Demana
Waits
Foley
Kennedy

Precálculo

Gráfico, numérico, algebraico

SÉPTIMA EDICIÓN



PEARSON
Addison Wesley

Fórmulas de álgebra

Exponentes

Si todas las bases son diferentes de cero:

$u^m u^n = u^{m+n}$ $\qquad \dfrac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$

$u^0 = 1$ $\qquad u^{-n} = \dfrac{1}{u^n}$

$(uv)^m = u^m v^m$ $\qquad (u^m)^n = u^{mn}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)^m = \dfrac{u^m}{v^m}$

Radicales y exponentes racionales

Si todas las raíces son números reales:

$\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$ $\qquad \sqrt[n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}}$ $(v \neq 0)$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[mn]{u}$ $\qquad (\sqrt[n]{u})^n = u$

$\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$ $\qquad \sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| & n \text{ par} \\ u & n \text{ impar} \end{cases}$

$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}$ $\qquad u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m$

$u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}$

Productos especiales

$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$

$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$

$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$

$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$

Factorización de polinomios

$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$

$u^2 + 2uv + v^2 = (u + v)^2$

$u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2$

$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$

$u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$

Desigualdades

Si $u < v$ y $v < w$, entonces $u < w$.

Si $u <$ v, entonces $u + w < v + w$.

Si $u < v$ y $c > 0$, entonces $uc < vc$.

Si $u < v$ y $c < 0$, entonces $uc > vc$.

Si $c > 0$, $|u| < c$ es equivalente a $-c < u < c$.

Si $c > 0$, $|u| > c$ es equivalente a $u < -c$ o bien $u > c$.

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Logaritmos

Si $0 < b \neq 1$, $0 < a \neq 1$, $x, R, S, > 0$

$y = \log_b x$ si, y sólo si, $b^y = x$

$\log_b 1 = 0$ $\qquad \log_b b = 1$

$\log_b b^y = y$ $\qquad b^{\log_b x} = x$

$\log_b RS = \log_b R + \log_b S$ $\qquad \log_b \dfrac{R}{S} = \log_b R - \log_b S$

$\log_b R^c = c \log_b R$ $\qquad \log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

Determinantes

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Sucesiones y series aritméticas

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$S_n = n\left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right)$ o $S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$

Sucesiones y series geométricas

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$S_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ $(r \neq 1)$

$S = \dfrac{a_1}{1 - r}$ $(|r| < 1)$ serie geométrica infinita.

Factorial

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$n \cdot (n - 1)! = n!$, $0! = 1$

Coeficiente binomial

$\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n - r)!}$ (enteros n y r, $n \geq r \geq 0$)

Teorema del binomio

Si n es un entero positivo

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b$$

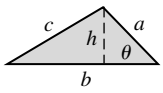
$$+ \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Fórmulas de geometría

Triángulo

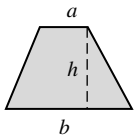
$h = a \operatorname{sen} \theta$

Área $= \frac{1}{2}bh$



Trapecio

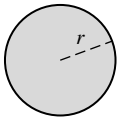
Área $= \frac{h}{2}(a + b)$



Círculo

Área $= \pi r^2$

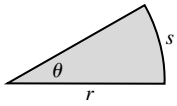
Circunferencia $= 2\pi r$



Sector circular

Área $= \frac{\theta r^2}{2}$ (θ en radianes)

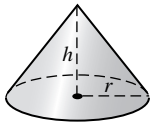
$s = r\theta$ (θ en radianes)



Cono circular recto

Volumen $= \frac{\pi r^2 h}{3}$

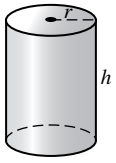
Área de la superficie lateral $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



Cilindro circular recto

Volumen $= \pi r^2 h$

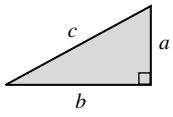
Área de la superficie lateral $= 2\pi rh$



Triángulo rectángulo

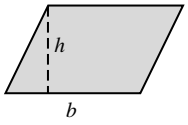
Teorema de Pitágoras:

$c^2 = a^2 + b^2$



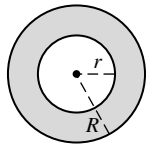
Paralelogramo

Área $= bh$



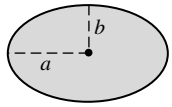
Anillo circular

Área $= \pi(R^2 - r^2)$



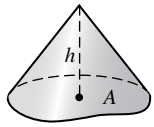
Elipse

Área $= \pi ab$



Cono

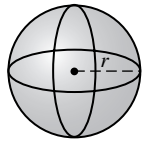
Volumen $= \frac{Ah}{3}$ (A = Área de la base)



Esfera

Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Área de la superficie $= 4\pi r^2$



Fórmulas de trigonometría

Medida angular

π radianes $= 180°$

Por lo que 1 radián $= \frac{180}{\pi}$ grados,

y 1 grado $= \frac{\pi}{180}$ radianes.

Identidades recíprocas

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\csc x}$ $\qquad$ $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

$\cos x = \frac{1}{\sec x}$ $\qquad$ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\tan x = \frac{1}{\cot x}$ $\qquad$ $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

Identidades cociente

$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\qquad$ $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Identidades pitagóricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Precálculo

Gráfico, numérico, algebraico

SÉPTIMA EDICIÓN

Franklin D. Demana — The Ohio State University

Bert K. Waits — The Ohio State University

Gregory D. Foley — Liberal Arts and Science Academy of Austin

Daniel Kennedy — Baylor School

TRADUCCIÓN

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Escuela de Actuaría
Universidad Anáhuac, México

REVISIÓN TÉCNICA

M. en C. Javier Alfaro Pastor
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional (México)

*AP es una marca registrada del College Board, el cual no avala ni está involucrado en la producción de este libro.

PEARSON Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

DEMANA, FRANKLIN D. y cols.
Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico
Séptima edición
Pearson Educación, México, 2007

ISBN: 970-26-1016-8
Área: Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 1056

Authorized translation from the English language edition, entitled *Precalculus: graphical, numerical, algebraic* 7th ed., by Franklin D. Demana, Bert K. Waits, Gregory D. Foley and Daniel Kennedy, published by Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley, Copyright ©2007. All rights reserved.

ISBN 0-321-35693-4

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *Precalculus: graphical, numerical, algebraic* 7ª ed., por Franklin D. Demana, Bert K. Waits, Gregory D. Foley y Daniel Kennedy, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Addison Wesley, Copyright ©2007. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español

Editor:	Rubén Fuerte Rivera
	e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com
Editor de desarrollo:	Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción:	Rodrigo Romero Villalobos

SÉPTIMA EDICIÓN, 2007

D.R. © 2007 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5° piso, Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Edición en Inglés

Publisher	Greg Tobin
Executive Editor	Anne Kelly
Project Editor	Joanne Ha
Managing Editor	Karen Wernholm
Senior Production Supervisor	Jeffrey Holcomb
Supplements Coordinator	Emily Portwood
Software Development	John O'Brien and Mary Durnwald
Developmental Editor	Elka Block
Cover Design	Suzanne Heiser
Project Management	Kathy Smith
Cover photo	© Royalty-Free/Corbis. Ferris wheel in Odaiba, Tokyo.

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.
Addison Wesley es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN 10: 970-26-1016-8
ISBN 13: 978-970-26-1016-8

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 10 09 08 07 06



Contenido

CAPÍTULO R



Requisitos 1

R.1 Números reales 2

Representación de números reales ~ Orden y notación de intervalo ~ Propiedades básicas del álgebra ~ Exponentes enteros ~ Notación científica

R.2 Sistema de coordenadas cartesianas 14

El plano cartesiano ~ Valor absoluto de un número real ~ Fórmulas de la distancia ~ Fórmulas para el punto medio ~ Ecuaciones de circunferencias ~ Aplicaciones

R.3 Ecuaciones y desigualdades lineales 24

Ecuaciones ~ Resolución de ecuaciones ~ Ecuaciones lineales con una variable ~ Desigualdades lineales en una variable

R.4 Rectas en el plano 31

Pendiente de una recta ~ Ecuación de una recta en la forma punto pendiente ~ Ecuación de una recta en la forma pendiente intersección al origen ~ Graficación de ecuaciones lineales con dos variables ~ Rectas paralelas y rectas perpendiculares ~ Aplicación de ecuaciones lineales con dos variables

R.5 Resolución de ecuaciones en forma gráfica, numérica y algebraica 44

Resolución de manera gráfica de ecuaciones ~ Resolución de ecuaciones cuadráticas ~ Aproximación en forma gráfica de soluciones de ecuaciones ~ Aproximación de soluciones de ecuaciones, de forma numérica, mediante tablas ~ Resolución de ecuaciones mediante la determinación de intersecciones

R.6 Números complejos 53

Números complejos ~ Operaciones con números complejos ~ Conjugados y división complejos ~ Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

R.7 Resolución de desigualdades en forma algebraica y gráfica 59

Resolución de desigualdades con valor absoluto ~ Resolución de desigualdades cuadráticas ~ Aproximación a soluciones de desigualdades ~ Movimiento de proyectiles

Ideas Clave 65

Ejercicios de repaso 66

CAPÍTULO 1



Funciones y gráficas 69

1.1 Modelación y resolución de ecuaciones 70

Modelos numéricos ~ Modelos algebraicos ~ Modelos gráficos ~ Propiedad del factor cero ~ Resolución de

problemas ~ Fallas de los graficadores y comportamiento oculto ~ Un comentario acerca de las demostraciones

1.2 Funciones y sus propiedades 86

Definición y notación de función ~ Dominio y rango ~ Continuidad ~ Funciones crecientes y funciones decrecientes ~ Acotamiento ~ Extremos locales y absolutos ~ Simetría ~ Asíntotas ~ Comportamiento en los extremos

1.3 Doce funciones básicas 106

Qué pueden decirnos las gráficas ~ Doce funciones básicas ~ Análisis gráfico de funciones

1.4 Construcción de funciones a partir de funciones 117

Combinación algebraica de funciones ~ Composición de funciones ~ Relaciones y funciones definidas en forma implícita

1.5 Relaciones paramétricas e inversas 127

Relaciones definidas en forma paramétrica ~ Relaciones inversas y funciones inversas

1.6 Transformaciones gráficas 138

Transformaciones ~ Traslaciones vertical y horizontal ~ Reflexiones con respecto a los ejes ~ Alargamientos y compresiones horizontal y vertical ~ Combinación de transformaciones

1.7 Modelación con funciones 151

Funciones a partir de fórmulas ~ Funciones a partir de gráficas ~ Funciones a partir de descripciones verbales ~ Funciones a partir de datos

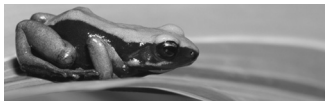
Matemáticas en el trabajo 164

Ideas clave 164

Ejercicios de repaso 165

Proyecto 168

CAPÍTULO 2



Funciones polinomiales, potencia y racionales 169

2.1 Funciones lineales y cuadráticas, y modelación 170

Funciones polinomiales ~ Funciones lineales y sus gráficas ~ Tasa (razón) promedio de cambio ~ Correlación lineal y modelación ~ Funciones cuadráticas y sus gráficas ~ Aplicaciones de funciones cuadráticas

2.2 Funciones potencia con modelación 188

Funciones potencia y variación ~ Funciones monomiales y sus gráficas ~ Gráficas de funciones potencia ~ Modelación con funciones potencia

2.3 Funciones polinomiales de grado superior con modelación 200

Gráficas de funciones polinomiales ~ Determinación del comportamiento en los extremos de funciones polinomiales ~ Ceros (raíces) de funciones polinomiales ~ El teorema del valor intermedio ~ Modelación

2.4 Ceros reales de funciones polinomiales 214

División larga y el algoritmo de la división ~ Teoremas del residuo y del factor ~ División sintética ~ Teorema de los ceros racionales ~ Cotas superior e inferior

2.5 Ceros complejos y el teorema fundamental del álgebra 228

Dos teoremas importantes ~ Ceros complejos conjugados ~ Factorización con coeficientes reales

2.6 Gráficas de funciones racionales 237

Funciones racionales ~ Transformaciones de la función recíproca ~ Límites y asíntotas ~ Análisis de gráficas de funciones racionales ~ Exploración de humedad relativa

2.7 Resolución de ecuaciones con una variable 248

Resolución de ecuaciones racionales ~ Soluciones extrañas ~ Aplicaciones

2.8 Resolución de desigualdades con una variable 257

Desigualdades lineales ~ Desigualdades racionales ~ Otras desigualdades ~ Aplicaciones

Matemáticas en el trabajo 267

Ideas clave 268

Ejercicios de repaso 269

Proyecto 273

CAPÍTULO 3



Funciones exponencial, logística y logarítmica 275

3.1 Funciones exponencial y logística 276

Funciones exponenciales y sus gráficas ~ La base natural *e* ~ Funciones logísticas y sus gráficas ~ Modelos de población

3.2 Modelación exponencial y logística 290

Tasa de porcentaje constante y funciones exponenciales ~ Modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial ~ Uso de regresión para modelar poblaciones ~ Otros modelos logísticos

3.3 Funciones logarítmicas y sus gráficas 300

Funciones inversas de exponenciales ~ Logaritmos comunes, base 10 ~ Logaritmos naturales, base *e* ~ Gráficas de funciones logarítmicas ~ Medición del sonido usando decibeles

3.4 Propiedades de las funciones logarítmicas 310

Propiedades de los logaritmos ~ Cambio de base ~ Gráficas de funciones logarítmicas con base b ~ Cómo expresar información de otra forma

3.5 Modelación y resolución de ecuaciones 320

Resolución de ecuaciones exponenciales ~ Resolución de ecuaciones logarítmicas ~ Órdenes de magnitud y modelos logarítmicos ~ Ley de enfriamiento de Newton ~ Transformación logarítmica ~ Tres tipos de transformaciones logarítmicas

3.6 Matemáticas financieras 334

Interés capitalizable anualmente ~ Interés capitalizable k veces por año ~ Porcentaje de rendimiento anual ~ Rendimiento porcentual anual ~ Anualidades, valor futuro ~ Préstamos e hipotecas, valor presente

Ideas clave 344

Ejercicios de repaso 344

Proyecto 348

CAPÍTULO 4



Funciones trigonométricas 349

4.1 Los ángulos y sus medidas 350

El problema de la medición angular ~ Grados y radianes ~ Longitud de un arco circular ~ Movimiento angular y lineal

4.2 Funciones trigonométricas de ángulos agudos **360**

Trigonometría del triángulo rectángulo ~ Dos triángulos famosos ~ Evaluación de las funciones trigonométricas con calculadora ~ Errores comunes que se cometen con la calculadora cuando se evalúan las funciones trigonométricas ~ Aplicaciones de la trigonometría del triángulo rectángulo

4.3 Trigonometría ampliada: las funciones circulares 370

Funciones trigonométricas de cualquier ángulo ~ Funciones trigonométricas de números reales ~ Funciones periódicas ~ El círculo unitario de 16 puntos

4.4 Gráficas del seno y el coseno: sinusoides 384

Revisión de las ondas básicas ~ Sinusoidales y transformaciones ~ Modelación del comportamiento periódico con sinusoidales

4.5 Gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante 396

La función tangente ~ La función cotangente ~ La función secante ~ La función cosecante

4.6 Gráficas de funciones trigonométricas compuestas 405

Combinación de funciones algebraicas y trigonométricas ~ Sumas y diferencias de sinusoidales ~ Oscilación amortiguada

4.7 Funciones trigonométricas inversas 414

Función seno inverso ~ Funciones coseno y tangente inversas ~ Composición de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas ~ Aplicaciones de las funciones trigonométricas inversas

4.8 Resolución de problemas con trigonometría 425

Más problemas con triángulos rectángulos ~ Movimiento armónico simple

Ideas clave 438

Ejercicios de repaso 439

Proyecto 442

CAPÍTULO 5



Trigonometría analítica **443**

5.1 Identidades fundamentales 444

Identidades ~ Identidades trigonométricas básicas ~ Identidades pitagóricas ~ Identidades de cofunciones ~ Identidades impar-par ~ Simplificación de expresiones trigonométricas ~ Resolución de ecuaciones trigonométricas

5.2 Demostración de identidades trigonométricas 454

Una estrategia de demostración ~ Demostración de identidades ~ Refutación de las que no son identidades ~ Identidades en cálculo

5.3 Identidades de suma y diferencia 463

Coseno de una diferencia ~ Coseno de una suma ~ Seno de una diferencia o de una suma ~ Tangente de una diferencia o de una suma ~ Verificación algebraica de una sinusoidal

5.4 Identidades de múltiplos de un ángulo 471

Identidades de ángulo doble ~ Identidades para reducir potencias ~ Identidades de medio ángulo ~ Resolución de ecuaciones trigonométricas

5.5 Ley de los senos 478

Deducción de la ley de los senos ~ Resolución de triángulos (AAL, ALA) ~ El caso ambiguo (LLA) ~ Aplicaciones

5.6 Ley de los cosenos 487

Deducción de la ley de los cosenos ~ Resolución de triángulos (LAL, LLL) ~ Área de un triángulo y la fórmula de Herón ~ Aplicaciones

Matemáticas en el trabajo 496

Ideas clave 497

Ejercicios de repaso 497

Proyecto 500

CAPÍTULO 6



Aplicaciones de trigonometría 501

6.1 Vectores en el plano 502

Vectores en dos dimensiones ~ Operaciones con vectores ~ Vectores unitarios ~ Ángulos de dirección ~ Aplicaciones de vectores

6.2 Producto punto de vectores 514

El producto punto ~ Ángulo entre vectores ~ Proyección de un vector sobre otro ~ Trabajo

6.3 Ecuaciones paramétricas y movimiento 522

Ecuaciones paramétricas ~ Curvas paramétricas ~ Eliminación del parámetro ~ Rectas y segmentos de recta ~ Simulación de movimiento con una graficadora

6.4 Coordenadas polares 534

El sistema de coordenadas polares ~ Transformación de coordenadas ~ Transformación de ecuaciones ~ Determinación de la distancia mediante coordenadas polares

6.5 Gráficas de ecuaciones polares 541

Curvas polares y curvas paramétricas ~ Simetría ~ Análisis de curvas polares ~ Rosas ~ Limaçones (Caracoles) ~ Otras curvas polares

6.6 Teorema de Moivre y raíces *n*-ésimas 550

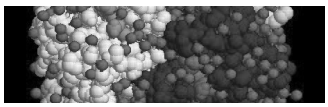
El plano complejo ~ Forma trigonométrica de los números complejos ~ Multiplicación y división de números complejos ~ Potencias de números complejos ~ Raíces de números complejos

Ideas Clave 561

Ejercicios de repaso 562

Proyecto 565

CAPÍTULO 7



Sistemas y matrices 567

7.1 Resolución de sistemas de dos ecuaciones 568

El método de sustitución ~ Resolución gráfica de sistemas ~ El método de eliminación ~ Aplicaciones

7.2 Álgebra de matrices 579

Matrices ~ Suma y resta de matrices ~ Multiplicación de matrices ~ Matrices identidad e inversa de una matriz ~ Vectores en dos dimensiones ~ Aplicaciones

7.3 Sistemas lineales de varias variables y operaciones por renglones 594

Forma triangular para sistemas lineales ~ Eliminación gaussiana ~ Operaciones elementales por renglones y forma escalonada por renglones ~ Forma escalonada reducida por renglones ~ Resolución de sistemas con matrices inversas ~ Aplicaciones

7.4 Fracciones parciales 608

Descomposición en fracciones parciales ~ Denominadores con factores lineales ~ Denominadores con factores cuadráticos irreducibles ~ Aplicaciones

7.5 Sistemas de desigualdades con dos variables 617

Gráfica de una desigualdad ~ Sistemas de desigualdades ~ Programación lineal

Matemáticas en el trabajo 625

Ideas clave 626

Ejercicios de repaso 626

Proyecto 630

CAPÍTULO 8



Geometría analítica en dos y tres dimensiones 631

8.1 Secciones cónicas y parábolas 632

Secciones cónicas ~ Geometría de una parábola ~ Traslación de parábolas ~ Propiedad reflectante de una parábola

8.2 Elipses 644

Geometría de una elipse ~ Traslación de elipses ~ Órbitas y excentricidad ~ Propiedad reflectante de una elipse

8.3 Hipérbolas 656

Geometría de una hipérbola ~ Traslación de hipérbolas ~ Órbitas y excentricidad ~ Propiedad reflectante de una hipérbola ~ Navegación de rango amplio

8.4 Traslación y rotación de ejes 666

Ecuaciones de segundo grado de dos variables ~ Traslación de ejes en comparación con la traslación de gráficas ~ Rotación de los ejes ~ Criterio del discriminante

8.5 Ecuaciones polares de las cónicas 675

Excentricidad (revisión) ~ Cómo escribir ecuaciones polares para las cónicas ~ Análisis de las ecuaciones polares de las cónicas ~ Órbitas (revisión)

8.6 Sistema coordenado cartesiano tridimensional 685

Coordenadas cartesianas tridimensionales ~ Fórmulas de la distancia y del punto medio ~ Ecuación de la esfera ~ Planos y otras superficies ~ Vectores en el espacio ~ Rectas en el espacio

Ideas Clave 695

Ejercicios de repaso 696

Proyecto 698

CAPÍTULO 9



Matemáticas discretas 699

9.1 Combinatoria básica 700

Discreto en comparación con continuo ~ La importancia del conteo ~ El principio de multiplicación del conteo ~ Permutaciones ~ Combinaciones ~ Subconjuntos de un conjunto con *n* elementos

9.2 El teorema del binomio 711

Potencias de binomios ~ Triángulo de Pascal ~ El teorema del binomio ~ Identidades factoriales

9.3 Probabilidad 718

Espacios muestrales y funciones de probabilidad ~ Cálculo de las probabilidades ~ Diagramas de Venn y diagramas de árbol ~ Probabilidad condicional ~ Distribuciones binomiales

9.4 Sucesiones 732

Sucesiones infinitas ~ Límites de sucesiones infinitas ~ Sucesiones aritméticas y geométricas ~ Sucesiones y calculadoras graficadoras

9.5 Series 742

Notación de suma ~ Sumas de sucesiones aritméticas y geométricas ~ Series infinitas ~ Convergencia de series geométricas

9.6 Inducción matemática 752

El problema de las Torres de Hanoi ~ El principio de inducción matemática ~ Inducción y deducción

9.7 Estadística y datos (enfoque gráfico) 759

Estadística ~ Visualización de datos categóricos ~ Gráficas de tallos ~ Tablas de frecuencia ~ Histogramas ~ Diagramas de tiempo

9.8 Estadística y datos (enfoque algebraico) 771

Parámetros y estadística ~ Media, mediana y moda ~ Resumen de cinco números ~ Diagramas de caja (*boxplot*) ~ Varianza y desviación estándar ~ Distribuciones normales

Matemáticas en el trabajo 785

Ideas Clave 786

Ejercicios de repaso 786

Proyecto 790

CAPÍTULO 10



Una introducción al cálculo: límites, derivadas e integrales 791

10.1 Límites y movimiento: el problema de la tangente 792

Velocidad promedio ~ Velocidad instantánea ~ Revisión de límites ~ Relación con las rectas tangentes ~ La derivada

10.2 Límites y movimiento: el problema del área 804

Distancia a partir de una velocidad constante ~ Distancia a partir de una velocidad cambiante ~ Límites en el infinito ~ La relación con las áreas ~ La integral definida

10.3 Más acerca de los límites 813

Un poco de historia ~ Definición informal de límite ~ Propiedades de los límites ~ Límites de funciones continuas ~ Límites laterales y de dos lados ~ Límites que tienden a infinito

10.4 Integrales y derivadas numéricas 826

Derivadas obtenidas con calculadora ~ Integrales definidas obtenidas con calculadora ~ Cálculo de la derivada a partir de datos ~ Cálculo de la integral definida a partir de datos

Ideas Clave 836

Ejercicios de repaso 836

Proyecto 838

APÉNDICE A Panorama general de los apéndices

A.1 Radicales y exponentes racionales 839

Radicales ~ Simplificación de expresiones con radicales ~ Racionalización del denominador ~ Exponentes racionales

A.2 Polinomios y factorización 845

Cómo sumar, restar y multiplicar polinomios ~ Productos especiales ~ Factorización de polinomios mediante los productos especiales ~ Factorización de trinomios ~ Factorización por agrupación

A.3 Expresiones fraccionales 852

Dominio de una expresión algebraica ~ Reducción de expresiones racionales ~ Operaciones con expresiones racionales ~ Expresiones racionales compuestas

APÉNDICE B Fórmulas importantes

B.1 Fórmulas de álgebra 857

Exponentes ~ Radicales y exponentes racionales ~ Productos especiales ~ Factorización de polinomios ~ Desigualdades ~ Fórmula cuadrática ~ Logaritmos ~ Determinantes ~ Sucesiones y series aritméticas ~ Sucesiones y series geométricas ~ Factorial ~ Coeficiente binomial ~ Teorema del binomio

B.2 Fórmulas de geometría 858

Triángulo ~ Trapecio ~ Círculo ~ Sector circular ~ Cono circular recto ~ Cilindro circular recto ~ Triángulo rectángulo ~ Paralelogramo ~ Anillo circular ~ Elipse ~ Cono ~ Esfera

B.3 Fórmulas de trigonometría 859

Medida angular ~ Identidades recíprocas ~ Identidades cociente ~ Identidades pitagóricas ~ Identidades impar-par ~ Identidades de suma y diferencia ~ Identidades de cofunción ~ Identidades del ángulo doble ~ Identidades para reducir potencias ~ Identidades del ángulo medio ~ Triángulos ~ Forma trigonométrica de un número complejo ~ Teorema de Moivre

B.4 Fórmulas de geometría analítica 860

Fórmulas básicas ~ Ecuaciones de una recta ~ Ecuación de una circunferencia ~ Parábolas con vértice en (h, k) ~ Elipses con centro en (h, k) y $a > b > 0$ ~ Hipérbolas con centro en (h, k)

B.5 Galería de funciones básicas 862

APÉNDICE C

C.1 Lógica: Una introducción 863

Proposiciones ~ Proposiciones compuestas

C.2 Condicionales y bicondicionales 869

Formas de proposiciones ~ Razonamiento válido

Glosario 877

Respuestas seleccionadas 895

Índice de aplicaciones 1014

Índice 1017

Acerca de los autores

Franklin D. Demana

Frank Demana recibió sus títulos de maestría y doctorado en matemáticas en la Universidad Estatal de Michigan y es profesor emérito de matemáticas en la Universidad Estatal de Ohio. Como activo partidario del uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es cofundador del programa nacional de desarrollo profesional T^3 (*Teachers Teaching with Technology*, Maestros Enseñando con Tecnología). Ha sido director y uno de los principales investigadores de actividades financiadas con más de diez millones de dólares por la NSF (*National Science Foundation*, Fundación Nacional para la Ciencia). Actualmente es investigador codirector del Departamento de Educación Matemática e Investigación Educativa de la Ciencia de Estados Unidos, que tiene asignados fondos de 3 millones de dólares, en un programa otorgado a la Universidad Estatal de Ohio. Además de presentarse frecuentemente en congresos profesionales, ha publicado una amplia variedad de artículos en el campo de la instrucción matemática potenciada con computadoras y calculadoras. El Dr. Demana también es cofundador (junto con Bert Waits) de la ICTCM (*International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, Conferencia Internacional sobre Tecnología en Matemáticas Universitarias) que se celebra año con año. Recibió, junto con el Dr. Waits, el premio *Glenn Gilbert National Leadership* de 1997, otorgado por el Consejo de Supervisores de Matemáticas de Ohio *(Ohio Council of Teachers of Mathematics*).

El Dr. Demana es coautor de *Calculus: Graphical, Numerical, Algebraic; Essential Algebra: A Calculator Approach; Transition to College Mathematics; College Algebra and Trigonometry: A Graphing Approach; College Algebra: A Graphing Approach; Precalculus: Functions and Graphs* e *Intermediate Algebra: A Graphing Approach.*

Bert K. Waits

Bert Waits recibió su doctorado en la Universidad Estatal de Ohio y actualmente es profesor emérito de matemáticas de la misma. El Dr. Waits es cofundador del programa de desarrollo profesional T^3, y ha sido codirector o investigador principal de varios grandes proyectos de la NSF. Ha publicado artículos en más de 50 revistas profesionales reconocidas nacionalmente. Con frecuencia imparte conferencias, talleres y minicursos en reuniones nacionales de la MAA (*Mathematics American Association*, Asociación Matemática de América) y la NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*, Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas) sobre el uso de la tecnología informática para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas. Ha sido invitado a presentaciones en las ediciones 6, 7 y 8 del ICME (*International Congress on Mathematical Education*, Congreso Internacional de Educación Matemática) en Budapest (1988), Quebec (1992) y Sevilla (1996), respectivamente. El Dr. Waits recibió, junto con el Dr. Demana, el premio *Glenn Gilbert National Leadership* de 1997, otorgado por el Consejo de Supervisores de Matemáticas de Ohio y es cofundador (con Frank Demana) de la ICTCM. También fue uno de los acreedores al premio *Christofferson-Fawcett Mathematics Education* otorgado por el Consejo de Maestros de Matemáticas de Ohio.

El Dr. Waits es coautor de *Calculus: Graphical, Numerical, Algebraic; College Algebra and Trigonometry: A Graphing Approach; College Algebra: A Graphing Approach; Precalculus: Functions and Graphs* y de *Intermediate Algebra: A Graphing Approach*

Gregory D. Foley

Greg Foley recibió sus títulos de licenciatura y maestría en matemáticas, y doctorado en educación matemática en la Universidad de Texas en Austin. Es director de la Academia de Ciencias y Artes, el programa académico avanzado de preparatoria del *Austin Independent School District* en Texas. El Dr. Foley ha impartido desde cursos elementales de aritmética hasta cursos de matemáticas a nivel universitario (en el que también imparte clases en educación matemática). De 1977 a 2004 ha formado parte de la facultad de tiempo completo en North Harris County College, Austin Community College, The Ohio State University, Sam Hoston State University y Appalachian State University, donde fue Catedrático Distinguido de Educación Matemática en el departamento de Ciencias Matemáticas, y dirigió el programa MELT (*Mathematics Education Leadership Training*, Capacitación de Líderes en Educación Matemática). El Dr. Foley ha presentado más de 200 conferencias y talleres en Estados Unidos y otros países, ha dirigido varios proyectos con apoyo financiero y ha publicado artículos en varias revistas profesionales. Activo en varias sociedades, es miembro del Comité para la Educación en Matemáticas de Maestros de la MAA. En 1988, el Dr. Foley recibió el premio bianual AMATYC (*American Mathematical Association of Two-Years Colleges*, Asociación Matemática Estadounidense para los Dos Primeros Años Universitarios) para la Excelencia Matemática, y en 2005, recibió el premio anual de T^3.

Daniel Kennedy

Dan Kennedy recibió su título de licenciatura en el College of the Holy Cross, y su maestría y doctorado en matemáticas en la Universidad de Carolina del Norte, en Chapel Hill. Desde 1973 ha enseñado matemáticas en Baylor School en Chattanooga, Tennessee, donde ostenta la Cátedra Distinguida Cartter Lupton. El Dr. Kennedy se convirtió en conferencista de *Advanced Placement Calculus* en 1978, que lo llevó a un nivel creciente de compromiso con el programa como asesor en talleres, líder de mesas y en desarrollo de exámenes. Se unió al Advanced Placement Calculus Test Development Committee en 1986. En 1990 fue el primer maestro de preparatoria en 35 años en presidir ese comité. Durante su titularidad, el programa inició el requerimiento de calculadoras graficadoras, para dejar sentadas las bases para la reforma de 1988 del curriculum de Advanced Placement Calculus. Autor de *1997 Teacher's Guide-AP*Calculus*, el Dr. Kennedy ha dirigido más de 50 talleres para maestros de cálculo a nivel bachillerato. Sus artículos sobre enseñanza de matemáticas han aparecido en *Mathematics Teacher* y *American Mathematical Monthly*, y es conferencista frecuente en congresos profesionales y civiles sobre reformas de la educación. El Dr. Kennedy fue nombrado Tandy Technology Scholar en 1992 y fue ganador de un Presidential Award en 1995.

El Dr. Kennedy es coautor de *Calculus: Graphical, Numerical, Algebraic; Prentice Hall Algebra I; Prentice Hall Geometry* y de *Prentice Hall Algebra 2*.

Prefacio

Dado que desde 1990 se ha puesto mucha atención en reformar los cursos de cálculo, sorprende que los de precálculo hayan mantenido su forma tradicional. En esta edición de *Precálculo: gráfico, numérico y algebraico*, los autores presentan un curso de precálculo reformado. Para aquellos estudiantes que planeen continuar con un curso de cálculo, esta obra concluye con un capítulo que los prepara para abordar dos temas centrales: la tasa de cambio instantánea y la acumulación continua. Este interesante avance intuitivo es útil y más razonable que la incursión tradicional y carente de motivación del cálculo de límites.

Reconociendo que el de precálculo podría ser un curso terminal para muchos estudiantes, los autores también incluyen temas de *instrucción cuantitativa* tales como probabilidad, estadística y matemáticas financieras. Su objetivo es proporcionarles buenas habilidades de pensamiento crítico, necesarias para tener éxito en cualquier empresa.

Continuando con el espíritu de las ediciones anteriores, los autores han integrado la tecnología de graficación a todo el curso, no como un tema adicional sino como una herramienta esencial para el descubrimiento matemático y la resolución efectiva de problemas. Esta tecnología permite estudiar un catálogo completo de funciones básicas desde el inicio del curso, lo que permite dar una idea de las propiedades de funciones que en otros libros no se ven sino hasta los capítulos finales. Al relacionar el álgebra de funciones con la visualización de sus gráficas, los autores incluso presentan a los estudiantes ecuaciones paramétricas, funciones definidas por partes, notación de límite y una comprensión intuitiva de continuidad desde el capítulo 1.

Una vez que los estudiantes se sienten cómodos con el lenguaje de funciones, los autores los guían a través de una exploración más tradicional de doce funciones básicas y sus propiedades algebraicas, reforzando siempre la relación que existe entre sus representaciones algebraica, gráfica y numérica. Con respecto a la modelación, el libro utiliza un enfoque consistente que permite dar énfasis en cada capítulo al uso de tipos particulares de funciones para modelar comportamientos del mundo real.

Nuestro enfoque

La regla de los cuatro métodos: Un enfoque equilibrado

Una de las características principales de este libro es el equilibrio entre los métodos algebraico, numérico, gráfico y verbal para representar problemas: la regla de los cuatro métodos. Por ejemplo, obtenemos soluciones de forma algebraica cuando ésta es la técnica más apropiada para hacerlo y recurrimos a las soluciones gráfica o numérica cuando el álgebra es difícil de usar. Recomendamos a los estudiantes resolver los problemas con método y luego respaldar o confirmar sus soluciones mediante uno distinto, pues creemos que deben aprender el valor de cada una de estas representaciones para posteriormente elegir la más apropiada de acuerdo a cada problema. Este enfoque refuerza la idea de que, para entender un problema completamente, son necesarias las comprensiones tanto algebraica como gráfica y numérica.

Enfoque de resolución de problemas

En los ejemplos a todo lo largo del texto se enfatiza la resolución sistemática de problemas usando la siguiente variación del proceso de resolución de problemas de Polya:

- *Comprender* el problema.
- *Desarrollar* un modelo matemático.

- *Resolver* el modelo matemático y respaldar o confirmar las soluciones.
- *Interpretar* la solución.

Encontrarán el uso de este método a lo largo de todo el libro.

Doce funciones básicas

Las doce funciones básicas, que se presentan enseguida, se resaltan en todo el libro como un tema principal:

- Función identidad
- Función cuadrática
- Función cúbica
- Función recíproca
- Función raíz cuadrada
- Función exponencial
- Función logaritmo natural
- Función seno
- Función coseno
- Función valor absoluto
- Función máximo entero
- Función logística

Una de las características más distintivas de este texto es que presenta a los estudiantes un vocabulario completo de funciones al principio del curso. En el capítulo 1, los estudiantes conocen gráficamente las doce funciones básicas y son capaces de compararlas y contrastarlas conforme aprenden conceptos como dominio, rango, simetría, continuidad, comportamiento en los extremos, asíntotas, máximos y mínimo, e incluso periodicidad; conceptos difíciles de apreciar cuando los únicos ejemplos a los que un maestro puede hacer referencia son los polinomios. Con este libro, desde las primeras semanas de clase los estudiantes serán capaces de caracterizar funciones mediante sus comportamientos —por ejemplo, gracias a la tecnología de graficación ya no es necesario entender radianes antes de poder aprender que la función seno es acotada, periódica, impar y continua, con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $[-1, 1]$—. Una vez que los estudiantes tienen una buena comprensión de las funciones en general, el resto del curso consiste en el estudio, con mayor profundidad, de diferentes tipos de funciones, particularmente con respecto a sus propiedades algebraicas y la modelación de aplicaciones.

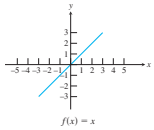
Estas funciones se utilizan para desarrollar las habilidades fundamentales de análisis requeridas para los cursos de cálculo y matemáticas avanzadas. La sección 1.2 proporciona un panorama de estas funciones mediante un examen de sus gráficas. Para una fácil consulta, el apéndice B incluye una galería completa de funciones básicas.

Cada función básica se revisa posteriormente en el libro mediante un análisis más profundo que incluye la investigación de propiedades algebraicas.

Además, se resumen las características generales de familias de funciones.

Doce funciones básicas

La función identidad

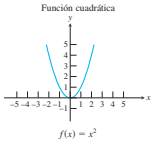


$f(x) = x$

Hecho interesante: Ésta es la única función que actúa sobre todo número real y lo deja igual.

FIGURA 1.36

Función cuadrática



$f(x) = x^2$

Hecho interesante: La gráfica de esta función, denominada parábola, tiene una propiedad de reflexión que es útil en la fabricación de faros y discos de satélites.

FIGURA 1.37

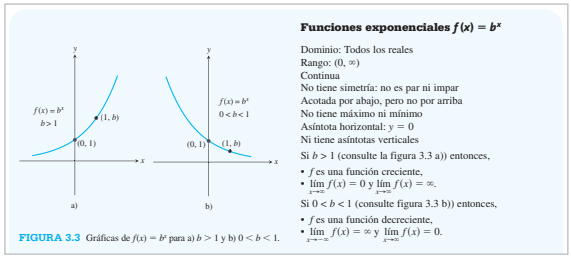


FIGURA 3.3 Gráficas de $f(x) = b^x$ para a) $b > 1$ y b) $0 < b < 1$.



FIGURA 3.29 $f(x) = \log_b x$, $b > 1$.

Aplicaciones y datos reales

La mayor parte de las aplicaciones en el texto están basadas en datos reales de las fuentes citadas y, para abordar su análisis, los estudiantes no requieren experiencia alguna en los campos de origen de las mismas.

A medida que avanzan en el análisis de las aplicaciones, los estudiantes se exponen a funciones como mecanismos para modelar datos, y son motivados para aprender acerca de cómo varias funciones pueden ayudar a modelar problemas de la vida real. Aprenden a analizar, modelar y graficar datos, e interpretar gráficas y ajustar curvas. Además, la representación tabular de datos presentada en este texto enfatiza la idea de que una función es una correspondencia entre variables numéricas. Esto ayuda a los estudiantes a construir la relación entre los números y sus gráficas, y a reconocer la importancia de una comprensión completa —gráfica, numérica y algebraica— de un problema. Puede consultar una lista completa de aplicaciones en el Índice de aplicaciones, en la página 1014.

Tabla 3.9 Población (en millones)

Año	Población
1900	76.2
1910	92.2
1920	106.0
1930	123.2
1940	132.2
1950	151.3
1960	179.3
1970	203.3
1980	226.5
1990	248.7
2000	281.4
2003	290.8

Fuente: World Almanac and Book of Facts 2005.

EJEMPLO 6 **Modelación de la población de Estados Unidos mediante regresión exponencial**

Utilice la información de 1900 a 2000 en la tabla 3.9 y regresión exponencial para pronosticar la población de Estados Unidos en 2003.

SOLUCIÓN

Modele

Sea $P(t)$ la población, en millones, de Estados Unidos t años después de 1900. La figura 3.15 a) muestra un diagrama de dispersión de la información. Utilizando regresión exponencial, encontramos un modelo para los datos de 1990-2000:

$$P(t) = 80.5514 \cdot 1.01289^t.$$

La figura 3.15 b) muestra el diagrama de dispersión con una gráfica del modelo poblacional que acabamos de encontrar. Puede ver que la curva se ajusta muy bien a los datos. El coeficiente de determinación es $r^2 \approx 0.995$, lo que indica un buen ajuste y apoya la evidencia visual.

Resuelva gráficamente

Para pronosticar la población de Estados Unidos en 2003, sustituimos $t = 103$ en el modelo de regresión. La figura 3.15 c) muestra que $P(103) = 80.5514 \cdot 1.01289^{103} \approx 301.3$.

continúa

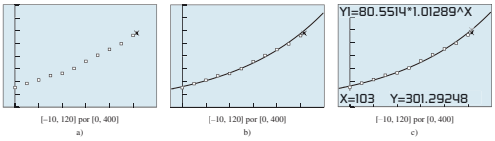


FIGURA 3.15 Diagramas de dispersión y gráficas para el ejemplo 6. La "x" en negro denota al dato para 2003. La "x" en gris en c) denota la predicción del modelo para 2003.

Interprete

El modelo pronostica que la población de Estados Unidos en 2003 fue 301.3 millones. La población real fue 290.8 millones. Sobreestimamos por 10.5 millones, menos del 4% de error.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

Cambios de contenido en esta edición

Para los instructores, hemos agregado el tratamiento adicional de temas que los estudiantes generalmente encuentran desafiantes, en especial en los capítulos 1, 2 y 9. Además, donde ha sido apropiado, hemos actualizado todos los datos de los ejemplos y ejercicios. También arreglamos ciertas secciones para acomodar mejor la longitud de los periodos de enseñanza y agregado cuantiosas fuentes, tanto para maestros nuevos como para experimentados. Por todo lo anterior, creemos firmemente que los cambios descritos hacen de la presente edición la obra más efectiva disponible para los estudiantes.

Capítulo R

Ahora, se presentan los números complejos en la sección R.6; anteriormente este tema se trataba hasta el capítulo 2.

Capítulo 1

La sección 1.4 de la edición anterior se ha dividido en dos para proporcionar mayor práctica en la composición de funciones y dedicar una sección completa a las funciones inversas. Se han agregado representaciones gráficas de composiciones con valor absoluto.

Capítulo 2

La sección sobre números complejos se trasladó al capítulo R para hacer más didáctica la extensión de este capítulo. Se incluyeron las subsecciones "Aplicaciones de funciones cuadráticas" y "Funciones monomiales y sus gráficas" para resaltar estos temas.

Capítulo 4

Se agregaron ejercicios de exploración para presentar las funciones arcosecante y arcocosecante, y sus opciones de dominio asociadas.

Capítulo 6

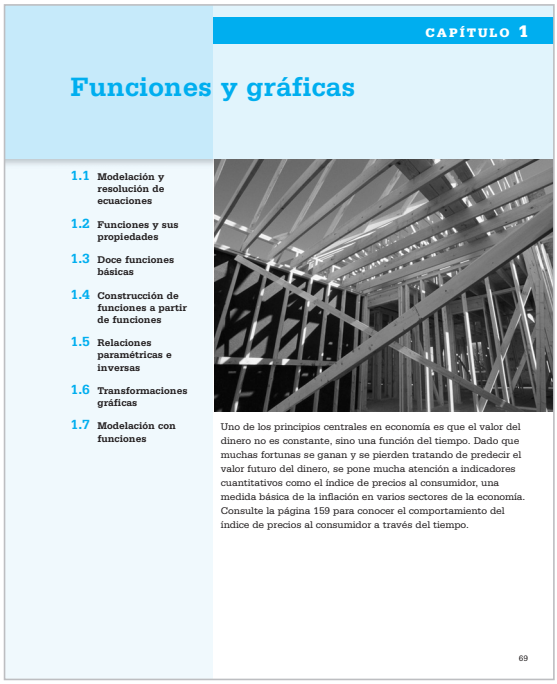
Ahora, el material de este capítulo está unificado bajo el título "Aplicaciones de trigonometría". La sección de vectores se simplificó y se introdujo una nueva subsección que relaciona los temas de curvas polares y curvas paramétricas. La representación geométrica de números complejos se pasó del capítulo 2 a la sección 6.6.

Capítulo 8

El proyecto actualizado del capítulo, "Elipses como modelos del movimiento de un péndulo", aborda la aplicación de elipses.

Capítulo 9
Ahora hay dos secciones separadas para sucesiones y series; más ejemplos y ejercicios que las abordan, y un tratamiento más amplio de convergencia de sucesiones.

Capítulo 10
Este primer avance del cálculo proporciona una perspectiva histórica de esta disciplina, y presenta estudios clásicos de movimiento mediante los problemas de recta tangente y problemas de área. Luego se investigan los límites; el capítulo termina con una inspección gráfica y numérica de derivadas e integrales.


CAPÍTULO 1

Funciones y gráficas

1.1 Modelación y resolución de ecuaciones
1.2 Funciones y sus propiedades
1.3 Doce funciones básicas
1.4 Construcción de funciones a partir de funciones
1.5 Relaciones paramétricas e inversas
1.6 Transformaciones gráficas
1.7 Modelación con funciones

Uno de los principios centrales en economía es que el valor del dinero no es constante, sino una función del tiempo. Dado que muchas fortunas se ganan y se pierden tratando de predecir el valor futuro del dinero, se pone mucha atención a indicadores cuantitativos como el índice de precios al consumidor, una medida básica de la inflación en varios sectores de la economía. Consulte la página 159 para conocer el comportamiento del índice de precios al consumidor a través del tiempo.

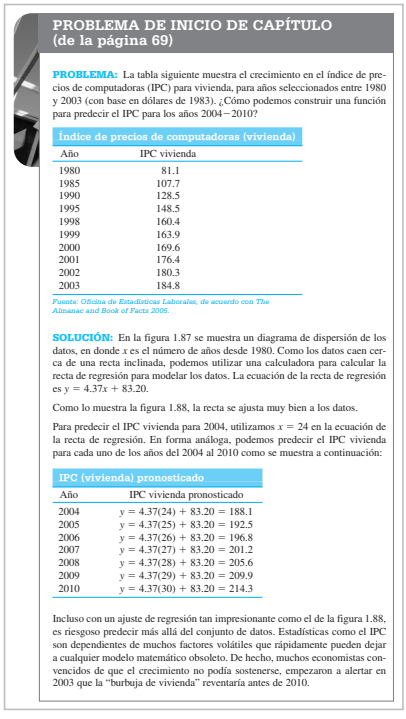
69

Características nuevas o mejoradas

Varias características se han resaltado en esta revisión para ayudar a los estudiantes a alcanzar el dominio de las habilidades y conceptos del curso. Nos satisface ofrecer las siguientes características nuevas o mejoradas:

Los **inicios de capítulo** incluyen una fotografía para motivar y la descripción general de una aplicación que puede resolverse con los temas del capítulo. La aplicación se revisa posteriormente mediante un problema específico que se resuelve. Estos problemas permiten a los estudiantes explorar situaciones realistas usando métodos gráficos, numéricos y algebraicos. También se pide a los estudiantes modelar situaciones de problemas mediante las funciones estudiadas en el capítulo. Además, aquí es donde se listan las secciones del capítulo.

La sección **Panorama general del capítulo** le da un sentido a lo que se aprenderá. Este panorama proporciona un mapa del capítulo e indica cómo se relacionan sus temas bajo una idea general. Esto siempre es útil para recordar que las matemáticas no son modulares, sino que están interrelacionadas, y que las habilidades y conceptos del curso se fundamentan unos sobre otros para dar paso a la comprensión de los procesos y sus relaciones más complicadas.


PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO
(de la página 69)

PROBLEMA: La tabla siguiente muestra el crecimiento en el índice de precios de computadoras (IPC) para vivienda, para años seleccionados entre 1980 y 2003 (con base en dólares de 1983). ¿Cómo podemos construir una función para predecir el IPC para los años 2004−2010?

Índice de precios de computadoras (vivienda)

Año	IPC vivienda
1980	81.1
1985	107.7
1990	128.5
1995	148.5
1998	160.4
1999	163.9
2000	169.6
2001	176.4
2002	180.3
2003	184.8

Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales, de acuerdo con The Almanac and Book of Facts 2005.

SOLUCIÓN: En la figura 1.87 se muestra un diagrama de dispersión de los datos, en donde x es el número de años desde 1980. Como los datos caen cerca de una recta inclinada, podemos utilizar una calculadora para calcular la recta de regresión para modelar los datos. La ecuación de la recta de regresión es $y = 4.37x + 83.20$.

Como lo muestra la figura 1.88, la recta se ajusta muy bien a los datos.

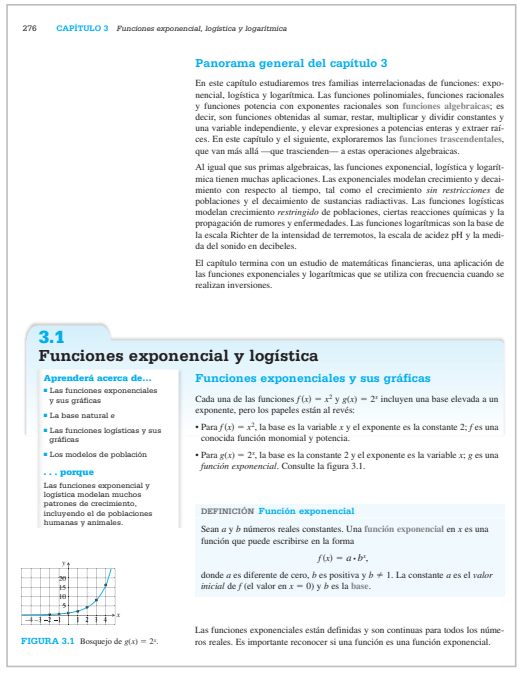
Para predecir el IPC vivienda para 2004, utilizamos $x = 24$ en la ecuación de la recta de regresión. En forma análoga, podemos predecir el IPC vivienda para cada uno de los años del 2004 al 2010 como se muestra a continuación:

IPC (vivienda) pronosticado

Año	IPC vivienda pronosticado
2004	$y = 4.37(24) + 83.20 = 188.1$
2005	$y = 4.37(25) + 83.20 = 192.5$
2006	$y = 4.37(26) + 83.20 = 196.8$
2007	$y = 4.37(27) + 83.20 = 201.2$
2008	$y = 4.37(28) + 83.20 = 205.6$
2009	$y = 4.37(29) + 83.20 = 209.9$
2010	$y = 4.37(30) + 83.20 = 214.3$

Incluso con un ajuste de regresión tan impresionante como el de la figura 1.88, es riesgoso predecir más allá del conjunto de datos. Estadísticas como el IPC son dependientes de muchos factores volátiles que rápidamente pueden dejar a cualquier modelo matemático obsoleto. De hecho, muchos economistas convencidos de que el crecimiento no podía sostenerse, empezaron a alertar en 2003 que la "burbuja de vivienda" reventaría antes de 2010.

De forma análoga, la característica **Aprenderá acerca de… …porque** proporciona las ideas generales de cada sección y explica su propósito. Es importante leer esta parte y revisarla una vez terminado el capítulo para asegurarse de que ha comprendido todos los temas importantes que acaba de estudiar.


276 CAPÍTULO 3 *Funciones exponencial, logística y logarítmica*

Panorama general del capítulo 3

En este capítulo estudiaremos tres familias interrelacionadas de funciones: exponencial, logística y logarítmica. Las funciones polinomiales, funciones racionales y funciones potencia con exponentes racionales son funciones algebraicas; es decir, son funciones obtenidas al sumar, restar, multiplicar y dividir constantes y una variable independiente, y elevar expresiones a potencias enteras y extraer raíces. En este capítulo y el siguiente, exploraremos las funciones trascendentales, que van más allá —que trascienden— a estas operaciones algebraicas.

Al igual que sus primas algebraicas, las funciones exponencial, logística y logarítmica tienen muchas aplicaciones. Las exponenciales modelan crecimiento y decaimiento con respecto al tiempo, tal como el crecimiento *sin restricciones* de poblaciones y el decaimiento de sustancias radiactivas. Las funciones logísticas modelan crecimiento *restringido* de poblaciones, ciertas reacciones químicas y la propagación de rumores y enfermedades. Las funciones logarítmicas son la base de la escala Richter de la intensidad de terremotos, la escala de acidez pH y la medida del sonido en decibeles.

El capítulo termina con un estudio de matemáticas financieras, una aplicación de las funciones exponenciales y logarítmicas que se utiliza con frecuencia cuando se realizan inversiones.

3.1
Funciones exponencial y logística

Aprenderá acerca de…
- Las funciones exponenciales y sus gráficas
- La base natural e
- Las funciones logísticas y sus gráficas
- Los modelos de población

. . . porque
Las funciones exponencial y logística modelan muchos patrones de crecimiento, incluyendo el de poblaciones humanas y animales.

Funciones exponenciales y sus gráficas

Cada una de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$ incluyen una base elevada a un exponente, pero los papeles están al revés:

- Para $f(x) = x^2$, la base es la variable x y el exponente es la constante 2; f es una conocida función monomial y potencia.
- Para $g(x) = 2^x$, la base es la constante 2 y el exponente es la variable x; g es una *función exponencial*. Consulte la figura 3.1.

DEFINICIÓN **Función exponencial**

Sean a y b números reales constantes. Una función exponencial en x es una función que puede escribirse en la forma

$$f(x) = a \cdot b^x,$$

donde a es diferente de cero, b es positiva y $b \neq 1$. La constante a es el *valor inicial* de f (el valor en $x = 0$) y b es la base.

FIGURA 3.1 Bosquejo de $g(x) = 2^x$.

Las funciones exponenciales están definidas y son continuas para todos los números reales. Es importante reconocer si una función es una función exponencial.

Logaritmos comunes, base 10

Los logaritmos con base 10 se denominan **logaritmos comunes**. Debido a su relación con nuestro sistema de base 10, el sistema métrico y la notación científica, los logaritmos comunes son especialmente útiles. Con frecuencia quitamos el subíndice 10 para la base cuando usamos logaritmos comunes. La función logaritmo común $\log_{10} x = \log x$ es la inversa de la función exponencial $f(x) = 10^x$. Así

$$y = \log x \quad \text{si y sólo si} \quad 10^y = x.$$

Aplicando esta relación podemos obtener otras relaciones para los logaritmos con base 10.

Propiedades básicas de los logaritmos comunes

Sea x y y números reales con $x > 0$.

- $\log 1 = 0$ ya que $10^0 = 1$.
- $\log 10 = 1$ ya que $10^1 = 10$.
- $\log 10^y = y$ ya que $10^y = 10^y$.
- $10^{\log x} = x$ ya que $\log x = \log x$.

Con el fin de facilitar su localización y consulta, el **vocabulario** se resalta en gris. Las **propiedades** están en recuadros de color para que sea fácil encontrarlas.

Cada ejemplo termina con una sugerencia de ***Ahora resuelva*** un ejercicio relacionado. Resolver el o los ejercicios sugeridos es una forma sencilla de comprobar la comprensión del material sobre la marcha y no al final de cada sección o capítulo para ver si "consigue hacerlo". Se proporcionan alternativas para estos ejemplos en el paquete de *Acetatos y transparencias* (en inglés).

EJEMPLO 5 Transformación de funciones exponenciales

Describa cómo transformar la gráfica de $f(x) = e^x$ en la gráfica de la función dada. Bosqueje las gráficas y respalde su respuesta con una graficadora.

a) $g(x) = e^{2x}$ **b)** $h(x) = e^{-x}$ **c)** $k(x) = 3e^x$

continúa

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $g(x) = e^{2x}$ se obtiene mediante una compresión horizontal de la gráfica de $f(x) = e^x$ en un factor de 2 (consulte la figura 3.7 a)).

b) Podemos obtener la gráfica de $h(x) = e^{-x}$ mediante una reflexión de la gráfica de $f(x) = e^x$ con respecto al eje y (figura 3.7 b)).

c) Podemos obtener la gráfica de $k(x) = 3e^x$ mediante un alargamiento vertical, en un factor de 3, de la gráfica de $f(x) = e^x$ (figura 3.7 c)).

Ahora resuelva el ejercicio 21.

EXPLORACIÓN 1 Gráficas de funciones exponenciales

1. Grafique cada función en la ventana de visualización $[-2, 2]$ por $[-1, 6]$.

a) $y_1 = 2^x$ **b)** $y_2 = 3^x$ **c)** $y_3 = 4^x$ **d)** $y_4 = 5^x$

- ¿Qué punto tienen en común las cuatro gráficas?
- Analice las funciones, con respecto a dominio, rango, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, simetría, acotamiento, máximos y mínimos, asíntotas y comportamiento en los extremos.

2. Grafique cada función en la ventana de visualización $[-2, 2]$ por $[-1, 6]$.

a) $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **b)** $y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $y_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **d)** $y_4 = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

- ¿Cuál punto es común a las cuatro gráficas?
- Analice las funciones, con respecto a dominio, rango, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, simetría, acotamiento, máximos y mínimos, asíntotas y comportamiento en los extremos.

Exploraciones aparecen en todo el texto y proporcionan la perfecta oportunidad para ser un estudiante activo y descubrir las matemáticas por su propia cuenta. Esto le ayudará a refinar su pensamiento crítico y sus habilidades de resolución de problemas. Algunas exploraciones están basadas en la tecnología; otras implican la exploración de ideas y relaciones matemáticas.

A lo largo del texto aparecen **Notas al margen** relacionadas con varios temas. Las *sugerencias* le ofrecen consejos prácticos en el uso de su graficadora para obtener resultados mejores y más precisos. Las *notas al margen* incluyen comentarios históricos, sugerencias acerca de ejemplos e ideas adicionales para ayudarle a evitar errores y riesgos.

UN POCO DE HISTORIA

Las funciones logarítmicas fueron desarrolladas alrededor de 1594, como herramientas computacionales, por el matemático escocés John Napier (1550-1617). Originalmente, les llamó "números artificiales", pero cambió el nombre por el de logaritmos, que significa "números de cálculo" o "números para calcular".

El icono **Adelanto de cálculo** se encuentra a lo largo del texto antes de muchos ejemplos y temas para marcar los conceptos que los estudiantes encontrarán nuevamente en cálculo. Se resaltan las ideas que presagian cálculo como límites, máximos y mínimos, asíntotas y continuidad. Al inicio del texto, la idea de límite se presenta de forma intuitiva y empleando un enfoque conceptual. En los primeros capítulos se introduce algo de la notación y el lenguaje de cálculo, y se utiliza en todo el texto para establecer familiaridad.

Gráficas de funciones logarítmicas con base *b*

Con la fórmula de cambio de base podemos reescribir cualquier función logarítmica $g(x) = \log_b x$ como

$$g(x) = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{1}{\ln b} \ln x.$$

Así, toda función logarítmica es un múltiplo constante de la función logaritmo natural, $f(x) = \ln x$. Si la base es $b > 1$, la gráfica de $g(x) = \log_b x$ es un alargamiento o compresión vertical, en un factor de $1/\ln b$, de la gráfica de $f(x) = \ln x$. Si $0 < b < 1$ también se requiere una reflexión respecto del eje x.

En los ejercicios 71 y 72 utilice la información de la tabla 3.28.

Tabla 3.28 Poblaciones de dos estados de Estados Unidos (en millones)

Año	Georgia	Illinois
1900	2.2	4.8
1910	2.6	5.6
1920	2.9	6.5
1930	2.9	7.6
1940	3.1	7.9
1950	3.4	8.7
1960	3.9	10.1
1970	4.6	11.1
1980	5.5	11.4
1990	6.5	11.4
2000	8.2	12.4

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, de acuerdo con el World Almanac and Book of Facts 2005.

71. Modelación poblacional Determine un modelo exponencial de regresión para la población de Georgia y utilícelo para pronosticar la población en 2005.

72. Modelación poblacional Determine un modelo logístico de regresión para la población de Illinois y utilícelo para pronosticar la población en 2010.

El icono **Datos de la Web/reales** se utiliza para marcar los ejemplos y ejercicios que utilizan datos reales citados.

IDEAS CLAVE DEL CAPÍTULO 3

PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

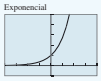
Crecimiento y decaimiento exponencial 279
Funciones exponenciales $f(x) = b^x$ 280
Funciones exponenciales y la base e 282
Modelo exponencial de población 290
Cambio entre forma logarítmica y exponencial 300
Propiedades básicas de los logaritmos 301
Propiedades básicas de los logaritmos comunes 302
Propiedades básicas de logaritmos naturales 304
Propiedades de los logaritmos 310
Fórmula de cambio de base para logaritmos 313
Funciones logarítmicas $f(x) = \log_b x$, con $b > 1$ 314
Propiedades de inyectividad (uno a uno) 320
Ley de enfriamiento de Newton 326
Interés capitalizable anualmente 334
Interés compuesto k veces por año 335
Porcentaje de rendimiento anual 336
Rendimiento porcentual anual 337
Valor presente de una anualidad 340

PROCEDIMIENTOS

Cómo expresar información de otra forma 314-316
Transformación logarítmica 328-329

GALERÍA DE FUNCIONES

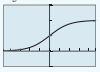
Exponencial



$[-4, 4]$ por $[-1, 5]$

$f(x) = e^x$

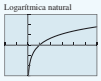
Logística básica



$[-4.7, 4.7]$ por $[-0.5, 1.5]$

$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

Logarítmica natural



$[-2, 6]$ por $[-3, 3]$

$f(x) = \ln x$

El material de **Repaso de capítulo** está constituido por secciones dedicadas a ayudar a los estudiantes a revisar los conceptos leídos. Las **Ideas clave** constan de tres partes: Propiedades, Teoremas y Fórmulas; Procedimientos; y Galería de funciones. Los **Ejercicios de repaso** representan una gama completa de ejercicios tratados en el capítulo y dan práctica adicional en las ideas desarrolladas. Los ejercicios marcados en azul indican problemas que constituirían un buen examen de práctica. Cada capítulo concluye con un **Proyecto** que pide a los estudiantes analizar datos. Pueden asignarse de forma individual o para trabajo en equipo. Cada proyecto desarrolla los conceptos e ideas enseñados en el capítulo, y muchos proyectos remiten a la Web para investigación posterior de datos reales.

CAPÍTULO 3 Ejercicios de repaso

La colección de ejercicios marcados en azul podría utilizarse como un examen del capítulo.

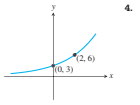
En los ejercicios 1 y 2 calcule el valor exacto de la función para el valor de x dado. No utilice calculadora.

1. $f(x) = -3 \cdot 4^x$ para $x = \frac{1}{3}$

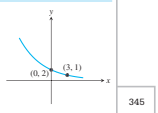
2. $f(x) = 6 \cdot 3^x$ para $x = -\frac{3}{2}$

En los ejercicios 3 y 4 determine una fórmula para la función exponencial cuya gráfica se muestra en la figura.

3.



4.



encial.

de f en la gráfica de $g(x) = 2^x$ o $h(x) = e^x$. Haga un bosquejo y respalde su respuesta con un graficadora.

5. $f(x) = 4^{-x} + 3$ **6.** $f(x) = -4^{-x}$

7. $f(x) = -8^{-x} - 3$ **8.** $f(x) = 8^{-x} + 3$

9. $f(x) = e^{2x-3}$ **10.** $f(x) = e^{3x-4}$

En los ejercicios 11 y 12 determine la intersección y y las asíntotas horizontales.

11. $f(x) = \frac{100}{5 + 3e^{-0.05x}}$ **12.** $f(x) = \frac{50}{5 + 2e^{-0.04x}}$

En los ejercicios 13 y 14 indique si la función es una función con crecimiento exponencial o una función con decaimiento exponencial, y describa su comportamiento en los extremos mediante límites.

13. $f(x) = e^{4-x} + 2$ **14.** $f(x) = 2(5^{x-3}) + 1$

En los ejercicios del 15 al 18 grafique la función y analícela con respecto al dominio, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, simetría, acotamiento, mínimos y máximos, asíntotas y comportamiento en los extremos.

15. $f(x) = e^{3-x} + 1$ **16.** $g(x) = 3(4^{x+1}) - 2$

17. $f(x) = \frac{6}{1 + 3 \cdot 0.4^x}$ **18.** $g(x) = \frac{100}{4 + 2e^{-0.01x}}$

En los ejercicios del 19 al 22 determine la función exponencial que satisface las condiciones dadas.

31. $\log_3 x = 5$ **32.** $\log_2 x = y$

33. $\ln \frac{x}{y} = -2$ **34.** $\log \frac{a}{b} = -3$

En los ejercicios del 35 al 38 describa cómo transformar la gráfica de $y = \log_2 x$ en la gráfica de la función dada. Bosqueje a mano la gráfica y respalde su respuesta con un graficadora.

35. $f(x) = \log_2(x + 4)$ **36.** $g(x) = \log_2(4 - x)$

37. $h(x) = -\log_2(x - 1) + 2$ **38.** $h(x) = -\log_2(x + 1) + 4$

En los ejercicios del 39 al 42 grafique la función y analícela con respecto a dominio, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, simetría, acotamiento, mínimos y máximos, asíntotas y comportamiento en los extremos.

39. $f(x) = x \ln x$ **40.** $f(x) = x^2 \ln x$

41. $f(x) = x^2 \ln |x|$ **42.** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

En los ejercicios del 43 al 54 resuelva la ecuación.

43. $10^x = 4$ **44.** $e^x = 0.25$

45. $1.05^x = 3$ **46.** $\ln x = 5.4$

47. $\log x = -7$ **48.** $3^{x-3} = 5$

49. $3 \log_2 x + 1 = 7$ **50.** $2 \log_3 x - 3 = 4$

51. $\frac{3^x - 3^{-x}}{2} = 5$ **52.** $\frac{50}{4 + e^{2x}} = 11$

53. $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 4$

54. $\ln(3x + 4) - \ln(2x + 1) = 5$

CAPÍTULO 3 Proyecto

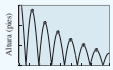
Análisis del rebote de una pelota

Cuando una pelota rebota hacia arriba y hacia abajo sobre una superficie plana, su altura máxima disminuye con cada rebote. Cada rebote es un porcentaje de la altura previa; para la mayoría de las pelotas, el porcentaje es constante. En este proyecto utilizará un dispositivo de detección de movimiento para recolectar datos del rebote de una pelota debajo de un detector de movimiento, luego determinará un modelo matemático que describa la altura máxima del rebote como una función del número del rebote.

Recolección de datos

Configure el sistema CBL™ (calculadora de laboratorio) con un detector de movimiento o un sistema CBR™ (calculadora de campo) para recolectar la información de la pelota que rebota, mediante un programa para la CBL o la aplicación Ball Bounce (pelota que rebota) para el CBR. Consulte la guía de la CBL/CBR para instrucción específica de configuración.

Mantenga la pelota al menos a 2 pies del detector y suéltela para que rebote hacia arriba y hacia abajo, directamente debajo del detector. Esos programas convierten la distancia contra el tiempo a altura con respecto del suelo contra el tiempo. La gráfica muestra un ejemplo de datos recolectados con una pelota de racquetbol y la CBR. La tabla de abajo muestra todas las alturas máximas recopiladas.



Número de rebote	Altura máxima (pies)
0	2.7188
1	2.1426
2	1.6565
3	1.2640
4	0.98309
5	0.77783

EXPLORACIONES

1. Si usted reúne información mediante una CBL o CBR, en su calculadora graficadora o en la pantalla de la computadora debe aparecer una gráfica de la altura contra el tiempo. Localice la altura máxima para cada rebote, registre el dato en una tabla y utilice otras listas de su calculadora para introducirlo. Si no tiene acceso a una CBL/CBR, ingrese en su calculadora o computadora los datos dados en la tabla.
2. ¿Qué porcentaje de la altura del rebote 0 es la altura del rebote 1? Calcule el porcentaje al que regresa para cada rebote. El número será casi constante.
3. Haga un diagrama de dispersión para la altura máxima en contra del número de rebote.
4. Para el rebote 1, la altura se predice multiplicando la altura del rebote 0, o H, por el porcentaje P. La segunda altura se predice multiplicando esta altura HP por P lo que da HP^2. Explique por qué $y = HP^x$ es el modelo adecuado para estos datos, donde x es el número de rebote.
5. Ingrese esta ecuación a su calculadora utilizando sus valores para H y P. ¿Cómo se ajusta el modelo a sus datos?
6. Utilice las características estadísticas de su calculadora para determinar la regresión exponencial para estos datos. Compárela con la ecuación que utilizó como modelo.
7. Si utiliza un tipo diferente de pelota, ¿cómo cambiarían sus datos y su ecuación?
8. ¿Qué factores cambiarían el valor de H y qué factores influirían en el valor de P?
9. Rescriba su ecuación usando la base e, en lugar de usar P como la base para la ecuación exponencial.
10. ¿Qué podría decir acerca de cómo se ve la gráfica de ln(altura del rebote) contra el número de rebote?
11. Trace ln(altura del rebote) contra número de rebote. Calcule la regresión lineal y utilice el concepto de re-expresión (transformación) logarítmica, para explicar cómo la pendiente y la intersección y están relacionadas con P y H.

REPASO RÁPIDO 3.5 *(Para obtener ayuda consulte las secciones R.1 y 1.4)*

En los ejercicios del 1 al 4 pruebe que cada función, en el par dado, es la inversa de la otra.

1. $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = \ln(x^{1/2})$
2. $f(x) = 10^{x/2}$ y $g(x) = \log x^2$, $x > 0$
3. $f(x) = (1/3) \ln x$ y $g(x) = e^{3x}$
4. $f(x) = 3 \log x^2$, $x > 0$ y $g(x) = 10^{x/6}$

En los ejercicios 5 y 6 escriba el número en notación científica.

5. La distancia media de Júpiter al Sol es alrededor de 778,300,000 km.
6. Un núcleo atómico tiene un diámetro de casi 0.000000000000001 m.

En los ejercicios 7 y 8 escriba el número en forma decimal.

7. El número de Avogadro es alrededor de 6.02×10^{23}.
8. La unidad de masa atómica es casi 1.66×10^{-27} kg.

En los ejercicios 9 y 10 utilice notación científica para simplificar la expresión (deje su respuesta en notación científica).

9. $(186{,}000)(31{,}000{,}000)$ **10.** $\frac{0.0000008}{0.000005}$

Preguntas de examen estandarizado

59. **Verdadero o falso** El orden de magnitud de un número positivo es su logaritmo natural. Justifique su respuesta.

60. **Verdadero o falso** De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, un objeto tenderá a la temperatura del medio que lo rodea. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 61 al 64 resuelva el problema sin utilizar una calculadora.

61. **Opción múltiple** Resuelva $2^{3x-1} = 32$.

A) $x = 1$ **B)** $x = 2$ **C)** $x = 4$
D) $x = 11$ **E)** $x = 13$

62. **Opción múltiple** Resuelva $\ln x = -1$.

A) $x = -1$ **B)** $x = 1/e$ **C)** $x = 1$
D) $x = e$ **E)** No hay solución posible.

63. **Opción múltiple** ¿Cuántas veces fue más fuerte el terremoto de 2001 en Arequipa, Perú ($R_1 = 8.1$) que el terremoto doble de 1998 en la provincia de Takhar, Afganistán ($R_2 = 6.1$)?

A) 2 **B)** 6.1 **C)** 8.1
D) 14.2 **E)** 100

64. **Opción múltiple** La ley de enfriamiento de Newton es

A) Un modelo exponencial **B)** Un modelo lineal
C) Un modelo logarítmico **D)** Un modelo logístico
E) Un modelo potencia

Exploraciones

En los ejercicios 65 y 66 utilice la tabla 3.26. Determine si una ecuación de regresión lineal, logarítmica, exponencial, potencia o logística constituye el mejor modelo para los datos. Explique el por qué de su elección. Respalde su redacción con tablas y gráficas, como considere necesario.

Tabla 3.26 Poblaciones de dos estados de Estados Unidos (en miles)

Año	Alaska	Hawai
1900	63.6	154
1910	64.4	192
1920	55.0	256
1930	59.2	368
1940	72.5	423
1950	128.6	500
1960	226.2	633
1970	302.6	770
1980	401.9	965
1990	550.0	1108
2000	626.9	1212

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

65. **Escriba para aprender** **Modelación poblacional** ¿Cuál ecuación de regresión es el mejor modelo para la población de Alaska?

66. **Escriba para aprender** **Modelación poblacional** ¿Cuál ecuación de regresión es el mejor modelo para la población de Hawai?

67. **Actividad en grupo** **Modelación poblacional** La función

$$f(x) = k \cdot e^{-cx^2},$$

donde c y k son constantes positivas, es una curva en forma de campana que es útil en probabilidad y estadística.

a) Grafique f para $c = 1$ y $k = 0.1, 0.5, 1, 2, 10$. Explique el efecto del cambio en k.

b) Grafique f para $k = 1$ y $c = 0.1, 0.5, 1, 2, 10$. Explique el efecto del cambio en c.

Ampliación de las ideas

68. **Escriba para aprender** Pruebe, si $u/v = 10^n$, para $u > 0$ y $v > 0$, y luego $\log u - \log v = n$. Explique cómo este resultado relaciona a potencias de diez y órdenes de magnitud.

69. **Energía potencial** La energía potencial E (la energía almacenada para usarla posteriormente) entre dos iones en cierta estructura molecular se modela mediante la función

$$E = -\frac{5.6}{r} + 10e^{-r/3}$$

donde r es la distancia que separa los núcleos.

a) **Escriba para aprender** Grafique esta función en la ventana $[-10, 10]$ por $[-10, 30]$ y explique cuál parte de la gráfica no representa esta situación de energía potencial.

b) Identifique una ventana de visualización que muestre la parte de la gráfica (con $r \leq 10$) que representa esta situación y determine el valor máximo para E.

70. En el ejemplo 8, el modelo de la ley de enfriamiento de Newton era

$$T(t) - T_m = (T_0 - T_m)e^{-kt} = 61.656 \times 0.9277^t$$

Determine el valor de k.

71. Justifique la conclusión hecha acerca de la regresión logarítmica natural de la página 329.

72. Justifique la conclusión realizada acerca de la regresión potencia de la página 329.

En los ejercicios del 73 al 78 resuelva la ecuación o la desigualdad.

73. $e^x + x = 5$

74. $e^{2x} - 8x + 1 = 0$

75. $e^x < 5 + \ln x$

76. $\ln|x| - e^{2x} \geq 3$

77. $2 \log x - 4 \log 3 > 0$

78. $2 \log(x + 1) - 2 \log 6 < 0$

Conjuntos de ejercicios

Cada conjunto de ejercicios inicia con un **Repaso rápido** para ayudarle a revisar las habilidades necesarias en el conjunto de ejercicios y, por tanto, recuerdan nuevamente que las matemáticas no son modulares. También hay indicaciones *Para obtener ayuda consulte la sección...* de modo que los estudiantes estén preparado para resolver la sección de ejercicios.

Hay más de 6,000 ejercicios, incluyendo 680 ejercicios de repaso rápido. Después del Repaso rápido están los ejercicios que permiten practicar las habilidades matemáticas aprendidas en la sección. Estos ejercicios han sido cuidadosamente clasificados desde rutinarios hasta desafiantes. En cada conjunto de ejercicios se prueba cada uno de los siguientes tipos de habilidades:

- Manipulación algebraica y analítica.
- Enlace de álgebra a geometría.
- Interpretación de gráficas.
- Representación gráfica y numérica de funciones.
- Análisis de datos.

En estas partes se incluyen también ejercicios que inducen al razonamiento:

- **Preguntas de examen estandarizado** Incluyen dos problemas de falso-verdadero con justificaciones y cuatro preguntas de opción múltiple.
- **Exploraciones** Son oportunidades para que los estudiantes descubran matemáticas por ellos mismos o en grupos. Con frecuencia estos ejercicios requieren el uso de pensamiento crítico para explorar ideas.
- Los ejercicios **Escriba para aprender** desarrollan las habilidades de comunicación en matemáticas y proporcionan la oportunidad de demostrar la comprensión de ideas importantes.

- Los ejercicios **Actividad en grupo** le piden abordar los problemas en equipo o resolverlos en forma individual o proyectos grupales.
- Los ejercicios **Ampliación de las ideas** van más allá de los que se presentaron en el texto. Estos ejercicios son ampliaciones desafiantes del material del libro.

Esta variedad de ejercicios proporciona suficiente flexibilidad para enfatizar las habilidades más necesarias para cada estudiante o grupo.

Suplementos y recursos

Para el instructor (en inglés)

Manual de recursos

- Revisión de conceptos importantes, hojas de cálculo para actividad en grupo, exámenes muestra de capítulos, preguntas de preparación para exámenes estandarizados, problemas de concurso.

Manual de soluciones

- Soluciones completas a todos los ejercicios, incluyendo Repaso rápido, Ejercicios, Exploraciones y Repaso de capítulo.

Exámenes y cuestionarios

- Dos exámenes por capítulo, dos cuestionarios por cada tres o cuatro secciones, dos exámenes de mitad de curso que cubren los capítulos del R al 5, dos exámenes finales que cubren los capítulos del 6 al 10.

Recursos de tecnología

MyMathLab

MyMathLab es un exclusivo sistema de ejercicios en línea que permite al alumno acceder a un sinnúmero de ejercicios generados algorítmicamente y obtener retroalimentación en función de sus errores.

Con *MyMathLab*, el profesor puede seleccionar los ejercicios que desee incluir en cada tarea y el alumno obtendrá retroalimentación personalizada, además de una serie de herramientas que le guiarán paso a paso en la resolución de un problema. *MyMathLab* incluye también videos y animaciones para la mejor comprensión de los temas. *MyMathLab* es el único sistema de ejercicios en línea que hace un diagnóstico del avance de cada alumno y le genera nuevos ejercicios y actividades personalizadas en función de sus necesidades.

MyMathLab está montado sobre *CourseCompass*, la plataforma en línea basada en *Blackboard*, exclusiva de Pearson Educación. Esta combinación, ofrece a los profesores una vanguardia educativa en línea, líder a nivel mundial.

Para mayor información consulte a su representante de Pearson Educación cómo obtener acceso a estos recursos.

TestGen®

TestGen® permite al instructor construir, editar, imprimir y administrar exámenes mediante un banco computarizado de preguntas, desarrollado para cubrir todos los objetivos del texto. TestGen tiene una base algorítmica, lo que permite a los instructores crear versiones múltiples y equivalentes de la misma pregunta o el mismo examen con el clic de un botón. También pueden modificar preguntas o agregar otras nuevas. Los exámenes pueden imprimirse o darse a resolver en línea.

Sitio Web

Nuestro sitio Web, www.pearsoneducacion.net/demana, proporciona recursos dinámicos. Incluye material para descargar, para la calculadora graficadora TI, cuestionarios en línea, sugerencias de enseñanza, sugerencias de estudio, exploraciones y proyectos de final de capítulo.

Agradecimientos

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a los revisores de esta edición y de las anteriores, quienes proporcionaron valiosas ideas y comentarios. Un agradecimiento especial a nuestra asesora Cynthia Schimek, *Secondary Mathematics Curriculum Specialist, Katy Independent School District, Texas*, por su guía e invaluables ideas en esta revisión.

Judy Ackerman
Montgomery College

Ignacio Alarcon
Santa Barbara City College

Ray Barton
Olympus High School

Nicholas G. Belloit
Florida Community College at Jacksonville

Margaret A. Blumberg
University of Southwestern Louisiana

Ray Cannon
Baylor University

Marilyn P. Carlson
Arizona State University

Edward Champy
Northern Essex Community College

Janis M. Cimperman
Saint Cloud State University

Wil Clarke
La Sierra University

Marilyn Cobb
Lake Travis High School

Donna Costello
Plano Senior High School

Gerry Cox
Lake Michigan College

Deborah A. Crocker
Appalachian State University

Marian J. Ellison
University of Wisconsin—Stout

Donna H. Foss
University of Central Arkansas

Betty Givan
Eastern Kentucky University

Brian Gray
Howard Community College

Daniel Harned
Michigan State University

Vahack Haroutunian
Fresno City College

Celeste Hernandez
Richland College

Rich Hoelter
Raritan Valley Community College

Dwight H. Horan
Wentworth Institute of Technology

Margaret Hovde
Grossmont College

Miles Hubbard
Saint Cloud State University

Sally Jackman
Richland College

T. J. Johnson
Hendrickson High School

Stephen C. King
University of South Carolina—Aiken

Jeanne Kirk
William Howard Taft High School

Georgianna Klein
Grand Valley State University

Deborah L. Kruschwitz-List
University of Wisconsin—Stout

Carlton A. Lane
Hillsborough Community College

James Larson
Lake Michigan University

Edward D. Laughbaum
Columbus State Community College

Ron Marshall
Western Carolina University

Janet Martin
Lubbock High School

Beverly K. Michael
University of Pittsburgh

Paul Mlakar
St. Mark's School of Texas

John W. Petro
Western Michigan University

Cynthia M. Piez
University of Idaho

Debra Poese
Montgomery College

Jack Porter
University of Kansas

Antonio R. Quesada
The University of Akron

Hilary Risser
Plano West Senior High

Thomas H. Rousseau
Siena College

David K. Ruch
Sam Houston State University

Sid Saks
Cuyahoga Community College

Mary Margaret Shoaf-Grubbs
College of New Rochelle

Malcolm Soule
California State University, Northridge

Sandy Spears
Jefferson Community College

Shirley R. Stavros
Saint Cloud State University

Stuart Thomas
University of Oregon

Janina Udrys
Schoolcraft College

Mary Voxman
University of Idaho

Eddie Warren
University of Texas at Arlington

Steven J. Wilson
Johnson County Community College

Gordon Woodward
University of Nebraska

Cathleen Zucco-Teveloff
Trinity College

Extendemos ese agradecimiento especial a Chris Brueningsen, Linda Antinone y Bill Bower por su trabajo en los proyectos de capítulo. También agradecemos a Perian Herring, Frank Purcell y Tom Wegleitner por su meticulosa revisión del texto. Igualmente estamos agradecidos con Besbit Graphics, quien realizó un sorprendente trabajo de composición y corrección de pruebas, y específicamente a Kathy Smith y a Harry Druding por su hábil manejo de todo el proceso de producción. Por último, damos las gracias al excepcional y profesional equipo de Addison-Wesley, por su asesoría y apoyo en la revisión de este texto, en particular a Anne Kelly, Becky Anderson, Greg Tobin, Rich Williams, Neil Heyden, Gary Schwartz, Marnie Greenhut, Joanne Ha, Karen Wernholm, Jeffrey Holcomb, Barbara Atkinson, Evelyn Beaton, Beth Anderson, Maureen McLaughlin y Michelle Murray. Un reconocimiento particular se debe a Elka Block, quien de manera incasable nos ayudó en todo el desarrollo y producción de esta obra.

—F. D. D.

—B. K. W.

—G. D. F.

—D. K.

CAPÍTULO R

Requisitos

R.1 Números reales

R.2 Sistema de coordenadas cartesianas

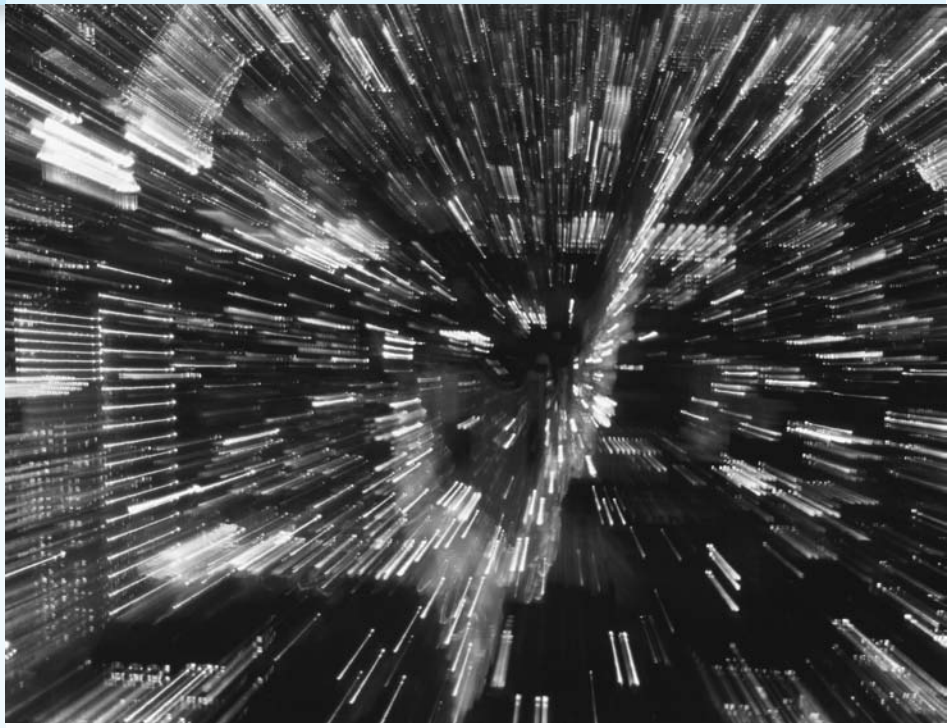
R.3 Ecuaciones y desigualdades lineales

R.4 Rectas en el plano

R.5 Resolución de ecuaciones en forma gráfica, numérica y algebraica

R.6 Números complejos

R.7 Resolución de desigualdades en forma algebraica y gráfica



Las grandes distancias se miden en *años-luz*; un año-luz es la distancia que la luz recorre en un año. Los astrónomos emplean la velocidad de la luz, aproximadamente 186,000 millas por segundo (300,000 kilómetros por segundo) para aproximar distancias entre planetas (puede consultar ejemplos de esto en la página 39).

Visión general del capítulo R

Históricamente, el álgebra se ha empleado para representar problemas con símbolos (modelos algebraicos) y resolverlos reduciendo la solución a manipulaciones algebraicas. Esta técnica aún es relevante en nuestros días. Actualmente, las calculadoras graficadoras se utilizan para plantear problemas mediante gráficas (modelos gráficos) y resolverlos con técnicas numéricas y gráficas.

Comenzaremos por las propiedades básicas de los números reales y nos introduciremos al estudio del valor absoluto, las fórmulas de la distancia y el punto medio, y escribiremos ecuaciones de circunferencias. Además, emplearemos la pendiente de una recta para escribir las ecuaciones estándar de rectas y aplicaciones en donde se involucran ecuaciones lineales. Finalmente, resolveremos ecuaciones y desigualdades con técnicas algebraicas y gráficas.

R.1 Números reales

Aprenderá acerca de...

- La representación de números reales
- El orden y la notación de intervalo
- Las propiedades básicas del álgebra
- Los exponentes enteros
- La notación científica

. . . porque

Estos temas son fundamentales en el estudio de la matemática y la ciencia.

Representación de números reales

Un **número real** es cualquier número que pueda escribirse como un decimal. Los números reales se representan mediante símbolos tales como -8, 0, 1.75, $2.33...$, $0.\overline{36}$, $8/5$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{16}$, e, y π.

El conjunto de los números reales contiene a otros subconjuntos importantes:

Los **números naturales (o de conteo)**: $\{1, 2, 3, \ldots\}$

Los **enteros no negativos**: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Los **enteros**: $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Las llaves { } son utilizadas para encerrar a los **elementos**, u **objetos**, de un conjunto. Los números racionales son otro importante subconjunto de los números reales. Un **número racional** es cualquier número que pueda escribirse como una razón (o cociente) a/b de dos enteros, donde $b \neq 0$. Podemos utilizar la **notación de construcción de conjuntos** para describir a los números racionales:

$$\left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \text{ son enteros y } b \neq 0 \right\}$$

La línea vertical que sigue a a/b se lee "tal que".

La forma decimal de un número racional o bien **termina**, como $7/4 = 1.75$, o bien **se repite infinitamente** como $4/11 = 0.363636... = 0.\overline{36}$. La barra sobre el 36 indica un bloque de dígitos que se repiten. Un número es **irracional** si *no* es racional. La forma decimal de un número irracional es infinita y no se repite. Por ejemplo $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$ y $\pi = 3.14159265\ldots$

En una calculadora, los números reales se aproximan dando sólo unos cuantos de sus dígitos. Algunas veces —no muy frecuentemente— es posible determinar con una calculadora la forma decimal de números racionales.

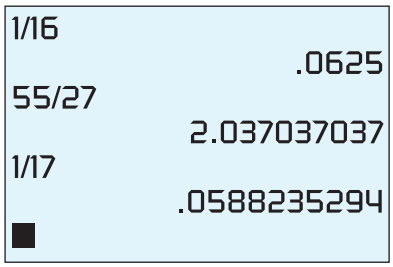


FIGURA R.1 Representación decimal en una calculadora de 1/16, 55/27 y 1/17, con la configuración de la calculadora en modo decimal de punto flotante (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Análisis de formas decimales de números racionales

Determine la forma decimal de 1/16, 55/27 y 1/17.

SOLUCIÓN La figura R.1 sugiere que la forma decimal de 1/16 termina y que 55/27 se repite en bloques de 037.

$$\frac{1}{16} = 0.0625 \quad \text{y} \quad \frac{55}{27} = 2.\overline{037}$$

Con base en la figura R.1, no podemos predecir la forma decimal *exacta* de 1/17; sin embargo, decimos que $1/17 \approx 0.0588235294$. EL símbolo $\approx$ se lee "*es aproximadamente igual a*". Podemos utilizar la división larga (consulte el ejercicio 66) para mostrar que

$$\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 3.

Los números reales y los puntos de una recta pueden hacerse corresponder *uno a uno* para formar una **recta de números reales**. Iniciamos con una recta horizontal y asociamos el número real cero con un punto O, el **origen**. Se consideran **números positivos** a los situados a la derecha del origen y **números negativos** los que están a la izquierda, como se muestra en la figura R.2.

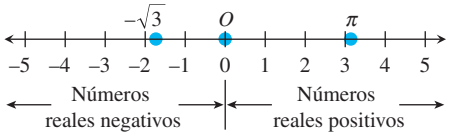


FIGURA R.2 La recta de los números reales.

Cada número real corresponde a uno y sólo a un punto de la recta de números reales, y cada punto en la recta de números reales corresponde a uno y sólo un número real. Entre cada par de números reales en la recta numérica existe una infinidad de números reales más.

El número asociado con un punto es la **coordenada del punto**. Siempre que el contexto sea claro, seguiremos la convención estándar de usar el número real para el nombre tanto del punto como de su coordenada.

Orden y notación de intervalo

El conjunto de números reales está **ordenado**. Esto significa que podemos comparar cualesquiera dos números reales que no sean iguales mediante desigualdades y decir que uno "es menor que" o "mayor que" el otro.

Orden de los números reales

Sean a y b cualesquiera dos números reales.

Símbolo	Definición	Se lee
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b
$a \geq b$	$a - b$ es positivo o cero	a es mayor o igual b
$a \leq b$	$a - b$ es negativo o cero	a es menor o igual a b

Los símbolos $>$, $<$, $\geq$, u $\leq$ son **símbolos de desigualdades**.

SISTEMAS NO ORDENADOS

No todos los sistemas de números están ordenados. Por ejemplo, el sistema de números complejos, que se introducirá en la sección R.6, no tiene un orden natural.

OPUESTOS Y LA RECTA NUMÉRICA

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$
Si $a < 0$, entonces, en la recta numérica, $-a$ está a la izquierda del 0 y su opuesto (o simétrico) está a la derecha del 0. Por tanto, $-a > 0$.

En forma geométrica, $a > b$ significa que a se encuentra a la derecha de b (también que b está a la izquierda de a) en la recta numérica. Por ejemplo, como $6 > 3$, 6 está a la derecha de 3 en la recta numérica. También observe que $a > 0$ significa que $a - 0$ —o simplemente a— es positivo y $a < 0$ significa que a es negativo.

Somos capaces de comparar cualesquiera dos números reales debido a la siguiente propiedad importante de los números reales.

Propiedad de tricotomía

Sean a y b cualesquiera dos números reales. Sólo una de las siguientes expresiones es verdadera:

$$a < b, \quad a = b, \quad \text{o} \quad a > b.$$

Las desigualdades pueden utilizarse para describir **intervalos** de números reales, como se ilustra en el ejemplo 2.

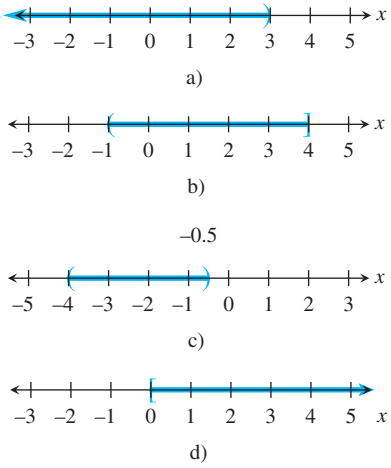


FIGURA R.3 En gráficas de desigualdades, los paréntesis corresponden a $<$ y $>$, y los corchetes a $\leq$ y $\geq$. (Ejemplos 2 y 3.)

EJEMPLO 2 Interpretación de desigualdades

Describa y grafique el intervalo de números reales para la desigualdad.

a) $x < 3$ **b)** $-1 < x \leq 4$

SOLUCIÓN

a) La desigualdad $x < 3$ describe todos los números reales menores que 3 (figura R.3a).

b) La *desigualdad doble* $-1 < x \leq 4$ representa a todos los números reales entre -1 y 4, excluyendo a -1 e incluyendo a 4 (figura R.3b).

Ahora resuelva el ejercicio 5.

EJEMPLO 3 Escritura de desigualdades

Escriba un intervalo de números reales mediante una desigualdad y dibuje su gráfica.

a) Los números reales entre -4 y -0.5.

b) Los números reales mayores o iguales a cero.

SOLUCIÓN

a) $-4 < x < -0.5$ (figura R.3c)

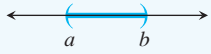
b) $x \geq 0$ (figura R.3d)

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Como se muestra en el ejemplo 2, las desigualdades definen *intervalos* en la recta numérica. Con frecuencia, empleamos [2, 5] para describir el *intervalo acotado* determinado por $2 \leq x \leq 5$. Este intervalo es **cerrado** ya que contiene a los *extremos* 2 y 5. Existen cuatro tipos de **intervalos acotados**.

Intervalos acotados de números reales

Sean a y b números reales con $a < b$.

Notación de intervalo	Tipo de intervalo	Notación de desigualdades	Gráfica
$[a, b]$	Cerrado	$a \leq x \leq b$	
(a, b)	Abierto	$a < x < b$	
$[a, b)$	Semi-abierto	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	Semi-abierto	$a < x \leq b$	

Los números a y b son los **extremos** de cada intervalo.

NOTACIÓN DE INTERVALOS EN $\pm\infty$

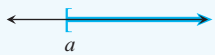
Puesto que $-\infty$ *no* es un número real, utilizamos $(-\infty, 2)$ en lugar de $[-\infty, 2)$ para describir a $x < 2$. De forma análoga, utilizamos $[-1, \infty)$ en lugar de $[-1, \infty]$ para describir $x \geq 1$.

El intervalo de números reales determinado mediante la desigualdad $x < 2$ puede describirse mediante *el intervalo no acotado* $(-\infty, 2)$. Este intervalo es **abierto**, ya que *no* contiene a su extremo 2.

Utilizamos la notación de intervalo $(-\infty, \infty)$ para representar a todo el conjunto de números reales. Los símbolos $-\infty$ (*infinito negativo*) y ∞ (*infinito positivo*), *no* son números reales, pero nos permiten utilizar la notación de intervalos para intervalos no acotados. Existen cuatro tipos de **intervalos no acotados**.

Intervalos no acotados de números reales

Sean a y b números reales.

Notación de intervalo	Tipo de intervalo	Notación de desigualdades	Gráfica
$[a, \infty)$	Cerrado	$x \geq a$	
(a, ∞)	Abierto	$x > a$	
$(-\infty, b]$	Cerrado	$x \leq b$	
$(-\infty, b)$	Abierto	$x < b$	

Cada uno de estos intervalos tiene exactamente un extremo, a o b.

EJEMPLO 4 Conversión entre intervalos y desigualdades

Convierta de notación de intervalos a notación de desigualdades, o viceversa. Determine los extremos; indique si el intervalo es acotado o no y su tipo, y grafique el intervalo.

a) $[-6, 3)$ **b)** $(-\infty, -1)$ **c)** $-2 \le x \le 3$

SOLUCIÓN

a) El intervalo $[-6, 3)$ corresponde a $-6 \le x < 3$, es acotado y es semi-abierto (consulte la figura R.4a). Los puntos extremos son -6 y 3.

b) El intervalo $(-\infty, -1)$ corresponde a $x < -1$, es no acotado y abierto (consulte la figura R.4b). El único punto extremo es -1.

c) La desigualdad $-2 \le x \le 3$ corresponde al intervalo cerrado y acotado $[-2, 3]$ (consulte la figura R.4c). Los extremos son -2 y 3.

Ahora resuelva el ejercicio 29.

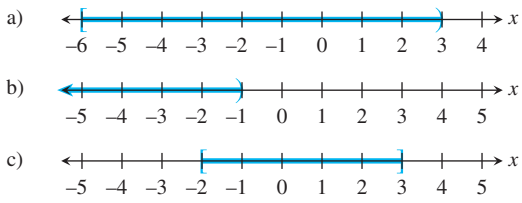


FIGURA R.4 Gráficas de los intervalos de números reales del ejemplo 4.

Propiedades básicas del álgebra

El álgebra incluye el uso de letras y otros símbolos para representar números reales. Una **variable** es una letra o símbolo (por ejemplo, x, y, t, θ) que representa un número real no especificado. Una **constante** es una letra o símbolo (por ejemplo, -2, 0, $\sqrt{3}$, π) que representa un número real específico. Una **expresión algebraica** es una combinación de variables y constantes que incluyen suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces.

Enunciamos algunas de las propiedades de las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división representadas por los símbolos $+$, $-$, $\times$ (o $\cdot$) y $\div$ (o /), respectivamente. La suma y multiplicación son las operaciones primarias. La resta y la división se definen en términos de la suma y la multiplicación.

Resta: $a - b = a + (-b)$

División: $\dfrac{a}{b} = a\left(\dfrac{1}{b}\right), b \neq 0$

En las definiciones anteriores, $-b$ es el **inverso aditivo** u **opuesto** de b, y $1/b$ es el **inverso multiplicativo** o **recíproco** de b. Quizá le sorprenda, pero los inversos aditivos no siempre son números negativos. El inverso aditivo de 5 es el número negativo -5. Sin embargo, el inverso aditivo de -3 es el número positivo 3.

RESTA VS. NÚMEROS NEGATIVOS

En muchas calculadoras, existen dos teclas "$-$", una para la resta y otra para números negativos u opuestos. Asegúrese de aprender a utilizar de forma correcta ambas teclas. El uso incorrecto puede conducir a resultados erróneos.

Las propiedades siguientes se cumplen para los números reales, las variables y las expresiones algebraicas.

Propiedades algebraicas

Sean u, v y w números reales, variables o expresiones algebraicas.

1. Propiedad conmutativa
Suma: $u + v = v + u$
Multiplicación: $uv = vu$

2. Propiedad asociativa
Suma:
$(u + v) + w = u + (v + w)$
Multiplicación: $(uv)w = u(vw)$

3. Propiedad de la identidad
Suma: $u + 0 = u$
Multiplicación: $u \cdot 1 = u$

4. Propiedad del inverso
Suma: $u + (-u) = 0$
Multiplicación: $u \cdot \frac{1}{u} = 1, \; u \neq 0$

5. Propiedad distributiva
Multiplicación sobre la suma:
$u(v + w) = uv + uw$
$(u + v)w = uw + vw$
Multiplicación sobre la resta:
$u(v - w) = uv - uw$
$(u - v)w = uw - vw$

Los miembros izquierdos de las ecuaciones para la propiedad distributiva muestran la **forma factorizada** de las expresiones algebraicas, y los miembros derechos muestran la **forma desarrollada**.

EJEMPLO 5 Uso de la propiedad distributiva

a) Escriba la forma desarrollada de $(a + 2)x$.

b) Escriba la forma factorizada de $3y - by$.

SOLUCIÓN

a) $(a + 2)x = ax + 2x$

b) $3y - by = (3 - b)y$

Ahora resuelva el ejercicio 37.

A continuación se presentan algunas propiedades del inverso aditivo junto con ejemplos que ayudan a ilustrar sus significados.

Propiedades del inverso aditivo

Sean u y v números reales, variables o expresiones algebraicas.

Propiedad	Ejemplo
1. $-(-u) = u$	$-(-3) = 3$
2. $(-u)v = u(-v) = -(uv)$	$(-4)3 = 4(-3) = -(4 \cdot 3) = -12$
3. $(-u)(-v) = uv$	$(-6)(-7) = 6 \cdot 7 = 42$
4. $(-1)u = -u$	$(-1)5 = -5$
5. $-(u + v) = (-u) + (-v)$	$-(7 + 9) = (-7) + (-9) = -16$

Exponentes enteros

La notación exponencial se utiliza para escribir en forma corta los productos de factores que se repiten. Por ejemplo:

$$(-3)(-3)(-3)(-3) = (-3)^4 \quad \text{y} \quad (2x + 1)(2x + 1) = (2x + 1)^2.$$

Notación exponencial

Sea a un número real, variable o expresión algebraica y n un entero positivo. Entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}},$$

donde n es el **exponente**, a es la **base** y a^n es la ***n*-ésima potencia de *a***, se lee como "a a la n".

Las dos expresiones exponenciales del ejemplo 6 tienen el mismo valor pero diferentes bases. Cerciórese de entender la diferencia.

COMPRENSIÓN DE LA NOTACIÓN

$(-3)^2 = 9$
$-3^2 = 9$
¡Tenga cuidado!

EJEMPLO 6 Identificación de la base

a) En $(-3)^5$, la base es -3.

b) En -3^5, la base es 3.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

A continuación están las propiedades de exponentes junto con ejemplos que ayudan a ilustrar sus significados.

Propiedades de los exponentes

Sean u y v números reales, variables o expresiones algebraicas, y sean m y n enteros. Se supone que todas las bases son distintas de cero.

Propiedad	Ejemplo
1. $u^m u^n = u^{m+n}$	$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
2. $\dfrac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$	$\dfrac{x^9}{x^4} = x^{9-4} = x^5$
3. $u^0 = 1$	$8^0 = 1$
4. $u^{-n} = \dfrac{1}{u^n}$	$y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$
5. $(uv)^m = u^m v^m$	$(2z)^5 = 2^5 z^5 = 32z^5$
6. $(u^m)^n = u^{mn}$	$(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$
7. $\left(\dfrac{u}{v}\right)^m = \dfrac{u^m}{v^m}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^7 = \dfrac{a^7}{b^7}$

Simplificar una expresión que incluya potencias significa rescribirla de modo que cada factor aparezca una sola vez, todos los exponentes sean positivos, y los exponentes y constantes se reduzcan tanto como sea posible.

FACTORES DE MOVIMIENTO

Asegúrese de comprender cómo la propiedad 4 de los exponentes nos permite mover factores del numerador al denominador y viceversa.

$$\frac{v^{-m}}{u^{-n}} = \frac{u^n}{v^m}$$

EJEMPLO 7 Simplificación de expresiones que incluyen a potencias

a) $(2ab^3)(5a^2b^5) = 10(aa^2)(b^3b^5) = 10a^3b^8$

b) $\dfrac{u^2v^{-2}}{u^{-1}v^3} = \dfrac{u^2u^1}{v^2v^3} = \dfrac{u^3}{v^5}$

c) $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{-3} = \dfrac{(x^2)^{-3}}{2^{-3}} = \dfrac{x^{-6}}{2^{-3}} = \dfrac{2^3}{x^6} = \dfrac{8}{x^6}$

Ahora resuelva el ejercicio 47.



Notación científica

Cualquier número positivo puede escribirse en **notación científica**,

$$c \times 10^m, \text{ donde } 1 \leq c < 10 \text{ y } m \text{ es un entero.}$$

Esta notación proporciona una manera de trabajar con números muy grandes y números muy pequeños. Por ejemplo, la distancia entre la Tierra y el Sol es de alrededor de 93,000,000 millas. En notación científica

$$93{,}000{,}000 \text{ millas} = 9.3 \times 10^7 \text{ millas.}$$

El *exponente positivo* 7 indica que al mover el punto decimal en 9.3, 7 lugares hacia la derecha se obtiene la forma decimal del número.

La masa de una molécula de oxígeno es de alrededor de

$$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 053 \text{ gramos.}$$

En notación científica

$$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 053 \text{ g} = 5.3 \times 10^{-23} \text{ g.}$$

El *exponente negativo* -23 indica que al mover el punto decimal en 5.3, 23 lugares hacia la izquierda se obtiene la forma decimal del número.

EJEMPLO 8 Conversión a notación científica y viceversa

a) $2.375 \times 10^8 = 237{,}500{,}000$

b) $0.000000349 = 3.49 \times 10^{-7}$

Ahora resuelva los ejercicios 57 y 59.

EJEMPLO 9 Uso de notación científica

Simplifique $\dfrac{(370{,}000)(4{,}500{,}000{,}000)}{18{,}000}$

SOLUCIÓN

Mediante cálculo mental

$$\frac{(370{,}000)(4{,}500{,}000{,}000)}{18{,}000} = \frac{(3.7 \times 10^5)(4.5 \times 10^9)}{1.8 \times 10^4}$$
$$= \frac{(3.7)(4.5)}{1.8} \times 10^{5+9-4}$$
$$= 9.25 \times 10^{10}$$
$$= 92{,}500{,}000{,}000$$

Mediante una calculadora

La figura R.5 muestra dos formas de realizar el cálculo. En la primera, los números se introducen en forma decimal. En la segunda, los números se introducen en notación científica. La calculadora utiliza "9.25E10" para indicar 9.25×10^{10}.

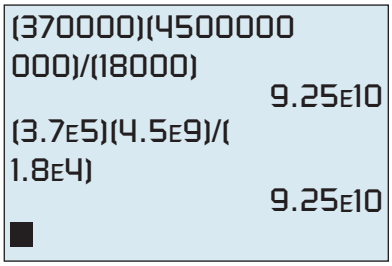


FIGURA R.5 Asegúrese de entender cómo muestra la notación científica su calculadora (ejemplo 9).

Ahora resuelva el ejercicio 63.

REPASO RÁPIDO R.1

1. Liste los enteros positivos entre -3 y 7.

2. Liste los enteros entre -3 y 7.

3. Liste todos los enteros negativos mayores que -4.

4. Liste todos los enteros positivos menores que 5.

En los ejercicios 5 y 6 utilice una calculadora para evaluar la expresión. Redondee el valor a dos decimales.

5. a) $4(-3.1)^3 - (-4.2)^5$ **b)** $\dfrac{2(-5.5) - 6}{7.4 - 3.8}$

6. a) $5[3(-1.1)^2 - 4(-0.5)^3]$ **b)** $5^{-2} + 2^{-4}$

En los ejercicios 7 y 8 evalúe la expresión algebraica para los valores dados de las variables.

7. $x^3 - 2x + 1$, $x = -2, 1.5$

8. $a^2 + ab + b^2$, $a = -3$, $b = 2$

En los ejercicios 9 y 10 liste todos los posibles residuos.

9. Cuando el entero positivo n se divide entre 7.

10. Cuando el entero positivo n se divide entre 13.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN R.1

En los ejercicios del 1 al 4 determine la forma decimal para el número racional. Indique si se repite o termina.

1. $-37/8$ **2.** $15/99$

3. $-13/6$ **4.** $5/37$

En los ejercicios del 5 al 10 describa y grafique el intervalo de números reales.

5. $x \leq 2$ **6.** $-2 \leq x < 5$

7. $(-\infty, 7)$ **8.** $[-3, 3]$

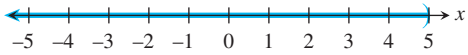
9. x es negativa

10. x es mayor o igual a 2 y menor o igual a 6.

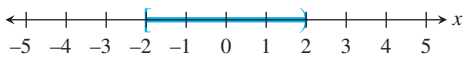
En los ejercicios del 11 al 16 utilice una desigualdad para describir el intervalo de números reales.

11. $[-1, 1)$ **12.** $(-\infty, 4]$

13.



14.



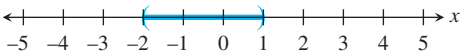
15. x está entre -1 y 2.

16. x es mayor o igual a 5.

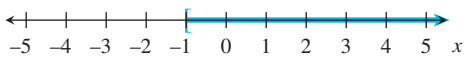
En los ejercicios del 17 al 22 utilice la notación de intervalos para describir el intervalo de números reales.

17. $x > -3$ **18.** $-7 < x < -2$

19.



20.



21. x es mayor que -3 y menor o igual a 4.

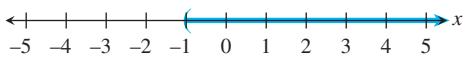
22. x es positiva.

En los ejercicios del 23 a 28 utilice palabras para describir el intervalo de números reales.

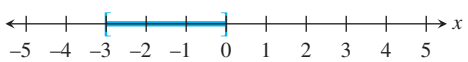
23. $4 < x \leq 9$ **24.** $x \geq -1$

25. $[-3, \infty)$ **26.** $(-5, 7)$

27.



28.



En los ejercicios del 29 al 32 convierta a la notación de desigualdades. Determine los extremos e indique si el intervalo es acotado o no acotado y su tipo.

29. $(-3, 4]$ **30.** $(-3, -1)$

31. $(-\infty, 5)$ **32.** $[-6, \infty)$

En los ejercicios del 33 al 36 utilice la notación de desigualdades y la de intervalos para describir el conjunto de números. Indique el significado de cualquiera de las variables que utilice.

33. Escriba para aprender Bill tiene al menos 29 años de edad.

34. Escriba para aprender Ningún artículo en el Almacén de Sara cuesta más de $2.00.

35. Escriba para aprender El precio de un galón de gasolina varía de $1.099 a $1.399.

36. Escriba para aprender En la Universidad Estatal de California, el aumento del salario variará entre 2% y 6.5%.

En los ejercicios del 37 al 40 utilice la propiedad distributiva para escribir la forma factorizada o la forma desarrollada de la expresión dada.

37. $a(x^2 + b)$ **38.** $(y - z^3)c$

39. $ax^2 + dx^2$ **40.** $a^3z + a^3w$

En los ejercicios 41 y 42 determine el inverso aditivo del número.

41. $6 - \pi$ **42.** -7

En los ejercicios 43 y 44 identifique la base de la expresión exponencial.

43. -5^2 **44.** $(-2)^7$

45. Actividad en grupo Analice cuál o cuáles propiedades algebraicas se ilustran mediante la ecuación. Trate de llegar a un consenso.

a) $(3x)y = 3(xy)$ **b)** $a^2b = ba^2$

c) $a^2b + (-a^2b) = 0$ **d)** $(x + 3)^2 + 0 = (x + 3)^2$

e) $a(x + y) = ax + ay$

46. Actividad en grupo Analice cuál o cuáles propiedades algebraicas se ilustran mediante la ecuación. Trate de llegar a un consenso.

a) $(x + 2)\dfrac{1}{x + 2} = 1$ **b)** $1 \cdot (x + y) = x + y$

c) $2(x - y) = 2x - 2y$

d) $2x + (y - z) = 2x + (y + (-z))$
$= (2x + y) + (-z) =$
$(2x + y) - z$

e) $\dfrac{1}{a}(ab) = \left(\dfrac{1}{a}a\right)b = 1 \cdot b = b$

En los ejercicios del 47 al 52 simplifique la expresión. Suponga que las variables en los denominadores son diferentes de cero.

47. $\dfrac{x^4y^3}{x^2y^5}$

48. $\dfrac{(3x^2)^2y^4}{3y^2}$

49. $\left(\dfrac{4}{x^2}\right)^2$

50. $\left(\dfrac{2}{xy}\right)^{-3}$

51. $\dfrac{(x^{-3}y^2)^{-4}}{(y^6x^{-4})^{-2}}$

52. $\left(\dfrac{4a^3b}{a^2b^3}\right)\left(\dfrac{3b^2}{2a^2b^4}\right)$

Los datos de la tabla R.1 proporcionan los ingresos, en miles de dólares, de escuelas públicas primarias y secundarias durante el año escolar 2003-2004.

Tabla R.1 Departamento de Educación

Fuente	Cantidad (en $1000)
Federal	36,930,338
Estatal	221,802,107
Local e intermedio	193,175,805
Total	451,908,251

Fuente: Asociación Nacional de Educación, como se reporta en The World Almanac and Book of Facts, 2005.

En los ejercicios del 53 al 56, escriba en notación científica la cantidad de ingreso, en dólares, obtenida de la fuente.

53. Federal

54. Estatal

55. Local e intermedia

56. Total

En los ejercicios 57 y 58 escriba el número en notación científica.

57. La distancia media de Júpiter al Sol es de aproximadamente 483,900,000 millas.

58. La carga eléctrica, en columbios, de un electrón es de alrededor de $-0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 16$.

En los ejercicios del 59 al 62 escriba el número en forma decimal.

59. 3.33×10^{-8}

60. 6.73×10^{11}

61. La distancia que la luz recorre en 1 año (*un año luz*) es alrededor de 5.87×10^{12} millas.

62. La masa de un neutrón es alrededor de 1.6747×10^{-24} g.

En los ejercicios del 63 y 64, utilice notación científica para simplificar.

63. $\dfrac{(1.35 \times 10^{-7})(2.41 \times 10^{8})}{1.25 \times 10^{9}}$

64. $\dfrac{(3.7 \times 10^{-7})(4.3 \times 10^{6})}{2.5 \times 10^{7}}$

Exploraciones

65. Investigación de exponentes Para los enteros positivos m y n podemos utilizar la definición para demostrar que $a^m a^n = a^{m+n}$.

a) Examine la ecuación $a^m a^n = a^{m+n}$ para $n = 0$ y explique por qué es razonable definir $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.

b) Examine la ecuación $a^m a^n = a^{m+n}$ para $n = -m$ y explique por qué es razonable definir $a^{-m} = 1/a^m$ para $a \neq 0$.

66. Formas decimales de números racionales A continuación se presenta el tercer paso de la división de 1 entre 17 (los primeros dos no se muestran porque, en ambos casos, el cociente es 0).

$$\begin{array}{r} 0.05 \\ 17\overline{)1.00} \\ \underline{85} \\ 15 \end{array}$$

Por convención se dice que 1 es el primer residuo en el proceso de división larga, 10 es el segundo y 15 es el tercer residuo.

a) Continúe este proceso hasta que el residuo se repita, y complete la tabla siguiente:

Paso	Cociente	Residuo
1	0	1
2	0	10
3	5	15
⋮	⋮	⋮

b) Explique por qué los dígitos que aparecen en el cociente entre el par de residuos que se repiten determinan la porción que se repite un número infinito de veces de la representación decimal. En este caso:

$$\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}.$$

c) Explique por qué este proceso siempre determinará la parte que se repite un número infinito de veces de un número racional cuya representación decimal no termina.

Preguntas de examen estandarizado

67. **Verdadero o falso** El inverso aditivo de un número real debe ser negativo. Justifique su respuesta.

68. **Verdadero o falso** El recíproco de un número real positivo debe ser menor que 1. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 69 al 72 resuelva estos problemas sin usar una calculadora.

69. **Opción múltiple** ¿Cuál de las desigualdades corresponde al intervalo $[-2, 1)$?

A) $x \leq -2$ **B)** $-2 \leq x \leq 1$

C) $-2 < x < 1$ **D)** $-2 < x \leq 1$

E) $-2 \leq x < 1$

70. **Opción múltiple** ¿Cuál es el valor de $(-2)^4$?

A) 16 **B)** 8

C) 6 **D)** -8

E) -16

71. **Opción múltiple** ¿Cuál es la base de la expresión -7^2?

