 291
Tiempo que un objeto tarda en descender, 392
Tiempo transcurrido en un experimento de física, 745
Velocidad de la luz, 371
Velocidad del sonido, 332

Geometría
Altura de un triángulo, 607
Ángulo de elevación del Sol, 605, 607
Área de las islas hawaianas, 391
Área de un cuadrado, 523
Área de un cuadrilátero, 523, 574
Área de un lote, 520
Área de un triángulo, 291, 351, 619
Área de una región sombreada, 523
Área máxima, 440-441, 443
Cambio en el volumen, 544
Circunferencia de un domo, 575
Conteo de triángulos, 672
Diagonal de un rectángulo, 575
Diagonal de una caja, 292
Diagonales de un paralelogramo, 618
Diámetro de un círculo, 522
Dimensiones de un caja de cartón, 389
Dimensiones de un cuadrado, 472
Dimensiones de un triángulo, 472, 475
Dimensiones de una región rectangular, 351, 388, 464-465, 472, 490, 519, 534
Doblar y desdoblar una caja, 26
Geometría constructiva de sólidos, 49
Longitud del lado de un cubo, 543
Longitudes de los lados de un gallardete, 520
Longitudes de los lados de un triángulo, 387, 534, 607
Perímetro de un cuadrado, 545
Perímetro de un polígono, 523
Perímetro de un triángulo, 522
Puntos, rectas y triángulos en un plano, 657
Radio de una cimentación circular, 520
Radio de una lata de aluminio, 291
Razón de áreas, 545
Razón de las longitudes de los lados, 545
Razones de volúmenes, 544
Rectángulos en una figura, 27
Rompecabezas geométrico, 30, 31
Tronco de una pirámide, 2
Unir triángulos y cuadrados, 26
Volumen de una caja, 544, A-6
Volumen de una esfera, 544

Gobierno
Afiliación de votantes, 475
Ayuda a víctimas de un terremoto, 487
Comités de senadores de Estados Unidos, 655, 698
Decodificación de información, 195
Delegación diplomática, 667
Elección, 631, 635, 639, 655, 681
Exportaciones de California, 311
Gasto nacional en salud, 369
Impuestos federales, 400, 776
Nombramiento de comités, 631, 65, 652, 653, 657, 662, 722
Oficinas postales en Estados Unidos, 420, 433
Población en edad de votar en Estados Unidos, 431
Precio de estampillas postales, 302
Presidentes de Estados Unidos, 54
Presupuesto de defensa de Estados Unidos, 267, 434
Presupuesto de Estados Unidos, 370
Principales socios comerciales de Estados Unidos, 472
Promesas de campaña, 63
Seguro social, 268, 443
Tasa de cobertura favorable de los medios para un candidato presidencial, 706
Violación de códigos, 197
Viviendas del ejército, 83
Votos en la campaña presidencial del año 2000, 335

Información al consumidor
Longitud de un alambre, 387
Longitud del lado de una ventana, 519
Madera, 219, 710
Materiales para construcción, 264-265
Medida de llaves de tuercas, 281
Mejor compra, 342-343, 518, 522
Mezcla de aceite para una sierra de cadena, 348
Monumento a los veteranos de Vietnam, 291, 516
Multas en la biblioteca, 489
Pago por un dulce, 29
Patrones en un piso con mosaicos, 637
Pendiente de un techo, 409
Precio de un acre de tierra, 37
Precios, 34, 306, 473
Precios de gasolina y combustible, 305, 422-423, 487
Recubrimiento de pisos, 514
Rentar o comprar de una casa, 848
Rentas, 359
Resistencia de una viga rectangular, 346-347
Selección de acondicionadores de aire, 420
Tamaño de la propiedad , 388
Tamaño de un aparato de aire acondicionado, 34
Tarifas de taxis, 359, 433
Torre Transamérica, 541
Ubicación de nuevos modelos de casas, 655, 656, 657
Verificar el ángulo recto en un piso que se construye, 530, 534
Vida útil de focos, 770
Vista en planta de una casa, 562

Ingeniería
Aproximación del par de torsión, 303
Caballos de fuerza de un motor, 303
Circuitos eléctricos, 118-120, 122, 391
Compuertas y celdas de memoria, 94
Configuración en un panel de interruptores, 644, 672
Costo de llenar un tanque esférico, 540, 544
Distancia para cruzar un lago, río, túnel o cañón, 607, 610-611, 617, 618, 628
Fórmula de electrónica, 291
Medidas por medio de triangulación, 619
Polvo en un hoyo, 30
Punto de fuga, 340
Selección de procesadores de computadoras, 658
Tensión de cables, 607
Tiempo que viaja una señal de radio, 391
Tomografía por impedancia eléctrica, 491
Velocidad de una computadora, 371

Interés general
¿Quién dice la verdad?, 29-30
"100 botellas de cerveza en la pared", 89
Acomodos al sentarse, 683
Agrupar monedas, 219
Alfabetización, 29
Algoritmo para un calendario perpetuo, 193-194
Altura, 388, 527, 534, 575, 605, 617, 627, 628,
Amigos imaginarios, 136
Apretones de manos, 636, 637
Árbol roto, 527
Arreglo de nueve puntos, 24-25
Asignación de tareas a miembros de un club, 644
Aves en una granja, 82
Baldes de agua, 27
Bodas, 658, A-6
Cajones para videocasetes, 37
Caminata aleatoria, 707, 720
Códigos postales, 645
Colecciones, 27, 80, 227, 230, 692-693
Combinación de un candado, 657
Comodidades, 313
Conteo de ganadores de premios, 655
Corbatas, 136
Cumpleaños, 23, 29, 269, 697
Datos sobre ciertos inventos, 92
Decisiones justas con base en monedas trucadas, 700
Detector mágico de la edad, 176
Determinación del día de la semana, 225, 230, 669
Determinación del rango de fechas, 230
Días en un mes, 30
Dimensiones del monte Rushmore, 533
Distancia al horizonte, 291, 292
División de personas en grupos, 657
Elección de un monograma, 656
Error en la medición, 608
Estatura, 29, 533, 605, 730
Formación de palabras a partir de conjuntos de letras, 672
Frecuencia de aparición de letras en el idioma inglés, 734
Hábitos culinarios, 81
Hacer pares de calcetines, 28
La paradoja del barbero, 87
Letras de denominación de una estación de radio, 656
Libros en un estante, 30
Longitud de una sombra, 607
Lotería, 371
Llenado de contenedores con alimento, 770, 771
Matrimonio, 134-135
Medidas de una silla plegable, 617
Mezcla de alimentos y bebidas, 474
Mezcla de monedas o billetes, 331-332, 337, 338
Montaje de una cámara de video, 607
Montones de talonarios, 230
Niños en el sembradío de calabazas, 135
Niños en un círculo, 28
Nivel de agua en una alberca, 424-425, 432
Nombres de las hijas, 28
Números de identificación personal en un cajero automático, 655
Números telefónicos, 31, 645
Páginas perdidas en un periódico, 48
Pago total del rey Salomón, 160
Paradojas de Zenón, 90
Pendiente de una colina, 409
Personajes favoritos de *Peanuts* (Charlie Brown), 313
Personas que reciben vales de comida, 412
Pesar monedas, 29, A-6
Pesca de ostras en Estados Unidos, 443
Peso de frascos de café, 753
Posición del haz de luz, 387
Preferencia de bebidas, 79
Programación del sistema automático para abrir una cochera, 700
Propiedad interesante de una sucesión, 28
Receta para sémola, 280
Relojes, 27, 28
Rompecabezas, 27, 28, 29, 30, 47
Saludo tipo palindrómo, 31
Selección de artículos, 62, 63, 636, 645, 653, 698
Silla de George Washington, 350
Simetría vertical en los nombres de estados, 26
Situaciones peligrosas, 673
Tamaño de un componente de juguete, 388
Tamaños de los agujeros en un queso suizo, 281
Valor de un tesoro bíblico, 160
Velas, 47, 350
Viernes 13, 231

Medicina
Anemia de células falciformes, 683
Cantidad diaria recomendada de vitaminas, 770
Casos reportados de influenza y pulmonía, 777
Comparación de tasas de mortalidad, 777
Concentración de alcohol en la sangre, 303
Costo de píldoras de vitaminas, 487
Dosis de medicina, A-6
Efectos negativos del alcohol y el tabaco, 73
Efectos secundarios de medicamentos por prescripción, 706
Equipos de búsqueda y rescate, 669
Fibrosis quística, 682, 722
Gasto al centavo en medicamentos de prescripción, 416-417
Hijos, 676
Índice de masa corporal, 351, 359
Información de ataques cardiacos, 372
Investigación farmacéutica, 411
Llenado de botellas con un medicamento, A-6
Mezcla de alcohol en un aerosol de primeros auxilios, 336
Nacimientos en Estados Unidos, 677, 682
Pagos de farmacias, 443
Quemar calorías, 56
Ritmo cardiaco objetivo, 360
Sida, 488
Síntomas de pacientes en el hospital, 82
Tiempos de coagulación de la sangre, 771
Umbral de peso, 292
Variación en la presión sanguínea, 626