A) -7 **B)** 7

C) -2 **D)** 2

E) 1

72. **Opción múltiple** ¿Cuál de las siguientes es la forma simplificada de $\frac{x^6}{x^2}$, $x \neq 0$?

A) x^{-4} **B)** x^2

C) x^3 **D)** x^4

E) x^8

Ampliación de las ideas

La **magnitud** de un número real es su distancia al origen.

73. Liste los números enteros no negativos cuyas magnitudes sean menores que 7.

74. Liste los números naturales cuyas magnitudes sean menores que 7.

75. Liste los enteros cuyas magnitudes sean menores que 7.

R.2 Sistema de coordenadas cartesianas

Aprenderá acerca de...

- El plano cartesiano
- El valor absoluto de un número real
- Las fórmulas de distancia
- Las fórmulas para el punto medio
- Las ecuaciones de circunferencias
- Las aplicaciones

. . . porque

Estos temas constituyen el fundamento de los temas que estudiaremos en este libro.

El plano cartesiano

Los puntos de un plano corresponden a parejas ordenadas de números reales, tal como los puntos de una recta pueden asociarse con números reales individuales. Esta correspondencia crea el **plano cartesiano** o **sistema de coordenadas rectangulares**.

Para construir un sistema de coordenadas rectangulares, o plano cartesiano, dibuje un par de rectas numéricas reales perpendiculares —una horizontal y la otra vertical— que se corten en sus respectivos puntos 0 (figura R.6). Comúnmente, la recta horizontal es el **eje *x*** y la recta vertical el **eje *y***. La dirección positiva en el eje x es hacia la derecha y la dirección positiva del eje y es hacia arriba. Sus puntos de intersección, O, constituyen el **origen del plano cartesiano**.

Cada punto P del plano está asociado con un **par ordenado (x, y)** de números reales, sus **coordenadas (cartesianas)**. La **coordenada x** (abscisa) representa la intersección del eje x con la perpendicular de P, y la **coordenada y** (ordenada) representa la intersección del eje y con la perpendicular desde P. La figura R.6 muestra los puntos P y Q con coordenadas $(4, 2)$ y $(-6, -4)$, respectivamente. Como en el caso de los números reales y la recta numérica, utilizamos un par ordenado (a, b) tanto para el nombre punto como para sus coordenadas.

Los ejes coordenados dividen al plano cartesiano en cuatro **cuadrantes**, como se muestra en la figura R.7.

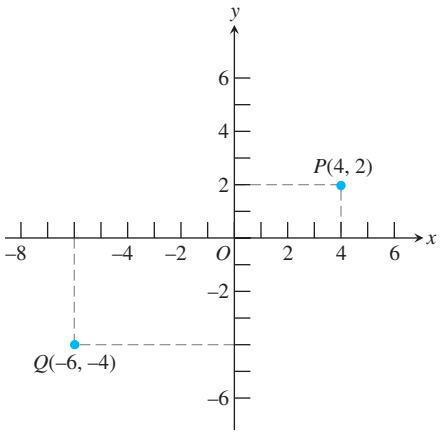


FIGURA R.6 El plano de coordenadas cartesianas.

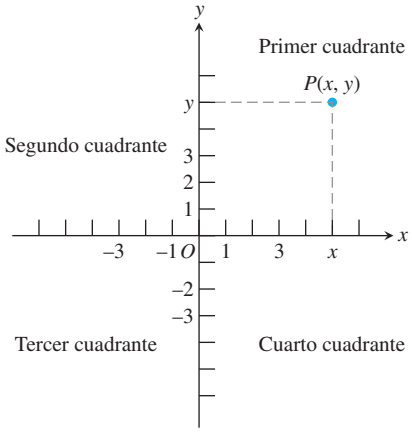


FIGURA R.7 Los cuatro cuadrantes. Los puntos en el eje x o en el eje y no están en ningún cuadrante.

EJEMPLO 1 Gráfica de datos sobre las exportaciones de Estados Unidos a México

La tabla R.2 representa el valor, en miles de millones de dólares, de las exportaciones de Estados Unidos a México de 1996 a 2003. Trace los pares ordenados (año, valor de la exportación) en un sistema de coordenadas rectangulares.

TABLA R.2 Exportaciones de Estados Unidos a México

Año	Exportaciones de Estados Unidos (miles de millones de dólares)
1996	56.8
1997	71.4
1998	78.8
1999	86.9
2000	111.3
2001	101.3
2002	97.5
2003	97.4

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos. Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2001, 2004-2005.

SOLUCIÓN

Los puntos se graficaron en la figura R.8 en la página 15.

Ahora resuelva el ejercicio 31.

Un **diagrama de dispersión** es una gráfica de los pares (x, y) en un plano cartesiano. La figura R.8 muestra un diagrama de dispersión de los datos de la tabla R.2.

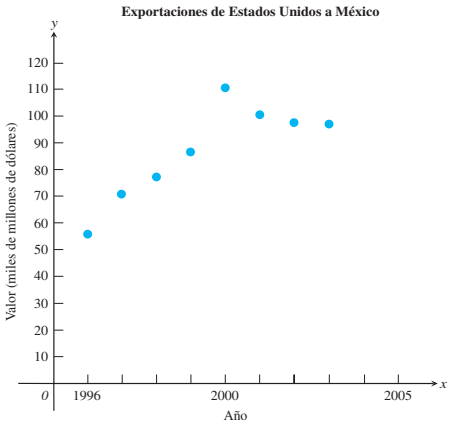


FIGURA R.8 La gráfica para el ejemplo 1.

Valor absoluto de un número real

El *valor absoluto de un número real* expresa su **magnitud** (tamaño). Por ejemplo, el valor absoluto de 3 es 3 y el valor absoluto de -5 es 5.

DEFINICIÓN Valor absoluto de un número real

El **valor absoluto de un número real** a es

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ si } a > 0 \\ -a, \text{ si } a < 0. \\ 0, \text{ si } a = 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 2 Uso de la definición de valor absoluto

Evalúe lo siguiente:

a) $|-4|$ **b)** $|\pi - 6|$

SOLUCIÓN

a) Ya que $-4 < 0$, $|-4| = -(-4) = 4$.

b) Ya que $\pi \approx 3.14$, $\pi - 6$ es negativo, por lo que $\pi - 6 < 0$. Así, $|\pi - 6| = -(\pi - 6) = 6 - \pi \approx 2.858$.

Ahora resuelva el ejercicio 9.

A continuación se presenta un resumen de algunas propiedades importantes del valor absoluto.

Propiedades de valor absoluto

Sean a y b números reales.

1. $|a| \geq 0$ **2.** $|-a| = |a|$

3. $|ab| = |a||b|$ **4.** $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

Fórmulas de la distancia

La *distancia* entre -1 y 4 en la recta numérica es 5 (consulte la figura R.9). Esta distancia puede determinarse restando el número menor del mayor: $4 - (-1) = 5$. Si utilizamos el valor absoluto, el orden de la resta no es importante: $|4 - (-1)| = |-1 - 4| = 5$.

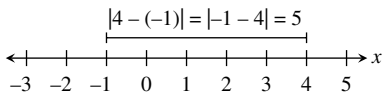


FIGURA R.9 Determinación de la distancia entre -1 y 4.

Fórmula de distancia (Recta numérica)

Sean a y b números reales. La **distancia entre a y b** es

$$|a - b|.$$

Observe que $|a - b| = |b - a|$.

VALOR ABSOLUTO Y DISTANCIA

Si hacemos $b = 0$ en la fórmula de la distancia, vemos que la distancia entre a y 0 es $|a|$. Por tanto, el valor absoluto de un número es su distancia con respecto al origen.

Para determinar la *distancia* entre dos puntos que están en la misma recta horizontal o vertical en el plano cartesiano, utilizamos la fórmula de la distancia para puntos en una recta numérica. Por ejemplo, la distancia entre los puntos x_1 y x_2 en el eje x es $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ y la distancia entre los puntos y_1 y y_2 en el eje y es $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$.

Para determinar la distancia entre los dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $P(x_2, y_2)$ que no están en la misma recta horizontal o vertical, formamos el triángulo rectángulo determinado por P, Q y $R(x_2, y_1)$ (figura R.10).

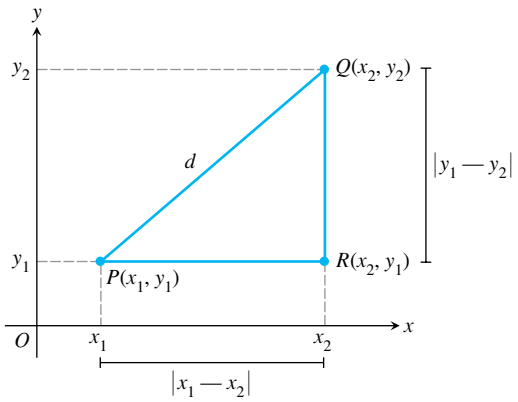


FIGURA R.10 Construcción de un triángulo rectángulo con hipotenusa $\overline{PQ}$.

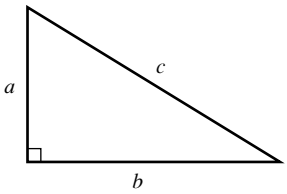


FIGURA R.11 El teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$.

La distancia de P a R es $|x_1 - x_2|$ y la distancia de R y Q es $|y_1 - y_2|$. De acuerdo con el **teorema de Pitágoras** (consulte la figura R.11), la distancia d entre P y Q es

$$d = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}.$$

Ya que $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $|y_1 - y_2|^2 = (y_1 - y_2)^2$, obtenemos la siguiente fórmula:

Fórmula de la distancia (Plano coordenado)

La **distancia d entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$** en el plano coordenado es

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

EJEMPLO 3 Determinación de la distancia entre dos puntos

Determine la distancia d entre los puntos (1, 5) y (6, 2).

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(1 - 6)^2 + (5 - 2)^2} && \text{Fórmula de la distancia} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{25 + 9} \\ &= \sqrt{34} \approx 5.83 && \text{Mediante una calculadora} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 11.

Fórmulas para el punto medio

Cuando en una recta numérica se conocen los extremos de un segmento, tomamos el promedio de sus coordenadas para determinar el punto medio del segmento.

El punto medio

El **punto medio del segmento de recta, con extremos** a **y** b, es:

$$\frac{a+b}{2}.$$

EJEMPLO 4 Determinación del punto medio de un segmento de recta

El punto medio de un segmento de recta con extremos -9 y 3 sobre la recta numérica es

$$\frac{(-9)+3}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Consulte la figura R.12.

Ahora resuelva el ejercicio 23.

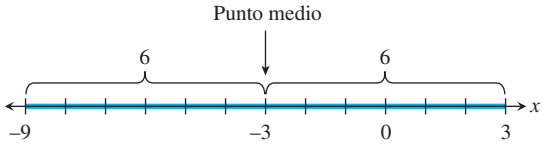


FIGURA R.12 Observe que la distancia del punto medio, -3, a 3 o a -9 es 6 (ejemplo 4).

Al igual que con las rectas numéricas, el punto medio de un segmento de recta en el plano coordenado se determina mediante sus extremos. Cada coordenada de los puntos medios es el promedio de las coordenadas correspondientes de sus extremos.

Fórmula del punto medio (Plano coordenado)

El **punto medio del segmento de recta con extremos** (a, b) **y** (c, d) es

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right).$$

EJEMPLO 5 Determinación del punto medio de un segmento de recta

El punto medio del segmento de recta con extremos $(-5, 2)$ y $(3, 7)$ es

$$(x, y) = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2+7}{2}\right) = (-1, 4.5).$$

Consulte la figura R.13.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

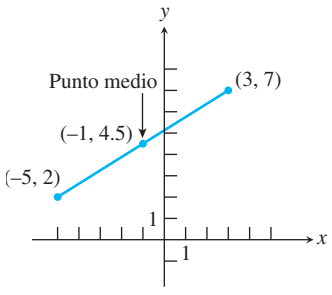


FIGURA R.13 (Ejemplo 5).

Ecuaciones de circunferencias

Una **circunferencia** es el conjunto de puntos en un plano a una distancia fija (**radio**) de un punto fijo (**centro**). La figura R.14 muestra la circunferencia con centro en (h, k) y radio r. Si (x, y) es cualquier punto en la circunferencia, la fórmula de la distancia da

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos la siguiente ecuación para una circunferencia:

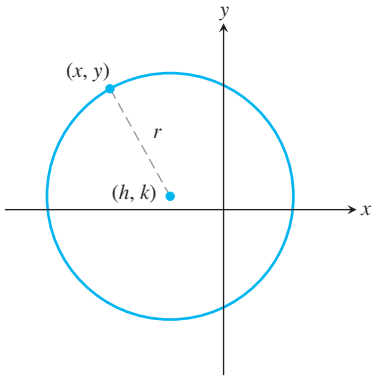


FIGURA R.14 La circunferencia con centro (h, k) y radio r.

DEFINICIÓN Ecuación estándar de una circunferencia

La **ecuación estándar de una circunferencia** con centro en (h, k) y radio r es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

EJEMPLO 6 Determinación de las ecuaciones estándar de circunferencias

Determine la ecuación estándar de la circunferencia.

a) Centro $(-4, 1)$, radio 8 **b)** Centro $(0, 0)$, radio 5

SOLUCIÓN

a) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ Ecuación estándar
$(x - (-4))^2 + (y - 1)^2 = 8^2$ Sustituya $h = -4$, $k = 1$ y $r = 8$.
$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 64$

b) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ Ecuación estándar
$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$ Sustituya $h = 0$, $k = 0$ y $r = 5$.
$x^2 + y^2 = 25$

Ahora resuelva el ejercicio 41.

Aplicaciones

EJEMPLO 7 Uso de una desigualdad para expresar distancia

Podemos establecer que "la distancia entre x y -3 es menor que 9" mediante la desigualdad

$$|x - (-3)| < 9 \quad \text{o} \quad |x + 3| < 9.$$

Ahora resuelva el ejercicio 51.

El recíproco del teorema de Pitágoras es verdadero. Esto es, si la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la longitud del tercer lado, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

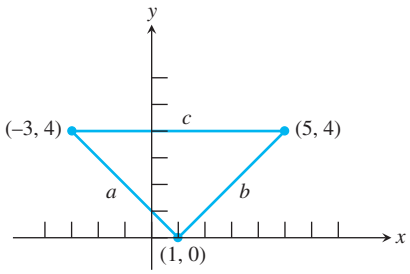


FIGURA R.15 El triángulo del ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Verificación de triángulos rectángulos

Utilice el recíproco del teorema de Pitágoras y la fórmula de la distancia para mostrar que los puntos $(-3, 4)$, $(1, 0)$ y $(5, 4)$ determinan un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN En la figura R.15 se trazan los tres puntos. Necesitamos mostrar que las longitudes de los lados del triángulo satisfacen la relación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$. Al aplicar la fórmula de la distancia encontramos que

$$a = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{32},$$
$$b = \sqrt{(1-5)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{32},$$
$$c = \sqrt{(-3-5)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{64}.$$

El triángulo es un triángulo rectángulo, ya que

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{32})^2 + (\sqrt{32})^2 = 32 + 32 = 64 = c^2.$$

Ahora resuelva el ejercicio 39.

En ocasiones, las propiedades de figuras geométricas pueden confirmarse mediante el uso de métodos analíticos, como las fórmulas del punto medio.

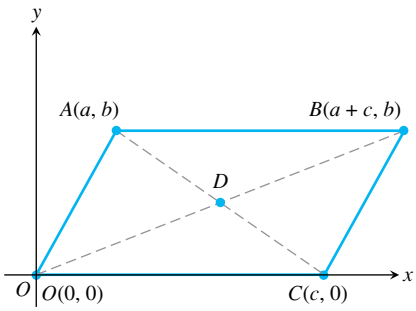


FIGURA R.16 Las coordenadas de B deben ser $(a + c, b)$ para que CB sea paralela a OA (ejemplo 9).

EJEMPLO 9 Uso de la fórmula del punto medio

Es un hecho de geometría que las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente. Demuestre esto con una fórmula del punto medio.

SOLUCIÓN Podemos colocar un paralelogramo en el plano de coordenadas rectangulares como se muestra en la figura R.16. Al aplicar la fórmula del punto medio para el plano coordenado a los segmentos OB y AC, encontramos que

$$\text{punto medio del segmento } OB = \left(\frac{0 + a + c}{2}, \frac{0 + b}{2}\right) = \left(\frac{a + c}{2}, \frac{b}{2}\right),$$

$$\text{punto medio del segmento } AC = \left(\frac{a + c}{2}, \frac{b + 0}{2}\right) = \left(\frac{a + c}{2}, \frac{b}{2}\right).$$

Los puntos medios de los segmentos OB y AC son los mismos, de modo que las diagonales del paralelogramo $OABC$ coinciden en sus puntos medios y, por tanto, se bisecan mutuamente.

Ahora resuelva el ejercicio 37.

REPASO RÁPIDO R.2

En los ejercicios 1 y 2 trace los dos números en una recta numérica, y después determine la distancia entre ellos.

1. $\sqrt{7}, \sqrt{2}$ **2.** $-\frac{5}{3}, -\frac{9}{5}$

En los ejercicios 3 y 4 represente los números en una recta numérica.

3. $-3, 4, 2.5, 0, -1.5$ **4.** $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 0, -1$

En los ejercicios 5 y 6 trace los puntos.

5. $A(3, 5), B(-2, 4), C(3, 0), D(0, -3)$

6. $A(-3, -5), B(2, -4), C(0, 5), D(-4, 0)$

En los ejercicios del 7 al 10 utilice una calculadora para evaluar la expresión. Redondee su respuesta a dos lugares decimales.

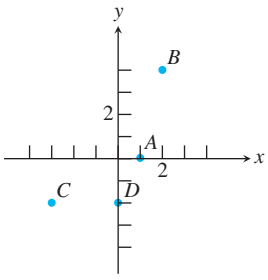
7. $\frac{-17 + 28}{2}$ **8.** $\sqrt{13^2 + 17^2}$

9. $\sqrt{6^2 + 8^2}$ **10.** $\sqrt{(17 - 3)^2 + (-4 - 8)^2}$

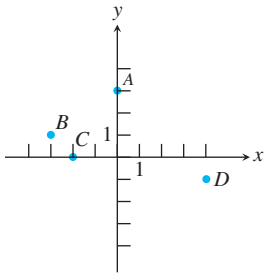
EJERCICIOS DE LA SECCIÓN R.2

En los ejercicios 1 y 2 calcule estime las coordenadas de los puntos.

1.



2.



En los ejercicios 3 y 4 encuentre cuáles cuadrantes contienen a los puntos.

3. **a)** $(2, 4)$ **b)** $(0, 3)$ **c)** $(-2, 3)$ **d)** $(-1, -4)$

4. **a)** $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **b)** $(-2, 0)$ **c)** $(-1, -2)$ **d)** $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{3}\right)$

En los ejercicios del 5 al 8 evalúe la expresión.

5. $3 + |-3|$ **6.** $2 - |-2|$

7. $|(-2)3|$ **8.** $\frac{-2}{|-2|}$

En los ejercicios 9 y 10 rescriba la expresión sin usar símbolos de valor absoluto.

9. $|\pi - 4|$ **10.** $|\sqrt{5} - 5/2|$

En los ejercicios del 11 al 18 determine la distancia entre los puntos.

11. $-9.3, 10.6$ **12.** $-5, -17$

13. $(-3, -1), (5, -1)$ **14.** $(-4, -3), (1, 1)$

15. $(0, 0), (3, 4)$ **16.** $(-1, 2), (2, -3)$

17. $(-2, 0), (5, 0)$ **18.** $(0, -8), (0, -1)$

En los ejercicios del 19 al 22 determine el área y el perímetro de la figura determinada por los puntos.

19. $(-5, 3), (0, -1), (4, 4)$

20. $(-2, -2), (-2, 2), (2, 2), (2, -2)$

21. $(-3, -1), (-1, 3), (7, 3), (5, -1)$

22. $(-2, 1), (-2, 6), (4, 6), (4, 1)$

En los ejercicios del 23 al 28 determine el punto medio del segmento de recta con los puntos extremos dados.

23. $-9.3, 10.6$ **24.** $-5, -17$

25. $(-1, 3), (5, 9)$

26. $(3, \sqrt{2}), (6, 2)$

27. $(-7/3, 3/4), (5/3, -9/4)$

28. $(5, -2), (-1, -4)$

En los ejercicios del 29 al 34 haga un diagrama de dispersión de los datos dados en la tabla.

29. **Importaciones de aluminio de Estados Unidos** La siguiente tabla proporciona el valor total y (expresado en miles de millones de dólares) del aluminio importado por Estados Unidos cada año, de 1997 a 2003. (*Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2001, 2004-2005*).

x	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
y	5.6	6.0	6.3	6.9	6.4	6.6	7.2

30. **Exportaciones de aluminio de Estados Unidos** La siguiente tabla proporciona el valor total y (en miles de millones de dólares) del aluminio exportado por Estados Unidos cada año, de 1997 a 2003. (*Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2001, 2004-2005*).

x	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
y	3.8	3.6	3.6	3.8	3.3	2.9	2.9

31. Importaciones de Estados Unidos provenientes de México La tabla R.3 proporciona el total en miles de millones de dólares de importaciones de Estados Unidos provenientes de México desde 1996 a 2003.

Tabla R.3 Importaciones de Estados Unidos provenientes de México

Año	Importaciones de Estados Unidos (miles de millones de dólares)
1996	74.3
1997	85.9
1998	94.6
1999	109.7
2000	135.9
2001	131.3
2002	134.6
2003	138.1

Source: U.S. Census Bureau, Statistical Abstract of the United States, 2001, 2004–2005.

32. Exportaciones agrícolas de Estados Unidos La tabla R.4 presenta el total (en miles de millones de dólares) de exportaciones agrícolas de Estados Unidos desde 1996 a 2003.

Tabla R.4 Exportaciones agrícolas de Estados Unidos

Año	Exportaciones agrícolas de Estados Unidos (miles de millones de dólares)
1996	60.6
1997	57.1
1998	52.0
1999	48.2
2000	53.0
2001	55.2
2002	54.8
2003	61.5

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2004-2005.

33. Superávit en comercio agrícola de Estados Unidos La tabla R.5 presenta el total (en miles de millones de dólares) del superávit en el comercio agrícola de Estados Unidos desde 1996 a 2003.

Tabla R.5 Superávit del comercio agrícola de Estados Unidos

Año	Superávit del comercio agrícola de Estados Unidos (miles de millones de dólares)
1996	28.1
1997	21.9
1998	16.3
1999	11.5
2000	13.8
2001	15.7
2002	12.8
2003	8.3

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2004-2005.

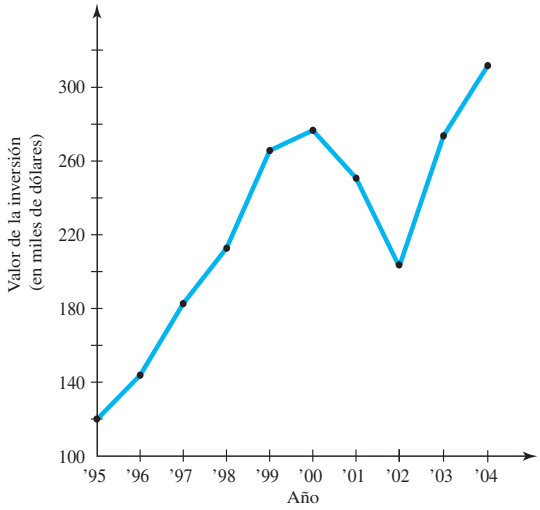
34. Exportaciones de Estados Unidos a Armenia La tabla R.6 presenta el total (en millones de dólares) de exportaciones de Estados Unidos a Armenia desde 1996 a 2003.

Tabla R.6 Exportaciones de Estados Unidos a Armenia

Año	Exportaciones de Estados Unidos (miles de millones de dólares)
1996	57.4
1997	62.1
1998	51.4
1999	51.2
2000	55.6
2001	49.9
2002	111.8
2003	102.8

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2001, 2004-2005.

En los ejercicios 35 y 36 utilice la gráfica del valor de la inversión de $10,000 de American Funds™ realizada en 1978 en Fundamental Investors™. En la gráfica siguiente se muestra el valor para enero para algunos años recientes. (*Fuente: Reporte Anual de Fundamental Investors para el final del año que termina el 31 de diciembre de 2004*).



35. Lectura a partir de gráficas Utilice la gráfica para estimar el valor de la inversión

a) en enero de 1997 y **b)** en enero de 2000.

36. Aumento porcentual Estime el aumento porcentual en el valor de $10,000 invertidos de

a) enero de 1996 a enero de 1997.

b) enero de 2000 a enero de 2001.

c) enero de 1995 a enero de 2004.

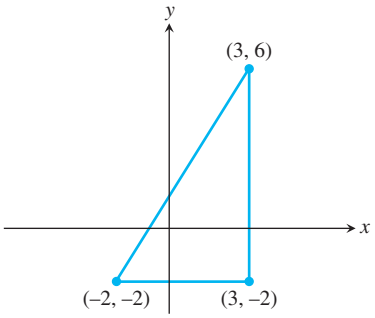
37. Demuestre que la figura determinada por los puntos siguientes es un triángulo isósceles: (1, 3), (4, 7), (8, 4).

38. Actividad en grupo Demuestre que las diagonales de la figura determinada por los puntos se bisecan mutuamente.

a) Cuadrado $(-7, -1)$, $(-2, 4)$, $(3, -1)$, $(-2, -6)$

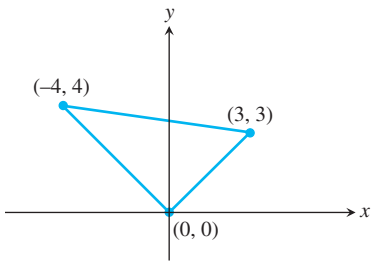
b) Paralelogramo $(-2, -3)$, $(0, 1)$, $(6, 7)$, $(4, 3)$

39. a) Determine las longitudes de los lados del triángulo de la figura.



b) Escriba para aprender Muestre que el triángulo es un triángulo rectángulo.

40. a) Determine las longitudes de los lados del triángulo de la figura.



b) Escriba para aprender Muestre que el triángulo es un triángulo rectángulo.

En los ejercicios del 41 al 44 determine la ecuación estándar para la circunferencia.

41. Centro (1, 2), radio 5

42. Centro $(-3, 2)$, radio 1

43. Centro $(-1, -4)$, radio 3

44. Centro (0, 0), radio $\sqrt{3}$

En los ejercicios del 45 al 48 determine el centro y el radio de la circunferencia.

45. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 36$

46. $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 121$

47. $x^2 + y^2 = 5$

48. $(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 25$

En los ejercicios del 49 al 52 escriba el enunciado mediante notación de valor absoluto.

49. La distancia entre x y 4 es 3.

50. La distancia entre y y -2 es mayor o igual a 4.

51. La distancia entre x y c es menor que d unidades.

52. y está a más de d unidades de c.

53. Determinación de un segmento de recta con punto medio dado Sea (4, 4) el punto medio del segmento de recta determinado por los puntos (1, 2) y (a, b). Determine a y b.

54. Escriba para aprender Triángulo isósceles pero no equilátero Demuestre que el triángulo determinado por los puntos (3, 0), $(-1, 2)$ y (5, 4) es isósceles pero no equilátero.

55. Escriba para aprender Punto equidistante de los vértices de un triángulo equilátero Demuestre que el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo con vértices (0, 0), (5, 0) y (0, 7) equidista de los tres vértices.

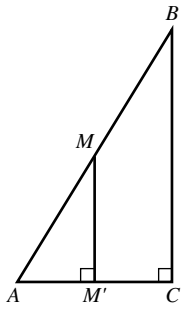
56. Escriba para aprender Describa el conjunto de números reales que satisfacen $|x - 2| < 3$.

57. Escriba para aprender Describa el conjunto de números reales que satisface $|x + 3| \geq 5$.

Preguntas de examen estandarizado

58. Verdadero o falso Si a es un número real, entonces $|a| \geq 0$. Justifique su respuesta.

59. Verdadero o falso Considere el triángulo rectángulo ABC mostrado a la derecha. Si M es el punto medio del segmento AB, *entonces* M' es el punto medio del segmento AC. Justifique su respuesta.



En los ejercicios del 60 al 63 resuelva los problemas sin utilizar calculadora.

60. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones es igual a $|1 - \sqrt{3}|$?

A) $1 - \sqrt{3}$ **B)** $\sqrt{3} - 1$

C) $(1 - \sqrt{3})^2$ **D)** $\sqrt{2}$

E) $\sqrt{1/3}$

61. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones es el punto medio del segmento de recta con extremos -3 y 2?

A) 5/2 **B)** 1

C) $-1/2$ **D)** -1

E) $-5/2$

62. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones es el centro de la circunferencia $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 2$?

A) $(3, -4)$ **B)** $(-3, 4)$

C) $(4, 3)$ **D)** $(-4, 3)$

E) $(3/2, -2)$

63. Opción múltiple ¿Cuál de los puntos siguientes está en el tercer cuadrante?

A) $(0, -3)$ **B)** $(-1, 0)$

C) $(2, 1)$ **D)** $(-1, 2)$

E) $(-2, -3)$

Exploraciones

64. División de un segmento en tercios

a) Determine las coordenadas de los puntos a un tercio y a dos tercios del camino en el segmento que va de $a = 2$ a $b = 8$ en una recta numérica.

b) Repita a) para $a = -3$ y $b = 7$.

c) Determine las coordenadas de los puntos a un tercio y dos tercios del camino en el segmento que va de a a b en una recta numérica.

d) Determine las coordenadas de los puntos a un tercio y a dos tercios del camino que va del punto $(1, 2)$ al punto $(7, 11)$ en un plano coordenado.

e) Determine las coordenadas de los puntos a un tercio y a dos tercios del camino que va del punto (a, b) al punto (c, d) en el plano coordenado.

Ampliación de las ideas

65. Escriba para aprender Punto equidistante de los vértices de un triángulo rectángulo Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices.

66. Comparación de áreas Considere los cuatro puntos $A(0, 0)$, $B(0, a)$, $C(a, a)$ y $D(a, 0)$. Sea P el punto medio del segmento CD y Q el punto en la cuarta parte del camino de A a D en el segmento AD.

a) Determine el área del triángulo BQP.

b) Compare el área del triángulo BPQ con el área del cuadrado $ABCD$.

En los ejercicios del 67 al 69 sea $P(a, b)$ un punto en el primer cuadrante.

67. Determine las coordenadas del punto Q en el cuarto cuadrante de modo que PQ sea perpendicular al eje x.

68. Determine las coordenadas del punto Q en el segundo cuadrante de modo que PQ sea perpendicular al eje y.

69. Determine las coordenadas del punto Q en el tercer cuadrante de modo que el origen sea el punto medio del segmento PQ.

70. Escriba para aprender Demuestre que la fórmula de la distancia para la recta numérica es un caso especial de la fórmula de la distancia para el plano cartesiano.

R.3 Ecuaciones y desigualdades lineales

Aprenderá acerca de...

- Las ecuaciones
- La resolución de ecuaciones
- Las ecuaciones lineales con una variable
- Las desigualdades lineales en una variable

. . . porque

Estos temas proporcionan el fundamento para las técnicas algebraicas que necesitará usar a lo largo de todo este libro.

Ecuaciones

Una **ecuación** es un enunciado de igualdad entre dos expresiones. A continuación se listan algunas propiedades de la igualdad que utilizaremos para resolver ecuaciones de manera algebraica.

Propiedades de la igualdad

Sean u, v, w y z números, variables o expresiones algebraicas reales.

1. Reflexiva	$u = u$
2. Simétrica	Si $u = v$, entonces $v = u$.
3. Transitiva	Si $u = v$ y $v = w$, entonces $u = w$.
4. Adición	Si $u = v$ y $w = z$, entonces $u + w = v + z$.
5. Multiplicación	Si $u = v$ y $w = z$, entonces $uw = vz$.

Resolución de ecuaciones

Una **solución de una ecuación en x** es un valor de x para el que la ecuación es verdadera. **Resolver una ecuación en x** significa determinar todos los valores de x para los cuales la ecuación es verdadera; es decir, determinar todas las soluciones de la ecuación.

EJEMPLO 1 Confirmación de una solución

Pruebe que $x = -2$ es una solución de la ecuación $x^3 - x + 6 = 0$.

SOLUCIÓN

$$(-2)^3 - (-2) + 6 \stackrel{?}{=} 0$$
$$-8 + 2 + 6 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0$$

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Ecuaciones lineales con una variable

La ecuación más básica en álgebra es una *ecuación lineal.*

DEFINICIÓN Ecuación lineal en x

Una **ecuación lineal en x** es una que puede escribirse en la forma

$$ax + b = 0,$$

en donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

La ecuación $2z - 4 = 0$ es lineal en la variable z. La ecuación $3u^2 - 12 = 0$ *no* es lineal en la variable u. Una ecuación lineal en una variable tiene exactamente una

solución. Esta ecuación se resuelve transformándola a una *ecuación equivalente* cuya solución sea obvia. Dos o más ecuaciones son **equivalentes** si tiene las mismas soluciones. Por ejemplo, las ecuaciones $2z - 4 = 0$ y $2z = 4$ y $z = 2$ son equivalentes. A continuación se presentan operaciones que producen ecuaciones equivalentes.

Operaciones para ecuaciones equivalentes

Una ecuación equivalente se obtiene si se realizan una o más de las operaciones siguientes.

Operación	Ecuación dada	Ecuación equivalente
1. Reducir términos semejantes, reducir fracciones y eliminar signos de agrupación	$2x + x = \frac{3}{9}$	$3x = \frac{1}{3}$
2. Realizar las mismas operaciones en ambos lados		
a) Sumar (-3)	$x + 3 = 7$	$x = 4$
b) Restar $(2x)$	$5x = 2x + 4$	$3x = 4$
c) Multiplicar por una constante diferente de cero $(1/3)$.	$3x = 12$	$x = 4$
d) Dividir entre una constante distinta de cero (3)	$3x = 12$	$x = 4$

Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo utilizar ecuaciones equivalentes para resolver ecuaciones lineales.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación lineal

Resuelva $2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2$. Compruebe el resultado con calculadora.

SOLUCIÓN

$$2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2$$

$4x - 6 + 3x + 3 = 5x + 2$ Propiedad distributiva.

$7x - 3 = 5x + 2$ Reducir términos semejantes.

$2x = 5$ Sumar 3 y restar 5x.

$x = 2.5$ Dividir entre 2.

Para comprobar nuestro trabajo algebraico podemos utilizar una calculadora para evaluar la ecuación para $x = 2.5$. La figura R.17 muestra que si $x = 2.5$, cada lado de la ecuación original es igual a 14.5.

Ahora resuelva el ejercicio 23.

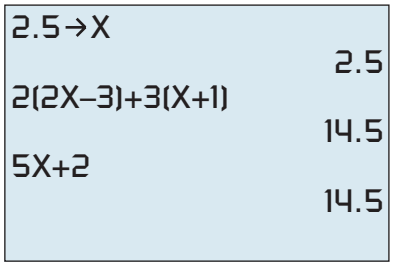


FIGURA R.17 La línea superior almacena el número 2.5 en la variable x (ejemplo 2).

Si una ecuación incluye fracciones, determine el mínimo común denominador (MCD) de las fracciones y multiplique ambos miembros por el MCD. En ocasiones, esto se conoce como *eliminar las fracciones de la ecuación*. El ejemplo 3 lo ilustra.

ENTEROS Y FRACCIONES

Observe en el ejemplo 2 que $2 = \frac{2}{1}$.

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación lineal que incluye fracciones

Resuelva

$$\frac{5y - 2}{8} = 2 + \frac{y}{4}$$

SOLUCIÓN Los denominadores son 8, 1 y 4. El MCD de las fracciones es 8. (Si es necesario, consulte el apéndice A.3).

$$\frac{5y - 2}{8} = 2 + \frac{y}{4}$$

$$8\left(\frac{5y - 2}{8}\right) = 8\left(2 + \frac{y}{4}\right) \quad \text{Multiplicar por el MCD, 8.}$$

$$8 \cdot \frac{5y - 2}{8} = 8 \cdot 2 + 8 \cdot \frac{y}{4} \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$5y - 2 = 16 + 2y \quad \text{Simplificar.}$$

$$5y = 18 + 2y \quad \text{Sumar 2.}$$

$$3y = 18 \quad \text{Restar } 2y.$$

$$y = 6 \quad \text{Dividir entre 3.}$$

Compruebe la solución, ya sea utilizando lápiz y papel, o calculadora.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

Desigualdades lineales en una variable

En la sección R.1, utilizamos desigualdades para describir el orden en los números reales. Por ejemplo, si x está en la recta numérica, a la izquierda de 2, o si x es cualquier número real menor que 2, escribimos $x < 2$. La desigualdad más básica en álgebra es una *desigualdad lineal*.

DEFINICIÓN Desigualdad lineal en x

Una **desigualdad lineal en x** es aquella que puede escribirse en la forma

$$ax + b < 0,\ ax + b \leq 0,\ ax + b > 0,\ \text{o}\ \ ax + b \geq 0,$$

donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

Resolver una desigualdad en x significa determinar todos los valores de x para los que la desigualdad es verdadera. Una **solución de una desigualdad en x** es un valor de x para el que la desigualdad es verdadera. El conjunto de todas las soluciones de una desigualdad es el **conjunto solución** de la desigualdad. **Resolvemos una desigualdad** al determinar su conjunto solución. A continuación se muestra una lista de propiedades que utilizamos para resolver desigualdades.

SENTIDO (O DIRECCIÓN) DE UNA DESIGUALDAD

Al multiplicar (o dividir) una desigualdad por un número positivo se conserva el sentido de la desigualdad. Al multiplicar (o dividir) una desigualdad por un número negativo se invierte el sentido.

Propiedades de las desigualdades

Sean u, v, w y z números, variables o expresiones algebraicas reales, y sea c un número real.

1. Transitiva	Si $u < v$ y $v < w$, entonces $u < w$.
2. Suma	Si $u < v$, entonces $u + w < v + w$. Si $u < v$ y $w < z$, entonces $u + w < v + z$.
3. Multiplicación	Si $u < v$ y $c > 0$, entonces $uc < vc$. Si $u < v$ y $c < 0$, entonces $uc > vc$.

Las propiedades anteriores se cumplen si $<$ se reemplaza por $\leq$. Existen propiedades análogas para $>$ y $\geq$.

El conjunto de soluciones de una desigualdad lineal en una variable forma un intervalo de números reales. Al igual que en el caso de las ecuaciones lineales, resolvemos una desigualdad lineal transformándola a una *desigualdad equivalente* cuyas soluciones sean obvias. Dos o más desigualdades son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones. Las propiedades de las desigualdades listadas anteriormente describen operaciones que transforman una desigualdad en otra equivalente.

EJEMPLO 4 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva $3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$.

SOLUCIÓN

$$3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$$

$$3x - 3 + 2 \leq 5x + 6 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$3x - 1 \leq 5x + 6 \quad \text{Simplificar.}$$

$$3x \leq 5x + 7 \quad \text{Sumar 1.}$$

$$-2x \leq 7 \quad \text{Restar 5x.}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot -2x \geq \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 7 \quad \text{Multiplicar por } -1/2. \text{ (La desigualdad se invierte).}$$

$$x \geq -3.5$$

El conjunto solución de la desigualdad es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que -3.5. En notación de intervalos, el conjunto solución es $[-3.5, \infty)$

Ahora resuelva el ejercicio 41.

Puesto que el conjunto solución de una desigualdad lineal es un intervalo de números reales, podemos expresar el conjunto solución con una gráfica en la recta numérica, como se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Resolución de una desigualdad lineal que incluye fracciones

Resuelva la desigualdad y grafique su conjunto solución.

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$$

continúa

SOLUCIÓN El MCD de las fracciones es 12

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{2}>\frac{x}{4}+\frac{1}{3} \qquad \text{Desigualdad original.}$$

$$12\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)>12\cdot\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{3}\right) \qquad \text{Multiplicar por 12 (el MCD).}$$

$$4x+6>3x+4 \qquad \text{Simplificar.}$$

$$x+6>4 \qquad \text{Restar } 3x.$$

$$x>-2 \qquad \text{Resta 6.}$$

El conjunto solución es el intervalo $(-2, \infty)$. Su gráfica se muestra en la figura R.18.

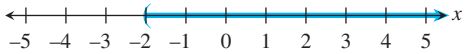


FIGURA R.18 La gráfica del conjunto solución de la desigualdad del ejemplo 5.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

Algunas veces, dos desigualdades se combinan en una **desigualdad doble**, cuyo conjunto solución es una desigualdad doble con la x aislada en el término central (consulte el ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Resolución de una desigualdad doble

Resuelva la desigualdad y grafique su conjunto solución.

$$-3<\frac{2x+5}{3}\le 5$$

SOLUCIÓN

$$-3<\frac{2x+5}{3}\le 5$$

$$-9<2x+5\le 15 \qquad \text{Multiplicar por 3.}$$

$$-14<2x\le 10 \qquad \text{Restar 5.}$$

$$-7<x\le 5 \qquad \text{Dividir entre 2.}$$

El conjunto solución es el conjunto de todos los números reales mayores que -7 y menores o iguales a 5. En notación de intervalo, la solución es el conjunto $(-7, 5]$. Su gráfica se muestra en la figura R.19.

Ahora resuelva el ejercicio 47.

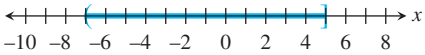


FIGURA R.19 La gráfica del conjunto solución de la doble desigualdad del ejemplo 6.

REPASO RÁPIDO R.3

En los ejercicios 1 y 2 simplifique la expresión reduciendo términos semejantes.

1. $2x+5x+7+y-3x+4y+2$

2. $4+2x-3z+5y-x+2y-z-2$

En los ejercicios 3 y 4 utilice la propiedad distributiva para desarrollar los productos. Simplifique la expresión resultante reduciendo los términos semejantes.

3. $3(2x-y)+4(y-x)+x+y$

4. $5(2x+y-1)+4(y-3x+2)+1$

En los ejercicios del 5 al 10 utilice el MCD para combinar las fracciones. Simplifique la fracción resultante.

5. $\frac{2}{y}+\frac{3}{y}$

6. $\frac{1}{y-1}+\frac{3}{y-2}$

7. $2+\frac{1}{x}$

8. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-x$

9. $\frac{x+4}{2}+\frac{3x-1}{5}$

10. $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN R.3

En los ejercicios del 1 al 4 determine cuáles valores de x son soluciones de la ecuación.

1. $2x^2 + 5x = 3$

a) $x = -3$ **b)** $x = -\frac{1}{2}$ **c)** $x = \frac{1}{2}$

2. $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} = \frac{x}{3}$

a) $x = -1$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = 1$

3. $\sqrt{1 - x^2} + 2 = 3$

a) $x = -2$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = 2$

4. $(x - 2)^{1/3} = 2$

a) $x = -6$ **b)** $x = 8$ **c)** $x = 10$

En los ejercicios del 5 al 10 determine si la ecuación es lineal en x.

5. $5 - 3x = 0$ **6.** $5 = 10/2$

7. $x + 3 = x - 5$ **8.** $x - 3 = x^2$

9. $2\sqrt{x} + 5 = 10$ **10.** $x + \frac{1}{x} = 1$

En los ejercicios del 11 al 24 resuelva la ecuación.

11. $3x = 24$ **12.** $4x = -16$

13. $3t - 4 = 8$ **14.** $2t - 9 = 3$

15. $2x - 3 = 4x - 5$ **16.** $4 - 2x = 3x - 6$

17. $4 - 3y = 2(y + 4)$ **18.** $4(y - 2) = 5y$

19. $\frac{1}{2}x = \frac{7}{8}$ **20.** $\frac{2}{3}x = \frac{4}{5}$

21. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = 1$ **22.** $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} = 1$

23. $2(3 - 4z) - 5(2z + 3) = z - 17$

24. $3(5z - 3) - 4(2z + 1) = 5z - 2$

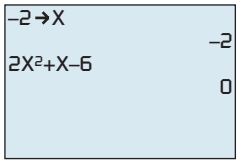
En los ejercicios del 25 al 28 resuelva la ecuación. Compruebe su respuesta con calculadora.

25. $\frac{2x - 3}{4} + 5 = 3x$ **26.** $2x - 4 = \frac{4x - 5}{3}$

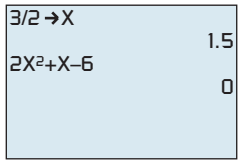
27. $\frac{t + 5}{8} - \frac{t - 2}{2} = \frac{1}{3}$ **28.** $\frac{t - 1}{3} + \frac{t + 5}{4} = \frac{1}{2}$

29. Escriba para aprender Escriba un enunciado acerca de las soluciones de ecuaciones sugeridas mediante los cálculos de las figuras.

a)

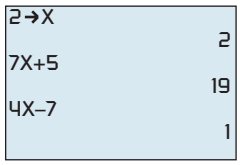


b)

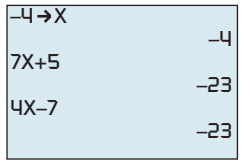


30. Escriba para aprender Escriba un enunciado acerca de las soluciones de ecuaciones sugeridas mediante los cálculos de las figuras.

a)



b)



En los ejercicios del 31 al 34 determine los valores de x que son soluciones de la desigualdad.

31. $2x - 3 < 7$

a) $x = 0$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = 6$

32. $3x - 4 \geq 5$

a) $x = 0$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = 4$

33. $-1 < 4x - 1 \leq 11$

a) $x = 0$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 3$

34. $-3 \leq 1 - 2x \leq 3$

a) $x = -1$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = 2$

En los ejercicios del 35 al 42 resuelva la desigualdad y dibuje una gráfica en la recta numérica del conjunto solución.

35. $x - 4 < 2$ **36.** $x + 3 > 5$

37. $2x - 1 \leq 4x + 3$ **38.** $3x - 1 \geq 6x + 8$

39. $2 \leq x + 6 < 9$ **40.** $-1 \leq 3x - 2 < 7$

41. $2(5 - 3x) + 3(2x - 1) \leq 2x + 1$

42. $4(1 - x) + 5(1 + x) > 3x - 1$

En los ejercicios del 43 al 54 resuelva la desigualdad.

43. $\frac{5x + 7}{4} \leq -3$ **44.** $\frac{3x - 2}{5} > -1$

45. $4 \geq \frac{2y - 5}{3} \geq -2$ **46.** $1 > \frac{3y - 1}{4} > -1$

47. $0 \leq 2z + 5 < 8$ **48.** $-6 < 5t - 1 < 0$

49. $\frac{x - 5}{4} + \frac{3 - 2x}{3} < -2$ **50.** $\frac{3 - x}{2} + \frac{5x - 2}{3} < -1$

51. $\frac{2y - 3}{2} + \frac{3y - 1}{5} < y - 1$

52. $\frac{3 - 4y}{6} - \frac{2y - 3}{8} \geq 2 - y$

53. $\frac{1}{2}(x - 4) - 2x \leq 5(3 - x)$

54. $\frac{1}{2}(x + 3) + 2(x - 4) < \frac{1}{3}(x - 3)$

En los ejercicios del 55 al 58 determine, de los valores que se muestran en la figura R.20, las soluciones de la ecuación o desigualdad.

55. $x^2 - 2x < 0$ **56.** $x^2 - 2x = 0$

57. $x^2 - 2x > 0$ **58.** $x^2 - 2x \leq 0$

X	Y1
0	0
1	−1
2	0
3	3
4	8
5	15
6	24

Y1 = X²−2X

FIGURA R.20 La segunda columna proporciona los valores de $y_1 = x^2 - 2x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.

59. Escriba para aprender Explique cómo se obtuvo la segunda ecuación a partir de la primera.

$$x - 3 = 2x + 3, \quad 2x - 6 = 4x + 6$$

60. Escriba para aprender Explique cómo se obtuvo la segunda ecuación a partir de la primera.

$$2x - 1 = 2x - 4, \quad x - \frac{1}{2} = x - 2$$

61. Actividad en grupo Determine si las dos ecuaciones son equivalentes.

a) $3x = 6x + 9, \quad x = 2x + 9$

b) $6x + 2 = 4x + 10, \quad 3x + 1 = 2x + 5$

62. Actividad en grupo Determine si las dos ecuaciones son equivalentes.

a) $3x + 2 = 5x - 7, \quad -2x + 2 = -7$

b) $2x + 5 = x - 7, \quad 2x = x - 7$

Preguntas de examen estandarizado

63. Verdadero o falso $-6 > -2$. Justifique su respuesta.

64. Verdadero o falso $2 \leq \frac{6}{3}$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 65 al 68 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver los problemas.

65. Opción múltiple ¿Cuál de las ecuaciones siguientes es equivalente a la ecuación $3x + 5 = 2x + 1$?

A) $3x = 2x$ **B)** $3x = 2x + 4$

C) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = x + 1$ **D)** $3x + 6 = 2x$

E) $3x = 2x - 4$

66. Opción múltiple ¿Cuál de las desigualdades siguientes es equivalente a la desigualdad $-3x < 6$?

A) $3x < -6$ **B)** $x < 10$

C) $x > -2$ **D)** $x > 2$

E) $x > 3$

67. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones es la solución de la ecuación $x(x + 1) = 0$?

A) $x = 0$ o $x = -1$ **B)** $x = 0$ o $x = 1$

C) Sólo $x = -1$ **D)** Sólo $x = 0$

E) Sólo $x = 1$

68. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones representa una ecuación equivalente a la ecuación

$$\frac{2x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$$

con las fracciones eliminadas?

A) $2x + 1 = x - 1$ **B)** $8x + 6 = 3x - 4$

C) $4x + 3 = \frac{3}{2}x - 2$ **D)** $4x + 3 = 3x - 4$

E) $4x + 6 = 3x - 4$

Exploraciones

69. Comprobación de desigualdades con una calculadora

a) La calculadora que utilizamos indica que la proposición $2 < 3$ es verdadera devolviendo el valor 1 (para verdadero), cuando se ingresa $2 < 3$. Pruebe lo anterior con su calculadora.

b) La calculadora que utilizamos indica que la proposición $2 < 1$ es falsa, devolviendo el valor 0 (para falso) cuando se ingresa $2 < 1$. Inténtelo con su calculadora.

c) Utilice su calculadora para probar cuál de estos dos números es mayor: 799/800, 800/801.

d) Utilice su calculadora para probar cuál de estos dos números es mayor: −102/101, −103/102.

e) Si su calculadora devuelve 0 cuando usted ingresa $2x + 1 < 4$, ¿qué puede concluir acerca del valor almacenado para x?

Ampliación de las ideas

70. Perímetro de un rectángulo La fórmula para el perímetro P de un rectángulo es

$$P = 2(L + W).$$

Despeje W.

71. Área de un trapecio La fórmula para el área A de un trapecio es

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2).$$

Despeje b_1.

72. Volumen de una esfera



La fórmula para el volumen V de una esfera es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Despeje r.

73. Celsius a Fahrenheit La fórmula para la temperatura Celsius en términos de la temperatura Fahrenheit es

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Despeje F.

R.4
Rectas en el plano

Aprenderá acerca de...

- La pendiente de una recta
- La ecuación de una recta en la forma punto pendiente
- La ecuación de una recta en la forma pendiente intersección al origen
- La graficación de ecuaciones lineales con dos variables
- Las rectas paralelas y rectas perpendiculares
- La aplicación de ecuaciones lineales con dos variables

. . . porque

Las ecuaciones lineales se aplican profusamente en áreas como los negocios o las ciencias del comportamiento, por ejemplo.

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta no vertical es la razón de la cantidad del cambio vertical a la cantidad del cambio horizontal entre dos puntos. Para los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el cambio vertical es $\triangle y = y_2 - y_1$ y el cambio horizontal es $\triangle x = x_2 - x_1$ ($\triangle y$ se lee "delta" y). Consulte la figura R.21.

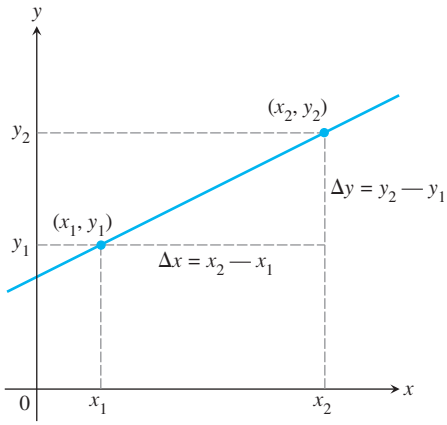


FIGURA R.21 La pendiente de una recta no vertical puede determinarse a partir de las coordenadas de cualesquiera dos puntos de la recta.

DEFINICIÓN Pendiente de una recta

La **pendiente** de una recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si la recta es vertical, entonces $x_1 = x_2$ y la pendiente no está definida.

FÓRMULA DE LA PENDIENTE

La pendiente no depende del orden de los puntos. Podríamos utilizar $(x_1, y_1) = (4, -2)$ y $(x_2, y_2) = (-1, 2)$ en el ejemplo 1 a). Compruébelo.

EJEMPLO 1 Determinación de la pendiente de una recta

Determine la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos. Haga un bosquejo de la recta.

a) $(-1, 2)$ y $(4, -2)$ **b)** $(1, 1)$ y $(3, 4)$

SOLUCIÓN

a) Los dos puntos son $(x_1, y_1) = (-1, 2)$ y $(x_2, y_2) = (4, -2)$. Por tanto,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-2) - 2}{4 - (-1)} = -\frac{4}{5}.$$

continúa

b) Los dos puntos son $(x_1, y_1) = (1, 1)$ y $(x_2, y_2) = (3, 4)$. Así,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2}.$$

Las gráficas de estas dos rectas se muestran en la figura R.22.

Ahora resuelva el ejercicio 3.

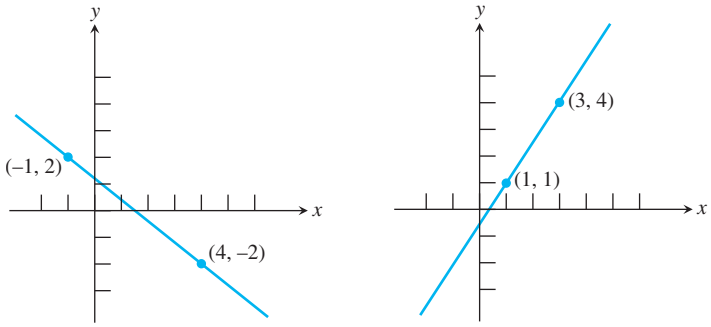


FIGURA R.22 Las gráficas de las dos rectas del ejemplo 1.

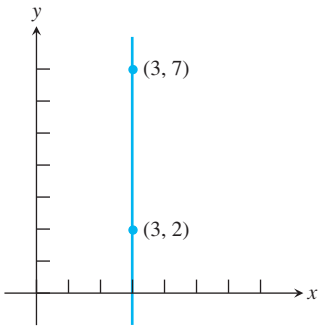


FIGURA R.23 Al aplicar la fórmula de la pendiente a esta recta vertical se obtiene $m = 5/0$, que no está definido. Así, la pendiente de una recta vertical no está definida.

La figura R.23 muestra una recta vertical que pasa por los puntos (3, 2) y (3, 7). Si tratamos de calcular su pendiente mediante la fórmula $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, obtenemos cero en el denominador. Por lo que tiene sentido decir que una recta vertical no tiene pendiente, o que su pendiente está indefinida.

Ecuación de una recta en la forma punto pendiente

Si conocemos la pendiente y las coordenadas de un punto en una recta, entonces podemos determinar una ecuación para esa recta. Por ejemplo, la recta en la figura R.24 pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m. Si (x, y) es cualquier otro punto en esta recta, la definición de pendiente proporciona la ecuación

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \text{o} \quad y - y_1 = m(x - x_1).$$

Una ecuación escrita de esta forma está en la *forma punto pendiente.*

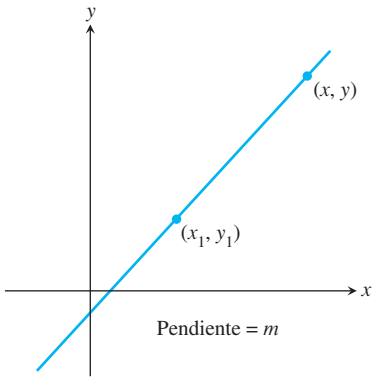


FIGURA R.24 La recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m.

DEFINICIÓN Forma punto pendiente de una ecuación de una recta

La **forma punto pendiente** de una ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

EJEMPLO 2 Uso de la forma punto pendiente

Utilice la forma punto pendiente para determinar una ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3, -4)$ y tiene pendiente 2.

continúa

SOLUCIÓN Sustituya $x_1 = -3$, $y_1 = -4$ y $m = 2$ en la forma punto pendiente, y simplifique la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Forma punto pendiente.} \\ y - (-4) &= 2(x - (-3)) && x_1 = -3,\ y_1 = -4,\ m = 2. \\ y + 4 &= 2x - 2(-3) && \text{Propiedad distributiva.} \\ y + 4 &= 2x + 6 \\ y &= 2x + 2 && \text{Una forma simplificada común.} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 11.

INTERSECCIÓN *y*

La b en $y = mx + b$ con frecuencia se conoce como "la intersección y" en lugar de "la ordenada (coordenada y) de la intersección con el eje y".

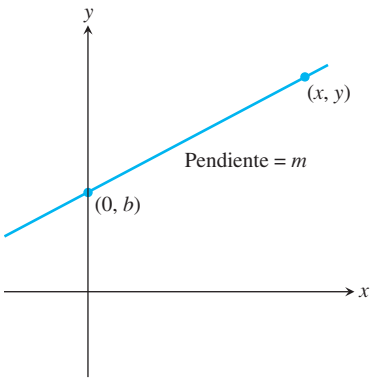


FIGURA R.25 La recta con pendiente m y la intersección y $(0, b)$.

Ecuación de una recta en la forma pendiente intersección al origen

La **intersección *y*** de una recta no vertical es el punto donde la recta interseca al eje y. Si conocemos la intersección y y la pendiente de la recta, podemos aplicar la forma punto pendiente para determinar una ecuación de la recta.

La figura R.25 muestra una recta con pendiente m e intersección y $(0, b)$. Una ecuación en la forma punto pendiente para esta recta es $y - b = m(x - 0)$. Rescribiendo esta ecuación obtenemos la forma conocida como la *forma pendiente intersección al origen*.

DEFINICIÓN Forma pendiente intersección al origen de una ecuación de una recta

La **forma pendiente intersección al origen** de una ecuación de una recta con pendiente m e intersección y $(0, b)$ es

$$y = mx + b.$$

EJEMPLO 3 Uso de la forma pendiente intersección al origen

Escriba una ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto $(-1, 6)$ utilizando la forma pendiente intersección al origen.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} y &= mx + b && \text{Forma pendiente intersección al origen.} \\ y &= 3x + b && m = 3. \\ 6 &= 3(-1) + b && y = 6 \text{ cuando } x = -1. \\ b &= 9 \end{aligned}$$

La forma pendiente intersección al origen de la ecuación es $y = 3x + 9$.

Ahora resuelva el ejercicio 21.

No podemos utilizar la frase "*la* ecuación de una recta" ya que cada recta tiene muchas ecuaciones diferentes. Cada recta tiene una ecuación que puede escribirse en la forma $Ax + By + C = 0$, donde A y B no son cero al mismo tiempo. Esta forma es la **forma general** para una ecuación de una recta.

Si $B \neq 0$, la forma general puede cambiarse a la forma pendiente intersección al origen como sigue:

$$Ax + By + C = 0$$
$$By = -Ax - C$$
$$y = \underbrace{-\frac{A}{B}}_{\text{pendiente}}x + \underbrace{\left(-\frac{C}{B}\right)}_{\text{intercepción } y}$$

Formas de las ecuaciones de rectas

Forma general:	$Ax + By + C = 0$, A y B no son ambos cero.
Forma pendiente intersección al origen:	$y = mx + b$
Forma punto pendiente:	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Recta vertical:	$x = a$
Recta horizontal:	$y = b$

Graficación de ecuaciones lineales con dos variables

Una **ecuación lineal en x y y** es aquella que puede escribirse en la forma

$$Ax + By = C,$$

donde A y B no son ambos cero. Al rescribir esta ecuación en la forma $Ax + By - C = 0$ vemos que está en la forma general de la ecuación de una recta. Si $B = 0$, la recta es vertical y si $A = 0$, la recta es horizontal.

La **gráfica** de una ecuación en x y y consiste en todas las parejas (x, y) que son soluciones de la ecuación. Por ejemplo, $(1, 2)$ es una **solución** de la ecuación $2x + 3y = 8$ ya que al sustituir $x = 1$ y $y = 2$ en la ecuación conduce al enunciado verdadero $8 = 8$. Las parejas $(-2, 4)$ y $(2, 4/3)$ también son soluciones.

Ya que la gráfica de una ecuación lineal en x y y es una línea recta, sólo necesitamos determinar dos soluciones y luego conectarlas con una línea recta para dibujar su gráfica. Si una recta no es horizontal ni vertical, entonces dos puntos fáciles de obtener son su intersección con el eje x y su intersección con el eje y. La **intersección x** es el punto $(x', 0)$ donde la gráfica interseca el eje x. Establezca $y = 0$ y despeje x para determinar la intersección x. Las coordenadas de la intersección y son $(0, y')$. Establezca $x = 0$ y despeje y para determinar la intersección y.

Graficación con una utilería gráfica

Para dibujar una gráfica de una ecuación mediante un graficador;

1. Rescriba la ecuación en la forma $y =$ (una expresión en x).
2. Introduzca la ecuación en el graficador.
3. Seleccione una **ventana de visualización** adecuada (consulte la figura R.26).
4. Presione la tecla "graph" (graficar).

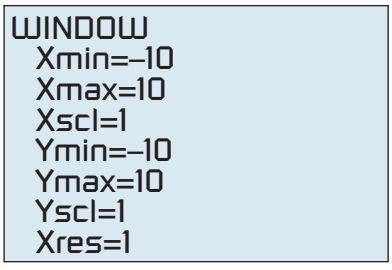
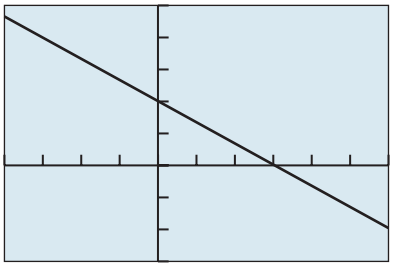


FIGURA R.26 Las dimensiones de la ventana para la *ventana estándar*. La notación "[−10, 10] por [−10, 10]" se utiliza para representar dimensiones de ventana como éstas.



[−4, 6] por [−3, 5]

FIGURA R.27 La gráfica de $2x + 3y = 6$. Los puntos (0, 2) (intersección y) y (3, 0) (intersección x) aparecen en la gráfica y, como pareja, son soluciones de la ecuación, proporcionando respaldo visual que la gráfica es correcta (ejemplo 4).

Una utilería para graficar, con frecuencia conocida como *graficador*, calcula los valores de y para un conjunto seleccionado de valores de x entre Xmín y Xmáx y traza los puntos (x, y) correspondientes.

EJEMPLO 4 Uso de una utilería graficadora

Dibuje la gráfica de $2x + 3y = 6$.

SOLUCIÓN Primero despeje a y.

$$2x + 3y = 6$$

$$3y = -2x + 6 \quad \text{Despejar a } y.$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2 \quad \text{Dividir entre 3.}$$

La figura R.27 muestra la gráfica de $y = -(2/3)x + 2$, o de manera equivalente, la gráfica de la ecuación lineal $2x + 3y = 6$, en la ventana de visualización $[-4, 6]$ por $[-3, 5]$.

Ahora resuelva el ejercicio 27.

VENTANA DE VISUALIZACIÓN

La ventana de visualización $[-4, 6]$ por $[-3, 5]$ de la figura R.27 significa $-4 \leq x \leq \leq 6$ y $-3 \leq y \leq 5$.

VENTANA CUADRADA DE VISUALIZACIÓN

Una **ventana cuadrada de visualización** en un graficador es aquella en la que los ángulos parecen ser correctos. Por ejemplo, la recta $y = x$ parecerá que forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje x. Además, una distancia de 1 en el eje x parece la misma que en l eje y. Esto es, si Xscl = Yscl, la distancia entre marcas consecutivas en el eje x y en el eje y parecerán ser iguales.

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

EXPLORACIÓN 1 **Investigación de gráficas de ecuaciones lineales**

1. ¿Qué tienen en común las gráficas de $y = mx + b$ y $y = mx + c$, $b \neq c$? ¿En qué difieren?
2. Grafique $y = 2x$ y $y = -(1/2)x$ en una *ventana cuadrada de visualización* (consulte la nota la margen). En la calculadora utilizamos, la "ventana decimal" $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$ es cuadrada. Estime el ángulo entre las dos rectas.
3. Repita la parte 2 para $y = mx$ y $y = -(1/m)x$ con $m = 1, 3, 4$ y 5.

En la Exploración 1 se incluyeron rectas paralelas y rectas perpendiculares. Es riesgoso utilizar un graficador para decidir cuándo las rectas son paralelas o perpendiculares. A continuación se describe una prueba algebraica para determinar cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares.

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

1. Dos rectas no verticales son paralelas si, y sólo si sus pendientes son iguales.
2. Dos rectas no verticales son perpendiculares si, y sólo si sus pendientes m_1 y m_2 son recíprocos opuestos. Esto es, si, y sólo si

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

EJEMPLO 5 Determinación de una ecuación de una recta paralela

Determine una ecuación de la recta que pasa por $P(1, -2)$ que es paralela a la recta L con ecuación $3x - 2y = 1$.

SOLUCIÓN Determinamos la pendiente de L escribiendo su ecuación en la forma pendiente intersección al origen.

$$3x - 2y = 1 \qquad \text{Ecuación para } L.$$
$$-2y = -3x + 1 \qquad \text{Restar } 3x.$$
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \qquad \text{Dividir entre } -2.$$

La pendiente de L es 3/2.

La recta cuya ecuación buscamos tiene pendiente 3/2 y contiene al punto $(x_1, y_1) = (1, -2)$. Por tanto, la ecuación que buscamos en la forma punto pendiente para la recta es

$$y + 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$$
$$y + 2 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

Ahora resuelva el ejercicio 41 a).

EJEMPLO 6 Determinación de una ecuación de una recta perpendicular

Determine una ecuación de la recta que pasa por $P(2, -3)$ que es perpendicular a la recta L con ecuación $4x + y = 3$. Compruebe su resultado con un graficador.

SOLUCIÓN Determinamos la pendiente de L escribiendo su ecuación en la forma pendiente intersección al origen.

$$4x + y = 3 \qquad \text{Ecuación para } L$$
$$y = -4x + 3 \qquad \text{Restar } 4x.$$

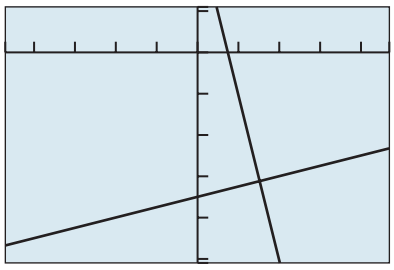
La pendiente de L es -4.

La recta cuya ecuación buscamos tiene pendiente $-1/(-4) = 1/4$ y pasa por el punto $(x_1, y_1) = (2, -3)$. Por tanto, la ecuación que buscamos en la forma punto pendiente para la recta es

$$y - (-3) = \frac{1}{4}(x - 2)$$
$$y + 3 = \frac{1}{4}x - \frac{2}{4} \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$$

La figura R.28 muestra las gráficas de las dos ecuaciones en una ventana cuadrada de visualización y sugiere que las gráficas son perpendiculares.

Ahora resuelva el ejercicio 43 a).



[−4.7, 4.7] por [−5.1, 1.1]

FIGURA R.28 Las gráficas de $y = -4x + 3$ y $y = (1/4)x - 7/2$ en esta ventana cuadrada de visualización, parecen intersecarse en ángulo recto (ejemplo 6).

Aplicación de ecuaciones lineales con dos variables

Las ecuaciones lineales y sus gráficas aparecen con frecuencia en aplicaciones. A menudo, las soluciones algebraicas de estos problemas de aplicación requieren determinar una ecuación de una recta y resolver una ecuación en una variable. Las técnicas de graficación complementan las algebraicas.

EJEMPLO 7 Determinación de la depreciación de bienes inmuebles

Apartamentos Camelot compraron un edificio en $50,000 que se deprecia $2,000 por año durante un periodo de 25 años.

a) Escriba una ecuación lineal que proporcione el valor y del edificio en términos de los años x posteriores a la compra.

b) ¿En cuántos años el valor del edificio será de $24,500?

SOLUCIÓN

a) Necesitamos determinar el valor de m y b de modo que $y = mx + b$, donde $0 \le x \le 25$. Sabemos que $y = 50{,}000$ cuando $x = 0$, por lo que la recta tiene intersección y $(0, 50{,}000)$ y $b = 50{,}000$. Un año después de la compra ($x = 1$), el valor del edificio es $50{,}000 - 2{,}000 = 48{,}000$. Por lo que cuando $x = 1$, $y = 48{,}000$. Mediante álgebra, determinamos

$$y = mx + b$$
$$48{,}000 = m \cdot 1 + 50{,}000 \qquad y = 48{,}000 \text{ cuando } x = 1$$
$$-2{,}000 = m$$

El valor de y del edificio, al cabo de x años después de su compra es

$$y = -2{,}000x + 50{,}000.$$

b) Necesitamos determinar el valor de x cuando $y = 24{,}500$.

$$y = -2{,}000x + 50{,}000$$

Nuevamente, mediante álgebra encontramos

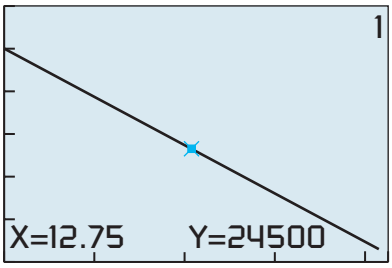
$$24{,}500 = -2{,}000x + 50{,}000 \qquad \text{Hacer } y = 24{,}500.$$
$$-25{,}500 = -2{,}000x \qquad \text{Restar } 50{,}000.$$
$$12.75 = x$$

El valor depreciado del edificio será de $24,500 exactamente al cabo de 12.75 años, o 12 años y 9 meses después de que Apartamentos Camelot lo comprara. Podemos respaldar nuestro trabajo algebraico tanto gráfica como numéricamente. Las coordenadas indicadas en la figura R.29a muestran de manera gráfica que (12.75, 24,500) es una solución de $y = -2{,}000x + 50{,}000$. Esto significa que $y = 24{,}500$ cuando $x = 12.75$.

La figura R.29b es una tabla de valores para $y = -2{,}000x + 50{,}000$ para unos cuantos valores de x. La cuarta línea de la tabla muestra de forma numérica que $y = 24{,}500$ cuando $x = 12.75$.

Ahora resuelva el ejercicio 5.





[0, 23.5] por [0, 60000]

a)

X	Y1	
12	26000	
12.25	25500	
12.5	25000	
12.75	24500	
13	24000	
13.25	23500	
13.5	23000	

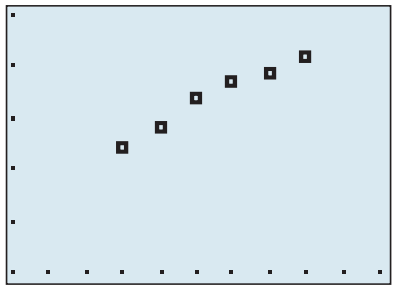
Y1 = −2000X+50000

b)

FIGURA R.29 Una gráfica a) y una tabla b) de valores para $y = -2{,}000x + 50{,}000$ (ejemplo 7).

La figura R.30 en la página 38 muestra el ingreso de los estadounidenses de 1998 a 2003 en billones de dólares y su correspondiente diagrama de dispersión de los datos. En el ejemplo 8, modelamos la información de la figura R.30 con una ecuación lineal.

Año	Monto (billones de dólares)
1998	7.4
1999	7.8
2000	8.4
2001	8.7
2002	8.9
2003	9.2



[1995, 2005] por [5, 10]

FIGURA R.30 Ingreso personal de estadounidenses.

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, *Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2004–2005.* (Ejemplo 8).

EJEMPLO 8 Determinación de un modelo lineal para el ingreso personal de estadounidenses

El ingreso personal de los estadounidenses, en billones de dólares, se da en la figura R.30.

a) Escriba una ecuación lineal para el ingreso de los estadounidenses y en términos del año x, utilizando los puntos (1998, 7.4) y (1999, 7.8).

b) Utilice la ecuación en a) para estimar el ingreso de los estadounidenses en 2001.

c) Utilice la ecuación de a) para predecir el ingreso en 2006.

d) Superponga una gráfica de la ecuación lineal de a) a un diagrama de dispersión de los datos.

SOLUCIÓN

a) Sea $y = mx + b$. La pendiente de la recta que pasa por los dos puntos (1998, 7.4) y (1999, 7.8) es

$$m = \frac{7.8 - 7.4}{1999 - 1998} = 0.4.$$

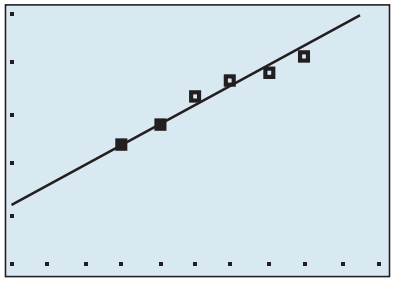
El valor de 7.4 billones de dólares en 1998 proporciona $y = 7.4$ cuando $x = 1998$.

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ y &= 0.4x + b && m = 0.4 \\ 7.4 &= 0.4(1998) + b && y = 7.4 \text{ cuando } x = 1998 \\ b &= 7.4 - 0.4(1998) \\ b &= -791.8 \end{aligned}$$

La ecuación lineal que buscamos es $y = 0.4x - 791.8$.

b) Necesitamos determinar el valor de y cuando $x = 2001$.

$$\begin{aligned} y &= 0.4x - 791.8 \\ y &= 0.4(2001) - 791.8 && \text{Hacer } x = 2001. \\ y &= 8.6 \end{aligned}$$



[1995, 2005] por [5, 10]

FIGURA R.31 Modelo lineal para el ingreso personal de los estadounidenses (ejemplo 8).

Al utilizar el modelo lineal que encontramos en a) estimamos el ingreso de los estadounidenses en 2001 como 8.6 billones de dólares, un poco menos que el monto real de 8.7 billones.

c) Necesitamos determinar el valor de y cuando $x = 2006$.

$$y = 0.4x - 791.8$$
$$y = 0.4(2006) - 791.8 \quad \text{Hacer } x = 2006.$$
$$y = 10.6$$

Mediante el modelo lineal que encontramos en a) predecimos que el ingreso de los estadounidenses en 2006 será 10.6 billones de dólares

d) La gráfica y el diagrama de dispersión se muestran en la figura R.31.

Ahora resuelva el ejercicio 51.



PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO (de la página 1)

PROBLEMA: Suponga que la velocidad de la luz es aproximadamente 186,000 millas por segundo. (Tomó mucho tiempo llegar a este número. Consulte la nota al margen acerca de la velocidad de la luz).

a) Si la distancia de la Luna a la Tierra es de aproximadamente 237,000 millas, determine el tiempo requerido para que la luz viaje de la Tierra a la Luna.

b) Si la luz viaja de la Tierra al Sol en 8.32 minutos, aproxime la distancia de la Tierra al Sol.

c) Si la luz tarda 5 horas y 29 segundos para viajar del Sol a Plutón, aproxime la distancia del Sol al Plutón.

SOLUCIÓN: Utilizamos la ecuación lineal $d = r \times t$ (distancia = velocidad $\times$ tiempo) para realizar los cálculos con $r = 186{,}000$ millas/segundo.

a) Aquí $d = 237{,}000$ millas, por lo que

$$t = \frac{d}{r} = \frac{237{,}000 \text{ millas}}{186{,}000 \text{ millas/segundos}} \approx 1.27 \text{ segundos.}$$

El tiempo requerido para que la luz viaje de la Tierra a la Luna es alrededor de 1.27 segundos.

b) Aquí $t = 8.32$ minutos $= 499.2$ segundos, por lo que

$$d = r \times t = 186{,}000 \frac{\text{millas}}{\text{segundos}} \times 499.2 \text{ segundos} = 92{,}851{,}200 \text{ millas.}$$

La distancia de la Tierra al Sol es alrededor de 93 millones de millas.

c) Aquí $t = 5$ horas y 29 minutos $= 329$ minutos $= 19{,}740$ segundos, por lo que

$$d = r \times t = 186{,}000 \frac{\text{millas}}{\text{segundos}} \times 19{,}740 \text{ segundos}$$
$$= 3{,}671{,}640{,}000 \text{ millas.}$$

La distancia del Sol a Plutón es de 3.7×10^9 millas, aproximadamente.

VELOCIDAD DE LA LUZ

Muchos científicos han tratado de medir la velocidad de la luz. Por ejemplo, Galileo Galilei (1564–1642) intentó medir la velocidad de la luz sin mucho éxito. Visite la siguiente página Web para consultar información interesante relativa a este tema.
http://www.what-is-the-speed-of-light.com/

REPASO RÁPIDO R.4

En los ejercicios del 1 al 4 despeje x.

1. $-75x + 25 = 200$

2. $400 - 50x = 150$

3. $3(1 - 2x) + 4(2x - 5) = 7$

4. $2(7x + 1) = 5(1 - 3x)$

En los ejercicios del 5 al 8 despeje y.

5. $2x - 5y = 21$

6. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 2$

7. $2x + y = 17 + 2(x - 2y)$

8. $x^2 + y = 3x - 2y$

En los ejercicios 9 y 10 simplifique la fracción.

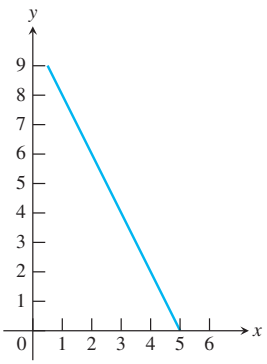
9. $\dfrac{9 - 5}{-2 - (-8)}$

10. $\dfrac{-4 - 6}{-14 - (-2)}$

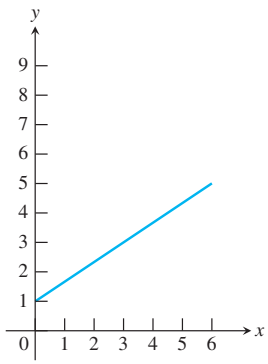
EJERCICIOS DE LA SECCIÓN R.4

En los ejercicios 1 y 2 estime la pendiente de la recta.

1.



2.



En los ejercicios del 3 al 6 determine la pendiente de la recta que pasa por el par de puntos.

3. $(-3, 5)$ y $(4, 9)$

4. $(-2, 1)$ y $(5, -3)$

5. $(-2, -5)$ y $(-1, 3)$

6. $(5, -3)$ y $(-4, 12)$

En los ejercicios del 7 al 10 determine el valor de x o y, para que la recta que pasa por el par de puntos tenga la pendiente dada.

	Puntos	**Pendiente**
7.	$(x, 3)$ y $(5, 9)$	$m = 2$
8.	$(-2, 3)$ y $(4, y)$	$m = -3$
9.	$(-3, -5)$ y $(4, y)$	$m = 3$
10.	$(-8, -2)$ y $(x, 2)$	$m = 1/2$

En los ejercicios del 11 al 14 determine una ecuación en *la forma punto pendiente* para la recta que pasa por el punto con la pendiente dada.

	Punto	**Pendiente**
11.	$(1, 4)$	$m = 2$
12.	$(-4, 3)$	$m = -2/3$
13.	$(5, -4)$	$m = -2$
14.	$(-3, 4)$	$m = 3$

En los ejercicios del 15 al 20 determine una *ecuación en la forma general* para la recta que pasa por el par de puntos.

15. $(7, -2)$ y $(1, 6)$

16. $(-3, -8)$ y $(4, -1)$

17. $(1, -3)$ y $(5, -3)$

18. $(-1, -5)$ y $(-4, -2)$

19. $(-1, 2)$ y $(2, 5)$

20. $(4, -1)$ y $(4, 5)$

En los ejercicios del 21 al 26 determine una ecuación en la forma pendiente intersección al origen para la recta.

21. La recta que pasa por $(0, 5)$ con pendiente $m = -3$.

22. La recta que pasa por $(1, 2)$ con pendiente $m = 1/2$.

23. La recta que pasa por los puntos $(-4, 5)$ y $(4, 3)$.

24. La recta que pasa por los puntos $(4, 2)$ y $(-3, 1)$.

25. La recta $2x + 5y = 12$.

26. La recta $7x - 12y = 96$.

En los ejercicios 27 a 30, con un graficador, grafique la ecuación lineal. Seleccione una ventana de visualización que muestre la intersección de la recta con el eje x y con el eje y.

27. $8x + y = 49$

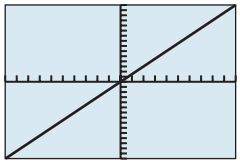
28. $2x + y = 35$

29. $123x + 7y = 429$

30. $2100x + 12y = 3540$

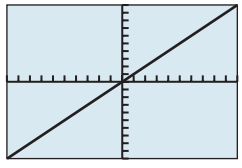
En los ejercicios 31 y 32, la recta contiene al origen y el punto en la esquina superior derecha de la pantalla del graficador.

31. Escriba para aprender ¿Cuál recta de las que se muestran aquí tiene mayor pendiente?



[−10, 10] por [−15, 15]

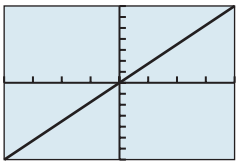
a)



[−10, 10] por [−10, 10]

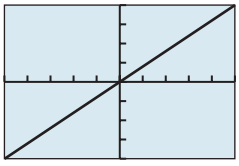
b)

32. Escriba para aprender ¿Cuál recta de las que se muestran tiene la mayor pendiente?



[−20, 20] por [−35, 35]

a)



[−5, 5] por [−20, 20]

b)

En los ejercicios del 33 al 36 determine el valor de x y el valor de y para los cuales $(x, 14)$ y $(18, y)$ son puntos en la gráfica.

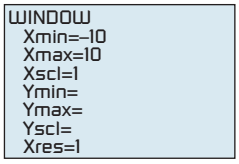
33. $y = 0.5x + 12$

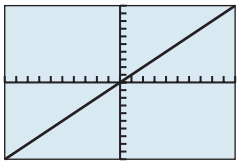
34. $y = -2x + 18$

35. $3x + 4y = 26$

36. $3x - 2y = 14$

En los ejercicios del 37 al 40 determine los valores para Ymín, Ymáx y Yscl que harán que la gráfica de la recta aparezca en la ventana de visualización, como se muestra a continuación:





37. $y = 3x$

38. $y = 5x$

39. $y = \frac{2}{3}x$

40. $y = \frac{5}{4}x$

En los ejercicios del 41 al 44, a) determine una ecuación para la recta que pasa por el punto y es paralela a la recta dada y b) determine una ecuación para la recta que pasa por el punto y es perpendicular a la recta dada. Corrobore su trabajo en forma gráfica.

	Punto	**Recta**
41.	$(1, 2)$	$y = 3x - 2$
42.	$(-2, 3)$	$y = -2x + 4$
43.	$(3, 1)$	$2x + 3y = 12$
44.	$(6, 1)$	$3x - 5y = 15$

45. Apreciación de bienes inmuebles Bob Michaels compró una casa hace 8 años en $42,000; este año el inmueble se valuó en $67,500.

a) Una ecuación lineal $V = mt + b$, $0 \le t \le 15$ representa el valor V de la casa durante 15 años a partir de que fue comprada. Determine m y b.

b) Grafique la ecuación y márquela para estimar en cuántos años, a partir de la compra, esta casa tendrá un valor de $72,500.

c) Plantee y resuelva una ecuación de forma algebraica para determinar cuántos años, a partir de la compra, esta casa tendrá un valor de $74,000.

d) Determine cuántos años después de la compra esta casa tendrá un valor de $80,250.

46. Planeación de la inversión Mary Ellen planea invertir $18,000, poniendo parte del dinero, x, en ahorros que pagan 5% al año y el resto en una cuenta que paga 8% anualmente.

a) En esta situación, ¿qué valores son posibles para x?

b) Si Mary Ellen invierte x dólares al 5%, escriba una ecuación que describa el interés total I recibido por ambas cuentas al final de un año.

c) Grafique y márquela para estimar cuánto invirtió Mary Ellen al 5%, si ella obtuvo $1,020 de interés total al final del primer año.

d) Utilice su graficador para generar una tabla de valores para I a fin de determinar cuánto debe invertir Mary Ellen al 5% para obtener $1,185 de interés total al cabo de un año.

47. Navegación Un aeroplano comercial asciende en el despegue con una pendiente $m = 3/8$. ¿Cuánto volará en la dirección horizontal para alcanzar una altura de 12,000 pies por arriba del punto de despegue?

48. Inclinación de una autopista La carretera 70 oeste de Denver, Colorado tiene una sección señalada como de 6% de inclinación. Esto significa que por un cambio horizontal de 100 pies hay 6 pies de cambio vertical.



a) Determine la pendiente de esta sección de la autopista.

b) En una autopista con una inclinación de 6%, ¿cuál es la distancia horizontal requerida para ascender 250 pies?

c) Una señal en la autopista indica 6% de inclinación durante las siguientes 7 millas. Estime cuántos pies en sentido vertical hay a lo largo de esas siguientes millas. (Hay 5,280 pies en una milla).

49. Escriba para aprender Especificaciones de edificación Los tejados asfaltados no cumplen con el código de especificaciones de un tejado que tiene una inclinación menor a 4−12. Una inclinación 4−12 implica que hay 4 pies de cambio vertical por cada 12 pies de cambio horizontal. Cierto tejado tiene pendiente $m = 3/8$. ¿Podrían usarse tejados asfaltados en ese tejado? Explique.

50. Revisión del ejemplo 8 Utilice la ecuación lineal encontrada del ejemplo 8 para estimar el ingreso de los estadounidenses en 2000, 2002 y 2003 mostrados en la figura R.30.

51. Gasto de los estadounidenses El gasto personal de los estadounidenses de 1998 a 2003, en billones de dólares, se muestra en la tabla.

x	1998	1999	2000	2001	2002	2003
y	5.9	6.3	6.7	7.0	7.4	7.8

a) Escriba una ecuación lineal para el gasto de los estadounidenses y, en términos del año x, utilizando los puntos (1998, 5.9) y (1999, 6.3).

b) Utilice la ecuación en a) para estimar los gastos de los estadounidenses en 2002.

c) Utilice la ecuación en a) para predecir el gasto de los estadounidenses en 2006.

d) Superponga una gráfica de la ecuación lineal en a) a un diagrama de dispersión de los datos.

52. Importaciones de Estados Unidos provenientes de México El total, en miles de millones de dólares, de las importaciones de Estados Unidos provenientes de México, para cada año x desde 1996 hasta 2003 se da en la tabla. (*Fuente: Oficina de Censos de los Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2001, 2004-2005).*

x	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
y	74.3	85.9	94.6	109.7	135.9	131.3	134.6	138.1

a) Utilice las parejas (1997, 85.9) y (2001, 131.3) para escribir una ecuación lineal para x y y,

b) Superponga la gráfica de la ecuación lineal en a) a un diagrama de dispersión de los datos.

c) Utilice la ecuación en a) para predecir el total de importaciones de Estados Unidos provenientes de México en 2006.

53. Población mundial La población mundial a mitad de año durante los años de 1997 a 2004 (en millones) se muestra en la tabla R.7.

Tabla R.7 Población mundial

Año	Población (millones)
1997	5852
1998	5930
1999	6006
2000	6082
2001	6156
2002	6230
2003	6303
2004	6377

Fuente: http://www.census.gov/ipc/ww/worldpop.html



a) Suponga que $x = 0$ representa a 1990, $x = 1$, representa a 1991, y así sucesivamente. Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Utilice la información de 1997 y 2004 para escribir una ecuación lineal para la población y en términos del año x. Superponga la gráfica de la ecuación lineal al diagrama de dispersión de los datos.

c) Utilice la ecuación en b) para predecir la población mundial a medio año en 2006. Compárela con la estimación 6525 de la oficina de censos.

54. Exportaciones de Estados Unidos a Japón El total de exportaciones (en miles de millones de dólares) de Estados Unidos a Japón de 1996 a 2003 se proporciona en la tabla R.8.

Tabla R.8 Exportaciones de Estados Unidos a Japón

Año	Exportaciones de Estados Unidos (miles de millones de dólares)
1996	67.6
1997	65.5
1998	57.8
1999	57.5
2000	64.9
2001	57.4
2002	51.4
2003	52.1

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2001, 2004-2005.

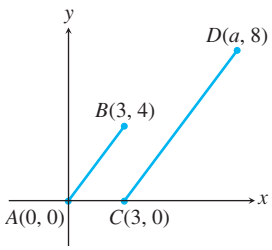
a) Haga que $x = 0$ represente a 1990, $x = 1$ represente a 1991, y así sucesivamente. Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Utilice la información de 1996 y 2003 para escribir una ecuación lineal para las exportaciones y, de Estados Unidos a Japón en términos del año x. Superponga la gráfica de la ecuación lineal al diagrama de dispersión de a).

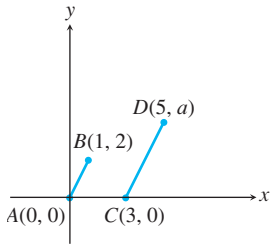
c) Utilice la ecuación en b) para predecir las exportaciones de Estados Unidos a Japón en 2006.

En los ejercicios 55 y 56 determine a de modo que los segmentos de recta AB y CD sean paralelos.

55.

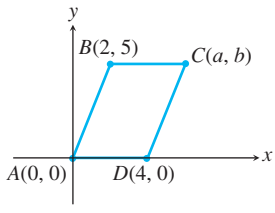


56.

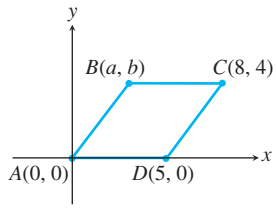


En los ejercicios 57 y 58 determine a y b de modo que la figura $ABCD$ sea un paralelogramo.

57.



58.



59. Escriba para aprender Rectas perpendiculares

a) ¿Es posible que dos rectas con pendientes positivas sean perpendiculares? Explique.

b) ¿Es posible que dos rectas con pendientes negativas sean perpendiculares? Explique.

60. Actividad en grupo **Rectas paralelas y rectas perpendiculares**

a) Suponga que $c \neq d$ y a y b no son ambos cero. Muestre que $ax + by = c$ y $ax + by = d$ son rectas paralelas. Explique por qué son necesarias las restricciones sobre a, b, c y d.

b) Suponga que a y b no son ambas cero. Demuestre que $ax + by = c$ y $bx - ay = d$ son rectas perpendiculares. Explique por qué son necesarias las restricciones sobre a y b.

Preguntas de examen estandarizado

61. Verdadero o falso La pendiente de una recta vertical es cero. Justifique su respuesta.

62. Verdadero o falso La gráfica de cualquier ecuación de la forma $ax + by = c$, donde a y b no son ambos cero, siempre es una recta. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 63 al 66 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver los problemas.

63. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es una ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 3)$ con pendiente 4?

A) $y - 3 = 4(x + 2)$ **B)** $y + 3 = 4(x - 2)$

C) $x - 3 = 4(y + 2)$ **D)** $x + 3 = 4(y - 2)$

E) $y + 2 = 4(x - 3)$

64. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es una ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección con el eje y de -2?

A) $y = 3x + 2$ **B)** $y = 3x - 2$

C) $y = -2x + 3$ **D)** $x = 3y - 2$

E) $x = 3y + 2$

65. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta $y = -2x + 5$??

A) $y = 2x + 1$ **B)** $y = -2x - \frac{1}{5}$

C) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ **D)** $y = -\frac{1}{2}x + 3$

E) $y = \frac{1}{2}x - 3$

66. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos $(-2, 1)$ y $(1, -4)$?

A) $-\frac{3}{5}$ **B)** $\frac{3}{5}$

C) $-\frac{5}{3}$ **D)** $\frac{5}{3}$

E) -3

Exploraciones

67. Exploración de la gráfica de $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c, a \neq 0, b \neq 0$

Sea $c = 1$.

a) Dibuje la gráfica para $a = 3$, $b = -2$.

b) Dibuje la gráfica para $a = -2$, $b = -3$.

c) Dibuje la gráfica para $a = 5$, $b = 3$.

d) Utilice sus gráficas en a), b) y c) para hacer una conjetura acerca de lo que representan a y b cuando $c = 1$. Pruebe su conjetura.

e) Repita a)−d) para $c = 2$.

f) Si $c = -1$, ¿qué representan a y b?

68. Investigación de las gráficas de ecuaciones lineales

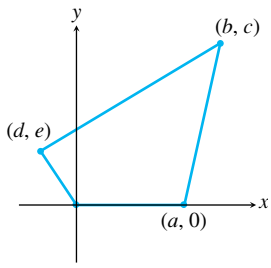
a) Grafique $y = mx$ para $m = -3, -2, -1, 1, 2, 3$ en la ventana $[-8, 8]$ por $[-5, 5]$. ¿Qué tienen en común estas gráficas? ¿En qué difieren?

b) Si $m > 0$, ¿qué tienen en común las gráficas de $y = mx$ y $y = -mx$? ¿En qué difieren?

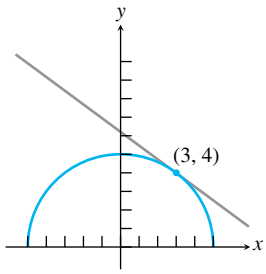
c) Grafique $y = 0.3x + b$ para $b = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ en $[-8, 8]$ por $[-5, 5]$. ¿Qué tienen en común estas gráficas? ¿En qué difieren?

Ampliación de las ideas

69. Conexión entre álgebra y geometría Muestre que si se unen los puntos medios de lados consecutivos de cualquier cuadrilátero (consulte la figura), el resultado es un paralelogramo.



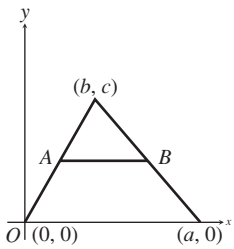
A. Representación para el ejercicio 69



A. Representación para el ejercicio 70

70. Conexión entre álgebra y geometría Considere la semicircunferencia de radio 5 con centro en (0, 0) que se muestra en la figura. Determine una ecuación de la recta tangente a la semicircunferencia en el punto (3, 4). (*Sugerencia:* Una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia).

71. Conexión entre álgebra y geometría Muestre que en cualquier triángulo (consulte la figura) el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado y mide la mitad de él.



R.5 Resolución de ecuaciones en forma gráfica, numérica y algebraica

Aprenderá acerca de...

- La resolución de manera gráfica de ecuaciones
- La resolución de ecuaciones cuadráticas
- La aproximación en forma gráfica de soluciones de ecuaciones
- La aproximación de soluciones de ecuaciones, de forma numérica, mediante tablas
- La resolución de ecuaciones mediante la determinación de intersecciones

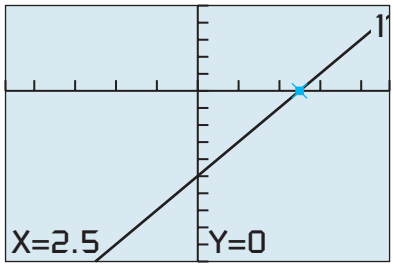
. . . porque

Estas técnicas básicas están implicadas en el uso de utilerías de graficación para resolver ecuaciones en este libro.

Resolución de manera gráfica de ecuaciones

La gráfica de la ecuación $y = 2x - 5$ (en x y y) puede usarse para resolver la ecuación $2x - 5 = 0$ (en x). Mediante las técnicas de la sección R.3, podemos mostrar de manera algebraica que $x = 5/2$ es una solución de $2x - 5 = 0$. Por lo tanto, la pareja ordenada $(5/2, 0)$ es una solución de $y = 2x - 5$. La figura R.32 sugiere que la intersección x de la gráfica de la recta $y = 2x - 5$ es el punto $(5/2, 0)$ como debería ser.

Una forma de resolver una ecuación algebraicamente es determinar todas las intersecciones con el eje x; existen muchas técnicas gráficas para determinarlas.



[−4.7, 4.7] por [−10, 5]

FIGURA R.32 Usando la característica Trace de un graficador vemos que (2.5, 0) es una intersección x de la gráfica de $y = 2x - 5$ y, por lo tanto, $x = 2.5$ es una solución de la ecuación $2x - 5 = 0$.

EJEMPLO 1 Resolución mediante la determinación de las intersecciones x

Resuelva la ecuación $2x^2 - 3x - 2 = 0$ de manera gráfica.

SOLUCIÓN

Resolver gráficamente Determine las intersecciones x de la gráfica de $y = 2x^2 - 3x - 2$ (figura R.33). Utilizamos Trace para ver que $(-0.5, 0)$ y $(2, 0)$ son las intersecciones x de esta gráfica. Así, las soluciones de esta ecuación son $x = -0.5$ y $x = 2$. Las respuestas obtenidas de manera gráfica en realidad son aproximaciones, aunque en general son muy buenas aproximaciones.

Resolver algebraicamente En este caso podemos utilizar la factorización para determinar los valores exactos.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 2) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$

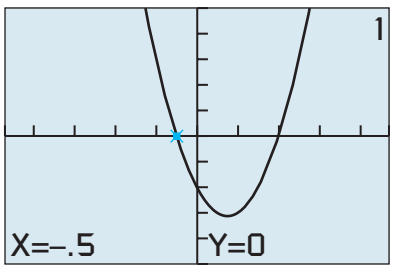
Podemos concluir que

$$2x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0,$$

$$x = -1/2 \quad \text{o} \quad x = 2.$$

De modo que, $x = -1/2$ y $x = 2$ son las soluciones exactas de la ecuación original.

Ahora resuelva el ejercicio 1.



[−4.7, 4.7] por [−5, 5]

FIGURA R.33 Parece que $(-0.5, 0)$ y $(2, 0)$ son intersecciones x de la gráfica de $y = 2x^2 - 3x - 2$ (ejemplo 1).

El procedimiento de solución algebraica utilizado en el ejemplo 1 es un caso especial de la importante propiedad siguiente.

Propiedad del factor cero

Sean a y b números reales.

$$\text{Si } ab = 0, \text{ entonces } a = 0 \text{ o } b = 0.$$

Resolución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales ($ax + b = 0$) y las *ecuaciones cuadráticas* son dos miembros de la familia de *ecuaciones polinomiales* que estudiaremos con mayor profundidad en el capítulo 2.

DEFINICIÓN Ecuación cuadrática en x

Una **ecuación cuadrática en x** es una que puede escribirse en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde a, b y c son números reales, cuando $a \neq 0$.

Revisamos algunas técnicas algebraicas básicas para resolver ecuaciones cuadráticas. Una técnica algebraica que ya hemos utilizado en el ejemplo 1 es *la factorización*.

Las ecuaciones cuadráticas de la forma $(ax + b)^2 = c$ se resuelven con bastante facilidad, como se ilustra en el ejemplo 2.

PRINCIPIO DE LA RAÍZ CUADRADA

Si $t^2 = K > 0$, entonces $t = \sqrt{K}$ o $t = -\sqrt{K}$.

EJEMPLO 2 Resolución extrayendo raíces cuadradas

Resuelva $(2x - 1)^2 = 9$ de forma algebraica.

SOLUCIÓN

$$(2x - 1)^2 = 9$$

$$2x - 1 = \pm 3 \qquad \text{Extraer raíces cuadradas.}$$

$$2x = 4 \quad \text{o} \quad 2x = -2$$

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Ahora resuelva el ejercicio 9.

La técnica del ejemplo 2 es más general de lo que podría pensarse, ya que toda ecuación cuadrática puede escribirse en la forma $(x + b)^2 = c$. El procedimiento que necesitamos para llevar a cabo esto es *completar el cuadrado*.

Completar el cuadrado

Para resolver $x^2 + bx = c$ mediante el proceso de **completar el cuadrado**, sume $(b/2)^2$ a ambos miembros de la ecuación y factorice el lado izquierdo de la nueva ecuación.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$$

Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado, simplemente dividimos ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de x^2 y luego completamos el cuadrado, como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Resolución completando el cuadrado

Resuelva $4x^2 - 20x + 17 = 0$ completando el cuadrado.

SOLUCIÓN

$$4x^2 - 20x + 17 = 0$$

$$x^2 - 5x + \frac{17}{4} = 0 \qquad \text{Dividir entre 4.}$$

$$x^2 - 5x = -\frac{17}{4} \qquad \text{Restar } \left(\frac{17}{4}\right).$$

Al completar el cuadrado de la ecuación anterior obtenemos

$$x^2 - 5x + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{17}{4} + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 \qquad \text{Sumar } \left(-\frac{5}{2}\right)^2.$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 2 \qquad \text{Factorizar y simplificar.}$$

$$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{2} \qquad \text{Extraer raíces cuadradas.}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{2}$$

$x = \frac{5}{2} + \sqrt{2} \approx 3.91$ o $x = \frac{5}{2} - \sqrt{2} \approx 1.09$ ***Ahora resuelva el ejercicio 13.***

El procedimiento del ejemplo 3 puede aplicarse a la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ para producir la fórmula siguiente para sus soluciones (consulte el ejercicio 68).

Fórmula cuadrática

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, están dadas mediante la **fórmula cuadrática**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

EJEMPLO 4 Resolución mediante la fórmula cuadrática

Resuelva la ecuación $3x^2 - 6x = 5$.

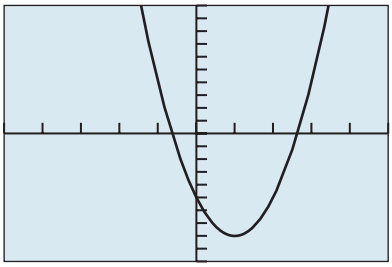
SOLUCIÓN Primero restamos 5 de ambos miembros de la ecuación para ponerla en la forma $ax^2 + bx + c = 0$: $3x^2 - 6x - 5 = 0$. Podemos ver que $a = 3$, $b = -6$ y $c = -5$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Fórmula cuadrática.}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)} \qquad a = 3,\ b = -6,\ c = -5$$

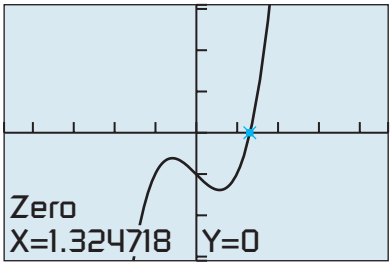
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{96}}{6} \qquad \text{Simplificar.}$$

continúa



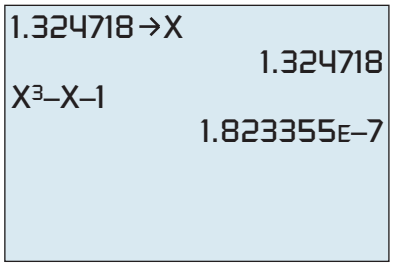
[−5, 5] por [−10, 10]

FIGURA R.34 La gráfica de $y = 3x^2 - 6x - 5$ (ejemplo 4).



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

a)



b)

FIGURA R.35 La gráfica de $y = x^3 - x - 1$, a) muestra que (1.324718, 0) es una aproximación a la intersección x de la gráfica. b) Respalda esta conclusión (ejemplo 5).

$$x = \frac{6 + \sqrt{96}}{6} \approx 2.63 \quad \text{o} \quad x = \frac{6 - \sqrt{96}}{6} \approx -0.63$$

La gráfica de $y = 3x^2 - 6x - 5$, en la figura R.34, respalda que las intersecciones x son aproximadamente -0.63 y 2.63.

Ahora resuelva el ejercicio 19.

Resolución de forma algebraica de ecuaciones cuadráticas

Existen cuatro métodos básicos para resolver de forma algebraica las ecuaciones.

1. **Factorización** (consulte el ejemplo 1).
2. **Extracción de raíces cuadradas** (consulte el ejemplo 2).
3. **Completar el cuadrado** (consulte el ejemplo 3).
4. **Uso de la fórmula cuadrática** (consulte el ejemplo 4).

Aproximación en forma gráfica de soluciones de ecuaciones

Una solución de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ es un valor de x que hace que el valor de $y = x^3 - x - 1$ sea igual a cero. El ejemplo 5 ilustra un procedimiento integrado en calculadoras graficadoras para determinar tales valores de x.

EJEMPLO 5 Resolución de forma gráfica

Resuelva la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ de manera gráfica.

SOLUCIÓN La figura R.35a sugiere que $x = 1.324718$ es la solución que buscamos. La figura R35b proporciona evidencia de que $x = 1.324718$ es una aproximación cercana a la solución ya que, cuando $x = 1.324718$, $x^3 - x - 1 \approx 1.82 \times 10^{-7}$, que es cercano a cero.

Ahora resuelva el ejercicio 31.

Al resolver ecuaciones de manera gráfica, por lo general, obtenemos soluciones aproximadas y no soluciones exactas. En este texto, utilizaremos la convención siguiente acerca de la precisión.

Convención acerca de soluciones aproximadas

Para aplicaciones, se redondea a un valor que sea razonable en el contexto del problema. Para todos los demás casos se redondea a dos lugares decimales, a menos que se especifique algo distinto.

Partiendo de esta convención, en el ejemplo 5 reportaríamos la solución encontrada como 1.32.

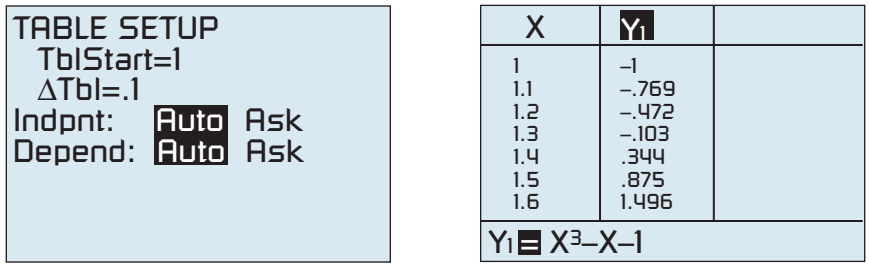
Aproximación de soluciones de ecuaciones, de forma numérica, mediante tablas

La característica de tablas en las calculadoras graficadoras proporciona un *procedimiento de acercamiento* numérico que podemos utilizar para determinar soluciones aproximadas de ecuaciones. Ilustramos este procedimiento en el ejemplo 6 mediante la misma ecuación del ejemplo 5.

EJEMPLO 6 Resolución mediante tablas

Resolver la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ mediante las tablas de un graficador.

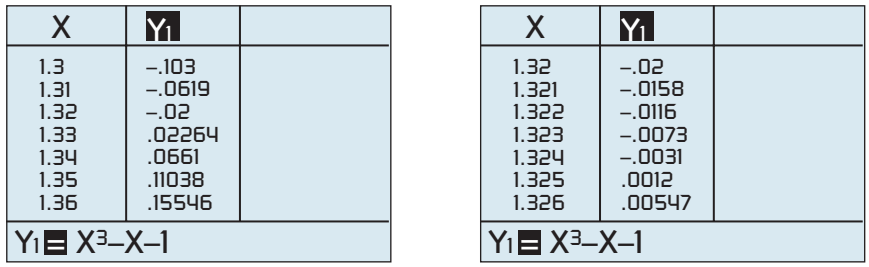
SOLUCIÓN Con base en la figura R.35a sabemos que la solución que buscamos se encuentra entre $x = 1$ y $x = 2$. La figura R.36a establece el punto inicial de la tabla (TblStart = 1) en $x = 1$ e incrementos de 0.1 en los números en la tabla ($\triangle$Tbl = 0.1). La figura R.36b muestra que el cero de $x^3 - x - 1 = 0$ está entre $x = 1.3$ y $x = 1.4$.



a) b)

FIGURA R.36 a) Proporciona la configuración que produce la tabla en b)(ejemplo 6).

Los dos siguientes pasos de este proceso se muestran en la figura R.37.



a) b)

FIGURA R.37 En a) TblStart = 1.3 y $\triangle$Tbl = 0.01 y en b) TblStart = 1.32 y $\triangle$Tbl = 0.001 (ejemplo 6).

En la figura R.37a podemos leer que el cero está entre $x = 1.32$ y $x = 1.33$; en la figura R.37b podemos leer que el cero está entre $x = 1.324$ y $x = 1.325$. Puesto que todos estos números se redondean a 1.32, podemos reportar el cero como 1.32 con la precisión acordada.

Ahora resuelva el ejercicio 37.

EXPLORACIÓN 1 **Determinación de ceros reales de ecuaciones**

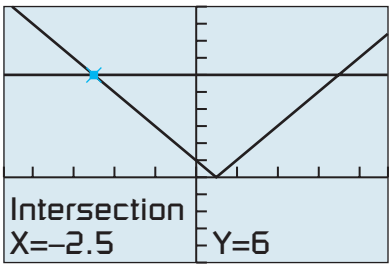
Considere la ecuación $4x^2 - 12x + 7 = 0$.

1. Utilice una gráfica para mostrar que esta ecuación tiene dos soluciones reales, una entre 0 y 1, y la otra entre 2 y 3.
2. Utilice el procedimiento de acercamiento numérico, ilustrado en el ejemplo 6, para determinar cada cero con una precisión de dos decimales.
3. Utilice el buscador de ceros integrado en su calculadora (consulte el ejemplo 5) para determinar las dos soluciones. Luego redondéela a dos decimales.
4. Si está familiarizado con el proceso de acercamiento gráfico, utilícelo para determinar cada solución a dos decimales.
5. Compare los números obtenidos en las partes 2, 3 y 4.
6. Respalde los resultados obtenidos en las partes 2, 3 y 4 de manera numérica.
7. Utilice el procedimiento de acercamiento numérico, ilustrado en el ejemplo 6, para determinar cada cero con una precisión de seis decimales. Compare con la respuesta encontrada en la parte 3 con el buscador de ceros.

Resolución de ecuaciones mediante la determinación de intersecciones

En ocasiones podemos rescribir una ecuación y resolverla de forma gráfica, determinando los *puntos de intersección* de dos gráficas. Un punto (a, b) es un **punto de intersección** de dos gráficas si pertenece a ambas gráficas.

Ilustramos este procedimiento con la ecuación con valor absoluto del ejemplo 7.



[−4.7, 4.7] por [−5, 10]

FIGURA R.38 Las gráficas de $y = |2x - 1|$ y $y = 6$ se intersecan en $(-2.5, 6)$ y $(3.5, 6)$ (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Resolución mediante la determinación de intersecciones

Resuelva la ecuación $|2x - 1| = 6$.

SOLUCIÓN La figura R.38 sugiere que la gráfica en forma de V de $y = |2x - 1|$ interseca a la gráfica de la recta horizontal $y = 6$ dos veces. Podemos utilizar Trace o la característica de intersección de nuestro graficador para ver que los dos puntos de intersección tienen coordenadas $(-2.5, 6)$ y $(3.5, 6)$. Esto significa que la ecuación original tiene las dos soluciones: -2.5 y 3.5.

Podemos utilizar álgebra para determinar las soluciones exactas. Los únicos dos números reales con valor absoluto 6 son el 6 mismo y -6. Así que, si $|2x - 1| = 6$, entonces

$$2x - 1 = 6 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = -6$$

$$x = \frac{7}{2} = 3.5 \quad \text{o} \quad x = -\frac{5}{2} = -2.5$$

Ahora resuelva el ejercicio 39.

REPASO RÁPIDO R.5

En los ejercicios del 1 al 4 desarrolle cada producto.

1. $(3x - 4)^2$ **2.** $(2x + 3)^2$

3. $(2x + 1)(3x - 5)$ **4.** $(3y - 1)(5y + 4)$

En los ejercicios del 5 al 8 factorice completamente.

5. $25x^2 - 20x + 4$ **6.** $15x^3 - 22x^2 + 8x$

7. $3x^3 + x^2 - 15x - 5$ **8.** $y^4 - 13y^2 + 36$

En los ejercicios 9 y 10 combine las fracciones y reduzca la fracción resultante a sus mínimos términos.

9. $\dfrac{x}{2x + 1} - \dfrac{2}{x + 3}$

10. $\dfrac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{3x + 11}{x^2 - x - 6}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN R.5

En los ejercicios del 1 al 6 resuelva la ecuación de forma gráfica, determinando sus intersecciones x. Confirme utilizando factorización para resolver la ecuación.

1. $x^2 - x - 20 = 0$ **2.** $2x^2 + 5x - 3 = 0$

3. $4x^2 - 8x + 3 = 0$ **4.** $x^2 - 8x = -15$

5. $x(3x - 7) = 6$ **6.** $x(3x + 11) = 20$

En los ejercicios del 7 al 12 resuelva la ecuación extrayendo raíces cuadradas.

7. $4x^2 = 25$ **8.** $2(x - 5)^2 = 17$

9. $3(x + 4)^2 = 8$ **10.** $4(u + 1)^2 = 18$

11. $2y^2 - 8 = 6 - 2y^2$ **12.** $(2x + 3)^2 = 169$

En los ejercicios del 13 al 18 resuelva la ecuación completando el cuadrado.

13. $x^2 + 6x = 7$ **14.** $x^2 + 5x - 9 = 0$

15. $x^2 - 7x + \dfrac{5}{4} = 0$ **16.** $4 - 6x = x^2$

17. $2x^2 - 7x + 9 = (x - 3)(x + 1) + 3x$

18. $3x^2 - 6x - 7 = x^2 + 3x - x(x + 1) + 3$

En los ejercicios del 19 al 24 resuelva la ecuación utilizando la fórmula cuadrática.

19. $x^2 + 8x - 2 = 0$ **20.** $2x^2 - 3x + 1 = 0$

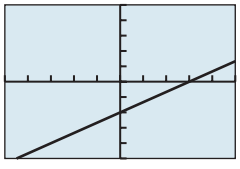
21. $3x + 4 = x^2$ **22.** $x^2 - 5 = \sqrt{3}x$

23. $x(x + 5) = 12$

24. $x^2 - 2x + 6 = 2x^2 - 6x - 26$

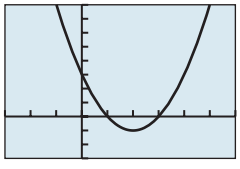
En los ejercicios del 25 al 28 estime las intersecciones x y y, si las hay, que se muestran en la gráfica.

25.



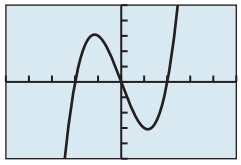
[−5, 5] por [−5, 5]

26.



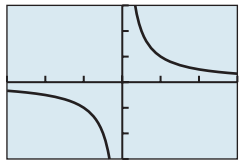
[−3, 6] por [−3, 8]

27.



[−5, 5] por [−5, 5]

28.



[−3, 3] por [−3, 3]

En los ejercicios del 29 al 34 resuelva la ecuación de forma gráfica, determinando las intersecciones x.

29. $x^2 + x - 1 = 0$ **30.** $4x^2 + 20x + 23 = 0$

31. $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ **32.** $x^3 - 4x + 2 = 0$

33. $x^2 + 4 = 4x$ **34.** $x^2 + 2x = -2$

En los ejercicios 35 y 36 la tabla le permite estimar un cero de una expresión. Establezca la expresión y proporcione el cero de manera tan precisa como pueda leerse de la tabla.

35.

X	Y1
.4	−.04
.41	−.0119
.42	.0164
.43	.0449
.44	.0736
.45	.1025
.46	.1316

Y1 = X²+2X−1

36.

X	Y1
−1.735	−.0177
−1.734	−.0117
−1.733	−.0057
−1.732	3E−4
−1.731	.0063
−1.73	.01228
−1.729	.01826

Y1 = X³−3X

En los ejercicios 37 y 38 utilice tablas para determinar el número indicado de soluciones de la ecuación con precisión de dos decimales.

37. Dos soluciones de $x^2 - x - 1 = 0$

38. Una solución de $-x^3 + x + 1 = 0$

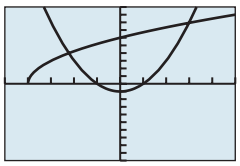
En los ejercicios del 39 al 44 resuelva la ecuación de manera gráfica determinando las intersecciones. Confirme algebraicamente su respuesta.

39. $|t - 8| = 2$ **40.** $|x + 1| = 4$

41. $|2x + 5| = 7$ **42.** $|3 - 5x| = 4$

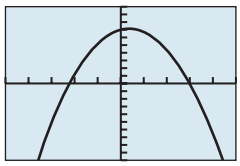
43. $|2x - 3| = x^2$ **44.** $|x + 1| = 2x - 3$

45. Interpretación de gráficas Las gráficas de las dos ventanas de visualización que se muestran pueden emplearse para resolver la ecuación $3\sqrt{x+4} = x^2 - 1$ de manera gráfica.



[−5, 5] por [−10, 10]

a)



[−5, 5] por [−10, 10]

b)

a) La ventana de visualización en a) ilustra el método de intersección para resolver la ecuación. Identifique las dos ecuaciones que se grafican.

b) La ventana de visualización en b) ilustra el método de intersección x para resolver la ecuación. Identifique la ecuación que se grafica.

c) Escriba para aprender ¿Cómo se relacionan los puntos de intersección en a) con las intersecciones x en b)?

46. Escriba para aprender Revisión del ejemplo 6 Explique por qué todos los números reales que satisfacen $1.324 < x < 1.325$ se redondean a 1.32.

En los ejercicios del 47 al 56 utilice un método de su elección para resolver la ecuación.

47. $x^2 + x - 2 = 0$

48. $x^2 - 3x = 12 - 3(x - 2)$

49. $|2x - 1| = 5$

50. $x + 2 - 2\sqrt{x+3} = 0$

51. $x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$

52. $x^3 - 4x + 2 = 0$

53. $|x^2 + 4x - 1| = 7$

54. $|x + 5| = |x - 3|$

55. $|0.5x + 3| = x^2 - 4$

56. $\sqrt{x+7} = -x^2 + 5$

57. Actividad en grupo Discriminante de una cuadrática El radicando $b^2 - 4ac$ en la fórmula cuadrática se denomina **discriminante** del polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$, ya que puede usarse para describir la naturaleza de sus ceros.

a) Escriba para aprender Si $b^2 - 4ac > 0$, ¿qué podemos decir acerca de los ceros del polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$? Explique su respuesta.

b) Escriba para aprender Si $b^2 - 4ac = 0$, ¿qué podemos decir acerca de los ceros del polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$? Explique su respuesta.

c) Escriba para aprender Si $b^2 - 4ac < 0$, ¿qué podemos decir acerca de los ceros del polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$? Explique su respuesta.

58. Actividad en grupo Discriminante de una cuadrática Utilice la información que aprendió en el ejercicio 57 para crear un polinomio cuadrático con los siguientes números de ceros reales. Respalde sus respuestas de manera gráfica.

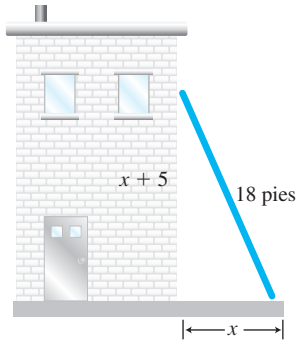
a) Dos ceros reales

b) Exactamente un cero real

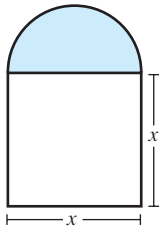
c) Ningún cero real

59. Tamaño de un campo de fútbol Varios encuentros de fútbol de la Copa Mundial de 1994 se jugaron en el estadio de la Universidad de Stanford en Menlo Park, California. El campo es 30 yardas más largo que su ancho y el área del campo es de 8800 yardas^2. ¿Cuáles son las dimensiones de este campo de fútbol?

60. Altura de una escalera El equipo de pintura de John sabe por experiencia que su escalera de 18 pies es particularmente estable cuando la distancia del piso a la parte superior es 5 pies más que la distancia del edificio a la base de la escalera, como se muestra en la figura. En esta posición, ¿A qué altura del edifico llega la escalera?



61. Determinación de las dimensiones de una ventana normanda Una ventana normanda tiene la forma de un cuadrado con un semicírculo encima de él. Determine el ancho de la ventana, si el área total del cuadrado y del semicírculo es de 200 pies^2.



Preguntas de examen estandarizado

62. Verdadero o falso Si 2 es una intersección x de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, entonces 2 es una solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Justifique su respuesta.

63. Verdadero o falso Si $2x^2 = 18$, entonces x debe ser igual a 3. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 64 al 67 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver estos problemas.

64. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes son soluciones de la ecuación $x(x - 3) = 0$?

A) Sólo $x = 3$

B) Sólo $x = -3$

C) $x = 0$ y $x = -3$

D) $x = 0$ y $x = 3$

E) No tiene soluciones

65. **Opción múltiple** ¿Cuál de las siguientes sustituciones de *?* hacen que $x^2 - 5x + ?$ sea un cuadrado perfecto?

A) $-\frac{5}{2}$ **B)** $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$

C) $(-5)^2$ **D)** $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$

E) -6

66. **Opción múltiple** ¿Cuáles de las siguientes son las soluciones de la ecuación $2x^2 - 3x - 1 = 0$?

A) $\frac{3}{4} \pm \sqrt{17}$ **B)** $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

C) $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ **D)** $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

E) $\frac{3 \pm 1}{4}$

67. **Opción múltiple** ¿Cuáles de las siguientes son soluciones de la ecuación $|x - 1| = -3$?

A) Sólo $x = 4$ **B)** Sólo $x = -2$

C) Sólo $x = 2$ **D)** $x = 4$ y $x = -2$

E) No hay soluciones

Exploraciones

68. **Deducción de la fórmula cuadrática** Siga estos pasos para utilizar el método de completar el cuadrado para resolver $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

a) Reste c de ambos miembros de la ecuación original y divida ambos miembros, de la ecuación resultante, entre a para obtener

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

b) Sume el cuadrado de la mitad del coeficiente de x a a) a ambos lados y simplifique para obtener

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

c) Extraiga las raíces cuadradas en b) y despeje x para obtener la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ampliación de las ideas

69. **Determinación del número de soluciones** Considere la ecuación $|x^2 - 4| = c$.

a) Determine un valor de c para el que esta ecuación tenga cuatro soluciones (existen muchos valores).

b) Determine un valor de c para el que esta ecuación tenga tres soluciones (existe sólo un valor).

c) Determine un valor de c para el que esta ecuación tenga dos soluciones (existen muchos valores).

d) Determine un valor de c para el que esta ecuación no tenga soluciones (existen muchos valores).

e) **Escriba para aprender** ¿Existen otros posibles números de soluciones de esta ecuación? Explique.

70. **Sumas y productos de las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$** Suponga que $b^2 - 4ac > 0$.

a) Muestre que la suma de las dos soluciones de esta ecuación es $-(b/a)$.

b) Muestre que el producto de las dos soluciones de esta ecuación es c/a.

71. **Continuación del ejercicio 70** La ecuación $2x^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones x_1 y x_2. Si $x_1 + x_2 = 5$, y $x_1 \cdot x_2 = 3$, determine las dos soluciones.

R.6 Números complejos

Aprenderá acerca de...

- Los números complejos
- Las operaciones con números complejos
- Los conjugados y división complejos
- Las soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

. . . porque

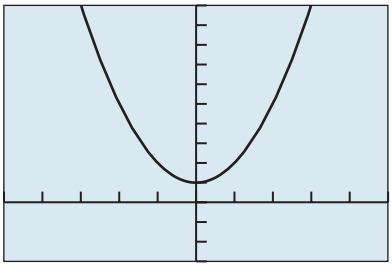
Los ceros de polinomios son números complejos.

Números complejos

La figura R.39 muestra que la función $f(x) = x^2 + 1$ no tiene ceros reales, por lo que $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones que sean números reales. Para remediar esta situación, algunos matemáticos del siglo XVII ampliaron la definición de $\sqrt{a}$ para incluir números reales negativos a. Primero el número $i = \sqrt{-1}$ se define como una solución de la ecuación $i^2 + 1 = 0$ y es la **unidad imaginaria**. Entonces para cualquier número real negativo $\sqrt{a} = \sqrt{|a|} \cdot i$.

El sistema extendido de números se denomina *números complejos*, y consiste en todos los números reales y sumas de números reales y múltiplos de i. Todos los siguientes son ejemplos de números complejos:

$$-6, \quad 5i, \quad \sqrt{5}, \quad -7i, \quad \frac{5}{2}i + \frac{2}{3}, \quad -2 + 3i, \quad 5 - 3i, \quad \frac{1}{3} + \frac{4}{5}i.$$



[–5, 5] por [–3, 10]

FIGURA R.39 La gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ no tiene intersecciones x.

NOTA HISTÓRICA

René Descartes (1596–1650) acuñó el término *imaginario* en una época en que las soluciones negativas de ecuaciones eran consideradas *falsas*. Carl Friedrich Gauss (1777–1855) nos dio el término de número complejo y el símbolo i para $\sqrt{-1}$. En la actualidad abundan las aplicaciones prácticas de los números complejos.

DEFINICIÓN Números complejos

Un **número complejo** es cualquier número que puede escribirse en la forma

$$a + bi,$$

donde a y b son números reales. El número real a es la **parte real**, el número real b es la **parte imaginaria** y $a + bi$ es la **forma estándar**.

Un número real a es el número complejo $a + 0i$, por lo que *todos los números reales también son números complejos*. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $a + bi$ se transforma en bi, y es un **número imaginario**. Por ejemplo, $5i$ y $-7i$ son números imaginarios.

Dos números complejos son **iguales** si, y sólo si, sus partes reales e imaginarias son iguales. Por ejemplo

$$x + yi = 2 + 5i \quad \text{si, y sólo si} \quad x = 2 \text{ y } y = 5.$$

Operaciones con números complejos

La suma de números complejos se lleva a cabo sumando sus partes real e imaginaria por separado. La resta de números complejos también se realiza usando las mismas partes.

DEFINICIÓN Suma y resta de números complejos

Si $a + bi$ y $c + di$ son dos números complejos, entonces

Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$

Resta: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$

EJEMPLO 1 Suma y resta de números complejos

a) $(7 - 3i) + (4 + 5i) = (7 + 4) + (-3 + 5)i = 11 + 2i$

b) $(2 - i) - (8 + 3i) = (2 - 8) + (-1 - 3)i = -6 - 4i$

Ahora resuelva el ejercicio 3.

La **identidad aditiva** para los números complejos es $0 = 0 + 0i$. El **inverso aditivo** de $a + bi$ es $-(a + bi) = -a - bi$, ya que

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i = 0.$$

Muchas de las propiedades de los números reales también se cumplen para los números complejos. Éstas incluyen:

- Propiedades conmutativas de la suma y de la multiplicación.
- Propiedades asociativas de la suma y de la multiplicación.
- Propiedades distributivas de la multiplicación sobre la suma y la resta.

Usando estas propiedades y el hecho de que $i^2 = -1$, los números complejos pueden multiplicarse tratándose como expresiones algebraicas.

EJEMPLO 2 Multiplicación de números complejos

$$\begin{aligned}(2 + 3i) \cdot (5 - i) &= 2(5 - i) + 3i(5 - i)\\ &= 10 - 2i + 15i - 3i^2\\ &= 10 + 13i - 3(-1)\\ &= 13 + 13i\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 9.

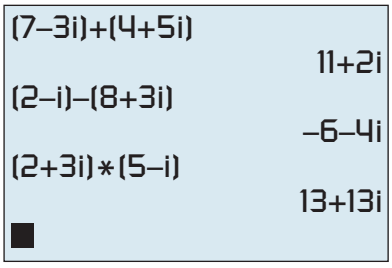


FIGURA R.40 Operaciones con números complejos en una graficadora (ejemplos 1 y 2).

Podemos generalizar el ejemplo 2 como sigue:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Muchas graficadoras pueden realizar cálculos básicos con números complejos. La figura R.40 muestra cómo se ven las operaciones de los ejemplos 1 y 2 en algunas graficadoras.

Calculamos potencias enteras positivas de números complejos tratándolas como expresiones algebraicas.

EJEMPLO 3 Elevación de un número complejo a una potencia

Si $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, determine z^2 y z^3.

continúa

SOLUCIÓN

$$z^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4}i^2$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4}(-1)$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4}i^2$$
$$= -\frac{1}{4} + 0i + \frac{3}{4}(-1)$$
$$= -1$$

La figura R.41 respalda numéricamente estos resultados.

Ahora resuelva el ejercicio 27.

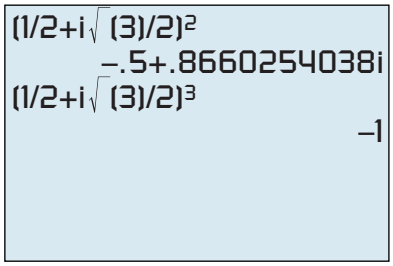


FIGURA R.41 El cuadrado y el cubo de un número complejo (ejemplo 3).

El ejemplo 3 demuestra que $1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ es una raíz cúbica de -1 y una solución de $x^3 + 1 = 0$. La sección 2.5 explora a profundidad los ceros complejos de funciones polinomiales.

Conjugados y división complejos

El producto de los números complejos $a + bi$ y $a - bi$ es un número real positivo:

$$(a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

Introducimos la definición siguiente para describir esta relación especial.

DEFINICIÓN Conjugado complejo

El **conjugado complejo** del número complejo $z = a + bi$ es

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

La **identidad multiplicativa** para los números complejos es $1 = 1 + 0i$. El **inverso multiplicativo** o **recíproco**, de $z = a + bi$ es

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

En general, un cociente de dos números complejos, escritos en forma de fracción, pueden simplificarse, como acabamos de simplificar $1/z$: multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por el conjugado complejo del denominador.

EJEMPLO 4 División de números complejos

Escriba los números complejos en la forma estándar.

a) $\dfrac{2}{3-i}$ **b)** $\dfrac{5+i}{2-3i}$

SOLUCIÓN Multiplique el numerador y el denominador por el conjugado complejo del denominador.

a) $\dfrac{2}{3-i} = \dfrac{2}{3-i} \cdot \dfrac{3+i}{3+i}$

$= \dfrac{6+2i}{3^2+1^2}$

$= \dfrac{6}{10} + \dfrac{2}{10}i$

$= \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i$

b) $\dfrac{5+i}{2-3i} = \dfrac{5+i}{2-3i} \cdot \dfrac{2+3i}{2+3i}$

$= \dfrac{10+15i+2i+3i^2}{2^2+3^2}$

$= \dfrac{7+17i}{13}$

$= \dfrac{7}{13} + \dfrac{17}{13}i$

Ahora resuelva el ejercicio 33.

Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

Recuerde que las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, están dadas mediante la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El radicando $b^2 - 4ac$ es el **discriminante** y nos indica si las soluciones son números reales. En particular, si $b^2 - 4ac < 0$, las soluciones incluyen la raíz cuadrada de un número negativo y así conducen a números complejos como soluciones. En total, existen tres casos, que resumimos a continuación:

Discriminante de una ecuación cuadrática

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$,

- Si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos soluciones reales distintas.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, existe una solución real repetida.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, existe un par de soluciones complejas conjugadas.

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación cuadrática

Resuelva $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN

Resolver algebraicamente

Al utilizar la fórmula cuadrática con $a = b = c = 1$, obtenemos

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Así que las soluciones son $-1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ y $-1/2 - (\sqrt{3}/2)i$, un par de números complejos conjugados.

Confirmar numéricamente

Al sustituir $-1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ en la ecuación original, obtenemos

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 0$$

Mediante un cálculo similar podemos confirmar la segunda solución.

Ahora resuelva el ejercicio 41.

REPASO RÁPIDO R.6

En los ejercicios del 1 al 4 sume o reste, y simplifique.

1. $(2x + 3) + (-x + 6)$ **2.** $(3y - x) + (2x - y)$

3. $(2a + 4d) - (a + 2d)$ **4.** $(6z - 1) - (z + 3)$

En los ejercicios del 5 al 10 multiplique y simplifique.

5. $(x - 3)(x + 2)$

6. $(2x - 1)(x + 3)$

7. $(x - \sqrt{2})\,(x + \sqrt{2})$

8. $(x + 2\sqrt{3})\,(x - 2\sqrt{3})$

9. $[x - (1 + \sqrt{2})]\,[x - (1 - \sqrt{2})]$

10. $[x - (2 + \sqrt{3})]\,[x - (2 - \sqrt{3})]$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN R.6

En los ejercicios del 1 al 8 escriba la suma o la diferencia en la forma estándar $a + bi$.

1. $(2 - 3i) + (6 + 5i)$ **2.** $(2 - 3i) + (3 - 4i)$

3. $(7 - 3i) + (6 - i)$ **4.** $(2 + i) - (9i - 3)$

5. $(2 - i) + (3 - \sqrt{-3})$

6. $(\sqrt{5} - 3i) + (-2 + \sqrt{-9})$

7. $(i^2 + 3) - (7 + i^3)$

8. $(\sqrt{7} + i^2) - (6 - \sqrt{-81})$

En los ejercicios del 9 al 16 escriba el producto en la forma estándar.

9. $(2 + 3i)(2 - i)$ **10.** $(2 - i)(1 + 3i)$

11. $(1 - 4i)(3 - 2i)$ **12.** $(5i - 3)(2i + 1)$

13. $(7i - 3)(2 + 6i)$ **14.** $(\sqrt{-4} + i)(6 - 5i)$

15. $(-3 - 4i)(1 + 2i)$ **16.** $(\sqrt{-2} + 2i)(6 + 5i)$

En los ejercicios del 17 al 20 escriba la expresión en la forma bi, donde b s un número real.

17. $\sqrt{-16}$ **18.** $\sqrt{-25}$

19. $\sqrt{-3}$ **20.** $\sqrt{-5}$

En los ejercicios del 21 al 24 determine los números reales x y y que hacen verdadera a la ecuación.

21. $2 + 3i = x + yi$ **22.** $3 + yi = x - 7i$

23. $(5 - 2i) - 7 = x - (3 + yi)$

24. $(x + 6i) = (3 - i) + (4 - 2yi)$

En los ejercicios del 25 al 28 escriba el número complejo en la forma estándar.

25. $(3 + 2i)^2$ **26.** $(1 - i)^3$

27. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$ **28.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$

En los ejercicios del 29 al 32 determine el producto del número complejo y su conjugado.

29. $2 - 3i$ **30.** $5 - 6i$

31. $-3 + 4i$ **32.** $-1 - \sqrt{2}\,i$

En los ejercicios del 33 al 40 escriba la expresión en forma estándar.

33. $\frac{1}{2 + i}$ **34.** $\frac{i}{2 - i}$

35. $\frac{2 + i}{2 - i}$ **36.** $\frac{2 + i}{3i}$

37. $\frac{(2 + i)^2(-i)}{1 + i}$ **38.** $\frac{(2 - i)(1 + 2i)}{5 + 2i}$

39. $\frac{(1 - i)(2 - i)}{1 - 2i}$ **40.** $\frac{(1 - \sqrt{2}i)(1 + i)}{(1 + \sqrt{2}i)}$

En los ejercicios del 41 al 44 resuelva la ecuación.

41. $x^2 + 2x + 5 = 0$ **42.** $3x^2 + x + 2 = 0$

43. $4x^2 - 6x + 5 = x + 1$ **44.** $x^2 + x + 11 = 5x - 8$

Preguntas de examen estandarizado

45. Verdadero o falso No existen números complejos z que satisfagan $z = -\bar{z}$. Justifique su respuesta.

46. Verdadero o falso Para el número complejo i, $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 47 al 50 resuelva el problema sin utilizar calculadora.

47. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la forma estándar para el producto $(2 + 3i)(2 - 3i)$

A) $-5 + 12i$ **B)** $4 - 9i$ **C)** $13 - 3i$ **D)** -5 **E)** 13

48. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la forma estándar para el cociente $\frac{1}{i}$?

A) 1 **B)** -1 **C)** i **D)** $-i$ **E)** $-1 + i$

49. Opción múltiple Suponga que $2 - 3i$ es una solución de $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b, c son números reales. ¿Cuál de las siguientes también es una solución de la ecuación?

A) $2 + 3i$ **B)** $-2 - 3i$ **C)** $-2 + 3i$

D) $3 + 2i$ **E)** $\frac{1}{2 - 3i}$

50. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la forma estándar de la potencia $(1 - i)^3$?

A) $-4i$ **B)** $-2 + 2i$ **C)** $-2 - 2i$ **D)** $2 + 2i$ **E)** $2 - 2i$

Exploraciones

51. Actividad en grupo Las potencias de *i*

a) Simplifique los números complejos i, i^2,..., i^8 mediante la evaluación de cada uno.

b) Simplifique los números complejos i^{-1}, i^{-2},..., i^{-8} evaluando cada uno.

c) Evalúe i^0.

d) Escriba para aprender Analice sus resultados de a) a c) con los miembros de su grupo y escriba un resumen de enunciados acera de las potencias enteras de i.

52. Escriba para aprender Describa la naturaleza de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ cuando a, b y c son números reales y la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones complejas que no son números reales.

Ampliación de las ideas

53. Pruebe que la diferencia entre un número complejo y su conjugado es un número complejo cuya parte real es 0.

54. Pruebe que el producto de un número complejo y su conjugado complejo es un número complejo cuya parte imaginaria es cero.

55. Pruebe que el conjugado complejo de un producto de dos números complejos es el producto de sus conjugados complejos.

56. Pruebe que el conjugado complejo de una suma de dos números complejos es la suma de sus conjugados complejos.

57. Escriba para aprender Explique por qué $-i$ es una solución de $x^2 - ix + 2 = 0$, pero i no es solución.

R.7 Resolución de desigualdades en forma algebraica y gráfica

Aprenderá acerca de...

- La resolución de desigualdades con valor absoluto
- La resolución de desigualdades cuadráticas
- La aproximación a soluciones de desigualdades
- El movimiento de proyectiles

. . . porque

Estas técnicas están implicadas en el uso de una utilería de graficación para resolver desigualdades en este libro.

Resolución de desigualdades con valor absoluto

Los métodos para resolver desigualdades se asemejan a los métodos para resolver ecuaciones. A continuación se listan dos reglas básicas que aplicamos para resolver desigualdades que incluyan valor absoluto.

Resolución de desigualdades con valor absoluto

Sea u una expresión algebraica en x y sea a un número real ($a \geq 0$).

1. Si $|u| < a$, entonces u está en el intervalo $(-a, a)$. Esto es,

$$|u| < a \quad \text{si, y sólo si,} \quad -a < u < a.$$

2. Si $|u| > a$, entonces u está en el intervalo $(-\infty, -a)$ o (a, ∞), esto es,

$$|u| > a \quad \text{si, y sólo, si} \quad u < -a \text{ o } u > a.$$

Las desigualdades $<$ y $>$ pueden reemplazarse con $\leq$ y $\geq$, respectivamente. Consulte la figura R.42.

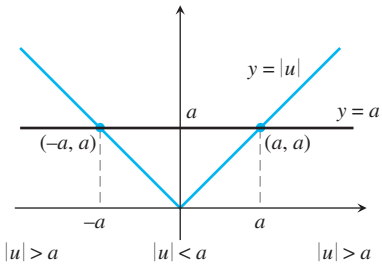


FIGURA R.42 La solución de $|u| < a$ se representa mediante la parte de la recta numérica en donde la gráfica de $y = |u|$ está debajo de la gráfica de $y = a$. La solución de $|u| > a$ está representada por la parte de la recta numérica en donde la gráfica de $y = |a|$ está por arriba de la gráfica de $y = a$.

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad con valor absoluto

Resuelva $|x - 4| < 8$.

SOLUCIÓN

$$|x - 4| < 8 \qquad \text{Desigualdad original.}$$

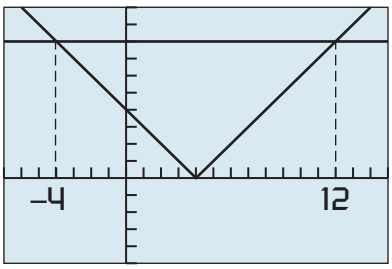
$$-8 < x - 4 < 8 \qquad \text{Desigualdad doble equivalente.}$$

$$-4 < x < 12 \qquad \text{Sumar 4.}$$

Como intervalo la solución es $(-4, 12)$.

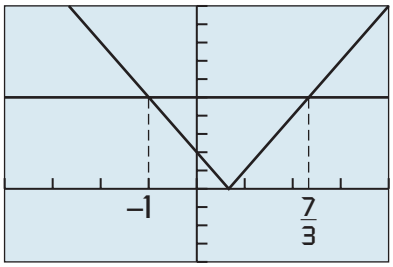
La figura R.43 muestra que los puntos en la gráfica de $y = |x - 4|$ están debajo de la gráfica de $y = 8$ para valores de x entre -4 y 12.

Ahora resuelva el ejercicio 3.



[−7, 15] por [−5, 10]

FIGURA R.43 Las gráficas de $y = |x - 4|$ y $y = 8$ (ejemplo 1).



[−4, 4] por [−4, 10]

FIGURA R.44 Las gráficas de $y = |3x - 2|$ y $y = 5$. (Ejemplo 2).

UNIÓN DE DOS CONJUNTOS

La **unión de dos conjuntos** A **y** B, expresada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los objetos que pertenecen a A o B, o a ambos.

EJEMPLO 2 Resolución de otra desigualdad con valor absoluto

Resuelva $|3x - 2| \geq 5$.

SOLUCIÓN La solución de esta desigualdad con valor absoluto consiste en las soluciones de estas dos desigualdades.

$$3x - 2 \leq -5 \quad \text{o} \quad 3x - 2 \geq 5$$

$$3x \leq -3 \quad \text{o} \quad 3x \geq 7 \qquad \text{Sumar 2.}$$

$$x \leq -1 \quad \text{o} \quad x \geq \frac{7}{3} \qquad \text{Dividir entre 3.}$$

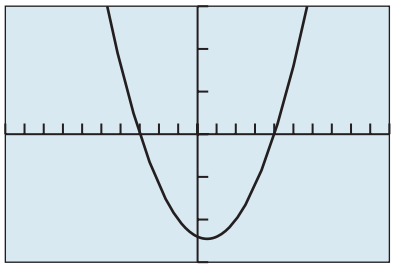
La solución consiste en todos los números que están en uno de los dos intervalos $(-\infty, -1]$ o $[7/3, \infty)$, que puede escribirse como $(\infty, -1] \cup [7/3, \infty)$. "$\cup$" se lee "unión".

La figura R.44 muestra que los puntos en la gráfica de $y = |3x - 2|$ están por arriba o en los puntos de la gráfica de $y = 5$ para valores de x a la izquierda, e incluyendo -1 y a la derecha de e incluyendo a 7/3.

Ahora resuelva el ejercicio 7.

Resolución de desigualdades cuadráticas

Para resolver una desigualdad cuadrática como $x^2 - x - 12 > 0$, iniciamos resolviendo la ecuación cuadrática correspondiente a $x^2 - x - 12 = 0$. Luego determinamos los valores de x para los cuáles la gráfica de $y = x^2 - x - 12$ está por arriba del eje x.



[−10, 10] por [−15, 15]

FIGURA R.45 La gráfica de $y = x^2 - x - 12$ parece cruzar el eje x en $x = -3$ y en $x = 4$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad cuadrática

Resuelva $x^2 - x - 12 > 0$.

SOLUCIÓN Primero resolvemos la ecuación correspondiente $x^2 - x - 12 = 0$.

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0 \qquad ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$$

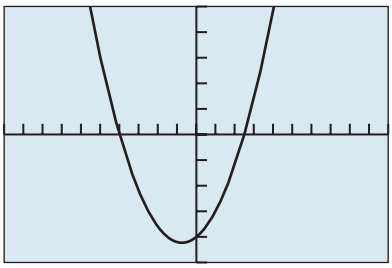
$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -3 \qquad \text{Resolver para } x.$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente son -3 y 4, y no son soluciones de la desigualdad original, ya que $0 > 0$ es falso. La figura R.45 muestra que los puntos en la gráfica de $y = x^2 - x - 12$ están por arriba del eje x para valores de x a la izquierda de -3 y a la derecha de 4.

La solución de la desigualdad original es $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$.

Ahora resuelva el ejercicio 11.

En el ejemplo 4, la desigualdad cuadrática incluye al símbolo $\leq$. En este caso, las soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente también son soluciones de la desigualdad.



[−10, 10] por [−25, 25]

FIGURA R.46 La gráfica de $y = 2x^2 + 3x - 20$ parece estar debajo del eje x para $-4 < x < 2.5$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Resolución de otra desigualdad cuadrática

Resuelva $2x^2 + 3x \le 20$.

SOLUCIÓN Primero restamos 20 de ambos lados de la desigualdad para obtener $2x^2 + 3x - 20 \le 0$. Ahora, resolvemos la ecuación cuadrática correspondiente $2x^2 + 3x - 20 = 0$.

$$2x^2 + 3x - 20 = 0$$

$$(x + 4)(2x - 5) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 5 = 0 \qquad ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$$

$$x = -4 \quad \text{o} \quad x = \frac{5}{2} \qquad \text{Resolver para } x.$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente son -4 y $5/2 = 2.5$. Podemos comprobar que también son soluciones de la desigualdad.

La figura R.46 muestra que los puntos en la gráfica de $y = 2x^2 + 3x - 20$ están debajo del eje x para valores de x entre -4 y 2.5. La solución de la desigualdad original es $[-4, 2.5]$. Utilizamos corchetes ya que los números -4 y 2.5 también son soluciones de la desigualdad.

Ahora resuelva el ejercicio 9.

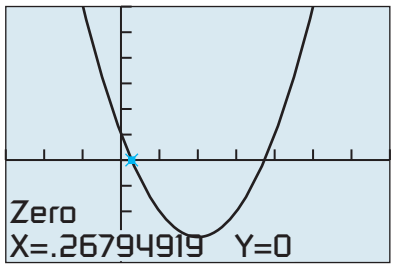
En los ejemplos 3 y 4, la ecuación cuadrática correspondiente fue factorizada. Si esto no sucede, necesitaremos aproximar los ceros de la ecuación cuadrática, si existen. Entonces utilizamos la convención de precisión de la sección R.5 y escribimos los extremos de cualquier intervalo con precisión de dos decimales, como se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Resolución gráfica de una desigualdad cuadrática

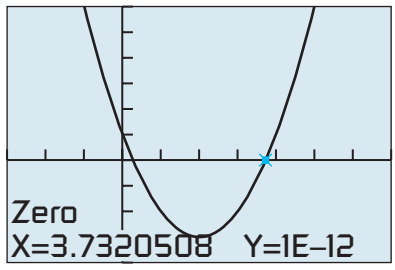
Resuelva $x^2 - 4x + 1 \ge 0$ de forma gráfica.

SOLUCIÓN Podemos utilizar la gráfica de $y = x^2 - 4x + 1$ en la figura R.47 para determinar que las soluciones de la ecuación $x^2 - 4x + 1 = 0$ son aproximadamente 0.27 y 3.73. Así, la solución de la desigualdad original es $(-\infty, 0.27] \cup [3.73, \infty)$. Utilizamos corchetes ya que los ceros de la ecuación cuadrática son soluciones de la desigualdad, aunque sólo tenemos aproximaciones a sus valores.

Ahora resuelva el ejercicio 21.

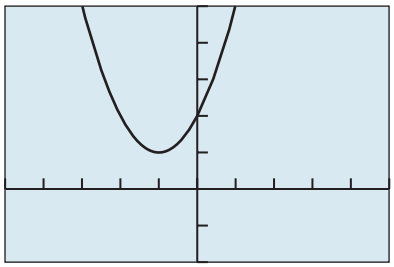


[−3, 7] por [−4, 6]



[−3, 7] por [−4, 6]

FIGURA R.47 Esta figura sugiere que $y = x^2 - 4x + 1$ es cero para $x \approx 0.27$ y $x \approx 3.73$ (ejemplo 5).



[−5, 5] por [−2, 5]

FIGURA R.48 Los valores de $y = x^2 + 2x + 2$ nunca son negativos (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Muestra que una desigualdad cuadrática no tiene solución

Resuelva $x^2 + 2x + 2 < 0$.

SOLUCIÓN La figura R.48 muestra que la gráfica de $y = x^2 + 2x + 2$ está por arriba del eje x para todos los valores de x. Así que, la desigualdad *no* tiene solución.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

La figura R.48 también muestra que las soluciones de la desigualdad $x^2 + 2x + 2 > 0$ es el conjunto de todos los números reales o, en notación de intervalo $(-\infty, \infty)$. Una desigualdad cuadrática también puede tener exactamente una solución (consulte el ejercicio 31).

Aproximación a soluciones de desigualdades

Para resolver la desigualdad del ejemplo 7, aproximamos los ceros de la gráfica correspondiente. Luego determinamos los valores de x para los cuales la gráfica correspondiente está por arriba o en el eje x.

EJEMPLO 7 Resolución de una desigualdad cúbica

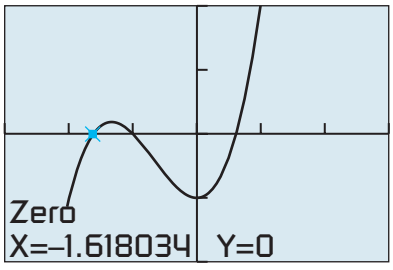
Resuelva, de forma gráfica, $x^3 + 2x^2 - 1 \geq 0$.

SOLUCIÓN

Podemos utilizar la gráfica de $y = x^3 + 2x^2 - 1$ en la figura R.49 para mostrar que la soluciones de la ecuación correspondiente, $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$, son aproximadamente $-1{,}62$, -1 y 0.62. Los puntos en la gráfica de $y = x^3 + 2x^2 - 1$ están por arriba del eje x para valores de x entre -1.62 y -1 y para valores de x a la derecha de 0.62.

La solución de la desigualdad es $[-1.62, -1] \cup [0.62, \infty)$. Utilizamos corchetes ya que los ceros de $y = x^3 + 2x^2 - 1$ son también son soluciones de la desigualdad.

Ahora resuelva el ejercicio 27.



[−3, 3] por [−2, 2]

FIGURA R.49 La gráfica de $y = x^3 + 2x^2 - 1$, parece que está por arriba del eje x entre las dos intersecciones x negativas y a la derecha de la intersección x positiva (ejemplo 7).

Movimiento de proyectiles

El movimiento de un objeto que es lanzado verticalmente, pero luego está sujeto sólo a la fuerza debida a la gravedad, es un ejemplo de **movimiento de proyectil**.

Movimiento de proyectil

Suponga que un objeto se lanza verticalmente desde un punto s_0 pies por arriba del suelo con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. La posición vertical s (en pies) del objeto t segundos después de que se lanza es

$$s = -16t^2 + v_0t + s_0.$$

EJEMPLO 8 Determinación de la altura de un proyectil

Un proyectil se lanza directamente hacia arriba, desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 288 pies/segundo.

a) ¿Cuándo la altura del proyectil, por encima del suelo, será de 1,152 pies?

b) ¿Cuándo la altura del proyectil, por encima del suelo, será de por lo menos 1,152 pies?

SOLUCIÓN

Aquí $s_0 = 0$ y $v_0 = 288$. Así que, la altura del proyectil es $s = -16t^2 + 288t$.

a) Necesitamos determinar cuándo $s = 1{,}152$.

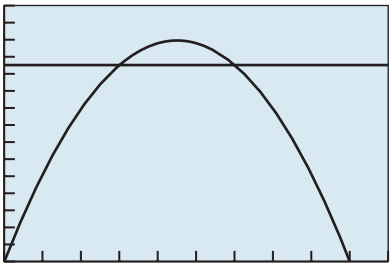
$$\begin{aligned} s &= -16t^2 + 288t \\ 1{,}152 &= -16t^2 + 288t && \text{Sustituir } s = 1{,}152. \\ 16t^2 - 288t + 1{,}152 &= 0 && \text{Sumar } 16t^2 - 288t. \\ t^2 - 18t + 72 &= 0 && \text{Dividir entre 16.} \\ (t-6)(t-12) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ t = 6 \quad &\text{o} \quad t = 12 && \text{Resolver para } t. \end{aligned}$$

El proyectil está 1,152 pies por encima del suelo dos veces; la primera vez en $t = 6$ seg. en el camino de ida y la segunda vez en $t = 12$ segundos en el camino de regreso (consulte la figura R.50).

b) El proyectil estará al menos a 1,152 pies por encima del suelo cuando $s \geq 1{,}152$. Podemos ver en la figura R.50, junto con el trabajo algebraico de la parte a), que la solución es [6, 12]. Esto significa que el proyectil está al menos a 1,152 pies del suelo para tiempos entre $t = 6$ y $t = 12$, incluyendo 6 y 12 segundos.

En el ejercicio 32 le pedimos utilizar álgebra para resolver la desigualdad $s = -16t^2 + 28t \geq 1{,}152$.

Ahora resuelva el ejercicio 33.



[0, 20] por [0, 1500]

FIGURA R.50 Las gráficas de $s = -16t^2 + 288t$ y $s = 1{,}152$. Del ejemplo 8a, sabemos que las dos gráficas se intersecan en (6, 1,152) y en (12, 1,152).

REPASO RÁPIDO R.7

En los ejercicios del 1 al 3 resuelva para x.

1. $-7 < 2x - 3 < 7$ **2.** $5x - 2 \geq 7x + 4$

3. $|x + 2| = 3$

En los ejercicios del 4 al 6 factorice completamente la expresión.

4. $4x^2 - 9$ **5.** $x^3 - 4x$

6. $9x^2 - 16y^2$

En los ejercicios 7 y 8 reduzca la fracción a su mínima expresión.

7. $\dfrac{z^2 - 25}{z^2 - 5z}$ **8.** $\dfrac{x^2 + 2x - 35}{x^2 - 10x + 25}$

En los ejercicios 9 y 10 sume las fracciones y simplifique.

9. $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+1}{3x-4}$ **10.** $\dfrac{2x-1}{x^2 - x - 2} + \dfrac{x-3}{x^2 - 3x + 2}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN R.7

En los ejercicios del 1 al 8 resuelva, de forma algebraica, la desigualdad. Escriba la solución en notación de intervalos y dibuje su gráfica en una recta numérica.

1. $|x + 4| \geq 5$ **2.** $|2x - 1| > 3.6$

3. $|x - 3| < 2$ **4.** $|x + 3| \leq 5$

5. $|4 - 3x| - 2 < 4$ **6.** $|3 - 2x| + 2 > 5$

7. $\left|\frac{x + 2}{3}\right| \geq 3$ **8.** $\left|\frac{x - 5}{4}\right| \leq 6$

En los ejercicios del 9 al 16 resuelva la desigualdad. Utilice álgebra para resolver la ecuación correspondiente.

9. $2x^2 + 17x + 21 \leq 0$ **10.** $6x^2 - 13x + 6 \geq 0$

11. $2x^2 + 7x > 15$ **12.** $4x^2 + 2 < 9x$

13. $2 - 5x - 3x^2 < 0$ **14.** $21 + 4x - x^2 > 0$

15. $x^3 - x \geq 0$ **16.** $x^3 - x^2 - 30x \leq 0$

En los ejercicios del 17 al 26 resuelva gráficamente la desigualdad.

17. $x^2 - 4x < 1$ **18.** $12x^2 - 25x + 12 \geq 0$

19. $6x^2 - 5x - 4 > 0$ **20.** $4x^2 - 1 \leq 0$

21. $9x^2 + 12x - 1 \geq 0$ **22.** $4x^2 - 12x + 7 < 0$

23. $4x^2 + 1 > 4x$ **24.** $x^2 + 9 \leq 6x$

25. $x^2 - 8x + 16 < 0$ **26.** $9x^2 + 12x + 4 \geq 0$

En los ejercicios del 27 al 30 resuelva gráficamente la desigualdad.

27. $3x^3 - 12x + 2 \geq 0$ **28.** $8x - 2x^3 - 1 < 0$

29. $2x^3 + 2x > 5$ **30.** $4 \leq 2x^3 + 8x$

31. Actividad en grupo Proporcione un ejemplo de una desigualdad cuadrática con las soluciones indicadas.

a) Todos los números reales **b)** Ninguna solución

c) Exactamente una solución **d)** $[-2, 5]$

e) $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ **f)** $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

32. Revisión del ejemplo 8 Resuelva, algebraicamente, la desigualdad $-16t^2 + 288t \geq 1152$ y compare su respuesta con el resultado obtenido en el ejemplo 10.

33. Movimiento de un proyectil Un proyectil se lanza directamente hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad inicial de 256 pies/seg.

a) ¿Cuándo la altura del proyectil es de 768 pies por arriba del suelo?

b) ¿Cuándo el proyectil estará al menos a 768 pies de altura con respecto al suelo?

c) ¿Cuándo la altura del proyectil será menor o igual a 768 pies con respecto al suelo?

34. Movimiento de proyectil Un proyectil se lanza directamente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 272 pies/segundo.

a) ¿Cuándo la altura del proyectil será de 960 pies con respecto al suelo?

b) ¿Cuándo la altura del proyectil, con respecto al suelo, será mayor a 960 pies?

c) ¿Cuándo la altura del proyectil, con respecto al suelo, será menor o igual a 960 pies?

35. Escriba para aprender Explique el papel de la resolución de ecuaciones en el proceso de resolver una desigualdad. Proporcione un ejemplo.

36. Planeación de un viaje Barb quiere conducir a una ciudad a 105 millas de su casa en no más de 2 horas. ¿Cuál es la menor velocidad promedio que debe mantener al viajar?

37. Conexión entre álgebra y geometría Considere la colección de todos los rectángulos que tienen largo de 2 pulgadas menos que el doble de su ancho.

a) Determine todos los posibles anchos (en pulgadas) de estos rectángulos, si sus perímetros son menores que 200 pulgadas.

b) Determine los posibles anchos (en pulgadas) de estos rectángulos, si sus áreas son menores o iguales a 1200 pulgadas^2.

38. Ley de Boyle Para cierto gas, $P = 400/V$, donde P es la presión y V es el volumen. Si $20 \leq V \leq 40$, ¿cuál es el rango correspondiente para p?

39. Planeación de flujo de caja Una compañía tiene activos actuales (efectivo, propiedades, inventario y cuentas por cobrar) de \$200,000 y pasivos actuales (impuestos, préstamos y cuentas por pagar) de \$50,000. ¿Cuánto puede pedir prestado, si quiere que la razón de activos a pasivos no sea menor a 2? Suponga que el monto prestado se suma tanto a los activos y a los pasivos actuales.

Preguntas de examen estandarizado

40. Verdadero o falso La desigualdad con valor absoluto $|x - a| < b$, en donde a y b son números reales, siempre tiene al menos una solución. Justifique su respuesta.

41. Verdadero o falso Todo número real es una solución de la desigualdad con valor absoluto $|x - a| \geq 0$, donde a es un número real. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 42 al 45 resuelva estos problemas sin usar calculadora.

42. Opción Múltiple ¿Cuál de las siguientes es la solución para $|x - 2| < 3$?

A) $x = -1$ o $x = 5$ **B)** $(-1, 5)$

C) $[-1, 5]$ **D)** $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$

E) $(-1, 5)$

43. Opción Múltiple ¿Cuál de las siguientes es la solución para $x^2 - 2x + 2 \geq 0$?

A) $[0, 2]$ **B)** $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

C) $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ **D)** Todos los números reales

E) No hay solución

44. **Opción Múltiple** ¿Cuál de las siguientes es la solución para $x^2 > x$?

A) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ **B)** $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

C) $(1, \infty)$ **D)** $(0, \infty)$

E) No existe solución

45. **Opción Múltiple** ¿Cuál de las siguientes es la solución para $x^2 \leq 1$?

A) $(-\infty, 1]$ **B)** $(-1, 1)$

C) $[1, \infty)$ **D)** $[-1, 1]$

E) No hay solución

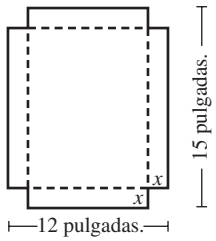
Exploraciones

46. **Construcción de una caja sin tapa** Una caja abierta se construye al cortar cuadrados de las esquinas de un pedazo rectangular de cartón (consulte la figura) y doblando las solapas hacia arriba.

a) ¿Cuál debe ser el tamaño de los cuadrados cortados en las esquinas para obtener una caja con un volumen de 125 pulgadas^3?

b) ¿De qué tamaño deben ser los cuadrados cortados en las esquinas para obtener una caja con un volumen mayor que 125 pulgadas^3?

c) ¿Cuál debe ser el tamaño de los cuadrados cortados en las esquinas para obtener una caja con volumen a lo más de 125 pulgadas^3?



Ampliación de las ideas

En los ejercicios 47 y 48 utilice una combinación de técnicas algebraicas y gráficas para resolver las desigualdades.

47. $|2x^2 + 7x - 15| < 10$

48. $|2x^2 + 3x - 20| \geq 10$

Ideas Clave DEL CAPÍTULO R

PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

Propiedad de tricotomía 4
Propiedades algebraicas 7
Propiedades de la igualdad 24
Propiedades de las desigualdades 27
Fórmula de la distancia 16
Fórmula del punto medio (plano coordenado) 17
Fórmula cuadrática 46
Formas de las ecuaciones de recta 34
Ecuación estándar de una circunferencia 18

PROCEDIMIENTOS

Completar el cuadrado 45
Resolución de forma algebraica de ecuaciones cuadráticas 47
Convención acerca de soluciones aproximadas 47

CAPÍTULO R Ejercicios de repaso

La colección de ejercicios marcados en azul podría utilizarse como un examen del capítulo.

En los ejercicios 1 y 2, determine los puntos extremos e indique si el intervalo es acotado o no acotado.

1. $[0, 5]$ **2.** $[2, \infty)$

3. Propiedad distributiva Utilice la propiedad distributiva para escribir la forma desarrollada de $2(x^2 - x)$.

4. Propiedad distributiva Utilice la propiedad distributiva para escribir la forma factorizada de $2x^3 + 4x^2$.

En los ejercicios 5 y 6 simplifique la expresión. Suponga que el denominador no es cero.

5. $\dfrac{(uv^2)^3}{v^2u^3}$ **6.** $(3x^2y^3)^{-2}$

En los ejercicios 7 y 8 escriba el número en notación científica.

7. La distancia media de Plutón al Sol es alrededor de 3,680,000,000 millas.

8. El diámetro de un glóbulo rojo es alrededor de 0.000007 metros.

En los ejercicios 9 y 10 escriba el número en forma decimal.

9. Nuestro Sistema Solar tiene alrededor de 5×10^9 años de antigüedad.

10. La masa de un electrón es de casi 9.1094×10^{-28} gramos.

11. La información en la tabla R.9 proporciona el gasto en apoyo financiero para estudiantes universitarios de varias fuentes. Escriba en notación científica el monto en dólares gastado por la fuente dada.

Tabla R.9 Apoyo financiero a estudiantes

Fuente	Monto (dólares)
Apoyo federal	50,711,000,000
Programas de becas estatales	4,630,000,000
Préstamos subvencionados por el estado	500,000,000
Préstamos del sector privado	3,995,000,000
Becas institucionales y otras	14,497,000,000

Fuente: The College Board, como se reportó en The Chronicle of Higher Education, Almanac, 200223, 30 de agosto de 2002.

a) Apoyo federal

b) Programas de becas estatales

c) Préstamos subvencionados por el estado

d) Préstamos del sector privado

e) Becas institucionales y otras

12. Forma decimal Determine la forma decimal de $-5/11$. Indique si se repite o termina

En los ejercicios 13 y 14 determine **a)** la distancia entre los puntos y **b)** el punto medio del segmento de recta determinado por los puntos.

13. -5 y 14 **14.** $(-4, 3)$ y $(5, -1)$

En los ejercicios 15 y 16 muestre que la figura determinada por los puntos es del tipo que se indica.

15. Triángulo rectángulo: $(-2, 1)$, $(3, 11)$, $(7, 9)$

16. Triángulo equilátero: $(0, 1)$, $(4, 1)$, $(2, 1 - 2\sqrt{3})$

En los ejercicios 17 y 18 determine la ecuación estándar para la circunferencia.

17. Centro $(0, 0)$, radio 2.

18. Centro $(5, -3)$, radio 4.

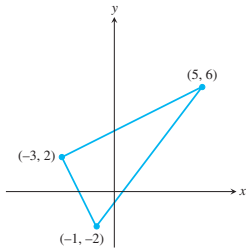
En los ejercicios 19 y 20 determine el centro y el radio de la circunferencia.

19. $(x + 5)^2 + (y + 4)^2 = 9$

20. $x^2 + y^2 = 1$

21. a) Determine la longitud de los lados del triángulo de la figura.

b) Escriba para aprender Muestre que el triángulo es un triángulo rectángulo.



22. Distancia y valor absoluto Utilice la notación de valor absoluto para escribir el enunciado de que la distancia entre z y -3 es menor o igual a 1.

23. Determinación de un segmento de recta con punto medio dado Sea $(3, 5)$ el punto medio del segmento de recta con extremos $(-1, 1)$ y (a, b). Determine a y b.

24. Determinación de la pendiente Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-1, -2)$ y $(4, -5)$.

25. Determinación de ecuación en la forma punto pendiente Determine una ecuación en la forma punto pendiente para la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ con pendiente $m = -2/3$.

26. Determine una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-5, 4)$ y $(2, -5)$ en la forma general $Ax + By + C = 0$.

En los ejercicios del 27 al 32 determine una ecuación en la forma pendiente intersección al origen para la recta.

27. La recta que pasa por $(3, -2)$ con pendiente $m = 4/5$.

28. La recta que pasa por los puntos $(-1, -4)$ y $(3, 2)$.

29. La recta que pasa por $(-2, 4)$ con pendiente $m = 0$.

30. La recta $3x - 4y = 7$.

31. La recta que pasa por $(2, -3)$ y es paralela a la recta $2x + 5y = 3$.

32. La recta que pasa por $(2, -3)$ y es perpendicular a la recta $2x + 5y = 3$.

33. Calificaciones del SAT de matemáticas Las calificaciones del SAT se miden en una escala de 800 puntos. La información de la tabla R.10 muestra la calificación promedio del SAT de matemáticas de varios años.

Tabla R.10 Calificaciones promedio en el SAT de matemáticas

Año	Calificación del SAT de matemáticas
1995	506
1997	511
1998	512
1999	511
2000	514
2001	514
2002	516
2003	519
2004	518

Fuente: The World Almanac and Book of Facts, The New York Times, junio de 2005.

a) Haga que $x = 0$ represente 1990, $x = 1$ represente 1991, y así sucesivamente. Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Utilice la información de 1995 y 2000 para escribir una ecuación lineal para la calificación promedio y, del SAT de matemáticas en términos del año x. Superponga la gráfica de la ecuación lineal en el diagrama de dispersión en a).

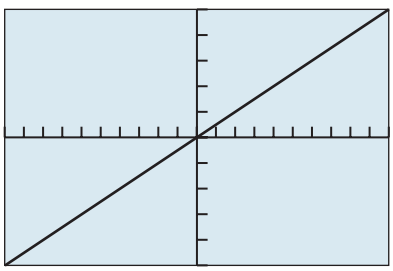
c) Utilice la ecuación en b) para estimar la calificación promedio del SAT de matemáticas en 1996. Compare con el valor real de 508.

d) Utilice la ecuación en b) para predecir la calificación promedio del SAT de matemáticas en 2006.

34. Compare el punto $(-6, 3)$ y la recta L: $4x - 3y = 5$. Escriba una ecuación **a)** para la recta que pasa por este punto y es paralela a L, y **b)** para la recta que pasa por este punto y es perpendicular a L. Respalde gráficamente su trabajo.

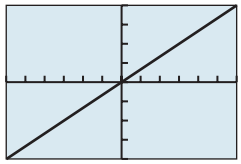
En los ejercicios 35 y 36 suponga que cada gráfica contiene el origen y la esquina superior derecha de la ventana de visualización.

35. Determine la pendiente de la recta en la figura.



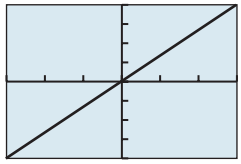
$[-10, 10]$ por $[-25, 25]$

36. Escriba para aprender ¿Cuál recta tiene mayor pendiente? Explique.



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

a)



$[-15, 15]$ por $[-12, 12]$

b)

En los ejercicios del 37 al 50 resuelva de forma algebraica la ecuación.

37. $3x - 4 = 6x + 5$

38. $\dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{1}{3}$

39. $2(5 - 2y) - 3(1 - y) = y + 1$

40. $3(3x - 1)^2 = 21$

41. $x^2 - 4x - 3 = 0$

42. $16x^2 - 24x + 7 = 0$

43. $6x^2 + 7x = 3$

44. $2x^2 + 8x = 0$

45. $x(2x + 5) = 4(x + 7)$

46. $|4x + 1| = 3$

47. $4x^2 - 20x + 25 = 0$

48. $-9x^2 + 12x - 4 = 0$

49. $x^2 = 3x$

50. $4x^2 - 4x + 2 = 0$

51. $x^2 - 6x + 13 = 0$

52. $x^2 - 2x + 4 = 0$

53. Completar el cuadrado Utilice el método de completar el cuadrado para resolver la ecuación $2x^2 - 3x - 1 = 0$.

54. Fórmula cuadrática Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

En los ejercicios del 55 al 58 resuelva gráficamente la ecuación.

55. $3x^3 - 19x^2 - 14x = 0$

56. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

57. $x^3 - 2x^2 - 2 = 0$

58. $|2x - 1| = 4 - x^2$

En los ejercicios 59 y 60 resuelva la desigualdad y haga la gráfica de la solución en una recta numérica.

59. $-2 < x + 4 \le 7$

60. $5x + 1 \ge 2x - 4$

En los ejercicios del 61 al 72 resuelva la desigualdad.

61. $\frac{3x-5}{4} \le -1$

62. $|2x-5| < 7$

63. $|3x+4| \ge 2$

64. $4x^2 + 3x > 10$

65. $2x^2 - 2x - 1 > 0$

66. $9x^2 - 12x - 1 \le 0$

67. $x^3 - 9x \le 3$

68. $4x^3 - 9x + 2 > 0$

69. $\left|\frac{x+7}{5}\right| > 2$

70. $2x^2 + 3x - 35 < 0$

71. $4x^2 + 12x + 9 \ge 0$

72. $x^2 - 6x + 9 < 0$

En los ejercicios del 73 al 80 realice la operación indicada y escriba el resultado en la forma estándar $a + bi$.

73. $(3 - 2i) + (-2 + 5i)$

74. $(5 - 7i) - (3 - 2i)$

75. $(1 + 2i)(3 - 2i)$

76. $(1 + i)^3$

77. $(1 + 2i)^2(1 - 2i)^2$

78. i^{29} *i*

79. $\sqrt{-16}$

80. $\frac{2 + 3i}{1 - 5i}$

81. Movimiento de un proyectil Un proyectil se lanza directamente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 320 pies/segundo.

a) ¿Cuándo la altura del proyectil será de 1,538 pies por encima del suelo?

b) ¿Cuándo la altura del proyectil será de a lo más 1,538 pies con respecto al suelo?

c) ¿Cuándo la altura del proyectil será mayor o igual a 1,538 pies, con respecto al suelo?

82. Navegación Un aeroplano comercial asciende al despegar con pendiente $m = 4/9$. ¿Cuánto avanzará el aeroplano en dirección horizontal para alcanzar una altura de 20,000 pies por arriba del punto de despegue?

83. Conexión entre álgebra y geometría Considere la colección de todos los rectángulos que tienen una longitud 1 cm mayor que tres veces su ancho w.

a) Determine los posibles ancho (en cm) de estos rectángulos, si sus perímetros son menores o iguales a 150 cm.

b) Determine los posibles anchos (en cm) de estos rectángulos, si sus áreas son mayores que 1,500 cm^2.

CAPÍTULO 1

Funciones y gráficas

1.1 Modelación y resolución de ecuaciones

1.2 Funciones y sus propiedades

1.3 Doce funciones básicas

1.4 Construcción de funciones a partir de funciones

1.5 Relaciones paramétricas e inversas

1.6 Transformaciones gráficas

1.7 Modelación con funciones



Uno de los principios centrales en economía es que el valor del dinero no es constante, sino una función del tiempo. Dado que muchas fortunas se ganan y se pierden tratando de predecir el valor futuro del dinero, se pone mucha atención a indicadores cuantitativos como el índice de precios al consumidor, una medida básica de la inflación en varios sectores de la economía. Consulte la página 159 para conocer el comportamiento del índice de precios al consumidor a través del tiempo.

Panorama general del capítulo 1

En este capítulo iniciamos el estudio de las funciones, que continuaremos a lo largo del texto. Sus cursos anteriores le han presentado algunas funciones básicas; éstas pueden visualizarse mediante una calculadora graficadora y sus propiedades pueden describirse a través del uso de la notación y terminología que este capítulo presenta. El conocimiento de esta terminología le servirá bastante en capítulos posteriores cuando exploremos con mayor profundidad las propiedades de funciones.

1.1 Modelación y resolución de ecuaciones

Aprenderá acerca de...

- Los modelos numéricos
- Los modelos algebraicos
- Los modelos gráficos
- La propiedad del factor cero
- La resolución de problemas
- Las fallas de los graficadores y comportamiento oculto
- Un comentario acerca de las demostraciones

. . . porque

Los modelos numéricos, algebraicos y gráficos proporcionan distintos métodos para visualizar, analizar y entender información.

Modelos numéricos

Científicos e ingenieros siempre han utilizado matemáticas para hacer modelos del mundo real y así develar sus misterios. Un **modelo matemático** es una estructura matemática que aproxima fenómenos con el propósito de estudiar y predecir su comportamiento. Gracias a los avances en tecnología de computación, el proceso de elaborar modelos matemáticos se ha convertido en un campo rico por sí mismo: la **modelación matemática**.

Este texto aborda principalmente tres tipos de modelos matemáticos: *modelos numéricos, modelos algebraicos* y *modelos gráficos*. Cada tipo de modelo proporciona una comprensión de problemas del mundo real, pero con frecuencia las mejores ideas se obtienen al pasar de una clase de modelo a otra. El desarrollo de la habilidad para hacer eso será uno de los objetivos de este curso.

Quizá la clase más básica de modelo matemático es el **modelo numérico**, en el que números (o *datos*) se analizan para obtener una comprensión del fenómeno. Un modelo numérico puede ser tan sencillo como las posiciones en las ligas mayores de béisbol o tan complicado como la red de números interrelacionados para medir la economía global.

Tabla 1.1 Salario mínimo por hora

Año	Salario mínimo por hora (SMH)	Poder adquisitivo en dólares de 1996
1955	0.75	4.39
1960	1.00	5.30
1965	1.25	6.23
1970	1.60	6.47
1975	2.10	6.12
1980	3.10	5.90
1985	3.35	4.88
1990	3.80	4.56
1995	4.25	4.38
2000	5.15	4.69
2005	5.15	4.15

Fuente: www.infoplease.com

EJEMPLO 1 Seguimiento del salario mínimo

Los números en la tabla 1.1 muestran el crecimiento del salario mínimo por hora (SMH) de 1955 a 2005 en Estados Unidos. La tabla también muestra el SMH ajustado al poder adquisitivo de dólares de 1996 (utilizando el IPC-U, el índice de precios al consumidor para todos los consumidores urbanos). Utilizando sólo la información de la tabla, responda las preguntas siguientes:

a) ¿En cuál periodo de cinco años el SMH real aumento más?

b) ¿En qué año un trabajador que ganó el SMH disfrutó el máximo poder adquisitivo?

c) Un trabajador con salario mínimo en 1980 ganaba el doble de un trabajador con salario mínimo en 1970 y, aun así, había gran presión por subir nuevamente el salario mínimo. ¿Por qué?

SOLUCIÓN

a) En el periodo de 1975 a 1980 aumentó \$1.00. Observe que el salario mínimo nunca ha bajado, así que podemos decir que no hubo otro aumento de esta magnitud, aunque la tabla no proporcione datos de cada año.

b) En 1970.

c) Aunque el SMH aumentó de \$1.60 a \$3.10 en ese periodo, el poder adquisitivo en realidad cayó en \$0.57 (en dólares de 1996). Ésta es una forma en la que la inflación afecta a la economía.

Ahora resuelva el ejercicio 11.



Las cifras de la tabla 1.1 proporcionan un modelo numérico para un aspecto de la economía de Estados Unidos, mediante el uso de otro modelo numérico —el índice de precios al consumidor urbano (IPC-U)— para ajustar los datos. El trabajo con modelos numéricos grandes es un procedimiento operativo estándar en negocios y la industria, donde se confía que las computadoras proporcionen procesamiento de datos rápido y preciso.

Tabla 1.2 Población en prisiones de Estados Unidos (miles)

Año	Total	Hombres	Mujeres
1980	316	304	12
1985	480	459	21
1990	740	699	41
1995	1085	1021	64
2000	1382	1290	92

Fuente: Departamento de Justicia de los Estados Unidos.

Tabla 1.3 Porcentaje de mujeres de la población en prisiones de Estados Unidos

Año	Porcentaje de mujeres
1980	3.8
1985	4.4
1990	5.5
1995	5.9
2000	6.7

Fuente: Departamento de Justicia de los Estados Unidos.

EJEMPLO 2 Análisis de poblaciones de prisiones

La tabla 1.2 muestra el crecimiento en el número de prisioneros recluidos en prisiones estatales y federales de 1980 a 2000. ¿La proporción de reclusas ha aumentado a lo largo de los años?

SOLUCIÓN Evidentemente, el *número* de reclusas ha aumentado a lo largo de los años, pero también el número total de prisioneros, así que es difícil apreciar, a partir de los datos, si la *proporción* de reclusas ha aumentado. Lo que necesitamos es otra columna de números en que se muestre la razón de reclusas al total de prisioneros.

Podríamos calcular todas las razones por separado, pero es más fácil realizar esta clase de cálculos repetitivos con un solo comando en una hoja de cálculo electrónica. También podemos hacer esto en una calculadora graficadora mediante la manipulación de listas (consulte el ejercicio 19). La tabla 1.3 muestra el porcentaje que consiste de reclusas de la población total cada año. Con estos datos para ampliar nuestro modelo numérico, es claro que la proporción de reclusas está aumentando.

Ahora resuelva el ejercicio 19.

Modelos algebraicos

Un **modelo algebraico** utiliza fórmulas para relacionar cantidades variables asociadas con un fenómeno bajo estudio. Un modelo algebraico agrega poder de análisis a un modelo numérico mediante la generación de valores numéricos de cantidades desconocidas relacionándolas a cantidades conocidas.

EJEMPLO 3 Comparación de pizzas

Una pizzería vende una pizza rectangular de 18″ por 24″ por el mismo precio que su gran pizza circular (24″ de diámetro). Si ambas pizzas tienen el mismo grosor, ¿cuál opción proporciona más pizza por el dinero?

SOLUCIÓN Necesitamos comparar las *áreas* de las pizzas. Por fortuna, la geometría proporciona modelos algebraicos que permiten calcular las áreas con base en la información dada.

Para la pizza rectangular:

$$\text{Área} = l \times w = 18 \times 24 = 432 \text{ pulgadas cuadradas.}$$

Para la pizza circular:

$$\text{Área} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{24}{2}\right)^2 = 144\pi \approx 452.4 \text{ pulgadas cuadradas.}$$

La pizza redonda es mayor y, por lo tanto, da más por el dinero.

Ahora resuelva el ejercicio 21.

Los modelos algebraicos del ejemplo 3 provienen de la geometría; probablemente, usted ha encontrado modelos algebraicos de muchas otras fuentes en sus cursos de álgebra y ciencias.

EXPLORACIONES ADICIONALES

Suponga que después de la liquidación, los precios de la mercancía se aumentan 25%. Si m representa el precio del mercado antes de la liquidación, determine un modelo algebraico para el precio postliquidación, incluyendo impuestos.

EXPLORACIÓN 1 **Diseño de un modelo algebraico**

Una tienda departamental hace una venta en la que todo tiene un descuento del 25% sobre el precio marcado. El descuento se aplica al pagar pero posteriormente se agrega un impuesto estatal de venta del 6.5% y un impuesto local de venta de 0.5%.

1. El precio descontado d está relacionado con el precio marcado m mediante la fórmula $d = km$, donde k es cierta constante. ¿Cuál es el valor de k?
2. El precio real de venta s está relacionado con el precio descontado, d, mediante la fórmula $s = d + td$, donde t es una constante relacionada con el impuesto total de venta. ¿Cuál es el valor de t?
3. Utilizando las respuestas a los pasos 1 y 2 podemos determinar una constante p que relaciona s directamente con m mediante la fórmula $s = pm$. ¿Qué es p?
4. Si sólo tiene \$30, ¿puede comprar una camisa marcada con \$36.99?
5. Si tiene una tarjeta de crédito, pero está decidido a gastar no más de \$100, ¿cuál es el valor máximo total marcado en sus compras, antes de presentarlos en la caja para pagar?

La capacidad de generar números a partir de fórmulas hace a un modelo algebraico mucho más útil —como indicador del comportamiento— que un modelo numérico. En realidad, una meta optimista de los científicos y matemáticos al modelar fenómenos es ajustar un modelo algebraico a datos numéricos, y luego (aun más optimistas) analizar por qué funciona. No todos los modelos pueden utilizarse para realizar predicciones precisas. Por ejemplo, nadie ha diseñado una fórmula exitosa para predecir las alzas y bajas en el mercado accionario como una función del tiempo, aunque eso no disuade a los inversionistas de intentarlo.

Si los datos numéricos tienen un comportamiento suficientemente razonable para sugerir que es posible encontrar un modelo algebraico, con frecuencia es útil primero ver una representación gráfica. Esto nos lleva a los modelos gráficos.

Modelos gráficos

Un **modelo gráfico** es una representación variable, de un modelo numérico o un modelo algebraico, que proporciona una idea de la relación entre las cantidades variables. Aprender a interpretar y utilizar gráficas es un objetivo primordial de este texto.

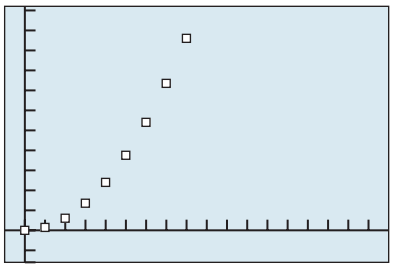
EJEMPLO 4 Visualización de los experimentos de la gravedad de Galileo

Galileo Galilei (1564-1642) dedicó una buena cantidad de tiempo en hacer rodar bolas hacia abajo sobre un plano inclinado, registrando cuidadosamente la distancia que recorrían como una función del tiempo transcurrido. En las clases de física actuales se repiten sus experimentos comúnmente, de modo que es fácil reproducir una tabla típica de la información de Galileo.

Tiempo transcurrido (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Distancia recorrida (pulgadas)	0	0.75	3	6.75	12	18.75	27	36.75	48

¿Qué modelo gráfico se ajusta a los datos? ¿Puede determinar un modelo algebraico que se ajuste?

continúa



[–1, 18] por [–8, 56]

FIGURA 1.1 Un diagrama de dispersión de los datos del experimento de gravedad de Galileo.

SOLUCIÓN La figura 1.1 muestra un diagrama de dispersión de los datos.

La experiencia de Galileo con funciones cuadráticas le sugirió que esta figura era una parábola con su vértice en el origen; por lo tanto, él modeló el efecto de la gravedad como la función cuadrática

$$d = kt^2.$$

Como la pareja ordenada (1, 0.75) debe satisfacer la ecuación, se sigue que $k = 0.75$, con lo que se obtiene la ecuación

$$d = 0.75t^2.$$

Puede verificar numéricamente que este modelo algebraico predice de forma correcta el resto de los puntos de datos. En el capítulo 2 hablaremos mucho más de las parábolas.

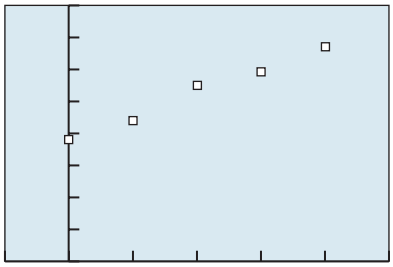
Ahora resuelva el ejercicio 23.

Esto condujo a Galileo a descubrir varias leyes básicas del movimiento que finalmente se denominarían en honor de Isaac Newton. Aunque Galileo había encontrado el modelo algebraico para describir la trayectoria de la bola, requeriría el cálculo de Newton para explicar por qué funcionó.

EJEMPLO 5 Ajuste de una curva a datos

En el ejemplo 2 mostramos que el porcentaje de mujeres en la población de prisiones de los Estados Unidos ha estado creciendo de manera constante a lo largo de los años. Modele de manera gráfica este crecimiento y use el modelo gráfico para sugerir un modelo algebraico.

SOLUCIÓN Sea t el número de años a partir de 1980 y F el porcentaje de mujeres en la población de las prisiones desde el año 0 hasta el año 20. A partir de la tabla 1.3 obtenemos los datos correspondientes de la tabla 1.4.



[–5, 25] por [0, 8]

FIGURA 1.2 Un diagrama de dispersión de los datos de la tabla 1.4 (ejemplo 5).

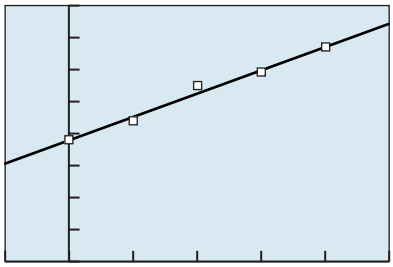
Tabla 1.4 Porcentaje (F) de mujeres en la población de las prisiones t años a partir de 1980

t	0	5	10	15	20
F	3.8	4.4	5.5	5.9	6.7

Fuente: Departamento de Justicia de Estados Unidos.

En la figura 1.2 se muestra un diagrama de dispersión de los datos.

Este patrón parece ser lineal. Si utilizamos una recta como nuestro modelo gráfico, podemos determinar un modelo algebraico para encontrar la ecuación de la recta. En el capítulo 2, describiremos cómo los estadísticos determinarían la recta que mejor ajusta a los datos, pero por ahora, podemos obtener un buen ajuste determinando la recta que pasa por los puntos (0, 3.8) y (20, 6.7).



[–5, 25] por [0, 8]

FIGURA 1.3 La recta con ecuación $y = 0.145x + 3.8$ es un buen modelo para los datos en la tabla 1.4 (ejemplo 5).

La pendiente es $(6.7 - 3.8)/(20 - 0) = 0.145$ y la intersección y es 3.8. Por lo tanto, la recta tiene ecuación $y = 0.145x + 3.8$. En la figura 1.3 podemos ver que esta recta hace un buen trabajo de modelación de los datos.

Ahora resuelva el ejercicios 13 y 15.

EXPLORACIONES ADICIONALES

Para estos datos, ¿cuál es la ventaja de un modelo lineal sobre un modelo cuadrático?

EXPLORACIÓN 2 **Interpretación del modelo**

En el ejemplo 4, la parábola surgió de una ley de física que gobierna la caída de los objetos, lo cual debe inspirar mayor confianza que el modelo lineal del ejemplo 5. Podemos repetir el experimento de Galileo muchas veces con planos de diferentes inclinaciones, unidades de medida distintas e incluso planetas diferentes y cada vez se ajustará un modelo cuadrático. El propósito de esta exploración es pensar con mayor profundidad acerca del modelo lineal en el ejemplo de la prisión.

1. El modelo lineal encontrado no predecirá de manera indefinida el porcentaje de reclusas en los Estados Unidos. ¿Por qué en algún momento debe fallar?
2. ¿Cree que nuestro modelo lineal dará una estimación precisa del porcentaje de mujeres prisioneras en Estados Unidos en 2009? ¿Por qué sí o por qué no?
3. El modelo lineal se ajusta tan bien que con el inusual salto en el porcentaje de reclusas en 1990 llama nuestra atención. Los estadísticos buscarían algún factor "sorpresivo" en 1990 que pudiese explicar el salto. ¿Qué clase de factores cree que podrían explicarlo?
4. ¿La tabla 1.1 sugiere un posible factor que podría influir en la estadística de crímenes de mujeres?

CAPÍTULO DE REQUISITOS

En el capítulo de requisitos definimos la solución de una ecuación, resolución de una ecuación, intersección *x* y gráfica de una ecuación en *x* y *y*.

Existen otras formas para graficar datos numéricos que son particularmente útiles para estudios estadísticos; nos ocuparemos de ellas en el capítulo 9. Usaremos el diagrama de dispersión para gráficas de datos ya que proporciona la conexión más cercana a gráficas de funciones en el plano cartesiano.

Propiedad del factor cero

La razón principal para estudiar álgebra a lo largo del tiempo ha sido la resolución de ecuaciones. Desarrollamos modelos algebraicos para fenómenos de modo que podemos resolver problemas, y las soluciones de los problemas, por lo regular, se obtienen al determinar soluciones de ecuaciones algebraicas.

Si somos muy afortunados de tener que resolver una ecuación con una variable, podríamos proceder como en el ejemplo siguiente.



EJEMPLO 6 **Resolución algebraica de una ecuación**

Determine todos los números reales x para los que $6x^3 = 11x^2 + 10x$.

SOLUCIÓN Comenzamos por cambiar la forma de la ecuación a $6x^3 - 11x^2 - 10x = 0$.

Luego podemos resolver esta ecuación factorizando

$$6x^3 - 11x^2 - 10x = 0$$

$$x(6x^2 - 11x - 10) = 0$$

$$x(2x - 5)(3x + 2) = 0$$

continúa

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 5 = 0 \quad \text{o} \quad 3x + 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{5}{2} \quad \text{o} \quad x = -\frac{2}{3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 31.

En el ejemplo 6 utilizamos la importante propiedad del factor cero de los números reales.

Propiedad del factor cero

Un producto de números reales es cero si, y sólo si, al menos uno de los factores en el producto es cero.

Ésta es la propiedad —mediante la que una expresión puede igualarse a cero— que los estudiantes de álgebra utilizan para resolver ecuaciones. En la actualidad, las personas que se dedican a resolver problemas son afortunadas de tener una manera alternativa para determinar tales soluciones.

Si graficamos la expresión, las x-intersecciones de la gráfica de la expresión serán los valores para los que la expresión es igual a 0.

EJEMPLO 7 Resolución de una ecuación: Comparación de métodos

Resolver la ecuación $x^2 = 10 - 4x$.

SOLUCIÓN

Resuelva de forma algebraica

La ecuación dada es equivalente a $x^2 + 4x - 10 = 0$.

Esta ecuación cuadrática tiene soluciones irracionales que pueden determinarse mediante la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-4 + \sqrt{16 + 40}}{2} \approx 1.7416574$$

y

$$x = \frac{-4 - \sqrt{16 + 40}}{2} \approx -5.7416574$$

Aunque las respuestas decimales son suficientemente precisas para todos los propósitos prácticos, es importante notar que sólo las expresiones determinadas por la fórmula cuadrática proporcionan las respuestas de números reales *exactos*. El esmero de dar respuestas exactas es un objetivo matemático. Sin embargo, para ser realistas, las respuestas exactas con frecuencia son imposibles de obtener incluso con las herramientas matemáticas más sofisticadas.

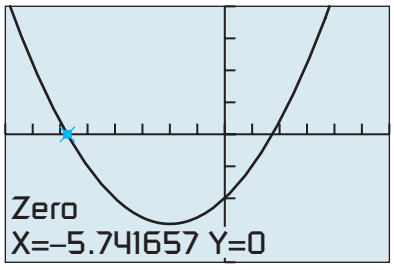
Resuelva de forma gráfica

Primero determinamos una ecuación equivalente con 0 en el lado derecho: $x^2 + 4x - 10 = 0$. Luego graficamos la ecuación $y = x^2 + 4x - 10$, como se muestra en la figura 1.4.

Después utilizamos el graficador para localizar las intersecciones x de la gráfica:

$$x \approx 1.7416574 \text{ y } x \approx -5.741657.$$

Ahora resuelva el ejercicio 35.



[–8, 6] por [–20, 20]

FIGURA 1.4 La gráfica de $y = x^2 + 4x - 10$ (ejemplo 7).

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES USANDO TECNOLOGÍA

El ejemplo 7 muestra un método para resolver una ecuación con la tecnología. Algunos graficadores también resuelven la ecuación del ejemplo 7 determinando la *intersección* de las gráficas de $y = x^2$ y $y = 10 - 4x$. Algunos graficadores tienen un solucionador de ecuaciones. Cada método tiene sus ventajas y sus desventajas pero, por ahora, recomendamos la técnica "determinación de intersecciones x", ya que es más parecida a las técnicas de álgebra clásica para determinar raíces de ecuaciones; esto hace que la conexión entre los modelos algebraicos y los geométricos sea más sencilla de seguir y apreciar.

Emplearemos la utilería gráfica de la calculadora para **resolver de forma gráfica** el ejemplo 7. La mayoría de las calculadoras tienen solucionadores que permiten **resolver de forma numérica** con las mismas aproximaciones decimales sin considerar la gráfica. Algunas calculadoras tienen sistemas de álgebra computacional que resuelven numéricamente para producir respuestas exactas en ciertos casos. En este texto distinguiremos entre estos dos métodos tecnológicos y los tradicionales métodos de lápiz y papel utilizados para **resolver de forma algebraica**.

Todo método de resolución de una ecuación, por lo regular, se reduce a determinar en dónde una expresión es igual a cero. Si utilizamos $f(x)$ para denotar la expresión algebraica en la variable x, las relaciones son las siguientes:

Relaciones fundamentales

Si a es un número real que resuelve la ecuación $f(x) = 0$, entonces los tres enunciados siguientes son equivalentes:

1. El número a es una **raíz** (o **solución**) de la **ecuación** $f(x) = 0$.
2. El número a es un **cero** de $y = f(x)$.
3. El número a es una **intersección** x de la **gráfica** de $y = f(x)$. (En ocasiones el punto $(a, 0)$ se conoce como una x-intersección).

Resolución de problemas

A George Pólya (1887-1985) se le reconoce como el padre de la resolución moderna de problemas, no sólo porque ciertamente fue bueno para ello, sino también porque publicó el análisis más famoso del proceso de resolución de problemas: *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Sus "cuatro pasos" son bien conocidos por la mayor parte de los matemáticos.

Los cuatro pasos de Pólya para resolver problemas

1. Entender el problema.
2. Diseñar un plan.
3. Llevar a cabo el plan.
4. Comprobar.

El proceso de resolución de problemas que le recomendamos utilizar a lo largo de este curso será la versión siguiente de los cuatro pasos de Pólya.

Un proceso de resolución de problemas

Paso 1: Comprensión del problema.

- Lea el problema como se enuncia, si es necesario, varias veces.
- Asegúrese de entender el significado de cada término que se utiliza.
- Vuelva a enunciar el problema con sus propias palabras. Si puede, analice el problema con otros.
- Identifique con claridad la información que necesita para resolver del problema.
- Determine la información que necesite de la información dada.

Paso 2: Desarrolle un modelo matemático del problema.

- Haga un dibujo para visualizar la situación del problema. Por lo regular ayuda.
- Introduzca una variable para representar la cantidad que busca (en algunos casos puede haber más de una).
- Utilice el enunciado del problema para determinar una ecuación o desigualdad que relacione las variables que busca con las cantidades que conoce.

Paso 3: Resuelva el modelo matemático y respalde o confirme la solución.

- **Resuelva de forma algebraica** mediante métodos algebraicos tradicionales y **respalde de forma gráfica o de forma numérica** mediante una utilería gráfica.
- **Resuelva de forma gráfica o numérica** mediante una utilería gráfica y **confirme de forma algebraica** mediante métodos algebraicos tradicionales.
- **Resuelva de forma gráfica o numérica** si no existe otra forma posible.

Paso 4: Interprete la solución en el contexto del problema.

- Traduzca su resultado matemático al problema planteado y decida si el resultado tiene sentido.

EJEMPLO 8 Aplicación del proceso de resolución de problemas

Por probar sus nuevos vehículos, los ingenieros de una fábrica de automóviles pagan a estudiantes \$0.08 por milla más \$25 diarios por prueba en carretera.

a) ¿Cuánto se pagó a Sally por conducir 440 millas en un día?

b) John ganó, en un día, \$93 por la prueba de manejo de un automóvil nuevo. ¿Qué distancia manejó?

SOLUCIÓN

Modelar El dibujo de un automóvil o de Sally o de John no sería útil, así que vamos directamente a diseñar el modelo. Tanto John como Sally ganaron \$25 por un día, más \$0.08 por milla. Multiplique dólares/milla por millas para obtener dólares.

Así que si p representa el pago por conducir x millas en un día, nuestro modelo algebraico es

$$p = 25 + 0.08x.$$

Resuelva de forma algebraica

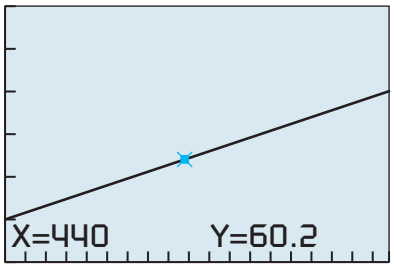
a) Para obtener el pago a Sally, hacemos $x = 440$ y resolvemos para p:

$$\begin{aligned} p &= 25 + 0.08(440) \\ &= 60.20 \end{aligned}$$

b) Para obtener el número de millas de John hacemos $p = 93$ y despejamos a x:

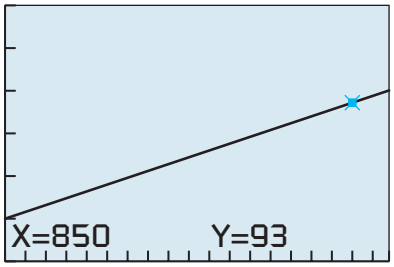
$$\begin{aligned} 93 &= 25 + 0.08x \\ 68 &= 0.08x \\ x &= \frac{68}{0.08} \\ x &= 850 \end{aligned}$$

continúa



[0, 940] por [0, 150]

a)



[0, 940] por [0, 150]

b)

FIGURA 1.5 La gráfica respalda las soluciones algebraicas en el ejemplo 8.

Respaldar de forma gráfica

La figura 1.5a muestra que el punto (440, 60.20) está en la gráfica de $y = 25 + 0.08x$, respaldando nuestra respuesta para a). La figura 1.5b muestra que el punto (850, 93) está en la gráfica de $y = 25 + 0.08x$, respaldando nuestra respuesta para b) (también podríamos haber **respaldado** nuestra respuesta **en forma numérica** con sólo sustituir para cada x y confirmando el valor de p).

Interpretación

Sally ganó, en un día, \$60.20 por conducir 440 millas. John condujo 850 millas durante un día para ganar \$93.00.

Ahora resuelva el ejercicio 47.

En realidad no es necesario *mostrar* respaldo escrito, como parte de una solución algebraica, pero es recomendable apoyar las respuestas siempre que sea posible simplemente para reducir la posibilidad de error. En este libro, con frecuencia mostramos apoyo escrito de nuestras soluciones para resaltar las relaciones entre los modelos algebraicos, gráficos y numéricos.

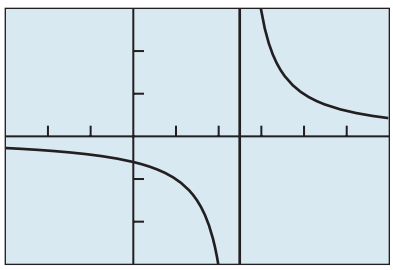
Fallas de los graficadores y comportamiento oculto

Aunque las gráficas producidas por computadoras y calculadoras gráficas son herramientas sorprendentes para comprender los modelos algebraicos y su comportamiento, es importante tener en cuenta que las máquinas tienen limitaciones. En ocasiones pueden producir modelos gráficos que representan de manera errónea el fenómeno que deseamos estudiar, un problema que denominamos **falla del graficador**. A veces la ventana de visualización es demasiado grande y oculta los detalles de la gráfica, lo que denominamos **comportamiento oculto**. Daremos un ejemplo de cada error sólo para ilustrar lo que puede suceder, pero puede estar seguro de que estas dificultades raramente ocurren con los modelos gráficos que surgen en problemas del mundo real.

EJEMPLO 9 Falla del graficador

Observe la gráfica de $y = 3/(2x - 5)$ en una calculadora graficadora. ¿Existe intersección x?

SOLUCIÓN En la figura 1.6 a se muestra una gráfica.



[–3, 6] por [–3, 3]

a)

X	Y1
2.4	–15
2.49	–150
2.499	–1500
2.5	ERROR
2.501	1500
2.51	150
2.6	15

Y1 = 3/(2X-5)

b)

FIGURA 1.6 a) Una gráfica con una misteriosa intersección x. b) Conforme x se aproxima a 2.5, el valor de $3/(2x - 5)$ tiende a $\pm\infty$ (ejemplo 9).

continúa

NOTA DE TECNOLOGÍA

Una forma para obtener la tabla de la figura 1.6b es utilizar la característica "Ask" de su calculadora gráfica e introducir por separado cada valor de x.

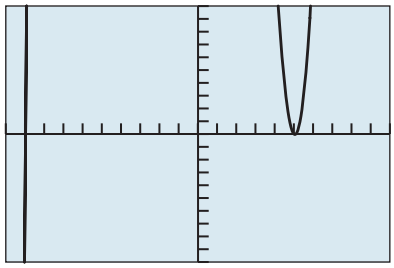
La gráfica parece mostrar una intersección x entre 2 y 3. Para confirmar esto de manera algebraica, haríamos $y = 0$ y despejamos a x:

$$0 = \frac{3}{2x - 5}$$
$$0(2x - 5) = 3$$
$$0 = 3$$

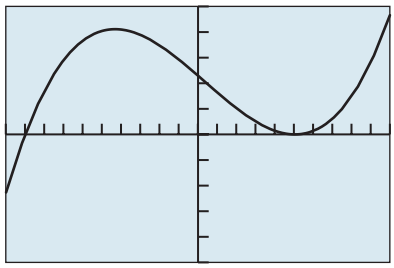
La afirmación $0 = 3$ es falsa para toda x, por lo que no puede existir valor que haga $y = 0$, y por tanto no puede haber una intersección x para la gráfica. ¿Qué estuvo mal?

La respuesta es una forma sencilla de falla del graficador: ¡La recta vertical no debe estar allí! Como lo sugiere la tabla en la figura 1.6b, la gráfica real de $y = 3/(2x - 5)$ se aproxima a $-\infty$ a la izquierda de $x = 2.5$ y baja desde $+\infty$ a la derecha de $x = 2.5$ (adelante se verá más sobre esto). La expresión $3/(2x - 5)$ está indefinida en $x = 2.5$, pero la gráfica en la figura 1.6a no refleja esto. El graficador traza los puntos a incrementos regulares, de izquierda a derecha, *conectando los puntos* conforme los genera. Alcanza algún punto abajo fuera de la pantalla a la izquierda de 2.5, seguido de inmediato por algún punto arriba fuera de la pantalla a la derecha de 2.5, y los conecta con la recta no deseada.

Ahora resuelva el ejercicio 49.



[–10, 10] por [–10, 10]
a)



[–10, 10] por [–500, 500]
b)

FIGURA 1.7 La gráfica de $y = x^3 - 1.1x^2 - 65.4x + 229.5$ en dos ventanas de visualización (ejemplo 10).

EJEMPLO 10 Comportamiento oculto

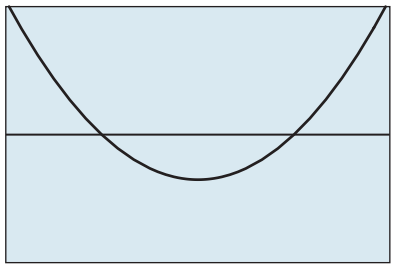
Resuelva de forma gráfica $x^3 - 1.1x^2 - 65.4x + 229.5 = 0$.

SOLUCIÓN La figura 1.7a muestra la gráfica en la ventana estándar $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$, una elección inadecuada ya que gran parte del comportamiento de la gráfica está fuera de la pantalla. Nuestras dimensiones horizontales son demasiado finas, así que ajustamos nuestras dimensiones verticales a $[-500, 500]$, obteniendo la gráfica de la figura 1.7b.

Utilizamos el graficador para localizar una intersección x cerca de -9 (que determinamos que es -9) y luego una intersección x cerca de 5 (que encontramos que es 5). La gráfica nos lleva a creer que ya hemos acabado. Sin embargo, si nos acercamos más para observar el comportamiento cerca de $x = 5$, la gráfica nos cuenta una nueva historia (figura 1.8).

En esta gráfica, vemos que en realidad existen *dos* intersecciones x cerca de 5 (que encontramos que son 5 y 5.1). Por lo tanto hay tres raíces (o ceros) de la ecuación $x^3 - 1.1x^2 - 65.4x + 229.5 = 0$: $x = -9$, $x = 5$ y $x = 5.1$.

Ahora resuelva el ejercicio 51.



[4.95, 5.15] por [–0.1, 0.1]

FIGURA 1.8 Un acercamiento a la gráfica de $y = x^3 - 1.1x^2 - 65.4x + 229.5$ (ejemplo 10).

¡Podría preguntarse si podría haber ocultas *más* intersecciones x en el ejemplo 10! En el capítulo 2, aprenderemos cómo el *Teorema Fundamental del Álgebra* garantiza que no hay más.

Un comentario acerca de las demostraciones

Mientras el ejemplo aún está fresco en nuestras mentes, hagamos una sutil pero muy importante consideración acerca de nuestra solución.

Resolvimos de forma gráfica para determinar dos soluciones, que al final fueron tres soluciones, para la ecuación dada. Aunque no mostramos los pasos, es fácil *confirmar de forma numérica* que los tres números encontrados en realidad son soluciones, susti-

NOTA PARA EL PROFESOR

En ocasiones es imposible mostrar todos los detalles en una sola ventana. Por ejemplo, la gráfica en la figura 1.8 revela detalles minuciosos de la gráfica, pero oculta su forma global.

tuyéndolos en la ecuación. Pero el problema nos pide determinar *todas* las soluciones. Aunque exploráramos, en forma gráfica, esa ecuación en un centenar más de ventanas de visualización y nunca encontrásemos otra solución, el no encontrarlas *no probaría* que no hubiese más en algún lugar. Esto es por lo que el Teorema Fundamental del Álgebra es tan importante. Nos dice que *cualquier* ecuación cúbica puede tener a lo más tres soluciones reales, así que sabemos a ciencia cierta que no hay más.

A lo largo de toda esta obra se alienta la exploración, ya que es como se realiza el progreso en matemáticas. Los matemáticos nunca están satisfechos hasta que han *demostrado* sus resultados. Le mostraremos pruebas en capítulos posteriores y le pediremos, de vez en cuando, que haga demostraciones en los ejercicios. Eso será un momento para que haga a un lado la tecnología, tome su lápiz y demuestre con una secuencia lógica de pasos algebraicos que algo es innegable y cierto universalmente. Este proceso se denomina **razonamiento deductivo**.

EJEMPLO 11 Prueba de un hecho numérico peculiar

Pruebe que 6 es un factor de $n^3 - n$ para todo entero positivo n.

SOLUCIÓN Con su calculadora puede explorar esta expresión para varios valores de n. La tabla 1.5 lo muestra para los primeros 12 valores de n.

Tabla 1.5 Los primeros 12 valores de $n^3 - n$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n^3 - n$	0	6	24	60	120	210	336	504	720	990	1320	1716

Todos estos números son divisibles entre 6, pero eso no demuestra que continuarán siendo divisibles entre 6 para todos los valores de n. De hecho, una tabla con mil millones de valores, todos divisibles entre 6, no constituirían una demostración. A continuación está la demostración.

Sea n *cualquier* entero positivo.

- Podemos factorizar $n^3 - n$ como el producto de tres números: $(n - 1)(n)(n + 1)$.
- La factorización muestra que $n^3 - n$ siempre es el producto de tres enteros consecutivos.
- Todo conjunto de tres enteros consecutivos debe tener un múltiplo de 3.
- Como 3 divide a un factor de $n^3 - n$, se deduce que 3 es un factor de $n^3 - n$.
- Todo conjunto de tres enteros consecutivos debe tener un múltiplo de 2.
- Como 2 divide a un factor de $n^3 - n$, se deduce que 2 mismo es factor de $n^3 - n$.
- Ya que tanto 2 como 3 son factores de $n^3 - n$, sabemos que 6 es un factor de $n^3 - n$.

¡Finaliza la demostración!

Ahora resuelva el ejercicio 53.

REPASO RÁPIDO 1.1 *(Para obtener ayuda, consulte la sección A.2).*

Factorice completamente, en los números reales, las expresiones siguientes.

1. $x^2 - 16$
2. $x^2 + 10x + 25$
3. $81y^2 - 4$
4. $3x^3 - 15x^2 + 18x$
5. $16h^4 - 81$
6. $x^2 + 2xh + h^2$
7. $x^2 + 3x - 4$
8. $x^2 - 3x + 4$
9. $2x^2 - 11x + 5$
10. $x^4 + x^2 - 20$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.1

En los ejercicios del 1 al 10 relacione el modelo numérico con el correspondiente modelo gráfico (*a-j*) y con el modelo algebraico (*k-t*).

1.

x	3	5	7	9	12	15
y	6	10	14	18	24	30

2.

x	0	1	2	3	4	5
y	2	3	6	11	18	27

3.

x	2	4	6	8	10	12
y	4	10	16	22	28	34

4.

x	5	10	15	20	25	30
y	90	80	70	60	50	40

5.

x	1	2	3	4	5	6
y	39	36	31	24	15	4

6.

x	1	2	3	4	5	6
y	5	7	9	11	13	15

7.

x	5	7	9	11	13	15
y	1	2	3	4	5	6

8.

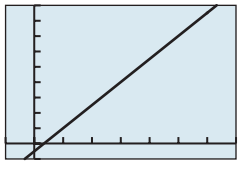
x	4	8	12	14	18	24
y	20	72	156	210	342	600

9.

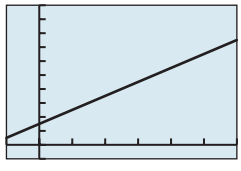
x	3	4	5	6	7	8
y	8	15	24	35	48	63

10.

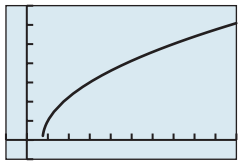
x	4	7	12	19	28	39
y	1	2	3	4	5	6



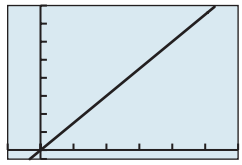
[–2, 14] por [–4, 36]
a)



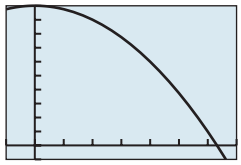
[–1, 6] por [–2, 20]
b)



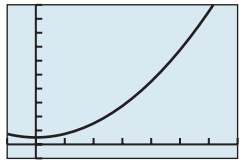
[–4, 40] por [–1, 7]
c)



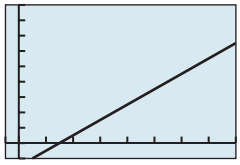
[–3, 18] por [–2, 32]
d)



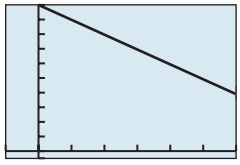
[–1, 7] por [–4, 40]
e)



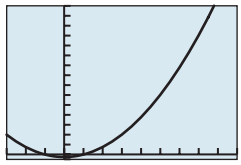
[–1, 7] por [–4, 40]
f)



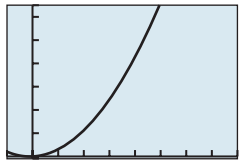
[–1, 16] por [–1, 9]
g)



[–5, 30] por [–5, 100]
h)



[–3, 9] por [–2, 60]
i)



[–5, 40] por [–10, 650]
j)

k) $y = x^2 + x$

l) $y = 40 - x^2$

m) $y = (x + 1)(x - 1)$

n) $y = \sqrt{x - 3}$

o) $y = 100 - 2x$

p) $y = 3x - 2$

q) $y = 2x$

r) $y = x^2 + 2$

s) $y = 2x + 3$

t) $y = \dfrac{x - 3}{2}$

Los ejercicios del 11 al 18 se refieren a la información de la tabla 1.6, que muestra el porcentaje de poblaciones masculina y femenina en la fuerza laboral de Estados Unidos para los años seleccionados de 1954 a 2004.

Tabla 1.6 Estadísticas de empleo

Año	Mujeres	Hombres
1954	32.3	83.5
1959	35.1	82.3
1964	36.9	80.9
1969	41.1	81.1
1974	42.8	77.9
1979	47.7	76.5
1984	50.1	73.2
1989	54.9	74.5
1994	56.2	72.6
1999	58.5	74.0
2004	57.4	71.9

Fuente: www.bls.gov

11. a) De acuerdo con el modelo numérico, ¿cuál ha sido la tendencia de las mujeres que se unen a la fuerza laboral desde 1954?

b) ¿En qué periodo de 5 años cambió más el porcentaje de mujeres que fueron empleadas?

12. a) De acuerdo con el modelo numérico, ¿cuál ha sido la tendencia de los hombres que se unen a la fuerza laboral desde 1954?

b) ¿En qué periodo de 5 años cambió más el porcentaje de hombres que fueron empleados?

13. Modele gráficamente la información con dos diagramas de dispersión en la misma gráfica: una que muestre el porcentaje de mujeres empleadas como una función del tiempo, y otra que muestre lo mismo para los hombres. Mida el tiempo a partir de 1954.

14. ¿El porcentaje de hombres está disminuyendo más rápido de lo que el porcentaje de mujeres está aumentando o viceversa?

15. Modele de modo algebraico con ecuaciones lineales de la forma $y = mx + b$. Escriba una ecuación para la información de mujeres y otra ecuación para la información de hombres. Para calcular la pendiente utilice las parejas ordenadas de 1954 y de 1999.

16. Si los porcentajes continúan de acuerdo con los modelos que encontró en el ejercicio 15, ¿cuáles serán los porcentajes de hombres y de mujeres en el año 2009?

17. Si los porcentajes continúan de acuerdo con los modelos que encontró en el ejercicio 15, ¿cuándo los porcentajes de hombres y de mujeres en la fuerza laboral civil serán iguales? ¿Qué porcentaje será?

18. Escriba para aprender Explique por qué los porcentajes no pueden continuar de manera indefinida siguiendo los modelos lineales que escribió en el ejercicio 15?

19. Aritmética con listas Ingrese los datos de la columna "Total" de la tabla 1.2 del ejemplo 2 en la lista L_1 de su calculadora. Ingrese los datos de la columna "Mujeres" en la lista L_2. Compruebe algunos cálculos para ver que los procedimientos en a) y b) hacen que la calculadora divida cada elemento de L_2 entre la entrada correspondiente en L_1, multiplicándola por 100 y almacena la lista de porcentajes resultante en L_3.

a) En la misma pantalla, ingrese el comando: $100 \times L_2/L_1 \rightarrow L_3$.

b) Vaya a la parte superior de la lista e ingrese $L_3 = 100(L_2/L_1)$.

20. Comparación de pasteles Una panadería vende un pastel de 9″ por 13″ por el mismo precio que un pastel redondo de 8″ de diámetro. Si el pastel redondo es el doble de alto que el pastel rectangular, ¿cuál opción proporciona más pastel por el dinero?

21. Adoquines Una tienda de artículos de jardinería vende adoquines cuadrados de 12″ por 12″ al mismo precio que adoquines redondos de 13″ de diámetro. Si todos los adoquines son del mismo grosor, ¿cuál opción proporciona más por el dinero?

22. Caída libre de una bomba de humo En el espectáculo aéreo de Oshkosh, WI, Jake Trouper deja caer una bomba de humo para indicar el inicio oficial del espectáculo. Si se ignora la resistencia al aire, un objeto en caída libre caerá d pies en t segundos, en donde d y t están relacionados por el modelo algebraico $d = 16t^2$.

a) ¿Cuánto tardará la bomba en caer 180 pies?

b) Si la bomba de humo está en caída libre durante 12.5 segundos después de que se suelta, ¿cuál era la altura del aeroplano cuando se soltó la bomba de humo?

23. Equipo físico Un estudiante de física obtiene la información siguiente acerca de una bola que se deja rodar hacia abajo en un plano inclinado, en donde t es el tiempo transcurrido, en segundos, y y es la distancia recorrida, en pulgadas.

t	0	1	2	3	4	5
y	0	1.2	4.8	10.8	19.2	30

Determine un modelo algebraico que se ajuste a los datos.

24. Viajes aéreos en Estados Unidos El número de pasajeros que abordaron un avión en Estados Unidos durante un periodo de 14 años, de 1991 a 2004, se muestra en la tabla 1.7.

Tabla 1.7 Viajes aéreos

Año	Pasajeros (millones)	Año	Pasajeros (millones)
1991	452.3	1998	612.9
1992	475.1	1999	636.0
1993	488.5	2000	666.1
1994	528.8	2001	622.1
1995	547.8	2002	612.9
1996	581.2	2003	646.3
1997	594.7	2004	697.8

Fuente: www.airlines.org

a) Grafique un diagrama de dispersión de los datos. Sea x el número de años a partir de 1991.

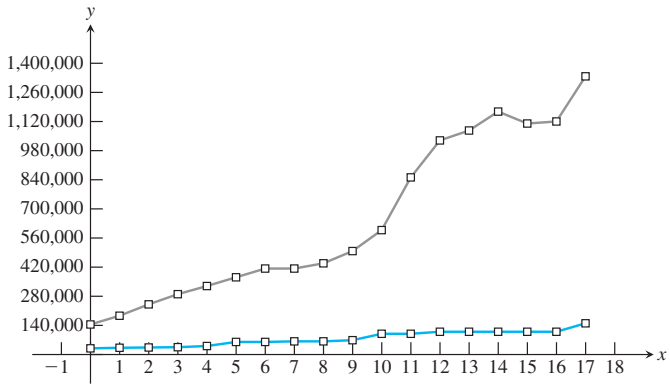
b) De 1991 a 2000, los datos parecen seguir un modelo lineal. Utilice los puntos de 1991 a 2000 para determinar una ecuación de la recta y superponga la recta sobre el diagrama de dispersión.

c) De acuerdo con el modelo lineal, ¿en qué año el número de pasajeros parece destinado a alcanzar 900 millones?

d) ¿Qué sucedió para alterar el modelo lineal?

Los ejercicios 25 a 28 se refieren a la gráfica siguiente, que muestra los salarios *mínimos* de la liga mayor de béisbol durante un reciente periodo de 18 años, y los salarios *promedio* en la liga mayor de béisbol durante el mismo periodo.

Los salarios se miden en dólares y el tiempo se mide a partir del año inicial (año 0).



Fuente: Asociación de Jugadores de la Liga Mayor de Béisbol.

25. ¿Cuál línea es cuál? y, ¿cómo las reconoció?

26. Después de la renuncia de Peter Ueberroth como comisionado del béisbol en 1988, y la repentina muerte de su sucesor en 1989, los propietarios de los equipos se sintieron libres de las restricciones anteriores e iniciaron una era de gasto competitivo en los salarios de los jugadores. En la gráfica, identifique en donde aparecen los salarios de 1990 y explique cómo localizarlos.

27. Los propietarios intentaron detener el gasto incontrolable proponiendo un salario superior o tope, lo cual suscitó, en 1994, una huelga de los jugadores. La huelga provocó que la temporada de 1995 se acortara y dejó enojados a muchos aficionados. En la gráfica, identifique dónde aparecen los salarios de 1995 y explique cómo localizarlos.

28. Escriba para aprender Analice los patrones generales en el modelo gráfico y proporcione sus ideas acerca de lo que podría suceder en un plazo largo para

a) los jugadores;

b) los propietarios de los equipos;

c) los fanáticos del béisbol.

En los ejercicios del 29 al 38 resuelva de forma algebraica y de forma gráfica la ecuación.

29. $v^2 - 5 = 8 - 2v^2$

30. $(x + 11)^2 = 121$

31. $2x^2 - 5x + 2 = (x - 3)(x - 2) + 3x$

32. $x^2 - 7x - \frac{3}{4} = 0$

33. $x(2x - 5) = 12$

34. $x(2x - 1) = 10$

35. $x(x + 7) = 14$

36. $x^2 - 3x + 4 = 2x^2 - 7x - 8$

37. $x + 1 - 2\sqrt{x + 4} = 0$

38. $\sqrt{x} + x = 1$

En los ejercicios del 39 al 46 resuelva gráficamente la ecuación, convirtiéndola a una ecuación equivalente con 0 en el lado derecho y luego determine las intersecciones x.

39. $2x - 5 = \sqrt{x + 4}$

40. $|3x - 2| = 2\sqrt{x + 8}$

41. $|2x - 5| = 4 - |x - 3|$

42. $\sqrt{x + 6} = 6 - 2\sqrt{5 - x}$

43. $2x - 3 = x^3 - 5$

44. $x + 1 = x^3 - 2x - 5$

45. $(x + 1)^{-1} = x^{-1} + x$

46. $x^2 = |x|$

47. Renta de Autos Swan cobra \$32 por día más \$0.18 por milla por la renta de un automóvil.

a) Elaine rentó un automóvil durante un día y condujo 83 millas. ¿Cuánto pagó?

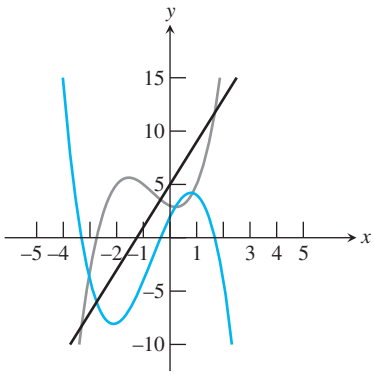
b) Ramón pago \$69.80 por la renta durante un día de un automóvil. ¿Cuál fue la distancia que manejó?

48. Conexión entre gráficas y ecuaciones Las curvas de la gráfica siguiente son las gráficas de tres curvas dadas por

$y_1 = 4x + 5$

$y_2 = x^3 + 2x^2 - x + 3$

$y_3 = -x^3 - 2x^2 + 5x + 2.$



a) Plantee una ecuación que pueda resolverse para determinar los puntos de intersección de las gráficas de y_1 y y_2.

b) Plantee una ecuación que pueda resolverse para determinar las intersecciones x de la gráfica y_3.

c) Escriba para aprender ¿Cómo refleja el modelo gráfico el hecho de que las respuestas a) y b) son algebraicamente equivalentes?

d) Confirme de manera numérica que las intersecciones x de y_3 dan los mismos valores cuando se sustituyen en las expresiones para y_1 y y_2.

49. Exploración de fallas en un graficador Sea $y = (x^{200})^{1/200}$.

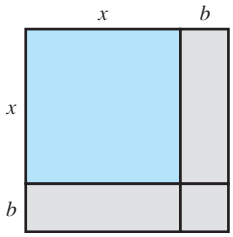
a) Explique, en forma algebraica, por qué $y = x$, para toda $x \geq 0$.

b) Grafique la ecuación $y = (x^{200})^{1/200}$ en la ventana [0, 1] por [0, 1].

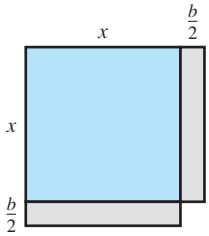
c) ¿La gráfica es diferente de la gráfica de $y = x$?

d) ¿Puede explicar por qué falla el graficador?

50. Conexión entre álgebra y geometría Explique cómo la ecuación algebraica $(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$ modela las áreas de las regiones de la figura geométrica siguiente (izquierda):



(Ej. 50)



(Ej. 52)

51. Exploración de comportamiento oculto Mediante una resolución gráfica determine todas las soluciones reales para las ecuaciones siguientes (observe el comportamiento oculto):

a) $y = 10x^3 + 7.5x^2 - 54.85x + 37.95$

b) $y = x^3 + x^2 - 4.99x + 3.03$

52. Conexión entre álgebra y geometría La figura geométrica (derecha) del ejercicio 50 es un cuadrado grande sin un pequeño cuadrado.

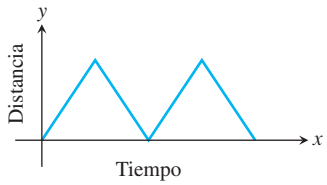
a) Determine el área de la figura.

b) ¿Qué área debe sumarse para completar el cuadrado?

c) Explique cómo la fórmula algebraica para completar el cuadrado modela la forma de completar el cuadrado en b).

53. Demostración de un teorema Demuestre que si n es un entero positivo, entonces $n^2 + 2n$ es impar o bien es un múltiplo de 4. Compare su demostración con la de sus compañeros de clase.

54. Escriba para aprender La gráfica siguiente muestra la distancia, con respecto a su casa, contra el tiempo de un corredor. Con base en la información de la gráfica escriba un párrafo que describa la posición durante el ejercicio del corredor.



Preguntas de examen estandarizado

55. Verdadero o falso Un producto de números reales es cero si, y sólo si, cada factor en el producto es cero. Justifique su respuesta.

56. Verdadero o falso Un modelo algebraico siempre puede usarse para hacer predicciones precisas.

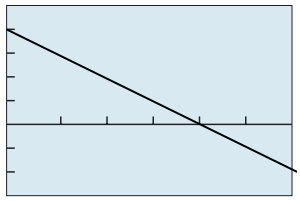
En los ejercicios del 57 al 60 puede utilizar una calculadora graficadora para decidir cuál modelo algebraico corresponde al modelo gráfico o numérico que se da.

A) $y = 2x + 3$ **B)** $y = x^2 + 5$

C) $y = 12 - 3x$ **D)** $y = 4x + 3$

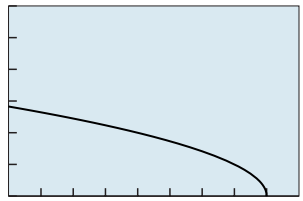
E) $y = \sqrt{8 - x}$

57. Opción múltiple



[0, 6] por [–9, 15]

58. Opción múltiple



[0, 9] por [0, 6]

59. Opción múltiple

x	1	2	3	4	5	6
y	6	9	14	21	30	41

60. Opción múltiple

x	0	2	4	6	8	10
y	3	7	11	15	19	23

Exploraciones

61. Análisis del mercado Ahmad y LaToya observan ambos el mercado de acciones a lo largo del año en busca de acciones que han dado saltos significativos de un mes a otro. Cuando ellos identificaron una, cada uno compró 100 acciones. La regla de Ahmed es vender la acción si no se comporta bien durante 3 meses seguidos; la de LaToya es vender en diciembre si la acción no se comporta bien desde su compra. La gráfica siguiente muestra el desempeño mensual, en dólares

(enero-"diciembre), de una acción que Ahmad y LaToya han observado.



a) Ahmad y LaToya compraron la acción al inicio del año, ¿en qué mes?

b) Aproximadamente, ¿a qué precio compraron la acción?

c) ¿Cuándo vendió Ahmed la acción?

d) ¿Cuánto perdió Ahmed?

e) Escriba para aprender Explique por qué la estrategia de LaToya fue mejor que la de Ahmad para esta acción en particular en este año concreto.

f) Bosqueje una gráfica de 12 meses del comportamiento que favorecería la estrategia de Ahmad sobre la de LaToya.

62. Actividad en equipo Creación de comportamiento oculto

Puede crear sus propias gráficas con comportamiento oculto. Trabajando en grupos de dos o tres, pruebe esta exploración.

a) Grafique la ecuación $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 4)$ en la ventana $[-4, 4]$ por $[-10, 10]$.

b) Confirme de forma algebraica que la función sólo tiene ceros en $x = -2$ y $x = 2$.

c) Haga la gráfica de la ecuación $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 4.01)$ en la ventana $[-4, 4]$ por $[-10, 10]$.

d) Algebraicamente, confirme que esta función sólo tiene un cero, en $x = -2$. (Utilice el discriminante).

e) Grafique de la ecuación $(x + 2)(x^2 - 4x + 3.99)$ en la ventana $[-4, 4]$ por $[-10, 10]$.

f) Confirme algebraicamente que esta función tiene tres ceros (utilice el discriminante).

Ampliación de las ideas

63. Proliferación de teléfonos celulares La tabla 1.8 muestra el número de teléfonos celulares suscritos en Estados Unidos y su facturación promedio mensual en los años de 1998 a 2004.

Tabla 1.8 Suscriptores de teléfonos celulares

Año	Suscriptores (millones)	Facturación promedio mensual (dólares)
1998	69.2	39.43
1999	86.0	41.24
2000	109.5	45.27
2001	128.4	47.37
2002	140.8	48.40
2003	158.7	49.91
2004	180.4	50.64

Fuente: Asociación de Telecomunicación Celular e Internet.

a) Grafique los diagramas de dispersión del número de suscriptores y la facturación promedio mensual como funciones del tiempo, haciendo el tiempo t igual al número de años a partir de 1990.

b) Uno de los diagramas de dispersión sugiere claramente un modelo lineal en la forma $y = mx + b$. Utilice los puntos en $t = 8$ y $t = 14$ para determinar el modelo lineal.

c) Superponga la gráfica del modelo lineal al diagrama de dispersión. ¿Parece ajustarse bien?

d) ¿Por qué un modelo lineal parece no ser adecuado para el otro diagrama de dispersión? ¿Puede pensar en una función que pudiese ajustar mejor los datos?

e) En 1995 había 33.8 millones de suscriptores con una facturación promedio mensual de $51.00. Agregue estos puntos a los diagramas de dispersión.

f) Escriba para aprender Los puntos de 1995 no parecen ajustarse a los modelos utilizados para representar los datos de 1998 a 2004. Proporcione una explicación para esto.

64. Actividad en equipo (continuación del ejercicio 63). Analice las fuerzas económicas sugeridas por los dos modelos del ejercicio 63 y especule acerca del futuro mediante el análisis de las gráficas.

1.2 Funciones y sus propiedades

Aprenderá acerca de...

- La definición y notación de función
- El dominio y rango
- La continuidad
- Funciones crecientes y funciones decrecientes
- El acotamiento
- Los extremos locales y absolutos
- La simetría
- Las asíntotas
- El comportamiento en los extremos

. . . porque

Las funciones y las gráficas forman la base para la comprensión de la matemática y sus aplicaciones, que verá tanto en su trabajo como en el trabajo de sus cursos universitarios.

En esta sección presentaremos la terminología que se utiliza, en todo el texto, para describir funciones. Siéntase en libertad de hacer un examen superficial a las partes con las que ya esté familiarizado, pero dedique el tiempo necesario para asimilar los conceptos que podrían ser nuevos para usted (como continuidad y simetría). Incluso si tarda varios días en cubrir esta sección, será un tiempo bien empleado en precálculo.

Definición y notación de función

La matemática y sus aplicaciones abundan en ejemplos de fórmulas mediante las cuales cantidades variables se relacionan unas con otras. El lenguaje y la notación de funciones son ideales para ese propósito. En realidad, una función es un concepto sencillo; si no lo fuera, la historia lo hubiese reemplazado con otro más fácil de usar. A continuación se define una función.

DEFINICIÓN Función, dominio y rango

Una función de un conjunto D a un conjunto R es una regla que asigna a cada elemento de D un elemento único en R. El conjunto D de todos los valores de entrada es el **dominio** de la función, y el conjunto R de todos valores de salida es el **rango** de la función.

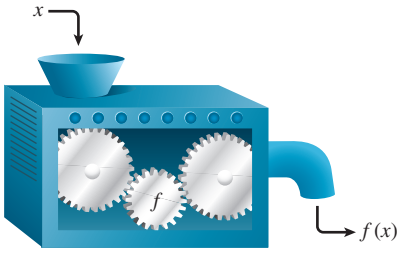


FIGURA 1.9 Un diagrama de la "máquina" para una función.