Medio ambiente
Actividad de los tornados, 358
Análisis de una oferta de "90 días sin intereses", 812
Anualidad ordinaria, 804, 805
Años para duplicar una cuenta, 798, 800, 849
Aumento de mesada, 304
Balance de la cuenta de una tarjeta de crédito, 269, 730, 808-809, 810, 849
Balance en una cuenta de cheques, 268
Balance promedio diario de una cuenta, 811-812
Calentamiento global, 453
Capacidad de un relleno sanitario, 421
Cargos en una cuenta de tarjeta bancaria, 812
Cargos por financiamiento, 807, 810, 811-812, 820
Clima, 39, 701
Cómo dar cambio, 30
Comparación de tasas, 800, 813
Comparación entre opciones de préstamo, 821
Consumo de gas natural, 455
Costo de los puntos en un préstamo para una casa, 849
Costos de cierre en una hipoteca, 829, 832
Cuenta de ahorros, 794-795, 796
Depósitos, 790-791, 794
Desechos nucleares, 420
Desechos sólidos municipales, 454
Dinero gastado en un bazar, 28
Efecto invernadero, 450-451
Elevación, 255, 269
Emisiones de monóxido de carbono, 453
Epicentro en un terremoto, 399, 402
Financiamiento de una compra, 809

Negocios
Análisis beneficio/costo, 360
Análisis de punto de equilibrio, 430-431
Clientes de un restaurante, 757-758, 760
Comisión en bienes raíces, 490
Comisión por corretaje, 837-838, 845
Compañías más grandes de Estados Unidos, 472
Compras del supermercado, 699
Contactos de clientes de un representante editorial, 786
Descuentos y aumentos, 304
Distribución a un mayorista, 475
Duración de llamadas telefónicas de larga distancia, 767
Encuesta de marketing de un cereal, 755
Ganancias, 34, 714
Índice de precios del fabricante, 256, 264-265
Ingresos y gastos de Yahoo, 268
Inspección de calculadoras, 219
Modelos de costos e ingresos, 434
Negocios en quiebra en Estados Unidos, 311
Participación de mercado, 38, 456
Precios de mercancía, 349, 391
Problema del agente viajero, 643
Procedimiento en las propinas, 306
Producción, 469-470, 473, 475, 484-485, 487, 489
Publicidad, 143-145, 776
Rellenado de sobres, 434
Reproductores de CD, 655
Reunión en la sala de juntas, 62
Rótulos de cajas, 25
Servicio de copiado, 434
Servicio de limpieza de alfombras, 343
Servicio de reparto, 434
Valor de una máquina copiadora, 455
Valor esperado en cuentas de negocios, 716
Ventas, 312, 434, 490, 714, 736, 783
Ventas de libros, 219, 312, 335, 412, 454, 651

Números
Alfamétrica, 27
Conteo, 637, 644, 645, 669
Creación de numerales a partir de conjuntos de dígitos, 636, 644-645, 657, 672, 684, 690, 722
Cuadrado mágico, 29, 240-245
Cuadrado perfecto, 27
Determinación de operaciones, 31
Dígito de las unidades de un producto, suma o potencia, 28, 47, 48
Dígitos decimales, 30
Dígitos finales de una potencia de 7, 28
Enteros que contienen el dígito *2*, 636
Idear un problema de suma correcta, 47
Número de Froude, 389
Número de pulgadas en una milla, 371
Número perfecto, 28
Números aleatorios, 684, 715
Números desconocidos, 28, 30
Números generados por ruletas, 681, 690
Números octagonales, 47
Números palindrómos, 27, 684
Números primos, 684
Puntos de retícula, 636-637
Rompecabezas numérico, 27
Sucesión de Fibonacci, 30, 47, 232-234, 245
Suma de dados, 26
Sumas de cuadrados perfectos, 26
Sumas de dígitos, 636, 655, 658, 672
Triángulo de Pascal, 46
Triángulos de diferencias, 26

Probabilidad
Comparación de la probabilidad de nacimiento de niña y de niño, 18, 719, 722
Extracción de bolas de una urna, 681, 690, 695
Extracción de cartas, 656, 668, 670, 683, 686, 688, 689, 694, 695, 699, 700, 713, 719, 721, 722