Existen muchas formas de ver las funciones. Una de las más útiles intuitivamente es el concepto de "máquina" (figura 1.9), en el que los valores del dominio (x) se introducen a la máquina (la función f) para producir valores del rango (y). Para indicar que y proviene de la función que actúa sobre x, utilizamos la elegante **notación de función** de Euler $y = f(x)$ (que se lee "**y es igual a f de x**" o "**el valor de f en x**"). Aquí, x es la **variable independiente** y y es la **variable dependiente**.

También, una función puede verse como una **asignación** o **transformación** de los elementos del dominio en elementos del rango. La figura 1.10 a) muestra una función que asigna elementos del dominio X en elementos del rango Y. La figura 1.10 b) muestra otra asignación, pero *ésta no es una función*, ya que la regla no asigna al elemento x_1 a un *único* elemento de Y.

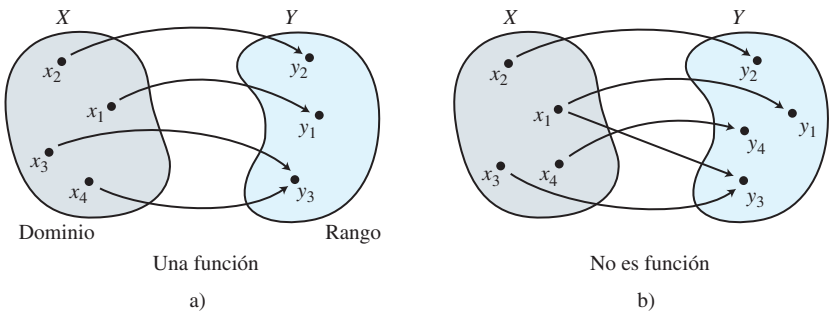


FIGURA 1.10 El diagrama en a) muestra una transformación de X a Y que es una función. El diagrama en b) muestra una transformación de X a Y que no es una función.

UN POCO DE HISTORIA

La palabra función, en su sentido matemático, por lo general, se le atribuye a Gottfried Leibniz (1646-1716), uno de los pioneros en los métodos del cálculo. Su cuidado en la claridad de la notación es una de sus grandes contribuciones al progreso científico, por lo cual seguimos utilizando su notación en los cursos de cálculo actuales. Irónicamente, no fue Leibniz sino Leonhard Euler (1707-1783) quien introdujo la conocida notación $f(x)$.

Esta unicidad del valor del rango es muy importante para nosotros cuando estudiamos el comportamiento de la función. Saber que $f(2) = 8$ revela algo acerca de f, y esa comprensión sería contradictoria si después descubriésemos que $f(2) = 4$. Por ello nunca encontrará una función definida por medio de fórmulas ambiguas como $f(x) = \pm 2$.

EJEMPLO 1 Definición de una función

¿La fórmula $y = x^2$ define a y como una función de x?

SOLUCIÓN Sí, y es una función de x. De hecho, podemos escribir la fórmula en notación funcional: $f(x) = x^2$. Al sustituir un número x en la función, el cuadrado de x será la salida, y no hay ambigüedad acerca de lo que es el cuadrado de x.

Ahora resuelva el ejercicio 3.

Otra forma útil de ver a las funciones es de manera gráfica. La **gráfica de la función $y = f(x)$** es el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$, x en el dominio de f. Colocamos los valores del dominio a lo largo del eje x con los valores de su rango en el eje y para obtener parejas ordenadas que producen la gráfica de $y = f(x)$.

EJEMPLO 2 Visualización gráfica de una función

De las tres gráficas que se muestran en la figura 1.11, ¿cuál *no* es la gráfica de una función?

SOLUCIÓN La gráfica en c) no es la gráfica de una función. En la gráfica, hay tres puntos con abscisa igual a 0, por lo que la gráfica no asigna un valor *único* a 0. (En realidad, podemos ver que hay una gran cantidad de números entre -2 y 2 para los cuales la gráfica asigna varios valores). Las otras dos gráficas no tienen problema ya que ninguna recta vertical interseca a la gráfica en más de un punto. Las gráficas que satisfacen este *criterio (prueba) de la recta vertical* son las gráficas de funciones.

Ahora resuelva el ejercicio 5.

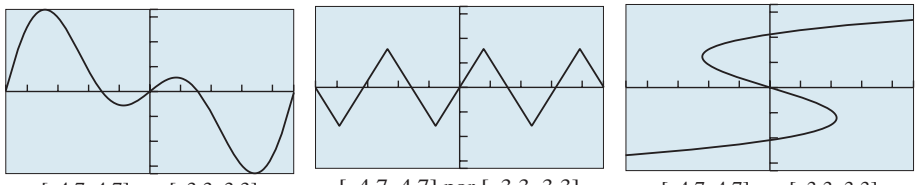


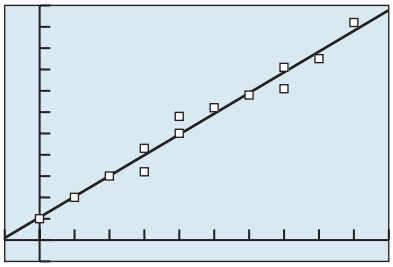
FIGURA 1.11 Una de éstas no es la gráfica de una función (ejemplo 2).

Prueba (criterio) de la recta vertical

Una gráfica (conjunto de puntos (x, y)) en el plano xy define a y como una función de x si, y sólo, si ninguna recta vertical interseca a la gráfica en más de un punto.

¿QUÉ HAY ACERCA DE LOS DATOS?

Cuando pasamos de un modelo numérico a uno algebraico, con frecuencia utilizamos una función para aproximar parejas de datos que pueden violar nuestra definición de función. En la figura 1.12 podemos ver que varias parejas de puntos de datos no satisfacen el criterio de la recta vertical, pero aun así la función lineal aproxima muy bien los datos.



[–1, 10] por [–1, 11]

FIGURA 1.12 Los puntos de los datos no satisfacen el criterio de la recta vertical, pero son aproximados mediante una función lineal.

NOTA

El símbolo "∪" se lee "unión". Significa que los elementos de los dos conjuntos se combinan para formar un conjunto.

Dominio y rango

Comúnmente definiremos en forma algebraica a las funciones, dando explícitamente la regla en términos de la variable del dominio. Sin embargo, la regla no contaría toda la historia sin alguna consideración acerca lo que en realidad es el dominio.

Por ejemplo, podemos definir el volumen de una esfera como una función de su radio mediante la fórmula

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (Observe que esto es "}V\text{ de }r\text{"—no "}V \cdot r\text{").}$$

Esta *fórmula* está definida para todos los números reales, pero la *función* volumen no está definida para valores negativos de r. Por lo que, si nuestra intención fuese estudiar la función volumen, restringiríamos el dominio a todas las $r \geq 0$.

Convención

A menos de que se trate con un modelo (como el volumen) que necesite un dominio restringido, supondremos que el dominio de una función definida mediante una expresión algebraica es el mismo que el dominio de la expresión algebraica, el **dominio implícito**. Para modelos, utilizaremos un dominio que se ajuste a la situación, el **dominio relativo**.

EJEMPLO 3 Determinación del dominio de una función

Determine el dominio de cada una de estas funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$

c) $A(s) = (\sqrt{3}/4)s^2$, donde $A(s)$ es el área de un triángulo equilátero con lados de longitud s.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

a) La expresión dentro de un radical no puede ser negativa. Hacemos $x + 3 \geq 0$ y resolvemos para determinar que $x \geq -3$. El dominio de f es el intervalo $[-3, \infty)$.

b) La expresión dentro de un radical no puede ser negativa; por lo tanto $x \geq 0$. Además, el denominador de una fracción no puede ser cero, por lo tanto $x \quad 5$. El dominio de g es el intervalo $[0, \infty)$ quitando el número 5, que puede escribirse como la *unión* de dos intervalos: $[0, 5) \cup (5, \infty)$.

c) La expresión algebraica tiene como dominio a todos los números reales, pero el comportamiento que se está modelando restringe a s de ser negativa. El dominio de A es el intervalo $[0, \infty)$.

Respalde geométricamente

Podemos respaldar nuestras respuestas en a) y b) de forma gráfica, ya que la calculadora no traza puntos donde la función está indefinida.

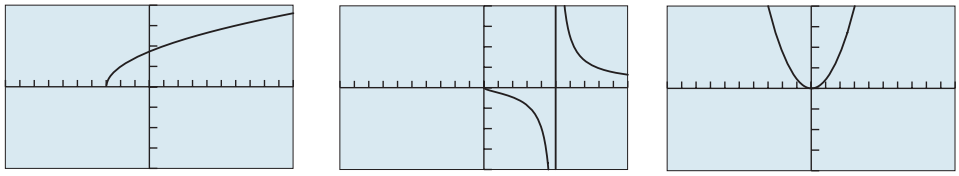
a) Observe que la gráfica de $y = \sqrt{x+3}$ (figura (1.13a) sólo muestra puntos para $x \geq -3$, como se esperaba.

continúa

b) La gráfica de $y = \sqrt{x}/(x - 5)$ (figura 1.13b) sólo muestra puntos para $x \geq 0$, como se esperaba, pero muestra una recta no esperada que cruza el eje x en $x = 5$. Esta recta, una forma de falla del graficador descrita en la sección anterior, no debería estar allí. Ignorándola, vemos que 5, como se esperaba, no está en el dominio.

c) La gráfica de $y = (\sqrt{3}/4)s^2$ (figura 1.13c) muestra el dominio no restringido de la expresión algebraica: todos los números reales. La calculadora no tiene forma de saber que s es la longitud de un lado de un triángulo.

Ahora resuelva el ejercicio 11.



[–10, 10] por [–4, 4] a)

[–10, 10] por [–4, 4] b)

[–10, 10] por [–4, 4] c)

FIGURA 1.13 Respaldo gráfico de las soluciones algebraicas del ejemplo 3. La recta vertical en b) debe ignorarse ya que resulta de una falla en el graficador. Los puntos en c) con coordenadas x negativas deben ignorarse, ya que la calculadora no sabe que x es una longitud (pero nosotros sí).

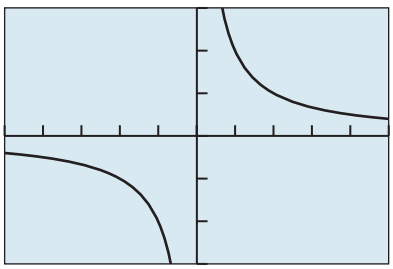
Con frecuencia, determinar de forma algebraica el rango de una función es mucho más difícil que determinar el dominio, aunque de forma geométrica las cosas se ven muy similares. Para determinar el *dominio* buscamos todas las *coordenadas x (abscisas)* que correspondan a puntos en la gráfica, y para determinar el rango, buscamos todas las *coordenadas y (ordenadas)* que correspondan a puntos en la gráfica. Un buen método es utilizar de manera simultánea los dos enfoques, algebraico y gráfico, como mostramos en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Determinación del rango de una función

Determine el rango de la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

SOLUCIÓN

Resuelva gráficamente La gráfica de $y = \dfrac{2}{x}$ se muestra en la figura 1.14.



[–5, 5] por [–3, 3]

FIGURA 1.14 La gráfica de $y = 2/x$. ¿y 5 0 está en el rango?

Parece que $x=0$ no está en el dominio (como se esperaba, ya que el denominador no puede ser cero). También parece que el rango consiste en todos los números reales excepto el cero.

continúa

NOTACIÓN FUNCIONAL

Un graficador común no utiliza la notación de función. Así que la función $f(x) = x^2 + 1$ se introduce como $y_1 = x^2 + 1$. En algunos graficadores puede evaluar f en $x = 3$ introduciendo $y_1(3)$ en la pantalla principal. Por otra parte, en otros graficadores $y_1(3)$ significa $y_1 * 3$.

Confirme algebraicamente

Confirmamos que 0 no está en el rango al tratar de resolver $2/x = 0$:

$$\frac{2}{x} = 0$$
$$2 = 0 \cdot x$$
$$2 = 0$$

Como la ecuación $2 = 0$ nunca es verdadera, $2/x=0$ no tiene soluciones, y por tanto $y = 0$ no está en el rango. Pero, ¿cómo sabemos que todos los demás números reales están en el rango? Supongamos que k es cualquier número real e intentamos resolver $2/x = k$:

$$\frac{2}{x} = k$$
$$2 = k \cdot x$$
$$x = \frac{2}{k}$$

Como puede ver, esta vez no hay problema para encontrar una x, de modo que 0 es el único número que no está en el rango de f. Escribimos el rango $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Ahora resuelva el ejercicio 17.

Puede ver que esto es considerablemente más complicado que determinar el dominio, pero en este punto estamos obstaculizados por no tener muchas herramientas con las cuales analizar el comportamiento de la función. Revisaremos el problema de determinar rangos en el ejercicio 86, después de haber desarrollado las herramientas que simplificarán el análisis.

Continuidad

Una de las propiedades más importantes de la mayoría de las funciones que modelan comportamiento del mundo real, es que son *continuas*. Desde el punto de vista gráfico, una función es continua en un punto si la gráfica no se separa en ese punto. Podemos ilustrar el concepto con unas cuantas gráficas (figura 1.15).

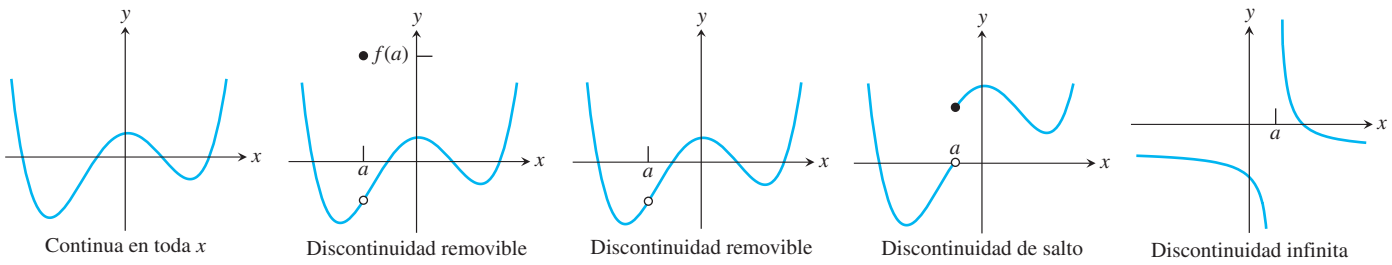
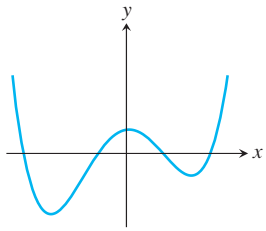


FIGURA 1.15 Algunos puntos de discontinuidad.

Veamos cada uno de estos casos individualmente.

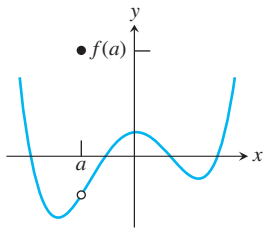


Esta gráfica es continua en todas partes. Observe que la gráfica no se rompe. Esto significa que si estamos estudiando el comportamiento de la función f para valores de x cercanos a cualquier número real particular a, podemos estar seguros que los valores $f(x)$ serán cercanos a $f(a)$.



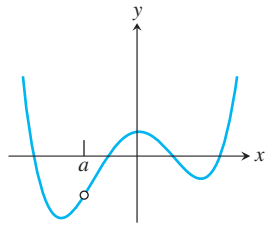
Continua en toda x

Esta gráfica es continua en todas partes, excepto en el "agujero" en $x = a$. si estamos estudiando el comportamiento de esta función f para valores x cercanos a a, *no* podemos asegurar que los valores $f(x)$ serán cercanos a $f(a)$. En este caso, $f(x)$ es menor que $f(a)$ para x cerca de a. Ésa se denomina **discontinuidad removible**, ya que puede "remendada" redefiniendo $f(a)$ de modo que desaparezca el agujero.



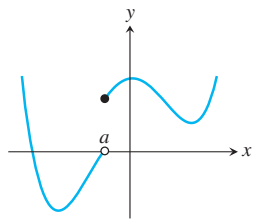
Discontinuidad removible

Esta gráfica también tiene una **discontinuidad removible** en $x = a$. Si estamos estudiando el comportamiento de esta función f para valores x cercanos a a, no aseguramos que los valores $f(x)$ serán cercanos a $f(a)$, ya que en este caso $f(a)$ ni siquiera existe. Es removible, ya que podríamos definir $f(a)$ de tal manera que se tape el agujero y haga que f sea continua en a.



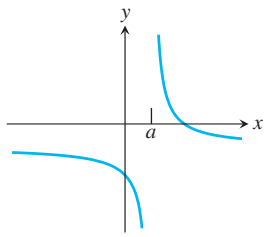
Discontinuidad removible

Aquí está una discontinuidad que no es removible. Es una **discontinuidad de salto**, ya que es más que un agujero en $x = a$; hay un *salto* en los valores de la función que forma un espacio imposible de llenar con un solo punto $(a, f(a))$, independientemente de cómo tratemos de redefinir $f(a)$.



Discontinuidad de salto

Ésta es una función con una **discontinuidad infinita** en $x = a$. Definitivamente no es removible.



Discontinuidad infinita

El sencillo concepto geométrico de una gráfica rota en un punto es una de esas nociones visuales que son muy difíciles de comunicar de manera precisa en el lenguaje del álgebra. El concepto clave de las figuras parece ser que queremos que el punto $(x, f(x))$ se deslice suavemente en el punto $(a, f(a))$ sin perderlo, desde alguna dirección. Esto sólo requiere que $f(x)$ se aproxime a $f(a)$ como un *límite* cuando x se aproxima a a. Una función f es **continua en $x = a$** si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Una función f es **discontinua en $x = a$**, si no es continua en $x = a$.

ELECCIÓN DE LA VENTANA DE VISUALIZACIÓN

La mayoría de las ventanas de visualización muestran una recta vertical para la función de la figura 1.16. En ocasiones es posible elegir la ventana de visualización en la que la recta vertical no aparezca, como lo hicimos en la figura 1.16.

EJEMPLO 5 Identificación de puntos de discontinuidad

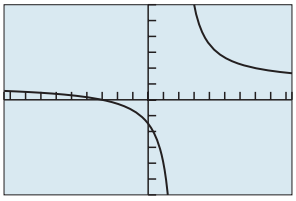
Con base en las gráficas, ¿cuáles de las siguientes figuras muestran funciones que sean discontinuas en $x = 2$? ¿Alguna de las discontinuidades es removible?

SOLUCIÓN La figura 1.16 muestra una función que no está definida en $x = 2$, y por tanto no es continua allí. La discontinuidad en $x = 2$ no es removible.

La función graficada en la figura 1.17 es un polinomio cuadrático cuya gráfica es una parábola, una gráfica sin huecos porque su dominio incluye a todos los números reales. Es continua para toda x.

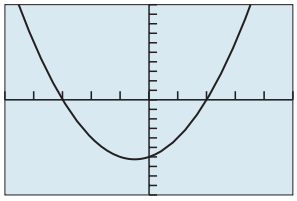
La función graficada en la figura 1.18 no está definida en $x = 2$ y por tanto no puede ser continua allí. La gráfica se ve como la gráfica de la recta $y = x + 2$, excepto porque hay un agujero en donde debe estar el punto (2, 4). Ésta es una discontinuidad removible.

Ahora resuelva el ejercicio 21.



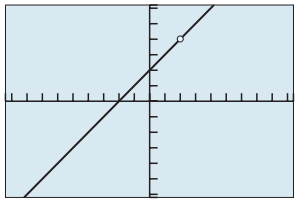
[–9.4, 9.4] por [–6, 6]

FIGURA 1.16 $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$



[–5, 5] por [–10, 10]

FIGURA 1.17 $g(x) = (x + 3)(x - 2)$



[–9.4, 9.4] por [–6.2, 6.2]

FIGURA 1.18 $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Funciones crecientes y funciones decrecientes

Otro concepto de funciones que es fácil comprender de forma gráfica es la propiedad de ser creciente, decreciente o constante en un intervalo. Ilustramos el concepto con unas cuantas gráficas (figura 1.19).

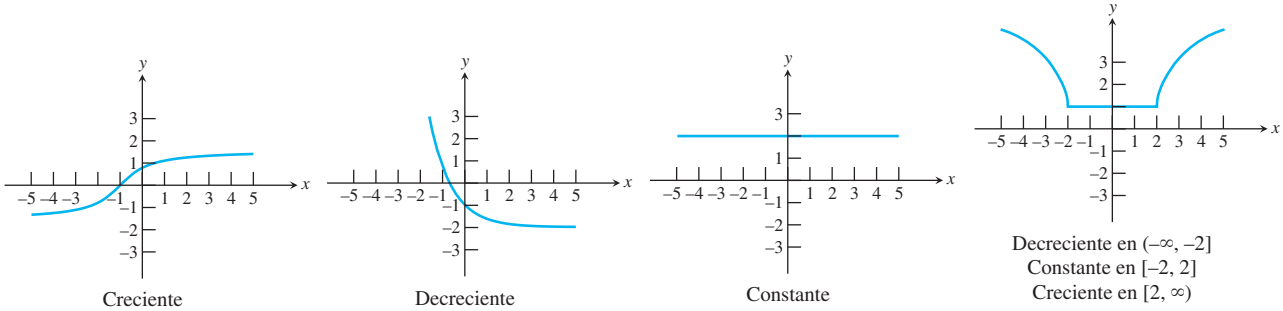


FIGURA 1.19 Ejemplos de funciones crecientes, decrecientes o constantes en un intervalo.

Una vez más la idea es fácil de comunicar de forma gráfica pero, ¿cómo podemos identificar estas propiedades de manera algebraica? La exploración 1 ayudará a establecer los pasos para la definición algebraica.

EXPLORACIÓN 1 **Información creciente, decreciente y constante**

1. De las tres tablas de datos numéricos siguientes, ¿cuál sería modelada mediante una función que sea a) creciente, b) decreciente, c) constante?

X	Y1
−2	12
−1	12
0	12
1	12
3	12
7	12

X	Y2
−2	3
−1	1
0	0
1	−2
3	−6
7	−12

X	Y3
−2	−5
−1	−3
0	−1
1	1
3	4
7	10

2. Haga una lista de △Y1, el *cambio* en los valores de Y1 cuando se mueve hacia abajo de la lista. Conforme se mueve de Y1 = *a* a Y1 = *b*, el cambio es △Y1 = *b* – *a*. Haga lo mismo para los valores de Y2 y Y3.

X se mueve de	△X	△Y1
−2 a −1	1	
−1 a 0	1	
0 a 1	1	
1 a 3	2	
3 a 7	4	

X se mueve de	△X	△Y1
−2 a −1	1	
−1 a 0	1	
0 a 1	1	
1 a 3	2	
3 a 7	4	

X se mueve de	△X	△Y1
−2 a −1	1	
−1 a 0	1	
0 a 1	1	
1 a 3	2	
3 a 7	4	

3. ¿Qué se cumple acerca de los cocientes △Y/△X para una función creciente? ¿Para una función decreciente? ¿Para una función constante?

4. ¿En qué otro sitio ha visto el cociente △Y/△X? ¿Esto refuerza su respuesta de la parte 3?

△LIST EN UNA CALCULADORA

Su calculadora podría ser capaz de ayudarle con los números en la exploración 1. Algunas calculadoras tienen una operación "△List" que calculará los cambios conforme se mueve hacia abajo en la lista. Por ejemplo, el comando "△List(L1)→L3" almacenará las diferencias de L1 en L3. Observe que △List(L1) siempre tendrá una entrada (o elemento) menos que L1.

Su análisis de los cocientes △Y/△X en la exploración le debe ayudar a entender la definición siguiente.

DEFINICIÓN Función creciente, decreciente y constante en un intervalo

Una función *f* es **creciente** en un intervalo si, para cualesquier dos puntos en el intervalo, un cambio positivo en *x* ocasiona un cambio positivo en $f(x)$.

Una función *f* es **decreciente** en un intervalo si, para cualesquier dos puntos en el intervalo, un cambio positivo en *x* ocasiona un cambio negativo en $f(x)$.

Una función *f* es **constante** en un intervalo si, para cualesquier dos puntos en el intervalo, un cambio positivo en *x* ocasiona un cambio nulo en $f(x)$.

EJEMPLO 6 Análisis de una función buscando comportamiento creciente-decreciente

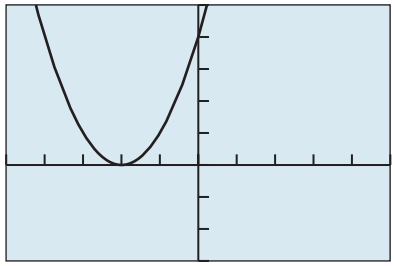
Para cada función, indique los intervalos en los que es creciente y los intervalos en los que es decreciente.

a) $f(x) = (x + 2)^2$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

SOLUCIÓN

Resuelva gráficamente

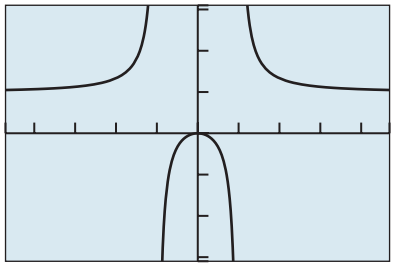
a) En la gráfica de la figura 1.20 vemos que f es decreciente en $(-\infty, -2]$ y creciente en $[-2, \infty)$. (Observe que incluimos -2 en ambos intervalos. No se preocupe que esto provoque alguna contradicción acerca de lo que pasa *en* -2, ya que sólo hablamos de funciones crecientes o decrecientes en *intervalos*, y -2 no es un intervalo).



[–5, 5] por [–3, 5]

FIGURA 1.20 La función $f(x) = (x + 2)^2$ decrece en $(-\infty, -2]$ y crece en $[-2, \infty)$ (ejemplo 6).

b) En la gráfica en la figura 1.21 g es creciente en $(-\infty, -1)$, creciente otra vez en $(-1, 0]$, decreciente en $[0, 1)$ y otra vez decreciente en $(1, \infty)$.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

FIGURA 1.21 La función $g(x) = x^2/(x^2 - 1)$ crece en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 0]$; la función decrece en $[0, 1)$ y en $(1, \infty)$ (ejemplo 6).

Ahora resuelva el ejercicio 33.

Pudo haber notado que hemos hecho algunas suposiciones acerca de las gráficas. ¿Cómo sabemos que no regresan en algún lugar fuera de la pantalla? Más adelante, en el libro, desarrollaremos algunas formas para responder esa pregunta, pero métodos más poderosos le esperarán cuando estudie cálculo.

Acotamiento

El concepto de *acotamiento* es muy sencillo para entender, tanto de forma gráfica como algebraica. Pasaremos directamente a la definición algebraica después de motivar el concepto con algunas gráficas comunes (figura 1.22).

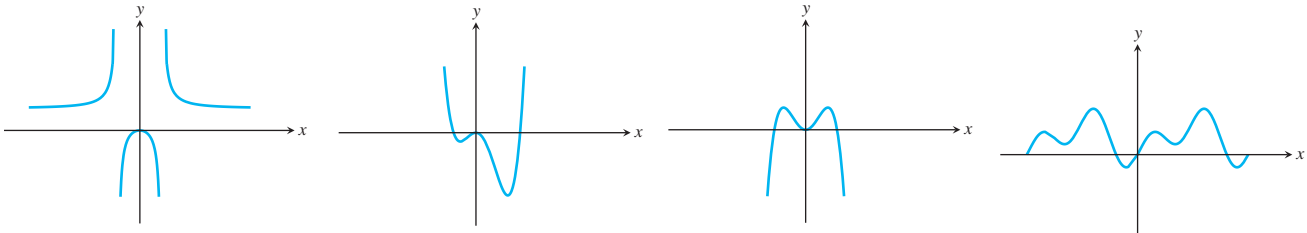


FIGURA 1.22 Algunos ejemplos de gráficas acotadas y no acotadas por arriba y por abajo.

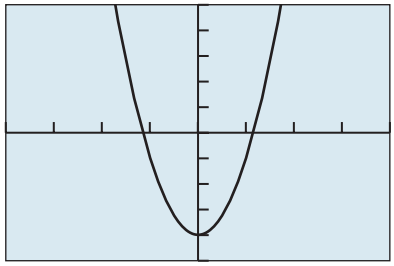
DEFINICIÓN Cota inferior, cota superior y acotamiento

Una función f está **acotada por abajo** si existe algún número b que sea menor o igual a todo número en el rango de f. Cualquiera de esos números b se denomina **cota inferior** de f.

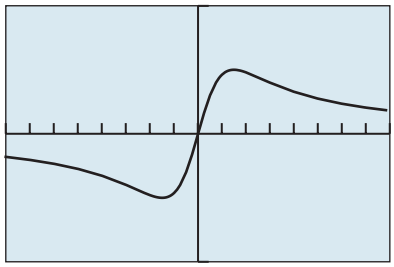
Una función f está **acotada por arriba** si existe algún número B que sea mayor o igual a todo número en el rango de f. Cualquiera de esos números B se denomina **cota superior** de f.

Una función f está **acotada** si está acotada por arriba y por abajo.

Podemos extender la definición anterior a la idea de **acotada en un intervalo**, restringiendo al dominio en consideración en cada parte de la definición al intervalo que deseemos considerar. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ está acotada por arriba en el intervalo $(-\infty, 0)$ y está acotada por abajo en el intervalo $(0, \infty)$.



[–4, 4] por [–5, 5]
a)



[–8, 8] por [–1, 1]
b)

FIGURA 1.23 Las gráficas para el ejemplo 7, ¿cuáles son acotadas y en dónde?

EJEMPLO 7 Comprobación de acotamiento

Identifique cada una de estas funciones como acotadas por abajo, acotada por arriba o acotadas.

a) $w(x) = 3x^2 - 4$ **b)** $p(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

SOLUCIÓN

Resuelva gráficamente

Las dos gráficas se muestran en la figura 1.23. Parece que w está acotada por abajo y p está acotada.

Confirme gráficamente

Podemos confirma que w está acotada por abajo determinando una cota inferior, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 0 && x^2 \text{ es no negativa.} \\ 3x^2 &\geq 0 && \text{Multiplicar por 3.} \\ 3x^2 - 4 &\geq 0 - 4 && \text{Restar 4.} \\ 3x^2 - 4 &\geq -4 \end{aligned}$$

Por tanto, -4 es una cota inferior para $w(x) = 3x^2 - 4$.

Dejamos la verificación de que p está acotada como un ejercicio (ejercicio 77).

Ahora resuelva el ejercicio 37.

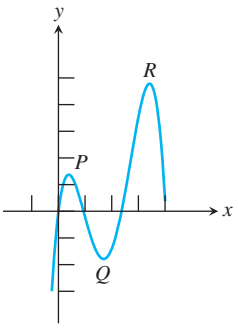


FIGURA 1.24 La gráfica sugiere que f tiene un máximo local en P, un mínimo local en Q y un máximo local en R.

Extremos locales y absolutos

Muchas gráficas están caracterizadas por picos y valles en donde cambian de crecientes a decrecientes y viceversa. Los valores extremos de la función (o *extremos locales*) pueden caracterizarse como *máximos locales* o *mínimos locales*. La distinción puede verse con facilidad de forma gráfica. La figura 1.24 muestra una gráfica con tres extremos locales: máximos locales en el punto P y R, y un mínimo local en Q.

Éste es otro concepto de funciones que es más fácil ver en forma geométrica que describir algebraicamente. Observe que un máximo local no tiene que ser *el* máximo de una función, sólo necesita ser el valor máximo de la función en *algún* pequeño intervalo.

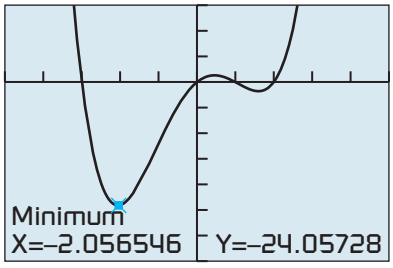
Ya hemos mencionado que el mejor método para analizar el comportamiento creciente o decreciente implica el cálculo. No es sorprendente que sea lo mismo para los extremos locales. En general, en este curso será suficiente con aproximar los extremos locales mediante una calculadora gráfica, aunque en ocasiones será posible una confirmación algebraica, cuando aprendamos más acerca de funciones específicas.

DEFINICIÓN Extremos locales y absolutos (globales)

Un **máximo local** de una función f, es un valor $f(c)$ que es mayor o igual a todos los valores del rango de f en algún intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c)$ es mayor o igual que todos los valores del rango de f, entonces $f(c)$ es el valor **máximo** (o **máximo absoluto**) de f.

Un **mínimo local** de una función f, es un valor $f(c)$ que es menor o igual a todos los valores del rango de f en algún intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c)$ es menor o igual que todos los valores del rango de f, entonces $f(c)$ es el valor **mínimo** (o **mínimo absoluto**) de f.

Los extremos locales también se conocen como **extremos relativos**.



[–5, 5] por [–35, 15]

FIGURA 1.25 Una gráfica de $y = x_4 - 7x^2 + 6x$ (ejemplo 8).

EJEMPLO 8 Identificación de extremos locales

Decida si $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$ tiene máximos locales o mínimos locales. Si es así, determine cada valor máximo local o mínimo local y el valor de x en el que ocurre cada uno.

SOLUCIÓN La gráfica de $y = x^4 - 7x^2 + 6x$ (figura 1.25) sugiere que son dos valores mínimos locales y un valor máximo local. Utilizamos la calculadora gráfica para aproximar los mínimos locales como -24.06 (que ocurre en $x \approx -2.06$) y -1.77 (que aparece en $x \approx 0.46$).

Ahora resuelva el ejercicio 41.

USO DE UN GRAFICADOR PARA DETERMINAR EXTREMOS LOCALES

La mayoría de los modernos graficadores tienen integrada una función que determina el "máximo" y "mínimo", la cual identifica a los extremos locales buscando cambios de signo en Δy. No es fácil determinar extremos locales haciendo acercamientos a ellos, ya que las gráficas tienden a aplanarse y ocultan el comportamiento que está buscando. Si utiliza este método, tenga restringida la ventana, en sentido vertical, para mantener alguna curva en la gráfica.

Simetría

En sentido gráfico, la palabra "simetría" en matemáticas tiene el mismo sentido que en arte: la pintura (en este caso, la gráfica) "se ve igual" cuando se observa en más de una forma. Lo interesante acerca de la simetría en matemáticas es que puede caracterizarse también en forma numérica y algebraica. Buscaremos tres tipos par-

ticulares de simetría, cada una de las cuales, con facilidad, puede verse en una gráfica, una tabla de valores o una fórmula algebraica, una vez que se sabe lo que se busca. En esta sección necesitamos enfatizar la conexión entre los tres modelos (gráfico, numérico y algebraico), y por ello ilustraremos las diferentes simetrías en las tres formas, una junto a las otras.

Simetría con respecto al eje y

Ejemplo: $f(x) = x^2$

Forma gráfica

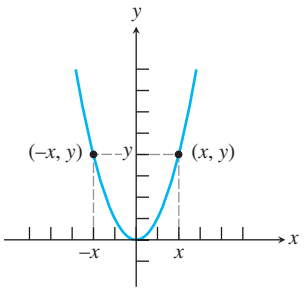


FIGURA 1.26 La gráfica se ve igual a la izquierda del eje y que a la derecha de él.

Forma numérica

x	$f(x)$
−3	9
−2	4
−1	1
1	1
2	4
3	9

Forma algebraica

Para toda x en el dominio de f,

$$f(-x) = f(x).$$

Las funciones con esta propiedad (por ejemplo, x^n, n par) son funciones **pares**.

Simetría con respecto al eje *y*

Ejemplo: $f(x) = y^2$

Forma gráfica

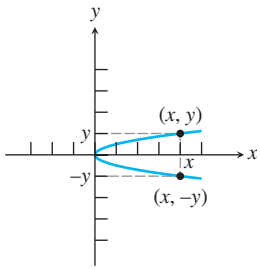


FIGURA 1.27 La gráfica se ve igual arriba del eje x que abajo de él.

Forma numérica

x	y
9	−3
4	−2
1	−1
1	1
4	2
9	3

Forma algebraica

Las gráficas con esta clase de simetría no son funciones (salvo la función cero), pero podemos decir que $(x, -y)$ está en la gráfica siempre que (x, y) esté en la gráfica.

Simetría con respecto al origen
Ejemplo: $f(x) = x^3$

Forma gráfica

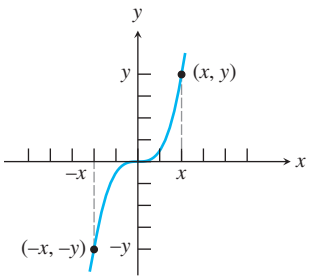


FIGURA 1.28 La gráfica parece verse igual al revés que si se refleja con respecto al eje y.

Forma numérica

x	y
−3	−27
−2	−8
−1	−1
1	1
2	8
3	27

Forma algebraica

Para toda x en el dominio de f,

$$f(-x) = -f(x).$$

Las funciones con esta propiedad (por ejemplo, x^n, n impar) son funciones **impares**.

EJEMPLO 9 Búsqueda de simetría de funciones

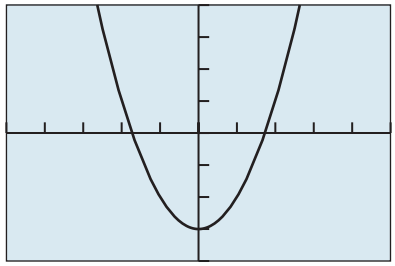
Indique si cada una de las funciones siguientes es impar, par o ninguna de éstas.

a) $f(x) = x^2 - 3$ **b)** $g(x) = x^2 - 2x - 2$ **c)** $h(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$

SOLUCIÓN

a) Resuelva de forma gráfica

La solución gráfica se muestra en la figura 1.29.



[–5, 5] por [–4, 4]

FIGURA 1.29 Esta gráfica parece ser simétrica con respecto al eje y, por lo que conjeturamos que f es una función par.

Confirme algebraicamente

Necesitamos verificar que

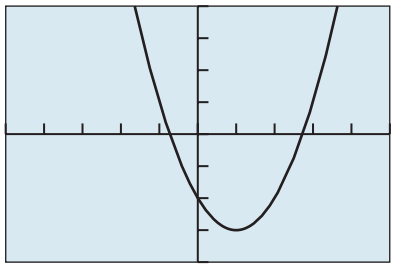
$$f(-x) = f(x)$$

para toda x en el dominio de f

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3$$
$$= f(x)$$

Como esta identidad es verdadera para toda x, en realidad, la función es par.

continúa



[–5, 5] por [–4, 4]

FIGURA 1.30 Esta gráfica no parece ser simétrica con respecto al eje x ni al origen, por lo que suponemos que g no es par ni impar.

b) Resuelva de forma gráfica

La solución gráfica se muestra en la figura 1.30.

Confirme algebraicamente

Necesitamos verificar que

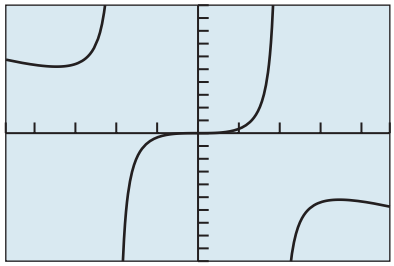
$$g(-x) \neq g(x) \text{ y } g(-x) \neq -g(x).$$

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)^2 - 2(-x) - 2 \\ &= x^2 + 2x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - 2x - 2 \\ -g(x) &= -x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

Por lo que $g(-x) \neq g(x)$ y $g(-x) \neq -g(x)$.

Concluimos que g no es par ni impar.



[–4.7, 4.7] por [–10, 10]

FIGURA 1.31 Esta gráfica parece ser simétrica con respecto del origen, por lo que conjeturamos que h es una función impar.

c) Resuelva de forma gráfica

La solución gráfica se muestra en la figura 1.31.

Confirme algebraicamente

Necesitamos verificar que

$$h(-x) = -h(x)$$

para toda x en el dominio de h.

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{(-x)^3}{4 - (-x)^2} = \frac{-x^3}{4 - x^2} \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

Como esta identidad es verdadera para toda x, excepto ± 2 (que no está en el dominio de h), la función h es impar.

Ahora resuelva el ejercicio 49.

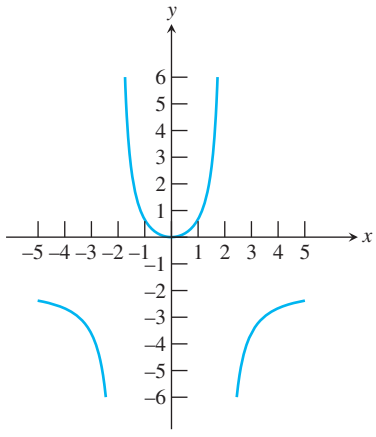


FIGURA 1.32 La gráfica de $f(x) = 2x^2/(4 - x^2)$ tiene dos asíntotas verticales y una asíntota horizontal.

Asíntotas

Considere la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{4 - x^2}$ en la figura 1.32.

La gráfica parece aplanarse a la derecha y a la izquierda, haciéndose cada vez más cercana a la recta horizontal $y = -2$. A esta recta le llamamos *asíntota horizontal*. De forma análoga, la gráfica parece aplanarse cuando va hacia arriba y hacia abajo de la pantalla, haciéndose cada vez más cercana a las rectas verticales $x = -2$ y $x = 2$. A estas rectas les llamamos *asíntotas verticales*. Si superponemos las asíntotas sobre la figura 1.32 con líneas discontinuas, puede ver que forma una especie de plantilla que describe el comportamiento de la gráfica (figura 1.33 en la página siguiente).

Como las asíntotas describen el comportamiento de la gráfica en sus extremos, la definición de una asíntota puede establecerse mejor con la notación de límite. En esta definición, observe que $x \to a^-$ significa "x se aproxima a a por la izquierda", mientras que $x \to a^+$ significa "x se aproxima a a por la derecha".

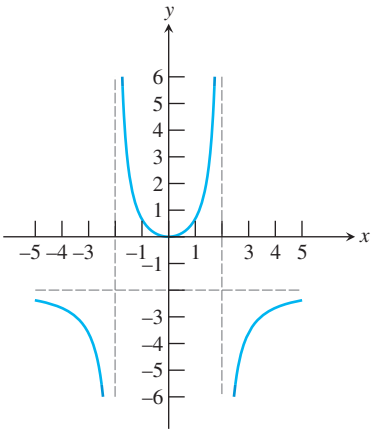


FIGURA 1.33 La gráfica de $f(x) = 2x^2/(4 - x^2)$ con las asíntotas, mostradas con líneas discontinuas.

DEFINICIÓN Asíntotas horizontales y asíntotas verticales

La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función $y = f(x)$, si $f(x)$ se aproxima a b como límite, cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

En la notación de límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función $y = f(x)$, si $f(x)$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$ cuando x se aproxima a a por cualquier dirección.

En notación de límites:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

EJEMPLO 10 Identificación de las asíntotas de una gráfica

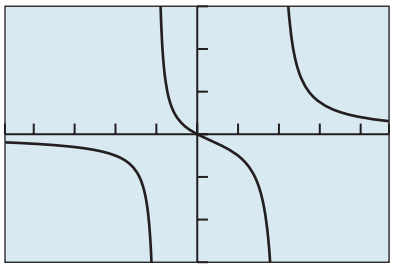
Identifique las asíntotas horizontales o verticales de la gráfica de

$$y = \frac{x}{x^2 - x - 2}.$$

SOLUCIÓN El cociente $x/(x^2 - x - 2) = x/((x + 1)(x - 2))$ está indefinido en $x = -1$ y $x = 2$, lo que los hace sitios probables para asíntotas verticales. La gráfica (figura 1.34) proporciona respaldo, mostrando asíntotas verticales de $x = -1$ y $x = 2$.

Para valores grandes de x, el numerador (un número grande) es sobrepasado por el denominador (un *producto* de *dos* números grandes), lo que sugiere que $\lim_{x\to\infty} x/((x + 1)(x - 2)) = 0$. Esto indicaría una asíntota horizontal de $y = 0$. La gráfica (figura 1.34) proporciona respaldo, mostrando una asíntota horizontal de $y = 0$ cuando $x \to \infty$. Una lógica similar sugiere que $\lim_{x\to-\infty} x/((x + 1)(x - 2)) = -0 = 0$, que indica la misma asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$. Otra vez, la gráfica proporciona apoyo para esto.

Ahora resuelva el ejercicio 57.



[–4.7, 4.7] por [–3, 3]

FIGURA 1.34 La gráfica de $y = x/(x^2 - x - 2)$ tiene asíntotas verticales de $x = -1$ y $x = 2$ y una asíntota horizontal de $y = 0$ (ejemplo 10).

Comportamiento en los extremos

Una asíntota horizontal proporciona una clase de comportamiento en los extremos para una función, ya que muestra cómo la función se comporta cuando se va hacia los "extremos" del eje x. No todas las gráficas se aproximan a rectas, pero es útil considerar *lo que* sucede "al alejarse". Lo ilustramos con unos ejemplos.

EJEMPLO 11 Identificación de funciones mediante el comportamiento en los extremos

Haga corresponder las funciones con las gráficas de la figura 1.35 considerando el comportamiento en los extremos. Todas las gráficas se muestran en la misma ventana de visualización.

a) $y = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$ **b)** $y = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{3x^3}{x^2 + 1}$ **d)** $y = \dfrac{3x^4}{x^2 + 1}$

continúa

SUGERENCIA SOBRE ZOOM (ACERCAMIENTO Y ALEJAMIENTO)

Hacer un alejamiento con frecuencia es una forma adecuada de investigar el comportamiento en los extremos mediante una calculadora graficadora. A continuación, algunas sugerencias útiles para ello:

- Inicie con una ventana "cuadrada".
- Haga Xscl y Yscl iguales a cero para evitar ejes borrosos.
- Asegúrese de que ambos factores de alejamiento sean iguales (estarán así a menos que usted los cambie).

SOLUCIÓN Cuando x es muy grande, el denominador $x^2 + 1$ de cada una de estas funciones es casi igual a x^2. Si en cada denominador reemplazamos $x^2 + 1$ por x^2, y luego reducimos las fracciones, obtenemos funciones más sencillas.

a) $y = \dfrac{3}{x}$ (cercano a $y = 0$ para x grande)

b) $y = 3$

c) $y = 3x$

d) $y = 3x^2$.

Por lo que, buscamos funciones que tienen un comportamiento parecido en los extremos, respectivamente, a las funciones.

a) $y = 0$

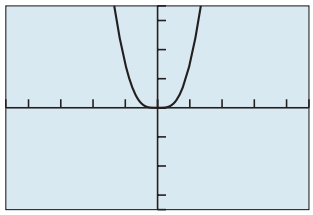
b) $y = 3$

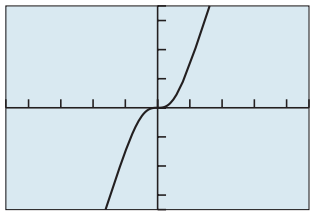
c) $y = 3x$

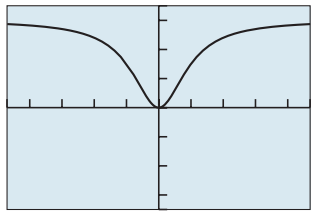
d) $y = 3x^2$.

La gráfica iv) se aproxima a la recta $y = 0$. La gráfica iii) se aproxima a la recta $y = 3$. La gráfica ii) se aproxima a la recta $y = 3x$. La gráfica i) se aproxima a la parábola $y = 3x^2$. Por lo que, a) corresponde a iv), b) corresponde a iii), c) corresponde a ii) y d) corresponde a i).

Ahora resuelva el ejercicio 65.


[–4.7, 4.7] por [–3.5, 3.5]
i)


[–4.7, 4.7] por [–3.5, 3.5]
ii)


[–4.7, 4.7] por [–3.5, 3.5]
iii)

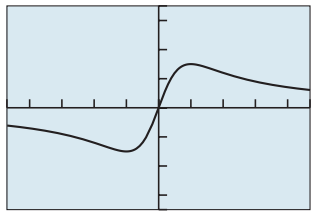

[–4.7, 4.7] por [–3.5, 3.5]
iv)

FIGURA 1.35 Relacione las gráficas con las funciones del ejemplo 11.

Para funciones más complicadas, con frecuencia nos daremos por satisfechos con el conocimiento de si el comportamiento en los extremos es acotado o no acotado en alguna dirección.

REPASO RÁPIDO 1.2 *(Para obtener ayuda, consulte las secciones A.3, R.3 y R.5).*

En los ejercicios del 1 al 4 resuelva la ecuación o desigualdad.

1. $x^2 - 16 = 0$ **2.** $9 - x^2 = 0$

3. $x - 10 < 0$ **4.** $5 - x \le 0$

En los ejercicios del 5 al 10 determine, en forma algebraica, todos los valores de x para los que la expresión algebraica *no* está definida. Apoye su respuesta de forma gráfica.

5. $\dfrac{x}{x - 16}$ **6.** $\dfrac{x}{x^2 - 16}$

7. $\sqrt{x - 16}$ **8.** $\dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - 1}$

9. $\dfrac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{3 - x}}$ **10.** $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.2

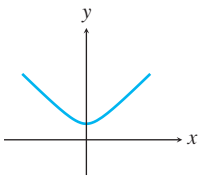
En los ejercicios del 1 al 4 decida si la fórmula determina y como una función de x. Si no lo hace, explique la razón.

1. $y = \sqrt{x-4}$ **2.** $y = x^2 \pm 3$

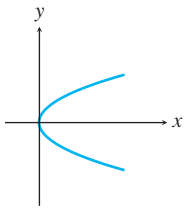
3. $x = 2y^2$ **4.** $x = 12 - y$

En los ejercicios del 5 al 8 utilice el criterio de la recta vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función.

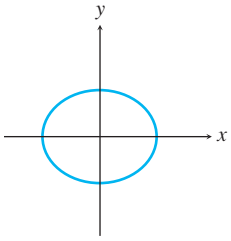
5.



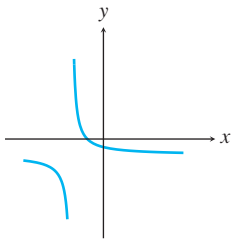
6.



7.



8.



En los ejercicios del 9 al 16 determine, en forma algebraica, el dominio de la función y respalde su respuesta geométricamente.

9. $f(x) = x^2 + 4$ **10.** $h(x) = \dfrac{5}{x-3}$

11. $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x+3)(x-1)}$ **12.** $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x-3}$

13. $g(x) = \dfrac{x}{x^2-5x}$ **14.** $h(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-3}$

15. $h(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{(x+1)(x^2+1)}$ **16.** $f(x) = \sqrt{x^4-16x^2}$

En los ejercicios del 17 al 20 determine el rango de la función.

17. $f(x) = 10 - x^2$ **18.** $g(x) = 5 + \sqrt{4-x}$

19. $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$ **20.** $g(x) = \dfrac{3+x^2}{4-x^2}$

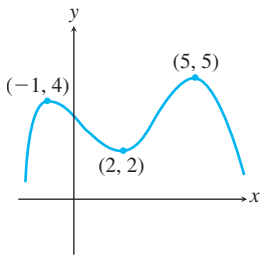
En los ejercicios del 21 al 24, grafique la función e indique si tiene o no un punto de discontinuidad en $x = 0$. Si hay una discontinuidad, diga si es removible o no removible.

21. $g(x) = \dfrac{3}{x}$ **22.** $h(x) = \dfrac{x^3+x}{x}$

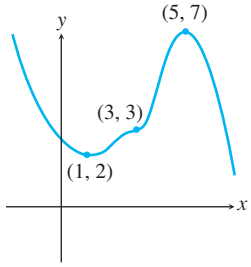
23. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **24.** $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

En los ejercicios del 25 al 28 establezca si cada punto marcado identifica un mínimo local, un máximo local o ninguno de los anteriores. Identifique intervalos en los que la función es decreciente y en donde es creciente.

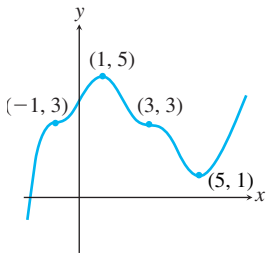
25.



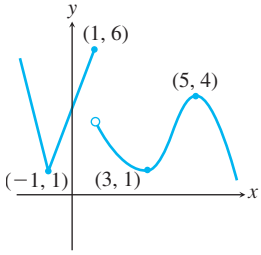
26.



27.



28.



En los ejercicios del 29 al 34 grafique la función e identifique intervalos en los que la función es creciente, decreciente o constante.

29 $f(x) = |x+2| - 1$

30. $f(x) = |x+1| + |x-1| - 3$

31. $g(x) = |x+2| + |x-1| - 2$

32. $h(x) = 0.5(x+2)^2 - 1$

33. $g(x) = 3 - (x-1)^2$

34. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

En los ejercicios del 35 al 40 determine si la función es acotada por arriba, acotada por abajo o está acotada en su dominio.

35. $y = 32$ **36.** $y = 2 - x^2$

37. $y = 2^x$ **38.** $y = 2^{-x}$

39. $y = \sqrt{1-x^2}$ **40.** $y = x - x^3$

En los ejercicios del 41 al 46 utilice un graficador para determinar todos los máximos y mínimos locales, y los valores de x en donde aparecen. Proporcione valores redondeados a dos lugares decimales.

41. $f(x) = 4 - x + x^2$ **42.** $g(x) = x^3 - 4x + 1$

43. $h(x) = -x^3 + 2x - 3$ **44.** $f(x) = (x+3)(x-1)^2$

45. $h(x) = x^2\sqrt{x+4}$ **46.** $g(x) = x|2x+5|$

En los ejercicios del 47 al 54 establezca si la función es impar, par o ninguna de ellas. Apoye su respuesta en forma gráfica y confírmela en forma algebraica.

47. $f(x) = 2x^4$

48. $g(x) = x^3$

49. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

50. $g(x) = \dfrac{3}{1 + x^2}$

51. $f(x) = -x^2 + 0.03x + 5$

52. $f(x) = x^3 + 0.04x^2 + 3$

53. $g(x) = 2x^3 - 3x$

54. $h(x) = \dfrac{1}{x}$

En los ejercicios del 55 al 62 utilice un método de su elección para determinar todas las asíntotas horizontales y verticales de la función.

55. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

56. $q(x) = \dfrac{x - 1}{x}$

57. $g(x) = \dfrac{x + 2}{3 - x}$

58. $q(x) = 1.5^x$

59. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$

60. $p(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

61. $g(x) = \dfrac{4x - 4}{x^3 - 8}$

62. $h(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4}$

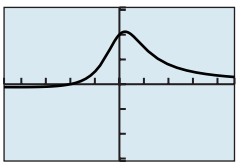
En los ejercicios del 63 al 66 relacione la función con la gráfica correspondiente, considerando el comportamiento en los extremos y las asíntotas. Todas las gráficas se muestran en la misma ventana de visualización.

63. $y = \dfrac{x + 2}{2x + 1}$

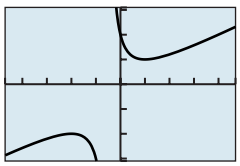
64. $y = \dfrac{x^2 + 2}{2x + 1}$

65. $y = \dfrac{x + 2}{2x^2 + 1}$

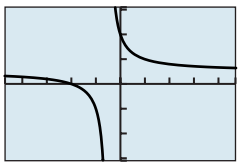
66. $y = \dfrac{x^3 + 2}{2x^2 + 1}$



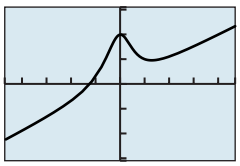
[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
a)



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
c)



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
b)



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
d)

67. ¿Una gráfica puede cruzar su propia asíntota? Las raíces griegas de la palabra "asíntota" significa "no se encuentra", ya que las gráficas se aproximan, pero no cruzan, a sus asíntotas. ¿Cuáles de las funciones siguientes tienen gráficas que *sí* intersecan a sus asíntotas horizontales?

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$

68. ¿Una gráfica puede tener dos asíntotas horizontales? Aunque la mayoría tiene una asíntota horizontal cuando mucho, es posible que una gráfica tenga más de una. ¿Cuál de las funciones siguientes tienen gráficas con más de una asíntota horizontal?

(a) $f(x) = \dfrac{|x^3 + 1|}{8 - x^3}$

(b) $g(x) = \dfrac{|x - 1|}{x^2 - 4}$

(c) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

69. ¿Una gráfica puede intersecar a su propia asíntota vertical?
Grafique la función $f(x) = \dfrac{x - |x|}{x^2} + 1$.

a) La gráfica de esta función no interseca su asíntota vertical. Explique por qué no.

b) Muestre cómo puede agregar un solo punto a la gráfica de f y obtener una gráfica que *sí* interseque su asíntota vertical.

c) ¿La gráfica de la parte b) es la gráfica de una función?

70. Escriba para aprender Explique por qué una gráfica no puede tener más de dos asíntotas horizontales.

Preguntas de examen estandarizado

71. Verdadero o falso La gráfica de la función f está definida como el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$, en donde x está en el dominio de f. Justifique su respuesta.

72. Verdadero o falso Una relación que es simétrica con respecto al eje x no puede ser una función. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 73 al 76 responda la pregunta sin utilizar una calculadora.

73. Opción múltiple ¿Cuál función es continua?

A) El número de niños inscritos en una escuela privada como una función del tiempo.

B) La temperatura exterior como una función del tiempo.

C) El costo del franqueo postal en Estados Unidos como función del peso de la carta.

D) El precio de una acción como función del tiempo.

E) El número de sodas vendidas en un parque de béisbol como una función de la temperatura exterior.

74. Opción múltiple ¿Cuál función *no* es continua?

A) Su altitud como función del tiempo, mientras vuela de Reno a Dallas.

B) El tiempo de viaje de Miami a Pensacola como una función de la velocidad de manejo.

C) El número de pelotas que pueden caber completamente dentro de una caja dada, como función del radio de las pelotas.

D) El área de un círculo como función del radio.

E) El peso de un bebé particular como función del tiempo que tiene de nacido.

75. Función decreciente ¿Cuál función es decreciente?

A) La temperatura exterior como función del tiempo.

B) El promedio industrial Dow Jones como función del tiempo.

C) La presión del aire en la atmósfera terrestre como función de la altura.

D) La población mundial desde 1900 como función del tiempo.

E) La presión del agua en el océano como función de la profundidad.

76. Creciente o decreciente ¿Cuál función no puede clasificarse como creciente ni decreciente?

A) El peso de un bloque de plomo como función del volumen.

B) La altura de una pelota que se ha lanzado hacia arriba como función del tiempo.

C) El tiempo de viaje de Búfalo a Syracuse como función de la velocidad de manejo.

D) El área de un cuadrado como función de la longitud de un lado.

E) La altura de un péndulo que oscila como función del tiempo.

Exploraciones

77. Funciones acotadas Como se prometió en el ejemplo 7 de esta sección, le daremos una oportunidad de probar algebraicamente que $p(x) = x/(1 + x^2)$ está acotada.

a) Grafique la función y determine el entero más pequeño, k, que parezca ser una cota superior.

b) Verifique que $x/(1 + x^2) < k$, demostrando la desigualdad equivalente $kx^2 - x + k > 0$. (Utilice la fórmula cuadrática para mostrar que la cuadrática no tiene ceros reales).

c) Con base en la gráfica, determine el mayor entero k que parezca ser una cota inferior.

d) Verifique que $x/(1 + x^2) > k$, demostrando la desigualdad equivalente $kx^2 - x + k < 0$.

78. Promedio de calificaciones en la Escuela Baylor La Escuela Baylor utiliza una escala móvil para convertir, en sus expedientes académicos, las calificaciones en porcentaje a calificaciones en puntos promedio (CPP). La tabla 1.9 muestra las CPP equivalentes para calificaciones seleccionadas:

Tabla 1.9 Conversión de calificaciones

Calificación (x)	CPP (y)
60	0.00
65	1.00
70	2.05
75	2.57
80	3.00
85	3.36
90	3.69
95	4.00
100	4.28

Fuente: Consejo Escolar de la Escuela Baylor.

a) Considerando la CPP(y) como una función de la calificación promedio (x), ¿es creciente, decreciente, constante o ninguna de éstas?

b) Elabore una tabla que muestre el *cambio* ($\triangle y$) en la CPP conforme se mueve hacia abajo en la lista (consulte la exploración 1).

c) Construya una tabla que muestre el cambio en $\triangle y$ conforme se mueve hacia abajo en la lista (es decir, $\triangle\triangle y$). Considerando el *cambio* ($\triangle y$) en la CPP como una función de la calificación promedio (x), ¿es creciente, decreciente, constante o ninguna de éstas?

d) En general, ¿qué puede decir acerca de la forma de la gráfica, si y es una función creciente de x y $\triangle y$ es una función decreciente de x?

e) Haga un bosquejo de la gráfica de una función y de x, tal que y sea una función decreciente de x y $\triangle y$ sea una función creciente de x.

79. Actividad en equipo Bosqueje una gráfica de una función f cuyo dominio sean todos los números reales y que satisfaga todas las condiciones siguientes:

a) f es continua en toda x;

b) f es creciente en $(-\infty, 0]$ y en $[3, 5]$;

c) f es decreciente en $[0, 3]$ y en $[5, \infty)$;

d) $f(0) = f(5) = 2$;

e) $f(3) = 0$.

80. Actividad en equipo Bosqueje una gráfica de una función f cuyo dominio sea todos los números reales y que satisfaga todas las condiciones siguientes:

a) f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$;

b) f tiene un punto de discontinuidad removible en $x = 0$;

c) f tiene una asíntota horizontal en $x = 0$;

d) $f(0) = 0$;

e) f tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

81. Actividad en equipo Bosqueje una gráfica de una función f cuyo dominio sea todos los números reales y que satisfaga todas las condiciones siguientes:

a) f es continua en toda x;

b) f es una función par;

c) f es creciente en $[0, 2]$ y decreciente en $[2, \infty)$;

d) $f(2) = 3$.

82. Actividad en equipo Organice a todos sus compañeros de clase en grupos de dos o tres. Bosqueje una gráfica de una función, pero no la muestre a los otros miembros de su grupo. Mediante el lenguaje de funciones (como en los ejercicios del 79 a 81), describa su función tan completamente como pueda. Intercambie las descripciones con los otros miembros de su grupo y vea si puede reproducir la gráfica de cada uno de los otros.

Ampliación de las ideas

83. Una función que está acotada por arriba tiene un número de cotas superiores, pero siempre existe una *mínima cota superior*, por ejemplo, una cota superior que es menor que todas las demás. Esta mínima cota superior puede o no estar en el rango de f. Para cada una de las funciones siguientes, determine la cota superior mínima e indique si está o no en el rango de la función.

a) $f(x) = 2 - 0.8x^2$

b) $g(x) = \dfrac{3x^2}{3 + x^2}$

c) $h(x) = \dfrac{1 - x}{x^2}$

d) $p(x) = 2 \operatorname{sen}(x)$

e) $q(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2x + 1}$

84. Escriba para aprender Una función continua f tiene como dominio todos los números reales. Si $f(-1) = 5$ y $f(1) = -5$, explique por qué tiene al menos un cero en el intervalo $[-1, 1]$. (Esto se generaliza a una propiedad de las funciones continuas conocida como Teorema del Valor Intermedio.)

85. Demostración de un teorema Muestre que la gráfica de toda función impar cuyo dominio sean todos los números reales, debe pasar por el origen.

86. Determinación del rango Grafique la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ en la ventana $[-6, 6]$ por $[-2, 2]$.

a) ¿Cuál es la aparente asíntota horizontal de la gráfica?

b) Con base en su gráfica, determine el rango aparente de f.

c) Muestre algebraicamente que $-1 \le \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} < 1.5$ para toda x, y así confirme su conjetura en la parte b).

1.3 Doce funciones básicas

Aprenderá acerca de...

- Qué pueden decirnos las gráficas
- Doce funciones básicas
- El análisis gráfico de funciones

. . . porque

Conforme continúe el estudio de matemáticas, encontrará que las doce funciones básicas que se presentan aquí aparecerán una y otra vez. Conociendo sus propiedades básicas, las reconocerá cuando las vea.

Qué pueden decirnos las gráficas

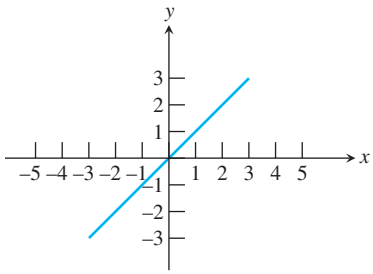
La sección anterior nos proporcionó un vocabulario para hablar acerca de las funciones y sus propiedades. Tenemos todo el libro por delante para estudiar con detalle estas funciones, pero en esta sección queremos establecer un contexto apropiado mediante la *visualización* de las gráficas de doce funciones "básicas" que están disponibles en su calculadora graficadora.

Encontrará que algunos atributos de la función tales como dominio, rango, continuidad, asíntotas, máximos y mínimos, creciente, decreciente y comportamiento en los extremos, son tanto gráficos como algebraicos. Además, las claves visuales con frecuencia son más fáciles de observar que las algebraicas.

En los siguientes capítulos aprenderá más acerca de las propiedades algebraicas que hacen que estas funciones se comporten como lo hacen. Sólo hasta entonces será capaz de *probar* lo que es visualmente aparente en estas gráficas.

Doce funciones básicas

La función identidad

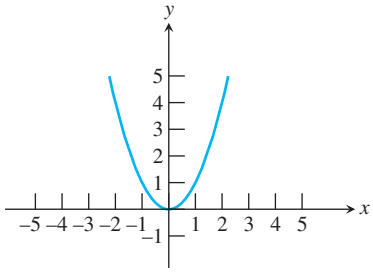


$f(x) = x$

Hecho interesante: Ésta es la única función que actúa sobre todo número real y lo deja igual.

FIGURA 1.36

Función cuadrática

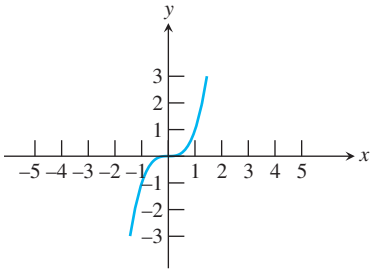


$f(x) = x^2$

Hecho interesante: La gráfica de esta función, denominada parábola, tiene una propiedad de reflexión que es útil en la fabricación de faros y discos de satélites.

FIGURA 1.37

Función cúbica

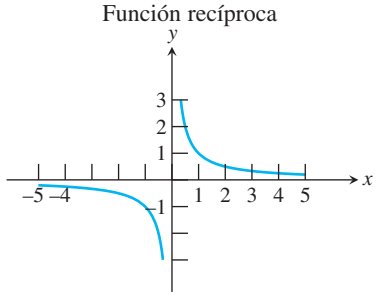


$f(x) = x^3$

Hecho interesante: El origen se denomina "punto de inflexión" para esta curva, ya que, en ese punto, la gráfica cambia de curvatura.

FIGURA 1.38

Función recíproca

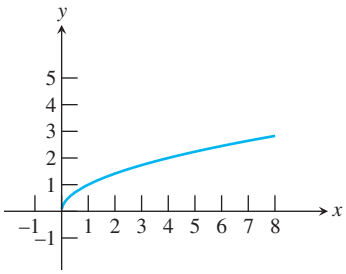


$f(x) = \dfrac{1}{x}$

Hecho interesante: Esta curva, denominada hipérbola, también tiene una propiedad de reflexión que es útil en discos de satélites.

FIGURA 1.39

Función raíz cuadrada

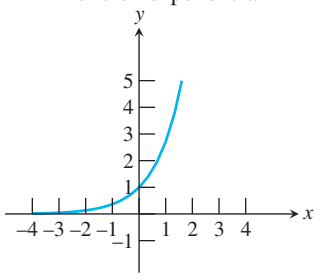


$f(x) = \sqrt{x}$

Hecho interesante: Ponga cualquier número positivo en su calculadora. Saque la raíz cuadrada. Luego nuevamente saque raíz cuadrada, luego otra vez, y así sucesivamente. A la larga siempre obtendrá 1.

FIGURA 1.40

Función exponencial

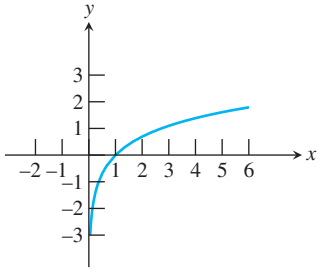


$f(x) = e^x$

Hecho interesante: El número e es un número irracional (al igual que π) que aparece en una variedad de aplicaciones. El uso de los símbolos e y π fue popularizado por el gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

FIGURA 1.41

Función logaritmo natural

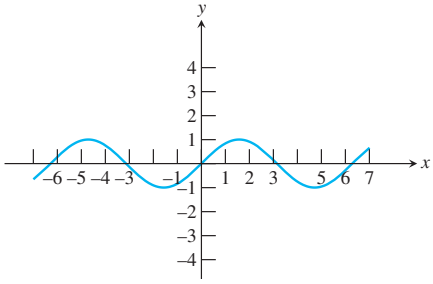


$f(x) = \ln x$

Hecho interesante: Esta función crece muy lentamente. Si en el eje x y el eje y se colocasen escalas con longitudes de una pulgada, tendría que recorrer más de dos millas y media a lo largo de la curva para alejarse un pie por arriba del eje x

FIGURA 1.42

Función seno

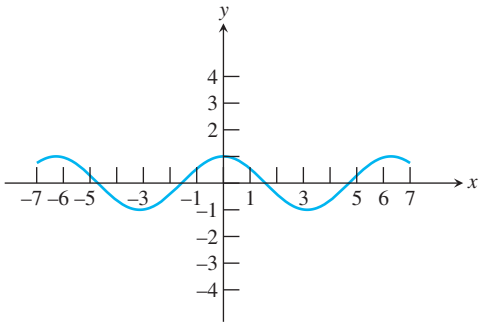


$f(x) = \text{sen } x$

Hecho interesante: Esta función y los senos de su cráneo derivan sus nombres de una raíz común, el término en latín para "bahía". Esto se debe a un error cometido en el siglo XII por Robert de Chester, quien tradujo una palabra incorrectamente a partir de un manuscrito árabe.

FIGURA 1.43

Función coseno

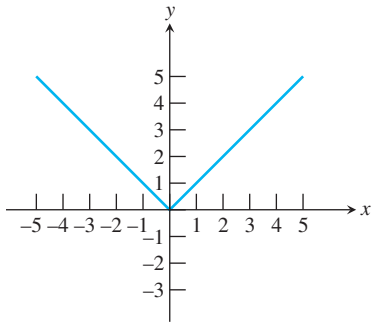


$f(x) = \cos x$

Hecho interesante: Los extremos locales de la función coseno aparecen exactamente en los ceros de la función seno, y viceversa.

FIGURA 1.44

Función valor absoluto

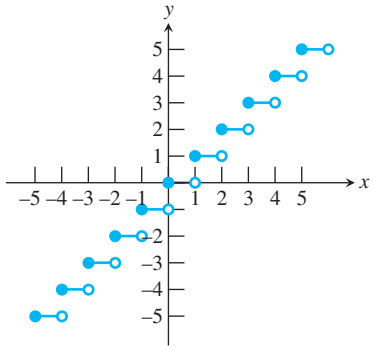


$f(x) = |x| = \text{abs}\,(x)$

Hecho interesante: Esta función tiene un cambio abrupto de dirección (una "esquina") en el origen, mientras que todas las funciones anteriores son "suaves" en sus dominios.

FIGURA 1.45

Función máximo entero

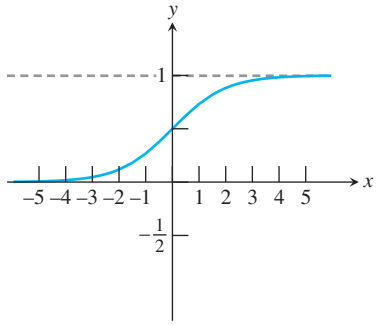


$f(x) = \text{int}\,(x)$

Hecho interesante: Esta función tiene una discontinuidad de salto en cada valor entero de x. Las funciones que se parecen a ésta se denominan *funciones escalonadas*.

FIGURA 1.46

Función logística



$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Hecho interesante: Hay dos asíntotas horizontales, el eje x y la recta $y = 1$. Esta función proporciona un modelo para muchas aplicaciones en biología y negocios.

FIGURA 1.47

EJEMPLO 1 Búsqueda de dominios

a) Nueve de las funciones tienen como dominio el conjunto de todos los números reales, ¿cuáles tres no?

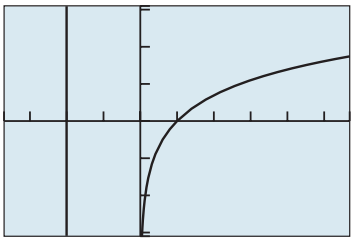
b) Una de las funciones tiene como dominio el conjunto de todos los números reales excepto 0, ¿cuál es? y ¿por qué el cero no está en su dominio?

c) ¿Cuáles dos funciones no tienen números negativos en sus dominios? De estas dos, ¿cuál está definida en cero?

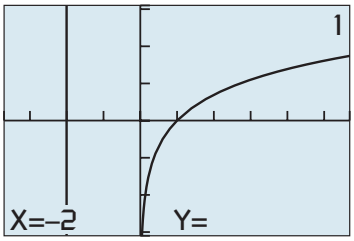
SOLUCIÓN

a) Imagine que arrastra una recta vertical a lo largo del eje x. Si la función tiene como dominio el conjunto de todos los números reales, entonces la recta siempre intersecará a la gráfica. La intersección puede aparecer fuera de la pantalla, pero la función TRACE de la calculadora mostrará la coordenada y, si existe alguna. Examinando las gráficas de las figuras 1.39, 1.40 y 1.42, conjeturamos que hay rectas verticales que no intersecan a la curva.

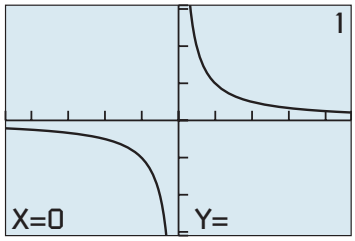
continúa



[–3.7, 5.7] por [–3.1, 3.1]
a)



[–3.7, 5.7] por [–3.1, 3.1]
b)



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
c)

FIGURA 1.48 a) Una recta vertical que pasa por -2 en el eje x, parece no tocar a la gráfica de $y = \ln x$. b) El uso de TRACE confirma que -2 no está en el dominio. c) El uso de Trace en $x = 0$ confirma que 0 no está en el dominio de $y = 1/x$ (ejemplo 1).

El uso de la función TRACE en las coordenadas x que se sospechan confirman nuestra conjetura (figura 1.48). Las funciones son $y = 1/x$, $y = \sqrt{x}$ y $y = \ln x$.

b) La función $y = 1/x$, con una asíntota vertical en $x = 0$, está definida para todos los números reales excepto 0. Esto se explica algebraicamente por medio del hecho de que la división entre cero no está definida.

c) Las funciones $y = \sqrt{x}$ y $y = \ln x$ no tienen números negativos en sus dominios (ya sabíamos eso acerca de la función raíz cuadrada). Aunque 0 está en el dominio de $y = \sqrt{x}$, podemos ver que el cero no está en el dominio de $y = \ln x$. En el capítulo 3 veremos la razón algebraica para esto.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

EJEMPLO 2 Buscando continuidad

Sólo dos de las doce funciones tienen puntos de discontinuidad, ¿estos puntos están en el dominio de la función?

SOLUCIÓN Todas las funciones tienen gráficas continuas. excepto $y = 1/x$ y $y = \text{ent}(x)$.

La gráfica de $y = 1/x$ claramente tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$ (figura 1.39). En el ejemplo 1 vimos que 0 no está en el dominio de la función. Como $y = 1/x$ es continua en todos punto *de su dominio*, se denomina **función continua**.

La gráfica de $y = \text{ent}(x)$ tiene una discontinuidad en cada valor entero de x (figura 1.46). Como esta función tiene discontinuidades en puntos de su dominio, *no* es una función continua.

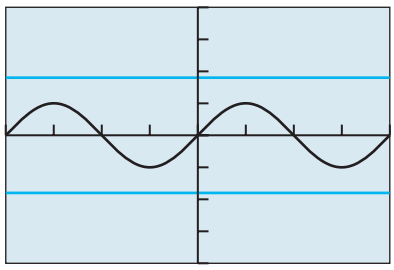
Ahora resuelva el ejercicio 15.

EJEMPLO 3 Buscando acotamiento

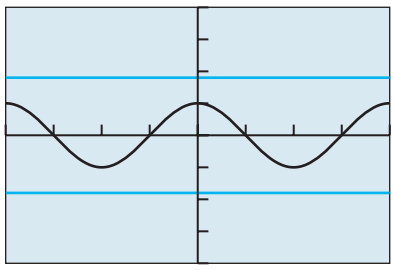
Sólo tres de las doce funciones básicas son acotadas (por arriba y por abajo), ¿cuáles son?

SOLUCIÓN Una función que es acotada debe tener una gráfica que esté completamente entre dos rectas horizontales. Las funciones seno, coseno y logística tienen esta propiedad (figura 1.49). Parece que la gráfica de $y = \sqrt{x}$ también puede tener esta propiedad, pero sabemos que el comportamiento en los extremos de la función raíz cuadrada es no acotado: $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$, así que en realidad sólo es acotada por abajo. En el capítulo 4, aprenderá por qué las funciones seno y coseno están acotadas.

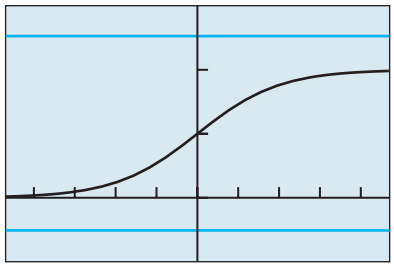
Ahora resuelva el ejercicio 17.



[-2π, 2π] por [–4, 4]
a)



[-2π, 2π] por [–4, 4]
b)



[–4.7, 4.7] por [–0.5, 1.5]
c)

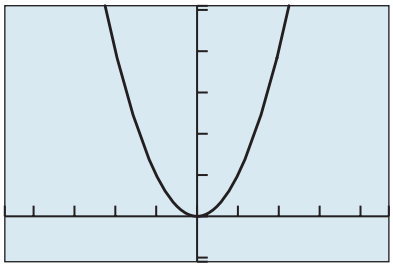
FIGURA 1.49 Las gráficas de $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$ y $y = 1/(1 + e^{-x})$ están completamente entre dos rectas horizontales y, por lo tanto, son gráficas de funciones acotadas (ejemplo 3).

EJEMPLO 4 Buscando simetría

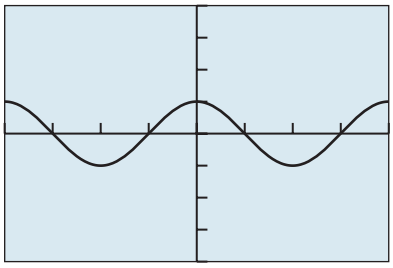
Tres de las doce funciones básicas son pares, ¿cuáles son?

SOLUCIÓN Recuerde que la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y. Tres de las funciones exhiben la simetría pedida: $y = x^2$, $y = \cos x$ y $y = |x|$ (figura 1.50).

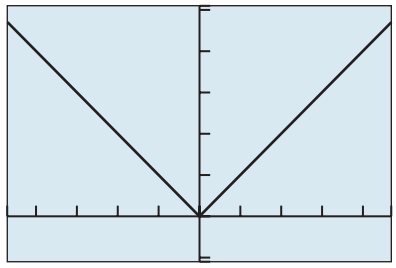
Ahora resuelva el ejercicio 19.



[−4.7, 4.7] por [−1.1, 5.1]
a)



[−2π, 2π] por [−4, 4]
b)



[−4.7, 4.7] por [−1.1, 5.1]
c)

FIGURA 1.50 Las gráficas de $y = x^2$, $y = \cos x$ y $y = |x|$ son simétricas con respecto al eje y, lo que indica que las funciones son pares (ejemplo 4).

Análisis gráfico de funciones

Podríamos seguir explorando las doce funciones básicas como en los primeros cuatro ejemplos, pero también queremos hacer notar no hay necesidad de que nos restrinjamos a las doce básicas. Podemos cambiar ligeramente las funciones básicas y ver qué sucede a sus gráficas, y de este modo obtener más conocimiento visual con respecto a la forma en que se comportan las funciones.

EJEMPLO 5 Análisis gráfico de una función

Grafique la función $y = (x - 2)^2$. Luego responda las preguntas siguientes:

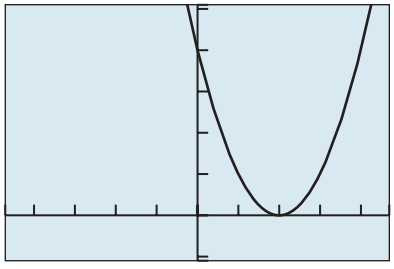
a) ¿En qué intervalo la función es creciente? ¿En qué intervalo es decreciente?

b) ¿La función es par, impar o ninguna de éstas?

c) ¿La función tiene extremos (máximos o mínimos)?

d) ¿Cómo se relaciona su gráfica con la correspondiente a la función básica $y = x^2$?

SOLUCIÓN La gráfica se muestra en la figura 1.51.



[–4.7, 4.7] por [–1.1, 5.1]

FIGURA 1.51 La gráfica de $y = (x - 2)^2$ (ejemplo 5).

continúa

a) La función es creciente si su gráfica asciende cuando se mueve de izquierda a derecha. Vemos que es creciente en el intervalo $[2, \infty)$. La función es decreciente si desciende cuando se mueve de izquierda a derecha. Vemos que es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2]$.

b) La gráfica no es simétrica con respecto al eje y, ni simétrica con respecto al origen. La función no es par ni impar.

c) Sí, vemos que la función tiene un valor mínimo de 0 en $x = 2$ (lo confirma el siguiente hecho algebraico: $(x - 2)^2 \geq 0$ para toda x).

d) Vemos que la gráfica de $y = (x - 2)^2$ es simplemente la gráfica de $y = x^2$, movida dos unidades hacia la derecha.

Ahora resuelva el ejercicio 35.

EXPLORACIÓN **Cómo buscar las asíntotas**

1. Dos de las funciones básicas tienen asíntotas verticales en $x = 0$, ¿cuáles dos?
2. Construya una nueva función sumando estas funciones. ¿La nueva función tiene una asíntota vertical en $x = 0$?
3. Tres de las funciones básicas tienen asíntotas horizontales en $y = 0$, ¿cuáles tres?
4. Forme una nueva función sumando estas tres funciones, ¿la nueva función tienen una asíntota horizontal en $y = 0$?
5. Grafique $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/(2x^2 - x)$ y $h(x) = f(x) + g(x)$. ¿$h(x)$ tiene una asíntota horizontal en $x = 0$?

EJEMPLO 6 Identificación de una función definida por partes

¿Cuál de las doce funciones básicas tiene la definición **por partes** siguiente, en intervalos separados de su dominio?

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Puede reconocer esto como la definición de la función valor absoluto (capítulo R). O puede razonar que la gráfica de esta función debe parecerse a la recta $y = x$ a la derecha del eje y, pero como la gráfica de la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y. Ésta es una descripción perfecta de la gráfica del valor absoluto de la figura 1.45. De cualquier manera, reconocemos esto como una definición por partes de $f(x) = |x|$.

Ahora resuelva el ejercicio 45.

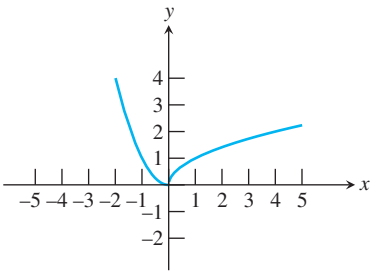


FIGURA 1.52 Una función definida por partes (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Cómo definir una función por partes

Por medio de las funciones básicas de esta sección construya una definición por partes para la función cuya gráfica se muestra en la figura 1.52. ¿Su función es continua?

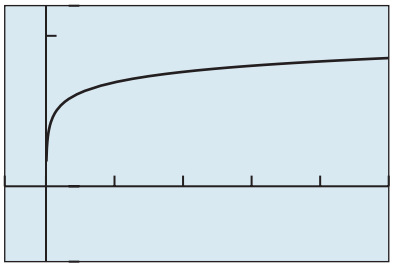
SOLUCIÓN Ésta parece ser la gráfica de $y = x^2$ a la izquierda de $x = 0$ y la gráfica de $y = \sqrt{x}$ a la derecha de $x = 0$. Por lo tanto, podemos definirla por partes como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función es continua.

Ahora resuelva el ejercicio 47.

Podemos avanzar mucho en la comprensión del comportamiento de una función observando su gráfica (continuaremos con este tema en los ejercicios y luego lo revisaremos a lo largo del libro). Sin embargo, no puede lograr una *total* comprensión de una función observando su gráfica, como lo muestra el ejemplo 8.



[–600, 5000] por [–5, 12]

FIGURA 1.53 La gráfica de $y = \ln x$ aún parece tener una asíntota horizontal, a pesar de que la ventana es mucho mayor que en la figura 1.42 (ejemplo 8).

EJEMPLO 8 Buscando una asíntota horizontal

¿La gráfica de $y = \ln x$ (figura 1.42) tiene una asíntota horizontal?

SOLUCIÓN *Parece* que, en la figura 1.42, en realidad existiese una asíntota horizontal a la que la gráfica se aproxima por abajo. Si seleccionamos una ventana mucho más grande (figura 1.53), aún parece que tiene una asíntota. De hecho, podríamos seguir, todo el día, haciendo alejamientos de la función y *siempre* parecería que se aproxima a alguna asíntota horizontal, pero no es así. En el capítulo 3 mostraremos algebraicamente que el comportamiento a la larga de esta función es $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$, de modo que su gráfica, en algún momento, estará por arriba del nivel de cualquier recta horizontal. Esto descarta cualquier asíntota horizontal, aunque no existe evidencia *visual* de este hecho que podamos observar viendo su gráfica.

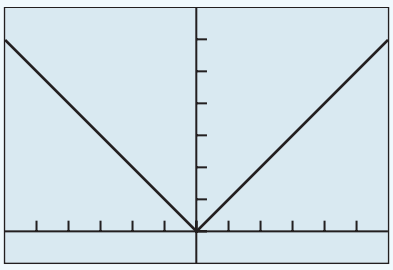
Ahora resuelva el ejercicio 55.

EJEMPLO 9 Análisis de una función

Lleve a cabo un análisis completo de la función básica $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN

FUNCIÓN BÁSICA Función valor absoluto



[–6, 6] por [–1, 7]

FIGURA 1.54 La gráfica de $f(x) = |x|$.

$f(x) = |x|$
Dominio: Todos los números reales
Rango: $[0, \infty)$
Continua
Decreciente en $(-\infty, 0]$; creciente en $[0, \infty)$
Simétrica con respecto del eje y (una función par)
Acotada por abajo
Mínimo local en $(0, 0)$
No tiene asíntotas horizontales
No tiene asíntotas verticales
Comportamiento en los extremos: $\lim_{x\to-\infty} |x| = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} |x| = \infty$

Ahora resuelva el ejercicio 67.

REPASO RÁPIDO 1.3 *(Para obtener ayuda, consulte las secciones R.1, R.2, 3.1 y 3.3).*

En los ejercicios del 1 al 10 evalúe la expresión sin utilizar una calculadora.

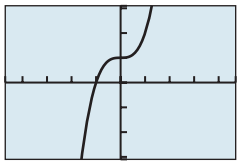
1. $|-59.34|$
2. $|5 - \pi|$
3. $|\pi - 7|$
4. $\sqrt{(-3)^2}$
5. $\ln(1)$
6. e^0
7. $(\sqrt[3]{3})^3$
8. $\sqrt[3]{(-15)^3}$
9. $\sqrt[3]{-8^2}$
10. $|1 - \pi| - \pi$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.3

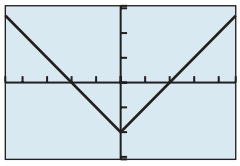
En los ejercicios del 1 al 12 cada gráfica es una ligera variación de una de las doce funciones básicas descritas en esta sección. Relacione la gráfica con una de las doce funciones (a) a (l), y luego respalde su respuesta comprobando la gráfica en su calculadora (todas las gráficas se muestran en la ventana $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$).

a) $y = -\text{sen } x$
b) $y = \cos x + 1$
c) $y = e^x - 2$
d) $y = (x + 2)^3$
e) $y = x^3 + 1$
f) $y = (x - 1)^2$
g) $y = |x| - 2$
h) $y = -1/x$
i) $y = -x$
j) $y = -\sqrt{x}$
k) $y = \text{ent}(x + 1)$
l) $y = 2 - 4/(1+e^{-x})$

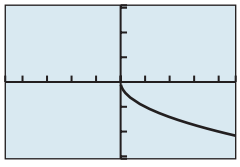
1.



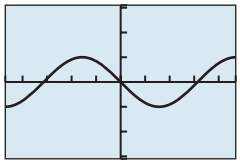
2.



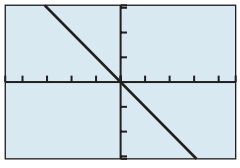
3.



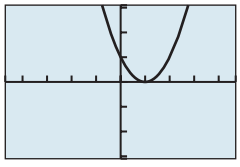
4.



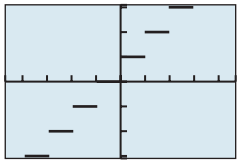
5.



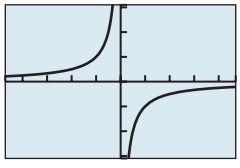
6.



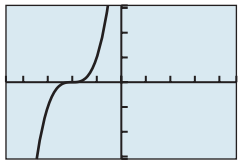
7.



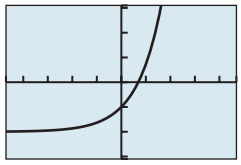
8.



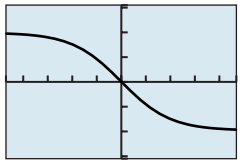
9.



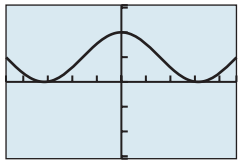
10.



11.



12.



En los ejercicios del 13 al 18 identifique cuáles de las funciones mostradas en los ejercicios 1 al 12 se ajustan a la descripción dada.

13. La función cuyo dominio excluye al cero.

14. La función cuyo dominio consiste en todos los números reales no negativos.

15. Las dos funciones que tienen al menos un punto de discontinuidad.

16. La función que no es una *función continua*.

17. Las seis funciones que están acotadas por abajo.

18. Las cuatro funciones que están acotadas por arriba.

En los ejercicios del 19 al 28 identifique cuáles de las doce funciones básicas cumplen la descripción dada.

19. Las cuatro funciones que son impares.

20. Las seis funciones que son crecientes en todo su dominio.

21. Las tres funciones que son decrecientes en el intervalo $(-\infty, 0)$.

22. Las tres funciones con un número infinito de extremos locales.

23. Las tres funciones sin ceros.

24. Las tres funciones con rango {todos los números reales}.

25. Las cuatro funciones que *no* tienen comportamiento en los extremos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

26. Las tres funciones con comportamiento en los extremos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

27. Las cuatro funciones cuyas gráficas se ven iguales cuando se da vuelta y luego se dobla con respecto del eje y.

28. Las dos funciones cuyas gráficas son idénticas salvo por un corrimiento horizontal.

En los ejercicios del 29 al 34 utilice su calculadora graficadora para producir una gráfica de la función. Luego determine el dominio y el rango de la función observando su gráfica.

29. $f(x) = x^2 - 5$ **30.** $g(x) = |x - 4|$

31. $h(x) = \ln(x + 6)$ **32.** $k(x) = 1/x + 3$

33. $s(x) = \text{ent}(x/2)$ **34.** $p(x) = (x + 3)^2$

En los ejercicios del 35 al 42 grafique la función y responda las siguientes preguntas:

a) ¿En qué intervalo, si lo hay, la función es creciente? ¿Y decreciente?

b) ¿La función es par, impar o ninguna de éstas?

c) Proporciones los extremos de la función, si los tiene.

d) ¿Cómo se relaciona la gráfica con una de las doce funciones básicas?

35. $r(x) = \sqrt{x - 10}$ **36.** $f(x) = \text{sen}\,(x) + 5$

37. $f(x) = 3/(1+e^{-x})$ **38.** $q(x) = e^x + 2$

39. $h(x) = |x| - 10$ **40.** $g(x) = 4\cos(x)$

41. $s(x) = |x-2|$ **42.** $f(x) = 5 - \text{abs}\,(x)$

43. Determine las asíntotas horizontales para la gráfica que se muestra en el ejercicio 11.

44. Determine las asíntotas horizontales para la gráfica de $f(x)$ en el ejercicio 37.

En los ejercicios del 45 al 52 elabore un bosquejo de la gráfica de la función definida por partes (intente hacerlo sin calculadora). En cada caso, proporcione, si los hay, puntos de discontinuidad.

45. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **46.** $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \le 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

47. $h(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ **48.** $w(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \le 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **50.** $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

51. $f(x) = \begin{cases} -3 - x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ |x| & \text{si } -1 \le x < 1 \\ \text{ent}\,(x) & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

53. Escriba para aprender La función $f(x) = \sqrt{x^2}$ es una de las doce funciones básicas escrita en otra forma.

a) Grafique la función e identifique cuál función básica es.

b) Explique algebraicamente por qué las dos funciones son iguales.

54. Descubra el comportamiento oculto La función $g(x) = \sqrt{x^2 + 0.0001} - 0.01$ *no* es una de las doce funciones básicas escrita de otra forma.

a) Grafique la función e identifique la función básica a la que se parece.

b) Verifique numéricamente que no es la función básica a la que se parece.

55. Escriba para aprender La función $f(x) = \ln(e^x)$ es una de nuestras doce funciones básicas, escrita de otra forma.

a) Grafique la función e identifique cuál función básica es.

b) Explique cómo la equivalencia de las dos funciones en a) muestra que la función logaritmo natural *no* está acotada por arriba (aunque *parezca* que está acotada por arriba en la figura 1.42).

56. Escriba para aprender Sea $f(x)$ la función que proporciona el costo, en centavos, de enviar por correo una carta que pesa x onzas. A partir de junio de 2002, el costo es de 37 centavos por una carta que pesa hasta una onza, más 23 centavos por cada onza o fracción de onza adicional.

a) Haga un bosquejo de la gráfica de $f(x)$.

b) ¿Cuál es la semejanza de esta función con la función máximo entero? ¿En qué es diferente?

57. Análisis de una función Ponga su calculadora en modo DOT y grafique la función máximo entero, $y = \text{ent}(x)$ [en inglés es int(x)], en la ventana $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$. Luego complete el siguiente análisis:

FUNCIÓN BÁSICA
Función máximo entero

$f(x) = \text{ent}(x)$

Dominio:
Rango:
Continuidad:
Comportamiento creciente/decreciente:
Simetría:
Acotamiento:
Extremos locales:
Asíntotas horizontales:
Asíntotas verticales:
Comportamiento en los extremos:

Preguntas de examen estandarizado

58. Verdadero o falso La función máximo entero tiene una función inversa. Justifique su respuesta.

59. Verdadero o falso La función logística tiene dos asíntotas horizontales. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 60 al 63 puede utilizar una calculadora gráfica para responder la pregunta.

60. Opción múltiple ¿Cuál función tiene rango {todos los números reales}?

A) $f(x) = 4 + 1\text{n}\, x$

B) $f(x) = 3 - 1/x$

C) $f(x) = 5/(1 + e^{-x})$

D) $f(x) = \text{ent}\,(x - 2)$

E) $f(x) = 4\cos x$

61. Opción múltiple ¿Cuál función está acotada por arriba y por abajo?

A) $f(x) = x^2 - 4$

B) $f(x) = (x - 3)^3$

C) $f(x) = 3e^x$

D) $f(x) = 3 + 1/(1 + e^{-x})$

E) $f(x) = 4 - |x|$

62. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es igual a la función con dominio restringido $f(x) = \text{ent}\,(x)$, $0 \leq x < 2$?

A) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$

B) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$

C) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

D) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

E) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 + x & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

63. Opción múltiple Funciones crecientes ¿Cuál función es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$?

A) $f(x) = \sqrt{3 + x}$

B) $f(x) = \text{ent}\,(x)$

C) $f(x) = 2x^2$

D) $f(x) = \text{sen}(x)$

E) $f(x) = 3/(1 + e^{-x})$

Exploraciones

64. ¿Cuál es mayor? Para valores positivos de x, queremos comparar los valores de las funciones x^2, x y $\sqrt{x}$.

a) ¿Cómo las clasifica de mayor a menor?

b) Grafique las tres funciones en la ventana de visualización [0, 30] por [0, 20]. ¿La gráfica confirma su respuesta en a)?

c) Ahora grafique las tres funciones en la ventana de visualización [0, 2] por [0, 1.5].

d) Escriba una respuesta cuidadosa a la pregunta en a) que tome en cuenta todos los valores positivos de x.

65. Pares e impares Existen cuatro funciones impares y tres pares en la galería de doce funciones básicas. Después de multiplicar por pares estas funciones, en diferentes combinaciones, y explorar las gráficas de los productos, haga una conjetura acerca de la simetría de:

a) un producto de dos funciones impares;

b) un producto de dos funciones pares;

c) un producto de una función impar y una función par.

66. Actividad en equipo Asigna a cada estudiante de la clase el nombre de una de las doce funciones básicas, pero de forma confidencial de modo que ningún otro estudiante sepa el "nombre" del otro (es posible dar la misma función a varios estudiantes, pero todas las funciones deben utilizarse al menos una vez). Haga que cada estudiante haga una oración que lo presente a la clase que revele algo personal "acerca de lo que realmente me identifica". El resto de los estudiantes escriben entonces su suposición acerca de la identidad de la función. Las sugerencias deben ser sutiles e inteligentemente antropomórficas (por ejemplo, la función valor absoluto se expresaría como "Tengo una sonrisa muy aguda" es sutil e inteligente, mientras que "Soy absolutamente valiosa" no es muy sutil).

67. Pizza de pepperoni Para un proyecto de estadística, un estudiante contó el número de rebanadas de pepperoni en pizzas de varios tamaños en una pizzería local, y compiló los datos en la siguiente tabla:

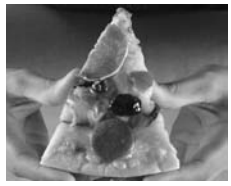


Tabla 1.10

Tipo de pizza	Radio	Piezas de pepperoni
Personal	4"	12
Mediana	6"	27
Grande	7"	37
Extra grande	8"	48

a) Explique por qué el número de piezas (P) podría ser proporcional al cuadrado del radio.

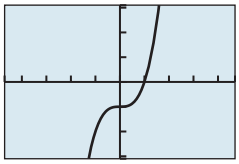
b) Suponiendo que $P = k \cdot r^2$, utilice la pareja (4, 12) para determinar el valor de k.

c) ¿El modelo algebraico se ajusta bien al resto de los datos?

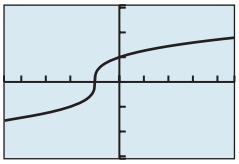
d) Algunas pizzerías tienen una tabla que muestran al equipo de cocina cuánto de cada ingrediente deben colocar en cada tamaño de pizza. ¿Cree que esta pizzería utiliza tal diagrama? Explique.

Ampliación de las ideas

68. Funciones inversas Se dice que dos funciones son *inversas*, una de la otra, si la gráfica de una puede obtenerse a partir de la gráfica de la otra mediante la reflexión con respecto a la recta $y = x$. Por ejemplo, las funciones correspondientes a las gráficas que se muestran a continuación son inversa una de la otra:



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
a)



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
b)

a) Dos de las doce funciones básicas en esta sección son inversas una de la otra, ¿cuáles son?

b) Dos de las doce funciones básicas de esta sección son su propia inversa, ¿cuáles son?

c) Si usted restringe el dominio a $[0, \infty)$ de una de las doce funciones básicas se convierte en la inversa de otra, ¿cuáles son?

69. Identificación de una función por sus propiedades

a) Siete de las doce funciones básicas tienen la propiedad de que $f(0) = 0$, ¿cuáles son?

b) Sólo una de las doce funciones básicas tienen la propiedad de que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todas las x y y de su dominio, ¿cuál es?

c) Una de las doce funciones básicas tiene la propiedad de que $f(x + y) = f(x)f(y)$ para toda x y y en su dominio, ¿cuál es?

d) Una de las doce funciones básicas tiene la propiedad de que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para toda x y y en su dominio. ¿Cuál es?

e) Cuatro de las doce funciones básicas tienen la propiedad que $f(x) + f(-x) = 0$ para toda x en su dominio. ¿Cuáles son las cuatro?

1.4 Construcción de funciones a partir de funciones

Aprenderá acerca de...

- La combinación algebraica de funciones
- La composición de funciones
- Las relaciones y funciones definidas en forma implícita

. . . porque

La mayoría de las funciones que encontrará en cálculo y en la vida real pueden crearse mediante la combinación o modificación de otras funciones.

Combinación algebraica de funciones

Saber cómo una función se "mezcla" es un primer e importante paso cuando se aplican herramientas de cálculo. Las funciones tienen su propia álgebra con base en las mismas operaciones que aplicamos a los números reales (suma, resta, multiplicación y división). Una forma de construir nuevas funciones es aplicar estas operaciones utilizando las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN Suma, resta, producto y cociente de funciones

Sean f y g dos funciones con dominios que se intersecan; entonces, para todos los valores de x en la intersección, las combinaciones algebraicas de f y g están definidas mediante las reglas siguientes:

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$

Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, siempre que $g(x) \neq 0$

En todos los casos, el dominio de la nueva función consiste en todos los números que pertenecen al dominio de f y al dominio de g. Como se hizo notar, los ceros del denominador se excluyen del dominio del cociente.

La notación funcional de Euler funciona tan bien en las definiciones anteriores que casi oculta lo que realmente está sucediendo. El "+" en la expresión "$(f + g)(x)$" se establece para una nueva operación denominada "función suma". Construye una nueva función, $f + g$, a partir de las funciones f y g. Al igual que cualquier función, $f + g$ está definida mediante lo que hace: toma un valor x del dominio y devuelve un valor del rango $f(x) + g(x)$. Observe que el signo "+" en "$f(x) + g(x)$" se *establece* para la operación conocida de suma de números reales. Así, con el mismo símbolo, tomando papeles diferentes en cada lado del signo igual, existe más en las definiciones anteriores que lo que ve a primera vista.

Por fortuna, la definición se aplica con facilidad.

EJEMPLO 1 Definición algebraica de funciones nuevas

Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$.

Determine fórmulas para las funciones $f + g$, $f - g$, fg, f/g y gg. Proporcione el dominio de cada una.

SOLUCIÓN Primero determinamos que f tiene como dominio todos los números reales y que g tiene dominio $[-1, \infty)$. Estos dominios se traslapan: la intersección es el intervalo $[-1, \infty)$. Por lo que:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x+1} \quad \text{con dominio } [-1, \infty).$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x+1} \quad \text{con dominio } [-1, \infty).$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2\sqrt{x+1} \quad \text{con dominio } [-1, \infty).$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{con dominio } (-1, \infty).$$

$$(gg)(x) = g(x)g(x) = (\sqrt{x+1})^2 \quad \text{con dominio } [-1, \infty).$$

Observe que podríamos expresar a $(gg)(x)$ sencillamente como $x + 1$. Esto sería bueno, pero la simplificación no cambiaría el hecho de que el dominio de gg es (por definición) el intervalo $[-1, \infty)$. Bajo otras circunstancias, la función $h(x) = x + 1$ tendría como dominio todos los números reales, pero bajo éstas no; es un producto de dos funciones con dominios restringidos.

Ahora resuelva el ejercicio 3.

Composición de funciones

No es difícil ver que la función $\text{sen}(x^2)$ se construye a partir de las funciones básicas $\text{sen}(x)$ y x^2, pero las funciones no se mezclan mediante la suma, resta, multiplicación o división. En lugar de eso, las dos funciones se combinan simplemente aplicándolas en orden: primero la función cuadrática y luego la función seno. Esta operación para combinar funciones, que no tiene contraparte en el álgebra de los números reales, se denomina *función composición*.

DEFINICIÓN Composición de funciones

Sean f y g dos funciones tales que el dominio de f interseca al rango de g. La **composición f de g**, denotada $f \circ g$ se define mediante la regla

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de $f \circ g$ consiste en todos los valores x del dominio de g que se asignan a valores $g(x)$ en el dominio de f (consulte la figura 1.55).

La composición g de f, denotada $g \circ f$, se define de manera similar. En la mayoría de los casos $g \circ f$ y $f \circ g$ son funciones diferentes (en lenguaje algebraico, "la composición de funciones no es conmutativa").

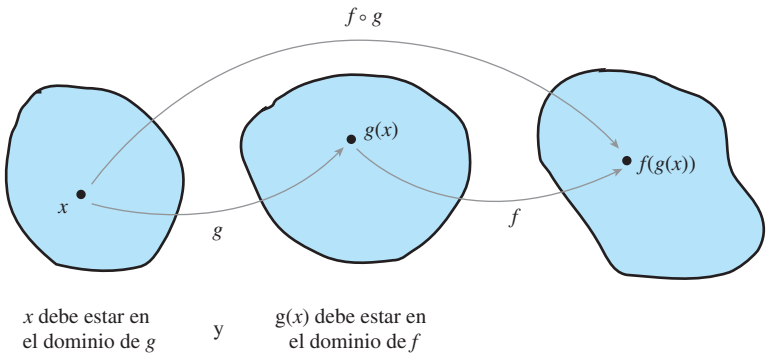


FIGURA 1.55 En la composición $f \circ g$, la función g se aplica primero y luego f. Es el orden inverso en que se leen los símbolos.

EJEMPLO 2 Composición de funciones

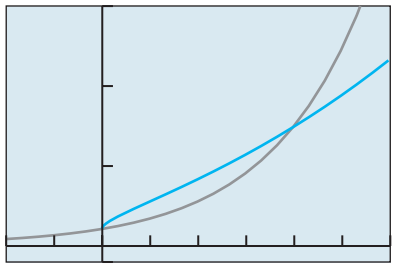
Sean $f(x) = e^x$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$, y verifique que las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ no son iguales.

SOLUCIÓN

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = \sqrt{e^x}$$

Una verificación de que estas dos funciones no son iguales es que tienen dominios diferentes: $f \circ g$ sólo está definida para $x \geq 0$, mientras que $g \circ f$ está definida para todos los números reales. También podríamos considerar sus gráficas (figura 1.56), que sólo coinciden en $x = 0$ y $x = 4$.



[–2, 6] por [–1, 15]

FIGURA 1.56 Las gráficas de $y = e^{\sqrt{x}}$ y $y = \sqrt{e^x}$ no son iguales (ejemplo 2).

Por último, las gráficas sugieren una verificación numérica. Determine un solo valor de x para el que $f(g(x))$ y $g(f(x))$ proporcionen valores diferentes. Por ejemplo, $f(g(1)) = e$ y $g(f(1)) = \sqrt{e}$. La gráfica nos ayuda a hacer una elección juiciosa de x. No querría verificar las funciones en $x = 0$ y $x = 4$, y concluir que son iguales.

Ahora resuelva el ejercicio 15.

EXPLORACIÓN 1 **Práctica con la composición**

Una de las funciones f en la columna B puede componerse con una de las funciones g en la columna C para obtener cada una de las funciones básicas $f \circ g$ de la columna A. ¿Puede relacionar, con éxito, las columnas sin utilizar una calculadora graficadora? Si tiene problemas, inténtelo con una calculadora graficadora.

A	B	C
$f \circ g$	f	g
x	$x - 3$	$x^{0.6}$
x^2	$2x - 3$	x^2
$\lvert x \rvert$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{(x-2)(x+2)}{2}$
x^3	x^5	$\ln (e^3 x)$
$\ln x$	$\lvert 2x + 4 \rvert$	$\dfrac{x}{2}$
$\operatorname{sen} x$	$1 - 2x^2$	$\dfrac{x+3}{2}$
$\cos x$	$2 \operatorname{sen} x \cos x$	$\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

EJEMPLO 3 Determinación del dominio de una composición

Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Determine el dominio de las funciones composición

a) $g \circ f$ **b)** $f \circ g$

SOLUCIÓN

a) Componemos la función en el orden especificado:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Para x en el dominio de $g \circ f$, primero debemos determinar $f(x) = x^2 - 1$, que pueda hacerse para todo número real. Luego debemos tomar la raíz cuadrada del resultado, que sólo podemos hacer para valores no negativos de $x^2 - 1$.

Por lo tanto, el dominio de $g \circ f$ consiste en todos los números reales para los que $x^2 - 1 \geq 0$, es decir, la unión $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

b) Nuevamente, componemos las funciones en el orden especificado:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 - 1$$

continúa

PRECAUCIÓN

Podríamos haber elegido expresar $(f \circ g)$ sencillamente como $x - 1$. Sin embargo, debe recordar que la composición está restringida al dominio de $g(x) = \sqrt{x}$, o $[0, \infty)$. El dominio de $x - 1$ es todos los números reales. Es buena idea obtener el dominio de una composición antes de que simplifique la expresión para $f(g(x))$. Una forma de simplificar y conservar la restricción del dominio, en el ejemplo 3, es escribir $(f \circ g)(x) = x - 1$, $x \geq 0$.

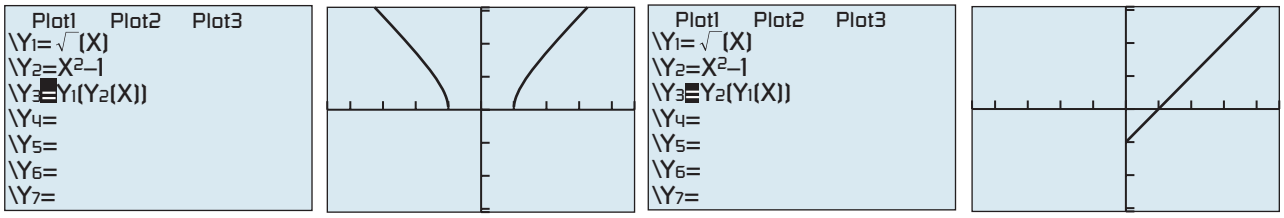
Para x en el dominio de $f \circ g$, primero debemos ser capaces de determinar $g(x) = \sqrt{x}$, que sólo podemos hacer para valores no negativos de x. Luego debemos ser capaces de elevar al cuadrado el resultado y restar 1, lo que podemos hacer para todo número real.

Por lo tanto, el dominio de $f \circ g$ consiste en el intervalo $[0, \infty)$.

Respalde gráficamente

Podemos graficar las funciones composición para ver si el graficador respeta las restricciones del dominio. La pantalla a la izquierda de cada gráfica muestra la configuración del editor "Y=". La figura 1.57b muestra la gráfica de $y = (g \circ f)(x)$, mientras la figura 1.57d muestra la gráfica de $y = (f \circ g)(x)$. La gráfica apoya muy bien nuestro trabajo algebraico.

Ahora resuelva el ejercicio 17.



a) b) c) d)

FIGURA 1.57 Las funciones Y1 y Y2 se componen para obtener las gráficas de $y = (g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$, respectivamente. Las gráficas respaldan nuestras conclusiones acerca de los dominios de las dos funciones compuestas (ejemplo 3).

En los ejemplos 2 y 3 se *compusieron* dos funciones para formar nuevas funciones. En cálculo, hay veces en que necesitamos invertir el proceso. Esto es, podemos iniciar con una función h y "*descomponerla*" para determinar las funciones cuya composición es h.

EJEMPLO 4 Descomposición de funciones

Para cada función h, determine funciones f y g, tales que $h(x) = f(g(x))$.

a) $h(x) = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 4$

b) $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

SOLUCIÓN

a) Podemos ver que h es cuadrática en $x + 1$. Sean $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = x + 1$. Entonces

$$h(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 4.$$

b) Podemos ver que h es la raíz cuadrada de la función $x^3 + 1$. Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^3 + 1$. Entonces

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^3 + 1) = \sqrt{x^3 + 1}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 25.

Con frecuencia hay más de una forma de descomponer una función. Por ejemplo, una forma alternativa de descomponer $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ en el ejemplo 4 b) es hacer $f(x) = \sqrt{x + 1}$ y $g(x) = x^3$. Entonces $h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \sqrt{x^3 + 1}$.



FIGURA 1.58 (Ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Modelación con la función composición

En el procedimiento médico conocido como angioplastia, los doctores insertan un catéter en una vena cardiaca (a través de una gran vena periférica) e inflan un pequeño globo esférico en la punta del catéter. Suponga que el globo es inflado a una velocidad constante de 44 milímetros cúbicos por segundo (consulte la figura 1.58).

a) Determine el volumen al cabo de t segundos.

b) Cuando el volumen es V, ¿cuál es el radio r?

c) Escriba una ecuación que proporcione el radio r como función del tiempo. ¿Cuál es el radio después de 5 segundos?

SOLUCIÓN

a) Al cabo de t segundos, el volumen será $44t$.

b) Resuelva algebraicamente

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = v$$

$$r^3 = \frac{3v}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$$

c) Al sustituir $44t$ por V da $r = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 44t}{4\pi}}$ o $r = \sqrt[3]{\dfrac{33t}{\pi}}$. Después de 5 segundos, el radio será $r = \sqrt[3]{\dfrac{33 \cdot 5}{\pi}} \approx 3.74\ m$.

Ahora resuelva el ejercicio 31.

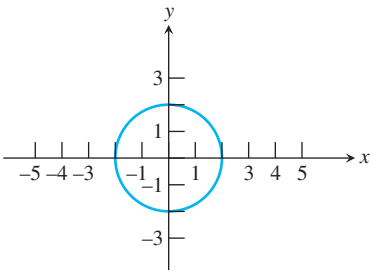


FIGURA 1.59 Una circunferencia de radio 2 con centro en el origen. Este conjunto de pares ordenados (x, y) define una *relación* que no es una función, ya que la gráfica no cumple el criterio de la recta vertical.

Relaciones y funciones definidas en forma implícita

En matemáticas existen muchas curvas útiles que no satisfacen el criterio de la recta vertical y, por lo tanto, no son gráficas de funciones. Una de tales curvas es la circunferencia en la figura 1.59. Aunque en este ejemplo y no está relacionada con x como una función, ciertamente existe alguna relación. De hecho, no sólo la forma de la gráfica muestra una relación *geométrica* entre los puntos, sino que también los pares ordenados (x, y) exhiben una importante relación *algebraica*: consisten exactamente en las soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

El término general para un conjunto de pares ordenados (x, y) es una **relación**; si ésta relaciona un *solo* valor de y para cada valor de x, entonces la relación también es una función y su gráfica pasará el criterio de la recta vertical. En el caso de la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 4$, tanto $(2, 0)$ como $(0, -2)$ están en la relación, así que y no es una función de x.

GRAFICACIÓN DE RELACIONES

Las relaciones que no son funciones con frecuencia no son fáciles de graficar. Estudiaremos algunos casos especiales posteriormente en este curso (circunferencias y elipses, por ejemplo), pero algunas relaciones aparentemente sencillas como la del ejemplo 6, son difíciles de graficar. Nuestras calculadoras no nos ayudan mucho, ya que la ecuación no puede ponerse en la forma "Y1=". Interesantemente, sabemos que la gráfica de la relación del ejemplo 6, no importa como se vea, no satisface el criterio de la recta vertical.

EJEMPLO 6 Verificación de pares en una relación

Determine cuáles pares ordenados $(2, -5)$, $(1, 3)$ y $(2, 1)$ están en la relación definida mediante $x^2y + y^2 = 5$. ¿La relación es una función?

SOLUCIÓN Simplemente sustituimos las coordenadas x y y de los pares ordenados en $x^2y + y^2$ y vemos si obtenemos 5.

continúa

$(2, -5)$: $(2)^2(-5) + (-5)^2 = 5$ Sustituir $x = 2$, $y = -5$.

$(1, 3)$: $(1)^2(3) + (3)^2 = 12 \neq 5$ Sustituir $x = 1$, $y = 3$.

$(2, 1)$: $(2)^2(1) + (1)^2 = 5$ Sustituir $x = 2$, $y = 1$.

Así, $(2, -5)$ y $(2, 1)$ están en la relación, pero $(1, 3)$ no.

Como la ecuación relaciona dos valores diferentes de y (-5 y 1) con el mismo valor x (2), la relación no puede ser una función.

Ahora resuelva el ejercicio 35.

Volvamos a ver la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Aunque no es una función, podemos dividirla en dos ecuaciones que *sí* definen funciones, en la siguiente forma:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = +\sqrt{4 - x^2} \text{ o } y = -\sqrt{4 - x^2}$$

Las gráficas de estas dos funciones son, respectivamente, las semicircunferencias superior e inferior de la circunferencia en la figura 1.59 (se muestran en la figura 1.60). Como todos los pares ordenados en cualquiera de estas funciones satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, decimos que la relación dada por la ecuación define **de forma implícita** las dos funciones.

EJEMPLO 7 Uso de funciones definidas de forma implícita

Describa la gráfica de la relación $x^2 + 2xy + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Al principio, esto parece una tarea difícil, pero observe que la expresión a la izquierda del signo de igual es un trinomio que se puede factorizar. Esto nos permite dividir la relación en dos funciones definidas implícitamente como sigue:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1$$
$$(x + y)^2 = 1 \quad \text{Factorizar.}$$
$$x + y = \pm 1 \quad \text{Sacar raíces cuadradas.}$$
$$x + y = 1 \text{ o } x + y = -1$$
$$y = -x + 1 \text{ o } y = -x - 1 \quad \text{Despejar y.}$$

La gráfica consiste en dos recta paralelas (figura 1.61), cada una la gráfica de una de las funciones definidas implícitamente.

Ahora resuelva el ejercicio 37.

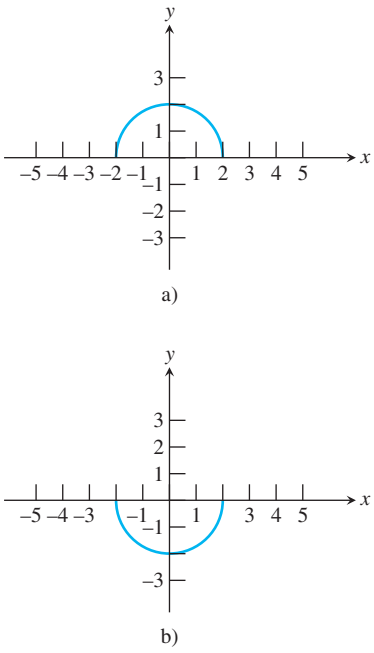


FIGURA 1.60 Las gráficas de a) $y = +\sqrt{4 - x^2}$ y b) $y = -\sqrt{4 - x^2}$. En cada caso, y se define como una función de x. Estas dos funciones se definen de forma *implícita* mediante la relación $x^2 + y^2 = 4$.

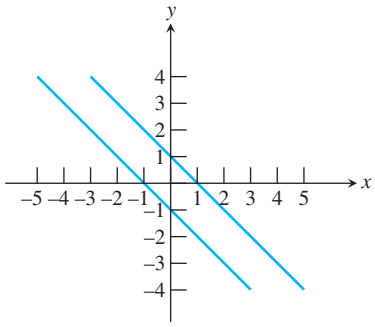


FIGURA 1.61 La gráfica de la relación $x^2 + 2xy + y^2 = 1$ (ejemplo 7).

REPASO RÁPIDO 1.4 *(Para obtener ayuda, consulte las secciones R.1, 1.2 y 1.3).*

En los ejercicios del 1 al 10 determine el dominio de la función y expréselo en notación de intervalos.

1. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$

2. $g(x) = \ln(x-1)$

3. $f(t) = \sqrt{5-t}$

4. $g(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x-1}}$

5. $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

6. $h(x) = \sqrt{1-x^2}$

7. $f(t) = \dfrac{t+5}{t^2+1}$

8. $g(t) = \ln(|t|)$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $g(x) = 2$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.4

En los ejercicios del 1 al 4 determine fórmulas para las funciones $f+g, f-g$ y fg. Proporcione el dominio de cada una.

1. $f(x) = 2x-1;\ g(x) = x^2$

2. $f(x) = (x-1)^2;\ g(x) = 3-x$

3. $f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = \operatorname{sen} x$

4. $f(x) = \sqrt{x+5};\ g(x) = |x+3|$

En los ejercicios del 5 al 8 determine fórmulas para f/g y g/f. Proporcione el dominio de cada una.

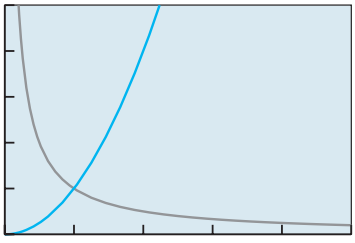
5. $f(x) = \sqrt{x+3};\ g(x) = x^2$

6. $f(x) = \sqrt{x-2};\ g(x) = \sqrt{x+4}$

7. $f(x) = x^2;\ g(x) = \sqrt{1-x^2}$

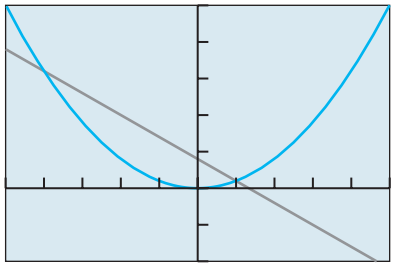
8. $f(x) = x^3;\ g(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

9. $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1/x$ se muestran a continuación en la ventana de visualización [0, 5] por [0, 5]. Bosqueje la gráfica de la suma $(f+g)(x)$ sumando directamente las coordenada de las gráficas. Luego grafique la suma en su calculadora y vea qué tan cerca estuvo.



[0, 5] por [0, 5]

10. Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4 - 3x$ se muestran en la ventana de visualización $[-5, 5]$ por $[-10, 25]$. Bosqueje la gráfica de la diferencia $(f-g)(x)$ restando las coordenadas y directamente en las gráficas. Luego grafique la diferencia en su calculadora y vea que tan cerca estuvo.



[–5, 5] por [–10, 25]

En los ejercicios del 11 al 14 determine $(f \circ g)(3)$ y $(g \circ f)(-2)$.

11. $f(x) = 2x-3;\ g(x) = x+1$

12. $f(x) = x^2-1;\ g(x) = 2x-3$

13. $f(x) = x^2+4;\ g(x) = \sqrt{x+1}$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x+1};\ g(x) = 9-x^2$

En los ejercicios del 15 al 22 determine $f(g(x))$ y $g(f(x))$. Indique el dominio de cada una.

15. $f(x) = 3x+2;\ g(x) = x-1$

16. $f(x) = x^2-1;\ g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

17. $f(x) = x^2-2;\ g(x) = \sqrt{x+1}$

18. $f(x) = \dfrac{1}{x-1};\ g(x) = \sqrt{x}$

19. $f(x) = x^2;\ g(x) = \sqrt{1-x^2}$

20. $f(x) = x^3;\ g(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

21. $f(x) = \dfrac{1}{2x};\ g(x) = \dfrac{1}{3x}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{x+1};\ g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

En los ejercicios del 23 al 30 determine $f(x)$ y $g(x)$ de modo que la función pueda describirse como $y = f(g(x))$ (hay más de una descomposición posible).

23. $y = \sqrt{x^2 - 5x}$

24. $y = (x^3 + 1)^2$

25. $y = |3x - 2|$

26. $y = \dfrac{1}{x^3 - 5x + 3}$

27. $y = (x - 3)^5 + 2$

28. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

29. $y = \cos(\sqrt{x})$

30. $y = (\tan x)^2 + 1$

31. Globos sonda Un globo sonda esférico se expande conforme se eleva, debido a la disminución de la presión atmosférica. Suponga que el radio r aumenta a razón de 0.03 pulgadas por segundo y que $r = 48$ pulgadas en el instante $t = 0$. Determine una ecuación que modele el volumen V del globo en el instante t y determine el volumen cuando $t = 300$ segundos.



32. Suerte de bolas de nieve Jake almacena una pequeña provisión de bolas de nieve de 4 pulgadas de diámetro en el congelador, pero ignora que la característica de autodeshielo del aparato producirá en cada bola una pérdida de alrededor de 1 pulgada cúbica de volumen cada 40 días. Él recuerda su provisión 360 días después, y va a recuperarla. ¿Cuál es el diámetro de las bolas entonces?

33. Fotografía de satélite Una cámara satelital toma una fotografía rectangular. La región más pequeña que puede fotografiar es un rectángulo de 5 por 7 km. Conforme la cámara se aleja, la longitud l y el ancho w del rectángulo aumenta a razón de 2 km/s. ¿Cuánto tiempo tardará el área A para sea al menos 5 veces su tamaño original?

34. Imagen por computadora La compañía Efectos Especiales prepara un programa con base en especificaciones preparadas por los directores de la película. Para simular una aproximación de un vehículo, inician con una imagen de computadora de una caja de 5 por 7 por 3 cm. El programa aumenta cada dimensión a razón de 2 cm/s. ¿Cuánto tardará el volumen V de la caja en ser al menos 5 veces su tamaño original?

35. ¿Cuáles de los pares ordenados (1, 1), (4, −2) y (3, −1) están en la relación dada por $3x + 4y = 5$?

36. ¿Cuáles de los pares ordenados (5, 1), (3, 4) y (0, −5) están en la relación dada por $x^2 + y^2 = 25$?

En los ejercicios del 37 al 44 determine dos funciones definidas de manera implícita por la relación dada.

37. $x^2 + y^2 = 25$

38. $x + y^2 = 25$

39. $x^2 - y^2 = 25$

40. $3x^2 - y^2 = 25$

41. $x + |y| = 1$

42. $x - |y| = 1$

43. $y^2 = x^2$

44. $y^2 = x$

Preguntas de examen estandarizado

45. Verdadero o falso El dominio de la función cociente $(f/g)(x)$ consiste en todos los números que pertenecen a los dominios de f y g. Justifique su respuesta.

46. Verdadero o falso El dominio de la función producto $(fg)(x)$ consiste en todos los números que pertenecen al dominio de f o al dominio de g. Justifique su respuesta.

Para resolver los ejercicios del 47 al 50 puede utilizar una calculadora gráfica.

47. Opción múltiple Suponga que f y g son funciones cuyo dominio son todos los números reales. ¿Cuál de las proposiciones siguientes *no* necesariamente es verdadera?

A) $(f + g)(x) = (g + f)(x)$ **B)** $(fg)(x) = (gf)(x)$

C) $f(g(x)) = g(f(x))$ **D)** $(f - g)(x) = -(g - f)(x)$

E) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

48. Opción múltiple Si $f(x) = x - 7$ y $g(x) = \sqrt{4 - x}$, ¿cuál es el dominio de la función f/g?

A) $(-\infty, 4)$ **B)** $(-\infty, 4]$ **C)** $(4, \infty)$

D) $[4, \infty)$ **E)** $(4, 7) \cup (7, \infty)$

49. Opción múltiple Si $f(x) = x^2 + 1$, entonces $(f \circ f)(x) =$

A) $2x^2 + 2$ **B)** $2x^2 + 1$ **C)** $x^4 + 1$

D) $x^4 + 2x^2 + 1$ **E)** $x^4 + 2x^2 + 2$

50. Opción múltiple ¿Cuál de las relaciones siguientes define implícitamente la función $y = |x|$?

A) $y = x$ **B)** $y^2 = x^2$ **C)** $y^3 = x^3$

D) $x^2 + y^2 = 1$ **E)** $x = |y|$

Exploraciones

51. Tres en línea Relacione cada función f con una función g y un dominio D de modo que $(f \circ g)(x) = x^2$ con dominio D.

f	g	D
e^x	$\sqrt{2 - x}$	$x \neq 0$
$(x^2 + 2)^2$	$x + 1$	$x \neq 1$
$(x^2 - 2)^2$	$2 \ln x$	$(0, \infty)$
$\dfrac{1}{(x - 1)^2}$	$\dfrac{1}{x - 1}$	$[2, \infty)$
$x^2 - 2x + 1$	$\sqrt{x - 2}$	$(-\infty, 2]$
$\left(\dfrac{x + 1}{x}\right)^2$	$\dfrac{x + 1}{x}$	$(-\infty, \infty)$

52. Determinación de una g Sea $f(x) = x^2 + 1$. Determine una función g de modo que

a) $(fg)(x) = x^4 - 1$

b) $(f + g)(x) = 3x^2$

c) $(f/g)(x) = 1$

d) $f(g(x)) = 9x^4 + 1$

e) $g(f(x)) = 9x^4 + 1$

Ampliación de las ideas

53. Identificación de identidades Una *identidad* para una operación de funciones es una función que combinada con una función dada f devuelve la misma función f. Determine las funciones identidades para las siguientes operaciones:

a) Función suma. Esto es, determine una función g tal que $(f + g)(x) = (g + f)(x) = f(x)$.

b) Función multiplicación. Esto es, determine una función g tal que $(fg)(x) = (gf)(x) = f(x)$.

c) Función composición. Esto es, determine una función g tal que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = f(x)$.

54. ¿Es asociativa la composición de funciones? Ya sabe que la composición de funciones no es conmutativa; esto es $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. Pero, ¿la composición de funciones es asociativa? Es decir, ¿$(f \circ (g \circ \mathrm{h})\,(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$? Explique su respuesta.

55. Revisión del ejemplo 6 Resuelva $x^2y + y^2 = 5$ para y usando la fórmula cuadrática y grafique el par de funciones implícitas.

1.5 Relaciones paramétricas e inversas

Aprenderá acerca de...

- Las relaciones definidas en forma paramétrica
- Las relaciones inversas y funciones inversas

. . . porque

Algunas funciones y gráficas pueden definirse mejor en forma paramétrica, mientras que algunas otras pueden entenderse mejor como inversas de funciones que ya conocemos.

Relaciones definidas en forma paramétrica

Otra manera natural para definir funciones, o con mayor generalidad, relaciones, es definir *ambos* elemento del par ordenado (x, y) en términos de otra variable t, denominada **parámetro**. Lo ilustramos con un ejemplo.

EJEMPLO 1 Definición en forma paramétrica de una función

Considere el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) definidos mediante las ecuaciones

$$x = t + 1$$
$$y = t^2 + 2t$$

en donde t es cualquier número real.

a) Encuentre los puntos determinados mediante $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

b) Determine una relación algebraica entre x y y (con frecuencia esto se denomina "eliminación del parámetro"). ¿y es una función de x?

c) Grafique la relación en el plano (x, y).

SOLUCIÓN

a) Sustituya cada valor de t en las fórmulas para x y y, con el fin de encontrar el punto que determina paramétricamente:

t	$x = t + 1$	$y = t^2 + 2t$	(x, y)
-3	-2	3	$(-2, 3)$
-2	-1	0	$(-1, 0)$
-1	0	-1	$(0, -1)$
0	1	0	$(1, 0)$
1	2	3	$(2, 3)$
2	3	8	$(3, 8)$
3	4	15	$(4, 15)$

b) Podemos determinar la relación entre x y y de forma algebraica mediante el método de sustitución. Primero despeje a t en términos de x para obtener $t = x - 1$.

$$y = t^2 + 2t \qquad \text{Dado}$$
$$y = (x - 1)^2 + 2(x - 1) \qquad t = x - 1$$
$$= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 \qquad \text{Desarrollar.}$$
$$= x^2 - 1 \qquad \text{Simplificar.}$$

Esto es consistente con los pares ordenados que habíamos encontrado en la tabla. Conforme t varía sobre todos los números reales, obtendremos todos los pares ordenados en la relación $y = x^2 - 1$, que en realidad define a y como una función de x.

continúa

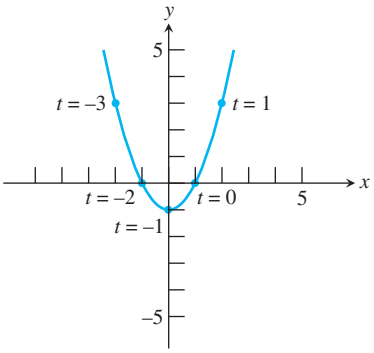


FIGURA 1.62 (Ejemplo 1).

c) Como la relación definida paramétricamente consiste en todos los pares ordenados en la relación $y = x^2 - 1$, podemos obtener la gráfica simplemente graficando la parábola $y = x^2 - 1$. Consulte la figura 1.62.

Ahora resuelva el ejercicio 5.

EJEMPLO 2 Uso de una calculadora graficadora en modo paramétrico

Considere el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) definidos mediante las ecuaciones

$$x = t^2 + 2t$$

$$y = t + 1$$

donde t es cualquier número real.

t	(x, y)
-3	$(3, -2)$
-2	$(0, -1)$
-1	$(-1, 0)$
0	(0, 1)
1	(3, 2)
2	(8, 3)
3	(15, 4)

a) Utilice una calculadora graficadora para hallar los puntos determinados por $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

b) Utilice una calculadora graficadora para graficar la relación en el plano (x, y).

c) ¿y es una función de x?

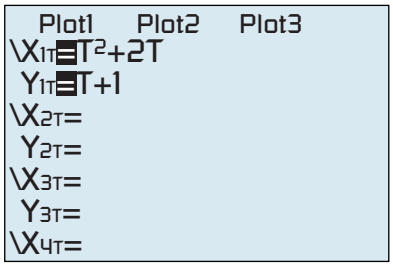
d) Determine una relación algebraica entre x y y.

SOLUCIÓN

a) Cuando una calculadora está en *modo paramétrico*, la pantalla "Y=" proporciona un espacio para ingresar a X y a Y como funciones del parámetro T (figura 1.63 a)). Después de ingresar las funciones, utilice la configuración de tabla de la figura 1.63 b) para obtener la tabla que se muestra en la figura 1.63 c). Por ejemplo, la tabla muestra que cuando $T = -3$ tenemos $X1T = 3$ y $Y1T = -2$, por lo que la pareja ordenada corresponde a $t = -3$ es $(3, -2)$.

b) En modo paramétrico, la pantalla "WINDOW" contiene la información usual del eje x, así como "Tmin", "Tmax" y "Tstep" (figura 1.64 a)). Para incluir la mayoría de los puntos listados en la parte a), hacemos $Xmin = -5$, $Xmax = 5$, $Ymin = -3$ y $Ymax = 3$. Como $t = y - 1$, configuramos Tmin y Tmax en valores uno menos de los valores para Ymin y Ymax.

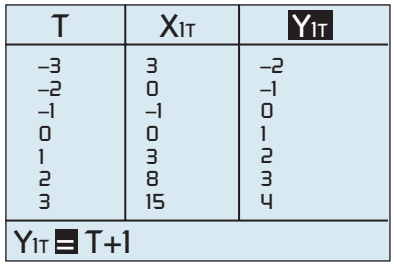
continúa



a)

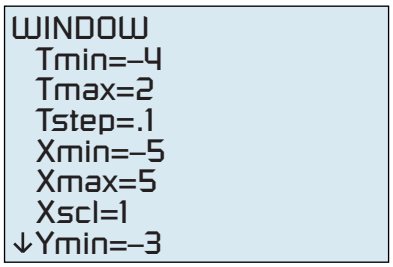


b)

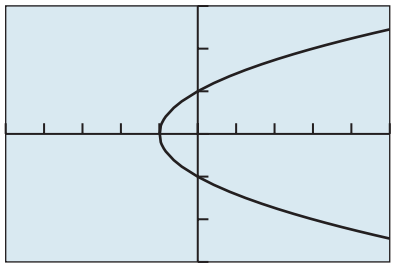


c)

FIGURA 1.63 Uso de la característica de construcción de tablas de un graficador que está en modo paramétrico (ejemplo 2).



a)



[–5, 5] por [–3, 3]

b)

FIGURA 1.64 La gráfica de una parábola en una calculadora, la cual está en modo paramétrico (ejemplo 2).

El valor de Tstep determina que distancia hay entre un valor de t y el siguiente cuando calcula los pares ordenados. Con Tmax – Tmin = 6 y Tstep = 0.1, el graficador calculará 60 puntos, que es suficiente (entre más puntos hay, la gráfica es más suave; consulte la exploración 1). La gráfica se muestra en la figura 1.64b. Utilice el rastro (trace) para determinar algunos de los puntos encontrados en a).

c) No, y no es una función de x. Podemos ver esto con base en la parte a) ya que $(0, -1)$ y $(0, 1)$ tienen el mismo valor x pero diferentes valores y. En forma alternativa, observe que la gráfica en b) no cumple el criterio de la recta vertical.

d) Podemos utilizar los mismos pasos algebraicos que en el ejemplo 1 para obtener la relación en términos de x y y: $x = y^2 - 1$.

Ahora resuelva el ejercicio 7.

EXPLORACIÓN **Observación de su Tstep**

1. Grafique la parábola del ejemplo 2 en modo paramétrico como se describió en la solución. Oprima TRACE y observe los valores de T, X y Y. ¿En qué valor de T la calculadora empieza el trazado? ¿Qué punto en la parábola resulta? (Está fuera de la pantalla). ¿En qué valor de T detiene el trazado? ¿Qué punto de la parábola resulta? ¿Cuántos puntos son calculados cuando traza los puntos desde el inicio hasta el final?
2. Deje todo igual y cambie el Tstep a 0.01. ¿Obtiene una curva más suave? ¿Por qué o por qué no?
3. Deje todo igual y cambie Tstep a 1. ¿Obtiene una curva más suave? ¿Por qué o por qué no?
4. ¿Qué efecto tiene Tstep sobre la rapidez del graficador? ¿Es fácil explicar esto?
5. Ahora cambie Tstep a 2. ¿Por qué desaparece la parte de la izquierda de la parábola? (Puede ayudarle utilizar TRACE a lo largo de la curva).
6. Regrese el valor de Tstep a 0.1 y cambie Tmin a -1. ¿Por qué el lado inferior de la parábola desaparece? (Otra vez, puede serle útil utilizar TRACE).
7. Haga un cambio en la ventana de modo que el graficador muestre el lado inferior de la parábola, pero no la superior.

TIEMPO PARA T

Las funciones definidas mediante ecuaciones paramétricas con frecuencia se encuentran en problemas de movimiento, en donde las coordenadas x y y de un objeto en movimiento se calculan como funciones del tiempo. Esto hace que el tiempo sea el parámetro, y es por lo que, en ecuaciones paramétricas, casi siempre vemos parámetros dados como "t".

Relaciones inversas y funciones inversas

¿Qué sucede cuando invertimos las coordenadas de todos los pares ordenados de una relación? Obviamente es otra relación ya que es otro conjunto de pares ordenados, pero ¿tiene algún parecido con la relación original? Si la relación original es una función, ¿la nueva relación también será una función?

Podemos hacernos una idea de lo que sucede examinando los ejemplos 1 y 2. Los pares ordenados del ejemplo 2 pueden obtenerse con sólo invertir las coordenadas de los pares ordenados del ejemplo 1. Esto es porque establecimos el ejemplo 2 mediante un intercambio de las ecuaciones paramétricas para x y y que utilizamos en el ejemplo 1. Decimos que la relación en el ejemplo 2 es la *relación inversa* de la relación ejemplo 1.

DEFINICIÓN Relación inversa

El par ordenado (a, b) está en la relación si, y sólo si, el par ordenado (b, a) está en la **relación inversa**.

Estudiaremos las relaciones entre una relación y su inversa. Estaremos más interesados en las relaciones inversas que pasan a ser *funciones*. Observe que la gráfica de la relación inversa del ejemplo 2 no satisface el criterio de la recta vertical y, por lo tanto, no es la gráfica de una función. ¿Podríamos predecir esta falla considerando la gráfica de la relación original del ejemplo 1? La figura 1.65 sugiere que sí podemos.

La gráfica inversa en la figura 1.65b no cumple el criterio de la recta vertical porque dos valores y diferentes están apareados con el mismo valor x. Ésta es una consecuencia directa del hecho de que la relación original de la figura 1.65a relaciona dos diferentes valores x con el mismo valor y. La gráfica inversa no cumple el criterio de la *recta vertical* ya que la gráfica original no cumple el criterio de la *recta horizontal*. Esto nos proporciona un criterio de prueba para relaciones cuyas inversas son funciones.

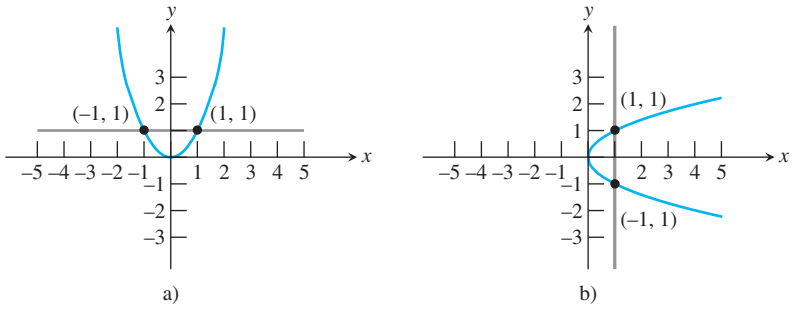


FIGURA 1.65 La relación inversa en b) no cumple el criterio de la recta vertical, ya que la relación original a) no cumple el criterio de la recta horizontal.

Criterio de la recta horizontal

La inversa de una relación es una función si, y sólo si, cada recta horizontal interseca a la gráfica de la relación original en cuando mucho un punto.

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de la recta horizontal

¿Cuál de las gráficas 1) a 4) de la figura 1.66 son gráficas de

a) relaciones que son funciones?

b) relaciones que tienen inversas que son funciones?

SOLUCIÓN

a) Las gráficas 1) y 4) son gráficas de funciones porque cumplen el criterio de la recta vertical. Las gráficas 2) y 3) no son gráficas de funciones porque no cumplen el criterio de la recta vertical.

continúa

b) Las gráficas 1) y 2) son gráficas de relaciones cuyas inversas son funciones, ya que cumplen el criterio de la recta horizontal. Las gráficas 3) y 4) no cumplen el criterio de la recta horizontal por lo que sus relaciones inversas no son funciones.

Ahora resuelva el ejercicio 9.

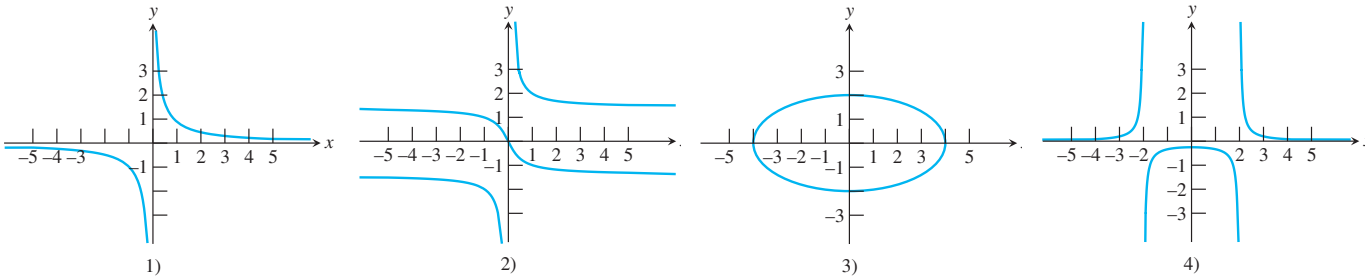


FIGURA 1.66 (Ejemplo 3).

Una *función* cuya inversa es una función tiene una gráfica que pasa tanto el criterio de la recta horizontal como el criterio de la recta vertical (tal como la gráfica 1) del ejemplo 3). Tal función es **uno a uno (o biyectiva)**, ya que cada x se relaciona con un único y y cada y está relacionado con un único x.

DEFINICIÓN Función inversa

Si f es una función uno a uno con dominio D y rango R*, entonces la **función inversa de f**, denotada f^{-1}, es la función con dominio R y rango D definida mediante

$$f^{-1}(b) = a \text{ si, y sólo si } f(a) = b.$$

* Las funciones las considera suprayectivas al estudiarlas de su dominio a su rango.

PRECAUCIÓN ACERCA DE LA NOTACIÓN DE FUNCIÓN

El símbolo f^{-1} se lee "f inversa" y nunca debe confundirse con el recíproco de f. Si f es una función, el símbolo f^{-1} sólo puede significar f inversa. El recíproco de f debe escribirse como $1/f$.

EJEMPLO 4 Determinación algebraica de una función inversa

Determine una ecuación para $f^{-1}(x)$, si $f(x) = x/(x + 1)$.

SOLUCIÓN La gráfica de f en la figura 1.67 sugiere que f es uno a uno. La función original satisface la ecuación $y = x/(x + 1)$. Si f en realidad es uno a uno, la función inversa f^{-1} satisfará la ecuación $x = y/(y + 1)$ (observe que sólo intercambiamos la x y la y).

Si despejamos y en esta nueva ecuación, tendremos una fórmula para $f^{-1}(x)$:

$$x = \frac{y}{y+1}$$

$$x(y+1) = y \qquad \text{Multiplicar por } y+1.$$

$$xy + x = y \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$xy - y = -x \qquad \text{Aislar los términos en } y.$$

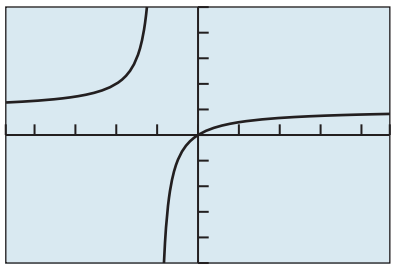
$$y(x-1) = -x \qquad \text{Factorizar } y.$$

$$y = \frac{-x}{x-1} \qquad \text{Dividir entre } x-1.$$

$$y = \frac{x}{1-x} \qquad \text{Multiplicar numerador y denominador por } -1.$$

Por lo tanto, $f^{-1}(x) = x/(1 - x)$.

Ahora resuelva el ejercicio 15.



[–4.7, 4.7] por [–5, 5]

FIGURA 1.67 La gráfica de $f(x) = x/(x + 1)$ (ejemplo 4).

Admitamos sinceramente dos cosas con respecto al ejemplo 4 antes de pasar a un modelo geométrico para determinar inversas. Primero, muchas funciones no son uno a uno y por tanto no tienen funciones inversas. Segundo, el álgebra implicada en la determinación de una función inversa, a la manera del ejemplo 4, puede ser extremadamente difícil. En realidad, determinaremos muy pocas inversas de esta forma. Conforme aprenderá en capítulos posteriores, por lo regular, dependemos de nuestro conocimientos de cómo f transforma x a y, para entender cómo f^{-1} transforma y a x.

Es posible utilizar la gráfica de f para producir una gráfica de f^{-1} sin utilizar álgebra, gracias a la siguiente propiedad de reflexión geométrica.

El principio de la reflexión inversa

El punto (a, b) y (b, a) en el plano coordenado son simétricos con respecto a la recta $y = x$. Los puntos (a, b) y (b, a) son **reflexiones** uno del otro con respecto a la recta $y = x$.

EJEMPLO 5 Determinación geométrica de una inversa

La gráfica de una función $y = f(x)$ se muestra en la figura 1.68. Bosqueje una gráfica de la función $y = f^{-1}(x)$. ¿f es una función uno a uno?

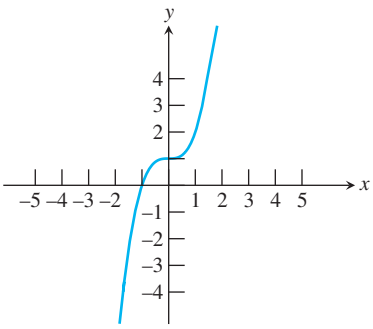


FIGURA 1.68 La gráfica de una función uno a uno (inyectiva) (ejemplo 5).

SOLUCIÓN No necesitamos determinar una fórmula para $f^{-1}(x)$. Todo lo que necesitamos es encontrar la reflexión de la gráfica dada con respecto a la recta $y = x$. Esto puede hacerse en forma geométrica.

Imagine un espejo a lo largo de la recta $y = x$ y dibuje la reflexión de la gráfica dada en el espejo (consulte la figura 1.69).

Otra manera de visualizar este proceso es imaginar que la gráfica se dibujará en un gran espejo plano. Imagine que el espejo se rota a lo largo de la recta $y = x$, de modo que la parte *positiva* del eje x intercambia de papel con la parte *positiva* del eje y (la parte posterior del espejo debería girarse al frente para que esto ocurriera). Entonces, la gráfica de f se convertirá en la gráfica de f^{-1}.

Como la inversa de f tiene una gráfica que pasa los criterios de las rectas horizontal y vertical, f es una función uno a uno.

Ahora resuelva el ejercicio 23.

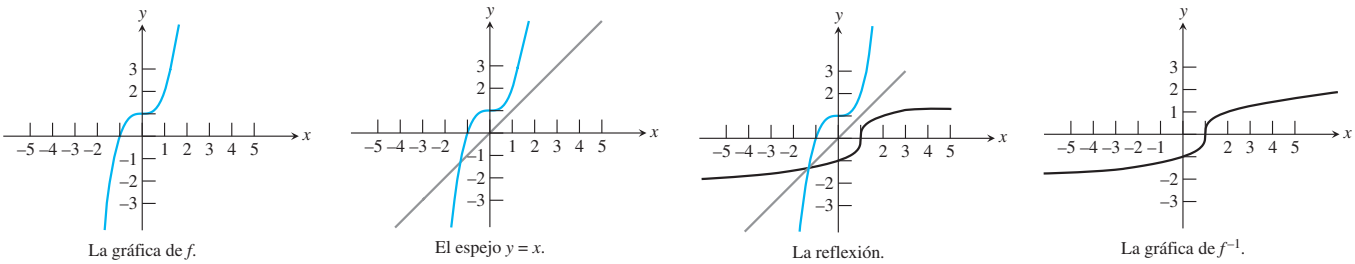


FIGURA 1.69 El método del espejo. La gráfica de f se refleja, con respecto a la recta $y = x$, en un espejo imaginario para producir la gráfica de f^{-1} (ejemplo 5).

Existe una conexión natural entre inversas y composición de funciones que proporciona mayor comprensión de lo que realmente es una inversa: "Deshace" la acción de la función original. Esto lleva a la regla siguiente:

Regla de composición de la inversa

Una función f es uno a uno con función inversa g si, y sólo si,

$f(g(x)) = x$ para toda x en el dominio de g, y

$g(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f.

EJEMPLO 6 Verificación de funciones inversas

Muestre, en forma algebraica, que $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ son funciones inversas.

SOLUCIÓN Utilizamos la regla de composición de la inversa.

$$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x - 1}) = (\sqrt[3]{x - 1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

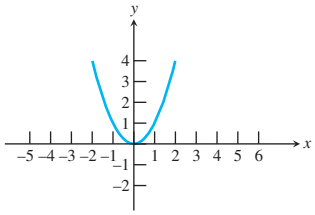
$$g(f(x)) = g(x^3 + 1) = \sqrt[3]{(x^3 + 1) - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Ya que las ecuaciones son verdaderas para toda x, la regla de composición de la inversa garantiza que f y g son inversas.

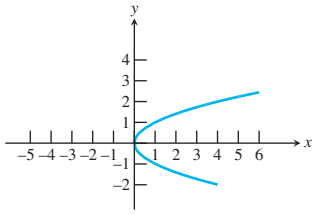
¡No tiene que realizar un respaldo gráfico de esta verificación algebraica, ya que éstas son las funciones cuyas gráficas se mostraron en el ejemplo 5!

Ahora resuelva el ejercicio 27.

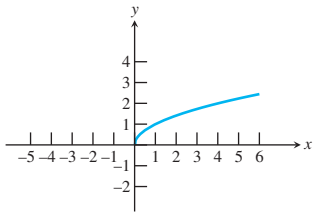
Algunas funciones son tan importantes que necesitamos estudiar sus inversas aunque ellas no sean uno a uno. Un buen ejemplo es la función raíz cuadrada, que es la "inversa" de la función cuadrática. No es la inversa en *toda* la función cuadrática, ya que la parábola completa no cumple el criterio de la recta horizontal. La figura 1.70 muestra que la función $y = \sqrt{x}$ en realidad es la inversa de una versión "con dominio restringido" de $y = x^2$ definida sólo para $x \geq 0$.



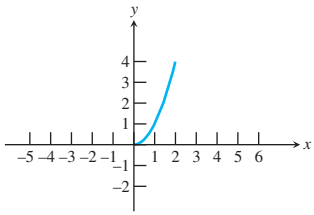
La gráfica de $y = x^2$ (no es uno a uno).



La relación inversa de $y = x^2$ (no es función).



La gráfica de $y = \sqrt{x}$ (una función).



La gráfica de la función cuya inversa es $y = \sqrt{x}$.

FIGURA 1.70 La función $y = x^2$ no tiene función inversa, pero $y = \sqrt{x}$ es la función inversa de $y = x^2$ en el dominio restringido $[0, \infty)$.

Las consideraciones de dominios añaden un refinamiento al método algebraico para determinar inversas del ejemplo 4, que resumimos a continuación.

Cómo determinar algebraicamente una función inversa

Dada una fórmula para una función f, procedemos como sigue para determinar una fórmula para f^{-1}.

1. Determine que existe una función f^{-1}, verificando que f es uno a uno. Indique, si hay, las restricciones sobre el dominio de f (observe que podría ser necesario imponer alguna para obtener una versión uno a uno de f).
2. Intercambie x y y en la fórmula $y = f(x)$.
3. Despeje y para obtener la fórmula $y = f^{-1}(x)$. Indique cualquier restricción sobre el dominio de f^{-1}.

EJEMPLO 7 Determinación de una función inversa

Muestre que $f(x) = \sqrt{x + 3}$ tiene una función inversa y determine una regla para $f^{-1}(x)$. Indique cualquier restricción, si la hay, sobre los dominios de f y f^{-1}.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

La gráfica de f pasa la prueba de la recta horizontal, por lo que f tiene una función inversa (figura 1.71). Observe que f tiene dominio $[-3, \infty)$ y rango $[0, \infty)$.

Para determinar f^{-1} escribimos

$$y = \sqrt{x + 3} \quad \text{donde } x \geq -3,\ y \geq 0$$

$$x = \sqrt{y + 3} \quad \text{donde } y \geq -3,\ x \geq 0 \quad \text{Intercambiar } x \text{ y } y.$$

$$x^2 = y + 3 \quad \text{donde } y \geq -3,\ x \geq 0 \quad \text{Elevar al cuadrado.}$$

$$y = x^2 - 3 \quad \text{donde } y \geq -3,\ x \geq 0 \quad \text{Despejar a } y.$$

Por tanto, $f^{-1}(x) = x^2 - 3$, con la restricción "heredada" del dominio de $x \geq 0$. La figura 1.71 muestra las dos funciones. Observe la restricción del dominio de $x \geq 0$ impuesta sobre la parábola $y = x^2 - 3$.

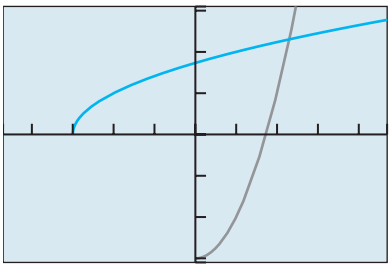
Respalde gráficamente

Utilice un graficador en modo paramétrico y compare las gráficas de los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas con la figura 1.71:

$$x = t \quad \text{y} \quad x = \sqrt{t + 3}$$

$$y = \sqrt{t + 3} \qquad y = t$$

Ahora resuelva el ejercicio 17.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

FIGURA 1.71 La gráfica de $f(x) = \sqrt{x + 3}$ y su inversa, una versión restringida de $y = x^2 - 3$ (ejemplo 7).

REPASO RÁPIDO 1.5 *(Para obtener ayuda consulte las secciones R.3 y R.4).*

En los ejercicios del 1 al 10 despeje y en la ecuación.

1. $x = 3y - 6$

2. $x = 0.5y + 1$

3. $x = y^2 + 4$

4. $x = y^2 - 6$

5. $x = \dfrac{y - 2}{y + 3}$

6. $x = \dfrac{3y - 1}{y + 2}$

7. $x = \dfrac{2y + 1}{y - 4}$

8. $x = \dfrac{4y + 3}{3y - 1}$

9. $x = \sqrt{y + 3},\ y \geq -3$

10. $x = \sqrt{y - 2},\ y \geq 2$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.5

En los ejercicios del 1 al 4 determine el par (x, y) para el valor del parámetro.

1. $x = 3t$ y $y = t^2 + 5$, para $t = 2$

2. $x = 5t - 7$ y $y = 17 - 3t$ para $t = -2$

3. $x = t^3 - 4t$ y $y = \sqrt{t + 1}$ para $t = 3$

4. $x = |t + 3|$ y $y = 1/t$ para $t = -8$

En los ejercicios del 5 al 8 complete lo siguiente: a) Encuentre los puntos determinados por $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3. b) Encuentre una relación algebraica entre x y y, y determine si las ecuaciones paramétricas determinan a y como función de x. c) Grafique la relación en el plano xy.

5. $x = 2t$ y $y = 3t - 1$

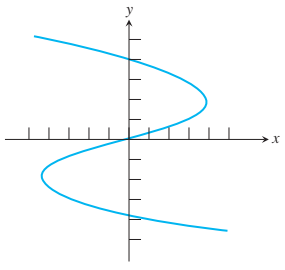
6. $x = t + 1$ y $y = t^2 - 2t$

7. $x = t^2$ y $y = t - 2$

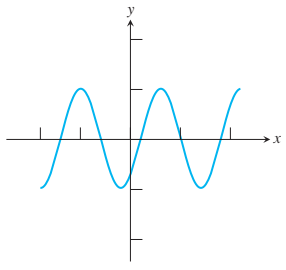
8. $x = \sqrt{t}$ y $y = 2t - 5$

En los ejercicios del 9 al 12 se muestra la gráfica de una relación. **a)** ¿La relación es una función? **b)** ¿La relación tiene una inversa que es una función?

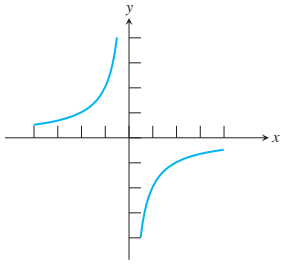
9.



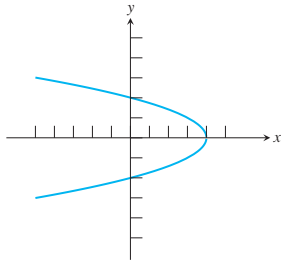
10.



11.



12.



En los ejercicios del 13 al 22 determine una fórmula para $f^{-1}(x)$. Proporcione el dominio de f^{-1} incluyendo cualesquier restricciones "heredadas" de f.

13. $f(x) = 3x - 6$

14. $f(x) = 2x + 5$

15. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$

16. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

17. $f(x) = \sqrt{x - 3}$

18. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

19. $f(x) = x^3$

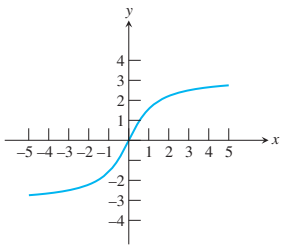
20. $f(x) = x^3 + 5$

21. $f(x) = \sqrt[3]{x + 5}$

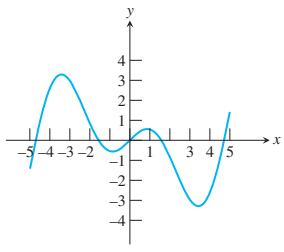
22. $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

En los ejercicios del 23 al 26, determine si la función es uno a uno. Si es uno a uno, bosqueje la gráfica de la inversa.

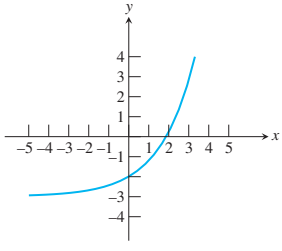
23.



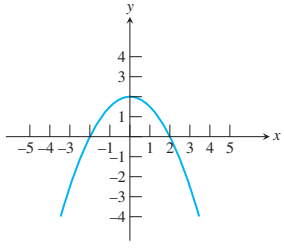
24.



25.



26.



En los ejercicios del 27 al 32 confirme que f y g son inversas mostrando que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$.

27. $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

28. $f(x) = \dfrac{x+3}{4}$ y $g(x) = 4x - 3$

29. $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

30. $f(x) = \dfrac{7}{x}$ y $g(x) = \dfrac{7}{x}$

31. $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

32. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ y $g(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

33. Conversión de divisas En mayo de 2002 la tasa de cambio para la conversión de dólares estadounidenses (x) a euros (y) fue $y = 1.08x$.

a) ¿Cuántos euros podría obtener usted por 100 dólares?

b) ¿Cuál es la función inversa, y qué conversión representa?

c) En la primavera de 2002, un turista podía tener una elegante comida en Provence, Francia a un "precio fijo" de 48 euros el menú. ¿A cuántos dólares equivalía ese precio?

34. Conversión de temperaturas La fórmula para convertir temperatura Celsius (x) a temperatura Kelvin es $k(x) = x + 273.16$. La fórmula para convertir temperatura Fahrenheit (x) a temperatura Celsius (x) es $c(x) = (5/9)(x - 32)$.

a) Determine una fórmula para $c^{-1}(x)$. ¿Para qué sirve esta fórmula?

b) Determine $(k \circ c)(x)$. ¿Para qué sirve está fórmula?

35. ¿Cuáles pares de funciones básicas (sección 1.3) son inversas una de la otra?

36. ¿Cuáles funciones básicas (sección 1.3) son sus propias inversas?

37. ¿Cuál función básica puede definirse en forma paramétrica como sigue?

$$x = t^3 \text{ y } y = \sqrt{t^6}\text{, para } -\infty < t < \infty$$

38. ¿Cuál función básica puede definirse en forma paramétrica como sigue?

$$x = 8t^3 \text{ y } y = (2t)^3 \text{ para } -\infty < t < \infty.$$

Preguntas de examen estandarizado

39. Verdadero o falso Si f es una función uno a uno con dominio D y rango R, entonces f^{-1} es una función uno a uno con dominio R y rango R. Justifique su respuesta.

40. Verdadero o falso El conjunto de puntos $(t + 1, 2t + 3)$, para todos los números reales t, forman una recta con pendiente 2. Justifique su respuesta.

41. Opción múltiple ¿Cuál par ordenado está en la *inversa* de la relación dada por $x^2y + 5y = 9$?

A) $(2, 1)$ **B)** $(-2, 1)$ **C)** $(-1, 2)$ **D)** $(2, -1)$

E) $(1, -2)$

42. Opción múltiple ¿Cuál par ordenado no está en la *inversa* de la relación dada por $xy^2 - 3x = 12$?

A) $(0, -4)$ **B)** $(4, 1)$ **C)** $(3, 2)$ **D)** $(2, 12)$

E) $(1, -6)$

43. Opción múltiple ¿Cuál función es la *inversa* de la función $f(x) = 3x - 2$?

A) $g(x) = \dfrac{x}{3} + 2$

B) $g(x) = 2 - 3x$

C) $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

D) $g(x) = \dfrac{x-3}{2}$

E) $g(x) = \dfrac{x-2}{3}$

44. Opción múltiple ¿Cuál función es la *inversa* de la función $f(x) = x^3 + 1$?

A) $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

B) $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

C) $g(x) = x^3 - 1$

D) $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

E) $g(x) = 1 - x^3$

Exploraciones

45. Propiedades inherentes de la función para las inversas Existen algunas propiedades de funciones que las funciones inversas (cuando existen) comparten de forma automática, y algunas que no. Suponga que f tiene una función inversa f^{-1}. Proporcione un argumento algebraico o gráfico (no una demostración formal) para mostrar que cada una de estas propiedades de f debe ser compartida necesariamente por f^{-1}.

a) f es continua.

b) f es uno a uno.

c) f es impar (gráficamente, simétrica con respecto al origen).

d) f es creciente.

46. Propiedades no heredadas de la función para las inversas Hay algunas propiedades de funciones que las funciones inversas no necesariamente comparten, incluso si las inversas existen. Suponga que f tiene una función inversa f^{-1}. Para cada una de las propiedades siguientes, proporcione un ejemplo para mostrar que f puede tener la propiedad mientras f^{-1} no.

a) f tiene una gráfica con una asíntota horizontal.

b) f tiene como dominio todos los números reales.

c) f tiene una gráfica que está acotada por arriba.

d) f tiene una discontinuidad removible en $x = 5$.

47. Escalas en calificaciones de álgebra Una maestra aplica un desafiante examen de álgebra a su grupo. La calificación más baja es 52, que ella decide escalar a 70. La calificación más alta es 88, que decide escalar a 97.

a) Utilice los puntos (52, 70) y (88, 97), determine una ecuación lineal que pueda usarse para convertir los resultados en calificaciones de la nueva escala.

b) Determine la inversa de la función definida mediante esta ecuación lineal. ¿Qué hace la función inversa?

48. Escriba para aprender (continuación del ejercicio 47) Explique por qué es importante, en términos de imparcialidad, que la función utilizada por la maestra sea una función *creciente*. (Precaución: *No* significa que "los resultados de cada uno deban subir". ¿Qué haría la función de escalamiento por un estudiante que resuelve suficientes problemas de "créditos extras" para obtener una calificación de 136 antes de la escala?),

Ampliación de las ideas

49. Modelación paramétrica del vuelo de una bola Una bola de béisbol que sale del bat formando un ángulo de 60° con respecto a la horizontal y recorriendo 110 pies por segundo, sigue una trayectoria que puede modelarse mediante la siguiente pareja de ecuaciones paramétricas (podría disfrutar verificando esto, si ha estudiado movimiento en física):

$x = 110(t)\cos(60°)$

$y = 110(t)\text{sen}(60°) - 16t^2$

Puede simular el vuelo de la pelota en un graficador. Configure su graficador en modo paramétrico y ponga las funciones anteriores para X2T y Y2T, haga X1T = 325 y Y1T = 5T para dibujar una barda de 30 pies a 325 pies del *home*. Haga Tmin = 0, Tmax = 6, Tstep = 0.1, Xmin = 0, Xmax = 350, Xscl = 0, Ymin = 0, Ymax = 300 y Yscl = 0.

a) Ahora grafique la función. ¿La bola librará la barda?

b) Cambie el ángulo a 30° y nuevamente corra la simulación. ¿La bola librará la barda?

c) ¿Qué ángulo es óptimo para pegarle a la bola? Cuando se pega a la bola con ese ángulo, ¿libra la cerca?

50. Revisión de la escala en CPP de la escuela Baylor *(consulte el problema 78 de la sección 1.2).* La función utilizada para convertir las calificaciones en porcentajes de la Escuela Baylor a CPP en una escala de 4 puntos es

$$y = \left(\frac{3^{1.7}}{30}(x - 65)\right)^{\frac{1}{1.7}} + 1.$$

La función tiene dominio [65, 100]. Cualquier valor por debajo de 65 es una reprobación y de manera automática se convierte a una CPP de 0.

a) Determine de forma algebraica la función inversa. ¿Para qué puede utilizarse la función inversa?

b) La función inversa, ¿tiene restricciones en el dominio?

c) Verifique con una calculadora gráfica que la función encontrada en a) y la función dada en realidad son inversas.

51. Actividad en equipo (continuación del ejercicio 50) El número 1.7 que aparece en dos lugares de la fórmula para escalar a CPP se denomina factor de escala (k). El valor de k puede cambiarse para alterar la curvatura de la gráfica mientras se mantiene los puntos (65, 1) y (95, 4) fijos. Se pensó que la más baja D (65) necesitaba ser escalada a 1.0, mientras que la A (95) necesitaba escalarse a 4.0. El Consejo Académico consideró varios valores de k, antes de establecer 1.7, como el número que daba las "más justas" CPP para las otras calificaciones en porcentaje.

Intente cambiar k a otros valores entre 1 y 2. ¿Qué clase de curva de escalamiento obtiene cuando $k = 1$? ¿Está de acuerdo con la decisión en Baylor de que $k = 1.7$ proporciona las CPP más justas?

1.6 Transformaciones gráficas

Aprenderá acerca de...

- Las transformaciones
- Las traslaciones vertical y horizontal
- Las reflexiones con respecto a los ejes
- El alargamiento y las compresiones horizontal y vertical
- La combinación de transformaciones

. . . porque

Entender las transformaciones le ayudará a comprender las relaciones entre gráficas que tienen semejanzas pero no son iguales.

Transformaciones

Todas las funciones siguientes son diferentes:

$$y = x^2$$
$$y = (x - 3)^2$$
$$y = 1 - x^2$$
$$y = x^2 - 4x + 5$$

Sin embargo, una mirada a sus gráficas muestra que, aunque no hay dos exactamente iguales, las cuatro tienen la misma *forma* y el mismo *tamaño*. La comprensión de cómo el álgebra cambia formas, tamaños, posiciones y orientaciones de las gráficas es útil para entender la conexión entre los modelos algebraicos y gráficos de funciones.

En esta sección relacionamos a las gráficas mediante **transformaciones**, que son funciones que transforman números reales en números reales. Al actuar sobre las coordenadas x y y de los puntos, las transformaciones cambian las gráfica de formas predecibles. Las **transformaciones rígidas** dejan sin cambio el tamaño y la forma de una gráfica; ellas incluyen traslaciones horizontales, traslaciones verticales, reflexiones o cualquier combinación de éstas. Las **transformaciones no rígidas**, que, por lo general, distorsionan la forma de una gráfica, incluyen compresiones y alargamientos horizontal y vertical.

Traslaciones vertical y horizontal

Una **traslación vertical** de la gráfica de $y = f(x)$ es un corrimiento de la gráfica hacia abajo o hacia arriba en el plano coordenado. Una **traslación horizontal** es un desplazamiento de la gráfica hacia la izquierda o hacia la derecha. La exploración siguiente le dará una buena idea de lo que son las traslaciones y cómo aparecen.

EXPLORACIÓN 1 Introducción a las traslaciones

Configure su ventana de visualización a $[-5, 5]$ por $[-5, 15]$ y su modo de graficación en secuencial (lo opuesto a simultáneo).

1. Grafique las funciones

$$y_1 = x^2 \qquad y_4 = y_1(x) - 2 = x^2 - 2$$
$$y_2 = y_1(x) + 3 = x^2 + 3 \qquad y_5 = y_1(x) - 4 = x^2 - 4$$
$$y_3 = y_1(x) + 1 = x^2 + 1$$

en la misma pantallas. ¿Qué efecto parece provocar $+3$, $+1$, -2 y -4?

2. Grafique las funciones

$$y_1 = x^2 \qquad y_4 = y_1(x - 2) = (x - 2)^2$$
$$y_2 = y_1(x + 3) = (x + 3)^2 \qquad y_5 = y_1(x - 4) = (x - 4)^2$$
$$y_3 = y_1(x + 1) = (x + 1)^2$$

en la misma pantalla. ¿Qué efecto parece provocar $+3$, $+2$, -2 y -4?

3. Repita los pasos 1 y 2 para las funciones $y_1 = x^3$, $y_1 = |x|$ y $y_1 = \sqrt{x}$. ¿Sus observaciones coinciden con las realizadas en los pasos 1 y 2?

AVISO DE TECNOLOGÍA

En la exploración 1, la notación $y_1(x + 3)$ significa la función y_1 evaluada en $x + 3$. No significa multiplicación.

En general, *reemplazar* x con $x - c$ desplaza la gráfica horizontalmente c unidades. De forma análoga, *reemplazar* y por $y - c$ desplaza la gráfica en el sentido vertical c unidades. Si c es positivo, el desplazamiento es hacia la derecha o hacia arriba; si c es negativa, el desplazamiento es hacia la izquierda o hacia abajo.

Esto es una regla consistente y buena que desafortunadamente se complica por el hecho de que c, en casos de corrimiento vertical, rara vez se muestra como sustraído de y. En lugar de eso, por lo común se muestra en el otro lado del signo igual *sumado a* $f(x)$. Lo que nos lleva a la regla siguiente, que sólo *parece* ser diferente para corrimientos horizontal y vertical.

Traslaciones

Sea c un número real positivo. Entonces las transformaciones siguientes resultan en traslaciones de la gráfica de $y = f(x)$:

Traslaciones horizontales

$y = f(x - c)$	una traslación de c unidades a la derecha
$y = f(x + c)$	una traslación de c unidades hacia la izquierda

Traslaciones verticales

$y = f(x) + c$	una traslación de c unidades hacia arriba
$y = f(x) - c$	una traslación de c unidades hacia abajo

EJEMPLO 1 Traslaciones verticales

Describa cómo puede transformarse la gráfica de $y = |x|$ a la gráfica de la ecuación dada.

a) $y = |x| - 4$ **b)** $y = |x + 2|$

SOLUCIÓN

a) La ecuación está en la forma $y = f(x) - 4$, una traslación de 4 unidades hacia abajo (consulte la figura 1.72).

b) La ecuación está en la forma $y = f(x + 2)$, una traslación de 2 unidades hacia la izquierda (consulte la figura 1.73).

Ahora resuelva el ejercicio 3.

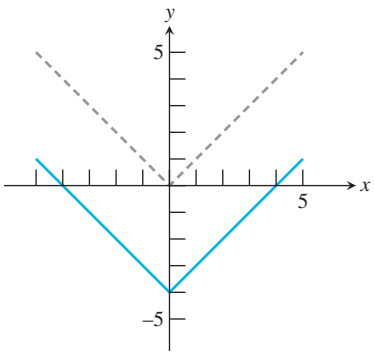


FIGURA 1.72 $y = |x|$ 2 4 (ejemplo 1).

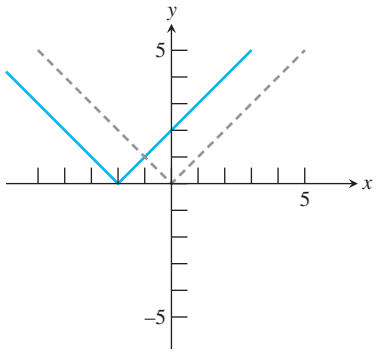


FIGURA 1.73 $y = |x + 2|$ (ejemplo 1).

EJEMPLO 2 Determinación de ecuaciones para traslaciones

Cada vista de la figura 1.74 muestra la gráfica de $y_1 = x^3$ y una traslación horizontal o vertical y_2. Escriba una ecuación para y_2 como se muestra en cada gráfica.

SOLUCIÓN

a) $y_2 = x^3 - 3 = y_1(x) - 3$ (una traslación de 3 unidades hacia abajo)

b) $y_2 = (x + 2)^3 = y_1(x + 2)$ (una traslación de 2 unidades hacia la izquierda)

c) $y_2 = (x - 3)^3 = y_1(x - 3)$ (una traslación de 3 unidades hacia la derecha)

Ahora resuelva el ejercicio 25.

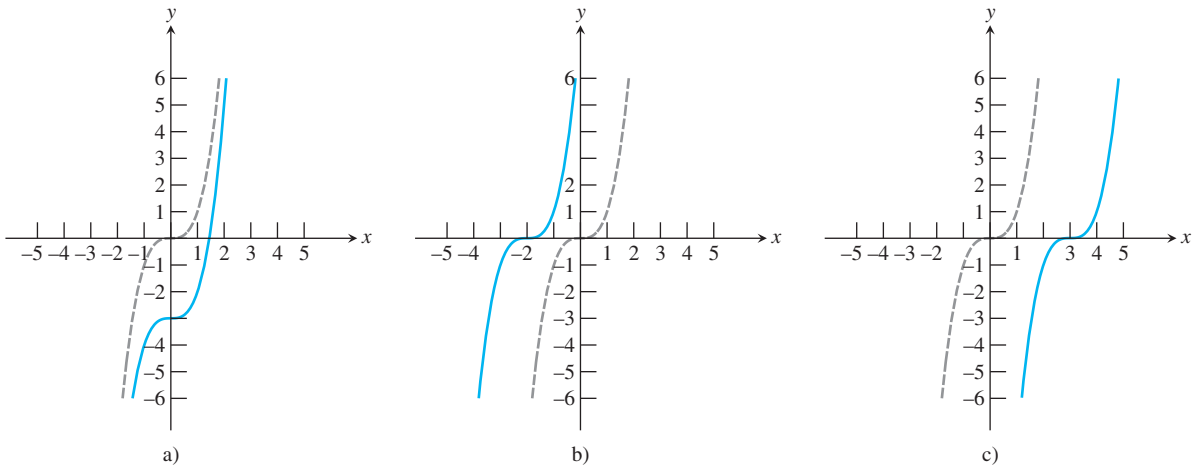


FIGURA 1.74 Traslaciones de $y_1 = x^3$ (ejemplo 2).

Reflexiones con respecto a los ejes

Los puntos (x, y) y $(x, -y)$ son **reflexiones mutuas con respecto al eje x**. Los puntos (x, y) y $(-x, y)$ son **reflexiones uno del otro con respecto al eje y** (consulte la figura 1.75). Dos puntos (o gráficas) que son simétricas con respecto a una recta son **reflexiones uno del otro con respecto a esa recta**.

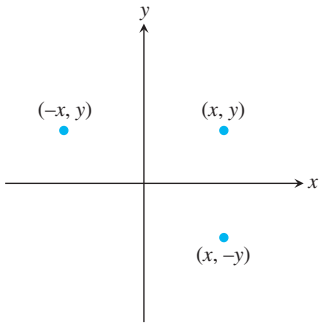


FIGURA 1.75 El punto (x, y) y sus reflexiones con respecto al eje x y al eje y.

La figura 1.75 sugiere que una reflexión respecto al eje x resulta cuando y se reemplaza con $-y$ y una reflexión respecto al eje y resulta cuando x se reemplaza con $-x$.

Reflexiones

Las transformaciones siguientes resultan en reflexiones de la gráfica de $y = f(x)$:

Con respecto al eje x

$$y = -f(x)$$

Con respecto al eje y

$$y = f(-x)$$

EJEMPLO 3 Determinación de ecuaciones para reflexiones

Determine una ecuación para la reflexión de $f(x) = \dfrac{5x - 9}{x^2 + 3}$ con respecto a cada eje.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

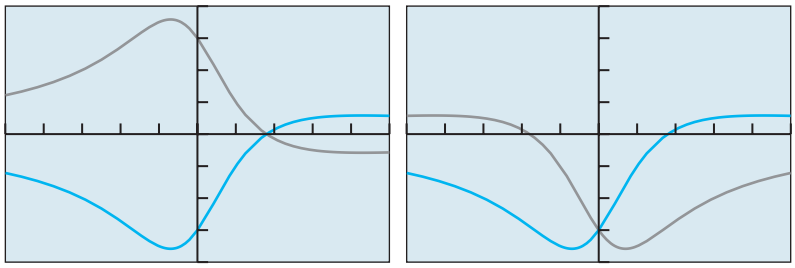
Con respecto al eje x: $y = -f(x) = -\dfrac{5x - 9}{x^2 + 3} = \dfrac{9 - 5x}{x^2 + 3}$

Con respecto al eje y: $y = f(-x) = \dfrac{5(-x) - 9}{(-x)^2 + 3} = \dfrac{-5x - 9}{x^2 + 3}$

Respalde gráficamente

Las gráficas en la figura 1.76, apoyan nuestro trabajo algebraico.

continúa



[–5, 5] por [–4, 4]
a)

[–5, 5] por [–4, 4]
b)

FIGURA 1.76 Reflexiones de $f(x) = (5x - 9)/(x^2 + 3)$ con respecto a) al eje x y b) al eje y (ejemplo 3).

Ahora resuelva el ejercicio 29.

Podría esperar que las funciones impares y las pares, cuyas gráficas ya tienen simetrías especiales, exhibieran un comportamiento especial cuando se reflejan con respecto a los ejes. Así es, como se muestra en el ejemplo 4 y los ejercicios 33 y 34.

EJEMPLO 4 Reflexión de funciones pares

Pruebe que la gráfica de una función par permanece sin cambio cuando se refleja con respecto al eje y.

SOLUCIÓN

Observe que podemos obtener un gran apoyo gráfico para estos enunciados mediante la reflexión de gráficas de varias funciones pares, pero lo que se pide aquí es una **prueba**, que necesitará del álgebra.

Sea f una función par; esto es, $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f. Para reflejar la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje y, hacemos la transformación $y = f(-x)$. Pero $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f, por lo que esta transformación resulta en $y = f(x)$. Por lo tanto, la gráfica de f no cambia.

Ahora resuelva el ejercicio 33.

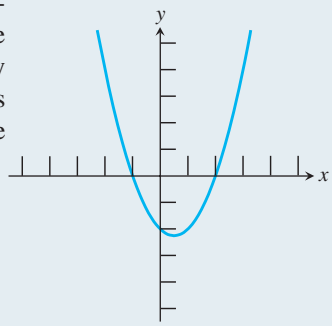
Graficación de composiciones con valor absoluto

Dada la gráfica de $y = f(x)$, la gráfica de $y = |f(x)|$ puede obtenerse reflejando la parte de la gráfica debajo del eje x, con respecto a ese eje, dejando la parte por arriba del eje x sin cambio; la gráfica de $y = f(|x|)$ puede obtenerse *reemplazando* la parte de la gráfica al lado izquierdo del eje y por la reflexión de la parte a la derecha del eje y con respecto al eje y, dejando la parte a la derecha del eje y sin cambio. (El resultado mostrará simetría par.)

La composición de funciones con valor absoluto puede obtenerse de forma gráfica mediante la reflexión de partes de las gráficas, como verá en la exploración siguiente.

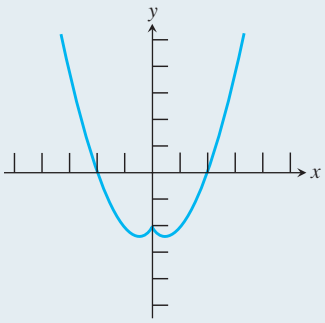
EXPLORACIÓN **Composición con valor absoluto**

La gráfica de $y = f(x)$ se muestra a la derecha. Relacione cada una de las gráficas de abajo con una de las ecuaciones siguientes y utilice el lenguaje de reflexión de funciones para justificar la relación. Observe que dos de las gráficas no se utilizarán.

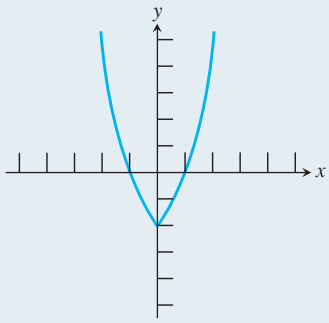


1. $y = |f(x)|$
2. $y = f(|x|)$
3. $y = -|f(x)|$
4. $y = |f(|x|)|$

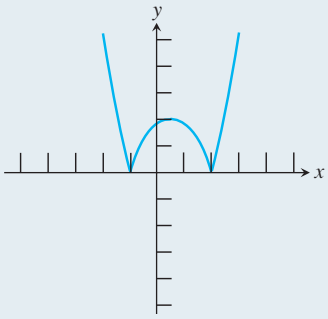
A)



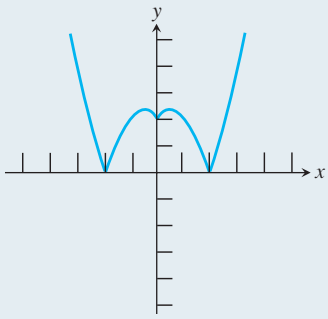
B)



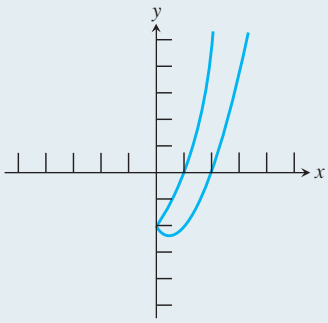
C)



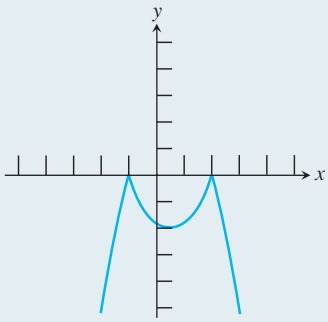
D)



E)



F)



Alargamientos y compresiones horizontal y vertical

Ahora investigamos lo que sucede cuando multiplicamos todas las coordenadas y (o todas las coordenadas x) de una gráfica por un número real fijo.

EXPLORACIÓN **Introducción a alargamientos y compresiones**

Configure su ventana de visualización a $[-4.7, 4.7]$ por $[-1.1, 5.1]$, y el modo de graficación en secuencial en lugar de simultáneo.

1. Grafique las funciones

$$y_1 = \sqrt{4 - x^2}$$
$$y_2 = 1.5y_1(x) = 1.5\sqrt{4 - x^2}$$
$$y_3 = 2y_1(x) = 2\sqrt{4 - x^2}$$
$$y_4 = 0.5y_1(x) = 0.5\sqrt{4 - x^2}$$
$$y_5 = 0.25y_1(x) = 0.25\sqrt{4 - x^2}$$

en la misma pantalla. ¿Qué efecto parecen tener 1.5, 2, 0.5 y 0.25?

2. Grafique las funciones

$$y_1 = \sqrt{4 - x^2}$$
$$y_2 = y_1(1.5x) = \sqrt{4 - (1.5x)^2}$$
$$y_3 = y_1(2x) = \sqrt{4 - (2x)^2}$$
$$y_4 = y_1(0.5x) = \sqrt{4 - (0.5x)^2}$$
$$y_5 = y_1(0.25x) = \sqrt{4 - (0.25x)^2}$$

en la misma pantalla. ¿Qué efecto parecen tener 1.5, 2, 0.5 y 0.25?

La exploración 3 sugiere que la multiplicación de x o y por una constante ocasiona una compresión o alargamiento horizontal o vertical de la gráfica.

En general, *reemplazar* x por x/c distorsiona la gráfica horizontalmente en un factor de c. En forma análoga, *reemplazar* y por y/c distorsiona la gráfica verticalmente en un factor c. Si c es mayor que 1 la distorsión es un alargamiento; si c es menor que 1, pero mayor que 0, la distorsión es una compresión.

Al igual que con las traslaciones, ésta es una regla consistente y fácil, que desafortunadamente se complica por el hecho de que la c para un alargamiento o compresión vertical raramente se muestra como un divisor de y. En lugar de eso, por lo regular se muestra en el otro lado del signo igual como un *factor* que multiplica a $f(x)$. Todo esto nos lleva a la regla siguiente:

Alargamientos y compresiones

Sea c un número real positivo. Entonces las transformaciones siguientes ocasionan alargamientos o compresiones de la gráfica de $y = f(x)$:

Alargamientos o compresiones horizontales

$$y = f\left(\frac{x}{c}\right) \quad \begin{cases} \text{un alargamiento en un factor de } c & \text{si } c > 1 \\ \text{una compresión en un factor de } c & \text{si } c < 1 \end{cases}$$

Alargamientos o compresiones verticales

$$y = c \cdot f(x) \quad \begin{cases} \text{un alargamiento en un factor de } c & \text{si } c > 1 \\ \text{una compresión en un factor de } c & \text{si } c < 1 \end{cases}$$

EJEMPLO 5 Determinación de ecuaciones para alargamientos y compresiones

Sea C_1 la curva definida mediante $y_1 = f(x) = x^3 - 16x$. Determine ecuaciones para las siguientes transformaciones no rígidas de C_1:

a) C_2 es un alargamiento vertical de C_1 en un factor de 3.

b) C_3 es una compresión horizontal de C_1 en un factor de 1/2.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

a) Denote la ecuación para C_2 por y_2. Entonces

$$\begin{aligned} y_2 &= 3 \cdot f(x) \\ &= 3(x^3 - 16x) \\ &= 3x^3 - 48x \end{aligned}$$

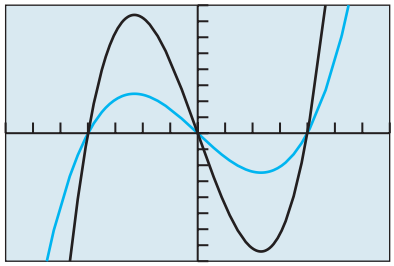
b) Denote la ecuación para C_3 por y_3. Entonces

$$\begin{aligned} y_3 &= f\left(\frac{x}{1/2}\right) \\ &= f(2x) \\ &= (2x)^3 - 16(2x) \\ &= 8x^3 - 32x \end{aligned}$$

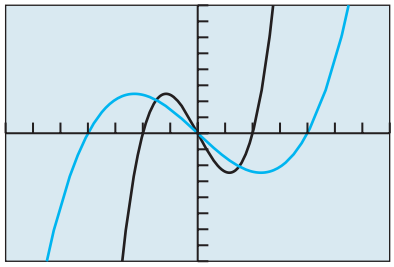
Respalde gráficamente

Las gráficas en la figura 1.77 apoyan nuestro trabajo algebraico.

Ahora resuelva el ejercicio 39.



[–7, 7] por [–80, 80]
a)



[–7, 7] por [–80, 80]
b)

FIGURA 1.77 La gráfica de $y_1 = f(x) = x^3 - 16x$, se muestra junto con a) un alargamiento vertical, y b) una compresión horizontal (ejemplo 5).

Combinación de transformaciones

Las transformaciones pueden aplicarse en sucesión (una después de otra). Si la transformación incluye alargamientos, compresiones o reflexiones, el orden en el que se realizan puede producir diferencias. En esos casos, asegúrese de poner atención especial al orden.

EJEMPLO 6 Combinación de transformaciones en orden

a) La gráfica de $y = x^2$ se somete a las transformaciones siguientes, en orden (determine la ecuación de la gráfica resultante):

- Un desplazamiento horizontal de 2 unidades hacia la derecha.
- Un alargamiento vertical en un factor de 3.
- Una traslación vertical de 5 unidades hacia arriba.

b) Aplique las transformaciones en a) en orden opuesto y determine la ecuación de la gráfica resultante.

SOLUCIÓN

a) Al aplicar, en orden, las transformaciones, tenemos

$$x^2 \Rightarrow (x-2)^2 \Rightarrow 3(x-2)^2 \Rightarrow 3(x-2)^2 + 5.$$

Al desarrollar la última expresión, obtenemos la función $y = 3x^2 - 12x + 17$.

b) Al aplicar las transformaciones en orden opuesto, tenemos

$$x^2 \Rightarrow x^2 + 5 \Rightarrow 3(x^2 + 5) \Rightarrow 3((x-2)^2 + 5).$$

Al desarrollar la última expresión, obtenemos la función $y = 3x^2 - 12x + 27$.

La segunda gráfica es diez unidades más alta que la primera ya que el alargamiento vertical actúa sobre la traslación vertical cuando ocurre primero la traslación. Con frecuencia el orden importa cuando están incluidos alargamientos, compresiones o reflexiones.

Ahora resuelva el ejercicio 47.

EJEMPLO 7 Transformación geométrica de una gráfica

La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 1.78. Determine la gráfica de la función compuesta $y = 2f(x + 1) - 3$ mostrando el efecto de una sucesión de transformaciones sobre la gráfica de $y = f(x)$.

SOLUCIÓN

La gráfica de $y = 2f(x + 1) - 3$ puede obtenerse a partir de la gráfica de $y = f(x)$ mediante la sucesión de transformaciones:

a) Un alargamiento vertical en un factor de 2 para obtener $y = 2f(x)$ (figura 1.79a).

b) Una traslación horizontal de 1 unidad hacia la izquierda para obtener $y = 2f(x + 1)$ (figura 1.79b).

c) Una traslación vertical de 3 unidades hacia abajo para obtener $y = 2f(x + 1) - 3$ (figura 1.79c).

(El orden de las primeras dos transformaciones puede invertirse sin que cambie la gráfica final).

Ahora resuelva el ejercicio 51.

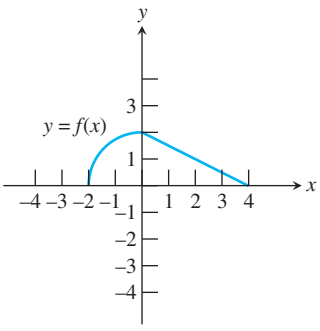
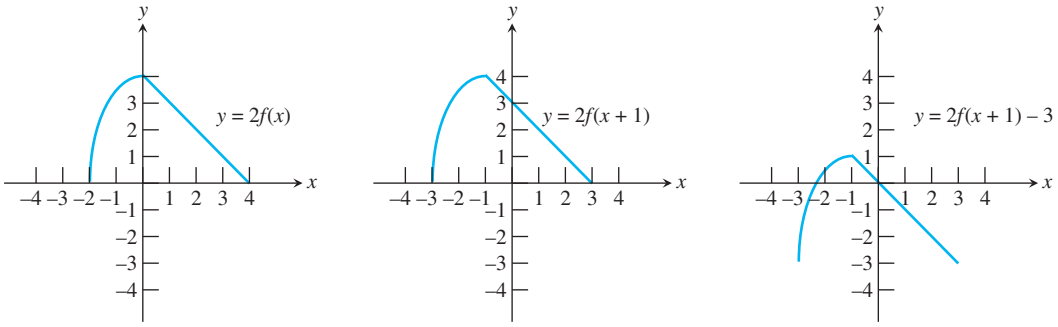


FIGURA 1.78 La gráfica de la función $y = f(x)$ en el ejemplo 7.



Alargamiento vertical de un factor 2. a)

Traslación horizontal una unidad hacia la izquierda b)

Traslación vertical 3 unidades hacia abajo. c)

FIGURA 1.79 Transformación de la gráfica de $y = f(x)$, de la figura 1.78, para obtener la gráfica de $y = 2f(x + 1) - 3$ (ejemplo 7).

REPASO RÁPIDO 1.6 *(Para obtener ayuda consulte la sección A.2).*

En los ejercicios del 1 al 6 escriba la expresión como un binomio al cuadrado.

1. $x^2 + 2x + 1$
2. $x^2 - 6x + 9$
3. $x^2 + 12x + 36$
4. $4x^2 + 4x + 1$
5. $x^2 - 5x + \frac{25}{4}$
6. $4x^2 - 20x + 25$

En los ejercicios del 7 al 10 realice las operaciones indicadas y simplifique.

7. $(x - 2)^2 + 3(x - 2) + 4$
8. $2(x + 3)^2 - 5(x + 3) - 2$
9. $(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2 - 3(x - 1)$
10. $2(x + 1)^3 - 6(x + 1)^2 + 6(x + 1) - 2$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.6

En los ejercicios del 1 al 8 describa cómo puede transformarse la gráfica de $y = x^2$ a la gráfica de la ecuación dada.

1. $y = x^2 - 3$
2. $y = x^2 + 5.2$
3. $y = (x + 4)^2$
4. $y = (x - 3)^2$
5. $y = (100 - x)^2$
6. $y = x^2 - 100$
7. $y = (x - 1)^2 + 3$
8. $y = (x + 50)^2 - 279$

En los ejercicios del 9 al 12 describa cómo puede transformarse la gráfica de $y = \sqrt{x}$ a la gráfica de la ecuación dada.

9. $y = -\sqrt{x}$
10. $y = \sqrt{x - 5}$
11. $y = \sqrt{-x}$
12. $y = \sqrt{3 - x}$

En los ejercicios del 13 al 16 describa cómo puede transformarse la gráfica de la ecuación dada.

13. $y = 2x^3$
14. $y = (2x)^3$
15. $y = (0.2x)^3$
16. $y = 0.3x^3$

En los ejercicios del 17 al 20 describa cómo transformar la gráfica de f en la gráfica de g.

17. $f(x) = \sqrt{x + 2}$ y $g(x) = \sqrt{x - 4}$
18. $f(x) = (x - 1)^2$ y $g(x) = -(x + 3)^2$
19. $f(x) = (x - 2)^3$ y $g(x) = -(x + 2)^3$
20. $f(x) = |2x|$ y $g(x) = 4|x|$

En los ejercicios del 21 al 24 bosqueje las gráficas de f, g y h. Respalde sus respuestas con un graficador.

21. $f(x) = (x + 2)^2$
$g(x) = 3x^2 - 2$
$h(x) = -2(x - 3)^2$

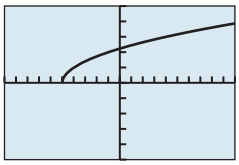
22. $f(x) = x^3 - 2$
$g(x) = (x + 4)^3 - 1$
$h(x) = 2(x - 1)^3$

23. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$
$g(x) = 2\sqrt[3]{x - 2}$
$h(x) = -\sqrt[3]{x - 3}$

24. $f(x) = -2|x| - 3$
$g(x) = 3|x + 5| + 4$
$h(x) = |3x|$

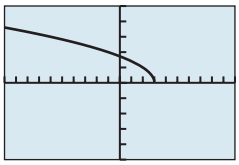
En los ejercicios del 25 al 28 la gráfica es la de una función $y = f(x)$, que puede obtenerse mediante la transformación de la gráfica de $y = \sqrt{x}$. Escriba una fórmula para la función f.

25.



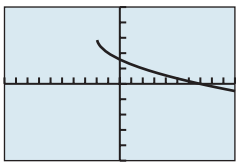
[–10, 10] por [–5, 5]

26.



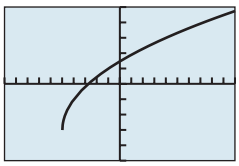
[–10, 10] por [–5, 5]

27.



[–10, 10] por [–5, 5]

28.



[–10, 10] por [–5, 5]
Alargamiento vertical = 2

En los ejercicios del 29 al 32 determine la ecuación de la reflexión de f con respecto a **a)** el eje x y **b)** el eje y.

29. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 2$ **30.** $f(x) = 2\sqrt{x+3} - 4$

31. $f(x) = \sqrt[3]{8x}$ **32.** $f(x) = 3|x + 5|$

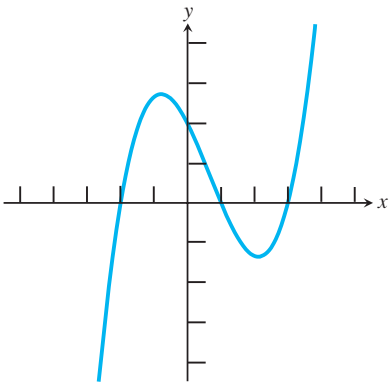
33. Reflexión de funciones impares Pruebe que la gráfica de una función impar es la misma cuando se refleja con respecto al eje x que cuando se refleja con respecto al eje y.

34. Reflexión de funciones impares Pruebe que si una función impar se refleja con respecto al eje y y luego se refleja, nuevamente, con respecto al eje x, el resultado es la función original.

Los ejercicios del 35 al 38 se refieren a la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra a continuación. En cada caso, bosqueje una gráfica de la nueva función.

35. $y = |f(x)|$ **36.** $y = f(|x|)$

37. $y = -f(|x|)$ **38.** $y = |f(|x|)|$



En los ejercicios del 39 al 42 transforme la función dada mediante **a)** un alargamiento vertical en un factor de 2 y **b)** una compresión horizontal en un factor de 1/3.

39. $f(x) = x^3 - 4x$ **40.** $f(x) = |x + 2|$

41. $f(x) = x^2 + x - 2$ **42.** $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

En los ejercicios del 43 al 46 describa una gráfica básica y una sucesión de transformaciones que pueden usarse para producir una gráfica de la función dada.

43. $y = 2(x - 3)^2 - 4$ **44.** $y = -3\sqrt{x+1}$

45. $y = (3x)^2 - 4$ **46.** $y = -2|x + 4| + 1$

En los ejercicios del 47 al 50 se obtiene una gráfica G a partir de una gráfica y mediante la sucesión de transformaciones indicadas. Escriba una ecuación cuya gráfica sea G.

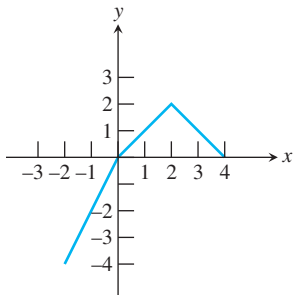
47. $y = x^2$: un alargamiento vertical en un factor de 3, luego un desplazamiento de 4 unidades hacia la derecha.

48. $y = x^2$: un corrimiento de 4 unidades a la derecha, luego un alargamiento vertical en un factor de 3.

49. $y = |x|$: un desplazamiento de 2 unidades hacia la izquierda, seguido de un alargamiento vertical en un factor de 2 y finalmente un desplazamiento de 4 unidades hacia abajo.

50. $y = |x|$: un corrimiento de 2 unidades hacia la izquierda, luego un alargamiento en un factor de 1/2, y por último un desplazamiento de 4 unidades hacia abajo.

Los ejercicios del 51 al 54 son con respecto a la función f, cuya gráfica se muestra a continuación.



51. Bosqueje la gráfica de $y = 2 + 3f(x + 1)$.

52. Bosqueje la gráfica de $y = -f(x + 1) + 1$.

53. Bosqueje la gráfica de $y = f(2x)$.

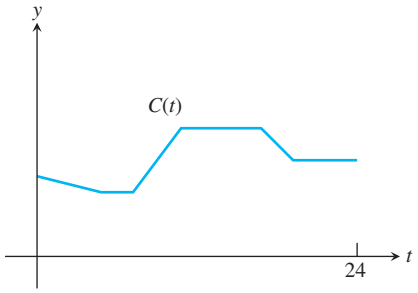
54. Bosqueje la gráfica de $y = 2f(x - 1) + 2$.

55. Escriba para aprender Grafique algunos ejemplos para convencerse de que la combinación de una reflexión y una traslación en un orden dado puede tener un efecto diferente de cuando se combinan en el orden opuesto. Luego explique con sus palabras por qué sucede esto.

56. Escriba para aprender Grafique algunos ejemplos para que se convenza de que los alargamientos y las compresiones verticales no afectan las intersecciones x de una gráfica. Luego explique con sus palabras por qué sucede esto.

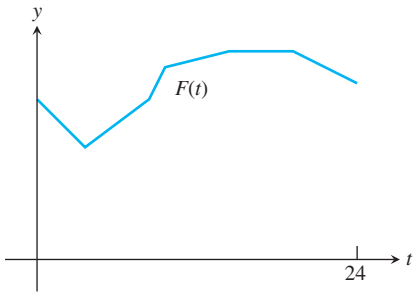
57. Celsius vs. Fahrenheit La gráfica muestra la temperatura en grados Celsius en Windsor, Ontario, durante un periodo de 24 horas.

Describa las transformaciones que convierte esta gráfica en una que muestre grados Fahrenheit. [*Sugerencia:* $F(t) = (9/5)C(t) + 32$].



58. Fahrenheit vs. Celsius La gráfica muestra la temperatura en grados Fahrenheit en Monte Clemens, Michigan, durante un periodo de 24 horas.

Describa las transformaciones que convierte esta gráfica en una que muestre grados Celsius. [*Sugerencia:* $F(t) = (9/5)C(t) + 32$].



Preguntas de examen estandarizado

59. Verdadero o falso La función $y = f(x + 3)$ representa una traslación hacia la derecha de 3 unidades, de la gráfica $y = f(x)$. Justifique su respuesta.

60. Verdadero o falso La función $y = f(x) - 4$ representa una traslación 4 unidades hacia abajo de la gráfica de $y = f(x)$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 61 al 64 puede utilizar una calculadora graficadora para responder la pregunta.

61. Opción múltiple Dada una función f, ¿cuál de las siguientes representa un alargamiento vertical en un factor de 3?

A) $y = f(3x)$ **B)** $y = f(x/3)$

C) $y = 3f(x)$ **D)** $y = f(x)/3$

E) $y = f(x) + 3$

62. Opción múltiple Dada una función f, ¿cuál de las siguientes representa una traslación horizontal de 4 unidades hacia la derecha?

A) $y = f(x) + 4$ **B)** $y = f(x) - 4$

C) $y = f(x + 4)$ **D)** $y = f(x - 4)$

E) $y = 4f(x)$

63. Opción múltiple Dada una función f, ¿cuál de las siguientes representa una traslación vertical de 2 unidades hacia arriba, seguida de una reflexión con respecto al eje y?

A) $y = f(-x) + 2$ **B)** $y = 2 - f(x)$

C) $y = f(2 - x)$ **D)** $y = -f(x - 2)$

E) $y = f(x) - 2$

64. Opción múltiple Dada una función f, ¿cuál de las siguientes representa una reflexión con respecto al eje x, seguida de un alargamiento horizontal en un factor de 1/2?

A) $y = -2f(x)$ **B)** $y = -f(x)/2$

C) $y = f(-2x)$ **D)** $y = -f(x/2)$

E) $y = -f(2x)$

Exploraciones

65. Finanzas internacionales La tabla 1.11 muestra el precio de una acción de Computadoras Dell para los primeros ocho meses de 2004:

Tabla 1.11 Computadoras Dell

Mes	Precio($)
1	33.44
2	32.65
3	33.62
4	34.78
5	35.24
6	35.82
7	35.47
8	34.84

Fuente: Yahoo! Finanzas



a) Grafique el precio (y) como una función del mes (x) en la forma de una gráfica de líneas que conecte los puntos para hacer una gráfica continua.

b) Explique qué transformación aplicaría a esta gráfica para producir la gráfica que muestre el precio de la acción en el mercado japonés.

66. Actividad en equipo Junto con un compañero grafiquen la función $y = x^2$ en sus graficadoras. Aplique un alargamiento o una compresión vertical a la función en una de las calculadoras. Luego cambie la *ventana* de esa graficadora para hacer que las dos gráficas sean iguales. ¿Puede formular una regla general para cómo determinar la ventana?

Ampliación de las ideas

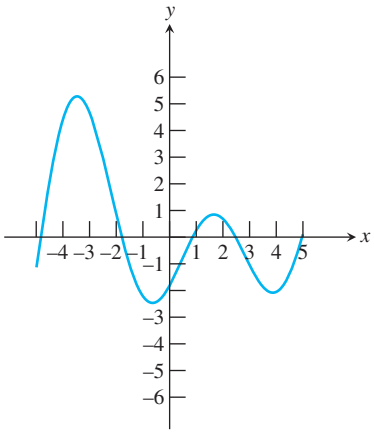
67. La transformación valor absoluto Grafique la función $f(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$, en la ventana de visualización $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$ (ponga la ecuación en Y1).

a) Estudie la gráfica e intente predecir cómo se verá la gráfica de $y = |f(x)|$. Luego desactive Y1 y grafique Y" = abs(Y1). ¿Predijo correctamente?

b) Otra vez estudie la gráfica e intente predecir cómo se verá la gráfica de $y = f(|x|)$. Entonces, desactive Y1 y grafique Y2 = Y1(abs(X)). ¿Predijo correctamente?

c) Dada la gráfica de $y = g(x)$ que se muestra a continuación, bosqueje una gráfica de $y = |g(x)|$.

d) Dada la gráfica de $y = g(x)$ que se muestra a continuación, bosqueje una gráfica de $y = g(|x|)$.



68. Circunferencias y elipses en forma paramétrica Configure su graficador en modo paramétrico y en modo de radianes, y su ventana como se describe a continuación:

Tmin = 0, Tmax = 7, Tstep = 0.1

Xmin = −4.7, Xmax = 4.7, Xscl = 1

Ymin = −3.1, Ymax = 3.1, Yscl = 1

a) Grafique las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$ y $y = \text{sen } t$. Debe obtener una circunferencia de radio 1.

b) Utilice una transformación de la función paramétrica de x para producir la gráfica de una elipse que tiene 4 unidades de ancho y 2 unidades de largo.

c) Utilice una transformación de ambas funciones paramétricas para producir una circunferencia de radio 3.

d) Utilice una transformación de ambas funciones para producir una elipse de 8 unidades de ancho y 4 unidades de largo.

(Aprenderá más acerca de elipses en el capítulo 8.)

1.7 Modelación con funciones

Aprenderá acerca de...

- Las funciones a partir de fórmulas
- Las funciones a partir de gráficas
- Las funciones a partir de descripciones verbales
- Las funciones a partir de datos

. . . porque

El uso de una función para modelar una variable bajo observación en términos de otra variable, con frecuencia permite hacer predicciones en situaciones prácticas, tal como en el pronóstico del crecimiento futuro de un negocio con base en información conocida.

Funciones a partir de fórmulas

Ahora que ha aprendido más acerca de lo que son las funciones y cómo se comportan, regresemos al tema de modelación de la sección 1.1. En esa sección hicimos hincapié en que uno de los objetivos de este curso era volverse expertos en el uso de modelos numéricos, algebraicos y gráficos del mundo real para resolver problemas. Ahora queremos centrar nuestra atención con más precisión en la modelación con *funciones*.

Ya ha visto unas cuantas fórmulas en el transcurso de su educación. Las fórmulas que incluyen dos cantidades variables siempre relacionan esas variables en forma implícita, y con frecuencia pueden resolverse para determinar explícitamente a una variable como una función de la otra. En este texto utilizaremos varias fórmulas para plantear y resolver problemas de manera algebraica, aunque no asumimos que conoce previamente las que tomaremos de otras áreas (como física o economía). *Suponemos* que conoce ciertas fórmulas importantes de matemáticas.

EJEMPLO 1 Formación de funciones a partir de fórmulas

Escriba el área A de un círculo, como una función de su

a) radio r.

b) diámetro d.

c) circunferencia C.

SOLUCIÓN

a) La conocida fórmula para el área de geometría proporciona a A como una función de r:

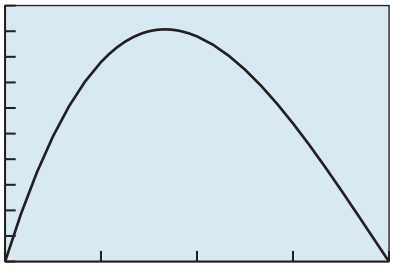
$$A = \pi r^2$$

b) Esta fórmula no es tan familiar. Sin embargo, sabemos que $r = d/2$, por lo que podemos sustituir esa expresión por r en la fórmula conocida:

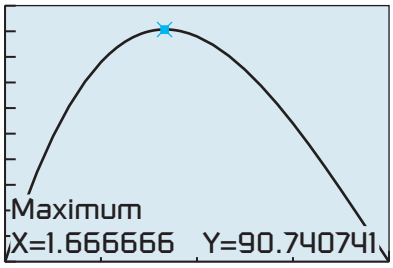
$$A = \pi r^2 = \pi(d/2)^2 = (\pi/4)d^2.$$

c) Como $C = 2\pi r$, podemos despejar a r para obtener $r = C/(2\pi)$. Luego se sustituye para obtener A: $A = \pi r^2 = \pi(C/(2\pi))^2 = \pi C^2/(4\pi^2) = C^2/(4\pi)$.

Ahora resuelva el ejercicio 19.



[0, 4] por [0, 100]
a)



[0, 4] por [0, 100]
b)

FIGURA 1.81 La gráfica del volumen de la caja del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Un problema de valor máximo

De cada esquina de una pieza de cartón de 8 por 15 pulgadas se corta un cuadrado de x pulgadas por lado y los lados se doblan hacia arriba para formar una caja sin tapa (figura 1.80).

a) Escriba el volumen V de la caja como una función de x.

b) Determine el dominio de V como una función de x (observe que el modelo impone restricciones sobre x).

c) Grafique V como una función de x, en el dominio determinado en la parte b) y utilice la utilería para encontrar el máximo de su graficador para determinar el volumen máximo que puede tener tal caja.

d) ¿Qué tan grandes pueden ser los cuadrados cortados para producir la caja con volumen máximo?

SOLUCIÓN

a) La caja tendrá una base con lados de ancho $8 - 2x$ y longitud $15 - 2x$. La profundidad de la caja será x, cuando se doblan hacia arriba los lados. Por lo tanto, $V = x(8 - 2x)(15 - 2x)$.

b) La fórmula para V es un polinomio cuyo dominio son todos los números reales. Sin embargo, la profundidad x debe ser no negativa, así como el ancho de la base $8 - 2x$. Juntas, estas dos restricciones determinan el dominio $[0, 4]$ (los extremos proporcionan una caja sin volumen, que es tan factible matemáticamente como otros conceptos cero).

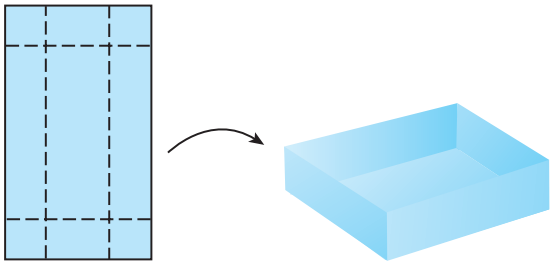


FIGURA 1.80 Una caja sin tapa fabricada mediante cortes en las esquinas, de una hoja de cartón y doblando los lados hacia arriba (ejemplo 2).

c) La gráfica se muestra en la figura 1.81. La utilería para determinar máximos muestra que el máximo aparece en el punto (5/3, 90.74). El valor máximo es alrededor de 90.74 pulgadas^3.

d) Cada cuadrado debe tener lados de una pulgada y dos tercios.

Ahora resuelva el ejercicio 33.

Funciones a partir de gráficas

Cuando "pensar en forma gráfica" se convierte en una parte genuina de su estrategia de resolución de problemas, en ocasiones es más sencillo iniciar con el modelo gráfico que ir directamente a la fórmula algebraica. La gráfica proporciona información valiosa acerca de la función.

EJEMPLO 3 Protección de una antena

Un pequeño disco satelital se empaca con un cilindro de cartón para protección. El disco parabólico es de 24 pulgadas de diámetro y 6 pulgadas de profundidad, y el diámetro del cilindro de cartón es de 12 pulgadas. ¿Cuál debe ser la altura del cilindro para que se ajuste al centro del disco y el disco esté al ras de la parte superior del disco? (Consulte la figura 1.82).

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

El diagrama de la figura 1.82a que muestra la sección transversal de este problema de tres dimensiones es también una gráfica bidimensional de una función cuadrática. Podemos transformar nuestra función básica $y = x^2$ con un alargamiento vertical de modo que pase por los puntos (12, 6) y (−12, 6), para producir una gráfica de la parábola en el plano coordenado (figura 1.82b).

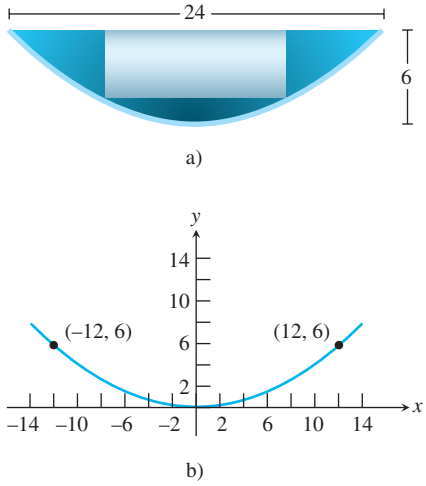


FIGURA 1.82 a) Un disco parabólico de un satélite con un cilindro protector en la parte central del empaque. b) La parábola en el plano coordenado (ejemplo 3).

$$y = kx^2 \qquad \text{Alargamiento vertical.}$$

$$6 = k(\pm 12)^2 \qquad \text{Sustituir } x = \pm 12,\ y = 6.$$

$$k = \frac{6}{144} = \frac{1}{24} \qquad \text{Despejar } k.$$

Por tanto, $y = \frac{1}{24}x^2$.

Para determinar la altura del cilindro de cartón, primero determinamos la coordenada y de la parábola a 6 pulgadas del centro, esto es, cuando $x = 6$:

$$y = \frac{1}{24}(6)^2 = 1.5$$

Desde ese punto a la parte superior del disco hay $6 - 1.5 = 4.5$ pulgadas.

Ahora resuelva el ejercicio 35.

Aunque el ejemplo 3 sirve bien como un ejemplo de "funciones a partir de gráficas", también es un ejemplo de una función que debe construirse reuniendo información relevante de una descripción verbal y reuniéndola en la forma correcta. La gente que hace matemáticas está acostumbrada a enfrentar regularmente esos retos, como un primer paso necesario en la modelación del mundo real. En honor a su importancia, la hemos reservado hasta el final para terminar este capítulo con estilo.

Funciones a partir de descripciones verbales

No existe una forma segura y libre de fallas para construir una función a partir de una descripción verbal. Puede constituir una tarea difícil y, con frecuencia, mucho más que la matemática requerida para resolver el problema una vez que se ha encontrado la función. El proceso de 4 pasos para resolver problemas, de la sección 1.1, le da varias sugerencias valiosas, quizá las más importante de la cuales sea *leer* el problema cuidadosamente. La comprensión de lo que dicen las palabras es crítico si desea modelar la situación que ellas describen.

EJEMPLO 4 Determinación del modelo y solución

Las semillas se están fugando de un recipiente, a través de un agujero, a una razón constante de 8 pulgadas cúbicas por minuto. El grano forma una pila en forma de cono en el suelo a donde cae. Conforme crece, la altura del cono siempre permanece igual a su radio. Si ahora el cono es de un pie de altura, ¿cuál será su altura dentro de una hora?

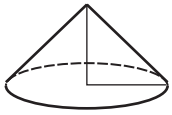


FIGURA 1.83 Un cono con altura igual a su radio (ejemplo 4).

SOLUCIÓN

Leyendo con cuidado el problema, nos damos cuenta de que es necesaria la fórmula para el volumen del cono (figura 1.83). De memoria o buscándola, obtenemos la fórmula $V = (1/3)\pi r^2 h$. Una cuidosa lectura también revela que la altura y el radio siempre son iguales, así que podemos obtener el volumen directamente como una función de la altura: $V = (1/3)\pi h^3$.

Cuando $h = 12$ pulgadas, el volumen es $V = (\pi/3)(12)^3 = 576\pi$ pulgadas^3.

Una hora más tarde, el volumen habrá aumentado en (60 min)(8 pulg^3/min) = 480 pulg^3. El volumen total de la pila en ese punto será $(576\pi + 480)$pulg^3. Por último, utilizamos la fórmula del volumen una vez más para despejar a h:

$$\frac{1}{3}\pi h^3 = 576\pi + 480$$

$$h^3 = \frac{3(576\pi + 480)}{\pi}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{3(576\pi + 480)}{\pi}}$$

$$h \approx 12.98 \text{ pulgadas}$$

Ahora resuelva el ejercicio 37.

EJEMPLO 5 Haciendo que las unidades trabajen para usted

Una llanta de 15 pulg (de radio), ¿cuántas rotaciones da por segundo en un vehículo deportivo que viaja a 70 mph?

SOLUCIÓN Es el perímetro de la llanta el que hace contacto con el camino, así que primero determinamos la circunferencia de la llanta:

$$C = 2\pi r = 2\pi(15) = 30\pi \text{ pulg}$$

Eso significa que 1 rotación $= 30\pi$ pulg. Desde este punto procedemos convirtiendo "millas por hora" a "rotaciones por segundo" mediante una serie de **factores de conversión** que en realidad son factores iguales a 1:

$$\frac{70 \text{ millas}}{1 \text{ hora}} \times \frac{1 \text{ hora}}{60 \text{ minutos}} \times \frac{1 \text{ minuto}}{60 \text{ seg}} \times \frac{5{,}280 \text{ pies}}{1 \text{ milla}} \times \frac{12 \text{ pulgadas}}{1 \text{ pie}} \times \frac{1 \text{ rotación}}{30\pi \text{ pulgadas}}$$

$$= \frac{70 \times 5{,}280 \times 12 \text{ rotación}}{60 \times 60 \times 30\pi \text{ sec}} \approx 13.07 \text{ rotaciones por segundo}$$

Ahora resuelva el ejercicio 39.

Funciones a partir de datos

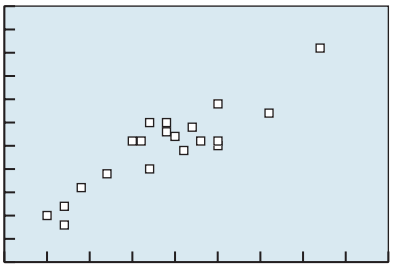
En este curso utilizaremos la estrategia siguiente de 3 pasos para construir funciones a partir de datos.

Construcción de una función con base en datos

Dado un conjunto de puntos de información de la forma (x, y), para construir una fórmula que aproxime y como función de x:

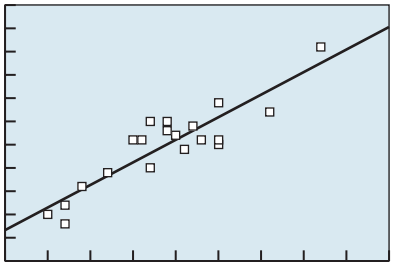
1. Haga un diagrama de dispersión de los puntos. Los puntos no necesitan pasar el criterio de la recta vertical.
2. Con base en la forma del diagrama, determine si los puntos parecen seguir la gráfica de un tipo conocido de función (recta, parábola, cúbica, curva seno, etcétera).
3. Transforme una función básica de ese tipo para ajustar los puntos tanto como sea posible.

El paso 3 podría parecer demasiado laborioso, y para las generaciones anteriores ciertamente lo era; requiere de todos los trucos de la sección 1.6 y algunos más. Sin embargo, nosotros agradecidamente utilizaremos la tecnología para que haga este paso de "ajuste de curva" por nosotros, como se muestra en el ejemplo 6.



[45, 90] por [60, 115]

FIGURA 1.84 El diagrama de dispersión de los datos de la temperatura en el ejemplo 6.



[45, 90] por [60, 115]

FIGURA 1.85 El diagrama de dispersión junto con la recta de regresión (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Ajuste de una curva con tecnología

La tabla 1.12 registra las temperaturas mínima y máxima observadas el 9/9/1999 en 20 de las principales ciudades de Estados Unidos. Determine una función que aproxime la temperatura máxima (y) como una función de la temperatura mínima (x). Utilice esta función para predecir la temperatura máxima ese día para Madison, WI, dado que la temperatura mínima fue 46.

SOLUCIÓN El diagrama de dispersión se muestra en la figura 1.84.

Tabla 1.12 Temperaturas el 9/9/1999

Ciudad	Mínima	Máxima	Ciudad	Mínima	Máxima
New York, NY	70	86	Miami, FL	76	92
Los Angeles, CA	62	80	Honolulu, HI	70	85
Chicago, IL	52	72	Seattle, WA	50	70
Houston, TX	70	94	Jacksonville, FL	67	89
Philadelphia, PA	68	86	Baltimore, MD	64	88
Albuquerque, NM	61	86	St. Louis, MO	57	79
Phoenix, AZ	82	106	El Paso, TX	62	90
Atlanta, GA	64	90	Memphis, TN	60	86
Dallas, TX	65	87	Milwaukee, WI	52	68
Detroit, MI	54	76	Wilmington, DE	66	84

Fuente: AccuWeather, Inc.

Observe que los puntos no caen a lo largo de una curva bien conocida, sino parece que caen *cerca* de una recta con inclinación ascendente. Por lo tanto, elegimos modelar los datos con una función cuya gráfica sea una recta. Podríamos ajustar la recta a simple vista (como lo hicimos en el ejemplo 3 en la sección 1.1), pero esta vez utilizaremos la calculadora para determinar la recta de "mejor ajuste" denominada **recta de regresión**. (Vea el manual de su graficador para saber cómo se hace esto.)

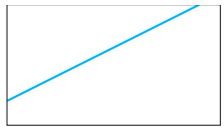
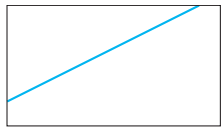
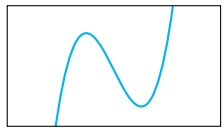
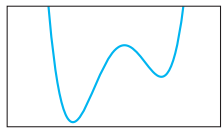
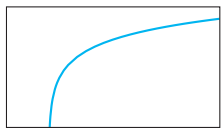
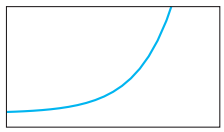
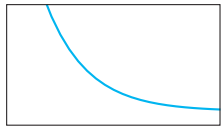
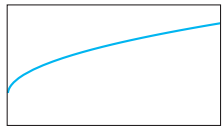
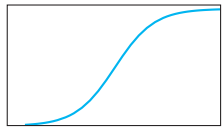
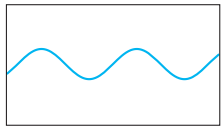
La recta de regresión se determinó y es aproximadamente $y = 0.97x + 23$. Como lo muestra la figura 1.85, la recta ajusta los datos tan bien como podíamos esperar.

Si utilizamos esta función para predecir la temperatura máxima para ese día en Madison, WI, obtenemos $y = 0.97(46) + 23 = 67.62$ (de acuerdo con los registros, la máxima ese día fue 67).

Ahora resuelva el ejercicio 47 partes a) y b).

Estadísticos profesionales de inmediato señalarían que esta función no debería ser confiable como un modelo para todas las ciudades, a pesar del exitoso pronóstico para Madison (por ejemplo, el pronóstico para San Francisco, con una mínima de 54 y una máxima de 64, está alejado por más de 11 grados). *La efectividad de un modelo basado en datos depende fuertemente del número de datos y la forma en que fueron seleccionados.* Las funciones que construimos a partir de datos, en este texto, deben analizarse para ver que tan bien modelan los datos, no para ver qué tan bien modelan las poblaciones mayores de donde provienen los datos.

Además de las rectas, podemos modelar diagramas de dispersión con otras curvas elegidas de la opción apropiada de regresión en una calculadora o una computadora. La opción a la que nos referimos en este libro (y en los capítulos en que las estudiaremos) se muestra en la tabla siguiente:

Tipo de regresión	Ecuación	Gráfica	Aplicaciones
Lineal (Capítulo 2)	$y = ax + b$		Costo fijo más costo variable, crecimiento lineal, velocidad en caída libre, interés simple, depreciación lineal y muchas otras.
Cuadrática (Capítulo 2)	$y = ax^2 + bx + c$ (requiere al menos 3 puntos)		Posición durante caída libre, movimiento de proyectiles, reflectores parabólicos, área como función de una dimensiónlineal, crecimiento cuadrático, etcétera.
Cúbica (Capítulo 3)	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (requiere al menos 4 puntos)		Volumen como función de una dimensión lineal, crecimiento cúbico, varias aplicaciones en donde la regresión cuadrática no proporciona buenos ajustes.
Cuártica (Capítulo 2)	$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (requiere al menos 5 puntos)		Crecimiento cuártico, varias aplicaciones en donde la regresión cuadrática y cúbica no proporcionan buenos ajustes.
Logaritmo natural (ln) (Capítulo 3)	$y = a + b \ln x$ (requiere $x > 0$)		Crecimiento logarítmico, decibeles (sonido), escala Richter (terremotos), modelos inversos de la exponencial.
Exponencial ($b > 1$) (Capítulo 3)	$y = a \cdot b^x$		Crecimiento exponencial, interés compuesto, modelos de población.
Exponencial ($0 < b < 1$) (Capítulo 3)	$y = a \cdot b^x$		Decaimiento radiactivo, depreciación, pérdida de temperatura de un cuerpo que se enfría, etcétera.
Potencia (requiere $x, y > 0$) (Capítulo 2)	$y = a \cdot x^b$		Leyes de cuadrados inversos, tercera ley de Kepler.
Logística (Capítulo 3)	$y = \dfrac{c}{1 + a \cdot e^{-bx}}$		Crecimiento logístico: difusión de un rumor, modelos de población.
Sinusoidal (Capítulo 4)	$y = a \operatorname{sen}(bx + c) + d$		Comportamiento periódico: movimiento armónico, ondas, movimiento circular, etcétera.

MOSTRANDO LOS DIAGNÓSTICOS

Si su calculadora le da las fórmulas de regresión, pero no muestra los valores de r o de r^2 o de R^2, usted puede componer eso. Vaya al menú CATALOG y seleccione un comando denominado "DiagnosticOn". Ingrese el comando en la pantalla principal y vea la respuesta "Done". En su siguiente regresión debe mostrar los valores de diagnóstico.

Éstas gráficas son sólo ejemplos y pueden variar en forma y orientación (por ejemplo, cualquiera de las curvas podría aparecer al revés). El graficador utiliza varias estrategias para ajustar estas curvas a los datos, la mayoría de ellas basadas en la combinación de función composición con regresión lineal. Dependiendo del tipo de regresión, el graficador puede mostrar un número r denominado **coeficiente de correlación** o un número r^2 o R^2, denominado **coeficiente de determinación**. En cualquier caso, una regla empírica útil es: *entre más cercano, en valor absoluto, sea este número a 1, mejor se ajusta la curva a los datos*.

Podemos utilizar este hecho para elegir un tipo de regresión, como en la exploración 1.

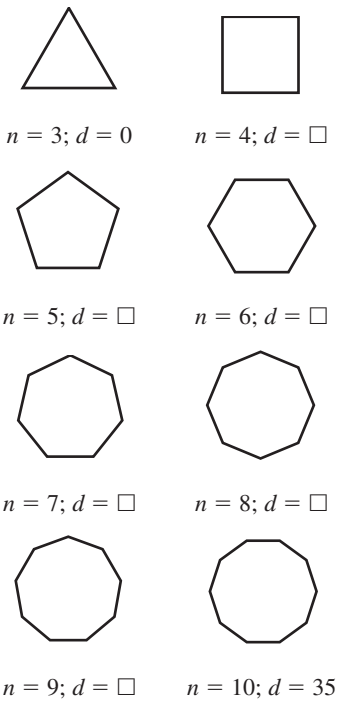


FIGURA 1.86 Algunos polígonos (exploración 1).

EXPLORACIÓN 1 **Diagonales de un polígono regular**

¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular? ¿El número puede expresarse como función del número de lados? Lleve a cabo esta exploración.

1. Dibuje todas las diagonales (es decir, segmentos que conectan puntos no adyacentes) en cada uno de los polígonos regulares que se muestran y llene el número de diagonales (d) en el espacio debajo de la figura. Los valores de d para el triángulo ($n = 3$) y el decágono ($n = 10$) ya se llenaron.
2. Ponga los valores de n en la lista L1, *iniciando con* $n = 4$ (deseamos evitar el valor $y = 0$ para algunas de nuestras regresiones posteriores). Ponga los correspondientes valores de d en la lista L2. Muestre un diagrama de dispersión de los pares ordenados.
3. La gráfica muestra una función creciente con alguna curvatura, pero no es claro qué clase de crecimiento se ajustará mejor. Pruebe estas regresiones (de preferencia en el orden dado) y registre el valor de r^2 o el de R^2 para cada una: lineal, potencia, cuadrática, cúbica, cuártica (observe que la curvatura no es la correcta para el ajuste de curva logarítmica, logística o sinusoidal, así que no vale la pena intentar con ésas).
4. ¿Qué clase de curva se ajusta mejor? (Podría parecer al principio que es un empate, pero vea con mayor cuidado las funciones que obtiene.) ¿Qué tan bueno *es* el ajuste?
5. Regresando, ¿podría haber predicho los resultados de las regresiones cúbica y cuárticas después de ver el resultado de la regresión cuadrática?
6. La curva "de mejor ajuste" proporciona la fórmula real para d como función de n (en el capítulo 9 aprenderá cómo deducir esta fórmula por usted mismo). Utilice la fórmula para determinar el número de diagonales de un polígono con 128 lados.

En capítulos posteriores, cuando estudiemos varios tipos de funciones, diremos más con respecto al ajuste de curvas.

PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO (de la página 69)

PROBLEMA: La tabla siguiente muestra el crecimiento en el índice de precios de computadoras (IPC) para vivienda, para años seleccionados entre 1980 y 2003 (con base en dólares de 1983). ¿Cómo podemos construir una función para predecir el IPC para los años 2004−2010?

Índice de precios de computadoras (vivienda)

Año	IPC vivienda
1980	81.1
1985	107.7
1990	128.5
1995	148.5
1998	160.4
1999	163.9
2000	169.6
2001	176.4
2002	180.3
2003	184.8

Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales, de acuerdo con The Almanac and Book of Facts 2005.