Lanzamiento de monedas, 660, 662, 665, 669, 672, 676, 678, 681, 682, 685, 698, 704, 705, 707, 708-709, 713, 714, 717, 718, 728
Lotería, 656, 709
Lotería (de todo o nada), 680
Probabilidad de lluvia, 680
Rifa, 680
Sexo en una sucesión de bebés, 682, 692, 699, 700, 704, 705, 706, 708
Tiro de dados, 644, 669, 682, 685, 689, 690, 698, 701, 704, 705, 722
Tomar canicas de colores de cajas, 690

Química
Cristales de sal, 537
Degeneración del plutonio-241, 490
Dinámica molecular, 1
Disolución de azúcar en agua, A-6
Mezcla de ácidos, 328, 329-330, 336, 466-467, 473, 474
Mezcla de alcohol, 336, 473
Mezcla química, 337, 391
Muestras de minerales, 454-455, 770
Peso del helio, A-6
Presión de un gas o un líquido, 351
Punto de ebullición del cloro, 255
Sal en agua de mar, 537
Vida media, 451

Tecnología
Crecimiento del correo electrónico, 38
Gráficas tridimensionales por computadora, 49
Hogares con varias computadoras personales, 408
Opciones de configuración en una impresora, 633, 636
Precios de computadoras personales, 39
Precios de monitores para computadoras, 473
Sitios de la Web más visitados, 744-745
Suscriptores a telefonía celular, 412

Trabajo
Comités, 652, 657
Comparación de datos de empleo, 257
Costo del trabajo, 521
Días de descanso, 245, 722
Edad *vs.* ingreso, 778-781
Empleados de Wal-Mart, 371
Empleados, 78-79, 777
Fuentes de capacitación laboral, 733
Ganancia por hora en la industria privada, 282
Granjas, 33, 785
Ingreso de los afroamericanos, 489
Mecánicos de un taller automotriz, 695-696
Mediana del ingreso, 421
Miembros de un sindicato, 275, 305, 707
Mujeres en profesiones de matemáticas y de ciencias de la computación, 399
Niveles de pobreza, 401
Noche de descanso de guardias de seguridad, 219
Orden en entrevistas de trabajo, 700
Posibilidades de trabajos en electrónica en una ciudad, 715
Programación de asistentes de vuelo, 230
Salario, 737, 738-739, 745, 748
Tasa de desempleo, 732
Tasas anuales de cambio en empleo, 254
Tiempo de trabajo *vs.* tiempo para una tarea, 782
Trabajos de verano, 680
Visitas del equipo de seguridad, 655

Viajes
Altura de un aeroplano, 269, 311
Averías en motores de una aeronave antigua, 701
Costos de viaje, 473
Cruce de un río, 29
Distancia entre automóviles, 333-334
Distancia entre ciudades, 338, 348, 391, 533
Distancia recorrida, 230, 339, 384-385, 388, 607
Dormirse en el trayecto a la casa de la abuela, 27
Duración de un viaje redondo, 37
Ingreso máximo por tarifas de boletos en una aerolínea o en un autobús, 444
Lugar para sentarse en un avión, 666, 669
Monumentos nacionales de Estados Unidos, 670
Número de rutas de un punto a otro punto, 656
Pendientes de las carreteras, 406
Selección de conductores y pasajeros para un viaje, 657
Tasa de cambio, 332
Tiempos de viaje, 339
Vacaciones en Washington D.C., 62
Velocidad, 303, 338, 351, 391, 468-469, 474
Viaje en un bote de pedales, 351

Matemática: razonamiento y aplicaciones permanece fiel a su pedagogía y a sus características. Presentamos esta décima edición con un enfoque fresco y moderno, y deseamos que continúe inspirando tanto a estudiantes como a profesores.

Nuestros principales objetivos son la presentación exhaustiva de los temas, la correcta organización, una exposición clara así como abundantes ejemplos y conjuntos de ejercicios bien planeados con numerosas aplicaciones.

Hemos trabajado diligentemente para incorporar las recomendaciones de los *Programas y Estándares de Evaluación de Matemáticas Escolares*, preparados por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) y los *Estándares para Matemáticas Introductorias Universitarias Previas al Cálculo*, presentados por la American Mathematical Association of Tow-Year Colleges (AMATYC).

PEARSON Educación®

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net

ISBN 970-26-0752-3
90000
9 789702 607526