SOLUCIÓN: En la figura 1.87 se muestra un diagrama de dispersión de los datos, en donde x es el número de años desde 1980. Como los datos caen cerca de una recta inclinada, podemos utilizar una calculadora para calcular la recta de regresión para modelar los datos. La ecuación de la recta de regresión es $y = 4.37x + 83.20$.

Como lo muestra la figura 1.88, la recta se ajusta muy bien a los datos.

Para predecir el IPC vivienda para 2004, utilizamos $x = 24$ en la ecuación de la recta de regresión. En forma análoga, podemos predecir el IPC vivienda para cada uno de los años del 2004 al 2010 como se muestra a continuación:

IPC (vivienda) pronosticado

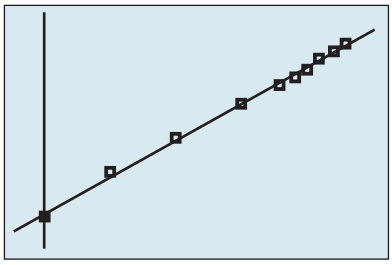
Año	IPC vivienda pronosticado
2004	$y = 4.37(24) + 83.20 = 188.1$
2005	$y = 4.37(25) + 83.20 = 192.5$
2006	$y = 4.37(26) + 83.20 = 196.8$
2007	$y = 4.37(27) + 83.20 = 201.2$
2008	$y = 4.37(28) + 83.20 = 205.6$
2009	$y = 4.37(29) + 83.20 = 209.9$
2010	$y = 4.37(30) + 83.20 = 214.3$

Incluso con un ajuste de regresión tan impresionante como el de la figura 1.88, es riesgoso predecir más allá del conjunto de datos. Estadísticas como el IPC son dependientes de muchos factores volátiles que rápidamente pueden dejar a cualquier modelo matemático obsoleto. De hecho, muchos economistas convencidos de que el crecimiento no podía sostenerse, empezaron a alertar en 2003 que la "burbuja de vivienda" reventaría antes de 2010.



[–2, 25] por [63, 202]

FIGURA 1.87 Diagrama de dispersión de los datos del Índice de Precios al Consumidor.



[–2, 25] por [63, 202]

FIGURA 1.88 Diagrama de dispersión junto con la recta de regresión.

REPASO RÁPIDO 1.7 *(Para obtener ayuda consulte las secciones R.3 y R.4).*

En los ejercicios del 1 al 10 despeje la variable indicada en la fórmula dada.

1. **Área de un triángulo** Despeje h: $A = \frac{1}{2}bh$
2. **Área de un trapecio:** Despeje h: $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$
3. **Volumen de un cilindro circular recto** Despeje h: $V = \pi r^2 h$
4. **Volumen de un cono circular recto** Despeje h: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
5. **Volumen de una esfera** Despeje a r: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
6. **Área de la superficie de una esfera** Despeje a r: $A = 4\pi r^2$
7. **Área de la superficie de un cilindro circular recto** Despeje h: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$
8. **Interés simple** Despeje t: $I = Prt$
9. **Interés compuesto** Despeje P: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
10. **Caída libre desde una altura H** Despeje t: $s = H - \frac{1}{2}gt^2$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.7

En los ejercicios del 1 al 10 escriba una expresión matemática para la cantidad que se describe de forma verbal:

1. Cinco más tres veces un número.
2. Un número x aumentado en 5 y luego triplicado.
3. Diecisiete por ciento de un número x.
4. Cuatro más que el 5% de un número.
5. **Área de un rectángulo** El área de un rectángulo cuya longitud es 12 más que su ancho x.
6. **Área de un triángulo** El área de un triángulo cuya altura es 2 más que la longitud de su base x.
7. **Aumento de salario** Un salario después de un aumento del 4.5%, si el salario original es x dólares.
8. **Pérdida del ingreso** El ingreso después de una disminución del 3% en el ingreso actual de x dólares.
9. **Precio de venta** El precio de venta de un artículo marcado con x dólares, si se descuenta 40% del precio del mercado.
10. **Inclusión del impuesto** El costo real de un artículo que se vende en x dólares, si el impuesto a la venta es 8.75%.

En los ejercicios del 11 al 14 elija una variable y escriba una expresión matemática para la cantidad que se describe en forma verbal.

11. **Costo total** El costo total es \$34,500 más \$5.75 por cada artículo que se produce.
12. **Costo total** El costo total es \$28,000 aumentado en 9% más \$19.85 por cada artículo que se produce.
13. **Ingreso** El ingreso cuando se vende cada artículo en \$3.75.
14. **Utilidad** La utilidad consiste en el pago de una franquicia de \$200,000 más 12% del total de las ventas.

En los ejercicios del 15 al 20 escriba la cantidad específica como función de la variable especificada; en todos los casos ayudará hacer un dibujo.

15. La altura de un cono circular recto es igual a su diámetro. Escriba el volumen del cilindro como función de su radio.
16. Un cateto de un triángulo rectángulo es el doble de largo que el otro cateto. Escriba la longitud de la hipotenusa como función de la longitud del cateto más pequeño.
17. La base de un triángulo isósceles es la mitad de largo que los lados iguales. Escriba el área del triángulo como función de la longitud de la base.
18. Un cuadrado está inscrito en un círculo. Escriba el área del cuadrado como función del radio del círculo.
19. Una esfera está contenida en un cubo, y es tangente a las seis caras. Determine el área de la superficie del cubo como función del radio de la esfera.
20. Un triángulo isósceles tiene su base a lo largo del eje x, con un vértice de la base en el origen y el tercer vértice en el primer cuadrante en la gráfica de $y = 6 - x^2$. Escriba el área del triángulo como función de la longitud de la base.

En los ejercicios del 21 al 36 escriba una ecuación para el problema y resuélvalo.

21. Un número positivo es 4 veces otro número positivo. La suma de los dos números es 620. Determine los dos números.
22. Cuando un número se suma a su doble y a su triple, la suma es 714. Determine los tres números.
23. **Aumento de salario** Mark recibió un aumento de 3.5% en su salario. Su salario después del aumento fue \$36,432. ¿Cuál era su salario antes del aumento?

24. Índice de precios al consumidor En 2003, el índice de precios al consumidor para alimentos y bebidas fue 184.0, después de un fuerte aumento de 2.3% con respecto al año anterior. ¿Cuál fue el índice de precios al consumidor para alimentos y bebidas en 2002? (*Fuente: Oficina de estadísticas laborales.*)

25. Tiempo de viaje Un viajero promedió 52 millas por hora en un viaje de 182 millas. ¿Cuántas horas utilizó en el viaje?

26. Tiempo de viaje En su viaje de 560 millas, el equipo de baloncesto Bruin destinó dos horas más en la autopista interestatal que en carreteras locales. Promediaron 45 mph en carreteras locales y 55 mph en autopistas interestatales. ¿Cuántas horas condujeron en carreteras locales?

27. Precios de venta En una liquidación de camisas, Jackson ve dos camisas que parecen igual de buenas. ¿Cuál es la mejor compra y por qué?

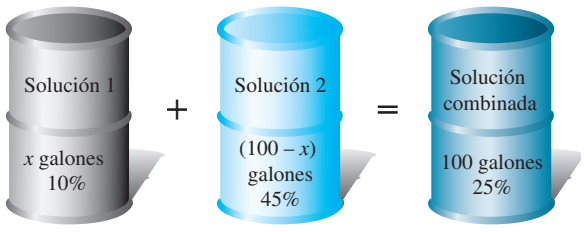


28. Ofertas de trabajo Ruth está analizando dos ofertas de trabajo de los departamentos de ventas de dos compañías competidoras. Una ofrece un salario base de $25,000 más 5% de las ventas brutas; la otra ofrece un salario base de $20,000 más 7% de las ventas brutas. ¿Cuál debe ser el total de las ventas brutas de Ruth para que la segunda oferta de trabajo sea más atractiva que la primera?

29. Computadoras personales De 1996 a 1997, los envíos a todo el mundo de computadoras personales creció de 71,065,000 a 82,400,000. ¿Cuál fue el aumento del porcentaje en los envíos mundiales de computadoras personales? (Fuente: *Dataquest*).

30. Computadoras personales De 1996 a 1997, los envíos en Estados Unidos de computadoras personales creció de 26,650,000 a 30,989,000. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento en envío de computadoras personales en Estados Unidos? (Fuente: *Dataquest*).

31. Mezcla de soluciones ¿Cuánta solución al 10% y cuánta al 45% deben mezclarse para preparar 100 galones de solución al 25%?



a) Escriba una ecuación que modele este problema.

b) Resuelva gráficamente la ecuación.

32. Mezcla de soluciones El laboratorio de química en la universidad de Hardwoods tiene disponibles dos soluciones ácidas. Una tiene 20% de ácido y la otra 35% de ácido. ¿Cuánto de cada una debe emplearse para preparar 25 litros de una solución ácida al 25%?

33. Problema de valor máximo Un cuadrado de lado x pulgadas se corta en cada esquina de una pieza de cartón de 10 por 18 pulgadas y los lados se doblan hacia arriba para formar una caja sin tapa.

a) Escriba el volumen V de la caja como función de x.

b) Determine el dominio de su función, tomando en cuenta las restricciones que el modelo impone a x.

c) Utilice su calculadora graficadora para determinar las dimensiones de los cuadrados cortados que producirán la caja con volumen máximo.

34. Construcción residencial Construcciones DDL está construyendo una casa rectangular que es 16 pies más larga que su ancho. Un canalón para la lluvia debe instalarse en cuatro secciones alrededor de los 136 pies del perímetro de la casa. ¿Qué longitudes de canalón deben cortarse para las cuatro secciones?

35. Protección de una antena En el ejemplo 3, suponga que el disco parabólico tiene un diámetro de 32 pulg y 8 pulg de profundidad, y que el radio del cilindro cartón es de 8 pulg. ¿Qué tan alto debe ser el cilindro para ajustarse en la parte central del disco y estar al ras de la parte superior del disco?

36. Diseño de interior Servicios de Decoración de Renée recomienda colocar un borde alrededor de la parte superior de cuatro paredes en un comedor, que tiene 3 pies más de largo que de ancho. Determine las dimensiones del cuarto, si la longitud total del borde es de 54 pies.

37. Determinación de modelo y solución En un depósito cónico con una llave en el fondo se almacena agua. El depósito tiene una profundidad de 24 pulgadas y un radio de 9 pulgadas, y se llena hasta el borde. Si la llave está abierta permite que el agua salga a una velocidad de 5 pulgadas cúbicas por segundo. ¿Cuál será la profundidad del agua después de 2 minutos?

38. Rendimientos de inversiones Reggie invierte $12,000, parte al 7% de interés anual y parte a 8.5% de interés anual. ¿Cuánto es invertido a cada tasa, si el interés total anual de Reggie es $900?

39. Conversión de unidades Una rueda de una bicicleta en movimiento tiene radio de 16 pulg. Si la rueda da 2 rotaciones por segundo, determine la velocidad de la bicicleta en millas por hora.

40. Rendimientos de inversiones Jackie invierte $25,000, parte al 5.5% de interés anual y el resto a 8.3% de interés anual. ¿Cuánto se invierte a cada tasa, si Jackie recibe un pago de $1571 por concepto de interés de un año?

Preguntas de examen estandarizado

41. **Verdadero o falso** Un coeficiente de correlación proporciona una indicación de qué tan bien una recta o curva de regresión se ajusta a un conjunto de datos. Justifique su respuesta.

42. **Verdadero o falso** La regresión lineal es útil para modelar la posición de un objeto en caída libre. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 43 al 46 indique cuál tipo de regresión es probable que proporcione el modelo más preciso para el diagrama de dispersión que se muestra; no utilice una calculadora graficadora.

A) Regresión lineal

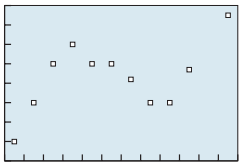
B) Regresión cuadrática

C) Regresión cúbica

D) Regresión exponencial

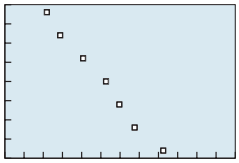
E) Regresión sinusoidal

43. **Opción múltiple**



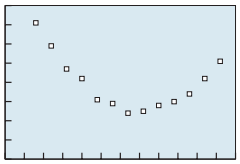
[0, 12] por [0, 8]

44. **Opción múltiple**



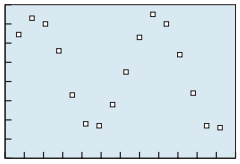
[0, 12] por [0, 8]

45. **Opción múltiple**



[0, 12] por [0, 8]

46. **Opción múltiple**



[0, 12] por [0, 8]

Exploraciones

47. **Fabricación** La compañía de zapatos Buster Green determina que el costo anual, C, de fabricar un par de cierto tipo de zapatos es \$30 por par más \$100,000 en costos fijos en gastos generales. Cada par de zapatos que se fabrican se vende al mayoreo en \$50.

a) Determine una ecuación que modele el costo de producir x pares de zapatos.

b) Determine una ecuación que modele el ingreso producido por la venta de x pares de zapatos

c) Determine cuántos pares de zapatos deben fabricarse y venderse para estar en el punto de equilibrio.

d) Grafique las ecuaciones en a) y b). ¿Cuál es la interpretación gráfica de la respuesta en c)?

48. **Prestaciones de un trabajador** La compañía de John da a sus empleados un contrato donde se hacen explícitos el salario y las contribuciones de la compañía a la pensión, primas de seguro de salud y seguro de invalidez. La compañía utiliza las fórmulas siguientes para calcular estos valores:

Salario	x (Dólares)
Pensión	12% del salario
Seguro de salud	3% del salario
Seguro de invalidez	0.4% del salario

Si el contrato total de John junto con beneficios tiene un valor de \$48,814.20, ¿cuál es su salario?

49. **Fabricación** Queen, Inc., un fabricante de raquetas para tenis, determina que el costo anual, C, de producir x raquetas es \$23 por raqueta más \$125,000 en costos generales fijos. A la compañía le cuesta \$8 encordar una raqueta.

a) Determine una función $y_1 = u(x)$ que modele el costo de producir x raquetas sin cuerdas.

b) Determine una función $y_2 = s(x)$ que modele el costo de producir x raquetas encordadas.



c) Determine una función $y_3 = R_u(x)$ que modele el ingreso generado por la venta de raquetas sin cuerdas.

d) Determine una función $y_4 = R_s(x)$ que modele el ingreso generado por la venta de x raquetas.

e) Grafique y_1, y_2, y_3 y y_4 en forma simultánea, en la ventana [0, 10,000] por [0, 500,000].

f) **Escriba para aprender** Escriba, para la compañía, un reporte donde se recomiende cómo debe fabricar sus raquetas, con o sin cuerdas. Suponga que puede incluir la ventana de visualización en e) como una gráfica en el reporte; utilícela para respaldar su recomendación.

50. Ingresos por hora de obreros en Estados Unidos El ingreso promedio por hora de obreros en Estados Unidos durante 1990−2003 se muestra en la tabla 1.13.

Tabla 1.13 Ingreso promedio por hora

Año	Ingreso promedio por hora
1990	10.19
1991	10.50
1992	10.76
1993	11.03
1994	11.32
1995	11.64
1996	12.03
1997	12.49
1998	13.00
1999	13.47
2000	14.00
2001	14.53
2002	14.95
2003	15.35

Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales de Estados Unidos. Departamento de Trabajo, de acuerdo con The World Almanac and Book of Facts 2005.

a) Haga un diagrama de dispersión de los ingresos por hora (y) como función de los años a partir de 1990 (x).

b) Determine la ecuación de la regresión lineal. Redondee los coeficientes al milésimo más cercano.

c) ¿El valor de r sugiere que el modelo lineal es apropiado?

d) Determine la ecuación de regresión cuadrática (redondee el coeficiente al centésimo más cercano).

e) ¿El valor de R^2 sugiere que un modelo cuadrático es adecuado?

f) Utilice ambas curvas para pronosticar el IPC de vivienda para el año 2010. ¿Cuánto es la diferencia en las estimaciones?

g) Escriba para aprender Utilice los resultados de las partes de la a) a la f) para explicar por qué es riesgoso pronosticar los valores y para valores x que no sean muy cercanos a los puntos, incluso cuando las gráficas de regresión se ajusten muy bien a los puntos.

Ampliación de las ideas

51. Ley de enfriamiento de Newton Una taza de café a 190°F se coloca en un escritorio en una habitación a 72°F. De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura T del café después de t minutos será $T = (190 - 72)b^t + 72$, en donde b es una constante que depende de qué tan fácilmente la sustancia que se enfría pierde calor. Los datos en la tabla 1.14 son de un experimento simulado de lecturas de la temperatura de una taza de café en una habitación a 72°F en 20 intervalos de 1 minuto:

Tabla 1.14 Enfriamiento de una taza de café

Tiempo	Temperatura	Tiempo	Temperatura
1	184.3	11	140.0
2	178.5	12	136.1
3	173.5	13	133.5
4	168.6	14	130.5
5	164.0	15	127.9
6	159.2	16	125.0
7	155.1	17	122.8
8	151.8	18	119.9
9	147.0	19	117.2
10	143.7	20	115.2

a) Construya un diagrama de dispersión de los datos, con los tiempos en la lista L1 y las temperaturas en la lista L2.

b) Almacene L2 – 72 en la lista L3. Ahora, los valores en L3 deben ser una función exponencial ($y = a \times b^x$) de los valores en L1.

c) Determine la ecuación de la regresión exponencial para L3 como una función de L1. ¿Qué tan bien se ajustan los datos?

52. Actividad en equipo Ley de enfriamiento de Newton Si tiene acceso a un equipo de laboratorio (tal como una unidad CBL o CBR para su graficadora) reúna datos, tales como en el ejercicio 51 del enfriamiento de una taza de café. Proceda como sigue:

a) Primero, utilice la sonda de temperatura para registrar la temperatura de la habitación. Es buena idea apagar los ventiladores y el aire acondicionado que podrían afectar la temperatura de la habitación durante el experimento (debe ser constante).

b) Caliente el café. No necesita estar hirviendo, pero debe ser al menos de 160°F (tampoco tiene que ser café).

c) Haga una lista que consista en los valores de la temperatura menos la temperatura de la habitación. Construya un diagrama de dispersión de la lista (y) contra los valores del tiempo (x). Debe parecer que se aproxima al eje x como una asíntota.

d) Determine la ecuación de la curva de regresión exponencial. ¿Qué tan bien se ajusta a los datos?

e) ¿Cuál es la ecuación predicha por la ley de enfriamiento de Newton? (Sustituya la temperatura inicial del café y la temperatura de su habitación por el 190 y 72 de la ecuación del ejercicio 51).

f) Discusión en grupo ¿Qué tipo de factores afectarían el valor de b en la ley de enfriamiento de Newton? Analice sus ideas con el grupo.

Matemáticas en el trabajo

Cuando era niño, siempre me gustaba ver cómo funcionaban las cosas. Leía libros para ver cómo funcionaban y me gustaba pensar en bicicletas, patines o cualquier otro dispositivo. Así que fue natural que me convirtiera en un ingeniero mecánico.

Yo diseño métodos de control de la velocidad de una turbina, de modo que la turbina pueda utilizarse para generar energía eléctrica. La turbina es impulsada por vapor. Una válvula se abre para dejar pasar el vapor, y la velocidad de la turbina es controlada por la cantidad de vapor que se permite entrar al sistema. Una vez que la turbina está girando genera electricidad, la cual activa bombas que determinan la posición de las válvulas. De esta manera, en realidad la turbina controla su propia velocidad.

Utilizamos presión de aceite para hacer que todo esto suceda. El aceite no puede comprimirse, así que cuando lo empujamos dentro de un tubo, éste abre la válvula, que determina cuánto vapor es impulsado a la turbina. Necesitamos las bombas para empujar el aceite que controla la apertura y el cierre de la válvula. La turbina debe ser capaz de alcanzar una velocidad en cierta cantidad de tiempo, así como apagarse suficientemente rápido, en caso de emergencia. La apertura y el cierre de la válvula controlan esta velocidad.



John Jay

Aunque en la actualidad las computadoras realizan gran parte de la matemática, seguimos utilizamos cálculo para analizar esfuerzo y movimiento, así como para analizar vibración, flujo de fluido y calor. Una de las ecuaciones que utilizamos es:

$$\gamma_1 + \frac{{v_1}^2}{2} + gh_1 = \gamma_2 + \frac{{v_2}^2}{2} + gh_2$$

Ésta es una *ecuación de balance de energía*. Las γ representan la densidad del aceite, las v representan la velocidad de flujo del aceite, la g representa la fuerza debida a la gravedad y la h representa la altura del aceite por encima del punto en donde se ejerce la presión. El subíndice 1 indica estas cantidades en un punto en el sistema, y el subíndice 2 indica estas cantidades en otro punto del sistema.

Lo que significa esta ecuación es que la energía total en un punto del sistema debe ser igual a la energía total en otro punto en el sistema. Así, conocemos cuánta energía se ejerce contra las válvulas de control, en dondequiera que estén ubicadas.

Ideas Clave DEL CAPÍTULO 1

PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

Propiedad del factor cero 75
Criterio (prueba) de la recta vertical 87
Criterios para una función par 97
Criterios para una función impar 98
Criterio (prueba) de la recta horizontal 130
Principio de reflexión de la inversa 132
Regla de composición de la inversa 133
Traslación de gráficas 139
Reflexiones de gráficas con respecto a los ejes 141
Alargamientos y compresiones de gráficas 144

PROCEDIMIENTOS

Raíz, cero, intersección x 76
Resolución de problemas 76
Convención acerca del dominio 88
Notación de la inversa 130
Determinación de la inversa de una función 134

CAPÍTULO 1 Ejercicios de repaso

La colección de ejercicios marcados en azul podría utilizarse como un examen del capítulo.

En los ejercicios del 1 al 10 relacione la gráfica con la función de la a) a la j) correspondiente. Utilice su conocimiento del comportamiento de la función, *no* su graficador.

a) $f(x) = x^2 - 1$ **b)** $f(x) = x^2 + 1$

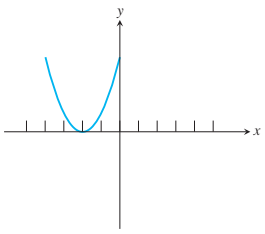
c) $f(x) = (x - 2)^2$ **d)** $f(x) = (x + 2)^2$

e) $f(x) = \dfrac{x - 1}{2}$ **f)** $f(x) = |x - 2|$

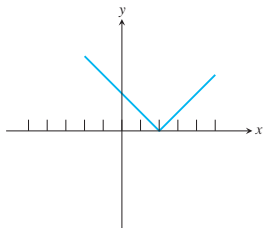
g) $f(x) = |x + 2|$ **h)** $f(x) = -\operatorname{sen} x$

i) $f(x) = e^x - 1$ **j)** $f(x) = 1 + \cos x$

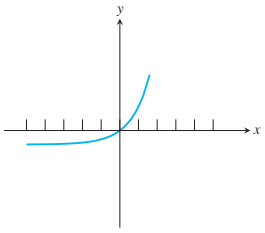
1.



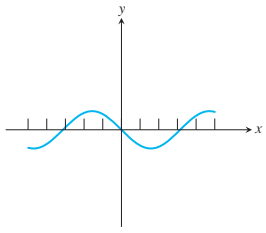
2.



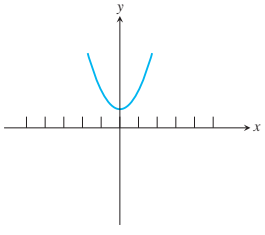
3.



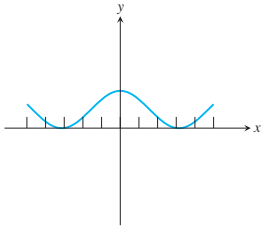
4.



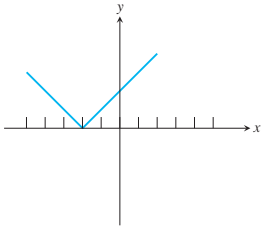
5.



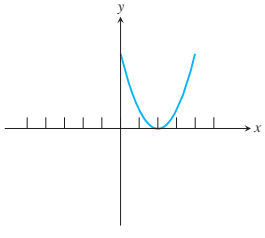
6.



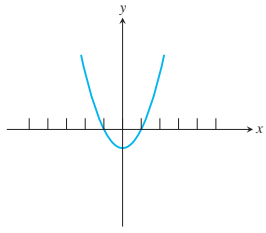
7.



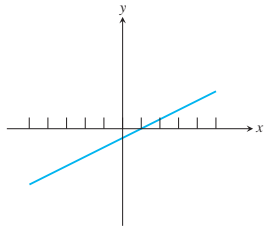
8.



9.



10.



En los ejercicios del 11 al 18 determine **a)** el dominio y **b)** el rango de la función.

11. $g(x) = x^3$ **12.** $f(x) = 35x - 602$

13. $g(x) = x^2 + 2x + 1$ **14.** $h(x) = (x - 2)^2 + 5$

15. $g(x) = 3|x| + 8$ **16.** $k(x) = \sqrt{4 - x^2} - 2$

17. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x}$ **18.** $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

En los ejercicios 19 y 20 grafique la función, e indique si la función es continua en $x = 0$. Si es discontinua, indique si la discontinuidad es removible o no removible.

19. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$ **20.** $k(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x > 0 \\ 3 - x^2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$

En los ejercicios del 21 al 24 determine todas **a)** las asíntotas verticales y **b)** las asíntotas horizontales de la gráfica de la función. Asegúrese de indicar sus respuestas como ecuaciones de rectas.

21. $y = \dfrac{5}{x^2 - 5x}$ **22.** $y = \dfrac{3x}{x - 4}$

23. $y = \dfrac{7x}{\sqrt{x^2 + 10}}$ **24.** $y = \dfrac{|x|}{x + 1}$

En los ejercicios del 25 al 28 grafique la función e indique los intervalos en los que la función es *creciente*.

25. $y = \dfrac{x^3}{6}$ **26.** $y = 2 + |x - 1|$

27. $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ **28.** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

En los ejercicios del 29 al 32 grafique la función y diga si la función está acotada por arriba, acotada por abajo o acotada.

29. $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ **30.** $g(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$

31. $h(x) = 5 - e^x$ **32.** $k(x) = 1000 + \dfrac{x}{1000}$

En los ejercicios del 33 al 36 utilice un graficador para determinar **a)** los valores máximos relativos y **b)** los valores mínimos relativos de la función. También indique el valor de x en los que aparece cada extremo relativo.

33. $y = (x + 1)^2 - 7$ **34.** $y = x^3 - 3x$

35. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$ **36.** $y = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$

En los ejercicios del 37 al 40 grafique la función e indique si la función es impar, par o ninguna de éstas.

37. $y = 3x^2 - 4|x|$ **38.** $y = \operatorname{sen} x - x^3$

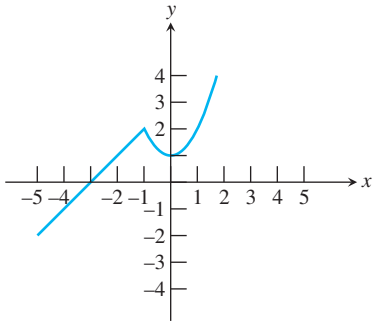
39. $y = \dfrac{x}{e^x}$ **40.** $y = x \cos(x)$

En los ejercicios del 41 al 44 determine una fórmula para $f^{-1}(x)$.

41. $f(x) = 2x + 3$ **42.** $f(x) = \sqrt[3]{x - 8}$

43. $f(x) = \dfrac{2}{x}$ **44.** $f(x) = \dfrac{6}{x + 4}$

Los ejercicios del 45 al 52 se refieren a la función $y = f(x)$ cuya gráfica se da a continuación:



45. Bosqueje la gráfica de $y = f(x) - 1$.

46. Bosqueje la gráfica de $y = f(x - 1)$.

47. Bosqueje la gráfica de $y = f(-x)$.

48. Bosqueje la gráfica de $y = -f(x)$.

49. Bosqueje una gráfica de la relación inversa.

50. ¿La relación inversa define a y como función de x?

51. Bosqueje una gráfica de $y = f(|x|)$.

52. Escriba algebraicamente a f como una función definida por partes. [*Sugerencia:* las partes son traslaciones de dos de nuestras funciones "básicas"].

En los ejercicios del 53 al 58 sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 4$.

53. Determine una expresión para $(f \circ g)(x)$ y proporcione su dominio.

54. Determine una expresión para $(g \circ f)(x)$ y proporcione su dominio.

55. Determine una expresión para $(fg)(x)$ y proporcione su dominio.

56. Determine una expresión para $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y proporcione su dominio.

57. Describa el comportamiento en los extremos de la gráfica de $y = f(x)$.

58. Describa el comportamiento en los extremos de la gráfica de $y = f(g(x))$.

En los ejercicios del 59 al 64 escriba la cantidad especificada como función de la variable especificada. Recuerde dibujar una figura, esto le ayudará.

59. Cuadrado inscrito en un círculo Un cuadrado de lado x, está inscrito en un círculo. Escriba el área del círculo como función de x.

60. Círculo inscrito en un cuadrado Un círculo está inscrito en un cuadrado de lado s. Escriba el área del círculo como función de s.

61. Volumen de un depósito cilíndrico Un depósito cilíndrico con diámetro de 20 pies está parcialmente lleno con petróleo a una profundidad de h pies. Escriba el volumen de petróleo en el depósito como función de h.

62. Vaciado de un depósito cilíndrico Un depósito cilíndrico con diámetro de 20 pies, está lleno con petróleo a una profundidad de 40 pies. El petróleo comienza a vaciarse a una velocidad constante de 2 pies cúbicos por segundo. Escriba el volumen que queda en el depósito t segundos después como una función de t.

63. Vaciado de un depósito cilíndrico Un depósito cilíndrico con diámetro de 20 pies, está lleno con petróleo a una profundidad de 40 pies. El petróleo inicia a vaciarse a una velocidad constante de 2 pies cúbicos por segundo. Escriba la profundidad del petróleo que queda en el depósito t segundos después como una función de t.

64. Vaciado de un depósito cilíndrico Un depósito cilíndrico con diámetro de 20 pies, está lleno con petróleo a una profundidad de 40 pies. El petróleo inicia a vaciarse de modo que la profundidad de petróleo en el depósito disminuye a una velocidad constante de 2 pies por hora. Escriba el volumen que queda en el depósito t horas después como una función de t.

65. Importaciones de petróleo crudo a los Estados Unidos Las importaciones de petróleo crudo a los Estados Unidos provenientes de Canadá en los años 1995-2004 (en miles de barriles por día) se dan en la tabla 1.15.

Tabla 1.15 Importaciones de petróleo crudo provenientes de Canadá

Año	Barriles/Día × 1000
1995	1,040
1996	1,075
1997	1,198
1998	1,266
1999	1,178
2000	1,348
2001	1,356
2002	1,445
2003	1,549
2004	1,606

Fuente: Administración de la Información de Energía, Suministro Mensual de Petróleo, de acuerdo con The World Almanac and Book of Facts 2005.

a) Bosqueje un diagrama de dispersión del número de importaciones en la columna derecha (y) como función de los años desde 1990 (x).

b) Determine la ecuación de la recta de regresión y superpóngala sobre diagrama de dispersión.

c) Con base en la recta de regresión, aproximadamente, ¿cuántos miles de barriles de petróleo importaría Estados Unidos de Canadá en 2010?

66. Los tiempos ganadores en el evento de 100 metros estilo libre para mujeres en los Juegos Olímpicos de Verano desde 1950 se muestran en la tabla 1.16.

Tabla 1.16 100 metros estilo libre para damas

Año	Tiempo	Año	Tiempo
1952	66.8	1980	54.79
1956	62.0	1984	55.92
1960	61.2	1988	54.93
1964	59.5	1992	54.64
1968	60.0	1996	54.50
1972	58.59	2000	53.83
1976	55.65	2004	53.84

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2005.

a) Bosqueje un diagrama de dispersión de los tiempos (y) como función de los años (x) a partir de 1900 (los valores de x variarán de 52 a 104).

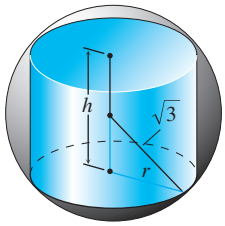
b) Explique por qué un modelo lineal no puede ser adecuado, a largo plazo, para estos tiempos.

c) Los puntos parecen aproximarse a una asíntota horizontal de $y = 52$. ¿Qué significa esto con respecto a los tiempos en este evento Olímpico?

d) Reste 52 de todos los tiempos de modo que se aproximarán a una asíntota de $y = 0$. Haga nuevamente el diagrama de dispersión con los nuevos valores de y. Ahora determine la curva *exponencial* de regresión y superponga su gráfica al diagrama de dispersión desplazado verticalmente.

e) De acuerdo con la curva de regresión, ¿cuál será el tiempo ganador en el evento de 100 metros estilo libre en los Juegos Olímpicos de 2008?

67. Inscripción de un cilindro dentro de una esfera Un cilindro circular recto de radio r y altura h está inscrito dentro de una esfera de radio $\sqrt{3}$ pulgadas.



a) Utilice el teorema de Pitágoras para escribir h como función de r.

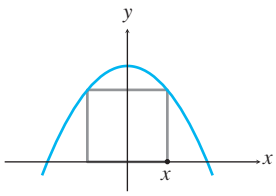
b) Escriba el volumen V del cilindro como función de r.

c) ¿Qué valores de r están en el dominio de V?

d) Bosqueje una gráfica de $V(r)$ en el dominio $[0, \sqrt{3}]$.

e) Utilice su graficador para determinar el volumen máximo que puede tener tal cilindro.

68. Inscripción de un rectángulo bajo una parábola Un rectángulo está inscrito entre el eje x y la parábola $y = 36 - x^2$ con un lado a lo largo del eje x, como se muestra en la figura siguiente.



a) Sea x la coordenada x del punto resaltado en la figura. Escriba el área A del rectángulo como función de x.

b) ¿Qué valores de x están en el dominio de A?

c) Bosqueje una gráfica de $A(x)$ en el dominio.

d) Utilice su graficador para determinar el área máxima que puede tener tal rectángulo.

CAPÍTULO 1 Proyecto

Modelación del crecimiento de un negocio

En 1972, Starbucks Café abrió su primera tienda en Pike Place Market, un legendario mercado al aire libre en Seattle. En 1987, el número de tiendas Starbucks habían crecido a 17 y en 1999 había 2,489 tiendas. Los datos en la tabla siguiente (obtenidos del sitio web de Starbucks Café, www.starbucks.com) resumen el crecimiento de la compañía de 1987 a 1999.

Año	Número de tiendas
1987	17
1988	33
1989	55
1990	84
1991	116
1992	165
1993	272
1994	425
1995	676
1996	1015
1997	1412
1998	1886
1999	2498

Exploraciones

1. Ingrese los datos de la tabla en su graficador o en su computadora (haga que $t = 0$ represente a 1987). Dibuje un diagrama de dispersión para los datos.
2. Consulte la página 157 de este capítulo; examine los tipos de gráficas que se muestran y los tipos de regresión asociados. Observe que el modelo de regresión exponencial con $b > 1$ se parece mucho a los datos. Utilice su graficador o computadora para determinar una ecuación exponencial de regresión para modelar este conjunto de datos (consulte el instructivo de su graficador para las instrucciones de cómo se hace esto).
3. Utilice el modelo exponencial que acaba de encontrar para pronosticar el número total de tiendas Starbucks para 2000 y 2001.
4. En 2000 había 2,498 tiendas Starbucks y 4,709 tiendas en 2001 (puede verificar estos números y encontrar más información actualizada en la sección de inversionistas del sitio web de Starbucks). ¿Por qué hay una gran diferencia entre los valores que predijo y el número real de tiendas Starbucks? ¿Qué característica del mundo real del crecimiento de negocios no fue tomada en cuenta en el modelo de crecimiento exponencial?
5. Usted necesita modelar el conjunto de datos con una ecuación que tome en cuenta el hecho que el crecimiento de los negocios finalmente se estabiliza o alcanza una capacidad límite. Consulte la página 157 nuevamente; observe que la gráfica de modelación logística parece mostrar primero un crecimiento exponencial, pero después se nivela. Utilice su graficador o computadora para determinar la ecuación logística de regresión para modelar este conjunto de datos (vea el instructivo de su graficador para ver las instrucciones de cómo hacer esto).
6. Utilice el modelo logístico que acaba de determinar para predecir el número total de tiendas Starbucks para 2000 y 2001. ¿Cómo se comparan las predicciones con el número real de tiendas para 2000 y 2001? ¿Cuántas tiendas cree que habrá en el año 2020?

CAPÍTULO 2

Funciones polinomiales, potencia y racionales

2.1 Funciones lineales y cuadráticas, y modelación

2.2 Funciones potencia con modelación

2.3 Funciones polinomiales de grado superior con modelación

2.4 Ceros reales de funciones polinomiales

2.5 Ceros complejos y el teorema fundamental del álgebra

2.6 Gráficas de funciones racionales

2.7 Resolución de ecuaciones con una variable

2.8 Resolución de desigualdades con una variable



La humedad y la humedad relativa son medidas empleadas por los pronosticadores del clima. La humedad afecta nuestra comodidad y nuestra salud. Si la humedad es muy poca, nuestra piel puede resecarse y agrietarse, y los virus pueden vivir más tiempo. Si la humedad es muy alta, las altas temperaturas pueden sentirse aun más altas, y el moho, los hongos y los ácaros pueden vivir más. Consulte la página 244 para aprender cómo la humedad relativa se modela como una función racional.

Panorama general del capítulo 2

El capítulo 1 nos permitió establecer las características generales fundamentales de funciones, ecuaciones y gráficas. En este capítulo, y en los dos siguientes, exploraremos la teoría y las aplicaciones específicas de familias de funciones. Comenzaremos esta exploración estudiando tres familias de funciones interrelacionadas —polinomiales, potencias y racionales— que se utilizan en las ciencias sociales, de la conducta y naturales.

Este capítulo incluye un estudio completo de la teoría de las ecuaciones polinomiales; en él se investigan métodos algebraicos, para determinar tanto soluciones reales como complejas de tales ecuaciones, y los relacionamos con el comportamiento gráfico de funciones polinomiales y funciones racionales. El capítulo termina ampliando estos métodos a desigualdades con una variable.

2.1 Funciones lineales y cuadráticas, y modelación

Aprenderá acerca de...

- Las funciones polinomiales
- Las funciones lineales y sus gráficas
- La tasa (razón) promedio de cambio
- La correlación lineal y modelación
- Las funciones cuadráticas y sus gráficas
- Las aplicaciones de las funciones cuadráticas

. . . porque

Muchos problemas de administración y economía se modelan mediante funciones lineales. Las funciones cuadráticas y polinomiales de mayor grado se utilizan para modelar algunas aplicaciones de fabricación.

Funciones polinomiales

Las funciones polinomiales se encuentran entre las más conocidas de todas las funciones.

DEFINICIÓN Función polinomial

Sea n un entero no negativo y sean $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ números reales, con $a_n \neq 0$. La función dada mediante

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

es un **una función polinomial de grado n.** El **coeficiente principal (o líder)** es a_n.

La función cero $f(x) = 0$ es una función polinomial. No tiene grado y no tiene coeficiente principal.

Las funciones polinomiales están definidas y son continuas en todos los números reales. Es importante reconocer si una función es polinomial.

EJEMPLO 1 Identificación de funciones polinomiales

¿Cuáles de las siguientes son funciones polinomiales? Para aquellas que lo sean, indique el grado y el coeficiente principal; para el resto, explique por qué no son polinominales.

a) $f(x) = 4x^3 - 5x - \dfrac{1}{2}$

b) $g(x) = 6x^{-4} + 7$

c) $h(x) = \sqrt{9x^4 + 16x^2}$

d) $k(x) = 15x - 2x^4$

continúa

SOLUCIÓN

a) f es una función polinomial de grado 3 con coeficiente principal 4.

b) g no es una función polinomial a causa del exponente -4.

c) h no es una función polinomial ya que no puede simplificarse a una forma polinomial. Observe que $\sqrt{9x^4 + 16x^2} \neq 3x^2 + 4x$.

d) k es una función polinomial de grado 4 con coeficiente principal -2.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

La función cero y todas las funciones constantes son funciones polinomiales. Algunas otras funciones conocidas también son funciones polinomiales, como se muestra a continuación.

Funciones polinomiales de grado bajo y sin grado

Nombre	Forma	Grado
Función cero	$f(x) = 0$	No definido
Función constante	$f(x) = a$ $(a \neq 0)$	0
Función lineal	$f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$	1
Función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$	2

En la sección 2.3 estudiaremos funciones polinomiales de grado 3 y superiores. En el resto de esta sección centramos nuestra atención en la naturaleza y el uso de funciones polinomiales lineales y cuadráticas.

Funciones lineales y sus gráficas

En las secciones R.3 y R.4 se revisaron ecuaciones lineales y gráficas de rectas, y algunos de los ejemplos del capítulo 1 incluyen funciones lineales. Ahora profundizaremos en las propiedades de funciones lineales.

Una **función lineal** es una función lineal de grado 1 y por tanto tiene la forma

$$f(x) = ax + b, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes y } a \neq 0.$$

Si utilizamos m en lugar de a para el coeficiente principal, y hacemos $y = f(x)$ esta ecuación se transforma en la forma conocida de pendiente intersección al origen de una recta:

$$y = mx + b.$$

HECHO SORPRENDENTE

No todas las rectas en el plano cartesiano son gráficas de funciones lineales.

Las rectas verticales no son gráficas de funciones ya que no satisfacen el criterio de la recta vertical, y las rectas horizontales son gráficas de funciones constantes. Una recta en el plano cartesiano es la gráfica de una función lineal si, y sólo si, es una **recta inclinada**; es decir, ni horizontal ni vertical. Podemos aplicar las fórmulas y métodos de la sección R.4 a problemas que incluyen funciones lineales.

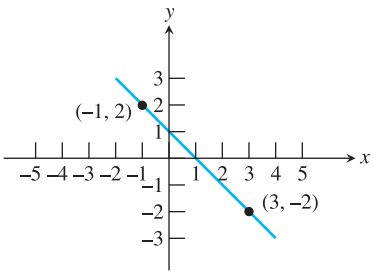


FIGURA 2.1 La gráfica de $y = -x + 1$ pasa por $(-1, 2)$ y $(3, -2)$ (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Determinación de una ecuación de una función lineal

Escriba una ecuación para la función lineal f, tal que $f(-1) = 2$ y $f(3) = -2$.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

Buscamos una recta que pase por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -2)$. La pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-2) - 2}{3 - (-1)} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Utilizando esta pendiente y las coordenadas de $(-1, 2)$ con la fórmula punto pendiente, tenemos

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= -1(x - (-1)) \\ y - 2 &= -x - 1 \\ y &= -x + 1 \end{aligned}$$

La conversión a notación de función nos proporciona la siguiente forma deseada:

$$f(x) = -x + 1.$$

Respalde gráficamente

Podemos graficar $y = -x + 1$ y vemos que incluye los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -2)$ (consulte la figura 2.1).

Confirme numéricamente

Utilizando $f(x) = -x + 1$, probamos que $f(-1) = 2$ y $f(3) = -2$:

$f(-1) = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$, y $f(3) = -(3) + 1 = -3 + 1 = -2$.

Ahora resuelva el ejercicio 7.

Tasa (razón) promedio de cambio



Otra propiedad que caracteriza a una función lineal es su *tasa (razón) de cambio*. La **tasa promedio de cambio** de una función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$, $a \neq b$, es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En el ejercicio 85 se le pide probar el teorema siguiente.

TEOREMA Tasa (razón) de cambio constante

Una función definida sobre todos los números reales es una función lineal si, y sólo si, tiene una tasa promedio de cambio constante entre cualesquier dos puntos en su gráfica.

Puesto que la tasa promedio de cambio de una función lineal es constante, se denomina simplemente la **tasa (razón) de cambio** de la función lineal. La pendiente m, en la fórmula $f(x) = mx + b$, es la tasa de cambio de la función lineal. En la exploración 1 revisamos el ejemplo 7 de la sección R.4 a la luz del concepto de la tasa (razón) de cambio.

EXPLORACIÓN 1 **Modelación de la depreciación con una función lineal**

Los apartamentos Camelot compraron un apartamento de $50,000 que, desde el punto de vista fiscal, se deprecia $2,000 por año durante un periodo de 25 años mediante una depreciación lineal.

1. ¿Cuál es la tasa de cambio del valor del apartamento?
2. Escriba una ecuación para el valor de $v(t)$ del apartamento, como una función lineal del tiempo t desde que el apartamento se pone en servicio.
3. Evalúe $v(0)$ y $v(16)$.
4. Resuelva $v(t) = 39{,}000$.

TASA Y RAZÓN

Todas las tasas son razones, ya sea que se expresan como millas por hora, dólares por hora o, incluso, elevación sobre desplazamiento.

La razón de cambio de una función lineal es la razón, con signo, de la correspondiente razón de la elevación sobre el desplazamiento. Esto es, para una función lineal $f(x) = mx + b$,

$$\text{razón de cambio} = m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Esta fórmula nos permite interpretar de forma numérica la pendiente, o tasa de cambio, de una función lineal. Por ejemplo, en la exploración 1, el valor del edificio de apartamentos cae de $50,000 a $0 en un periodo de 25 años. En la tabla 2.1 calculamos $\triangle y/\triangle x$ para el valor del edificio de apartamentos (en dólares) como una función del tiempo (en años). Como la tasa promedio de cambio $\triangle y/\triangle x$ es la constante no cero $-2{,}000$, el valor del edificio es una función lineal del tiempo que disminuye a una tasa de $2,000/año.

Tabla 2.1 Tasa de cambio del valor del apartamento en la exploración 1: $y = -2{,}000x + 50{,}000$

x (tiempo)	y (valor)	$\triangle x$	$\triangle y$	$\triangle y/\triangle x$
0	50,000			
		1	−2000	−2000
1	48,000			
		1	−2000	−2000
2	46,000			
		1	−2000	−2000
3	44,000			
		1	−2000	−2000
4	42,000			

En la exploración 1, como en otras aplicaciones de funciones lineales, el término constante representa el valor de la función para una entrada de 0. En general, para cualquier función f, $f(0)$ es el **valor inicial de f.** Así que para una función lineal $f(x) = mx + b$, el término constante b es el valor inicial de la función. Para cualquier función polinomial $f(x) = a_n x^n + + \cdots + a_1 x + a_0$, el **término constante** $f(0) = a_0$ es el valor inicial de la función. Por último, el valor inicial de cualquier función —polinomial o de otro tipo—, es la intersección y de su gráfica.

Ahora resumimos lo que hemos aprendido acerca de funciones lineales.

Caracterización de la naturaleza de una función lineal

Punto de vista	Caracterización
Verbal	Polinomio de grado 1
Algebraica	$f(x) = mx + b$ $(m \neq 0)$
Gráfica	Recta inclinada con pendiente m y b como intersección y
Analítica	Función con tasa de cambio constante diferente de cero, m: f es creciente si $m > 0$, decreciente si $m < 0$; valor inicial de la función $= f(0) = b$

Correlación lineal y modelación

En la sección 1.7 abordamos la modelación desde varios puntos de vista; además, hemos aprendido a utilizar un graficador para crear un diagrama de dispersión, a calcular una línea de regresión para un conjunto de datos y a sobreponer una línea de regresión sobre un diagrama de dispersión. Mencionamos la noción de coeficiente de correlación. Ahora profundizaremos en estos conceptos de modelación y regresión.

La figura 2.2 muestra cinco tipos de diagramas de dispersión. Cuando los puntos del diagrama están concentrados a lo largo de una recta, decimos que hay una **correlación lineal** entre las cantidades representadas por los datos. Cuando se dibuja un óvalo alrededor de los puntos en el diagrama de dispersión, hablando en términos generales, entre más angosto, mayor es la correlación lineal.

Cuando el óvalo está inclinado como una recta con pendiente positiva (como en las figuras 2.2a y 2.2b), los datos tienen una **correlación lineal positiva.** Por otra parte, cuando se inclina como una recta con pendiente negativa (como en las figura 2.2d y 2.2e), los datos tienen una **correlación lineal negativa**. Algunos diagramas de dispersión exhiben poca o ninguna correlación lineal (figura 2.2c) o no tiene patrones lineales.

Un número que mide la fuerza y dirección de la correlación lineal de un conjunto de datos es el **coeficiente de correlación (lineal), r**.

Propiedades del coeficiente de correlación, r

1. $-1 \leq r \leq 1$.

2. Cuando $r > 0$, existe una correlación lineal positiva.

3. Cuando $r < 0$, existe una correlación lineal negativa.

4. Cuando $|r| \approx 1$, existe una fuerte correlación lineal.

5. Cuando $r \approx 0$, no hay o es muy débil la correlación lineal.

La correlación reporta al proceso de modelación dándonos una medida de la bondad del ajuste. Sin embargo, una buena práctica de modelación exige que tengamos una razón teórica para seleccionar el modelo. Por ejemplo, en administración los costos fijos se modelan por una función constante (de otra forma no serían fijos).

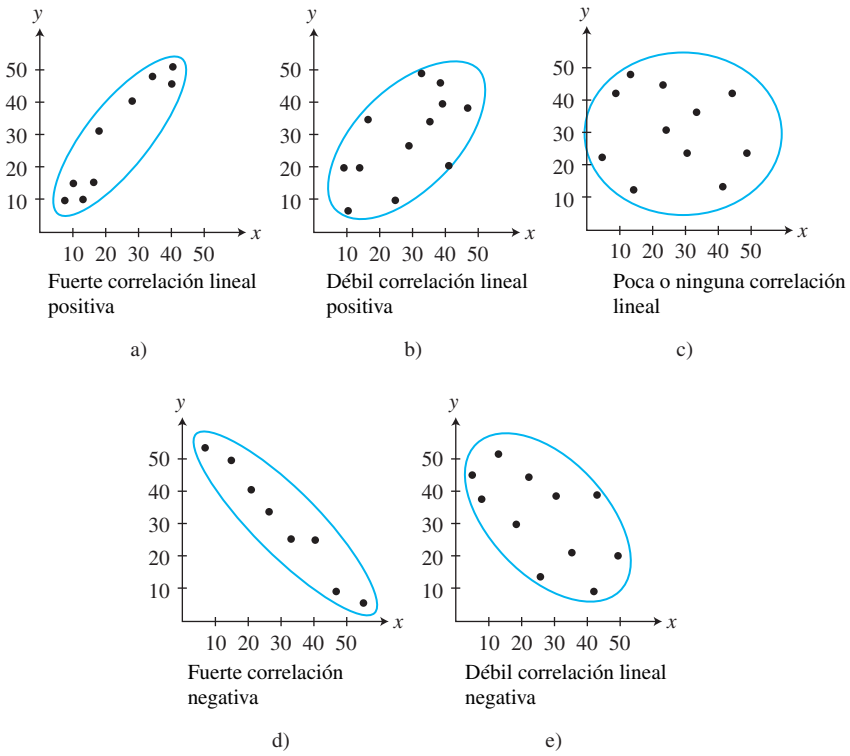


FIGURA 2.2 Cinco diagramas de dispersión y los tipos de correlación lineal que sugieren.

Frecuentemente, en economía un modelo lineal se utiliza para la demanda de un producto como función de su precio. Por ejemplo, suponga que Twin Pixie, una gran cadena de supermercados, realiza un análisis mercadotécnico del cereal de aros de avena para el desayuno con la marca de su tienda. La cadena fija diferentes precios para su caja de 15 onzas en sus diferentes tiendas durante un periodo determinado. Luego, usando esta información, los investigadores de Twin Pixie proyectan las ventas semanales en toda la cadena de tiendas para cada precio y obtienen los datos que se muestran en la tabla 2.2.



Tabla 2.2 Información de ventas semanales con base en la investigación de mercado

Precio por caja	Cajas vendidas
$2.40	38,320
$2.60	33,710
$2.80	28,280
$3.00	26,550
$3.20	25,530
$3.40	22,170
$3.60	18,260

EJEMPLO 3 Modelación y pronóstico de la demanda

Utilice los datos de la tabla 2.2, de la página anterior, para escribir un modelo lineal para la demanda (en cajas vendidas por semana) como una función del precio por caja (en dólares). Describa la fuerza y dirección de la correlación lineal. Luego utilice el modelo para pronosticar las ventas semanales, si el precio se baja a $2.00 o se eleva a $4.00 por caja.

SOLUCIÓN

Modele

Introducimos los datos y obtenemos el diagrama de dispersión que se muestra en la figura 2.3a. Parece que los datos tienen una fuerte correlación negativa.

Luego determinamos el modelo de regresión lineal, que es aproximadamente,

$$y = -15{,}358.93x + 73{,}622.50,$$

donde x es el precio por caja de cereal y y es el número de cajas vendidas.

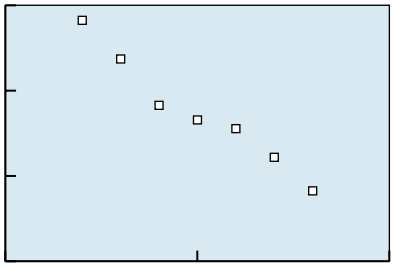
La figura 2.3b muestra el diagrama de dispersión para la tabla 2.2 junto con la recta de regresión. Puede ver que la recta se ajusta muy bien a los datos. El coeficiente de correlación de $r = \approx 0.98$ apoya esta evidencia visual.

Resuelva gráficamente

Nuestra meta es pronosticar las ventas semanales para precios de $2.00 y $4.00 por caja. Utilizando la función para valuar del graficador, como se muestra en la figura 2.3c, vemos que y es alrededor de 42,900 cuando x es 2. De forma análoga, podríamos encontrar que $y \approx 12{,}190$ cuando x es 4.

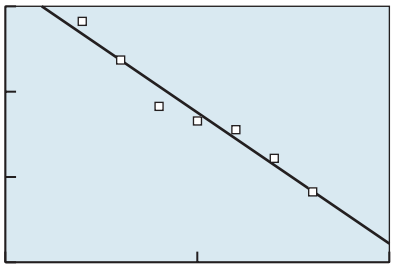
Interpretar

Si Twin Pixie baja el precio para su cereal de aros de avena para el desayuno, de su marca propia, a $2.00, las ventas subirán a casi 42,900 por semana. Por otra parte, si ellos suben el precio a $4.00 por caja, las ventas caerán a alrededor de 12,190 cajas semanales. ***Ahora resuelva el ejercicio 49.***



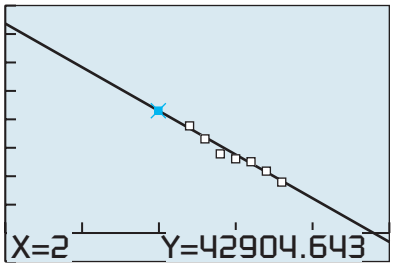
[2, 4] por [10 000, 40 000]

a)



[2, 4] por [10000, 40000]

b)



[0, 5] por [−10000, 80000]

c)

FIGURA 2.3 Diagrama de dispersión y recta de regresión para el ejemplo 3.

Para referencias futuras, resumimos el análisis utilizado en el ejemplo 3.

Análisis de regresión

1. Introduzca y grafique los datos (diagrama de dispersión).
2. Determine el modelo de regresión que se ajusta a la situación del problema.
3. Superponga la gráfica del modelo de regresión al diagrama de dispersión y observe el ajuste.
4. Utilice el modelo de regresión para realizar los pronósticos pedidos en el problema.

Funciones cuadráticas y sus gráficas

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Recuerde de la sección 1.3 que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$ es una parábola. Veremos que la gráfica de toda función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo. Esto es porque la gráfica de cualquier función cuadrática puede obtenerse a partir de la función cuadrática $f(x) = x^2$ mediante una sucesión de traslaciones, reflexiones, alargamientos y compresiones.

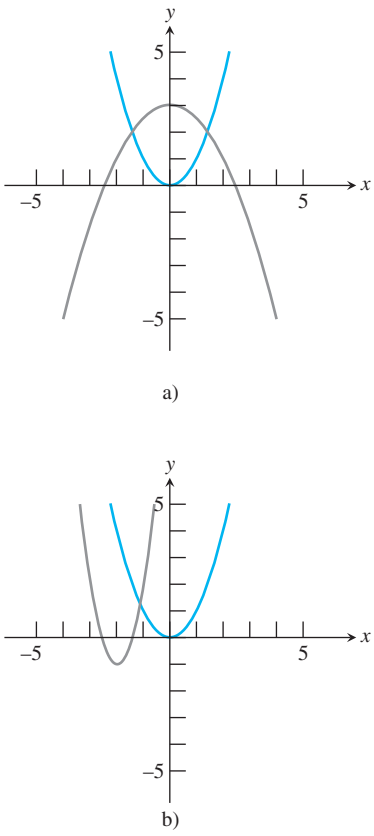


FIGURA 2.4 La gráfica de $f(x) = x^2$ (azul) se muestra con a) $g(x) = -(1/2)x^2 + 3$ y b) $h(x) = 3(x + 2)^2 - 1$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Transformación de la función cuadrática

Describa cómo transformar la gráfica de $f(x) = x^2$ en la gráfica de la función dada. Bosqueje su gráfica manualmente.

a) $g(x) = -(1/2)x^2 + 3$ **b)** $h(x) = 3(x + 2)^2 - 1$

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $g(x) = -(1/2)x^2 + 3$ se obtiene mediante una compresión vertical de la gráfica de $f(x) = x^2$ en un factor de 1/2, lo que refleja el resultado con respecto al eje x, y trasladando la gráfica reflejada 3 unidades hacia arriba. Consulte la figura 2.4a.

b) La gráfica de $h(x) = 3(x + 2)^2 - 1$ se obtiene mediante un alargamiento vertical de la gráfica de $f(x) = x^2$ en un factor de 2 y trasladando la gráfica resultante 2 unidades hacia la izquierda y una unidad hacia arriba. Consulte la figura 2.4b.

Ahora resuelva el ejercicio 49.

La gráfica de $f(x) = ax^2$, $a > 0$ es una parábola que abre hacia arriba. Cuando $a < 0$, su gráfica es una parábola que abre hacia abajo. Sin importar el signo de a, el eje y es la recta de simetría de la gráfica de $f(x) = ax^2$. La recta de simetría para una parábola es su **eje de simetría**, o simplemente **eje**. El punto en la parábola que interseca al eje es el **vértice** de la parábola. Como la gráfica de una función cuadrática siempre es una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo, su vértice siempre es el punto más bajo o más alto de la parábola. El vértice de $f(x) = ax^2$ siempre es el origen, como se ve en la figura 2.5.

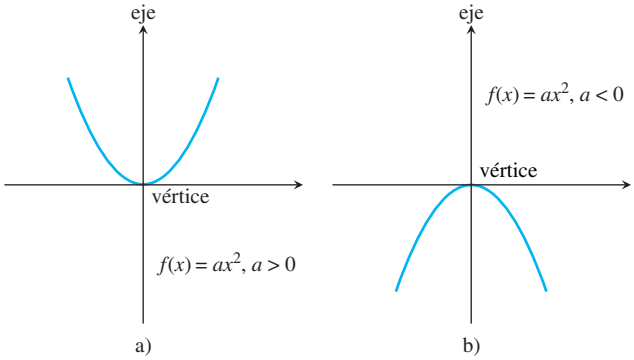
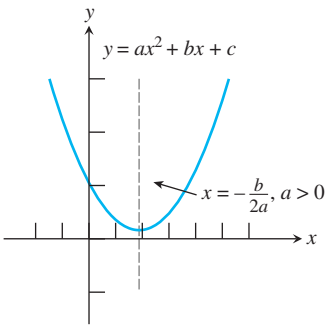


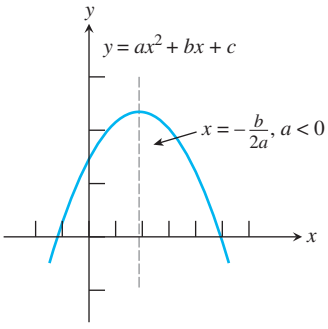
FIGURA 2.5 La gráfica de $f(x) = ax^2$ para a) $a > 0$ y b) $a < 0$.

Al desarrollar $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y comparar los coeficientes resultantes con la **forma cuadrática general** (con una variable) $ax^2 + bx + c$, donde las potencias de x se acomodan en forma descendente, podemos obtener fórmulas para h y k.

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - h)^2 + k \\ &= a(x^2 - 2hx + h^2) + k && \text{Desarrollar } (x - h)^3. \\ &= ax^2 + (-2ah)x + (ah^2 + k) && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= ax^2 + bx + c && \text{Hacer } b = -2ah \text{ y } c = ah^2 + k. \end{aligned}$$



a)



b)

FIGURA 2.6 El vértice está en $x = -b/(2a)$, que por lo tanto también describe el eje de simetría. a) Cuando $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. b) Cuando $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.

Ya que $b = -2ah$ y $c = ah^2 + k$, en la última línea anterior, $h = -b/(2a)$ y $k = c - ah^2$. Usando estas fórmulas, cualquier función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede rescribirse en la forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k.$$

Esta *forma del vértice* para una función cuadrática facilita la identificación del vértice y el eje de la gráfica de la función y el bosquejo de su gráfica.

Forma del vértice de una función cuadrática

Cualquier función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, puede escribirse en la **forma del vértice**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k.$$

La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k) y eje $x = h$, donde $h = -b/(2a)$ y $k = c - ah^2$. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba, y si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo (consulte la figura 2.6).

La fórmula $h = -b/(2a)$ es útil para localizar el vértice y el eje de la parábola asociada con una función cuadrática. Para ayudarle a recordarla, observe que $-b/(2a)$ es parte de la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(Tape el término del radical) No necesita recordar $k = c - ah^2$, ya que en lugar de eso, puede usar $k = f(h)$.

EJEMPLO 5 Determinación del vértice y el eje de una función cuadrática

Utilice la forma del vértice de una función cuadrática para determinar el vértice y el eje de la gráfica de $f(x) = 6x - 3x^2 - 5$. Rescriba la ecuación en la forma del vértice.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

La forma estándar del polinomio de f es

$$f(x) = -3x^2 + 6x - 5.$$

Así que $a = -3$, $b = 6$ y $c = -5$, y las coordenadas del vértice son

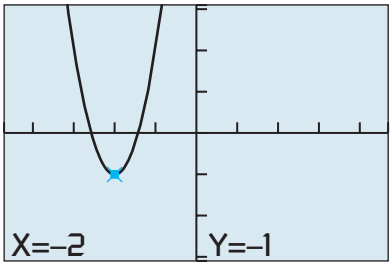
$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-3)} = 1 \text{ y}$$

$$k = f(h) = f(1) = -3(1)^2 + 6(1) - 5 = -2.$$

La ecuación del eje es $x = 1$, el vértice es $(1, -2)$ y la forma del vértice de f es

$$f(x) = -3(x - 1)^2 + (-2).$$

Ahora resuelva el ejercicio 27.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

FIGURA 2.7 Las gráficas de $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$ y $y = 3(x + 2)^2 - 1$ parecen idénticas. El vértice $(-2, -1)$ aparece resaltado (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Uso del álgebra para describir la gráfica de una función cuadrática

Utilice el método de completar un cuadrado para describir la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$. Apoye gráficamente su respuesta.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 12x + 11 \\ &= 3(x^2 + 4x) + 11 && \text{Factorizar 3 en los términos con } x. \\ &= 3(x^2 + 4x + (\,) - (\,)) + 11 && \text{Preparar para completar el cuadrado.} \\ &= 3(x^2 + 4x + (2^2) - (2^2)) + 11 && \text{Completar el cuadrado.} \\ &= 3(x^2 + 4x + 4) - 3(4) + 11 && \text{Distribuir el 3.} \\ &= 3(x + 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

La gráfica de f es una parábola que abre hacia arriba con vértice $(-2, -1)$, tiene eje de simetría $x = -2$ e interseca al eje x alrededor de -2.577 y -1.423. Los valores exactos de las intersecciones x son $x = -2 \pm \sqrt{3}/3$.

Respalde geométricamente

La gráfica en la figura 2.7 apoya estos resultados.

Ahora resuelva el ejercicio 33.

Ahora resumimos lo que conocemos acerca de funciones cuadráticas.

Caracterización de la naturaleza de una función cuadrática

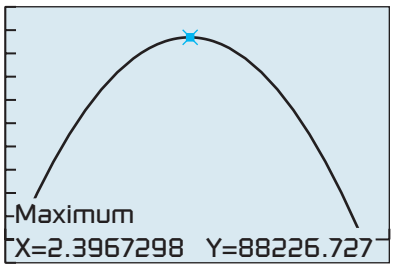
Punto de vista	Caracterización
Verbal	Polinomio de grado 2.
Algebraica	$f(x) = ax^2 + bx + c$ o $f(x) = a(x - h)^2 + k$ $(a \neq 0)$
Gráfica	Parábola con vértice (h, k) y eje $x = h$; abre hacia arriba si $a > 0$, abre hacia abajo si $a < 0$; valor inicial = intersección $y = f(0) = c$; intersecciones $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Aplicaciones de funciones cuadráticas

En economía, cuando la demanda es lineal el ingreso es cuadrático. El ejemplo 7 ilustra esto, ampliando el modelo Twin Pixie del ejemplo 3.

EJEMPLO 7 Pronóstico del ingreso máximo

Utilice el modelo $y = -15{,}358.93x + 73{,}622.50$ del ejemplo 3 para desarrollar un modelo para el ingreso semanal generado por las ventas del cereal de avena para el desayuno. Determine el ingreso máximo y cómo alcanzarlo.



[0, 5] por [–10000, 100000]

FIGURA 2.8 Modelo del ingreso para el ejemplo 7.

SOLUCIÓN

Modele

El ingreso puede determinarse multiplicando el precio por caja, x, por el número de cajas vendidas, y. Así que el ingreso está dado por

$$R(x) = x \cdot y = -15{,}358.93x^2 + 73{,}622.50x,$$

un modelo cuadrático.

Resuelva gráficamente

En la figura 2.8 encontramos que un máximo de casi 88,227 ocurre cuando x es alrededor de 2.40.

Interprete

Para maximizar el ingreso, Twin Pixie debe fijar el precio del cereal de marca propia en \$2.40 por caja. Con base en el modelo, esto producirá un ingreso semanal de alrededor de \$88,227. ***Ahora resuelva el ejercicio 55.***

Recuerde que la tasa promedio de cambio de una función lineal es constante. En el ejercicio 78 verá que la tasa promedio de cambio de una función cuadrática no es constante.

En cálculo estudiará no sólo la tasa promedio de cambio, sino también la *tasa instantánea de cambio*. Tales tasas instantáneas incluyen la velocidad y la aceleración, que a continuación investigaremos.



Desde la época de Galileo Galilei (1564−1642) y de Isaac Newton (1642−1727), se había entendido bien el movimiento vertical de un cuerpo en caída libre. La *velocidad vertical* y la *posición vertical (altura)* de un cuerpo en caída libre (como función del tiempo) son aplicaciones clásicas de funciones lineales y cuadráticas.

Movimiento vertical, en caída libre

La **altura** s y la **velocidad vertical** y de un objeto en caída libre están dadas por

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0 \quad \text{y} \quad v(t) = -gt + v_0,$$

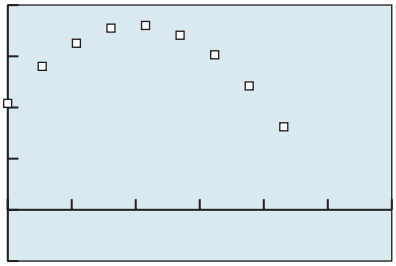
donde t es el tiempo (en segundos), $g \approx 32$ pies/s^2 ≈ 9.8 m/s^2 es la **aceleración debida a la gravedad**, v_0 es la *velocidad vertical inicial* del objeto, y s_0 es su *altura inicial*.

Estas fórmulas no toman en cuenta la resistencia del aire y los dos valores dados para g son válidos al nivel del mar. Aplicamos estas fórmulas en el ejemplo 8 y las usaremos de vez en cuando a lo largo del resto del libro.

Los datos en la tabla 2.3 fueron reunidos en Boone, Carolina del Norte (alrededor de 1 km por arriba del nivel del mar), utilizando una CBR™ (*Calculator-Based Ranger*™, calculadora de campo) y una pelota de hule inflada con aire. La CBR™ se colocó en el piso, con el frente hacia arriba. A cierta altura de la CBR™, la pelota fue lanzada hacia arriba, y cayó directamente sobre el dispositivo.

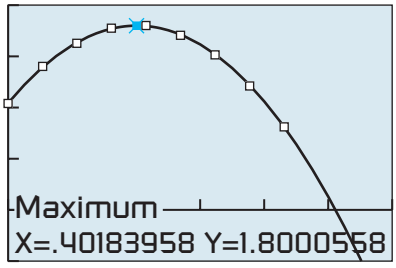
Tabla 2.3 Datos de la pelota de hule, obtenidos de la CBR™

Tiempo (s)	Altura (m)
0.0000	1.03754
0.1080	1.40205
0.2150	1.63806
0.3225	1.77412
0.4300	1.80392
0.5375	1.71522
0.6450	1.50942
0.7525	1.21410
0.8600	0.83173



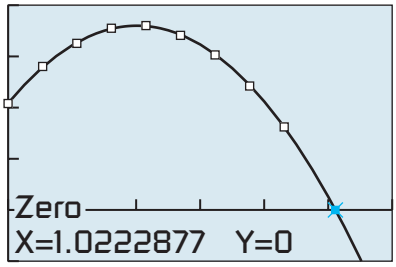
[0, 1.2] por [–0.5, 2.0]

a)



[0, 1.2] por [–0.5, 2.0]

b)



[0, 1.2] por [–0.5, 2.0]

c)

FIGURA 2.9 Diagrama de dispersión y gráfica de la altura vertical contra el tiempo para el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Modelación del movimiento vertical en caída libre

Utilice los datos de la tabla 2.3 para escribir modelos para la altura y la velocidad vertical de la pelota de hule. Luego utilice estos modelos para predecir la altura máxima de la pelota y su velocidad vertical cuando pega en la CBR™.

SOLUCIÓN

Modele

Primero construya un modelo de dispersión de los datos, como se muestra en la figura 2.9a. Utilizando regresión cuadrática, determinamos que el modelo para la altura de la pelota aproximadamente es

$$s(t) = -4.676t^2 + 3.758t + 1.045,$$

con $R^2 \approx 0.999$, que indica un ajuste excelente.

Nuestra teoría de caída libre dice que el coeficiente principal de -4.676 es $-g/2$, dándonos un valor para $g \approx 9.352$ m/s^2, que un poco menos que el valor teórico 9.8 m/s^2. También obtenemos $v_0 \approx 3.758$ m/s. Por lo que el modelo para la velocidad vertical se convierte en

$$v(t) = -gt + v_0 \approx -9.352t + 3.758.$$

Resuelva gráfica y numéricamente

La altura máxima es el valor máximo de $s(t)$, el cual aparece en el vértice de su gráfica. En la figura 2.9b podemos ver que el vértice tiene coordenadas de alrededor de (0.402, 1.800).

En la figura 2.9c, para determinar cuando la pelota golpea el frente de la CBR™, calculamos el cero con valor positivo de la función altura, que es $t \approx 1.022$. Regresamos a nuestro modelo lineal para calcular la velocidad vertical en el impacto:

$$v(1.022) = -9.352(1.022) + 3.758 \approx -5.80 \text{ m/s}.$$

Interprete

La altura máxima que alcanza la pelota fue alrededor de 1.80 m por encima de la CBR™. La rapidez hacia abajo de la pelota es alrededor de 5.80 m/s, cuando golpea la CBR™.

La curva en la figura 2.9b parece ajustarse a los datos extremadamente bien, y $R^2 \approx 0.999$. Sin embargo, pudo haber notado que la tabla 2.3 tiene el par ordenado (0.4300, 1.80392) y que $1.80392 > 1.800$, que es el máximo mostrado en la figura 2.9b. Así que aunque nuestro modelo está fundamentado teóricamente y se ajusta muy bien a los datos, no es un modelo perfecto. A pesar de sus imperfecciones, el modelo proporciona predicciones precisas y confiables con respecto al experimento con la CBR™.

Ahora resuelva el ejercicio 63.

RECUERDE

Recuerde de la sección 1.7 que R^2 es el coeficiente de determinación, el cual mide la calidad del ajuste.

REPASO RÁPIDO 2.1 *(Para obtener ayuda consulte las secciones A.2 y R.4)*

En los ejercicios 1 y 2 escriba una ecuación en la forma pendiente intercepción para la recta con la pendiente m y b la intercepción y dadas.

1. $m = 8, b = 3.6$

2. $m = -1.8, b = -2$

En los ejercicios del 3 al 4 escriba una ecuación de la recta que contiene a los puntos dados. Grafique la recta y los puntos.

3. $(-2, 4)$ y $(3, 1)$ **4.** $(1, 5)$ y $(-2, -3)$

En los ejercicios del 5 al 8 desarrolle la expresión.

5. $(x + 3)^2$ **6.** $(x - 4)^2$

7. $3(x - 6)^2$ **8.** $-3(x + 7)^2$

En los ejercicios del 9 al 10 factorice el trinomio.

9. $2x^2 - 4x + 2$ **10.** $3x^2 + 12x + 12$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.1

En los ejercicios del 1 al 6 determine cuáles son funciones polinomiales. Para las que lo sean, indique el grado y coeficiente principal. Para los que no lo sean, explique por qué no.

1. $f(x) = 3x^{-5} + 17$ **2.** $f(x) = -9 + 2x$

3. $f(x) = 2x^5 - \frac{1}{2}x + 9$ **4.** $f(x) = 13$

5. $h(x) = \sqrt[3]{27x^3 + 8x^6}$ **6.** $k(x) = 4x - 5x^2$

En los ejercicios del 7 al 12 escriba una ecuación para la función lineal f que satisface las condiciones dadas. Grafique $y = f(x)$.

7. $f(-5) = -1$ y $f(2) = 4$

8. $f(-3) = 5$ y $f(6) = -2$

9. $f(-4) = 6$ y $f(-1) = 2$

10. $f(1) = 2$ y $f(5) = 7$

11. $f(0) = 3$ y $f(3) = 0$

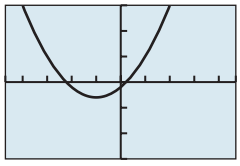
12. $f(-4) = 0$ y $f(0) = 2$

En los ejercicios del 13 al 18 relacione una gráfica con la función. Explique la razón de su elección.

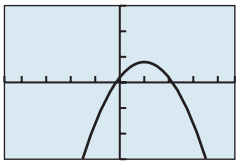
13. $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$ **14.** $f(x) = 3(x + 2)^2 - 7$

15. $f(x) = 4 - 3(x - 1)^2$ **16.** $f(x) = 12 - 2(x - 1)^2$

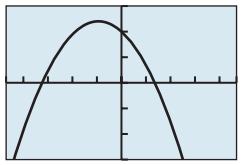
17. $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$ **18.** $f(x) = 12 - 2(x + 1)^2$



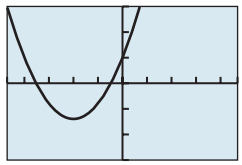
a)



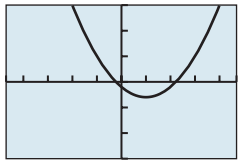
b)



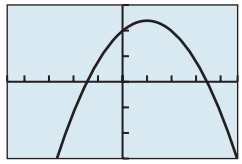
c)



d)



e)



f)

En los ejercicios del 19 al 22 describa cómo transformar la gráfica de $f(x) = x^2$ en la gráfica de la función dada. Haga un bosquejo de cada gráfica.

19. $g(x) = (x - 3)^2 - 2$ **20.** $h(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

21. $g(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 3$ **22.** $h(x) = -3x^2 + 2$

En los ejercicios del 23 al 26 determine el vértice y el eje de la gráfica de la función.

23. $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$ **24.** $g(x) = -3(x + 2)^2 - 1$

25. $f(x) = 5(x - 1)^2 - 7$ **26.** $g(x) = 2(x - \sqrt{3})^2 + 4$

En los ejercicios del 27 al 32 determine el vértice y el eje de la gráfica de la función. Reescriba la ecuación para la función en la forma del vértice.

27. $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ **28.** $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$

29. $f(x) = 8x - x^2 + 3$ **30.** $f(x) = 6 - 2x + 4x^2$

31. $g(x) = 5x^2 + 4 - 6x$ **32.** $h(x) = -2x^2 - 7x - 4$

En los ejercicios del 33 al 38 complete el cuadrado para describir la gráfica de cada función. Respalde gráficamente sus respuestas.

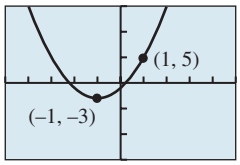
33. $f(x) = x^2 - 4x + 6$ **34.** $g(x) = x^2 - 6x + 12$

35. $f(x) = 10 - 16x - x^2$ **36.** $h(x) = 8 + 2x - x^2$

37. $f(x) = 2x^2 + 6x + 7$ **38.** $g(x) = 5x^2 - 25x + 12$

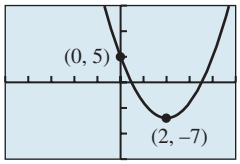
En los ejercicios del 39 al 42 escriba una ecuación para la parábola que se muestra. Utilice el hecho que uno de los puntos dados es el vértice.

39.



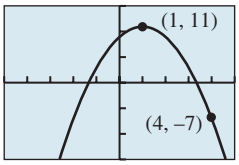
[–5, 5] por [–15, 15]

40.



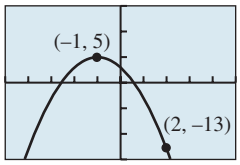
[–5, 5] por [–15, 15]

41.



[–5, 5] por [–15, 15]

42.



[–5, 5] por [–15, 15]

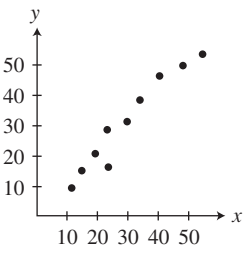
En los ejercicios 43 y 44 escriba una ecuación para la función cuadrática cuya gráfica contiene al vértice y al punto dado.

43. Vértice (1, 3), punto (0, 5).

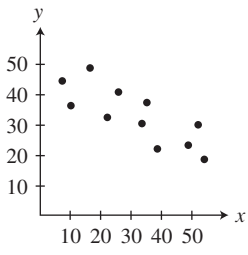
44. Vértice (22, 25), punto (24, 227).

En los ejercicios del 45 al 48 describa la fuerza y dirección de la correlación lineal.

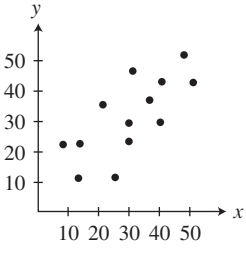
45.



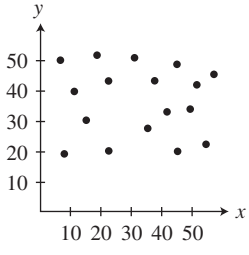
46.



47.



48.



49. Comparación de edad y peso Se pesó a un grupo de niños; sus edades y pesos están registrados en la tabla 2.4.

Tabla 2.4 Edad y peso de niños

Edad (meses)	Peso (libras)
18	23
20	25
24	24
26	32
27	33
29	29
34	35
39	39
42	44

a) Dibuje un diagrama de dispersión para estos datos.

b) Escriba para aprender Describa la fuerza y dirección de la correlación entre la edad y el peso.

50. Esperanza de vida La tabla 2.5 muestra el número promedio de años adicionales que se espera viva un ciudadano de Estados Unidos para varias edades.

Tabla 2.5 Esperanza de vida en Estados Unidos

Edad (años)	Esperanza de vida (años)
10	67.4
20	57.7
30	48.2
40	38.8
50	29.8
60	21.5
70	14.3
80	8.6

Fuente: Centro Nacional de Estadísticas de Salud de Estados Unidos, Estadísticas Vitales de los Estados Unidos.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Escriba para aprender Describa la fuerza y dirección de la correlación entre edad y esperanza de vida.

51. Depreciación lineal Mai Lee compró una computadora para su oficina y la deprecia durante 5 años mediante el método lineal. Si su valor inicial fue $2,350, ¿cuál es su valor 3 años después?

52. Costo de fabricación de muñecas La empresa de fabricación de muñecas de Patrick tiene costos fijos semanales de $350. Si el costo para los materiales es $4.70 por muñeca y en promedio los costos totales semanales son $500, ¿alrededor de cuántas muñecas fabrica Patrick cada semana?

53. La tabla 2.6 muestra la compensación promedio por hora de trabajadores de la producción durante varios años. Sea x el número de años desde 1970, de modo que x 5 5 indique 1975, y así sucesivamente.

Tabla 2.6 Promedio de los trabajadores de producción

Año	Compensación por hora (dólares)
1975	6.36
1985	13.01
1995	17.19
2002	21.37

Fuente: Oficina de Estadísticas Laborales, de acuerdo con The World Almanac and Book of Facts, 2005.

a) Escriba para aprender Determine el modelo de regresión lineal para los datos. ¿Qué representa la pendiente en el modelo de regresión?

b) Utilice el modelo de regresión lineal para predecir la compensación por hora de los trabajadores de producción en el año 2010

54. Determinación del área máxima De entre todos los rectángulos cuyos perímetros sean 100 pies, determine las dimensiones del que tenga el área máxima.

55. Determinación del ingreso El precio por unidad p (en dólares) de un popular juguete, cuando se producen x (en miles) de unidades se modela mediante la función

$$\text{precio} = p = 12 - 0.025x.$$

El ingreso (en miles de dólares) es el producto del precio por unidad y el número de unidades (en miles) producidas. Esto es,

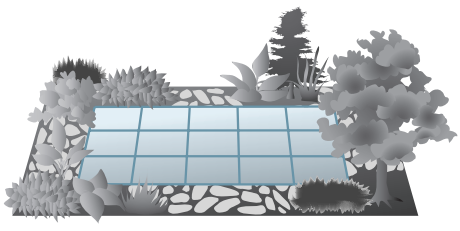
$$\text{ingreso} = xp = x(12 - 0.025x).$$

a) Indique las dimensiones de una ventana de visualización que muestre una gráfica del modelo de ingresos al producir de 0 a 100,000 unidades.

b) ¿Cuántas unidades deben producirse, si el ingreso total será $1,000,000?

56. Determinación de las dimensiones de una pintura Una gran pintura estilo Rubens es 3 pies más larga que ancha. El marco de madera es de 12 pulgadas de ancho, y el área de la pintura y del marco es de 208 pies2. Determine las dimensiones de la pintura.

57. Uso de álgebra para el diseño de jardines Julie Stone diseñó un patio rectangular de 25 pies por 40 pies. Este patio está rodeado por una pasillo adoquinado de ancho uniforme con pequeños árboles y arbustos plantados. Si el área A de este pasillo es 504 pies^2, determine el ancho x del pasillo.



58. Administración de la planeación La compañía de renta de apartamentos Bienvenido a Casa tiene 1,600 unidades disponibles, de las cuales 800 están rentadas actualmente en $300. Una encuesta de mercado indica que cada disminución de $5 tendrá como resultado la renta de 20 más.

a) Determine una función $R(x)$ que modele el ingreso total por renta obtenido por Bienvenido a Casa, donde x es el número de disminuciones de $5 en la renta mensual.

b) Determine una gráfica de $R(x)$ para los niveles de renta entre $175 y $300 (esto es, $0 \le x \le 25$) que muestre con claridad un máximo para $R(x)$.

c) ¿Cuál renta dará a Bienvenido a Casa el ingreso máximo mensual?

59. Actividad en equipo Negocio de bebidas La compañía Bebidas Dulces vende latas de soda en máquinas y determina que, en promedio, vende 26,000 latas al mes cuando las latas se venden en 50¢ cada una. Por cada aumento de cinco centavos en el precio, las ventas mensuales disminuyen en 1,000 latas.

a) Determine una función $R(x)$ que modele el ingreso total que obtiene Bebidas Dulces, en donde x es el número de aumentos de $0.05 en el precio de una lata.

b) Determine una gráfica de $R(x)$ que claramente muestre un máximo para $R(x)$.

c) ¿Cuánto debe cobrar Bebidas Dulces por cada lata para obtener el ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

60. Actividad en equipo Jack fue nombrado Gerente de Distrito del Mes en la Compañía Sylvania Wire, debido a su estudio de contratación. En él, muestra que cada uno de los 30 vendedores que él supervisa promediaron $50,000 en ventas mensuales, y que por cada vendedora adicional que él contrataría, las ventas promedio descenderían $1,000 por mes. Jack concluyó su estudio sugiriendo un número de vendedores que deberían contratarse para maximizar las ventas. ¿Cuál fue el número?

61. Movimiento en caída libre Como una promoción para el parque de béisbol de los Astros de Houston, se llevó a cabo una competencia para ver quién podía lanzar una bola de béisbol lo más alto posible, desde la primera fila de cierto nivel de asientos, 83 pies por encima del nivel del campo. El ganador lanzó la bola con una velocidad vertical de 92 pies/s y cayó en el campo de juego.

a) Determine la altura máxima de la bola de béisbol.

b) ¿Cuánto tiempo estuvo la bola en el aire?

c) Determine su velocidad vertical cuando chocó con el pasto.

62. Máquina lanzadora de bolas de béisbol La pequeña liga de Sandusky utiliza una máquina lanzadora para entrenar a los jugadores de 10 años de edad en la atrapada de tiros elevados. La máquina lanza la bola directamente hacia arriba a una velocidad de 48 pies/s desde una altura de 3.5 pies.

a) Determine una ecuación que modele la altura de la bola t segundos después que es lanzada.

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola? ¿Cuántos segundos tardará en llegar a esa altura?

63. Planeación de fuegos artificiales En la celebración del 4 de julio en Bakersville se disparan fuegos artificiales mediante un control remoto desde un foso que está 10 pies por debajo del nivel del suelo.

a) Determine una ecuación que modele la altura de una bomba aérea, t segundos después de que es disparada hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies/s. Grafique la ecuación.

b) ¿Cuál es la altura máxima por encima del suelo que la bomba aérea alcanza? ¿Cuántos segundos tardará en llegar a esa altura?

64. Ingeniería de jardines En su primer proyecto después de haber sido contratada por Land Scapes International, Becky diseña una fuente decorativa que lanzará chorros de agua a una altura máxima de 48 pies. ¿Cuál debe ser la velocidad inicial de cada gota de agua para alcanzar la altura máxima? (*Sugerencia*: Utilice un graficador y una estrategia de prueba y error).



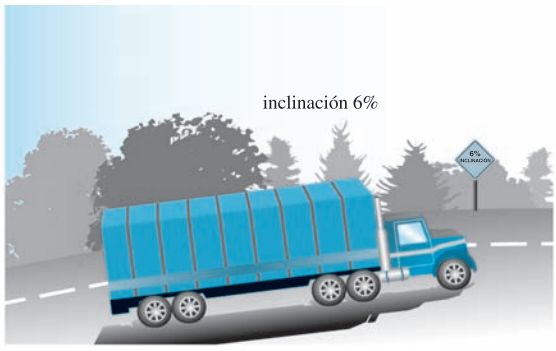
65. Solicitudes de patentes Mediante una regresión cuadrática sobre los datos en la tabla 2.7, pronostique el año en que el número de solicitudes de patentes llegará a 450,000. Establezca $x = 0$ para 1980, $x = 10$ para 1990 y así sucesivamente.

Tabla 2.7 Solicitudes de patentes en Estados Unidos

Año	Solicitudes (miles)
1980	113.0
1990	176.7
1995	228.8
1998	261.4
1999	289.5
2000	315.8
2001	346.6
2002	357.5
2003	367.0

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 200422005 (124° edición, Washington, D.C., 2004).

66. Ingeniería de caminos La autopista interestatal 70 oeste de Denver, Colorado tiene un tramo señalado con una inclinación de 6%. Esto significa que para un cambio horizontal de 100 pies hay un cambio vertical de 6 pies. A: inclinación 6%.



a) Determine la pendiente de este tramo de la autopista.

b) En una autopista con una inclinación de 6%, ¿cuál es la distancia horizontal para ascender 250 pies?

c) Una señal en la autopista dice "inclinación 6% para las siguientes 7 millas". Estime cuántos pies de cambio vertical hay a lo largo de estas 7 millas (en una milla hay 5280 pies).

67. Se pesó un grupo de niñas; sus edades y pesos se registraron en la tabla 2.8.

Tabla 2.8 Edades y pesos de niñas

Edad (meses)	Peso (libras)
19	22
21	23
24	25
27	28
29	31
31	28
34	32
38	34
43	39

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine el modelo de regresión lineal.

c) Interprete la pendiente de la ecuación de la recta de regresión.

d) Superponga la recta de regresión al diagrama de dispersión.

e) Utilice el modelo para pronosticar el peso de una niña de 30 meses de edad.

68. La tabla 2.9 muestra el ingreso mediano de familias de Estados Unidos (en dólares de 2003) para ciertos años. Sea x el número de años a partir de 1940.

Tabla 2.9 Ingreso mediano de familias en Estados Unidos (en dólares de 2003)

Año	Ingreso mediano familiar ($)
1947	21,201
1973	43,219
1979	45,989
1989	49,014
1995	48.679
2000	54,191
2003	52,680

Fuente: Instituto de Política Económica. *The State of Working America 2004/2005* (ILR Press, 2005).

a) Determine el modelo de regresión lineal para los datos.

b) Utilícelo para pronosticar el ingreso mediano de familias en Estados Unidos en 2010.

En los ejercicios del 69 al 70 complete el análisis para la función básica dada.

69. Análisis de una función

FUNCIÓN BÁSICA
La función identidad

$f(x) = x$
Dominio:
Rango:
Continuidad:
Comportamiento creciente-decreciente:
Simetría:
Acotamiento:
Extremos (máx/mín) locales:
Asíntotas horizontales:
Asíntotas verticales:
Comportamiento en los extremos:

70. Análisis de una función

FUNCIÓN BÁSICA
La función cuadrática

$f(x) = x^2$
Dominio:
Rango:
Continuidad:
Comportamiento creciente-decreciente:
Simetría:
Acotamiento:
Extremos (máx/mín) locales:
Asíntotas horizontales:
Asíntotas verticales:
Comportamiento en los extremos:

Preguntas de examen estandarizado

71. Verdadero o falso El valor inicial de $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ es 0. Justifique su respuesta.

72. Verdadero o falso La gráfica de la función $f(x) = x^2 - x + 1$ no tiene intersección x. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 73 al 76 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver el problema.

En los ejercicios 73 y 74 $f(x) = mx + b, f(-2) = 3$ y $f(4) = 1$.

73. Opción múltiple ¿Cuál es el valor de m?

A) 3 **B)** -3 **C)** -1 **D)** 1/3 **E)** $-1/3$

74. Opción múltiple ¿Cuál es el valor de b?

A) 4 **B)** 11/3 **C)** 7/3 **D)** 1 **E)** $-1/3$

En los ejercicios 75 y 76 sea $f(x) = 2(x + 3)^2 - 5$.

75. Opción múltiple ¿Cuál es el eje de simetría de la gráfica de f?

A) $x = 3$ **B)** $x = -3$ **C)** $y = 5$ **D)** $y = -5$ **E)** $y = 0$

76. Opción múltiple ¿Cuál es el vértice de f?

A) (0, 0) **B)** (3, 5) **C)** (3, -5) **D)** (-3, 5) **E)** (-3, -5)

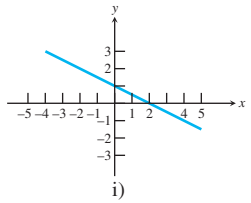
Exploraciones

77. Escriba para aprender Identificación de gráficas de funciones lineales

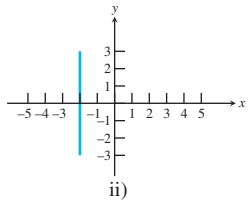
a) ¿Cuáles de las rectas graficadas a continuación son gráficas de funciones lineales? Explique.

b) ¿Cuáles de las rectas graficadas a continuación son gráficas de funciones? Explique.

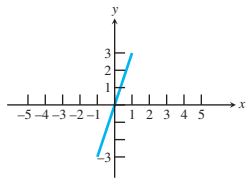
c) ¿Cuáles de las rectas graficadas a continuación no son gráficas de funciones? Explique.



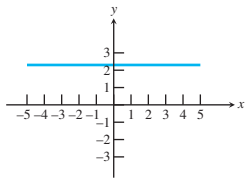
i)



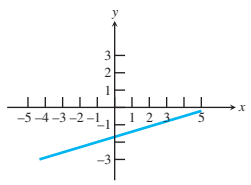
ii)



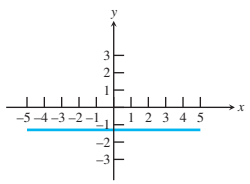
iii)



iv)



v)



vi)

78. Tasa promedio de cambio Sea $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x + 2$, $h(x) = 7x - 3$, $k(x) = mx + b$ y $l(x) = x^3$.

a) Calcule la tasa promedio de cambio de f de $x = 1$ a $x = 3$.

b) Calcule la tasa promedio de cambio de f de $x = 2$ a $x = 5$.

c) Calcule la tasa promedio de cambio de f de $x = a$ a $x = c$.

d) Calcule la tasa promedio de cambio de g de $x = 1$ a $x = 3$.

e) Calcule la tasa promedio de cambio de g de $x = 1$ a $x = 4$.

f) Calcule la tasa promedio de cambio de g de $x = a$ a $x = c$.

g) Calcule la tasa promedio de cambio de h de $x = a$ a $x = c$.

h) Calcule la tasa promedio de cambio de k de $x = a$ a $x = c$.

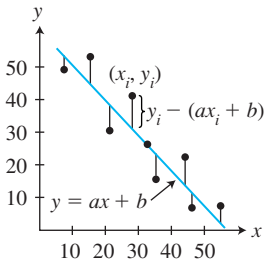
i) Calcule la tasa promedio de cambio de l de $x = a$ a $x = c$.

Ampliación de las ideas

79. Minimización de la suma de cuadrados La recta de regresión lineal con frecuencia se conoce también como **recta de mínimos cuadrados**, ya que minimiza la suma de los cuadrados de los **residuales**, la diferencia entre los valores y reales y los valores y predichos:

$$residual = y_i - (ax_i + b),$$

donde (x_i, y_i) son los puntos dados y $y = ax + b$ es la ecuación de regresión, como se muestra en la figura.



Utilice estas definiciones para explicar por qué la recta de regresión obtenida de invertir las parejas ordenadas en la tabla 2.2 no es la inversa de la función obtenida en el ejemplo 3.

80. Recta mediana-mediana Lea acerca de la recta mediana-mediana, busque en Internet, en el manual de su graficadora o en una biblioteca. Luego utilice el siguiente conjunto de datos para completar este problema:

$$\{(2, 8), (3, 6), (5, 9), (6, 8), (8, 11), (10, 13), (12, 14), (15, 4)\}$$

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine la ecuación de la recta de regresión y grafíquela

c) Determine la ecuación de la recta mediana-mediana y grafíquela.

d) Escriba para aprender Para estos datos, ¿cuál de las dos rectas parece ajustarse mejor? ¿Por qué?

81. Suponga que $b^2 - 4ac > 0$ para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

a) Pruebe que la suma de las dos soluciones de esta ecuación es $-b/a$.

b) Pruebe que el producto de las dos soluciones de esta ecuación es c/a.

82. Conexión entre álgebra y geometría Pruebe que el eje de la gráfica de $f(x) = (x - a)(x - b)$ es $x = (a + b)/2$, donde a y b son números reales.

83. Conexión entre álgebra y geometría Identifique el vértice de la gráfica de $f(x) = (x - a)(x - b)$, donde a y b son cualesquier números reales.

84. Conexión entre álgebra y geometría Pruebe que si x_1 y x_2 son números reales y son ceros de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces el eje de la gráfica de f es $x = (x_1 + x_2)/2$

85. Pruebe el Teorema (razón) de cambio constante, que se enunció en la página 172.

2.2 Funciones potencia con modelación

Aprenderá acerca de...

- Las funciones potencia y variación
- Las funciones monomiales y sus gráficas
- Las gráficas de funciones potencia
- La modelación con funciones potencia

. . . porque

Las funciones potencia especifican las relaciones proporcionales de geometría, química y física.

Funciones potencia y variación

Cinco de las funciones básicas presentadas en la sección 1.3 fueron funciones potencia. Éstas son una familia importante de funciones por derecho propio y son importantes bloques de construcción para otras funciones.

DEFINICIÓN Función potencia

Cualquier función que pueda escribirse en la forma

$$f(x) = k \cdot x^a, \text{ donde } k \text{ y } a \text{ son constantes diferentes de cero,}$$

es una **función potencia**. La constante a es la **potencia (exponente)** y k es la **constante de variación** o **constante de proporcionalidad**. Decimos que $f(x)$ **varía como** la potencia $a^{\text{ésima}}$ de x, o que $f(x)$ **es proporcional** a la $a^{\text{ésima}}$ potencia de x.

En general, si $y = f(x)$ varía como una potencia constante de x, entonces y es una función potencia de x. La mayoría de las funciones más comunes de geometría y ciencias son funciones potencia.

Nombre	Fórmula	Potencia	Constante de variación
Circunferencia	$C = 2\pi r$	1	2π
Área de un círculo	$A = \pi r^2$	2	π
Fuerza de gravedad	$F = k/d^2$	-2	k
Ley de Boyle	$V = k/P$	-1	k

Estos cuatro modelos de funciones potencia implican relaciones de salida a partir de entrada que pueden expresarse en el lenguaje de *variación y proporción*:

- La circunferencia de un círculo varía directamente con su radio.
- El área encerrada por un círculo es directamente proporcional al cuadrado de su radio.
- La fuerza debida a la gravedad que actúa sobre un objeto es inversamente proporcional al cuadrado de su radio.
- La ley de Boyle indica que el volumen de un gas encerrado (a temperatura constante) varía en forma inversamente proporcional a la presión aplicada.

Las fórmulas de función potencia con potencia positiva son enunciados de **variación directa**, y las fórmulas de función potencia con potencias negativas son enunciados de **variación inversa.** A menos que se incluya la palabra *inversamente* en un enunciado de variación, la variación se supone que es directa, como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Escritura de una fórmula con función potencia

Con base en evidencia empírica y las leyes de la física, se ha encontrado que el periodo T para la oscilación completa de un péndulo varía como el cuadrado de la longitud del péndulo l, siempre que la oscilación sea pequeña con respecto a la longitud del péndulo. Exprese esta relación como una función potencia.

SOLUCIÓN Puesto que no se establece otra cosa, la variación es directa. Entonces, la potencia es positiva. El texto indica que T es una función de l. Utilizando a k como la constante de variación obtenemos

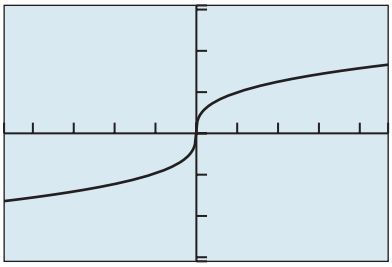
$$T(l) = k\sqrt{l} = k \cdot l^{1/2}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 17.

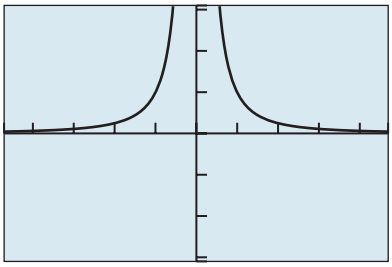
La sección 1.3 presentó cinco funciones potencia básicas:

$$x,\ x^2,\ x^3,\ x^{-1} = \frac{1}{x},\quad \text{y}\quad x^{1/2} = \sqrt{x}.$$

El ejemplo 2 describe otras dos funciones potencia: la *función raíz cúbica* y la función *recíproca del cuadrado*.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
a)



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
b)

FIGURA 2.10 Las gráficas de a) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ y b) $g(x) = 1/x^2 = x^{-2}$. (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Análisis de funciones potencia

Indique la potencia y la constante de variación para la función, y luego grafíquela y analícela.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

SOLUCIÓN

a) Puesto que $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} = 1 \cdot x^{1/3}$, su función potencia es 1/3, y su constante de variación es 1. La gráfica de f se muestra en la figura 2.10a.

Dominio: Todos los reales

Rango: Todos los reales

Continua

Creciente para toda x

Simétrica con respecto al origen (una función impar)

No está acotada ni por arriba ni por abajo

Ni tiene extremos locales

Ni tiene asíntotas

Comportamiento en los extremos: $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$

Hechos interesantes: La función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es la inversa de la función cúbica.

b) Puesto que $g(x) = 1/x^2 = x^{-2} = 1 \cdot x^{-2}$, su potencia es -2 y su constante de variación es 1. La gráfica de g se muestra en la figura 2.10b.

Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Rango: $(0, \infty)$

Continua en su dominio; discontinua en $x = 0$

Creciente en $(-\infty, 0)$; decreciente en $(0, \infty)$

Simétrica con respecto al eje y (una función par)

Acotada por abajo, pero no por arriba

Ni tiene extremos locales

continúa

Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntota vertical: $x = 0$

Comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} (1/x^2) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} (1/x^2) = 0$

Hechos interesantes: $g(x) = 1/x^2$ es la base de las *leyes científicas de cuadrado inverso*, por ejemplo, el principio gravitacional del inverso del cuadrado $F = k/d^2$, como se mencionó antes.

Así que, en ocasiones, $g(x) = 1/x^2$ se denomina función cuadrado inverso, pero *no es* la inversa de la función cuadrática, sino que es su inverso *multiplicativo*.

Ahora resuelva el ejercicio 27.

Funciones monomiales y sus gráficas

Una función polinomial con un solo término es una función potencia que también se denomina *función monomial*.

DEFINICIÓN Función monomial

Cualquier función que puede escribirse como

$$f(x) = k \text{ o } f(x) = k \cdot x^n,$$

donde k es una constante y n es un entero positivo, es una **función monomial**.

Así que la función cero y las funciones constantes son funciones monomiales, pero la función monomial más común es una función potencia con una potencia entera positiva, que es el grado del monomio. Las funciones básicas x, x^2 y x^3 son funciones monomiales comunes. Es importante entender las gráficas de las funciones monomiales, ya que toda función polinomial es o bien una función monomial o una suma de funciones monomiales.

En la exploración 1 miramos más de cerca seis funciones monomiales básicas. Tienen la forma x^n para $n = 1, 2, \ldots, 6$. Las agrupamos en potencias pares e impares.

EXPLORACIÓN 1 Comparación de gráficas de funciones monomiales

Grafique las ternas de funciones en las ventanas que se indican y explique en qué se parecen las gráficas y en qué difieren. Considere los aspectos relevantes de análisis del ejemplo 2. ¿Cuáles pares ordenados tienen en común las tres gráficas?

1. $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ y $h(x) = x^5$ en la ventana $[-2.35, 2.35]$ por $[-1.5, 1.5]$, luego en $[-5, 5]$ por $[-15, 15]$ y por último $[-20, 20]$ por $[-200, 200]$.
2. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ y $h(x) = x^6$, en la ventana $[-1.5, 1.5]$ por $[-0.5, 1.5]$, luego en $[-5, 5]$. por $[-5, 25]$ y por último en $[-15, 15]$ por $[-50, 400]$.

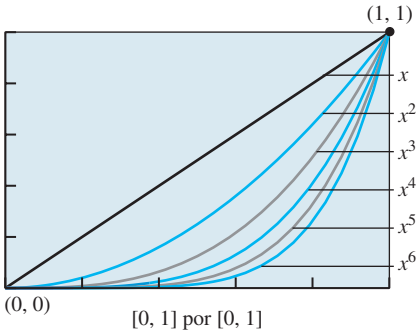


FIGURA 2.11 Las gráficas de $f(x) = x^n$, $0 \le x \le 1$, para $n = 1, 2, \ldots, 6$.

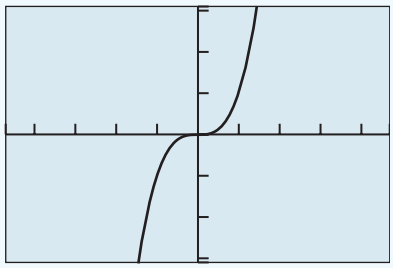
Con base en la exploración 1, vemos que

$f(x) = x^n$ es una función par si n es par y una función impar si n es impar.

A consecuencia de la simetría es suficiente conocer el comportamiento de $f(x) = x^n$ en el primer cuadrante. La figura 2.11 muestra las gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, \ldots, 6$ en el primer cuadrante y cerca del origen.

Las conclusiones siguientes acerca de la función básica $f(x) = x^3$ pueden extraerse de sus investigaciones en la exploración 1.

FUNCIÓN BÁSICA Función cúbica



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

FIGURA 2.12 La gráfica de $f(x) = x^3$.

$f(x) = x^3$
Dominio: Todos los reales
Rango: Todos los reales
Continua
Creciente para toda x
Simétrica con respecto al origen (una función impar)
No está acotada por arriba ni por abajo
No tiene extremos locales
No tiene asíntotas horizontales
No tiene asíntotas verticales
Comportamiento en los extremos $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$

EJEMPLO 3 Graficación de funciones monomiales

Describa cómo obtener la gráfica de la función dada a partir de la gráfica de $g(x) = x^n$ con la misma potencia n. Bosqueje la gráfica y apoye su respuesta con un graficador.

a) $f(x) = 2x^3$ **b)** $f(x) = -\frac{2}{3}x^4$

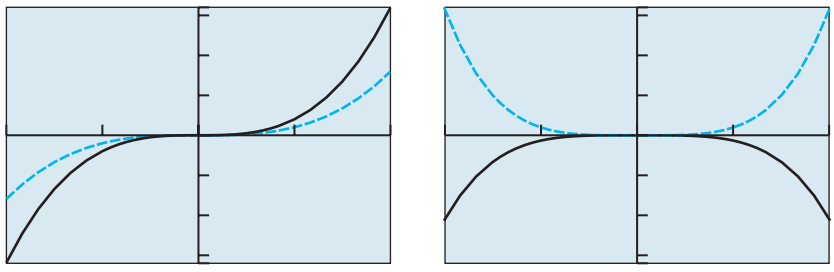
SOLUCIÓN

a) Obtenemos la gráfica de $f(x) = 2x^3$ mediante un alargamiento vertical de la gráfica de $g(x) = x^3$ en un factor de 2. Ambas son funciones impares. Consulte la figura 2.13a.

b) Obtenemos la gráfica de $f(x) = -(2/3)x^4$ mediante una compresión vertical de la gráfica de $g(x) = x^4$ en un factor de 2/3 y luego reflejándola con respecto al eje x. Ambas son funciones pares. Consulte la figura 2.13b.

Ahora resuelva el ejercicio 31.

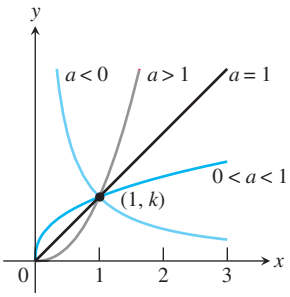
En el ejercicio 65 le pedimos explorar el comportamiento gráfico de funciones potencia de la forma x^{-n} y $x^{1/n}$, donde n es un entero positivo.



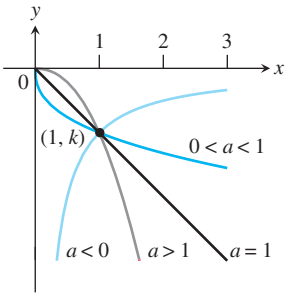
[–2, 2] por [–16, 16]
a)

[–2, 2] por [–16, 16]
b)

FIGURA 2.13 Las gráficas de a) $f(x) = 2x^3$ con el monomio básico $g(x) = x^3$ y b) $f(x) = -(2/3)x^4$ con monomio básico $g(x) = x^4$ (ejemplo 3).



a)



b)

FIGURA 2.14 Las gráficas de $f(x) = k \cdot x^a$ para $x \geq 0$. a) $k > 0$, b) $k < 0$.

Gráficas de funciones potencia

Las gráficas en la figura 2.14 representan las cuatro formas que son posibles para funciones potencias generales de la forma $f(x) = kx^a$ para $x \geq 0$. En cada caso, la gráfica de f contiene $(1, k)$. Aquéllas con potencias positivas también pasan por el $(0, 0)$. Aquéllas con exponentes negativos son asintóticas a ambos ejes.

Cuando $k > 0$, la gráfica se encuentra en el primer cuadrante, pero cuando $k < 0$, la gráfica se encuentran en el cuarto cuadrante.

En general, para cualquier función potencia $f(x) = k \cdot x^a$, debe suceder alguna de las tres cosas siguientes, cuando $x < 0$:

- f no está definida en $x < 0$, como en el caso $f(x) = x^{1/2}$ y $f(x) = x^{\pi}$.
- f es una función par, por lo que f es simétrica con respecto al eje y, como es el caso para $f(x) = x^{-2}$ y $f(x) = x^{-2/3}$.
- f es una función impar, por lo que f es simétrica con respecto al origen, como es el caso para $f(x) = x^{-1}$ y $f(x) = x^{7/3}$.

Predecir la forma general de la gráfica de una función potencia es un proceso de dos pasos, como se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Graficación de funciones potencia $f(x) = k \cdot x^a$

Indique los valores de las constantes k y a. Describa la parte de la curva que está en el primero o cuarto cuadrante. Determine si f es par, impar o no está definida para $x < 0$. Describa el resto de la curva, si existe. Grafique la función para ver coincide con la descripción.

a) $f(x) = 2x^{-3}$ **b)** $f(x) = -0.4x^{1.5}$ **c)** $f(x) = -x^{0.4}$

SOLUCIÓN

a) Ya que $k = 2$ es positiva y $a = -3$ es negativa, la gráfica pasa por $(1, 2)$ y es asintótica a ambos ejes. La gráfica es decreciente en el primer cuadrante. La función f es impar ya que

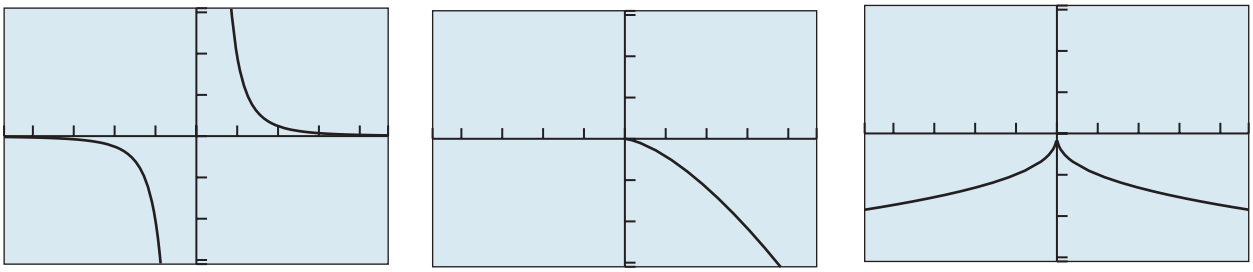
$$f(-x) = 2(-x)^{-3} = \frac{2}{(-x)^3} = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3} = -f(x).$$

Así que su gráfica es simétrica con respecto al origen. La gráfica en la figura 2.15a respalda todos los aspectos de la descripción.

b) Como $k = -0.4$ es negativa y $a = 1.5 > 1$, la gráfica contiene a $(0, 0)$ y pasa por $(1, -0.4)$. En el cuarto cuadrante es decreciente. La función f no está definida para $x < 0$ porque

$$f(x) = -0.4x^{1.5} = -\frac{2}{5}x^{3/2} = -\frac{2}{5}(\sqrt{x})^3,$$

y la función raíz cuadrada no está definida para $x < 0$. Por lo que la gráfica de f no tiene puntos en los cuadrantes II y III. La gráfica en la figura 2.15b coincide con la descripción.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
a)

[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
b)

[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
c)

FIGURA 2.15 Las gráficas de a) $f(x) = 2x^{-3}$, b) $f(x) = -0.4x^{1.5}$ y c) $f(x) = -x^{-0.4}$ (ejemplo 4).

c) Puesto que $k = -1$ es negativo y $0 < a < 1$, la gráfica contiene a $(0, 0)$ y pasa por $(1, -1)$. En el cuarto cuadrante es decreciente. La función f es par ya que

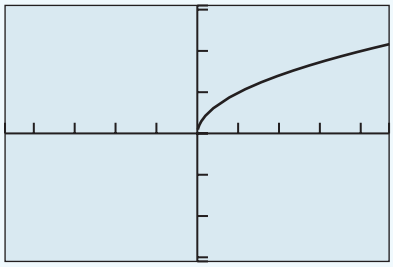
$$f(-x) = -(-x)^{0.4} = -(-x)^{2/5} = -(\sqrt[5]{-x})^2 = -(-\sqrt[5]{x})^2$$
$$= -(\sqrt[5]{x})^2 = -x^{0.4} = f(x).$$

Por lo que la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y. La gráfica en la figura 2.15c se ajusta a la descripción.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

La información siguiente acerca de la función básica $f(x) = \sqrt{x}$ se deduce de la investigación en el ejercicio 65.

FUNCIÓN BÁSICA Función raíz cuadrada



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

FIGURA 2.16 La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

$f(x) = \sqrt{x}$
Dominio: $[0, \infty)$
Rango: $[0, \infty)$
Continua en $[0, \infty)$
Creciente en $[0, \infty)$
No es simétrica
Acotada por abajo pero no por arriba
Mínimo local en $x = 0$
No tiene asíntotas horizontales
Ni tiene asíntotas verticales
Comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$

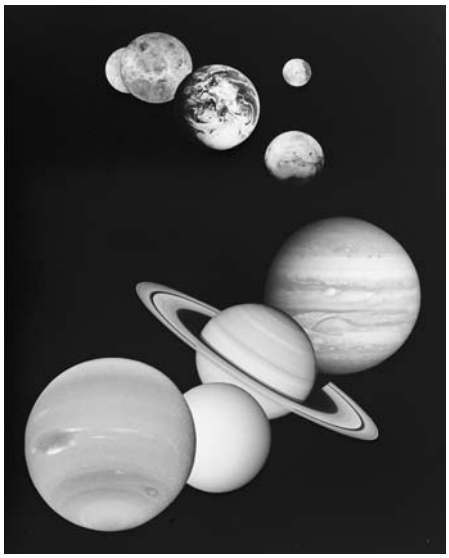
Modelación con funciones potencia

El destacado astrónomo Johannes Kepler (1571−1630) desarrolló tres leyes de movimiento planetario que se utilizan hasta la actualidad. La tercera ley de Kepler establece que el cuadrado del periodo de órbita T (el tiempo requerido para dar una vuelta completa alrededor del Sol) para cada planeta es proporcional al cubo de su distancia promedio a al sol. La tabla 2.10 en la página siguiente proporciona datos relevantes para los seis planetas que fueron conocidos en la época de Kepler. Las distancias están dadas en millones de kilómetros, o gigametros (Gm).

Tabla 2.10 Distancia promedio y periodos de las órbitas para los seis planetas más internos

Planeta	Distancia promedio desde el sol (Gm)	Periodo de la órbita (días)
Mercurio	57.9	88
Venus	108.2	225
Tierra	149.6	365.2
Marte	227.9	687
Júpiter	778.3	4,332
Saturno	1427	10,760

Fuente: Shupe, Dorr, Payne, Hunsiker, et. al., National Geographic Atlas of the World (rev. 6° ed). Washington, DC: National Geographic Society. 1992, ilustración 116.



UN POCO DE HISTORIA

El ejemplo 5 muestra el poder predictivo de un modelo bien fundamentado. El ejercicio 67 le pide determinar la forma elegante de la ecuación $T^2 = a^3$ de Kepler, que él reportó en *The Harmony of the World* en 1619.

EJEMPLO 5 Modelación de información planetaria con una función potencia

Utilice los datos de la tabla 2.10 para obtener un modelo de una función potencia para el periodo de la órbita como función de la distancia promedio al Sol. Luego utilice el modelo para predecir el periodo de la órbita de Neptuno, que en promedio está a 4,497 Gm del Sol.

SOLUCIÓN

Modele

Primero construya un diagrama de dispersión de los datos, como se muestra en la figura 2.17a. Usando regresión de una potencia, determinamos el modelo para el periodo de la órbita como

$$T(a) \approx 0.20a^{1.5} = 0.20a^{3/2} = 0.20\sqrt{a^3}.$$

La figura 2.17b muestra el diagrama de dispersión para la tabla 2.10 junto con una gráfica del modelo de regresión que se acaba de encontrar. Puede ver que la curva se ajusta muy bien a los datos. El coeficiente de determinación es $r^2 \approx 0.999999912$, que indica un sorprendente ajuste y respalda la evidencia visual.

Resuelva numéricamente

Para predecir el periodo de la órbita para Neptuno, sustituimos su distancia promedio del Sol, en el modelo de regresión

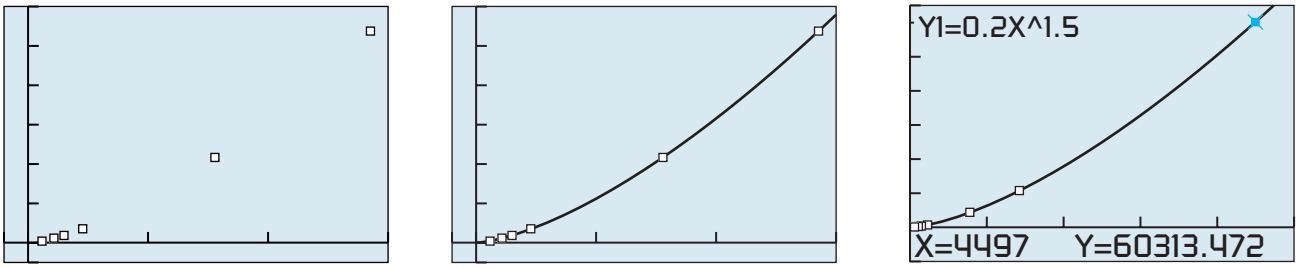
$$T(4{,}497) \approx 0.2(4{,}497)^{1.5} \approx 60{,}313.$$

Interprete

Neptuno tarda alrededor de 60,313 días en orbitar el sol, o casi 165 años terrestres, que es el valor dado en el *National Geographic Atlas of the World*.

La figura 2.17c informa este resultado y proporciona alguna indicación de las distancias relativas implicadas. Neptuno está mucho más lejos del Sol que los seis planetas más internos y especialmente de los cuatro más cercanos al Sol: Mercurio, Venus, Tierra y Marte.

Ahora resuelva el ejercicio 55.



[–100, 1,500] por [–1,000, 12,000] a)

[–100, 1,500] por [–1,000, 12,000] b)

[0, 5,000] por [–10,000, 65,000] c)

FIGURA 2.17 Diagrama de dispersión y gráficas para el ejemplo 5.

En el ejemplo 6 regresamos al movimiento en caída libre con un nuevo giro. Los datos en la tabla provienen del mismo experimento con CBR™ referenciados en el ejemplo 8 de la sección 2.1. Esta vez observamos las distancias hacia abajo (en metros) que la pelota ha recorrido desde que alcanzó su altura máxima y su velocidad hacia abajo (en metros por segundo). Puede demostrase (consulte el ejercicio 68) que la rapidez en caída libre es proporcional a una potencia de la distancia recorrida.

EJEMPLO 6 Modelación de rapidez en caída libre contra la distancia

Utilice los datos en la tabla 2.11 para obtener un modelo de función potencia para la rapidez p contra la distancia recorrida d. Luego emplee el modelo para predecir la rapidez de la pelota al golpear dado que el impacto ocurre cuando $d \approx 1.80$ m.

Tabla 2.11 Datos de la pelota de hule del experimento con una CBR™

Distancia (m)	Rapidez (m/s)
0.00000	0.00000
0.04298	0.82372
0.16119	1.71163
0.35148	2.45860
0.59394	3.05209
0.89187	3.74200
1.25557	4.49558

SOLUCIÓN

Modele

La figura 2.18a, en la página siguiente, es un diagrama de dispersión de los datos. Utilizando regresión para la potencia, determinamos que el modelo para la rapidez p contra la distancia d es aproximadamente

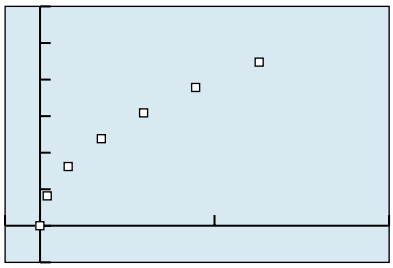
$$p(d) \approx 4.03d^{0.5} = 4.03d^{1/2} = 4.03\sqrt{d}.$$

(Consulte las notas al margen). La figura 2.18b muestra el diagrama de dispersión para la tabla 2.11 junto con una gráfica de la ecuación de regresión para la potencia que acabamos de encontrar. Puede ver que la curva se ajusta bien a los datos. El coeficiente de determinación es $r^2 \approx 0.99770$, lo que indica un buen ajuste y apoya la evidencia visual.

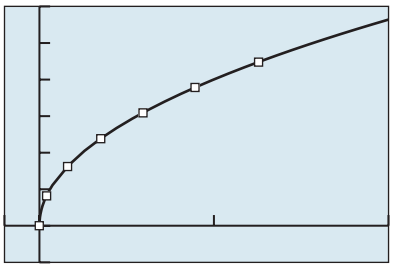
continúa

¿POR QUÉ *p*?

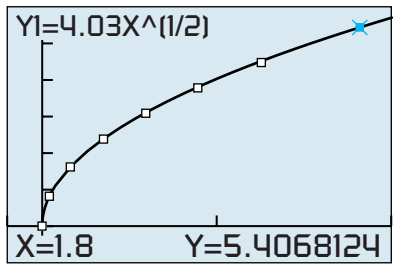
Utilizamos p para la rapidez para distinguirla de la velocidad v. Recuerde que la rapidez es el *valor absoluto* de la velocidad.



[–0.2, 2] por [–1, 6]
a)



[–0.2, 2] por [–1, 6]
b)



[–0.2, 2] por [–1, 6]
c)

FIGURA 2.18 Diagrama de dispersión y gráficas para el ejemplo 6.

UNA ADVERTENCIA

La rutina de regresión tradicionalmente utilizada para calcular modelos de funciones potencia incluyen tomar logaritmos de los datos, y por lo tanto, todos los datos deben ser números estrictamente positivos. Así que debemos dejar fuera a (0, 0) para calcular la ecuación de regresión de la potencia.

Resuelva numéricamente

Para predecir la rapidez al impacto, sustituimos $d \approx 1.80$ en el modelo de regresión obtenido para la potencia:

$$p(1.80) \approx 5.4.$$

Consulte la figura 2.18c.

Interprete

La rapidez en el impacto es de alrededor de 5.4 m/s. Esto es un poco menos que el valor obtenido en el ejemplo 8 de la sección 2.1, utilizando un proceso de modelación diferente para el mismo experimento.

Ahora resuelva el ejercicio 57.

REPASO RÁPIDO 2.2 *(Para obtener ayuda consulte la sección A.1).*

En los ejercicios del 1 al 6 escriba las expresiones siguientes utilizando sólo potencias enteras y positivas.

1. $x^{2/3}$ **2.** $p^{5/2}$

3. d^{-2} **4.** x^{-7}

5. $q^{-4/5}$ **6.** $m^{-1.5}$

En los ejercicios del 7 al 10 escriba las expresiones siguientes en la forma $k \cdot x^a$ utilizando un solo número racional para la potencia a.

7. $\sqrt{9x^3}$ **8.** $\sqrt[3]{8x^5}$

9. $\sqrt[3]{\dfrac{5}{x^4}}$ **10.** $\dfrac{4x}{\sqrt{32x^3}}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.2

En los ejercicios del 1 al 10 determine si la función es una función potencia, dado que c, g, k y π representan constantes. Para aquellas que sean funciones potencia, indique la potencia y la constante de variación.

1. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^5$ **2.** $f(x) = 9x^{5/3}$

3. $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **4.** $f(x) = 13$

5. $E(m) = mc^2$ **6.** $EC(v) = \dfrac{1}{2}kv^5$

7. $d = \dfrac{1}{2}gt^2$ **8.** $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

9. $I = \dfrac{k}{d^2}$ **10.** $F(a) = m \cdot a$

En los ejercicios del 11 al 16 determine si la función es una función monomial, dado que l y π representan constantes. Para aquellas que sean funciones monomiales indique el grado y el coeficiente principal. Para las que no lo sean, explique por qué.

11. $f(x) = -4$

12. $f(x) = 3x^{-5}$

13. $y = -6x^7$

14. $y = -2 \cdot 5^x$

15. $S = 4\pi r^2$

16. $A = lw$

En los ejercicios del 17 al 22 escriba el enunciado como una ecuación con función potencia. Utilice k para la constante de variación, si no se da alguna.

17. El área A de un triángulo equilátero varía directamente con el cuadrado de la longitud s de sus lados.

18. El volumen V de un cilindro circular recto con altura fija es proporcional al cuadrado de su radio.

19. La corriente I en un circuito eléctrico es inversamente proporcional a la resistencia R, con constante de variación V.

20. La ley de Charles establece que el volumen V de un gas ideal encerrado a presión constante varía directamente con la temperatura absoluta T.

21. La energía E producida en una reacción nuclear es proporcional a la masa m con la constante de variación c^2, el cuadrado de la velocidad de la luz.

22. La rapidez p de un objeto que cae, a partir del reposo, varía con la raíz cuadrada de la distancia recorrida d, con una constante de variación $k = \sqrt{2g}$.

En los ejercicios del 23 al 26 escriba un enunciado que exprese la relación en la fórmula, utilizando el lenguaje de variación o proporción.

23. $w = mg$, donde w y m son el peso y la masa de un objeto y g es la aceleración debida a la gravedad.

24. $C = \pi D$, donde C y D son la circunferencia y el diámetro de un círculo, y π es la conocida constante matemática.

25. $n = c/v$, donde n es el índice de refracción de un medio, v es la velocidad de la luz en el medio y c es la velocidad constante de la luz en el vacío.

26. $d = p^2/(2g)$, donde d es la distancia recorrida por un objeto en caída libre, a partir del reposo, p es la rapidez del objeto, y g es la constante de la aceleración debida a la gravedad.

En los ejercicios del 27 al 30 indique la potencia y la constante de variación para la función, grafíquela y analícela como en el ejemplo 2 de esta sección.

27. $f(x) = 2x^4$

28. $f(x) = -3x^3$

29. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{x}$

30. $f(x) = -2x^{-3}$

En los ejercicios del 31 al 36 describa cómo obtener la gráfica de la función monomial dada, a partir de la gráfica de $g(x) = x^n$ con la misma potencia n. Indique si f es par o impar. Bosqueje la gráfica y respalde su respuesta con un graficador.

31. $f(x) = \frac{2}{3}x^4$

32. $f(x) = 5x^3$

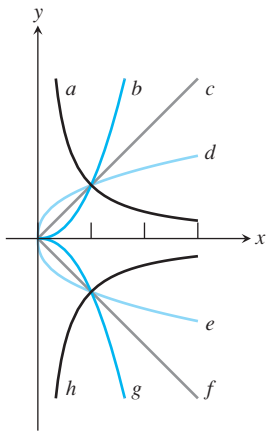
33. $f(x) = -1.5x^5$

34. $f(x) = -2x^6$

35. $f(x) = \frac{1}{4}x^8$

36. $f(x) = \frac{1}{8}x^7$

En los ejercicios del 37 al 42 relacione la ecuación con una de las curvas etiquetadas en la figura.



37. $f(x) = -\frac{2}{3}x^4$

38. $f(x) = \frac{1}{2}x^{-5}$

39. $f(x) = 2x^{1/4}$

40. $f(x) = -x^{5/3}$

41. $f(x) = -2x^{-2}$

42. $f(x) = 1.7x^{2/3}$

En los ejercicios del 43 al 48 indique los valores de las constantes k y a para la función $f(x) = k \cdot x^a$. Describa la parte de la curva que está en el primero o en el cuarto cuadrantes. Determine si f es par, impar o no está definida para $x < 0$. Describa el resto de la curva, si es que existe. Grafique la función para ver si coincide con la descripción.

43. $f(x) = 3x^{1/4}$

44. $f(x) = -4x^{2/3}$

45. $f(x) = -2x^{4/3}$

46. $f(x) = \frac{2}{5}x^{5/2}$

47. $f(x) = \frac{1}{2}x^{-3}$

48. $f(x) = -x^{-4}$

En los ejercicios 49 y 50 se dan datos para y como una función potencia de x. Escriba una ecuación para la función potencia e indique su potencia y su constante de variación.

49.

x	2	4	6	8	10
y	2	0.5	0.222…	0.125	0.08

50.

x	1	4	9	16	25
y	−2	−4	−6	−8	−10

51. Ley de Boyle El volumen de un gas encerrado (a una temperatura constante) varía inversamente con la presión. Si la presión de una muestra de 3.46 L de gas neón a 302°K es 0.926 atm, ¿cuál sería el volumen a una presión de 1.452 atm, si la temperatura no cambia?

52. Ley de Charles El volumen de un gas encerrado (a presión constante) varía directamente con la temperatura absoluta. Si la presión de una muestra de 3.46 L de gas neón a 302°K es 0.926 atm, ¿cuál sería su volumen a una temperatura de 338°K, si la presión no cambia?

53. Refracción de un diamante Los diamantes tiene un índice de refracción muy alto de $n = 2.42$, en promedio, en el rango de la luz visible. Utilice la fórmula del ejercicio 25 y el hecho de que $c \approx 3.00 \times 10^8$ m/s, para determinar la velocidad de la luz a través del diamante.

54. Potencia de un molino de viento La potencia P (en watts) producida por un molino de viento es proporcional al cubo de la rapidez del viento v (en mph). Si un viento de 10 mph genera 15 watts de potencia, ¿cuánta potencia es generada por vientos de 20, 40 y 80 mph? Construya una tabla y explique su patrón.

55. Mantenerse caliente Para los mamíferos y otros animales de sangre caliente, conservarse calientes requiere de energía. La temperatura que se pierde está relacionada con el área de la superficie, que está relacionada con el peso del cuerpo, y la temperatura que se gana está relacionada con la circulación, que a su vez está relacionada con el pulso. En el análisis final, los científicos han concluido que el pulso r de los mamíferos es una función potencia de su cuerpo w.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos de la tabla 2.12.

b) Determine un modelo de regresión para la potencia.

c) Superponga la curva de regresión sobre el diagrama de dispersión.

d) Utilice el modelo de regresión para predecir el pulso para un caballo de 450 kg. ¿El resultado es cercano a 38 pulsaciones/min reportado por A. J. Clark en 1927?

Tabla 2.12 Peso y pulso de mamíferos seleccionados

Mamífero	Peso del cuerpo (kg)	Pulso (pulsaciones/min)
Conejillo de Indias	0.2	420
Cerdo de Guinea	0.3	300
Conejo	2	205
Perro pequeño	5	120
Perro grande	30	85
Oveja	50	70
Humano	70	72

Fuente: A. J. Clark, Comparative Physiology of the Heart. Nueva York, Macmillan, 1927.

56. Funciones pares e impares Si n es un entero, $n \geq 1$, demuestre que $f(x) = x^n$ es una función impar, si n es impar, y par si n es par.

57. Intensidad de la luz Velma y Reggie reunieron los datos de la tabla 2.13 utilizando un foco de 100 watts y una CBL™ (por sus siglas en inglés, Calculadora de Laboratorio) con una sonda para la intensidad de luz.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos de la tabla 2.13.

b) Determine el modelo de regresión para la potencia. ¿La potencia es cercana al valor teórico de $a = -2$?

c) Superponga la curva de regresión sobre el diagrama de dispersión.

d) Utilice el modelo de regresión para predecir la intensidad de la luz a distancias de 1.7 m y 3.4 m.

Tabla 2.13 Datos de la intensidad de la luz para un foco de 100 watts

Distancia (m)	Intensidad (W/m^2)
1.0	7.95
1.5	3.53
2.0	2.01
2.5	1.27
3.0	0.90

Preguntas de examen estandarizado

58. Verdadero o falso La función $f(x) = x^{-2/3}$ es par. Justifique su respuesta.

59. Verdadero o falso La gráfica de $f(x) = x^{1/3}$ es simétrica con respecto al eje y. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 60 al 63 resuelva el problema sin emplear una calculadora.

60. Opción múltiple Sea $f(x) = 2x^{-1/2}$. ¿Cuál es el valor de $f(4)$?

A) 1 **B)** -1 **C)** $2\sqrt{2}$ **D)** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **E)** 4

61. Opción múltiple Sea $f(x) = -3x^{-1/3}$. ¿Cuál de los enunciados siguientes es verdadero?

A) $f(0) = 0$ **B)** $f(-1) = -3$ **C)** $f(1) = 1$
D) $f(3) = 3$ **E)** $f(0)$ no está definida

62. Opción múltiple Sea $f(x) = x^{2/3}$. ¿Cuál de los enunciados siguientes es verdadero?

A) f es una función impar.

B) f es una función par.

C) f no es función par ni función impar.

D) La gráfica de f es simétrica con respecto al eje x.

E) La gráfica de f es simétrica con respecto al origen.

63. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes es el dominio de la función $f(x) = x^{3/3}$?

A) Todos los reales **B)** $[0, \infty)$ **C)** $(0, \infty)$
D) $(-\infty, 0)$ **E)** $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Exploraciones

64. Actividad en equipo **Potencias racionales** Trabajando en un grupo de tres, investigue el comportamiento de las funciones potencia de la forma $f(x) = k \cdot x^{m/n}$, donde m y n son enteros positivos sin factores en común. Cada miembro del grupo investigue cada uno de los casos siguientes:

- es par
- es impar y m es par
- es impar y m es impar

Para cada caso, decida si f es par, f es impar o f no está definida para $x < 0$. Resuelva gráficamente y confirme en forma algebraica con el fin de convencer al resto de su equipo y la clase.

65. Comparación de las gráficas de funciones potencia Grafique las funciones en las ventanas que se indican y explique en qué se parecen y en qué difieren. Considere los aspectos relevantes del análisis del ejemplo 2. ¿Cuáles pares ordenados tienen en común las cuatro gráficas?

a) $f(x) = x^{-1}$, $g(x) = x^{-2}$, $h(x) = x^{-3}$ y $k(x) = x^{-4}$ en las ventanas [0, 1] por [[0, 5], [0, 3] por [0, 3] y [−3, 3] por [−2, 2].

b) $f(x) = x^{1/2}$, $g(x) = x^{1/3}$, $h(x) = x^{1/4}$ y $k(x) = x^{1/5}$ en las ventanas [0, 1] por [0, 1], [0, 3] por [0, 2] y [−3, 3] por [−2, 2].

Ampliación de las ideas

66. Escriba para aprender **Potencias irracionales** Un número negativo a una potencia irracional no está definido. Analice las gráficas de $f(x) = x^{\pi}$, $x^{1/\pi}$, $x^{-\pi}$, $-x^{\pi}$, $x^{-1/\pi}$ y $-x^{-\pi}$. Prepare un bosquejo de las seis gráficas en un conjunto de ejes y etiquete cada una de las curvas. Escriba una explicación por la que cada gráfica está ubicada y tiene esa forma.

67. Movimiento planetario revisado Convierta las unidades de tiempo y de distancia de la tabla 2.10 a unidades en años terrestres y unidades astronómicas mediante

$$1 \text{ año} = 365.2 \text{ días y } 1 \text{ UA} = 149.6 \text{ Gm}.$$

Utilice estos datos "reexpresados" para obtener un modelo de una función potencia. Muestre algebraicamente que este modelo se aproxima mucho a la ecuación de Kepler $T^2 = a^3$.

68. Caída libre revisada La **rapidez** p de un objeto es el valor absoluto de su velocidad v. La distancia recorrida d por un objeto que se deja caer, desde una altura inicial s_0, con una altura actual de s está dada por

$$d = s_0 - s$$

hasta que choca con el suelo. Utilice la información y las fórmulas de movimiento en caída libre de la sección 2.1 para probar que

$$d = \frac{1}{2} gt^2,\ p = gt, \text{ y por lo tanto } p = \sqrt{2gd}.$$

¿Los resultados del ejemplo 6 se aproximan a está última fórmula?

69. Pruebe que $g(x) = 1/f(x)$ es par si, y sólo si, $f(x)$ es par y que $g(x) = 1/f(x)$ es impar si, y sólo si $f(x)$ es impar.

70. Utilice los resultados del ejercicio 69 para demostrar que $g(x) = x^{-a}$ es par si, y sólo si, $f(x) = x^a$ es par y que $g(x) = x^{-a}$ es impar si, y sólo si $f(x) = x^a$ es impar.

71. Variación conjunto Si una variable z varía como el producto de las variables x y y, decimos que z **varía conjuntamente** con x y y, y escribimos $z = k \cdot x \cdot y$, donde k es la constante de variación. Escriba una oración que exprese la relación en cada una de las fórmulas siguientes mediante el lenguaje de variación conjunta.

a) $F = m \cdot a$, donde F y a son la fuerza y la aceleración que actúan sobre un objeto de masa m.

b) $EC = (1/2)m \cdot v^2$, donde EC y v son la energía cinética y la velocidad de un objeto de masa m.

c) $F = G{\cdot}m_1 \cdot m_2/r^2$, donde F es la fuerza debida a la gravedad que actúa sobre objetos de masas m_1 y m_2, con una distancia r entre los centros y G es la constante de gravitación universal.

2.3 Funciones polinomiales de grado superior con modelación

Aprenderá acerca de...

- Las gráficas de funciones polinomiales
- La determinación del comportamiento en los extremos de funciones polinomiales
- Los ceros (raíces) de funciones polinomiales
- El teorema del valor intermedio
- La modelación

. . . porque

Estos temas son importantes en modelación y pueden usarse para proporcionar aproximaciones a funciones más complicadas, como verá en su estudio del cálculo.

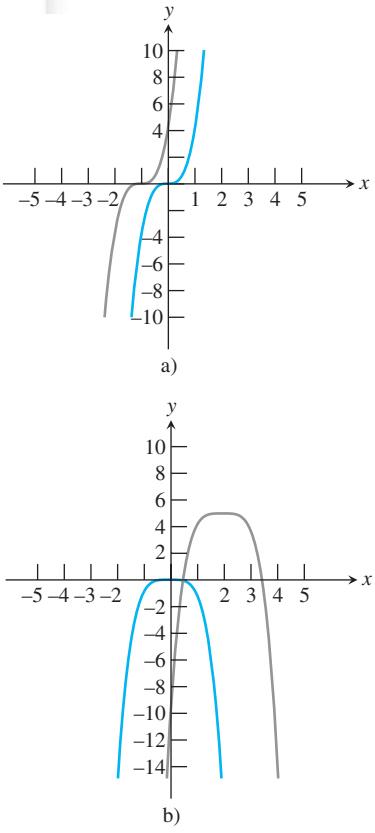


FIGURA 2.19 a) Las gráficas de $g(x) = 4(x + 1)^3$ y $f(x) = 4x^3$. b) Las gráficas de $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$ y $f(x) = -x^4$ (ejemplo 1).

Gráficas de funciones polinomiales

Como vimos en la sección 2.1, una función polinomial de grado 0 es una función constante y se grafica como una recta horizontal. Una función polinomial de grado 1 es una función lineal; su gráfica es una recta inclinada. Una función polinomial de grado 2 es una función cuadrática; su gráfica es una parábola.

Ahora consideramos funciones polinomiales de grado superior. Éstas incluyen las **funciones cúbicas** (polinomios de grado 3) y **funciones cuárticas** o bicuadráticas (polinomios de grado 4). Recuerde que una función polinomial de grado n puede escribirse en la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0.$$

A continuación se dan algunas definiciones importantes asociadas con funciones polinomiales y su ecuación.

DEFINICIÓN Vocabulario de polinomios

- Cada monomio en esta suma, $a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}$, . . . , a_0, es un **término** del polinomio.
- Una función polinomial escrita de esta manera, con términos en grado descendente, está escrita en **forma estándar.**
- Las constantes a_n, a_{n-1}, . . . , a_0 son los **coeficientes** del polinomio.
- El término $a_n x^n$ es el **término principal** y a_0 es el término constante.

En el ejemplo 1 utilizamos el hecho de que el término constante a_0 de una función polinomial p es tanto el valor inicial de la función, $p(0)$, y la intersección y de la gráfica, para proporcionar una comprobación rápida y sencilla de la gráfica transformada.

EJEMPLO 1 Graficación de transformaciones de funciones monomiales

Describa cómo transformar la gráfica de una función monomial apropiada $f(x) = a_n x^n$ en la gráfica de la función dada. Bosqueje la gráfica transformada y respalde su respuesta con un graficador. Calcule la localización de la intersección y como una comprobación sobre la gráfica transformada.

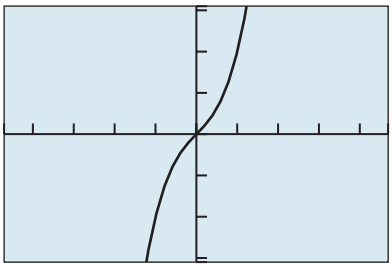
a) $g(x) = 4(x + 1)^3$ **b)** $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$

SOLUCIÓN

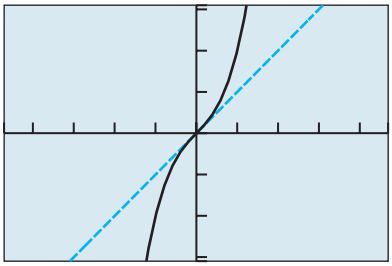
a) Puede obtener la gráfica de $g(x) = 4(x + 1)^3$ mediante un desplazamiento de la gráfica de $f(x) = 4x^3$ una unidad hacia la izquierda, como se muestra en la figura 2.19a. La intersección y de la gráfica de g es $g(0) = 4(0 + 1)^3 = 4$, que parece coincidir con la gráfica transformada.

b) Puede obtener la gráfica de $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$ mediante un desplazamiento de la gráfica de $f(x) = -x^4$ dos unidades hacia la derecha y cinco unidades hacia arriba, como se muestra en la figura 2.19b. La intersección y de la gráfica de h es $h(0) = -(0 - 2)^4 + 5 = -16 + 5 = -11$, que parece coincidir con la gráfica transformada.

Ahora resuelva el ejercicio 1.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
a)



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
b)

FIGURA 2.20 La gráfica de $f(x) = x^3 + x$ a) sola y b) con $y = x$ (ejemplo 2 a))

El ejemplo 2 muestra lo que puede suceder cuando funciones monomiales sencillas se combinan para obtener funciones polinomiales. Los polinomios resultantes *no* son meras traslaciones de monomios.

EJEMPLO 2 Graficación de combinación de funciones monomiales

Grafique la función polinomial, localice sus extremos y sus ceros, y explique cómo está relacionada con los monomios a partir de los que se construyó.

a) $f(x) = x^3 + x$ **b)** $g(x) = x^3 - x$

SOLUCIÓN

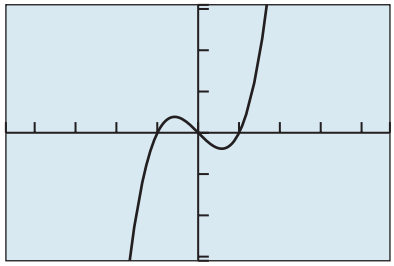
a) La gráfica de $f(x) = x^3 + x$ se muestra en la figura 2.20a. La función f es creciente en $(-\infty, \infty)$, sin máximo ni mínimo. La función se factoriza como $f(x) = x(x^2 + 1)$ y tiene un cero en $x = 0$.

La forma general de la gráfica es muy parecida a la gráfica de su término principal x^3, pero cerca del origen f se comporta de forma muy parecida a su otro término, x, como se ve en la figura 2.20b. La función f es impar, al igual que sus dos bloques de construcción monomiales.

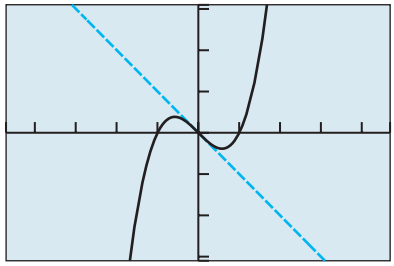
b) La gráfica de $g(x) = x^3 - x$ se muestra en la figura 2.21a. La función g tiene un máximo local de casi 0.38 en $x \approx -0.58$ y un mínimo local de casi -0.38 en $x \approx 0.58$. La función se factoriza como $g(x) = x(x + 1)(x - 1)$ y tiene ceros en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

La forma general de la gráfica se parece mucho a la gráfica de su término principal, x^3, pero cerca del origen g se comporta de forma muy parecida a su otro término, $-x$, como se ve en la figura 2.21b. La función g es impar, al igual que sus dos bloques de construcción monomiales.

Ahora resuelva el ejercicio 7.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
a)



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
b)

FIGURA 2.21 La gráfica de $g(x) = x^3 - x$ a) sola y b) con $y = -x$ (ejemplo 2 b)).

Hemos visto ejemplos de gráficas de funciones polinomiales pero, ¿éstas son comunes? En general, ¿cómo se ven las gráficas de polinomios?

Para iniciar nuestra respuesta, primero recordamos que toda función polinomial está definida y es continua en todos los reales. No sólo las gráficas de polinomios están ininterrumpidas, sin saltos y sin agujeros, sino que son curvas o líneas *suaves* que no están cortadas, sin esquinas ni bordes. En las figuras 2.22 y 2.23 se muestran gráficas típicas de funciones cúbicas y cuárticas.

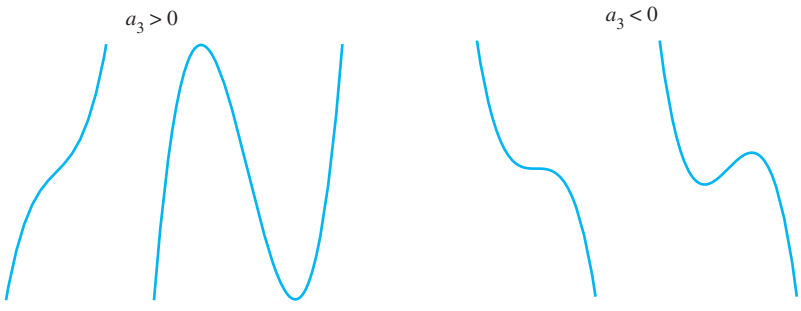


FIGURA 2.22 Gráficas de cuatro funciones cúbicas típicas cuyos coeficientes principales son a) dos positivos y b) dos negativos.

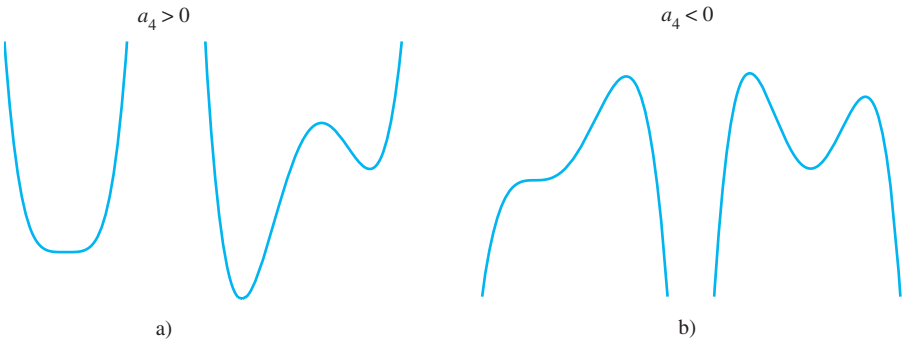


FIGURA 2.23 Gráficas de cuatro funciones cuárticas típicas cuyos coeficientes principales son a) dos positivos y b) dos son negativos.

Imagine rectas horizontales que cortan a las gráficas de las figuras 2.22 y 2.23, que se comporten como el eje x. Cada intersección sería una intersección x que correspondería a un cero e la función. Con base en este ejercicio mental, vemos que las funciones cúbicas tiene a lo más tres raíces y las funciones cuárticas tienen a lo más cuatro ceros. Centrándose en los puntos más altos y más bajos de las figuras 2.22 y 2.23, vemos que las funciones cúbicas tiene a los más dos extremos locales y las funciones cuárticas tienen a lo más tres extremos locales. Estas observaciones se generalizan de la forma siguiente:

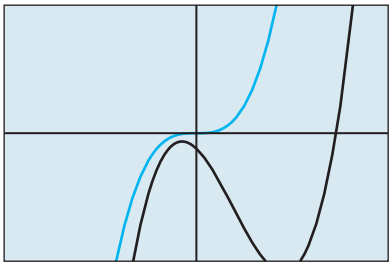


TEOREMA Extremos locales y ceros de funciones polinomiales

Una función polinomial de grado n tiene a lo más $n - 1$ extremos locales y a lo más n ceros.

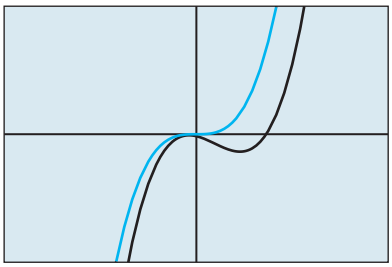
NOTA DE TECNOLOGÍA

Para una cúbica cuando cambia la ventana horizontal por un factor de k, por lo general, es buena idea cambiar la ventana vertical en un factor de k^3. Enunciados análogos pueden hacerse con respecto a polinomios de otros grados.



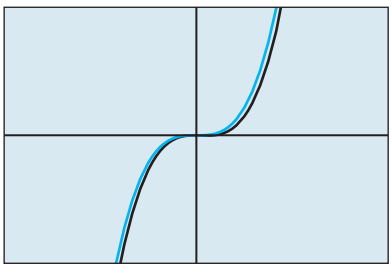
[–7, 7] por [–25, 25]

a)



[–14, 14] por [–200, 200]

b)



[–56, 56] por [–12800, 12800]

c)

FIGURA 2.24 Conforme se hace más grande la ventana de visualización, las gráficas de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 3$ y $g(x) = x^3$ se hacen cada vez más parecidas (ejemplo 3).

Determinación del comportamiento en los extremos de funciones polinomiales

Una característica importante de las funciones polinomiales es su comportamiento en los extremos. Como veremos, el comportamiento de un polinomio en los extremos está íntimamente relacionado con el comportamiento en los extremos de su término principal. La exploración 1 examina el comportamiento en los extremos de funciones monomiales, que son términos principales potenciales para funciones polinomiales.

EXPLORACIÓN 1 **Investigación del comportamiento en los extremos de $f(x) = a_n x^n$**

Grafique cada función en la ventana $[-5, 5]$ por $[-15, 15]$. Describa el comportamiento en los extremos utilizando $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

1. **a)** $f(x) = 2x^3$ **b)** $f(x) = -x^3$
   c) $f(x) = x^5$ **d)** $f(x) = -0.5x^7$
2. **a)** $f(x) = -3x^4$ **b)** $f(x) = 0.6x^4$
   c) $f(x) = 2x^6$ **d)** $f(x) = -0.5x^2$
3. **a)** $f(x) = -0.3x^5$ **b)** $f(x) = -2x^2$
   c) $f(x) = 3x^4$ **d)** $f(x) = 2.5x^3$

Describa los patrones que observe. En particular, ¿cómo el coeficiente a_n y el grado n afectan el comportamiento en los extremos de $f(x) = a_n x^n$?

El ejemplo 3 ilustra la conexión entre el comportamiento en los extremos de un polinomio $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y su término principal $a_n x^n$.

EJEMPLO 3 Comparación de las gráficas de un polinomio y su término principal

Superponga las gráficas de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 3$ y $g(x) = x^3$ en ventanas cada vez más grandes, un proceso que se conoce como **alejamiento (*zoom out*)**. Continúe alejándose hasta que las gráficas parezcan idénticas.

SOLUCIÓN La figura 2.24 muestra tres vistas de las gráficas de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 3$ y $g(x) = x^3$ en ventanas progresivamente más grandes. Conforme las dimensiones de la ventana crecen es más difícil decir que están separadas. Además,

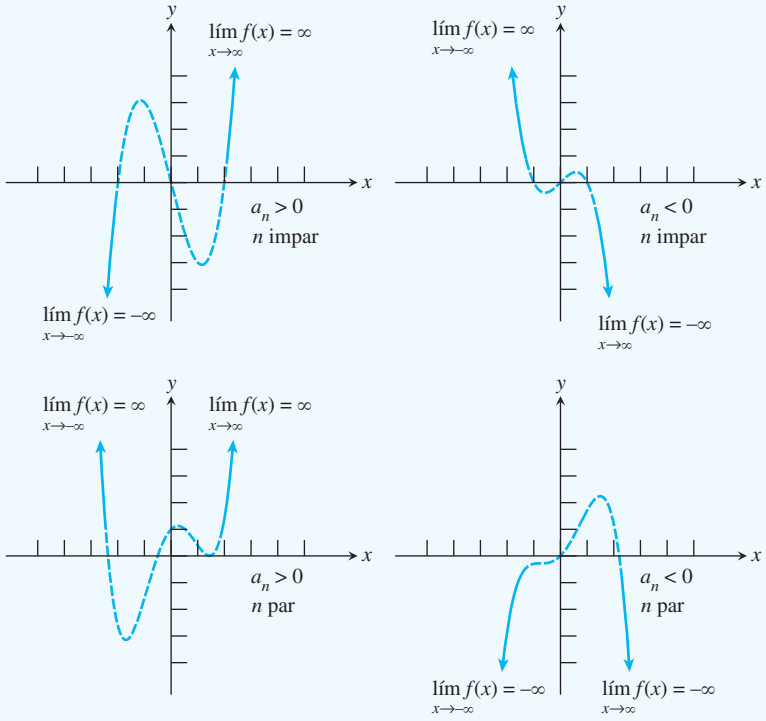
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

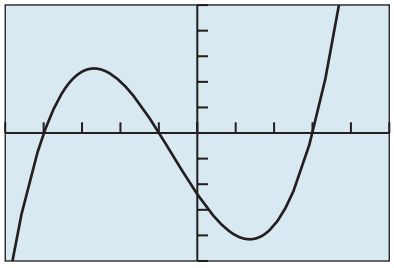
Ahora resuelva el ejercicio 13.

El ejemplo 3 ilustra algo que es cierto para todos los polinomios. *En ventanas de visualización suficientemente grandes, la gráfica de un polinomio y la gráfica de su término principal parecen ser idénticas.* Dicho de otra forma, el término principal *domina* el comportamiento del polinomio cuando $|x| \to \infty$. Con base en este hecho y lo que hemos visto en la exploración 1, hay cuatro posibles patrones de comportamiento en los extremos para una función polinomial. La potencia y el coeficiente del término principal nos dice cuál patrón de los cuatro ocurre.

Criterio del término principal para el comportamiento en los extremos de un polinomio

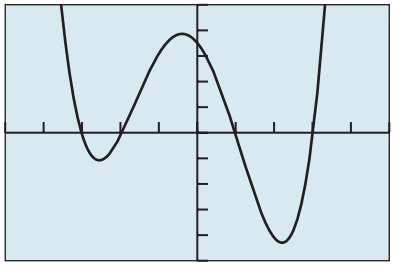
Para cualquier función polinomial $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, los límites de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ están determinados por el grado n del polinomio y su coeficiente principal, a_n:





[–5, 5] por [–25, 25]

a)



[–5, 5] por [–50, 50]

b)

FIGURA 2.25 a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$, b) $g(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 18x + 35$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Aplicación de la teoría de polinomios

Grafique el polinomio en una ventana que muestre sus máximos, mínimos y ceros, y su comportamiento en los extremos. Describa el comportamiento en los extremos mediante límites.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

b) $g(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 18x + 35$

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ se muestra en la figura 2.25a. La función f tiene 2 extremos y 3 ceros, el número máximo posible para una función cúbica, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) La gráfica de $g(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 18x + 35$ se muestra en la figura 2.25b. La función g tiene 3 extremos y 4 ceros, el número máximo posible para una función cuártica, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$.

Ahora resuelva el ejercicio 19.

Ceros (raíces) de funciones polinomiales

Recuerde que la determinación de ceros, que sean números reales, de una función f es equivalente a determinar las intersecciones x de la gráfica de $y = f(x)$ o las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. El ejemplo 5 ilustra que la *factorización* de una función polinomial facilita la resolución de estos tres problemas relacionados.

EJEMPLO 5 Determinación de los ceros de una función polinomial

Determine los ceros de $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

Resolvemos la ecuación relacionada $f(x) = 0$ mediante factorización:

$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$

$$x(x^2 - x - 6) = 0 \qquad \text{Sacar factor común } x.$$

$$x(x - 3)(x + 2) = 0 \qquad \text{Factorizar la cuadrática.}$$

$$x = 0,\ x - 3 = 0,\ \text{o}\ x + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad del factor cero.}$$

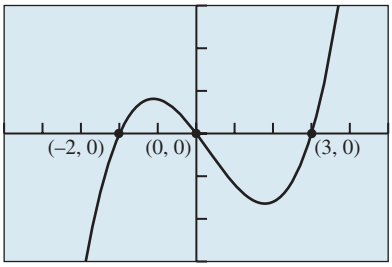
$$x = 0, \quad x = 3, \quad \text{o} \quad x = -2$$

Por lo que los ceros de f son 0, 3 y -2.

Resuelva gráficamente

Utilice las características de su calculadora para aproximar los ceros de f. La figura 2.26 muestra que hay tres valores. Con base en nuestra solución algebraica podemos asegurar que estos valores son exactos.

Ahora resuelva el ejercicio 33.



[–5, 5] por [–15, 15]

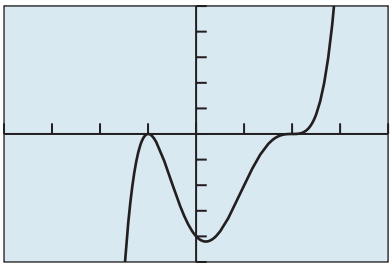
FIGURA 2.26 La gráfica de $y = x^3 - x^2 - 6x$ mostrando las intersecciones x (ejemplo 5).

Con base en el ejemplo 5, vemos que si una función polinomial f está en la forma factorizada, cada factor $(x - k)$ corresponde a un cero $x = k$, y si k es un número real, $(k, 0)$ es una intersección x de la gráfica de $y = f(x)$.

Cuando se repite un factor, como en $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$, decimos que la función polinomial tiene un *cero repetido*. La función f tiene dos ceros repetidos. Como el factor $x - 2$ aparece tres veces, 2 es un cero de *multiplicidad* 3. En forma análoga, -1 es un cero de multiplicidad 2. La definición siguiente generaliza este concepto.

DEFINICIÓN Multiplicidad de un cero de una función polinomial

Si f es una función polinomial y $(x - c)^m$ es un factor de f, pero $(x - c)^{m+1}$ no lo es; entonces c es un cero de **multiplicidad** m de f.



[–4, 4] por [–10, 10]

FIGURA 2.27 La gráfica de $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$ que muestra las intersecciones x.

Un cero de multiplicidad $m \geq 2$ es un **cero repetido**. En la figura 2.27 observe que, en $(-1, 0)$, la gráfica de f sólo *besa* (roza o toca) al eje x sin cruzarlo, pero que la gráfica de f cruza al eje x en $(2, 0)$. Esto también puede generalizarse.

Ceros de multiplicidad impar y par

Si una función polinomial f tiene un cero real c de multiplicidad impar, entonces la gráfica de f cruza al eje x en $(c, 0)$, y el valor de f cambia de signo en $x = c$.

Si una función polinomial f tiene un cero real c de multiplicidad par, entonces la gráfica de f no cruza al eje x en $(c, 0)$, y el valor de f no cambia de signo en $x = c$.

En el ejemplo 5 ninguno de los ceros se repitió. Ya que los ceros no repetidos tienen multiplicidad 1, y 1 es impar, la gráfica de una función polinomial cruza el eje x y tiene un cambio de signo en cada cero que no se repite (figura 2.26). El conocimiento de dónde una gráfica cruza el eje x y en dónde no lo hace es importante para el trazado de curvas y la resolución de desigualdades.

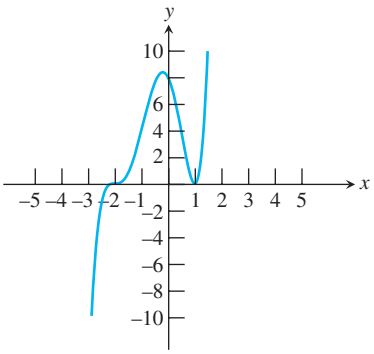


FIGURA 2.28 Un bosquejo de la gráfica de $f(x) = (x + 2)^3(x - 1)^2$ que muestra las intersecciones x.

EJEMPLO 6 Trazado de la gráfica de un polinomio factorizado

Indique el grado y liste los ceros de la función $f(x) = (x + 2)^3(x - 1)^2$. Indique la multiplicidad de cada cero y si la gráfica cruza el eje x en la correspondiente intersección x. Luego bosqueje la gráfica de f.

SOLUCIÓN

El grado de f es 5 y los ceros son $x = -2$ y $x = 1$. La gráfica cruza el eje x en $x = -2$ ya que la multiplicidad 3 es impar. La gráfica no cruza el eje x en $x = 1$, puesto que la multiplicidad 2 es par. Observe que los valores de f son positivos para $x > 1$, positivos para $-2 < x < 1$ y negativos para $x < -2$. La figura 2.28 muestra un bosquejo de la gráfica de f. ***Ahora resuelva el ejercicio 39.***

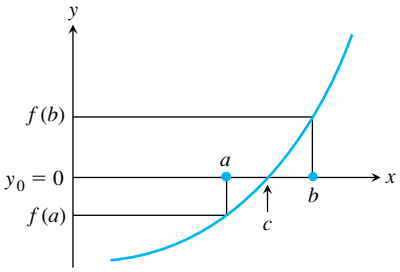


FIGURA 2.29 Si $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe un cero $x = c$ entre a y b.

El teorema del valor intermedio

El *teorema del valor intermedio* nos dice que un cambio de signo implica un cero real.

TEOREMA Teorema del valor intermedio

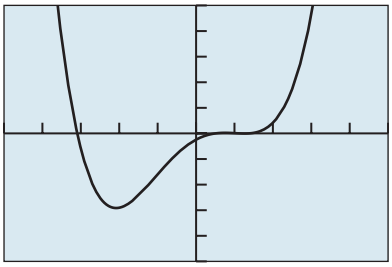
Si a y b son números reales con $a < b$ y si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f toma todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$. En otras palabras, si y_0 está entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces $y_0 = f(c)$ para algún número c en $[a, b]$.

En particular, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos (por ejemplo, uno es negativo y el otro es positivo, entonces $f(c) = 0$ para algún número c en $[a, b]$ (consulte la figura 2.29).

EJEMPLO 7 Uso del teorema del valor intermedio

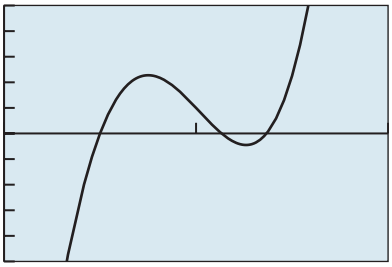
Explique por qué una función polinomial de grado impar tiene al menos un cero real.

SOLUCIÓN Sea f una función polinomial de grado impar. Puesto que f es impar, el criterio del término principal nos dice que $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Así que existen números reales a y b, con $a < b$ y tales que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Puesto que toda función polinomial está definida y es continua para todos los números reales, f es continua en el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto, por el teorema del valor intermedio, $f(c) = 0$ para algún número c en $[a, b]$ y por tanto c es un cero real de f. ***Ahora resuelva el ejercicio 61.***



[–5, 5] por [–50, 50]

a)



[0, 2] por [–0.5, 0.5]

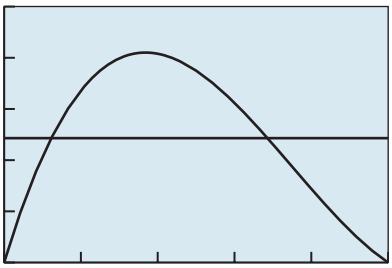
b)

FIGURA 2.30 (Ejemplo 8).

X	Y1
1	414
2	672
3	798
4	816
5	750
6	624
7	462

Y1 = X(20–2X)(25–...

FIGURA 2.32 Una tabla que permite hacerse una idea de los valores del volumen en el ejemplo 9.



[0, 10] por [0, 1000]

FIGURA 2.33 $y_1 = x(25 - 2x)(20 - 2x)$ y $y_2 = 484$ (ejemplo 9)

En la práctica, el teorema del valor intermedio se utiliza conjuntamente con nuestros conocimiento matemáticos y de tecnología.

EJEMPLO 8 Acercamiento para descubrir comportamiento oculto

Determine todos los ceros reales de $f(x) = x^4 + 0.1x^3 - 6.5x^2 + 7.9x - 2.4$.

SOLUCIÓN

Resuelva gráficamente

Como f es de grado 4, existen a lo más cuatro ceros. La gráfica de la figura 2.30a sugiere un solo cero (multiplicidad 1) alrededor de $x = -3$, y un cero triple (multiplicidad 3) alrededor de $x = 1$. Una inspección más cercana en torno a $x = 1$ en la figura 2.30b revela tres ceros separados. Utilizando el graficador, encontramos que los cuatro ceros son $x \approx 1.37$, $x \approx 1.13$, $x = 0.50$ y $x \approx -3.10$.

Ahora resuelva el ejercicio 75.

Modelación

En el proceso de resolución de problemas presentado en la sección 1.1, el paso 2 es desarrollar un modelo matemático del problema. Cuando el modelo desarrollado es una función polinomial de grado superior, el razonamiento algebraico y geométrico requerido puede ser muy necesario. En la resolución del ejemplo 9, podría encontrar útil construir un modelo físico de papel o cartón.

EJEMPLO 9 Diseño de una caja

La compañía Dixie Packaging tiene un contrato para fabricar cajas con un volumen de aproximadamente 484 pulg^3. De una pieza de cartón de 20 por 25 pulg, se cortan cuadrados en la esquinas y se doblan las solapas hacia arriba para formar una caja sin tapa (consulte la figura 2.31). ¿De qué tamaño deben cortarse los cuadrados de la pieza de cartón?

SOLUCIÓN

Modele

Sabemos que el volumen V = altura × largo × ancho.

Así que sean

x = arista del cuadrado que se corta (altura de la caja)

$25 - 2x$ = largo de la caja

$20 - 2x$ = ancho de la caja

$V = x(25 - 2x)(20 - 2x)$

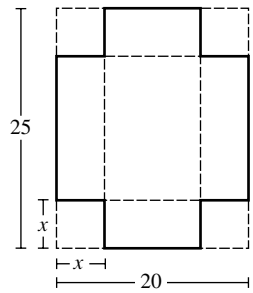


FIGURA 2.31

Resuelva numérica y gráficamente

Para un volumen de 484, resolvemos la ecuación $x(25 - 2x)(20 - 2x) = 484$. Puesto que el ancho de la pieza de cartón es 20 pulg, $0 \le x \le 10$. Utilizamos la tabla de la figura 2.32 para tener una noción de los valores del volumen y establecer la ventana para la gráfica de la figura 2.33. La función cúbica del volumen interseca al volumen constante de 484 en $x \approx 1.22$ y $x \approx 6.87$.

Interprete

Se debe cortar cuadrados con longitudes de aproximadamente 1.22 pulg o 6.87 pulg en la pieza de cartón para producir una caja con un volumen de 484 pulg^3.

Ahora resuelva el ejercicio 67.

Al igual que con dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano con valores x diferentes y valores y diferentes se determina una recta inclinada y su función lineal relacionada, cualesquier tres puntos no colineales con valores x diferentes determinan una función cuadrática. En general, $(n + 1)$ puntos colocados con suficiente generalidad determinan una función polinomial de grado n. El proceso de ajustar un polinomio de grado n a $(n + 1)$ puntos es **interpolación polinomial**. La exploración 2 incluye dos problemas de interpolación polinomial.

EXPLORACIÓN 1 **Interpolación de puntos con un polinomio**

1. Utilice regresión de una cúbica para ajustar una curva que pase por los cuatro puntos dados en la tabla.

x	-2	1	3	8
y	2	0.5	-0.2	1.25

2. Utilice regresión de una cuártica para ajustar una curva que pase por los cinco puntos dados en la tabla

x	3	4	5	6	8
y	-2	-4	-1	8	3

¿Qué tan bueno es el ajuste en cada caso? ¿Por qué?

Por lo general, queremos una razón más allá de "ajusta bien" para seleccionar un modelo para datos reales. Sin embargo, cuando no existen bases teóricas para sacar un modelo, se busca un balance entre la bondad de ajuste y la simplicidad del modelo. En el caso de polinomios tratamos de extraer un polinomio con el menor grado posible que tenga un razonablemente buen ajuste.

REPASO RÁPIDO 2.3 *(Para obtener ayuda consulte las secciones A.2 y R.5)*

En los ejercicios del 1 al 6 factorice el polinomio en factores lineales.

1. $x^2 - x - 12$ **2.** $x^2 - 11x + 28$

3. $3x^2 - 11x + 6$ **4.** $6x^2 - 5x + 1$

5. $3x^3 - 5x^2 + 2x$ **6.** $6x^3 - 22x^2 + 12x$

En los ejercicios del 7 al 10 resuelva mentalmente la ecuación.

7. $x(x - 1) = 0$ **8.** $x(x + 2)(x - 5) = 0$

9. $(x + 6)^3(x + 3)(x - 1.5) = 0$

10. $(x + 6)^2(x + 4)^4(x - 5)^3 = 0$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.3

En los ejercicios del 1 al 6 describa cómo transformar la gráfica de una función monomial adecuada $f(x) = x^n$ en la gráfica de la función polinomial dada. Haga un bosquejo de la gráfica transformada a mano y respalde su respuesta con un graficador. Calcule la posición de la intersección y como una comprobación de la gráfica transformada.

1. $g(x) = 2(x - 3)^3$

2. $g(x) = -(x + 5)^3$

3. $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^3 + 2$

4. $g(x) = \frac{2}{3}(x - 3)^3 + 1$

5. $g(x) = -2(x + 2)^4 - 3$

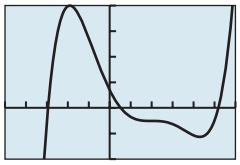
6. $g(x) = 3(x - 1)^4 - 2$

En los ejercicios 7 y 8 grafique la función polinomial, localice sus extremos (máx/mín) y ceros, y explique cómo se relacionan con los monomios a partir de los cuales se construyeron.

7. $f(x) = -x^4 + 2x$

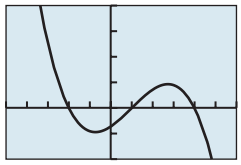
8. $g(x) = 2x^4 - 5x^2$

En los ejercicios del 9 al 12 relacione la función polinomial con su gráfica. Explique el por qué de su elección. No utilice una calculadora graficadora.



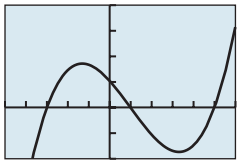
[–5, 6] por [–200, 400]

a)



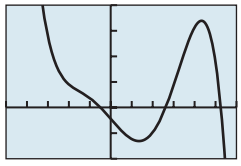
[–5, 6] por [–200, 400]

b)



[–5, 6] por [–200, 400]

c)



[–5, 6] por [–200, 400]

d)

9. $f(x) = 7x^3 - 21x^2 - 91x + 104$

10. $f(x) = -9x^3 + 27x^2 + 54x - 73$

11. $f(x) = x^5 - 8x^4 + 9x^3 + 58x^2 - 164x + 69$

12. $f(x) = -x^5 + 3x^4 + 16x^3 - 2x^2 - 95x - 44$

En los ejercicios del 13 al 16 grafique los pares de funciones en la misma serie de ventanas de visualización. Realice alejamientos hasta que las dos gráficas se vean muy parecidas e indique su ventana de visualización final.

13. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 3$ y $g(x) = x^3$

14. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$ y $g(x) = x^3$

15. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x - 15$ y $g(x) = 2x^3$

16. $f(x) = 3x^3 - 12x + 17$ y $g(x) = 3x^3$

En los ejercicios del 17 al 24 grafique la función en una ventana de visualización que muestre todos sus extremos (máx/mín) y sus intersecciones x. Describa el comportamiento en los extremos mediante límites.

17. $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$

18. $f(x) = (2x - 3)(4 - x)(x + 1)$

19. $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 31x - 70$

20. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 41x + 42$

21. $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)(x - 3)$

22. $f(x) = (2x + 1)(x - 4)^3$

23. $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 14x + 41$

24. $f(x) = -3x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 5x + 19$

En los ejercicios del 25 al 28 describa el comportamiento en los extremos de la función polinomial mediante $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

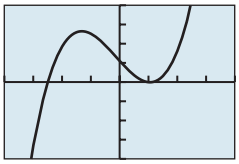
25. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 3$

26. $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 4x + 3$

27. $f(x) = 7x^2 - x^3 + 3x - 4$

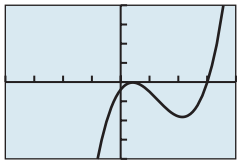
28. $f(x) = x^3 - x^4 + 3x^2 - 2x + 7$

En los ejercicios del 29 al 32 relacione la función polinomial con su gráfica. Aproxime todos los ceros reales de la función.



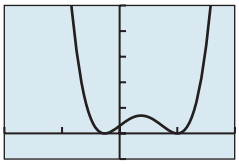
[–4, 4] por [–200, 200]

a)



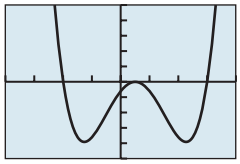
[–4, 4] por [–200, 200]

b)



[–2, 2] por [–10, 50]

c)



[–4, 4] por [–50, 50]

d)

29. $f(x) = 20x^3 + 8x^2 - 83x + 55$

30. $f(x) = 35x^3 - 134x^2 + 93x - 18$

31. $f(x) = 44x^4 - 65x^3 + x^2 + 17x + 3$

32. $f(x) = 4x^4 - 8x^3 - 19x^2 + 23x - 6$

En los ejercicios del 33 al 38 determine algebraicamente los ceros de la función.

33. $f(x) = x^2 + 2x - 8$

34. $f(x) = 3x^2 + 4x - 4$

35. $f(x) = 9x^2 - 3x - 2$

36. $f(x)\ x^3 - 25x$

37. $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x$

38. $f(x) = 5x^3 - 5x^2 - 10x$

En los ejercicios del 39 al 42 indique el grado y liste los ceros de la función polinomial, indique la multiplicidad de cada cero y si la gráfica cruza al eje x en la correspondiente intersección x. Luego bosqueje la gráfica de la función polinomial.

39. $f(x) = x(x - 3)^2$

40. $f(x) = -x^3(x - 2)$

41. $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2$

42. $f(x) = 7(x - 3)^2(x + 5)^4$

En los ejercicios del 43 al 48 grafique la función en una ventana de visualización que muestre todas sus intersecciones x y aproxime todos sus ceros.

43. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x - 6$

44. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 7x - 2$

45. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 7$

46. $f(x) = -x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 2x + 8$

47. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 2x + 3$

48. $f(x) = 2x^5 - 11x^4 + 4x^3 + 47x^2 - 42x - 8$

En los ejercicios del 49 al 52 determine algebraica o gráficamente los ceros de la función.

49. $f(x) = x^3 - 36x$

50. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 109x - 110$

51. $f(x) = x^3 - 7x^2 - 49x + 55$

52. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 44x + 96$

En los ejercicios del 53 al 56, utilizando sólo álgebra, determine una función cúbica con los ceros dados. Mediante graficación respalde su respuesta.

53. 3, −4, 6

54. −2, 3, −5

55. $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 4$

56. $1, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$

57. Utilice regresión para ajustar una curva cúbica que pase por los cuatro puntos dados en la tabla.

x	−3	−1	1	3
y	22	25	12	−5

58. Utilice regresión para ajustar una curva cúbica que pase por los cuatro puntos dados en la tabla.

x	−2	1	4	7
y	2	5	9	26

59. Utilice regresión para ajustar una curva cuártica que pase por los cinco puntos dados en la tabla.

x	3	4	5	6	8
y	−7	−4	−11	8	3

60. Utilice regresión para ajustar una curva cuártica que pase por los cinco puntos dados en la tabla.

x	0	4	5	7	13
y	−21	−19	−12	8	3

En los ejercicios del 61 al 62 explique por qué la función tiene al menos un cero real.

61. Escriba para aprender $f(x) = x^7 + x + 100$

62. Escriba para aprender $f(x) = x^9 - x + 50$

63. Distancia de paro Una patrulla de la división de seguridad recopiló, en una autopista interestatal, la información sobre distancias de frenado que contiene la tabla 2.14 de la página siguiente.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine un modelo cuadrático de regresión.

c) Superponga la curva de regresión al diagrama de dispersión.

d) Utilice el modelo de regresión para predecir la distancia de frenado para un vehículo que viaja a 25 mph.

e) Utilice el modelo de regresión para predecir la rapidez de un automóvil, si la distancia de frenado es 300 pies.

Tabla 2.14 División de seguridad en autopistas

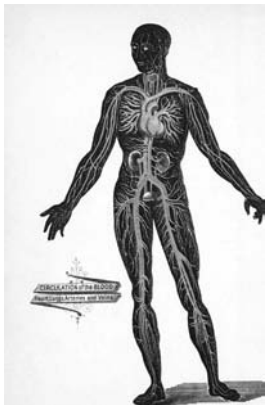
Rapidez (mph)	Distancia de frenado (pies)
10	15.1
20	39.9
30	75.2
40	120.5
50	175.9

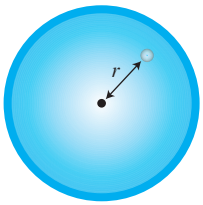
64. Análisis de la utilidad Los economistas de Hnos. Smith, determinan la utilidad de la compañía, P, mediante la fórmula $P = R - C$, donde R es el ingreso total generado por el negocio y C es el costo total de operación del negocio.

a) Utilizando los datos de los años pasados, los economistas determinaron que $R(x) = 0.0125x^2 + 412x$ modela el ingreso total, y $C(x) = 12.225 + 0.00135x^3$ modela el costo total de hacer negocios, donde x es el número de clientes que frecuentan la empresa. ¿Cuántos clientes deben tener Hnos. Smith para tener utilidades cada año?

b) ¿Cuántos clientes debe haber para Hnos. Smith para obtener una utilidad anual de $60,000?

65. Circulación de la sangre Una investigación realizada en un proyecto de investigación nacional sobre la salud muestra que la rapidez a la cual una célula sanguínea viaja en una arteria depende de su distancia al centro de la arteria. La función $v = 1.19 - 1.87r^2$ modela la velocidad (en centímetros por segundo) de una célula que está a r centímetros del centro de una arteria.





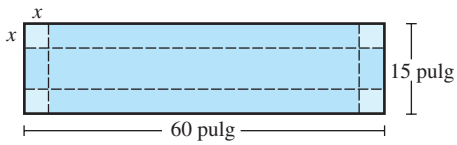
a) Determine una gráfica de v que refleje valores de v adecuados para este problema. Anote las dimensiones de la ventana de visualización.

b) Si una célula sanguínea está viajando a 0.975 cm/s, estime la distancia de ésta al centro de la arteria.

66. Volumen de una caja Dixie Packaging Co. tiene un contrato para fabricar una caja sin tapa, que se produce eliminando cuadrados de ancho x en cada esquina de una pieza cuadrada de cartón de 15 por 60 pulg.

a) Muestre que el volumen de la caja está modelada por $V(x) = x(60 - 2x)(15 - 2x)$.

b) Determine x de modo que el volumen de la caja sea al menos 450 pulg^3.



67. Volumen de una caja Cuadrados de ancho x se quitan de un pedazo de cartón de 10 por 25 cm, y los lados resultantes se doblan hacia arriba para construir una caja sin tapa. Determine todos los valores de x de modo que el volumen de la caja resultante sea a lo más 175 cm^3.

68. Volumen de una caja La función $V = 2666x - 210x^2 + 4x^3$ representa el volumen de una caja que se fabricó quitando cuadrados de ancho x de cada esquina de una hoja rectangular de material y luego doblando los lados hacia arriba. ¿Qué valores son posibles para x?

Preguntas de examen estandarizado

69. Verdadero o falso La gráfica de $f(x) = x^3 - x^2 - 2$ cruza el eje x entre $x = 1$ y $x = 2$. Justifique su respuesta.

70. Verdadero o falso Si la gráfica de $g(x) = (x + a)^2$ se obtiene mediante el desplazamiento de la gráfica de $f(x) = x^2$ hacia la derecha, por lo que a debe ser positivo. Justifique su respuesta.

En los ejercicios 71 y 72 resuelva el problema sin utilizar una calculadora.

71. Opción múltiple ¿Cuál es la intersección y de la gráfica de $f(x) = 2(x - 1)^3 + 5$?

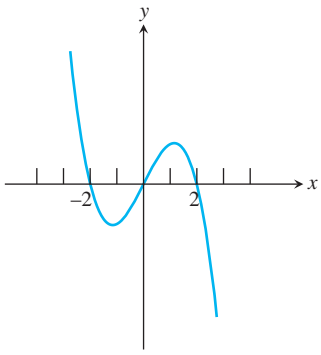
A) 7 **B)** 5 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

72. Opción múltiple ¿Cuál es la multiplicidad del cero $x = 2$ en $f(x) = (x - 2)^2(x + 2)^3(x + 3)^7$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

En los ejercicios 73 y 74, ¿cuál de las funciones especificadas podrían tener la gráfica dada?

73. Opción múltiple



A) $f(x) = -x(x + 2)(2 - x)$

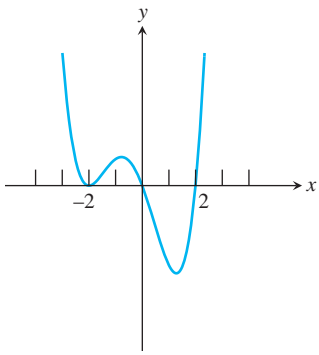
B) $f(x) = -x(x + 2)(x - 2)$

C) $f(x) = -x^2(x + 2)(x - 2)$

D) $f(x) = -x(x + 2)^2(x - 2)$

E) $f(x) = -x(x + 2)(x - 2)^2$

74. Opción múltiple



A) $f(x) = x(x + 2)^2(x - 2)$

B) $f(x) = x(x + 2)^2(2 - x)$

C) $f(x) = x^2(x + 2)(x - 2)$

D) $f(x) = x(x + 2)(x - 2)^2$

E) $f(x) = x^2(x + 2)(x - 2)^2$

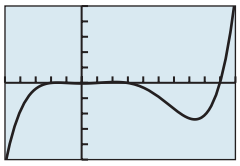
Exploraciones

En los ejercicios 75 y 76 se dan dos vistas de la función.

75. Escriba para aprender Describa por qué cada vista, por sí sola, de la función

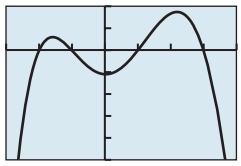
$$f(x) = x^5 - 10x^4 + 2x^3 + 64x^2 - 3x - 55,$$

podría considerarse inadecuada.



[–5, 10] por [–7,500, 7,500]

a)



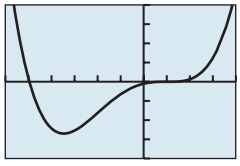
[–3, 4] por [–250, 100]

b)

76. Escriba para aprender Describa por qué cada vista, por sí sola, de la función

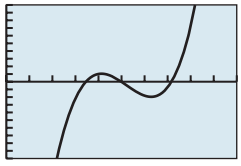
$$f(x) = 10x^4 + 19x^3 - 121x^2 + 143x - 51,$$

podría considerarse inadecuada.



[–6, 4] por [–2,000, 2,000]

a)



[0.5, 1.5] por [–1, 1]

b)

En los ejercicios del 77 al 80 la función tiene comportamiento oculto cuando se ve en la ventana $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. Describa qué comportamiento se oculta e indique las dimensiones de una ventana de visualización que revele ese comportamiento oculto.

77. $f(x) = 10x^3 - 40x^2 + 50x - 20$

78. $f(x) = 0.5(x^3 - 8x^2 + 12.99x - 5.94)$

79. $f(x) = 11x^3 - 10x^2 + 3x + 5$

80. $f(x) = 33x^3 - 100x^2 + 101x - 40$

Ampliación de las ideas

81. Grafique el lado izquierdo de la ecuación

$$3(x^3 - x) = a(x - b)^3 + c.$$

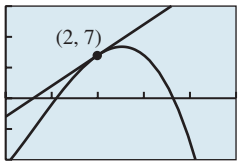
Luego explique por qué no existen números reales a, b y c que hagan verdadera la ecuación. (*Sugerencia:* Utilice su conocimiento de $y = x^3$ y transformaciones.)

82. Grafique el lado izquierdo de la ecuación

$$x^4 + 3x^3 - 2x - 3 = a(x - b)^4 + c.$$

Luego explique por qué no existen números reales a, b y c que hagan verdadera la ecuación.

83. Una vista anticipada de cálculo La figura muestra una gráfica de $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 9x - 11$ y la recta L definida por $y = 5(x - 2) + 7$.



[0, 5] por [–10, 15]

a) Confirme que el punto $Q(2, 7)$ es un punto de intersección de las dos gráficas.

b) Haga un acercamiento al punto Q para desarrollar una comprensión visual que $y = 5(x - 2) + 7$ es una *aproximación lineal* para $y = f(x)$ cerca de $x = 2$.

c) Recuerde que una recta es *tangente* a una circunferencia en un punto P, si sólo interseca a la circunferencia en el punto P. Vea las dos gráfica en la ventana $[-5, 5]$ por $[-25, 25]$ y explique por qué esa definición de recta tangente no es válida para la gráfica de f.

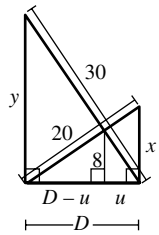
84. Una vista anticipada de cálculo Considere la función $f(x) = x^n$, en donde n es un entero impar.

a) Suponga que a es un número positivo. Muestre que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(-a, f(-a))$ es a^{n-1}.

b) Sea $x_0 = a^{1/(n-1)}$. Determine una ecuación de la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ con pendiente a^{n-1}.

c) Considere el caso especial $n = 3$ y $a = 3$. Muestre ambas gráficas de f y la recta de la parte b) en la ventana $[-5, 5]$ por $[-30, 30]$.

85. Deduzca un modelo algebraico de un problema Muestre que la distancia x, en la figura, es una solución de la ecuación $x^4 - 16x^3 + 500x^2 - 8{,}000x + 32{,}000 = 0$ y determine el valor de D, mediante los pasos siguientes.



a) Utilice los triángulos semejantes del diagrama y las propiedades que aprendió en geometría, para demostrar que

$$\frac{8}{x} = \frac{y - 8}{y}.$$

b) Muestre que $y = \dfrac{8x}{x - 8}$.

c) Muestre que $y^2 - x^2 = 500$. Luego sustituya por y, y simplifique para obtener la ecuación que se pide, de 4 grado, en x.

d) Determine la distancia D.

86. Actividad de aprendizaje en equipo Considere funciones de la forma $f(x) = x^3 + bx^2 + x + 1$, en donde b es un número real distinto de cero.

a) En grupo, analice cómo afecta la gráfica de la función al valor de b.

b) Después de terminar la parte a), cada miembro del equipo prediga en forma individual en que se parecerán las gráficas de $f(x) = x^3 + 15x^2 + x + 1$ y $g(x) = x^3 - 15x^2 + x + 1$.

c) Compare sus predicciones con los demás. Confirme si son correctas.

2.4 Ceros reales de funciones polinomiales

Aprenderá acerca de...

- La división larga y el algoritmo de la división
- Los teoremas del residuo y del factor
- La división sintética
- El teorema de los ceros racionales
- La cotas superior e inferior

. . . porque

Estos temas ayudan a identificar y localizar los ceros reales de las funciones polinomiales.

División larga y el algoritmo de la división

Hemos visto que la factorización de un polinomio revela sus ceros y mucho más acerca de su gráfica. La división de polinomios nos proporciona nuevas y mejores formas de factorizar polinomios. Primero observe que la división de polinomios se parece mucho a la división de enteros.

112	$1x^2 + 1x + 2$	← Cociente
$32\overline{)3587}$	$3x + 2\overline{)3x^3 + 5x^2 + 8x + 7}$	← Dividendo
32	$3x^3 + 2x^2$	← Multiplicar: $1x^2 \cdot (3x + 2)$
387	$3x^2 + 8x + 7$	Restar
32	$3x^2 + 2x$	Multiplicar: $1x \cdot (3x + 2)$
67	$6x + 7$	Restar
64	$6x + 4$	Multiplicar: $2 \cdot (3x + 2)$
3	3	Residuo

La división, sea de enteros o de polinomios, incluye un *dividendo* que se divide entre un *divisor* para obtener un *cociente* y un *residuo*. Podemos comprobar y resumir nuestro resultado con una ecuación de la forma

$$(\text{Divisor})(\text{Cociente}) + \text{Residuo} = \text{Dividendo}.$$

Por ejemplo, para comprobar o resumir las divisiones largas mostradas anteriormente, podríamos escribir

$$32 \times 112 + 3 = 3{,}587 \qquad (3x + 2)(x^2 + x + 2) + 3 = 3x^3 + 5x^2 + 8x + 7.$$

El *algoritmo de la división* tiene esa *ecuación polinomial* resumida, pero con el dividendo escrito en el lado izquierdo de la ecuación.

Algoritmo de la división para polinomios

Sean $f(x)$ y $d(x)$ polinomios con el grado de f mayor o igual que el grado de d, y $d(x) \neq 0$. Entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$, llamados **cociente** y **residuo**, tales que

$$f(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \tag{1}$$

donde $r(x) = 0$ o bien el grado de r es menor que el grado de d.

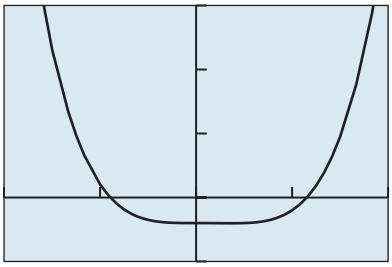
La función $f(x)$ en el algoritmo de la división es el **dividendo** y $d(x)$ es el **divisor**. Si $r(x) = 0$, decimos que $d(x)$ **divide exactamente** a $f(x)$.

El enunciado resumen (1) en ocasiones se escribe en la *forma de fracción*, de la siguiente manera:

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \tag{2}$$

Por ejemplo, para resumir la división polinomial del ejemplo anterior, podríamos escribir

$$\frac{3x^3 + 5x^2 + 8x + 7}{3x + 2} = x^2 + x + 2 + \frac{3}{3x + 2}.$$



[–2, 2] por [–5, 15]

FIGURA 2.34 Las gráficas de $y_1 = 2x^4 - x^3 - 2$ y $y_2 = (2x^2 + x + 1)(x^2 - x) + (x - 2)$ están en una relación perfecta (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Uso de división larga de polinomios

Utilice la división larga para determinar el cociente y el residuo, cuando $2x^4 - x^3 - 2$ se divide entre $2x^2 + x + 1$. Escriba un enunciado resumido, tanto en forma polinomial como en forma de fracción.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

$$\begin{array}{rl} & x^2 - x \qquad \leftarrow \text{Cociente} \\ 2x^2 + x + 1 \overline{)} & 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 0x - 2 \\ & \underline{2x^4 + x^3 + x^2} \\ & \quad -2x^3 - x^2 + 0x - 2 \\ & \quad \underline{-2x^3 - x^2 - x} \\ & \qquad\qquad x - 2 \qquad \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

El algoritmo de la división da la forma polinomial

$$2x^4 - x^3 - 2 = (2x^2 + x + 1)(x^2 - x) + (x - 2).$$

Mediante la ecuación (2), obtenemos la forma fraccionaria

$$\frac{2x^4 - x^3 - 2}{2x^2 + x + 1} = x^2 - x + \frac{x - 2}{2x^2 + x + 1}.$$

Respaldar gráficamente

La figura 2.34 respalda la forma polinomial del enunciado resumen.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Teoremas del residuo y del factor

Un importante caso especial del algoritmo de la división ocurre cuando el divisor es de la forma $d(x) = x - k$, donde k es un número real. Como el grado de $d(x) = x - k$ es 1, el residuo es un número real. Así obtenemos el siguiente enunciado resumen simplificado para el algoritmo de la división:

$$f(x) = (x - \mathrm{k})q(x) + r \tag{3}$$

Utilizamos este caso especial del algoritmo de la división en el resto de la sección.

Al usar (3), evaluamos el polinomio $f(x)$ en $x = k$:

$$f(k) = (k - k)q(k) + r = 0 \cdot q(k) + r = 0 + r = r$$

Por lo que $f(k) = r$, que es el residuo. Este razonamiento conduce al teorema siguiente.

TEOREMA Teorema del residuo

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - k$, entonces el residuo es $r = f(k)$.

El ejemplo 2 muestra una forma inteligente de utilizar el teorema del residuo que proporciona información acerca de los factores, ceros e intersecciones x.

EJEMPLO 2 Uso del teorema de residuo

Determine el residuo cuando $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$, se divide entre

a) $x - 2$ **b)** $x + 1$ **c)** $x + 4$.

SOLUCIÓN

Resuelva numéricamente (a mano)

a) ¡Podemos determinar el residuo sin hacer la división larga! Utilizando el teorema del residuo con $k = 2$, encontramos que

$$r = f(2) = 3(2)^2 + 7(2) - 20 = 12 + 14 - 20 = 6.$$

b) $r = f(-1) = 3(-1)^2 + 7(-1) - 20 = 3 - 7 - 20 = -24.$

c) $r = f(-4) = 3(-4)^2 + 7(-4) - 20 = 48 - 28 - 20 = 0.$

Interprete Como el residuo en la parte c) es 0, $x + 4$ *divide exactamente* a $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$. Así que $x + 4$ es un factor de $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$, -4 es una solución de $3x^2 + 7x - 20 = 0$ y -4 es una intersección x de la gráfica $y = 3x^2 + 7x - 20$. Todo esto lo sabemos, ¡sin haber dividido, factorizado o graficado!

Respaldar numéricamente (mediante un graficador) Podemos encontrar los residuos de varios problemas de división al mismo tiempo usando la característica de tablas de un graficador (consulte la figura 2.35).

Ahora resuelva el ejercicio 13.

X	Y1
–4	0
–3	–14
–2	–22
–1	–24
0	–20
1	–10
2	6

Y1 = 3X^2+7X–20

FIGURA 2.35 Tabla para $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$ que muestra los residuos que se obtienen cuando $f(x)$ se divide entre $x - k$, para $k = -4, -3, ..., 1, 2$.

Nuestra interpretación del ejemplo 2 c) nos lleva al teorema que se define a continuación.

TEOREMA Teorema del factor

Una función polinomial $f(x)$ tiene un factor $x - k$ si, y sólo si, $f(k) = 0$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL FACTOR

Si $f(x)$ tiene un factor $x - k$, existe un polinomio $g(x)$ tal que

$$f(x) = (x - k)g(x) = (x - k)g(x) + 0.$$

Por la condición de unicidad del algoritmo de la división $g(x)$ es el cociente y 0 es el residuo, y por el teorema del residuo, $f(k) = 0$.

Recíprocamente, si $f(k) = 0$, el residuo $r = 0$, $x - k$ divide de manera exacta a $f(x)$ y $x - k$ es un factor de $f(x)$.

Al aplicar las ideas del teorema del factor al ejemplo 2 podemos factorizar $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$ dividiendo entre el factor conocido $x + 4$.

$$\begin{array}{r} 3x - 5 \\ x + 4 \overline{)\,3x^2 + 7x - 20} \\ \underline{3x^2 + 12x} \\ -5x - 20 \\ \underline{-5x - 20} \\ 0 \end{array}$$

Así que, $f(x) = 3x^2 + 7x - 40 = (x + 4)(3x - 5)$. En este caso, en realidad no hay necesidad de utilizar la división larga o teoremas sofisticados; los métodos tradicionales de factorización pueden hacer el trabajo. Sin embargo, para polinomios de grado 3 y mayor, estos métodos sofisticados pueden ser muy útiles en la resolución de ecuaciones y la determinación de factores, ceros e intersecciones x. En realidad, el teorema del factor está ligado con conexiones previas que hemos hecho, de la manera siguiente:

Conexiones fundamentales para funciones polinomiales

Para una función polinomial f u un número real k, los enunciados siguientes son equivalentes:

1. $x = k$ es una solución (o raíz) de la ecuación $f(x) = 0$.

2. k es un cero de la función f.

3. k es una intersección x de la gráfica de $y = f(x)$.

4. $x - k$ es un factor de $f(x)$.

División sintética

Continuamos con el importante caso especial de división de polinomios con el divisor $x - k$. El teorema de residuo nos dio una forma de encontrar los residuos en este caso sin la división larga. Ahora aprendemos un método para determinar los cocientes y los residuos para la división entre $x - k$, sin la división larga. Este método abreviado para la división de un polinomio entre un divisor lineal $x - k$ es la **división sintética**.

A continuación, ilustramos el desarrollo de este método, avanzando a partir de la división larga a través de dos etapas intermedias hacia la división sintética.

Al moverse de una etapa a la otra, la atención se centra en los coeficientes y sus posiciones relativas. Al pasar de la etapa 1 a la etapa 2, suprimimos la variable x y las potencias de x, y luego de la etapa 2 a la etapa 3, eliminamos duplicaciones innecesarias y plegamos verticalmente.

Etapa 1
División larga

$$
\begin{array}{r}
2x^2 + 3x + 4 \\
x - 3\overline{)\,2x^3 - 3x^2 - 5x - 12} \\
\underline{2x^3 - 6x^2} \\
3x^2 - 5x - 12 \\
\underline{3x^2 - 9x} \\
4x - 12 \\
\underline{4x - 12} \\
0
\end{array}
$$

Etapa 2
Eliminación de variables

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 2 & 3 & 4 \\
-3\overline{)} & 2 & -3 & -5 \quad -12 \\
 & \underline{2} & \underline{-6} & \\
 & & 3 & -5 \quad -12 \\
 & & \underline{3} & \underline{-9} \\
 & & & 4 \quad -12 \\
 & & & \underline{4 \quad -12} \\
 & & & 0
\end{array}
$$

Etapa 3
Plegado vertical

$$
\begin{array}{rrrrrl}
-3 & 2 & -3 & -5 & -12 & \text{Dividendo} \\
 & & \underline{-6} & \underline{-9} & \underline{-12} & \\
 & 2 & 3 & 4 & 0 & \text{Cociente, residuo}
\end{array}
$$

Por último, de la etapa 3 a la etapa 4, cambiamos el signo del número que representa el divisor y los signos de los números en la segunda línea de nuestro esquema de división. Este cambio de signos proporciona dos ventajas:

- El número que indica al divisor, $x - k$, ahora es k, su cero.
- Cambiar los signos en la segunda línea nos permite sumar en lugar de restar.

Etapa 4
División sintética

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\text{Cero del divisor} \rightarrow 3 & 2 & -3 & -5 & -12 & \text{Dividendo} \\
 & & \underline{6} & \underline{9} & \underline{12} & \\
 & 2 & 3 & 4 & 0 & \text{Cociente, residuo}
\end{array}
$$

Con la etapa 4 hemos llegado a nuestro objetivo de la división sintética, una versión mucho más directa para dividir polinomios entre $x - k$. ¿Cómo funciona esta división "esquemática"? El ejemplo 3 explica los pasos.

EJEMPLO 3 Uso de la división sintética

Divida $2x^3 - 3x^2 - 5x - 12$ entre $x - 3$ mediante la división sintética y escriba un enunciado resumen en forma fraccionaria.

SOLUCIÓN

Configure

El cero del divisor $x - 3$ es 3, que colocamos en la posición del divisor. Puesto que el dividendo está en la forma estándar, escribimos sus coeficientes en orden en la posición del dividiendo, *cerciorándonos de utilizar un cero en lugar de cualquier término que no aparezca.* Dejamos una línea para productos y escribimos una línea horizontal debajo del espacio (observe más adelante).

Calcular

- Como el coeficiente principal del dividendo debe ser el coeficiente principal del cociente, copie el 2 a la primera posición del cociente.

Cero del divisor	3	2	−3	−5	−12	**Dividendo**
Línea para productos						
		2				

- Multiplique el cero del divisor (3) por el coeficiente determinado más recientemente del cociente (2). Escriba el producto arriba de la línea y una columna a la derecha.
- Sume el siguiente coeficiente del dividendo al producto que se acaba de encontrar y escriba la suma debajo de la línea en la misma columna.
- Repita los pasos de "multiplicar" y "sumar" hasta que se complete el último renglón.

Cero del divisor	3	2	−3	−5	−12	**Dividendo**
Línea de productos			6	9	12	
Línea de sumas		2	3	4	0	**Residuo**
			Cociente			

Interprete

La última línea de números son los coeficientes del polinomio cociente y el residuo. El cociente debe ser una función cuadrática ¿Por qué? Para que el cociente sea $2x^2 + 3x + 4$ y el residuo sea 0. Así concluimos que

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 5x - 12}{x - 3} = 2x^2 + 3x + 4, \; x \neq 3.$$

Ahora resuelva el ejercicio 9.

Teorema de los ceros racionales

Los ceros reales de funciones polinomiales son **ceros racionales** (ceros que son números racionales) o **ceros irracionales** (ceros que son números irracionales). Por ejemplo,

$$f(x) = 4x^2 - 9 = (2x - + 3)(2x - 3)$$

tiene los ceros racionales $-3/2$ y $3/2$, y

$$f(x) = x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

tiene los ceros irracionales $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.

El teorema de los ceros racionales nos dice cómo hacer una lista de todos los potenciales ceros racionales para una función polinomial con coeficientes enteros.

TEOREMA Teorema de los ceros racionales

Suponga que f es una función polinomial de grado $n \geq 1$ de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

con cada coeficiente un entero y $a_0 \neq 0$. Si $x = p/q$ es un cero racional de f, donde p y q no tienen factores enteros positivos en común, distintos de 1, entonces

- p es un factor entero del coeficiente constante a_0, y
- q es un factor enter o del coeficiente principal a_n.

EJEMPLO 4 Determinación de los ceros racionales

Determine los ceros racionales de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

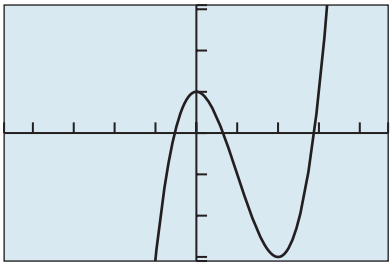
SOLUCIÓN Como ambos coeficientes, principal y constante, son 1, de acuerdo con el teorema de los ceros racionales, los únicos potenciales ceros racionales de f son 1 y -1. Así, verificamos si en realidad son ceros de f:

$$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 1 = -1 \neq 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -3 \neq 0$$

Así que no hay ceros racionales. La figura 2.36 muestra que la gráfica de f tiene tres intersecciones x. Por lo que f tiene tres ceros reales. Los tres deben ser números irracionales.

Ahora resuelva el ejercicio 33.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

FIGURA 2.36 LA función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ tiene tres ceros reales (ejemplo 4).

En el ejemplo 4, el teorema de los ceros racionales sólo nos proporcionó dos candidatos para ceros racionales, ninguno de los cuales "funcionó". Con frecuencia, este teorema sugiere muchos candidatos, como vemos en el ejemplo 5. En tal caso, utilizamos la tecnología y una variedad de métodos algebraicos para localizar los ceros racionales.

EJEMPLO 5 Determinación de ceros racionales

Determine los ceros racionales de $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

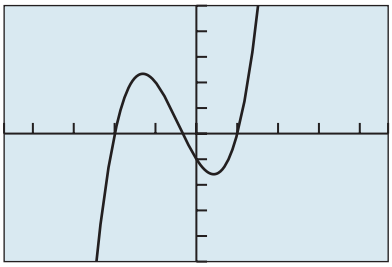
SOLUCIÓN Puesto que el coeficiente principal es 3 y el coeficiente constante es -2, el teorema de los ceros racionales proporciona varios potenciales ceros racionales de f. Así adoptamos un enfoque organizado para nuestra solución.

Potenciales ceros racionales

$$\frac{\text{Factores de } -2}{\text{Factores de } 3} : \frac{\pm 1, \pm 2}{\pm 1, \pm 3} : \pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$$

La figura 2.37 sugiere que, entre nuestros candidatos, 1, -2 y posiblemente $-1/3$ o $-2/3$ son los ceros racionales más probables. Utilizamos la división sintética ya que nos indica si

continúa



[–4.7, 4.7] por [–10, 10]

FIGURA 2.37 La función $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$ tiene tres ceros reales (ejemplo 5).

un número es un cero y, si es así, cómo se factoriza el polinomio. Para ver si 1 es un cero de f, dividimos sintéticamente $f(x)$ entre $x - 1$:

Cero del divisor	1	3	4	−5	−2	Dividendo
			3	7	2	
		3	7	2	0	Residuo
		Cociente				

Ya que el residuo es 0, $x - 1$ es un factor de $f(x)$ y 1 es un cero de f. Mediante el algoritmo de la división y la factorización, concluimos que

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2 \\ &= (x - 1)(3x^2 + 7x + 2) \\ &= (x - 1)(3x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

Así que los ceros racionales de f son 1, $-1/3$ y -2.

Ahora resuelva el ejercicio 35.

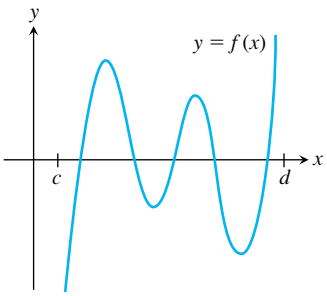


FIGURA 2.38 c es una cota inferior y d es una cota superior para los ceros reales de f.

Cotas superior e inferior

Reducimos nuestra investigación de ceros reales mediante el uso de un criterio que identifica las cotas superior e inferior para los ceros reales. Un número k es una **cota superior para los ceros reales** de f, si $f(x)$ nunca es cero cuando x es mayor que k. Por otra parte, un número k es una **cota inferior para los ceros reales** de f, si $f(x)$ nunca es cero cuando x es menor que k. Así, si c es una cota inferior y d es una cota superior para los ceros reales de una función f, todos los ceros reales de f deben estar en el intervalo $[c, d]$. La figura 2.38 ilustra esta situación.

Criterios de las cotas superior e inferior para ceros reales

Sea f una función polinomial de grado $n \geq 1$ con coeficiente principal positivo. Suponga que $f(x)$ se divide entre $x - k$ mediante la división sintética.

- Si $k \geq 0$ y todo número en la última línea es no negativo (positivo o cero), entonces k es una *cota superior* para los ceros reales de f.
- Si $k \geq 0$ y los números en la última línea se alternan entre no negativos y no positivos, entonces k es una *cota inferior* para los ceros reales de f.

EJEMPLO 6 Obtención de cotas para los ceros reales

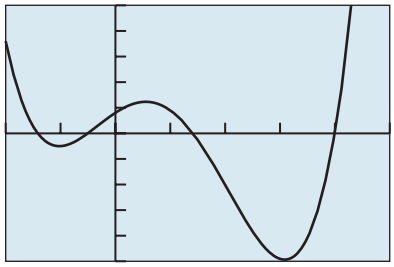
Pruebe que todos los ceros reales de $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 14x + 8$ deben estar en el intervalo $[-2, 5]$.

SOLUCIÓN Debemos mostrar que 5 es una cota superior y que -2 es una cota inferior de los ceros reales de f. La función f tiene un coeficiente principal positivo, así que empleamos los criterios de la cota superior y de la inferior, y utilizamos la división sintética:

continúa

5	2	−7	−8	14	8	
		10	15	35	245	
	2	3	7	49	253	Última línea
−2	2	−7	−8	14	8	
		−4	22	−28	28	
	2	−11	14	−14	36	Última línea

Como la última línea en el esquema de la primera división consiste únicamente de números positivos, 5 es una cota superior. Puesto que la última línea de la segunda división consiste de números de signos alternantes, −2 es una cota inferior; por lo tanto, todos los ceros reales de f deben estar en el intervalo cerrado $[-2, 5]$. ***Ahora resuelva el ejercicio 37.***



[–2, 5] por [–50, 50]

FIGURA 2.39 $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 14x + 8$ tiene todos sus ceros reales en $[-2, 5]$ (ejemplo 5).

EJEMPLO 7 Determinación de ceros reales de una función polinomial

Determine todos los ceros reales de $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 14x + 8$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 6 sabemos que todos los ceros reales de f deben estar en el intervalo cerrado $[-2, 5]$. Así, en la figura 2.39, fijamos nuestros Xmín y Xmáx de acuerdo con esto.

Ahora utilizamos el teorema de los ceros racionales.

Potenciales ceros racionales:

$$\frac{\text{Factores de 8}}{\text{Factores de 2}}: \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8}{\pm 1, \pm 2}: \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{2}$$

Comparamos las intersecciones x de la gráfica de la figura 2.39 y nuestra lista de candidatos, y decidimos que 4 y $-1/2$ son los únicos ceros racionales potenciales que vale la pena seguir.

4	2	−7	−8	14	8
		8	4	−16	−8
	2	1	−4	−2	0

Con base en la primera división sintética, concluimos que

$$f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 14x + 8.$$
$$= (x - 4)(2x^3 + x^2 - 4x - 2)$$

y ahora dividimos el factor cúbico, $2x^3 + x^2 - 4x - 2$, entre $x + 1/2$:

−1/2	2	1	−4	−2
		−1	0	2
	2	0	−4	0

continúa

Esta segunda división sintética nos permite completar la factorización de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-4)(2x^3+x^2-4x-2) \\ &= (x-4)\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-4) \\ &= 2(x-4)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2-2) \\ &= (x-4)(2x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Así, los ceros de f son los números racionales 4 y $-1/2$, y los números irracionales $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. ***Ahora resuelva el ejercicio 49.***

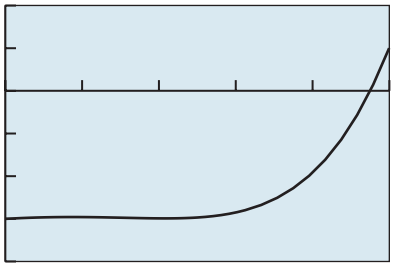
Una función polinomial no puede tener más ceros reales que su grado, pero puede tener menos. Cuando un polinomio tiene menos ceros reales que su grado, los criterios de las cotas superior e inferior nos ayudan a conocer que hemos encontrado todos, como se ilustra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Determinación de los ceros reales de una función polinomial

Pruebe que todos los ceros reales de $f(x) = 10x^5 - 3x^2 + x - 6$ están en el intervalo [0, 1], y encuéntrelos.

SOLUCIÓN Primero demostramos que 1 es una cota superior y 0 es una cota inferior para los ceros reales de f. La función f tiene coeficiente principal positivo, así que utilizamos la división sintética y los criterios de las cotas superior e inferior:

1	10	0	0	−3	1	−6	
		10	10	10	7	8	
	10	10	10	7	8	2	Última línea
0	10	0	0	−3	1	−6	
		0	0	0	0	0	
	10	0	0	−3	1	−6.	Última línea



[0, 1] por [–8, 4]

FIGURA 2.40 $y = 10x^5 - 3x^2 + x - 6$ (ejemplo 8).

Como la última línea en el esquema de la primera división consiste en todos los números no negativos, 1 es una cota superior. Puesto que la última línea en la segunda división consiste en números que son alternantes, no negativos y no positivos, 0 es una cota inferior. Por lo tanto, todos los ceros reales de f deben estar en el intervalo cerrado [0, 1]. Así en la figura 2.40, fijamos Xmín y Xmáx de acuerdo con esto.

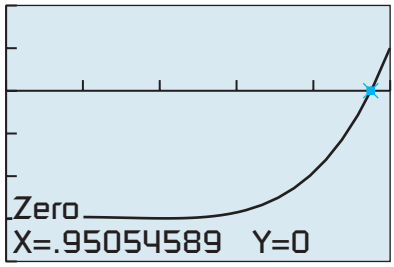
Ahora utilizamos el teorema de los ceros racionales

Potenciales ceros racionales:

$$\frac{\text{Factores de } -6}{\text{Factores de } 10} : \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6}{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10}:$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{6}{5}, \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{3}{10}.$$

continúa



[0, 1] por [–8, 4]

FIGURA 2.41 Una aproximación para el cero irracional de $f(x) = 10x^5 - 3x^2 + x - 6$ (ejemplo 8).

Comparamos las intersecciones x de la gráfica en la figura 2.40 y nuestra lista de candidatos, y decidimos que f no tiene ceros racionales. Con base en la figura 2.40, vemos que f cambia de signo en el intervalo [0.8, 1], así que por el teorema del valor intermedio debe tener un cero real en este intervalo. Puesto que no es racional concluimos que es irracional. La figura 2.41 muestra que este único cero real de f es aproximadamente 0.95.

Ahora resuelva el ejercicio 55.

REPASO RÁPIDO 2.4 *(Para obtener ayuda consulte las secciones A.2 y A.3)*

En los ejercicios del 1 al 4 reescriba la expresión como un polinomio en forma estándar.

1. $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 7x}{x}$

2. $\dfrac{2x^3 - 5x^2 - 6x}{2x}$

3. $\dfrac{x^4 - 3x^2 + 7x^5}{x^2}$

4. $\dfrac{6x^4 - 2x^3 + 7x^2}{3x^2}$

En los ejercicios del 5 al 10 factorice el polinomio en factores lineales.

5. $x^3 - 4x$

6. $6x^2 - 54$

7. $4x^2 + 8x - 60$

8. $15x^3 - 22x^2 + 8x$

9. $x^3 + 2x^2 - x - 2$

10. $x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.4

En los ejercicios del 1 al 6 divida $f(x)$ entre $d(x)$ y escriba un enunciado resumen en forma polinomial y en forma fraccionaria.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$; $d(x) = x - 1$

2. $f(x) = x^3 - 1$; $d(x) = x + 1$

3. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 7x - 9$; $d(x) = x + 3$

4. $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 2x - 1$; $d(x) = 2x + 1$

5. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 6$; $d(x) = x^2 + 2x - 1$

6. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 5$; $d(x) = x^2 + 1$

En los ejercicios del 7 al 12 divida mediante la división sintética y escriba un enunciado resumen en forma fraccionaria.

7. $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x + 1}$

8. $\dfrac{2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

9. $\dfrac{9x^3 + 7x^2 - 3x}{x - 10}$

10. $\dfrac{3x^4 + x^3 - 4x^2 + 9x - 3}{x + 5}$

11. $\dfrac{5x^4 - 3x + 1}{4 - x}$

12. $\dfrac{x^8 - 1}{x + 2}$

En los ejercicios del 13 al 18 utilice el teorema del residuo para determinar el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - k$.

13. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; $k = 2$

14. $f(x) = x^4 - 5$; $k = 1$

15. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$; $k = -3$

16. $f(x) = x^3 - 3x + 4$; $k = -2$

17. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$; $k = 2$

18. $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 20x + 3$; $k = -1$

En los ejercicios del 19 al 24 utilice el teorema del factor para determinar si el primer polinomio es un factor del segundo polinomio.

19. $x - 1; x^3 - x^2 + x - 1$ **20.** $x - 3; x^3 - x^2 - x - 15$

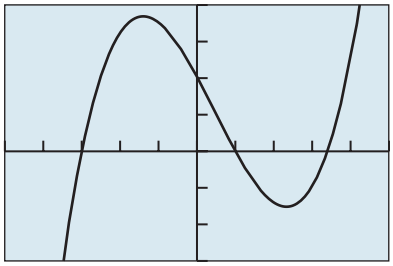
21. $x - 2; x^3 + 3x - 4$ **22.** $x - 2; x^3 - 3x - 2$

23. $x + 2; 4x^3 + 9x^2 - 3x - 10$

24. $x + 1; 2x^{10} - x^9 + x^8 + x^7 + 2x^6 - 3$

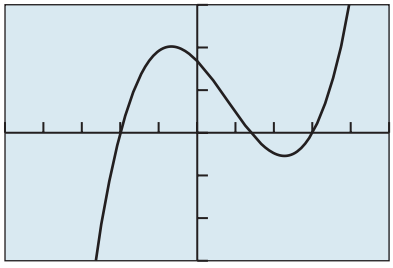
En los ejercicios 25 y 26 utilice la gráfica para hacer una conjetura de los posibles factores lineales de $f(x)$. Luego factorice completamente a $f(x)$ con la ayuda de la división sintética.

25. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 - 49x + 51$



[−5, 5] por [−75, 100]

26. $f(x) = 5x^3 - 12x^2 - 23x + 42$



[−5, 5] por [−75, 75]

En los ejercicios del 27 al 30 determine la función polinomial con coeficiente principal 2 y que tiene el grado y los ceros dados.

27. Grado 3, con −2, 1 y 4 como ceros.

28. Grado 3, con −1, 3 y −5 como ceros.

29. Grado 3, con 2, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$ como ceros.

30. Grado 4, con −3, −1, 0 y $\frac{5}{2}$ como ceros.

En los ejercicios 31 y 32, empleando sólo métodos algebraicos, determine la función cúbica con la tabla de valores dada. Compruebe con un graficador.

31.

x	−4	0	3	5
$f(x)$	0	180	0	0

32.

x	−2	−1	1	5
$f(x)$	0	24	0	0

En los ejercicios del 33 al 36 utilice el teorema de los ceros racionales para escribir una lista de todos los potenciales ceros racionales. Luego determine cuáles, si los hay, son ceros.

33. $f(x) = 6x^3 - 5x - 1$ **34.** $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 14$

35. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 9x + 9$

36. $f(x) = 6x^4 - x^3 - 6x^2 - x - 12$

En los ejercicios del 37 al 40 utilice la división sintética para probar que el número k es una cota superior para los ceros reales de la función f.

37. $k = 3; f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$

38. $k = 5; f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 5x - 1$

39. $k = 2; f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x - 12$

40. $k = 3; f(x) = 4x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 9x + 2$

En los ejercicios del 41 al 44 utilice la división sintética para probar que el número k es una cota inferior para los ceros reales de la función f.

41. $k = -1; f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 3$

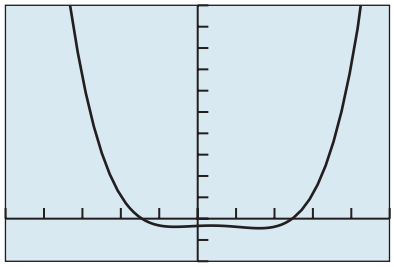
42. $k = -3; f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 5$

43. $k = 0; f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

44. $k = -4; f(x) = 3x^3 - x^2 - 5x - 3$

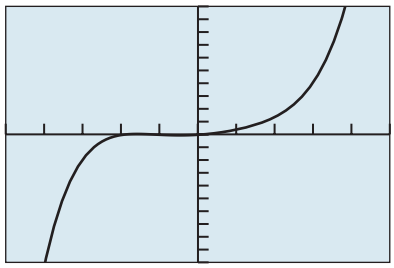
En los ejercicios del 45 al 48 utilice los criterios de las cotas superior e inferior para decidir si podrían haber ceros reales para la función fuera de la ventana que se muestra. Si es así, compruebe por ceros adicionales.

45. $f(x) = 6x^4 - 11x^3 - 7x^2 + 8x - 34$



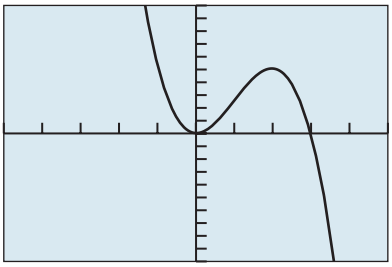
[−5, 5] por [−200, 1,000]

46. $f(x) = x^5 - x^4 + 21x^2 + 19x - 3$



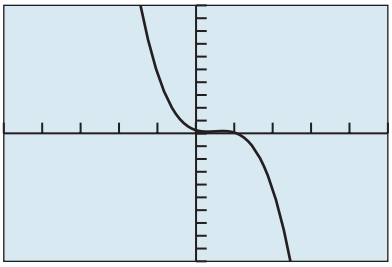
[−5, 5] por [−1,000, 1,000]

47. $f(x) = x^5 - 4x^4 - 129x^3 + 396x^2 - 8x + 3$



[−5, 5] por [−1,000, 1,000]

48. $f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 141x^3 + 216x^2 - 91x + 25$



[−5, 5] por [−1,000, 1,000]

En los ejercicios del 49 al 56 determine todos los ceros reales de la función y, cuando sea posible, encuentre los valores exactos. Identifique cada cero como racional o irracional.

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6$

50. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$

51. $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 6$

52. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4$

53. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x + 8$

54. $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10$

55. $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

56. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 2$

57. Configuración de un plan de producción La compañía SunSpot determina que la función de oferta para su secadora de cabello RizoEterno es $S(p) = 6 + 0.001p^3$ y que su función de demanda es $D(p) = 80 - 0.02p^2$, donde p es el precio. Determine el precio para el que la oferta sea igual a la demanda, y el número de secadores para el cabello corresponda a este precio de equilibrio.

58. Configuración de un plan de producción La compañía de cámaras fotográficas Pentkon determina que las funciones de oferta y demanda para sus lentes zoom de 35−70 *m* son $S(p) = 200 - p + 0.000007p^4$ y $D(p) = 1{,}500 - 0.0004p^3$, donde p es el precio. Determine el precio para el que la oferta iguale a la demanda y el número de lentes zoom que corresponda a este precio de equilibrio.

59. Determine el residuo cuando $x^{40} - 3$ se divide entre $x + 1$.

60. Determine el residuo cuando $x^{63} - 17$ se divide entre $x - 1$.

61. Sea $f(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 13x + 38$

a) Utilice los criterios de la cota superior e inferior para probar que todos los ceros reales de f están en el intervalo $[-5, 4]$.

b) Determine todos los ceros racionales de f.

c) Factorice $f(x)$ mediante el o los ceros que se encontraron en b).

d) Aproxime todos los ceros irracionales de f.

e) Utilice la división sintética y el o los ceros irracionales que se encontraron en d) para continuar con la factorización de $f(x)$ que inició en c).

62. La distancia de Lewis D desde un detector de movimiento está dado por la información en la tabla 2.15.

Tabla 2.15 Datos del detector de movimiento

t (segundos)	D (metros)	t (segundos)	D (metros)
0.0	1.00	4.5	0.99
0.5	1.46	5.0	0.84
1.0	1.99	5.5	1.28
1.5	2.57	6.0	1.87
2.0	3.02	6.5	2.58
2.5	3.34	7.0	3.23
3.0	2.91	7.5	3.78
3.5	2.31	8.0	4.40
4.0	1.57		

a) Determine un modelo cúbico de regresión y grafíquelo junto con un diagrama de dispersión de los datos.

b) Utilice el modelo cúbico de regresión para estimar, al inicio, qué tan lejos está Lewis del detector de movimiento.

c) Utilice el modelo cúbico de regresión para estimar cuándo cambia de dirección Lewis. Cuando cambia de dirección, ¿qué tan lejos se encuentra del detector de movimiento?

Preguntas de examen estandarizado

63. Verdadero o falso La función polinomial $f(x)$ tiene un factor $x + 2$ si, y sólo si, $f(2) = 0$. Justifique su respuesta.

64. Verdadero o falso Si $f(x) = (x - 1)(2x^2 - x + 1) + 3$, entonces el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 1$ es 3. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 65 al 68 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver el problema.

65. Opción múltiple Sea f una función polinomial con $f(3) = 0$. ¿Cuál de los enunciados siguientes no es verdadero?

A) $x + 3$ es un factor de $f(x)$.

B) $x - 3$ es un factor de $f(x)$.

C) $x = 3$ es un cero de $f(x)$.

D) 3 es una intersección x de $f(x)$.

E) El residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 3$ es cero.

66. **Opción múltiple** Sea $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$. ¿Cuál de los siguientes no es una posible raíz racional de f?

A) -3 **B)** -1 **C)** 1 **D)** 1/2 **E)** 2/3

67. **Opción múltiple** Sea $f(x) = (x + 2)(x^2 + x - 1) - 3$. ¿Cuál de los enunciados siguientes no es verdadero?

A) El residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x + 2$ es -3.

B) El residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 2$ es -3.

C) El residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x^2 + x - 1$ es -3.

D) $x + 2$ no es un factor de $f(x)$.

E) $f(x)$ no se divide exactamente entre $x + 2$.

68. **Opción múltiple** Sea $f(x) = (x^2 + 1)(x - 2) + 7$. ¿Cuál de los enunciados siguientes no es verdadero?

A) El residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x^2 + 1$ es 7.

B) El residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 2$ es 7.

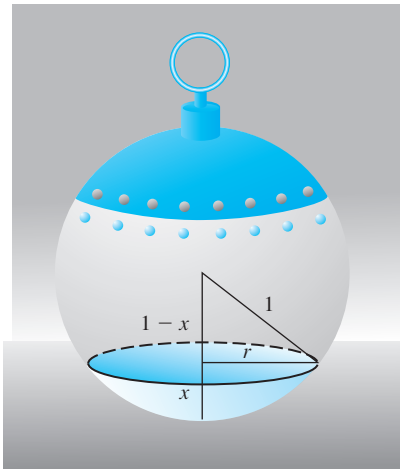
C) $f(2) = 7$ **D)** $f(0) = 5$.

E) f no tiene una raíz real.

Exploraciones

69. **Principio de Arquímedes** Una boya esférica tiene un radio de un metro y una densidad de un cuarto de la del agua de mar. Por el principio de Arquímedes, el peso del agua desplazada será igual al peso de la boya.

- Sea x = la profundidad a la cual la boya se hunde.
- Sea d = la densidad del agua de mar.
- Sea r = al radio del círculo que se forma en donde la boya, el aire y el agua se unen. Consulte la siguiente figura:



Observe que $0 < x < 1$ y que

$$(1 - x)^2 + r^2 = 1$$

$$r^2 = 1 - (1 - x)^2$$

$$= 2x - x^2$$

a) Verifique que el volumen de la boya es $4\pi/3$.

b) Utilice su resultado de la parte a) para establecer el peso de la boya cuando $\pi d/3$.

c) Pruebe que el peso del agua desplazada es $\pi d \cdot x(3r^2 + x^2)/6$.

d) Aproxime la profundidad a la que la boya se hundirá.

70. **Principio de Arquímedes** Con el escenario del ejercicio 69, determine la profundidad a la que se hundirá la boya, si su densidad es un quinto de la del agua de mar.

71. **Investigación biológica** Stephanie, una bióloga que investiga sobre la industria de aves de corral, modela la población P de pavos salvajes, t días después que se dejan para reproducirse, con la función

$$P(t) = -0.00001t^3 + 0.002t^2 + 1.5t + 100.$$

a) Grafique la función $y = P(t)$ para valores apropiados de t.

b) Determine cuál es la población máxima de pavos y cuándo ocurre.

c) Suponiendo que este modelo continúa siendo preciso, ¿cuándo se extinguirá la población de pavos?

d) **Escriba para aprender** Cree un escenario que pueda explicar el crecimiento exhibido por esta población de pavos.

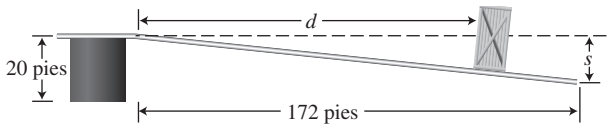
72. **Ingeniería arquitectónica** Dave, un ingeniero en el Grupo Trumbauer, Inc., una compañía arquitectónica, completa las especificaciones para una viga de acero de 172 pies de longitud, anclada en un extremo a un pilar, 20 pies por arriba del nivel del suelo. Él sabe que cuando un objeto de 200 lb se coloca a d pies del extremo fijo, la viga se flexiona s pies donde

$$s = (3 \times 10^{-7})d^2(550 - d).$$

a) ¿Cuál es la variable independiente en esta función polinomial?

b) ¿Cuáles son las dimensiones de la ventana de visualización que muestra una gráfica para los valores que tomen sentido en la situación de este problema?

c) Si la deflexión vertical es 1.25 pies, ¿qué tan lejos del extremo fijo se debe colocar el objeto de 200 lb?



73. Un teorema clásico, la **Regla de signos de Descartes**, nos habla acerca del número de ceros reales positivos y negativos de una función polinomial, observando las variaciones de signo en el polinomio. Una *variación de signo* ocurre cuando coeficientes consecutivos (en la forma estándar) tiene signos opuestos.

Si $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ es un polinomio de grado n, entonces

- El número de ceros reales positivos de f es igual al número de variaciones de signo de $f(x)$, o ese número menos algún número par.
- El número de ceros reales negativos de f es igual al número de variaciones de signo de $f(-x)$, o ese número menos algún número par.

Utilice la regla de signos de Descartes para determinar los números posibles de ceros reales positivos y negativos de la función.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

b) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

c) $f(x) = 2x^3 + x - 3$

d) $g(x) = 5x^4 + x^2 - 3x - 2$

Ampliación de las ideas

74. Escriba para aprender Grafique cada lado de la ecuación resumen del ejemplo 3:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 5x - 12}{x - 3} \text{ y}$$

$$g(x) = 2x^2 + 3x + 4, \qquad x \neq 3$$

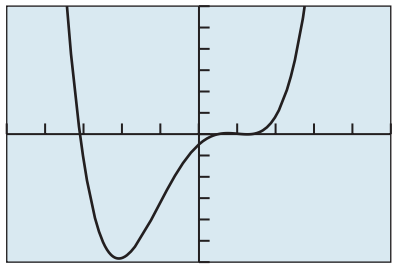
¿Cómo se relacionan estas funciones? Incluya un análisis del dominio y la continuidad de cada función.

75. Escriba apara aprender Explique cómo llevar a cabo la división mediante la división sintética. Trabaje a través de los pasos con explicaciones completas. Interprete y compruebe su resultado.

$$\frac{4x^3 - 5x^2 + 3x + 1}{2x - 1}$$

76. Escriba para aprender La figura muestra una gráfica de $f(x) = x^4 + 0.1x^3 - 6.5x^2 + 7.9x - 2.4$. Explique cómo utilizar un graficador para justificar el enunciado.

$$f(x) = x^4 + 0.1x^3 - 6.5x^2 + 7.9x - 2.4$$
$$\approx (x + 3.10)(x - 0.5)(x - 1.13)(x - 1.37)$$



[−5, 5] por [−30, 30]

77. a) Escriba para aprender Escriba un párrafo que describa cómo los ceros de $f(x) = (1/3)x^3 + x^2 + 2x - 3$ están relacionados con los ceros de $g(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 9$. ¿De qué manera este ejemplo ilustra cómo el teorema de los ceros racionales puede aplicarse para determinar los ceros de un polinomio con coeficientes *racionales*?

b) Determine los ceros racionales de

$$f(x) = x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{7}{2}.$$

c) Determine los ceros racionales de

$$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{37}{12}x + \frac{5}{2}.$$

78. Utilice el teorema de los ceros racionales para probar que $\sqrt{2}$ es irracional.

79. Actividad en equipo *Trabaje en grupos de tres*. Grafique

$$f(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 7.$$

a) Utilice métodos de un graficador para determinar aproximaciones de los ceros reales.

b) Identifique una lista de cuatro factores lineales cuyo producto podría se llamado una *factorización aproximada de* $f(x)$.

c) Analice qué métodos gráficos y numéricos podría usar para mostrar que la factorización de la parte b) es razonable.

2.5 Ceros complejos y el teorema fundamental del álgebra

Aprenderá acerca de...

- Dos teoremas importantes
- Los ceros complejos conjugados
- La factorización con coeficientes reales

. . . porque

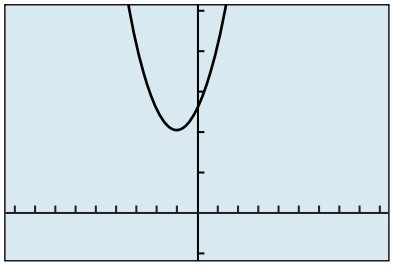
Estos temas proporcionan la historia completa acerca de los ceros y factores de polinomios con coeficientes reales.

Dos teoremas importantes

En la sección 2.3 aprendimos que una función polinomial de grado n tiene a los más n ceros reales. La figura 2.42 muestra que la función polinomial $f(x) = x^2 + 2x + 5$, de grado 2, no tiene ceros reales. (¿Por qué?) Sin embargo, un poco de aritmética muestra que el número complejo $-1 + 2i$ es un cero de f:

$$\begin{aligned} f(-1 + 2i) &= (-1 + 2i)^2 + 2(-1 + 2i) + 5 \\ &= (-3 - 4i) + (-2 + 4i) + 5 \\ &= 0 + 0i \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fórmula cuadrática muestra que $-1 \pm 2i$ son los dos ceros de f y puede utilizarse para determinar los ceros complejos de cualquier función polinomial de grado 2. En esta sección aprenderemos acerca de los ceros complejos de funciones polinomiales de grado mayor y cómo utilizar estos ceros para factorizar expresiones polinomiales.



[−9.4, 9.4] por [−2, 10]

FIGURA 2.42 La gráfica de $f(x) = x^2 + 2x + 5$ no tiene intersecciones x, por lo que f no tiene ceros reales.

TEOREMA Teorema fundamental del álgebra

Una función polinomial de grado n tiene n ceros complejos (reales y no reales). Algunos de estos ceros pueden repetirse.

El teorema del factor se extiende a los ceros complejos de una función polinomial. Así, k es un cero complejo de un polinomio si, y sólo si $x - k$ es un factor del polinomio, incluso si k no es un número real. Combinamos este hecho con el teorema fundamental del álgebra para obtener el teorema siguiente.

TEOREMA Teorema de la factorización lineal

Si $f(x)$ es una función polinomial de grado $n > 0$, entonces $f(x)$ tiene precisamente n factores lineales y

$$f(x) = a(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$$

donde a es el coeficiente principal de $f(x)$ y $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son los ceros complejos de $f(x)$. Las z_i no necesariamente son números distintos; algunos pueden repetirse.

El teorema fundamental del álgebra y el teorema de la factorización lineal son *teoremas de existencia*. Nos hablan acerca de la existencia de ceros y de factores lineales, pero no de cómo encontrarlos.

Se pierde una relación al pasar de ceros reales a ceros complejos. Si k es un cero complejo *no real* de una función polinomial $f(x)$, entonces k *no* es una intersección x de la gráfica de f. Las otras conexiones se cumplen si k es real o no real.

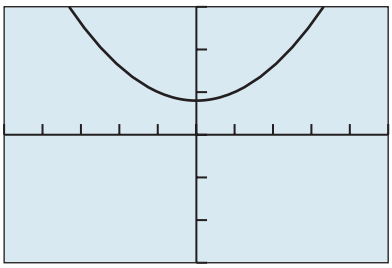
Relaciones polinomiales fundamentales en el caso complejo

Los enunciados siguientes acerca de una función polinomial f son equivalentes, si k es un número complejo:

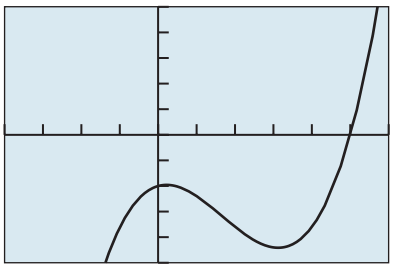
1. $x = k$, es una solución (o raíz) de la ecuación $f(x) = 0$.

2. k es un cero de la función f.

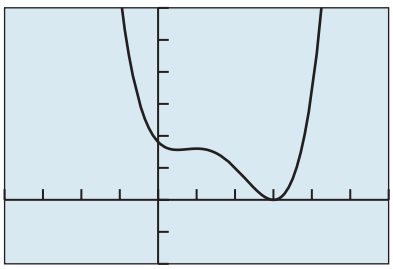
3. $x - k$, es un factor de $f(x)$.



[–5, 5] por [–15, 15]
a)



[–4, 6] por [–25, 25]
b)



[–4, 6] por [–10, 30]
c)

FIGURA 2.43 Las gráficas de a) $y = x^2 + 4$, b) $y = x^3 - 5x^2 + 2x - 10$ y c) $y = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$ (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Exploración de las relaciones polinomiales fundamentales

Escriba la función polinomial en forma estándar e identifique los ceros de la función y las intersecciones x de su gráfica:

a) $f(x) = (x - 2i)(x + 2i)$

b) $f(x) = (x - 5)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$

c) $f(x) = (x - 3)(x - 3)(x - i)(x + i)$

SOLUCIÓN

a) La función cuadrática $f(x) = (x - 2i)(x + 2i) = x^2 + 4$ tiene dos ceros: $x = 2i$ y $x = -2i$. Puesto que los ceros no son reales, la gráfica de f no tiene intersecciones x.

b) La función cúbica

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 5)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) \\ &= (x - 5)(x^2 + 2) \\ &= x^3 - 5x^2 + 2x - 10 \end{aligned}$$

tiene tres ceros: $x = 5$, $x = \sqrt{2}i$, y $x = -\sqrt{2}i$. De los tres, sólo $x = 5$ es una intersección x.

c) La función cuártica

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 3)(x - 3)(x - i)(x + i) \\ &= (x^2 - 6x + 9)(x^2 + 1) \\ &= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

tiene cuatro ceros: $x = 3$, $x = 3$, $x = i$ y $x = -i$. Sólo hay tres ceros distintos. El cero real $x = 3$ es un cero repetido de multiplicidad dos. Debido a esta multiplicidad par, la gráfica de f toca, pero no cruza, el eje x en $x = 3$, la única intersección x.

La figura 2.43 respalda nuestras conclusiones con respecto a las intersecciones x.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Ceros complejos conjugados

En la sección R.6 vimos que, para ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$, con coeficientes reales, si el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo, las soluciones son un par conjugado de números complejos. La relación se generaliza a funciones polinomiales de grado superior, de la manera siguiente:

TEOREMA Ceros complejos conjugados

Suponga que $f(x)$ es una función polinomial con *coeficientes reales*. Si a y b son números reales con $b \neq 0$ y $a + bi$ es un cero de $f(x)$, entonces su conjugado complejo también es un cero de $f(x)$.

EXPLORACIÓN 1 ¿Qué sucede si los coeficientes no son reales?

1. Utilice la sustitución para verificar que $x = 2i$ y $x = -i$ son ceros de $f(x) = x^2 - ix + 2$. ¿Los conjugados de $2i$ y de $-i$ también son ceros de $f(x)$?
2. Utilice la sustitución para verificar que $x = i$ y $x = 1 - i$ son ceros de $g(x) = x^2 - x + (1 + i)$. ¿Los conjugados de i y de $1 - i$ también son ceros de $g(x)$?
3. De las partes 1 y 2, ¿qué conclusiones puede sacar? Sus resultados, ¿contradicen el teorema acerca de los ceros complejos conjugados?

EJEMPLO 2 Determinación de un polinomio a partir de los ceros dados

Escriba una función polinomial de menor grado, en la forma estándar, con coeficientes reales cuyos ceros incluyan a -3, 4 y $2 - i$.

SOLUCIÓN Como -3 y 4 son ceros reales, $x + 3$ y $x - 4$ deben ser factores. Ya que los coeficientes son reales y $2 - i$ es un cero, $2 + i$ también debe ser un cero. Por lo tanto, $x - (2 - i)$ y $x - (2 + i)$ deben ser factores de $f(x)$. Así,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 3)(x - 4)[x - (2 - i)][x - (2 + i)] \\ &= (x^2 - x - 12)(x^2 - 4x + 5) \\ &= x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 43x - 60 \end{aligned}$$

es un polinomio del tipo que buscamos. También cualquier múltiplo real distinto de cero de $f(x)$ será un polinomio del tipo buscado.

Ahora resuelva el ejercicio 7.

EJEMPLO 3 Determinación de un polinomio a partir de ceros dados

Escriba una función polinomial, en forma estándar, de grado mínimo con coeficientes reales cuyos ceros incluyan a $x = 1$, $x = 1 + 2i$, $x = 1 - i$.

SOLUCIÓN Puesto que los coeficientes son reales y $1 + 2i$ es un cero, $1 - 2i$ también debe ser un cero. Por lo tanto, $x - (1 + 2i)$ y $x - (1 - 2i)$ son factores de $f(x)$.

continúa

Asimismo, puesto que $1 - i$ es un cero, $1 + i$ deber ser un cero. De esto deriva que $x - (1 - i)$ y $x - (1 + i)$ son factores de $f(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)[x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)][x - (1 + i)][x - (1 - i)] \\ &= (x - 1)(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 2x + 2) \\ &= (x^3 - 3x^2 + 7x - 5)(x^2 - 2x + 2) \\ &= x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 25x^2 + 24x - 10 \end{aligned}$$

es un polinomio del tipo que buscamos. Cualquier múltiplo real, distinto de cero, de $f(x)$ también será un polinomio del tipo buscado.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

EJEMPLO 4 Factorización de un polinomio con ceros complejos

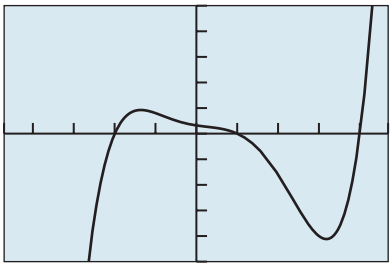
Determine todos los ceros de $f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 6x + 8$ y escriba $f(x)$ en su factorización lineal.

SOLUCIÓN La figura 2.44 sugiere que los ceros reales de f son $x = -2$, $x = 1$ y $x = 4$.

Utilizando división sintética podemos verificar estos ceros y mostrar que $x^2 + 1$ es un factor de f. Así que $x = i$ y $x = -i$ también son ceros. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 6x + 8 \\ &= (x + 2)(x - 1)(x - 4)(x^2 + 1) \\ &= (x + 2)(x - 1)(x - 4)(x - i)(x + i). \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 13.



[—4.7, 4.7] por [—125, 125]

FIGURA 2.44 $f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 6x + 8$ tiene tres ceros reales (ejemplo 4).

La división sintética puede usarse con divisores que sean números complejos, de la misma manera que se utilizó con divisores números reales.

EJEMPLO 5 Determinación de ceros complejos

El número complejo $z = 1 - 2i$ es un cero de $f(x) = 4x^4 + 17x^2 + 14x + 65$. Determine los ceros restantes de $f(x)$ y expréselo en su factorización lineal.

SOLUCIÓN Utilizamos una división sintética para mostrar que $f(1 - 2i) = 0$:

$1 - 2i$	4	0	17	14	65
		$4 - 8i$	$-12 - 16i$	$-27 - 26i$	-65
	4	$4 - 8i$	$5 - 16i$	$-13 - 26i$	0

Por tanto, $1 - 2i$ es un cero de $f(x)$. El conjugado $1 + 2i$ también debe ser un cero. Utilizamos división sintética sobre el cociente que se encontró antes, para determinar el factor cuadrático restante:

$1 + 2i$	4	$4 - 8i$	$5 - 16i$	$-13 - 26i$
		$4 + 8i$	$8 + 16i$	$13 + 26i$
	4	8	13	0

continúa

Por último, utilizamos la fórmula cuadrática para determinar los dos ceros de $4x^2 + 8x + 13$:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 208}}{8}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{-144}}{8}$$

$$= \frac{-8 \pm 12i}{8}$$

$$= -1 \pm \frac{3}{2}i$$

Por tanto, los cuatro ceros de $f(x)$ son $1 - 2i$, $1 + 2i$, $-1 + (3/2)i$, $-1 - (3/2)i$. Como el coeficiente principal de $f(x)$ es 4, obtenemos

$$f(x) = 4[x - (1 - 2i)]\,[x - (1 + 2i)]\left[x - \left(-1 + \tfrac{3}{2}i\right)\right]\left[x - \left(-1 - \tfrac{3}{2}i\right)\right].$$

Si queremos quitar las fracciones en los factores, podemos distribuir el 4 para obtener

$$f(x) = [x - (1 - 2i)][x - (1 + 2i)][2x - (-2 + 3i)][2x - (-2 - 3i)].$$

Ahora resuelva el ejercicio 33.

Factorización con coeficientes reales

Sea $f(x)$ una función polinomial con coeficientes reales. El teorema de factorización lineal dice que $f(x)$ puede factorizarse en la forma

$$f(x) = a(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n),$$

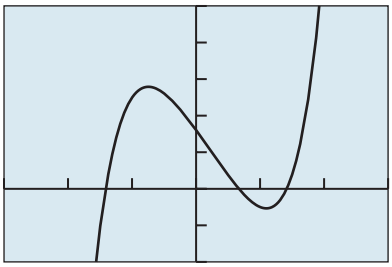
donde z_i son números complejos. Sin embargo, recuerde que los ceros complejos que no son reales aparecen en pares conjugados. El producto de $x - (a + bi)$ y $x - (a - bi)$ es

$$[x - (a + bi)]\,[x - (a - bi)] = x^2 - (a - bi)x - (a + bi)x + (a + bi)\,(a - bi)$$
$$= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).$$

Por lo que la expresión cuadrática $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$, cuyos coeficientes son reales, es un factor de $f(x)$. Tal expresión cuadrática con coeficientes reales, pero sin ceros reales, es **irreducible sobre los reales**. En otras palabras, si queremos que los factores de un polinomio tengan coeficientes reales, la factorización puede realizarse con factores lineales y factores cuadráticos irreducibles.

Factores de un polinomio con coeficientes reales

Toda función polinomial con coeficientes reales puede escribirse como un producto de factores lineales y factores cuadráticos irreducibles, cada uno con coeficientes reales.



[−3, 3] por [−20, 50]

FIGURA 2.45 $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 24x + 16$ tiene tres ceros reales (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Factorización de un polinomio

Escriba $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 24x + 16$ como un producto de factores cuadráticos lineales y cuadráticos irreducibles, cada uno con coeficientes reales.

SOLUCIÓN El teorema de los ceros racionales proporciona los candidatos para los ceros racionales de f. La gráfica de f en la figura 2.45 sugiere con cuáles candidatos hay que intentar primero. Mediante la división sintética, encontramos que $x = 2/3$ es un cero. Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{2}{3}\right)(3x^4 + 6x^2 - 24) \\ &= \left(x - \frac{2}{3}\right)(3)(x^4 + 2x^2 - 8) \\ &= (3x - 2)(x^2 - 2)(x^2 + 4) \\ &= (3x - 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4) \end{aligned}$$

Como los ceros de $x^2 + 4$ son complejos, cualquier factorización adicional produciría coeficientes complejos no reales. Hemos llevado la factorización de f tan lejos como es posible, sujeta a la condición de que *cada factor tenga coeficientes reales*.

Ahora resuelva el ejercicio 37.

Hemos visto que si una función polinomial tiene coeficientes reales, entonces sus ceros complejos, no reales, aparecen en pares conjugados. *Puesto que un polinomio de grado impar tiene un número impar de cero, debe tener al menos un cero que sea real.* Esto confirma el ejemplo 7 de la sección 2.3 a la luz de los números complejos.

Función polinomial de grado impar

Toda función polinomial de grado impar con coeficientes reales tiene al menos un cero real.

La función $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 24x + 16$ del ejemplo 6 se ajusta a las condiciones de este teorema, así que de inmediato sabemos que vamos por buen camino en la búsqueda de al menos un cero real.

REPASO RÁPIDO 2.5 *(Para obtener ayuda consulte las secciones R.5, R.6 y 2.4)*

En los ejercicios del 1 al 4 realice la operación indicada, y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

1. $(3 - 2i) + (-2 + 5i)$

2. $(5 - 7i) - (3 - 2i)$

3. $(1 + 2i)(3 - 2i)$ **4.** $\dfrac{2 + 3i}{1 - 5i}$

En los ejercicios 5 y 6 factorice la expresión cuadrática.

5. $2x^2 - x - 3$ **6.** $6x^2 - 13x - 5$

En los ejercicios 7 y 8 resuelva la ecuación cuadrática.

7. $x^2 - 5x + 11 = 0$ **8.** $2x^2 + 3x + 7 = 0$

En los ejercicios 9 y 10 liste todos los potenciales ceros racionales.

9. $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 7x + 2$

10. $4x^5 - 7x^2 + x^3 + 13x - 3$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.5

En los ejercicios del 1 al 4 escriba los polinomios en forma estándar, e identifique los ceros de la función y las intersecciones x de sus gráficas.

1. $f(x) = (x - 3i)(x + 3i)$

2. $f(x) = (x + 2)(x - \sqrt{3}\, i)(x + \sqrt{3}\, i)$

3. $f(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 2i)(x - 2i)$

4. $f(x) = x(x - 1)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$

En los ejercicios del 5 al 12, escriba una función polinomial, en la forma estándar, de grado mínimo con coeficientes reales cuyos ceros incluyan a los listados.

5. i y $-i$

6. $1 - 2i$ y $1 + 2i$

7. 1, $3i$ y $-3i$

8. -4, $1 - i$ y $1 + i$

9. 2, 3 e i

10. -1, 2 y $1 - i$

11. 5 y $3 + 2i$

12. -2 y $1 + 2i$

En los ejercicios del 13 al 16 escriba una función polinomial, en la forma estándar, de grado mínimo con coeficientes reales cuyos ceros y sus multiplicidades incluyan a los listados.

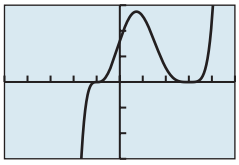
13. 1 (multiplicidad 2), -2 (multiplicidad 3)

14. -1 (multiplicidad 3), 3 (multiplicidad 1)

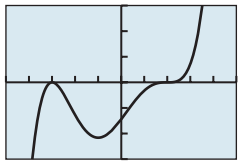
15. 2 (multiplicidad 2), 3 + i (multiplicidad 1)

16. -1 (multiplicidad 2), $-2 - i$ (multiplicidad 1)

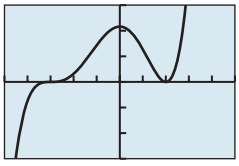
En los ejercicios del 17 al 20 relacione la función polinomial con los ceros dados y las multiplicidades.



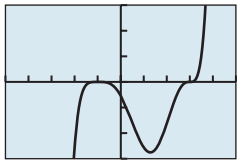
[–5, 5] por [–150, 150]
a)



[–5, 5] por [–150, 150]
b)



[–5, 5] por [–150, 150]
c)



[–5, 5] por [–150, 150]
d)

17. -3 (multiplicidad 2), 2 (multiplicidad 3)

18. -3 (multiplicidad 3), 2 (multiplicidad 2)

19. -1 (multiplicidad 4), 3 (multiplicidad 3)

20. -1 (multiplicidad 3), 3 (multiplicidad 4)

En los ejercicios del 21 al 26 indique cuántos ceros complejos y cuántos reales tiene la función.

21. $f(x) = x^2 - 2x + 7$

22. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

23. $f(x) = x^3 - x + 3$

24. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 4$

25. $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 6$

26. $f(x) = x^5 - 2x^2 - 3x + 6$

En los ejercicios del 27 al 32 determine todos los ceros y escriba una factorización lineal de la función.

27. $f(x) = x^3 + 4x - 5$

28. $f(x) = x^3 - 10x^2 + 44x - 69$

29. $f(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 - x - 6$

30. $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 3x - 2$

31. $f(x) = 6x^4 - 7x^3 - x^2 + 67x - 105$

32. $f(x) = 20x^4 - 148x^3 + 269x^2 - 106x - 195$

En los ejercicios del 33 al 36, mediante el cero dado, determine todos los ceros y escriba una factorización lineal de $f(x)$.

33. $1 + i$ es un cero de $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 6$.

34. $4i$ es un cero de $f(x) = x^4 + 13x^2 - 48$.

35. $3 - 2i$ es un cero de $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 12x - 26$.

36. $1 + 3i$ es un cero de $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 10x - 50$.

En los ejercicios del 37 al 42 escriba la función como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducible, todos coeficientes reales.

37. $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$

38. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$

39. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3$

40. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 2$

41. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$

42. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$

En los ejercicios 43 y 44 utilice el *principio de Arquímedes*, que indica que cuando una esfera de radio r con densidad d_S se coloca en un líquido de densidad $d_L = 62.5$ lb/pie^3, se hundirá a una profundidad h, donde

$$\frac{\pi}{3}(3rh^2 - h^3)d_L = \frac{4}{3}\pi r^3 d_S.$$

Determine un valor aproximado para h, si:

43. $r = 5$ pies y $d_S = 20$ lb/pie^3.

44. $r = 5$ pies y $d_S = 45$ lb/pie^3.

En los ejercicios del 45 al 48 responda sí o no. Si responde sí, incluya un ejemplo; si la respuesta es no, proporcione una razón.

45. Escriba para aprender ¿Es posible determinar un polinomio de grado tres con coeficientes reales que tenga a 22 como único cero real?

46. Escriba para aprender ¿Es posible determinar un polinomio de grado tres con coeficientes reales que tenga a $2i$ como único cero no real?

47. Escriba para aprender ¿Es posible determinar un polinomio $f(x)$ de grado 4 con coeficientes reales que tenga ceros -3, $1 + 2i$ y $1 - i$?

48. Escriba para aprender ¿Es posible determinar un polinomio $f(x)$ de grado 4 con coeficientes reales que tenga ceros $1 + 3i$ y $1 - i$?

En los ejercicios 49 y 50 determine el único polinomio con coeficientes reales que satisfaga las condiciones descritas.

49. Grado 4: ceros en $x = 3$, $x = -1$ y $x = 2 - i$; $f(0) = 30$.

50. Grado 4: ceros en $x = 1 - 2i$ y $x = 1 + i$; $f(0) = 20$.

51. La distancia de Sally, D, a un detector de movimiento está dada por la información en la tabla 2.16.

a) Determine un modelo cúbico de regresión y grafíquelo junto con un diagrama de dispersión de los datos.

b) Describa el movimiento de Sally.

c) Utilice el modelo cúbico de regresión para estimar cuándo Sally cambia de dirección. ¿Qué tan lejos está del detector de movimiento cuando ella cambia de dirección?

Tabla 2.16 Datos del detector de movimiento

t (segundos)	D (metros)	t (segundos)	D (metros)
0.0	3.36	4.5	3.59
0.5	2.61	5.0	4.15
1.0	1.86	5.5	3.99
1.5	1.27	6.0	3.37
2.0	0.91	6.5	2.58
2.5	1.14	7.0	1.93
3.0	1.69	7.5	1.25
3.5	2.37	8.0	0.67
4.0	3.01		

52. La distancia, D, de Jacob a un detector de movimiento está dada por la información de la tabla 2.17.

a) Determine un modelo cuadrático de regresión, y grafíquelo junto con un diagrama de dispersión de los datos.

b) Describa el movimiento de Jacob.

c) Utilice el modelo cuadrático de regresión para estimar cuando Jacob cambia de dirección. ¿A qué distancia, del detector de movimiento, se encuentra cuando él cambia de dirección?

Tabla 2.17 Datos del detector de movimiento

t (segundos)	D (metros)	t (segundos)	D (metros)
0.0	4.59	4.5	1.70
0.5	3.92	5.0	2.25
1.0	3.14	5.5	2.84
1.5	2.41	6.0	3.39
2.0	1.73	6.5	4.02
2.5	1.21	7.0	4.54
3.0	0.90	7.5	5.04
3.5	0.99	8.0	5.59
4.0	1.31		

Preguntas de examen estandarizado

53. Verdadero o falso Existe al menos un polinomio con coeficientes reales con $1 - 2i$ como su único cero no real. Justifique su respuesta.

54. Verdadero o falso Un polinomio de grado 3 con coeficientes reales debe tener dos ceros no reales. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 55 al 58 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver los problemas.

55. Opción múltiple Sea z un número complejo no real y $\overline{z}$ su conjugado complejo. ¿Cuál de los siguientes no es un número real?

A) $z + \overline{z}$ **B)** $z\,\overline{z}$ **C)** $(z + \overline{z})^2$ **D)** $(z\,\overline{z})^2$ **E)** z^2

56. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes no puede ser el número de ceros reales de un polinomio de grado 5 con coeficientes reales?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

57. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes no puede ser el número de ceros no reales de un polinomio de grado 5 con coeficientes reales?

A) 0 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4

E) Ninguna de las anteriores.

58. Opción múltiple Suponga que $1 - 2i$ es un cero del polinomio f con coeficientes reales. ¿Cuál de los enunciados siguientes no es verdadero?

A) $x - (1 + 2i)$ es un factor de $f(x)$.

B) $x^2 - 2x + 5$ es un factor de $f(x)$.

C) $x - (1 - 2i)$ es un factor de $f(x)$.

D) $1 - 2i$ es un cero de f.

E) El número de ceros complejos no reales de f podría ser 1.

Exploraciones

59. Actividad en equipo Las potencias de 1 + i

a) En la tabla 2.18 se muestran potencias seleccionadas de $1 + i$. Determine un patrón en los datos y utilícelo para ampliar la tabla a las potencias 7, 8, 9 y 10.

b) Calcule $(1 + i)^7$, $(1 + i)^8$, $(1 + i)^9$ y $(1 + i)^{10}$, utilizando el hecho que $(1 + i)^6 = -8i$.

c) Compare sus resultados de las partes a) y b) y haga que concuerden, si es necesario.

Tabla 2.18 Potencias de 1 + *i*

Potencia	Parte real	Parte imaginaria
0	1	0
1	1	1
2	0	2
3	−2	2
4	−4	0
5	−4	−4
6	0	−8

60. Actividad en equipo Las raíces cuadradas de *i* Sean a y b números reales tales que $(a + bi)^2 = i$.

a) Desarrolle el lado izquierdo de la ecuación dada.

b) Considere el lado derecho de la ecuación como $0 + 1i$, y separe las partes real e imaginaria de la ecuación para obtener dos ecuaciones.

c) Resuelva para a y b.

d) Compruebe su respuesta sustituyéndolas en la ecuación original.

e) ¿Cuáles son las dos raíces cuadradas de i?

61. Verifique que el número complejo i es un cero del polinomio $f(x) = x^3 - ix^2 + 2ix + 2$.

62. Verifique que el número complejo $-2i$ es un cero del polinomio $f(x) = x^3 - (2 - i)x^2 + (2 - 2i)x - 4$.

Ampliación de las ideas

En los ejercicios 63 y 64 verifique que $g(x)$ es un factor de $f(x)$. Luego determine $h(x)$ de modo que $f = g \cdot h$.

63. $g(x) = x - i; f(x) = x^3 + (3 - i)x^2 - 4ix - 1$.

64. $g(x) = x - 1 - i; f(x) = x^3 - (1 + i)x^2 + x - 1 - i$.

65. Determine las tres raíces cúbicas de 8 resolviendo $x^3 = 8$.

66. Determine las tres raíces cúbicas de -64 resolviendo $x^3 = -64$.

2.6 Gráficas de funciones racionales

Aprenderá acerca de...

- Las funciones racionales
- Las transformaciones de la función recíproca
- Los límites y las asíntotas
- El análisis de gráficas de funciones racionales
- La exploración de humedad relativa

. . . porque

Las funciones racionales se utilizan en cálculo y en aplicaciones científicas tales como las proporciones inversas.

Funciones racionales

Las funciones racionales son razones (cocientes) de funciones polinomiales.

DEFINICIÓN Funciones racionales

Sean f y g funciones polinomiales con $g(x) \neq 0$. Entonces la función dada por

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

es una **función racional**.

El dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales, excepto los ceros de su denominador. Toda función racional es continua en su dominio.

EJEMPLO 1 Determinación del dominio de una función racional

Determine el dominio de f y utilice límites para describir su comportamiento del valor o valores de x que no están en el dominio.

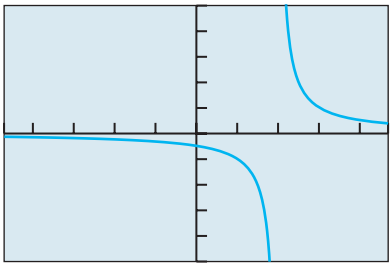
$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

SOLUCIÓN El dominio de f es todos los números reales $x \neq 2$. La gráfica de la figura 2.46 sugiere sólidamente que f tiene una asíntota vertical en $x = 2$. Conforme x se aproxima a 2 por la izquierda, los valores de f disminuyen sin cota. Cuando x se aproxima a 2 por la derecha, el valor de f crece sin cota. Utilizando la notación introducida en la sección 1.2 (página 99), escribimos

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty.$$

Las tablas en la figura 2.47 respaldan numéricamente esta evidencia visual.

Ahora resuelva el ejercicio 1.



[−4.7, 4.7] por [−5, 5]

FIGURA 2.46 La gráfica de $f(x) = 1/(x - 2)$ (ejemplo 1).

X	Y1
2	ERROR
2.01	100
2.02	50
2.03	33.333
2.04	25
2.05	20
2.06	16.667

Y1 = 1/(X−2)

a)

X	Y1
2	ERROR
1.99	−100
1.98	−50
1.97	−33.33
1.96	−25
1.95	−20
1.94	−16.67

Y1 = 1/(X−2)

b)

FIGURA 2.47 Tabla de valores para $f(x) = 1/(x - 2)$ para valores de x a) a la derecha de 2, y b) a la izquierda de 2 (ejemplo 1).

En el capítulo 1 definimos las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de una función $y = f(x)$. La recta $y = b$ es una *asíntota horizontal* de la gráfica de f, si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

La recta $x = a$, es una *asíntota vertical* de la gráfica de f si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Con base en la figura 2.46 podemos ver que $\lim_{x\to-\infty} 1/(x-2) = \lim_{x\to\infty} 1/(x-2) = 0$, por lo que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x) = 1/(x-2)$. Como $\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de $f(x) = 1/(x-2)$.

Transformaciones de la función recíproca

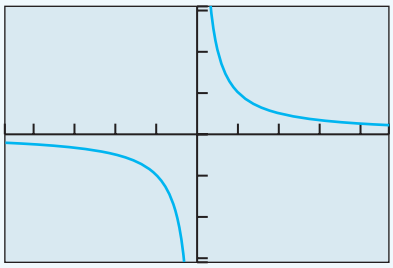
Una de las funciones racionales más sencillas es la función recíproca

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

que es una de las funciones básicas presentadas en el capítulo 1. Puede usarse para generar muchas otras funciones racionales.

A continuación se presenta lo que conocemos de la función recíproca.

FUNCIÓN BÁSICA Función recíproca



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

FIGURA 2.48 La gráfica de $f(x) = 1/x$.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$
Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Continuidad: Toda $x \neq 0$
Decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$
Simétrica con respecto al origen (una función impar)
No acotada
No tiene máximo ni mínimo
Asíntota horizontal: $y = 0$
Asíntota vertical: $x = 0$
Comportamiento en los extremos: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

EXPLORACIÓN 1 Comparación de las gráficas de funciones racionales

1. Bosqueje la gráfica y determine una ecuación para la función g, cuya gráfica se obtiene a partir de la función recíproca $f(x) = 1/x$ mediante la traslación de 2 unidades hacia la derecha.
2. Bosqueje la gráfica y determine una ecuación para la función h, cuya gráfica se obtiene a partir de la función recíproca $f(x) = 1/x$ mediante la traslación de 5 unidades hacia la derecha, seguida de una reflexión con respecto al eje x.
3. Bosqueje la gráfica y determine una ecuación para la función k, cuya gráfica se obtiene a partir de la función recíproca $f(x) = 1/x$ mediante la traslación de 4 unidades hacia la izquierda, seguida de un alargamiento vertical en un factor de 3 y por último, una traslación de 2 unidades hacia abajo.

La gráfica de cualquier función racional, distinta de cero, de la forma

$$g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \; c \neq 0$$

puede obtenerse a través de transformaciones de la gráfica de la función recíproca. Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, podemos utilizar la división de polinomios para rescribir la función racional.

EJEMPLO 2 Transformación de la función recíproca

Describa cómo puede obtenerse la gráfica de la función dada, mediante la transformación de la gráfica de la función recíproca $f(x) = 1/x$. Identifique las asíntotas horizontales y verticales, y utilice límites para describir el comportamiento correspondiente. Haga un bosquejo de la gráfica de la función.

a) $g(x) = \dfrac{2}{x + 3}$ **b)** $h(x) = \dfrac{3x - 7}{x - 2}$

SOLUCIÓN

a) $g(x) = \dfrac{2}{x + 3} = 2\left(\dfrac{1}{x + 3}\right) = 2f(x + 3)$

La gráfica de g es la gráfica de la función recíproca recorrida 3 unidades a la izquierda y luego alargada verticalmente en un factor de 2. Por lo que las rectas $x = -3$ y $y = 0$ son las asíntotas vertical y horizontal, respectivamente. Mediante el uso de límites, tenemos $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x\to-3^+} g(x) = \infty$, y $\lim_{x\to-3^-} g(x) = -\infty$. En la figura 2.49 a) se muestra la gráfica.

b) Iniciamos con la división polinomial:

$$\begin{array}{r} 3 \\ x - 2\overline{)3x - 7} \\ \underline{3x - 6} \\ -1 \end{array}$$

Así que, $h(x) = \dfrac{3x - 7}{x - 2} = 3 - \dfrac{1}{x - 2} = -f(x - 2) + 3.$

Por lo que la gráfica de h es la gráfica de la función recíproca trasladada 2 unidades a la derecha, seguida de una reflexión con respecto al eje x y luego una traslación de 3 unidades hacia arriba. (Observe que la reflexión debe llevarse a cabo antes que la traslación vertical). De este modo, las rectas $x = 2$ y $y = 3$ son las asíntotas vertical y horizontal, respectivamente. Usando límites, tenemos $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = 3$, $\lim_{x\to2^+} g(x) = -\infty$, y $\lim_{x\to2^-} g(x) = \infty$. La gráfica se muestra en la figura 2.49 b).

Ahora resuelva el ejercicio 5.

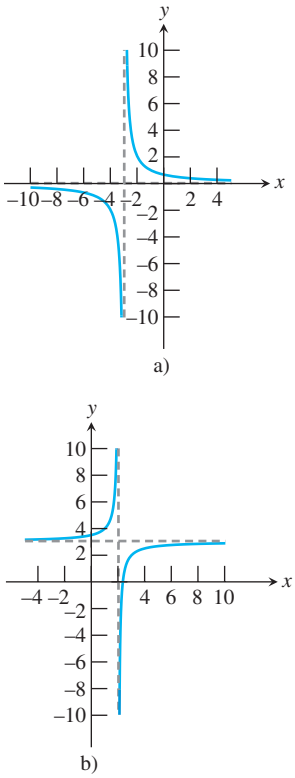
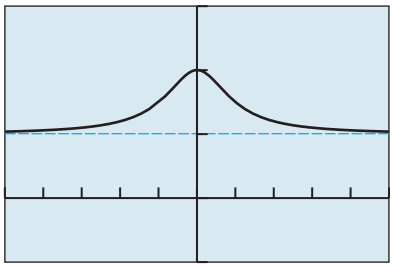


FIGURA 2.49 Las gráficas de a) $g(x) = 2/(x + 3)$ y b) $h(x) = (3x - 7)/(x - 2)$, con asíntotas mostradas con líneas discontinuas.

Límites y asíntotas

En el ejemplo 2 encontramos las asíntotas mediante la traslación de las asíntotas conocidas de la función recíproca. En el ejemplo 3 utilizamos graficación y álgebra para determinar una asíntota.



[−5, 5] por [−1, 3]

FIGURA 2.50 La gráfica de $f(x) = (x^2 + 2)/(x^2 + 1)$ con su asíntota horizontal $y = 1$.

EJEMPLO 3 Determinación de asíntotas

Determine las asíntotas horizontal y vertical de $f(x) = (x^2 + 2)/(x^2 + 1)$. Utilice límites para describir el comportamiento correspondiente de f.

SOLUCIÓN

Resuelva gráficamente

La gráfica de f en la figura 2.50 sugiere que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

y que no hay asíntotas verticales. La asíntota horizontal es $y = 1$.

Resuelva algebraicamente

El dominio de f es todos los números reales, así que no hay asíntotas verticales. Utilizando la división polinomial larga, determinamos que

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Cuando el valor de $|x|$ es grande, el denominador es un número positivo grande y $1/(x^2 + 1)$ es un número positivo pequeño, haciéndose cada vez más cercano a cero, conforme $|x|$ aumenta.

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1,$$

así que $y = 1$ en realidad es una asíntota horizontal.

Ahora resuelva el ejercicio 19.

El ejemplo 3 muestra la relación entre el comportamiento en los extremos de una función racional y su asíntota horizontal. Ahora generalizamos esta relación y resumimos las características de la gráfica de una función racional:

Gráfica de una función racional

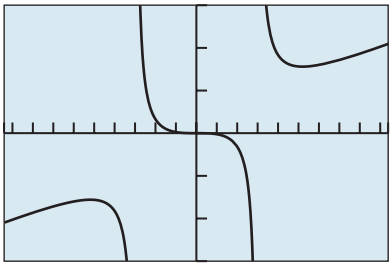
La gráfica de $y = f(x)/g(x) = (a_n x^n + \cdots)/(b_m x^m + \cdots)$ tiene las siguientes características:

1. **Comportamiento asintótico en los extremos**:

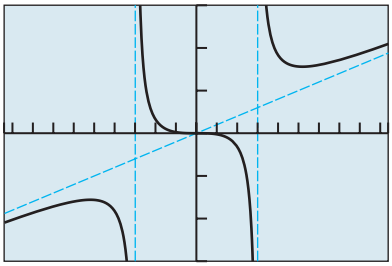
   Si $n < m$, el comportamiento asintótico en los extremos es la asíntota horizontal $y = 0$.

   Si $n = m$, el comportamiento asintótico en los extremos es la asíntota horizontal $y = a_n/b_m$.

   Si $n > m$, el comportamiento en los extremos es la función polinomial cociente $y = q(x)$, donde $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$. No hay asíntota horizontal.
2. **Asíntotas verticales**: Éstas ocurren en los ceros del denominador, siempre que los ceros no sean también ceros del numerador de igual o mayor multiplicidad.
3. **Intersecciones x**: Éstas ocurren en los ceros del numerador que no sean también ceros del denominador.
4. **Intersección y**: Ésta es el valor de $f(0)$, si está definido.



[–9.4, 9.4] por [–15, 15]
a)



[–9.4, 9.4] por [–15, 15]
b)

FIGURA 2.51 La gráfica de $f(x) = x^3/(x^2 - 9)$ a) sola y b) con sus asíntotas.

Al graficar una función racional, es buena idea determinar las asíntotas e intersecciones. Si el comportamiento asintótico en los extremos de una función racional es una recta inclinada, le llamamos **asíntota inclinada**, como se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Graficación de una función racional

Determine las asíntotas e intersecciones de la función $f(x) = x^3/(x^2 - 9)$ y grafique la función.

SOLUCIÓN El grado del numerador es mayor que el grado del denominador, por lo que el comportamiento asintótico en los extremos es el polinomio cociente. Usando la división de polinomios, obtenemos

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9} = x + \frac{9x}{x^2 - 9}.$$

Así, el polinomio cociente es $q(x) = x$, una asíntota inclinada. La factorización del denominador,

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3),$$

muestra que los ceros del denominador son $x = 3$ y $x = -3$. En consecuencia, $x = 3$ y $x = -3$ son las asíntotas verticales de f. El único cero del numerador es 0, por lo que $f(0) = 0$, y así vemos que el punto (0, 0) es la única intersección x y la intersección y de la gráfica de f.

La gráfica de f, en la figura 2.51a, pasa por (0, 0) y sugiere las asíntotas verticales $x = 3$ y $x = -3$ y la asíntota inclinada $y = q(x) = x$. La figura 2.51b muestra la gráfica de f con sus asíntotas sobrepuestas.

Ahora resuelva el ejercicio 29.

Análisis de gráficas de funciones racionales

Puesto que el grado del numerador de la función racional del ejemplo 5 es menor que el grado del denominador, sabemos que la gráfica de la función tiene $y = 0$ como una asíntota horizontal.

EJEMPLO 5 Análisis de la gráfica de una función racional

Determine las intersecciones y asíntotas, utilice límites para describir el comportamiento en las asíntotas verticales, y analice y dibuje la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}.$$

SOLUCIÓN

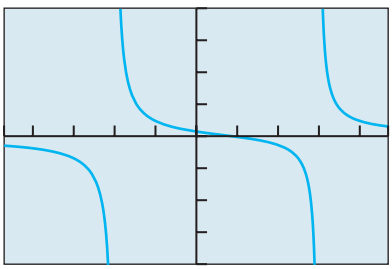
El numerador es cero cuando $x = 1$, así que la intersección x es 1. Como $f(0) = 1/6$, la intersección y es 1/6. El denominador se factoriza como

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2),$$

por lo que hay asíntotas verticales en $x = -2$ y $x = 3$. Con base en el comentario que precede a este ejemplo, sabemos que la asíntota horizontal es $y = 0$. La figura 2.52 respalda esta información y nos permite concluir que

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty, \text{ y } \lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty.$$

continúa



[−4.7, 4.7] por [−4, 4]

FIGURA 2.52 La gráfica de $f(x) = (x - 1)/(x^2 - x - 6)$ (ejemplo 5).

Dominio: $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty)$

Rango: Todos los reales

Continuidad: Toda $x \neq -2, 3$

Decreciente en $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ y $(3, \infty)$

No es simétrica

No está acotada

No tiene máximo ni mínimo locales

Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 3$

Comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Ahora resuelva el ejercicio 39.

Los grados del numerador y el denominador de la función racional en el ejemplo 6 son iguales. Así, sabemos que la gráfica de la función tiene a $y = 2$ —el cociente de los coeficientes principales— como su comportamiento asintótico en los extremos.

EJEMPLO 6 Análisis de la gráfica de la gráfica de una función racional

Determine las intersecciones, analice y dibuje la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 4}.$$

SOLUCIÓN El numerador se factoriza como

$$2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 2(x + 1)(x - 1),$$

así que las intersecciones x son -1 y 1. La intersección y es $f(0) = 1/2$. El denominador se factoriza como

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2),$$

por lo que las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$. Con base en los comentarios que preceden al ejemplo 6, sabemos que $y = 2$ es la asíntota horizontal. La figura 2.53 respalda esta información y nos permite concluir que

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty, \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty.$$

Dominio: $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

Rango: $(-\infty, 1/2] \cup (2, \infty)$

Continuidad: Toda $x \neq -2, 2$

Creciente en $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0]$; decreciente en $[0, 2)$ y $(2, \infty)$

Simétrica con respecto al eje y (una función par)

No está acotada

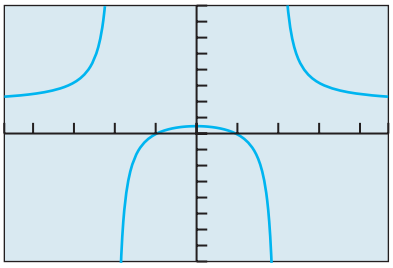
Máximo local de 1/2 en $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = 2$

Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$

Comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 2$

Ahora resuelva el ejercicio 41.



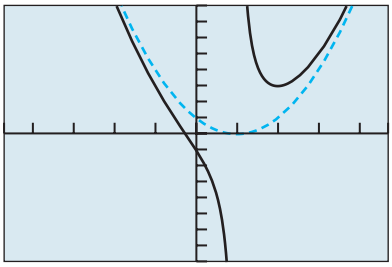
[−4.7, 4.7] por [−8, 8]

FIGURA 2.53 La gráfica de $f(x) = (2x^2 - 2)/(x^2 - 4)$. Puede mostrarse que f no toma valores entre 1/2, la intersección y, y 2, la asíntota horizontal (ejemplo 6).

En los ejemplos 7 y 8, investigaremos la función racional

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x - 1}.$$

El grado del numerador de f excede al grado del denominador en 2. Así que no hay asíntota horizontal. Veremos que el comportamiento asintótico en los extremos es un polinomio de grado 2.



[−4.7, 4.7] por [−8, 8]

FIGURA 2.54 La gráfica de $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x + 1)/(x - 1)$ en línea negra sólida y al de su comportamiento asintótico $y = x^2 - 2x + 1$, en línea azul discontinua (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Determinación de un comportamiento asintótico en los extremos

Determine el comportamiento asintótico en los extremos de

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x - 1}$$

y grafíquelo junto con f en dos ventanas:

a) una que muestre los detalles alrededor de la asíntota vertical de f,

b) una que muestre una gráfica de f que se asemeje a su comportamiento asintótico en los extremos.

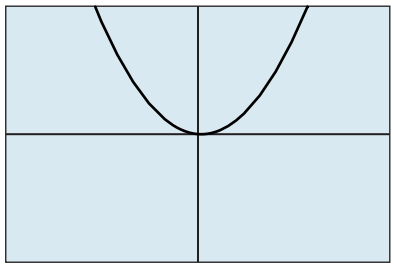
SOLUCIÓN La gráfica de f tiene una asíntota vertical en $x = 1$. Divida $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ entre $x - 1$ para mostrar que

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x - 1} = x^2 - 2x + 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

El comportamiento asintótico en los extremos de f es $y = x^2 - 2x + 1$.

a) La gráfica de f, en la figura 2.54, muestra los detalles alrededor de la asíntota vertical. Con una línea discontinua hemos sobrepuesto también la gráfica de su comportamiento asintótico en los extremos.

b) Si dibujamos la gráfica de $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x + 1)/(x - 1)$ y al de su comportamiento asintótico $y = x^2 - 2x + 1$ en una ventana de visualización suficientemente grande, las dos gráficas parecerán ser idénticas. Consulte la figura 2.55.



[−40, 40] por [−500, 500]

FIGURA 2.55 Las gráficas de $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x + 1)/(x - 1)$ y su comportamiento asintótico $y = x^2 - 2x + 1$ parecen ser idénticas (ejemplo 7).

Ahora resuelva el ejercicio 47.

EJEMPLO 8 Análisis de la gráfica de una función racional

Determine las intersecciones, analice y dibuje la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x - 1}.$$

continúa

SOLUCIÓN

f tiene una sola intersección x y podemos utiliza la gráfica de f en la figura 2.54 para mostrar que está alrededor de -0.26. La intersección y es $f(0) = -1$. La asíntota vertical es $x = 1$, como hemos visto. Sabemos que la gráfica de f no tiene asíntota horizontal, y del ejemplo 7, sabemos que el comportamiento asintótico en los extremos es $y = x^2 - 2x + 1$. También podemos utilizar la figura 2.54 para mostrar que f tiene un mínimo local de 3 en $x = 2$. La figura 2.54 respalda esta información y nos permite concluir que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty.$$

Dominio: Toda $x \neq 1$

Rango: Todos los reales

Continuidad: Toda $x \neq 1$

Decreciente en $(-\infty, 1)$ y $(1, 2]$; creciente en $[2, \infty)$

No es simétrica

No está acotada

Mínimo local de 3 en $x = 2$

No tiene asíntota horizontal; comportamiento asintótico en los extremos: $y = x^2 - 2x + 1$

Asíntota vertical: $x = 1$

Comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Ahora resuelva el ejercicio 55.

Exploración de humedad relativa

La frase *humedad relativa* es conocida por los reportes diarios del clima. La **humedad relativa** es la razón de la presión constante de vapor a la presión de vapor saturado. Así que, la humedad relativa es inversamente proporcional a la presión de vapor saturado.



PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO (de la página 169)

PROBLEMA: Determine los valores de la humedad relativa que correspondan a las presiones de vapor saturado de 12, 24, 36, 48 y 60 milibares, a una presión de vapor constante de 12 milibares (en la práctica, la presión de vapor saturado aumenta conforme aumenta la temperatura).

SOLUCIÓN: La humedad relativa (HR) se determina dividiendo la presión de vapor constante (PVC) entre la presión de vapor saturado (PVS). Así, por ejemplo, para PVS = 24 milibares y PVC = 12 milibares, HR = 12/24 = 1/2 = 0.5 = 50%. Consulte la tabla siguiente, que está basada en PVC = 12 milibares con temperatura creciente.

PVS (milibares)	HR (%)
12	100
24	50
36	$33.\overline{3}$
48	25
60	20

REPASO RÁPIDO 2.6 *(Para obtener ayuda consulte la sección 2.4)*

En los ejercicios del 1 al 6 utilice factorización para determinar los ceros reales de la función.

1. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ **2.** $f(x) = 3x^2 - 2x - 8$

3. $g(x) = x^2 - 4$ **4.** $g(x) = x^2 - 1$

5. $h(x) = x^3 - 1$ **6.** $h(x) = x^2 + 1$

En los ejercicios del 7 al 10 determine el cociente y el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $d(x)$.

7. $f(x) = 2x + 1, d(x) = x - 3$

8. $f(x) = 4x + 3, d(x) = 2x - 1$

9. $f(x) = 3x - 5, d(x) = x$

10. $f(x) = 5x - 1, d(x) = 2x$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.6

En los ejercicios del 1 al 4 determine el dominio de la función f. Utilice límites para describir el comportamiento de f en valor o valores de x que no son de su dominio.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$ **2.** $f(x) = \dfrac{-3}{x - 1}$

3. $f(x) = \dfrac{-1}{x^2 - 4}$ **4.** $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

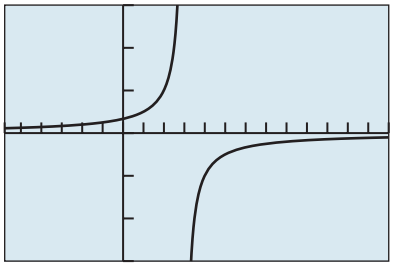
En los ejercicios del 5 al 10 describa cómo puede obtenerse la gráfica de la función dada mediante la transformación de la función recíproca $g(x) = 1/x$. Identifique las asíntotas horizontales y verticales, y utilice límites para describir el comportamiento correspondiente. Bosqueje la gráfica de la función.

5. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ **6.** $f(x) = -\dfrac{2}{x + 5}$

7. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$ **8.** $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x - 1}$

9. $f(x) = \dfrac{5 - 2x}{x + 4}$ **10.** $f(x) = \dfrac{4 - 3x}{x - 5}$

En los ejercicios del 11 al 14 evalúe el límite con base en la gráfica de f que se muestra.

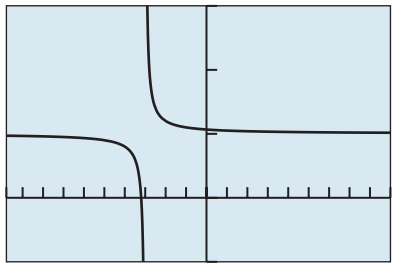


[−5.8, 13] por [−3, 3]

11. $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ **12.** $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

13. $\lim_{x \to \infty} f(x)$ **14.** $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

En los ejercicios del 15 al 18 evalúe el límite con base en la gráfica que se muestra.



[−9.8, 9] por [−5, 15]

15. $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ **16.** $\lim_{x \to -3^-} f(x)$

17. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ **18.** $\lim_{x \to \infty} f(x)$

En los ejercicios del 19 al 22 determine las asíntotas horizontales y verticales de $f(x)$. Utilice límites para describir el comportamiento correspondiente.

19. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 3}$ **20.** $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$

21. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - x}$ **22.** $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 3x}$

En los ejercicios del 23 al 30 determine las asíntotas y las intersecciones de la función, y grafíquela.

23. $g(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x - 3}$ **24.** $g(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x - 3}$

25. $h(x) = \dfrac{2}{x^3 - x}$ **26.** $h(x) = \dfrac{3}{x^3 - 4x}$

27. $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ **28.** $g(x) = \dfrac{-3x^2 + x + 12}{x^2 - 4}$

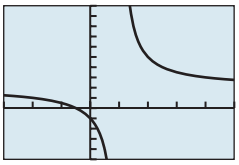
29. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ **30.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 7}{x + 3}$

En los ejercicios del 31 al 36 relacione la función racional con su gráfica. Identifique la ventana de visualización y la escala utilizada en cada eje.

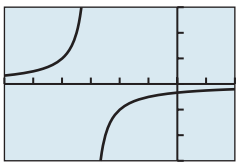
31. $f(x) = \dfrac{1}{x - 4}$ **32.** $f(x) = -\dfrac{1}{x + 3}$

33. $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x - 1}$ **34.** $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x + 3}$

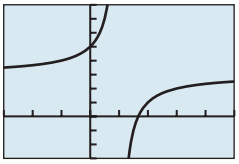
35. $f(x) = -1 + \dfrac{1}{4 - x}$ **36.** $f(x) = 3 - \dfrac{2}{x - 1}$



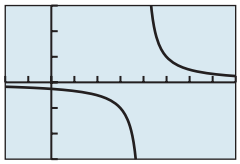
a)



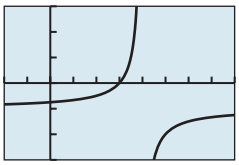
b)



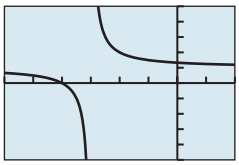
c)



d)



e)



f)

En los ejercicios del 37 al 44 determine las intersecciones y asíntotas, utilice límites para describir el comportamiento en las asíntotas verticales, y analice y dibuje la gráfica de la función racional dada.

37. $f(x) = \dfrac{2}{2x^2 - x - 3}$ **38.** $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 4x + 3}$

39. $h(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - x - 12}$ **40.** $k(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3x - 10}$

41. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 9}$ **42.** $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 8}$

43. $h(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$ **44.** $k(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$

En los ejercicios del 45 al 50 determine el comportamiento asintótico en los extremos de la función racional y grafíquelo junto con f en dos ventanas:

a) Una que muestre los detalles alrededor de la o las asíntotas verticales de f.

b) Otra que muestre una gráfica de f que se parezca a la de su comportamiento asintótico.

45. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 5}$ **46.** $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 3}{x + 3}$

47. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x + 2}$ **48.** $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x - 1}$

49. $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x + 1}{x - 2}$ **50.** $f(x) = \dfrac{x^5 + 1}{x^2 + 1}$

En los ejercicios del 51 al 56 determine las intersecciones, y analice y dibuje la gráfica de la función racional dada.

51. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4x + 5}$ **52.** $g(x) = \dfrac{4x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 8}$

53. $h(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 2}$ **54.** $k(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x + 2}$

55. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{2x - 1}$ **56.** $g(x) = \dfrac{2x^3 - 2x^2 - x + 5}{x - 2}$

En los ejercicios del 57 al 62 determine las intersecciones, asíntotas y comportamiento asintótico, y grafique la función junto con la de su comportamiento asintótico.

57. $h(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x + 1}$ **58.** $k(x) = \dfrac{2x^5 + x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$

59. $f(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x + 2}$ **60.** $g(x) = \dfrac{x^5 + 1}{x - 1}$

61. $h(x) = \dfrac{2x^3 - 3x + 2}{x^3 - 1}$ **62.** $k(x) = \dfrac{3x^3 + x - 4}{x^3 + 1}$

Preguntas de examen estandarizado

63. Verdadero o falso Una función racional debe tener una asíntota vertical. Justifique su respuesta.

64. Verdadero o falso $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ es una función racional. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 65 al 68 puede emplear una calculadora graficadora para resolver el problema.

65. Opción múltiple Sea $f(x) = \dfrac{-2}{x^2 + 3x}$. ¿Qué valores de x tienen que excluirse del dominio de f?

A) sólo 0 **B)** sólo 3 **C)** sólo -3

D) sólo 0 y 3 **E)** sólo 0 y -3.

66. Opción múltiple Sea $g(x) = \dfrac{2}{x + 3}$. ¿Cuál de las transformaciones de $f(x) = \dfrac{2}{x}$ produce la gráfica de g?

A) Trasladar la gráfica de f 3 unidades hacia la izquierda.

B) Trasladar la gráfica de f 3 unidades hacia la derecha.

C) Trasladar la gráfica de f 3 unidades hacia abajo.

D) Trasladar la gráfica de f 3 unidades hacia arriba.

E) Alargamiento vertical de la gráfica de f en un factor de 2.

67. Opción múltiple Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{x+5}$. ¿Cuál de los enunciados siguientes es cierto con respecto a la gráfica de f?

A) No tiene asíntota vertical.

B) Hay una asíntota horizontal, pero no asíntota vertical.

C) Hay una asíntota inclinada pero no asíntota vertical.

D) Hay una asíntota vertical y una asíntota inclinada.

E) Hay una asíntota vertical y una asíntota horizontal.

68. Opción múltiple ¿Cuál es el grado del comportamiento asintótico en los extremos de $f(x) = \dfrac{x^8+1}{x^4+1}$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

Exploraciones

69. Actividad en equipo *Trabaje en equipos de dos*. Compare las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ y $g(x) = x + 3$.

a) ¿Sus dominios son iguales?

b) ¿f tiene una asíntota vertical? Explique.

c) Explique por qué las gráficas parecen idénticas.

d) ¿Las funciones son idénticas?

70. Actividad en equipo Explique por qué las funciones son o no son idénticas. Incluya las gráficas y una comparación de las asíntotas, intersecciones y dominio de las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ y $g(x) = x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ y $g(x) = x - 1$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$

71. Ley de Boyle Esta ley de un gas ideal establece que el volumen de un gas encerrado a una temperatura fija varía inversamente a la presión.

a) Escriba para aprender Explique por qué la ley de Boyle da lugar tanto a un modelo de función racional como a uno de función potencia.

b) ¿Cuáles funciones potencias son también funciones racionales?

c) Si la presión de una muestra de 2.59 L de gas nitrógeno a 291°K es 0.866 atm. ¿Cuál sería el volumen a una presión de 0.532 atm, si la temperatura no cambia?

72. Intensidad de la luz Aileen y Malachy reunieron los datos de la tabla 2.19 utilizando un foco de 75 watts y una CBL™ con una sonda para la intensidad de luz.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos de la tabla 2.19.

b) Determine una ecuación para los datos suponiendo que tiene la forma $f(x) = k/x^2$, para alguna constante k. Explique su método para elegir k.

c) Superponga la curva de regresión al diagrama de dispersión.

d) Utilice el modelo de regresión para predecir la intensidad de la luz a distancias de 2.2 m y 4.4 m.

Tabla 2.19 Datos de la intensidad de la luz para un foco de 75 W

Distancia (m)	Intensidad (W/m^2)
1.0	6.09
1.5	2.51
2.0	1.56
2.5	1.08
3.0	0.74

Ampliación de las ideas

En los ejercicios del 73 al 76 grafique la función. Exprese la función como una función definida por partes sin valor absoluto, y utilice el resultado para confirmar algebraicamente las asíntotas e intersecciones de la gráfica.

73. $h(x) = \dfrac{2x-3}{|x|+2}$ **74.** $h(x) = \dfrac{3x+5}{|x|+3}$

75. $f(x) = \dfrac{5-3x}{|x|+4}$ **76.** $f(x) = \dfrac{2-2x}{|x|+1}$

77. Describa cómo puede obtenerse la gráfica una función racional distinta de cero

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ c \neq 0$$

a partir de la gráfica de $y = 1/x$. (*Sugerencia:* Utilice división larga).

78. Escriba para aprender Sea $f(x) = 1 + 1/(x - 1/x)$ y $g(x) = (x^3 + x^2 - x)/(x^3 - x)$. ¿Son iguales f y g? Respalde su respuesta haciendo un análisis comparativo de todas las características de f y g, incluyendo asíntotas, intersecciones y dominio.

2.7 Resolución de ecuaciones con una variable

Aprenderá acerca de...

- La resolución de ecuaciones racionales
- Las soluciones extrañas
- Aplicaciones

. . . porque

Las aplicaciones que incluyen a funciones racionales como modelos con frecuencia requieren que se resuelva una ecuación con fracciones.

Resolución de ecuaciones racionales

Las ecuaciones que incluyen expresiones racionales o fracciones (consulte el apéndice) son **ecuaciones racionales**. Toda ecuación racional puede escribirse en la forma:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales sin factores en común, entonces los ceros de $f(x)$ son las soluciones de la ecuación.

Generalmente, no es necesario poner una ecuación racional en la forma $f(x)/g(x)$. Para resolver una ecuación que incluye fracciones, iniciamos con la determinación del MCD (mínimo común denominador) de todos los términos de la ecuación. Luego, eliminamos las fracciones de la ecuación, multiplicando cada lado de la ecuación por el MCD. En ocasiones el MCD contiene variables.

Cuando multiplicamos o dividimos una ecuación por una expresión que tiene variables, la ecuación resultante puede tener soluciones que *no* son soluciones de la ecuación original. Éstas son **soluciones extrañas**. Por esta razón debemos comprobar, en la ecuación original, cada solución de la ecuación resultante.

EJEMPLO 1 Resolución eliminando fracciones

Resuelva $x + \frac{3}{x} = 4$.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

El MCD es x

$$x + \frac{3}{x} = 4.$$

$$x^2 + 3 = 4x \qquad \text{Multiplicar por } x.$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad \text{Restar } 4x.$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0 \qquad \text{Propiedad del factor cero.}$$

$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = 3$$

Confirma algebraicamente

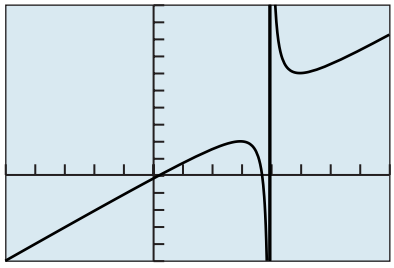
Para $x = 1$, $x + \frac{3}{x} = 1 + \frac{3}{1} = 4$, y para $x = 3$, $x + \frac{3}{x} = 3 + \frac{3}{3} = 4$.

Cada valor es una solución de la ecuación original.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

OBSERVACIÓN SOBRE EL GRAFICADOR

La gráfica en la figura 2.56 contiene una pseudoasíntota vertical, que debemos ignorar. (La gráfica *sí* tiene una asíntota vertical en $x = 4$, pero *no es* la que aparece en la gráfica. N. del T.)



[−5, 8] por [−5, 10]

FIGURA 2.56 La gráfica de $y = x + 1/(x - 4)$ (ejemplo 2).

En el ejemplo 2, cuando se eliminen las fracciones, obtenemos una ecuación cuadrática.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación racional

Resuelva $x + \dfrac{1}{x-4} = 0$.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente El MCD es $x - 4$.

$$x + \frac{1}{x-4} = 0.$$

$$x(x-4) + \frac{x-4}{x-4} = 0 \qquad \text{Multiplicar por } x-4.$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \qquad \text{Fórmula cuadrática.}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Simplificar.}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3} \qquad \text{Simplificar.}$$

$$x \approx 0.268,\ 3.732$$

Resuelva gráficamente

La gráfica en la figura 2.56 sugiere que la función $y = x + 1/(x - 4)$ tiene dos ceros. Podemos utilizar la gráfica para determinar que los ceros son aproximadamente 0.268 y 3.732, coincidiendo con los valores encontrados de forma algebraica.

Ahora resuelva el ejercicio 7.

Soluciones extrañas

En los ejemplos 3 y 4 encontraremos soluciones extrañas.

EJEMPLO 3 Eliminación de soluciones extrañas

Resuelva la ecuación

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}.$$

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

El denominador del lado derecho, $x^2 - 4x + 3$, se factoriza en $(x - 1)(x - 3)$. Por ello, el mínimo común denominador (MCD) de la ecuación es $(x - 1)(x - 3)$, y multiplicamos ambos lados de la ecuación por este MCD:

$$(x-1)(x-3)\left(\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x-3}\right) = (x-1)(x-3)\left(\frac{2}{x^2-4x+3}\right)$$

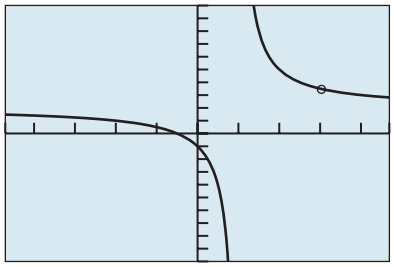
$$2x(x-3) + (x-1) = 2 \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$(2x+1)(x-3) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x = 3$$

continúa



[−4.7, 4.7] por [−10, 10]

FIGURA 2.57 La gráfica de $f(x) = 2x/(x - 1) + 1/(x - 3) - 2/(x^2 - 4x + 3)$ (ejemplo 3).

Confirme numéricamente

En la ecuación original, reemplazamos x por $-1/2$:

$$\frac{2(-1/2)}{(-1/2) - 1} + \frac{1}{(-1/2) - 3} \stackrel{?}{=} \frac{2}{(-1/2)^2 - 4(-1/2) + 3}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{7} \stackrel{?}{=} \frac{8}{21}$$

La ecuación es verdadera, por lo que $x = -1/2$ es una solución válida. La ecuación original no está definida en $x = 3$, por lo que $x = 3$ es una solución extraña.

Respalde gráficamente

La gráfica de

$$f(x) = \frac{2x}{x - 1} + \frac{1}{x - 3} - \frac{2}{x^2 - 4x + 3}$$

en la figura 2.57 sugiere que $x = -1/2$ es una intersección x y $x = 3$ no lo es.

Interprete

Sólo $x = -1/2$ es solución.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Veremos que el ejemplo 4 no tiene soluciones.

EJEMPLO 4 Eliminación de soluciones extrañas

Resuelva

$$\frac{x - 3}{x} + \frac{3}{x + 2} + \frac{6}{x^2 + 2x} = 0.$$

SOLUCIÓN El MCD es $x(x + 2)$.

$$\frac{x - 3}{x} + \frac{3}{x + 2} + \frac{6}{x^2 + 2x} = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) + 3x + 6 = 0 \qquad \text{Multiplicar por } x(x+2).$$

$$x^2 - x - 6 + 3x + 6 = 0 \qquad \text{Desarrollar.}$$

$$x^2 + 2x = 0 \qquad \text{Simplificar.}$$

$$x(x + 2) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -2$$

Sustituir $x = 0$ o $x = -2$ en la ecuación original ocasiona una división entre cero. Así que los dos números son soluciones extrañas y la ecuación original no tiene solución.

Ahora resuelva el ejercicio 17.



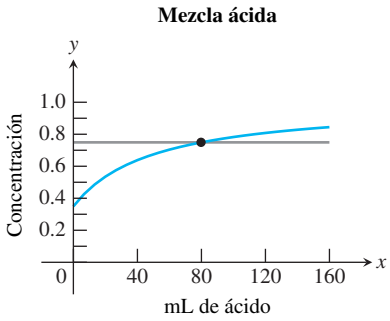
FIGURA 2.58 Soluciones mezcladas (ejemplo 5).

Aplicaciones

EJEMPLO 5 Cálculo de mezclas de ácido

¿Cuánto ácido puro debe agregarse a 50 mL de una solución al 35% de ácido para producir una mezcla ácida al 75%? (Consulte la figura 2.58.)

continúa



Intersección: $x = 80$; $y = .75$

FIGURA 2.59 Las gráficas de $f(x) = (x + 17.5)/(x + 50)$ y $g(x) = 0.75$ (ejemplo 5).

SOLUCIÓN

Modele

Enunciado en palabras: $\dfrac{\text{mL de ácido puro}}{\text{mL de la mezcla}}$ = concentración de ácido

0.35×50 o 1.75 = mL de ácido puro en la solución al 35%

x = mL de ácido que se agrega

$x + 17.5$ = mL de ácido puro en la mezcla resultante

$x + 50$ = mL de la mezcla resultante

$\dfrac{x + 17.5}{x + 50}$ = concentración de ácido.

Resuelva gráficamente

$$\frac{x + 17.5}{x + 50} = 0.75 \qquad \text{Ecuación a resolver}$$

La figura 2.59 muestra las gráficas de $f(x) = (x + 17.5)/(x + 50)$ y $g(x) = 0.75$. El punto de intersección es (80, 0.75).

Interprete

Necesitamos agregar 80 mL de ácido puro a la solución ácida al 35% para tener una solución ácida al 75%.

Ahora resuelva el ejercicio 31.

EJEMPLO 6 Determinación de un perímetro mínimo

Determine las dimensiones del rectángulo con perímetro mínimo, si su área es 200 metros cuadrados. Determine este perímetro mínimo.

SOLUCIÓN

Modele

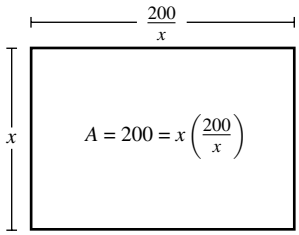


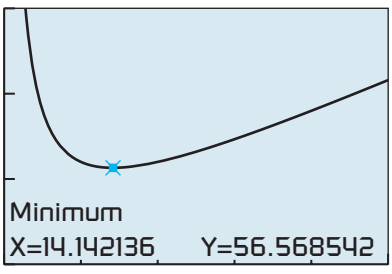
FIGURA 2.60 Un rectángulo con área de 200 m^2 (ejemplo 6).

Enunciado en palabras: Perímetro = $(2 \times$ longitud$) + (2 \times$ ancho$)$

x = ancho en metros

$\dfrac{200}{x} = \dfrac{\text{área}}{\text{ancho}}$ = longitud en metros

Función que se minimizará: $P(x) = 2x + 2\left(\dfrac{200}{x}\right) = 2x + \dfrac{400}{x}$



[0, 50] por [0, 150]

FIGURA 2.61 Una gráfica de $P(x) = 2x + 400/x$ (ejemplo 6).

continúa



FIGURA 2.62 Una lata de jugo de tomate (ejemplo 7).

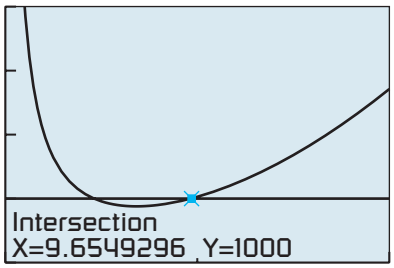
Resuelva gráficamente

La gráfica de P en la figura 2.61 muestra un mínimo de aproximadamente 56.57, que ocurre cuando $x \approx 14.14$.

Interpretar

El ancho es alrededor de 14.14 m y el perímetro mínimo es de casi 56.57 m. Ya que $200/14.14 \approx 14.14$, las dimensiones del rectángulo con perímetro mínimo son 14.14 por 14.14 m; se trata de un cuadrado.

Ahora resuelva el ejercicio 35.



[0, 20] por [0, 4000]

FIGURA 2.63 (Ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Diseño de una lata de jugo

La fábrica de conservas Stewart envasará jugo de tomate en latas cilíndricas de 2 litros. Determine el radio y la altura de las latas si éstas tienen una superficie de 1,000 cm^2 (consulte la figura 2.62).

SOLUCIÓN

Modele

S = superficie de la lata en cm^2

r = radio de la lata en cm

h = altura de la lata en cm

Usando las fórmulas para el volumen (V) y la superficie, y el hecho de que 1 L = 1,000 cm^3, concluimos que

$$V = \pi r^2 h = 2{,}000 \text{ y } S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 1{,}000.$$

Por lo que

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = 1{,}000$$

$$2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{2{,}000}{\pi r^2}\right) = 1{,}000 \qquad \text{Sustituir } h = 2000/(\pi r^2).$$

$$2\pi r^2 + \frac{4{,}000}{r} = 1{,}000 \qquad \text{Ecuación a resolver.}$$

Resuelva gráficamente

La figura 2.63 muestra las gráficas de $f(x) = 2\pi r^2 + 4{,}000/r$ y $g(x) = 1{,}000$. Se tiene un punto de intersección cuando r es aproximadamente 9.65. Un segundo punto de intersección aparece cuando r es aproximadamente 4.62.

Como $h = 2{,}000/(\pi r^2)$, los valores correspondientes para h son

$$h = \frac{2{,}000}{\pi(4.619\ldots)^2} \approx 29.83 \text{ y } h = \frac{2{,}000}{\pi(9.654\ldots)^2} \approx 6.83.$$

Interprete

Con una superficie de 1,000 cm^2, las latas tienen un radio de 4.62 cm y una altura de 29.83 cm, o bien tienen un radio de 9.65 cm y una altura de 6.83 cm.

Ahora resuelva el ejercicio 37.

REPASO RÁPIDO 2.7 *(Para obtener ayuda consulte las secciones A.3 y R.5)*

En los ejercicios 1 y 2 determine el numerador o denominador que falta.

1. $\dfrac{2x}{x-3} = \dfrac{?}{x^2+x-12}$ **2.** $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x^2-1}{?}$

En los ejercicios del 3 al 6 determine el MCD y rescriba la expresión como una sola fracción reducida a su mínima expresión.

3. $\dfrac{5}{12} + \dfrac{7}{18} - \dfrac{5}{6}$ **4.** $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{x}$

5. $\dfrac{x}{2x+1} - \dfrac{2}{x-3}$

6. $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6} - \dfrac{3x+11}{x^2-x-6}$

En los ejercicios del 7 al 10 utilice la fórmula cuadrática para determinar los ceros de los polinomios cuadráticos.

7. $2x^2 - 3x - 1$ **8.** $2x^2 - 5x - 1$

9. $3x^2 + 2x - 2$ **10.** $x^2 - 3x - 9$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.7

En los ejercicios del 1 al 6 resuelva algebraicamente la ecuación. Respalde de forma numérica su respuesta e identifique si hay soluciones extrañas.

1. $\dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{1}{3}$ **2.** $x + 2 = \dfrac{15}{x}$

3. $x + 5 = \dfrac{14}{x}$ **4.** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-3} = 4$

5. $x + \dfrac{4x}{x-3} = \dfrac{12}{x-3}$ **6.** $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{x} = 8$

En los ejercicios del 7 al 12 resuelva gráfica y algebraicamente la ecuación. Compruebe si hay soluciones extrañas.

7. $x + \dfrac{10}{x} = 7$ **8.** $x + 2 = \dfrac{15}{x}$

9. $x + \dfrac{12}{x} = 7$ **10.** $x + \dfrac{6}{x} = -7$

11. $2 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2+x}$ **12.** $2 - \dfrac{3}{x+4} = \dfrac{12}{x^2+4x}$

En los ejercicios del 13 al 18 resuelva la ecuación en forma algebraica. Compruebe si hay soluciones extrañas. Respalde gráficamente su respuesta.

13. $\dfrac{3x}{x+5} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{7}{x^2+3x-10}$

14. $\dfrac{4x}{x+4} + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{15}{x^2+3x-4}$

15. $\dfrac{x-3}{x} - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{3}{x^2+x} = 0$

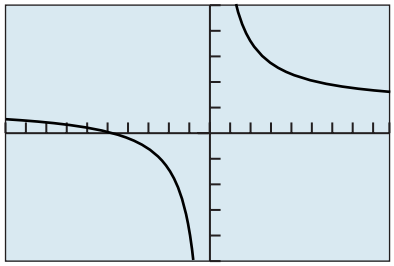
16. $\dfrac{x+2}{x} - \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{2}{x^2-x} = 0$

17. $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{6}{x^2+2x} = \dfrac{3-x}{x}$

18. $\dfrac{x+3}{x} - \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{6}{x^2+3x}$

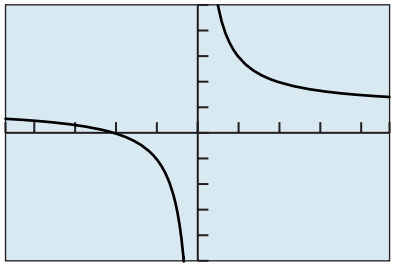
En los ejercicios del 19 al 22 se listan dos posibles soluciones a la ecuación $f(x) = 0$. Utilice la gráfica de $y = f(x)$ para decidir cuáles, si las hay, son extrañas.

19. $x = -5$ o $x = -2$



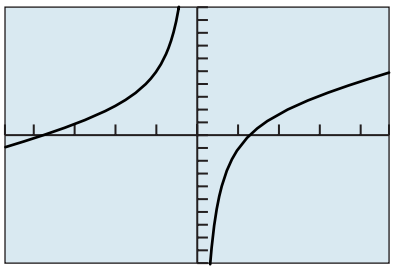
$[-10, 8.8]$ por $[-5, 5]$

20. $x = -2$ o $x = 3$



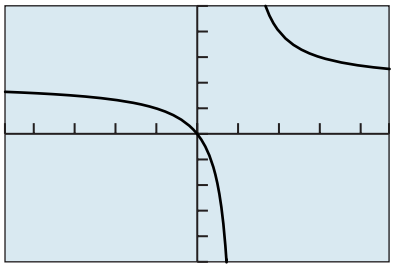
$[-4.7, 4.7]$ por $[-5, 5]$

21. $x = -2$ o $x = 2$



[−4.7, 4.7] por [−10, 10]

22. $x = 0$ o $x = 3$



[−4.7, 4.7] por [−5, 5]

En los ejercicios del 23 al 30 resuelva la ecuación.

23. $\dfrac{2}{x-1} + x = 5$

24. $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2} = 3$

25. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 5} = 0$

26. $\dfrac{3x}{x+2} + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{5}{x^2 + x - 2}$

27. $\dfrac{4x}{x+4} + \dfrac{5}{x-1} = \dfrac{15}{x^2 + 3x - 4}$

28. $\dfrac{3x}{x+1} + \dfrac{5}{x-2} = \dfrac{15}{x^2 - x - 2}$

29. $x^2 + \dfrac{5}{x} = 8$

30. $x^2 - \dfrac{3}{x} = 7$

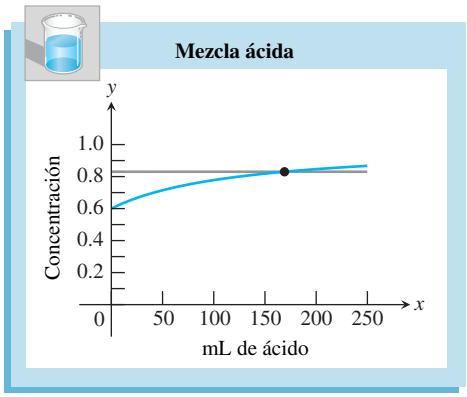
31. Mezcla ácida Suponga que x mL de ácido puro se agregan a 125 mL de una solución ácida al 60%. ¿Cuántos mL de ácido puro se deben agregar para obtener una solución ácida al 83%?

a) Explique por qué la concentración $C(x)$ de la nueva mezcla es

$$C(x) = \frac{x + 0.6(125)}{x + 125}.$$

b) Suponga que la ventana de visualización de la figura se utiliza para determinar la solución para el problema. ¿Cuál es la ecuación de la recta horizontal?

c) Escriba para aprender Escriba y resuelva una ecuación que responda la pregunta de este problema. Explique su respuesta.



32. Mezcla ácida Suponga que x mL se agregan a 100 mL de una solución ácida al 35%.

a) Exprese la concentración $C(x)$ de la nueva mezcla como función de x.

b) Utilice una gráfica para determinar cuánto ácido debe agregarse a la solución al 35% para obtener una nueva solución que esté al 75%.

c) Resuelva algebraicamente la parte b).

33. Punto de equilibrio Ropa Deportiva, Inc. encontró que necesita vender gorras de golf en $2.75 cada una para poder ser competitiva. Cuesta $2.12 producir cada gorra, y la compañía tiene gastos generales semanales de $3,000.

a) Sea x el número de gorras producidas cada semana. Exprese el costo promedio (incluyendo los gastos generales) de producir una gorra como función de x.

b) Resuelva algebraicamente para determinar el número de gorras de golf que deben venderse para obtener una utilidad. Respalde gráficamente su respuesta.

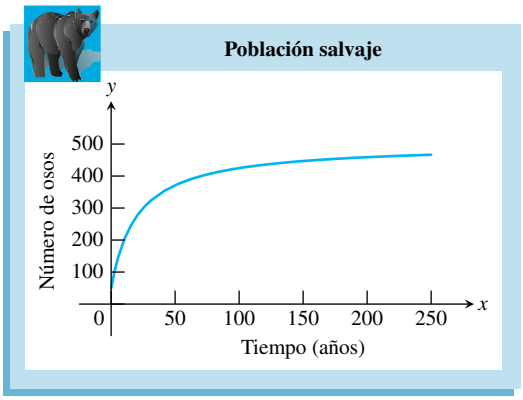
c) Escriba para aprender ¿Cuántas gorras de golf deben venderse para obtener una utilidad de $1,000 en una semana? Explique su respuesta.

34. Población de osos El número de osos en cualquier instante t (en años), en una reserva animal federal está dada por

$$P(t) = \frac{500 + 250t}{10 + 0.5t}.$$

a) Determine la población de osos cuando el valor de t es 10, 40 y 100.

b) La gráfica de la población de osos, ¿tiene una asíntota horizontal? Si es así, ¿cuál es? Si no, ¿por qué no?



c) Escribir para aprender De acuerdo con este modelo, ¿cuál es la mayor población de osos que se puede tener? Explique su respuesta.

35. Minimización de perímetro Considere todos los rectángulos con un área de 182 pies^2. Sea x la longitud de un lado de tal rectángulo.

a) Exprese el perímetro P como función de x.

b) Determine las dimensiones del rectángulo que tiene el menor perímetro. ¿Cuál es el menor perímetro?

36. Actividad en equipo Diseño de una página Publicaciones Hendrix quiere diseñar una página que tenga un margen izquierdo de 0.75 pulg, margen superior de 1.5 pulg. y márgenes derecho e inferior de 1 pulg. Estos márgenes rodearán 40 pulg^2 de zona de impresión. Sea x el ancho de la zona de impresión.

a) Exprese el área de l página como función de x.

b) Determine las dimensiones de la página que tiene la menor área. ¿Cuál es la menor área?

37. Diseño industrial Conservas Drake empacará duraznos en latas cilíndricas de 0.5 L. Sea x el radio, en centímetros, de la lata.

a) Exprese la superficie S de la lata como función de x.

b) Determine el radio y la altura de la lata, si el área de la superficie es de 900 cm^2.

38. Actividad en equipo Diseño de una piscina Recreaciones Thompson, quiere construir una piscina rectangular cuya superficie superior sea de 1,000 pies^2. La piscina requiere tener un pasillo alrededor con un ancho uniforme de 2 pies. Sea x la longitud de un lado de la piscina.

a) Exprese el área del terreno necesario para la piscina y el pasillo que la rodea como función de x.

b) Determine las dimensiones del terreno que tiene la menor área. ¿Cuál es la menor área?

39. Resistores La resistencia eléctrica total R de dos resistores conectados en paralelo con resistencias R_1 y R_2 está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Un resistor tiene una resistencia de 2.3 ohms. Sea x la resistencia del segundo resistor.

a) Exprese la resistencia total R como función de x.

b) Determine la resistencia del segundo resistor, si la resistencia total del par es 1.7 ohms.

40. Diseño de rectángulos Considere todos los rectángulos con un área de 200 m^2. Sea x la longitud de un lado de tales rectángulos.

a) Exprese el perímetro P como función de x.

b) Determine las dimensiones del rectángulo cuyo perímetro es 70 m.

41. Drenado de una piscina Para vaciar una piscina se utilizan los desagües A y B. El desagüe A solo puede vaciar la piscina en 4.75 h. Sea t el tiempo que tarda el desagüe B solo en vaciar la piscina.

a) Exprese como función de t la parte D del drenado que puede realizarse en 1 h con ambos desagües abiertos al mismo tiempo.

b) Determine gráficamente el tiempo que tarda el desagüe B solo en vaciar la piscina, si ambos desagües, cuando se abren al mismo tiempo, pueden vaciar la piscina en 2.6 h. Confirme algebraicamente.

42. Problema de tiempo–velocidad Josh recorrió 17 millas en su bicicleta, desde su casa a Columbus, y luego recorrió 53 millas en automóvil desde Columbus a Dayton. Suponga que la rapidez promedio del automóvil fue 43 mph más rápido que la rapidez promedio de la bicicleta.

a) Exprese el tiempo total requerido para completar el viaje de 70 millas (bicicleta y automóvil) como función de la rapidez x de la bicicleta.

b) Determine gráficamente la rapidez de la bicicleta, si el tiempo total del viaje fue 1 h 40 min. Confirme en forma algebraica.

43. Ventas en comida rápida El monto total en ventas, en miles de millones de dólares, de los negocios de comida rápida durante varios años se da en la tabla 2.20. Haga que $x = 0$ represente a 1990, $x = 1$ represente 1991, y así sucesivamente. Un modelo para los datos está dado por

$$y = 120 - \frac{500}{x + 8}$$

a) Grafique el modelo junto con un diagrama de dispersión de los datos.

b) Utilice el modelo para estimar el monto de ventas de negocios de comida rápida en 2005.

Tabla 2.20 Ventas de comida rápida

Año	Monto (en miles de millones)
1992	70.6
1993	74.9
1994	78.5
1995	82.5
1996	85.9
1997	88.8
1998	92.5
1999	97.5
2000	101.4
2001	105.5

Fuente: Technomic, de acuerdo con USA Today, 3 y 4 de julio de 2002.

44. Número de bodegas El número de bodegas para varios años está dado en la tabla 2.21. Haga que $x = 0$ represente a 1970, $x = 1$ represente a 1971, y así sucesivamente. Un modelo para estos datos está dado por

$$y = 3{,}000 - \frac{39{,}500}{x + 9}$$

a) Grafique el modelo junto con un diagrama de dispersión de los datos.

b) Utilice el modelo para estimar el número de bodegas en 2005.

Tabla 2.21 Número de bodegas

Año	Número
1975	579
1980	912
1985	1375
1990	1625
1995	1813
2000	2188

Fuente: Asociación Americana de Vinateros de acuerdo con USA TODAY el 28 de junio de 2002.

Preguntas de examen estandarizado

45. Verdadero o falso Una solución extraña de una ecuación racional también es una solución de la ecuación. Justifique su respuesta.

46. Verdadero o falso La ecuación $1/(x^2 - 4) = 0$ no tiene solución. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 47 al 50 resuelva el problema sin utilizar una calculadora.

47. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes son las soluciones de la ecuación $x - \frac{3x}{x + 2} = \frac{6}{x + 2}$?

A) $x = -2$ o $x = 3$

B) $x = -1$ o $x = 3$

C) Sólo $x = -2$

D) Sólo $x = 3$

E) No hay soluciones.

48. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes son las soluciones de la ecuación $1 - \frac{3}{x} = \frac{6}{x^2 + 2x}$?

A) $x = -2$ o $x = 4$

B) $x = -3$ o $x = 0$

C) $x = -3$ o $x = 4$

D) sólo $x = -3$

E) No hay soluciones

49. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes son las soluciones de la ecuación $\frac{x}{x + 2} + \frac{2}{x - 5} = \frac{14}{x^2 - 3x - 10}$?

A) $x = -5$ o $x = 3$

B) $x = -2$ o $x = 5$

C) sólo $x = 3$

D) sólo $x = -5$

E) No hay soluciones

50. Opción múltiple Diez litros de una solución ácida al 20% se mezclan con 30 litros de una solución ácida al 30%. ¿Cuál de los siguientes es el porcentaje de ácido en la mezcla final?

A) 21% **B)** 22.5% **C)** 25% **D)** 27.5% **E)** 28%

Exploraciones

51. Ejemplo 4 revisado Considere la ecuación siguiente, que resolvimos en el ejemplo 4.

$$\frac{x - 3}{x} + \frac{3}{x + 2} + \frac{6}{x^2 + 2x} = 0$$

Sea $f(x) = \frac{x - 3}{x} + \frac{3}{x + 2} + \frac{6}{x^2 + 2x}$.

a) Combine las fracciones en $f(x)$, pero *no* las reduzca a su mínima expresión.

b) ¿Cuál es el dominio?

c) Escriba f como una función definida por partes.

d) Escriba para aprender Grafique f y explique cómo la gráfica respalda sus respuestas en b) y en c).

Ampliación de las ideas

En los ejercicios del 52 al 55, resuelva para x.

52. $y = 1 + \frac{1}{1 + x}$

53. $y = 1 - \frac{1}{1 - x}$

54. $y = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

55. $y = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - x}}$

2.8 Resolución de desigualdades con una variable

Aprenderá acerca de...

- Las desigualdades lineales
- Las desigualdades racionales
- Otras desigualdades
- Aplicaciones

. . . porque

El diseño de recipientes, así como otros tipos de aplicaciones, con frecuencia requieren que se resuelva una desigualdad.

Desigualdades lineales

Una desigualdad polinomial toma la forma $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$ o $f(x) \neq 0$, donde $f(x)$ es un polinomio. Existe una relación fundamental entre las desigualdades y el signo positivo o negativo de la expresión correspondiente $f(x)$:

- Resolver $f(x) > 0$ es determinar los valores de x que hacen $f(x)$ *positiva.*
- Resolver $f(x) < 0$ es determinar los valores de x que hacen $f(x)$ *negativa.*

Si la expresión $f(x)$ es un producto, podemos determinar su signo mediante la determinación del signo de cada uno de sus factores. El ejemplo 1 ilustra que una función polinomial cambia de signo sólo en sus ceros reales de multiplicidad impar.

EJEMPLO 1 Determinación de dónde un polinomio es cero, positivo o negativo

Sea $f(x) = (x + 3)(x^2 + 1)(x - 4)^2$. Determine los valores reales de x que hacen que $f(x)$ sea **a)** cero, **b)** positiva, **c)** negativa.

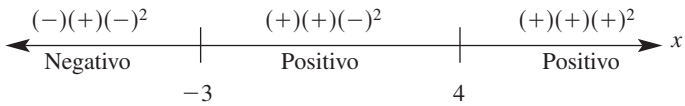
SOLUCIÓN Comenzamos por expresar en palabras nuestro análisis del problema:

a) Los ceros reales de $f(x)$ son -3 (con multiplicidad 1) y 4 (con multiplicidad 2). Así que $f(x)$ es cero, si $x = -3$ o $x = 4$.

b) El factor $x^2 + 1$ es positivo para todos los números reales x. El factor $(x - 4)^2$ es positivo para todos los números reales x excepto $x = 4$, que hace $(x - 4)^2 = 0$. El factor $x + 3$ es positivo si, y sólo si, $x > -3$. Así que $f(x)$ es positivo si $x > -3$ y $x \neq 4$.

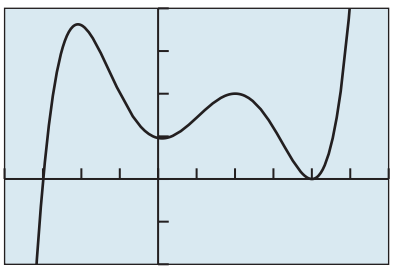
c) Por un proceso de eliminación, $f(x)$ es negativo si $x < -3$.

Este razonamiento verbal es ayudado por el siguiente **diagrama de signos**, que muestra el eje x como una recta numérica con los ceros reales mostrados como las posiciones de potencial cambio de signo, y los factores mostrados con su signo en el intervalo correspondiente:



La figura 2.64 respalda nuestros hallazgos, ya que la gráfica de f está por arriba del eje x para x en $(-3, 4)$ o $(4, \infty)$, está en el eje x para $x = -3$ y $x = 4$, y está por debajo del eje x para x en $(-\infty, -3)$.

Ahora resuelva el ejercicio 1.



[−4, 6] por [−100, 200]

FIGURA 2.64 La gráfica de $f(x) = (x + 3)(x^2 + 1)(x - 4)^2$ (ejemplo 1).

Nuestro trabajo en el ejemplo 1 nos permite reportar las soluciones de cuatro desigualdades polinomiales:

- La solución de $(x + 3)(x^2 + 1)(x - 4)^2 > 0$ es $(-3, 4) \cup (4, \infty)$.
- La solución de $(x + 3)(x^2 + 1)(x - 4)^2 \geq 0$ es $[-3, \infty)$

• La solución de $(x + 3)(x^2 + 1)(x - 4)^2 < 0$ es $(-\infty, -3)$.

• La solución de $(x + 3)(x^2 + 1)(x - 4)^2 \leq 0$ es $(-\infty, 3] \cup \{4\}$.

El ejemplo 1 ilustra algunas características importantes de funciones polinomiales y desigualdades polinomiales. La función polinomial $f(x) = (x + 3)(x^2 + 1)(x - 4)^2$ del ejemplo 1 y la figura 2.64

• cambia de signo en su cero real de multiplicidad impar $(x = 3)$;

• toca al eje x, pero no cambia de signo, en su cero real de multiplicidad par $(x = 4)$;

• no tiene intersección x o cambio de signo en sus ceros complejos no reales, asociados con el factor cuadrático irreducible $(x^2 + 1)$.

Esto es consistente con lo que aprendimos acerca de las relaciones entre ceros y gráficas de funciones polinomiales en las secciones de la 2.3 a la 2.5. Los ceros reales y sus multiplicidades junto con el comportamiento en los extremos de una función polinomial nos proporcionan suficiente información acerca del polinomio para bosquejar su gráfica suficientemente bien como para obtener un correcto diagrama de signos sin considerar los signos de los factores. Consulte la figura 2.65.

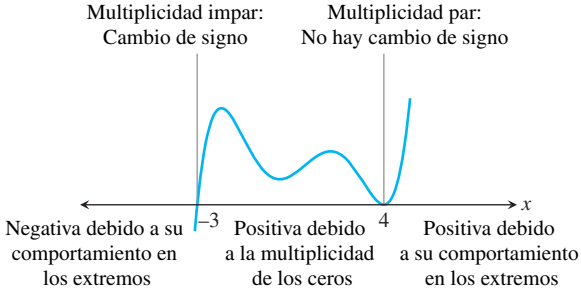


FIGURA 2.65 Diagrama de signos y sobrepuesta la gráfica de $f(x) = (x + 3)(x^2 + 1)((x - 4)^2$.

EXPLORACIÓN 1 **Bosquejo de una gráfica de un polinomio a partir de su diagrama de signos**

Utilice su conocimiento del comportamiento en los extremos y la multiplicidad de los ceros reales para crear un diagrama de signos, y bosqueje la gráfica de la función. Compruebe su diagrama de signos usando el método de factorización del ejemplo 1. Luego compruebe su bosquejo usando un graficador.

1. $f(x) = 2(x - 2)^3(x + 3)^2$

2. $f(x) = -(x + 4)^4(x + 1)(2x^2 + x + 1)$

3. $f(x) = 3(x - 2)^2(x + 4)^3(-x^2 - 2)$

Hasta esta sección, todos los polinomios se han presentado en forma factorizada y todas las desigualdades han tenido ceros en uno de los lados. Los ejemplos 2 y 3 nos muestran cómo resolver desigualdades polinomiales cuando no están dadas en forma tan conveniente.

VALE LA PENA INTENTARLO

Podría desear hacer una tabla o graficar la función f del ejemplo 2 para respaldar el enfoque analítico usado.

EJEMPLO 2 Resolución analítica de una desigualdad polinomial

Resuelva analíticamente $2x^3 - 7x^2 - 10x + 24 > 0$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 24$. El teorema de los ceros racionales proporciona los posibles ceros racionales de f para propósitos de factorización:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}.$$

Una tabla o gráfica de f puede sugerir con cuáles de estos candidatos intentar. En este caso, $x = 4$ es un cero racional de f, como lo muestra la siguiente división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 2 & -7 & -10 & 24 \\ & & 8 & 4 & -24 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

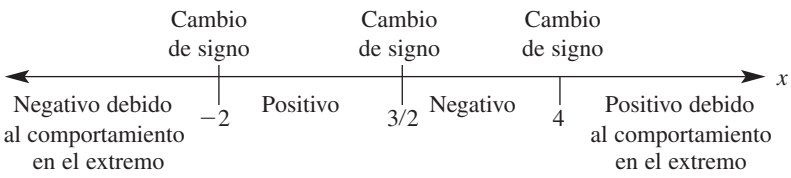
La división sintética nos permite iniciar el proceso de factorización, la cual puede completarse con métodos básicos de factorización:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 7x^2 - 10x + 24 \\ &= (x - 4)(2x^2 + x - 6) \\ &= (x - 4)(2x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

Así que los ceros de f son 4, 3/2 y -2. Todos son reales y todos de multiplicidad 1, por lo que cada uno producirá un cambio de signo en $f(x)$. Ya que el grado de f es impar y su coeficiente principal es positivo, el comportamiento en los extremos de f está dado por

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Nuestro análisis produce el siguiente diagrama de signos:



La solución de $2x^3 - 7x^2 - 10x + 24 > 0$ es $(-2, 3/2) \cup (4, \infty)$.

Ahora resuelva el ejercicio 11.

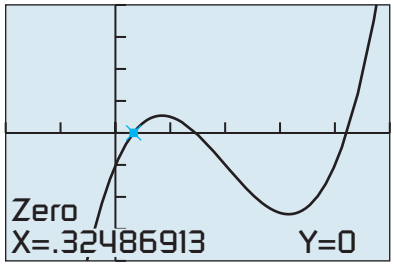
EJEMPLO 3 Resolución gráfica de una desigualdad polinomial

Resuelva gráficamente $x^3 - 6x^2 \le 2 - 8x$.

SOLUCIÓN Primero rescribimos la desigualdad como $x^3 - 6x^2 + 8x - 2 \le 0$. Luego hacemos $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 2$ y determinamos, en forma gráfica, los ceros reales de f como se muestra en la figura 2.66. Los tres ceros reales son aproximadamente 0.32, 1.46 y 4.21. La solución consiste en los valores x para los que la gráfica está en o debajo del eje x. Por lo que la solución de $x^3 - 6x^2 \le 2 - 8x$ es aproximadamente $(-\infty, 0.32] \cup [1.46, 4.21]$.

Los puntos extremos de estos intervalos tienen una precisión de dos decimales. Utilizamos corchetes ya que los ceros del polinomio son soluciones de la desigualdad aunque sólo son aproximaciones a sus valores.

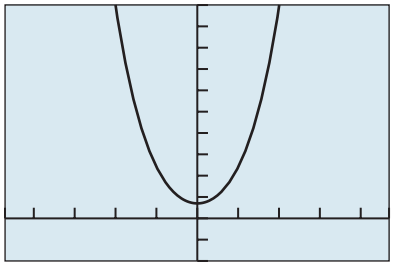
Ahora resuelva el ejercicio 13.



[−2, 5] por [−8, 8]

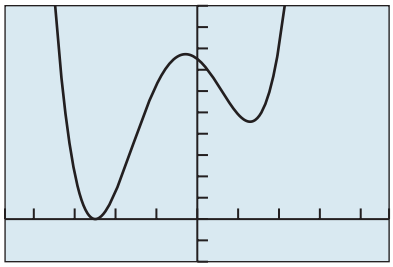
FIGURA 2.66 La gráfica de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 2$, con uno de los tres ceros reales resaltado (ejemplo 3).

Cuando una función polinomial no tiene cambios de signo, las soluciones asociadas a las desigualdades pueden verse un poco raras, como se ilustra en el ejemplo 4.



[–4.7, 4.7] por [–20, 100]

a)



[–4.7, 4.7] por [–20, 100]

b)

FIGURA 2.67 Las gráficas de a) $f(x) = (x^2 + 7)(2x^2 + 1)$ y b) $g(x) = (x^2 - 3x + 3)(2x + 5)^2$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Resolución de una desigualdad polinomial con respuestas no usuales

a) Las desigualdades asociadas con la función polinomial estrictamente positiva $f(x) = (x^2 + 7)(2x^2 + 1)$ tiene conjuntos solución inusuales. Utilizamos la figura 2.67a como guía para resolver las desigualdades:

- La solución de $(x^2 + 7)(2x^2 + 1) > 0$ es $(-\infty, \infty)$, todos los números reales.
- La solución de $(x^2 + 7)(2x^2 + 1) \geq 0$ también es $(-\infty, \infty)$
- El conjunto solución de $(x^2 + 7)(2x^2 + 1) < 0$ está vacío. Decimos que una desigualdad de este tipo no tiene solución.
- El conjunto solución de $(x^2 + 7)(2x^2 + 1) \leq 0$ también está vacío.

b) Las desigualdades asociadas con la función polinomial no negativa $g(x) = (x^2 - 3x + 3)(2x + 5)^2$ también tiene conjuntos solución no usuales. Utilizamos la figura 2.67b como guía para resolver las desigualdades:

- La solución de $(x^2 - 3x + 3)(2x + 5)^2 > 0$ es $(-\infty, -5/2) \cup (-5/2, \infty)$, todos los números reales excepto $x = -5/2$, el único cero real de g.
- La solución de $(x^2 - 3x + 3)(2x + 5)^2 \geq 0$ es $(-\infty, \infty)$, todos los números reales.
- El conjunto solución de $(x^2 - 3x + 3)(2x + 5)^2 < 0$ es vacío.
- El conjunto solución de $(x^2 - 3x + 3)(2x + 5)^2 \leq 0$ sólo es el número $x = -5/2$.

Ahora resuelva el ejercicio 21.

Desigualdades racionales

Una función polinomial $p(x)$ es positiva, negativa o cero para todos los números reales x, pero una función racional $r(x)$ puede ser positiva, negativa, cero o *no estar definida*. En particular, una función racional no está definida en los ceros del denominador. Así cuando se resuelven desigualdades racionales, modificamos la clase del diagrama de signos usado en el ejemplo 1 para incluir los ceros reales, tanto del numerador como del denominador como posiciones de potenciales cambios de signo.

EJEMPLO 5 Creación de un diagrama de signos para una función racional

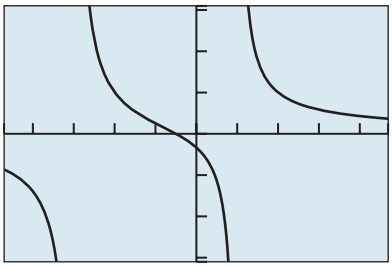
Sea $r(x) = (2x + 1)/((x + 3)(x - 1))$. Determine los valores de x que hacen que $r(x)$ sea **a)** cero y **b)** no definida. Luego haga un diagrama de signos para determinar los valores de x que hagan que $r(x)$ sea **c)** positiva y **d)** negativa.

SOLUCIÓN

a) Los ceros reales de $r(x)$ son los ceros reales del numerador $2x + 1$. Por lo que $r(x)$ es cero si $x = -1/2$.

b) $r(x)$ no esta definida cuando el denominador $(x + 3)(x - 1) = 0$. Así $r(x)$ no está definida si $x = -3$ o $x = 1$.

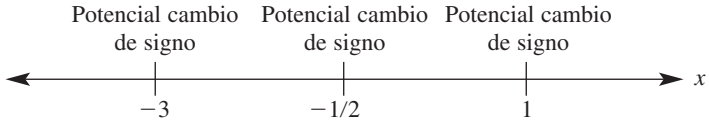
continúa



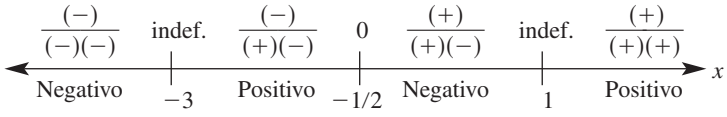
[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

FIGURA 2.68 La gráfica de $r(x) = (2x + 1)/((x + 3)(x - 1))$ (ejemplo 5).

Estos hallazgos conducen al siguiente diagrama de signos, con tres puntos de potencial cambio de signo:



Al analizar los factores del numerador y del denominador se obtiene:



c) Así $r(x)$ es positiva si $-3 < x < -1/2$ o $x > 1$, y la solución de $(2x + 1)/((x + 3)(x - 1)) > 0$ es $(-3, -1/2) \cup (1, \infty)$.

d) De forma análoga, $r(x)$ es negativa si $x < -3$ o $-1/2 < x < 1$, y la solución de $(2x + 1)/((x + 3)(x - 1)) < 0$ es $(-\infty, -3) \cup (-1/2, 1)$.

La figura 2.68 respalda nuestros hallazgos ya que la gráfica de r está por arriba del eje x para x en $(-3, -1/2) \cup (1, \infty)$ y está abajo del eje x en $(-\infty, -3) \cup (-1/2, 1)$.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

EJEMPLO 6 Resolución de una desigualdad racional mediante la combinación de fracciones

Resuelva $\dfrac{5}{x + 3} + \dfrac{3}{x - 1} < 0$.

SOLUCIÓN Combinamos las dos fracciones del lado izquierdo de la desigualdad usando el mínimo común denominador $(x + 3)(x - 1)$:

$$\frac{5}{x + 3} + \frac{3}{x - 1} < 0 \qquad \text{Desigualdad original}$$

$$\frac{5(x - 1)}{(x + 3)(x - 1)} + \frac{3(x + 3)}{(x + 3)(x - 1)} < 0 \qquad \text{Utilizar el MCD para rescribir las fracciones.}$$

$$\frac{5(x - 1) + 3(x + 3)}{(x + 3)(x - 1)} < 0 \qquad \text{Sumar las fracciones.}$$

$$\frac{5x - 5 + 3x + 9}{(x + 3)(x - 1)} < 0 \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$\frac{8x + 4}{(x + 3)(x - 1)} < 0 \qquad \text{Simplificar.}$$

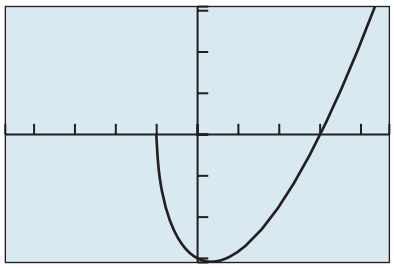
$$\frac{2x + 1}{(x + 3)(x - 1)} < 0 \qquad \text{Dividir ambos lados entre 4.}$$

Esta desigualdad coincide con la del ejemplo 5 d). Así que la solución es $(-\infty, -3) \cup (-1/2, 1)$.

Ahora resuelva el ejercicio 49.

Otras desigualdades

El método del diagrama de signos puede adaptarse para resolver otros tipos de desigualdades, y podemos respaldar nuestras soluciones gráficamente cuando lo necesitemos.



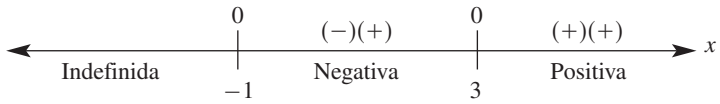
[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

FIGURA 2.69 La gráfica de $f(x) = (x - 3)\sqrt{x + 1}$ (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Resolución de una desigualdad que incluye un radical

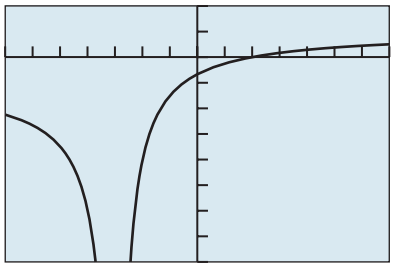
Resuelva $(x - 3)\sqrt{x + 1} \geq 0$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x - 3)\sqrt{x + 1}$. A consecuencia del factor $\sqrt{x + 1}$, $f(x)$ está indefinida si $x < -1$. Los ceros de f son 3 y -1. Estos hallazgos, junto con un análisis de signos de los dos factores, conducen al diagrama de signos siguiente:



Por lo que la solución de $(x - 3)\sqrt{x + 1} \geq 0$ es $\{-1\} \cup [3, \infty)$. La gráfica de f en la figura 2.69 respalda esta solución.

Ahora resuelva el ejercicio 43.



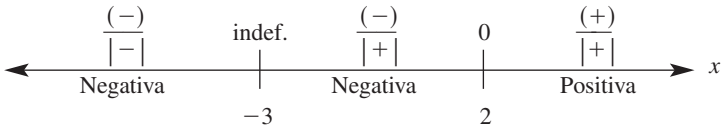
[−7, 7] por [−8, 2]

FIGURA 2.70 La gráfica de $f(x) = (x - 3)/|x + 3|$ (ejemplo 8).

EJEMPLO 8 Resolución de una desigualdad que incluye valor absoluto

Resuelva $\dfrac{x - 2}{|x + 3|} \leq 0$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x - 2)/(|x + 3|$. Puesto que $|x + 3|$ está en el denominador, $f(x)$ está indefinida en $x = -3$. El único cero de f es 2. Estos hallazgos, junto con un análisis de signo de los dos factores, conducen al diagrama de signos siguiente:



Así la solución de $(x - 2)/|x + 3| \leq 0$ es $(-\infty, -3) \cup (-3, 2]$. La gráfica de f en la figura 2.70 apoya esta solución.

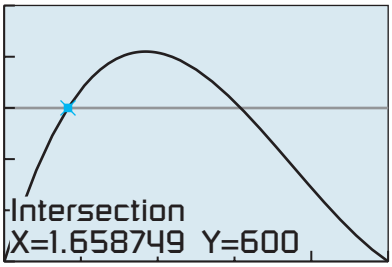
Ahora resuelva el ejercicio 53.

Aplicaciones

EJEMPLO 9 Diseño de una caja –Revisitado

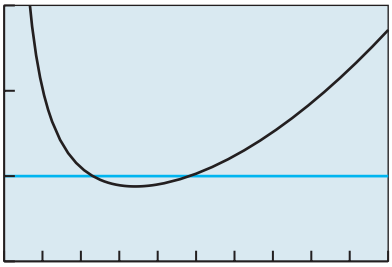
La compañía Empaques Dixie tiene un contrato, con otra compañía, para diseñar cajas con un volumen de *al menos* 600 pulg^3. Aún se siguen cortando cuadrados de las esquinas de una pieza de cartón, ésta de 20 por 25 pulg, y se doblan las solapas hacia arriba para construir una caja sin tapa. ¿De qué tamaño deben ser los cuadrados que se cortarán? (Consulte el ejemplo 9 de la sección 2.3 y la figura 2.31).

continúa



[0, 10] por [0, 1000]

FIGURA 2.71 Las gráficas de $y_1 = x(25 - 2x)(20 - 2x)$ y $y_2 = 600$ (ejemplo 9).



[0, 20] por [0, 3000]

FIGURA 2.72 Las gráficas de $y_1 = 2\pi x^2 + 4{,}000/x$ y $y_2 = 1{,}000$ (ejemplo 10).

SOLUCIÓN

Modele

Recuerde que el volumen V de la caja está dado por

$$V(x) = x(25 - 2x)(20 - 2x),$$

donde x representa tanto la longitud del lado de los cuadrados que se quitarán como la altura de la caja. Para obtener un volumen de al menos 600 pulg^3, resolvemos la desigualdad

$$x(25 - 2x)(20 - 2x) \geq 600.$$

Resuelva gráficamente

Ya que el ancho de la pieza de cartón es de 20 pulg, $0 \leq x \leq 10$, y fijamos nuestra ventana de acuerdo a esto. En la figura 2.71 encontramos los valores de x para los que la función cúbica está en o arriba de la recta horizontal. La solución es el intervalo [1.66, 6.16].

Interprete

Los cuadrados con longitudes entre 1.66 pulg y 6.16 pulg, inclusive, deben cortarse de la pieza de cartón para producir una caja con volumen de al menos 600 pulg^3.

Ahora resuelva el ejercicio 59.

EJEMPLO 10 Diseño de una lata de jugo –Revisitado

La fábrica de conservas Stewart envasará jugo de tomate en latas cilíndricas de 2 litros (2,000 cm^3). Determine el radio y la altura de las latas, si éstas tienen una superficie que es menor a 1,000 cm^2 (consulte el ejemplo 7 de la sección 2.7 y la figura 2.63).

SOLUCIÓN

Modele

Recuerde que la superficie S está dada por

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{4{,}000}{r}.$$

Así que la desigualdad a resolver es

$$2\pi r^2 + \frac{4{,}000}{r} < 1{,}000.$$

Resuelva gráficamente

La figura 2.72 muestra las gráficas de $y_1 = S(r) = 2\pi r^2 + 4{,}000/r$ y $y_2 = 1{,}000$. Usando métodos del graficador encontramos que las dos curvas se intersecan, aproximadamente, en $r \approx 4.619\ldots$ y $r \approx 9.654\ldots$ (Conservamos todos los decimales de la calculadora para tener una mayor precisión en un cálculo posterior.) Así el área de la superficie es menor que 1,000 cm^3 si

$$4.62 < r < 9.65.$$

El volumen de una lata cilíndrica es $V = \pi r^2 h$ y $V = 2{,}000$. Utilizando sustitución, vemos que $h = 2{,}000/(\pi r^2)$. Para determinar los valores para h, construimos una desigualdad doble para $2{,}000/(\pi r^2)$.

$$4.62 < r < 9.65 \qquad \text{Desigualdad original.}$$

$$4.62^2 < r^2 < 9.65^2 \qquad 0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2.$$

continúa

$$\pi \cdot 4.62^2 < \pi r^2 < \pi \cdot 9.65^2 \qquad \text{Multiplicar por } \pi.$$

$$\frac{1}{\pi \cdot 4.62^2} > \frac{1}{\pi r^2} > \frac{1}{\pi \cdot 9.65^2} \qquad 0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

$$\frac{2{,}000}{\pi \cdot 4.62^2} > \frac{2{,}000}{\pi r^2} > \frac{2{,}000}{\pi \cdot 9.65^2} \qquad \text{Multiplicar por 2,000.}$$

$$\frac{2{,}000}{\pi(4.619\ldots)^2} > h > \frac{2{,}000}{\pi(9.654\ldots)^2} \qquad \text{Ahora utilizar los decimales extra..}$$

$$29.83 > h > 6.83 \qquad \text{Calcular.}$$

Interpretar

El área de la superficie de la lata será menor que 1,000 cm^3, si su radio está entre 4.62 cm y 9.65 cm, y su altura está entre 6.83 cm y 29.83 cm. Para cualquier lata, h debe ser igual a $2{,}000/(\pi r^2)$.

Ahora resuelva el ejercicio 61.

REPASO RÁPIDO 2.8 *(Para obtener ayuda consulte las secciones A.2, A.3 y 2.3)*

En los ejercicios del 1 al 4 utilice límites para establecer el comportamiento de la función en los extremos.

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

2. $f(x) = -3x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$

3. $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x - 2}$

4. $g(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1}$

En los ejercicios del 5 al 8 combine las fracciones y reduzca su respuesta a su mínima expresión.

5. $x^2 + \dfrac{5}{x}$ **6.** $x^2 - \dfrac{3}{x}$

7. $\dfrac{x}{2x+1} - \dfrac{2}{x-3}$ **8.** $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+1}{3x-4}$

En los ejercicios 9 y 10, **a)** liste todos los ceros racionales posibles del polinomio y **b)** factorice completamente el polinomio.

9. $2x^3 + x^2 - 4x - 3$ **10.** $3x^3 - x^2 - 10x + 8$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.8

En los ejercicios del 1 al 6 determine los valores x que hacen que la función polinomial sea **a)** cero, **b)** positiva, y **c)** negativa.

1. $f(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 5)$

2. $f(x) = (x - 7)(3x + 1)(x + 4)$

3. $f(x) = (x + 7)(x + 4)(x - 6)^2$

4. $f(x) = (5x + 3)(x^2 + 6)(x - 1)$

5. $f(x) = (2x^2 + 5)(x - 8)^2(x + 1)^3$

6. $f(x) = (x + 2)^3(4x^2 + 1)(x - 9)^4$

En los ejercicios del 7 al 12 complete la factorización, si es necesario, y resuelva la desigualdad polinomial mediante un diagrama de signos. Respalde gráficamente.

7. $(x + 1)(x - 3)^2 > 0$

8. $(2x + 1)(x - 2)(3x - 4) \le 0$

9. $(x + 1)(x^2 - 3x + 2) < 0$

10. $(2x - 7)(x^2 - 4x + 4) > 0$

11. $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 \ge 0$

12. $x^3 - 4x^2 + x + 6 \le 0$

En los ejercicios del 13 al 20 resuelva gráficamente la desigualdad polinomial.

13. $x^3 - x^2 - 2x \ge 0$

14. $2x^3 - 5x^2 + 3x < 0$

15. $2x^3 - 5x^2 - x + 6 > 0$

16. $x^3 - 4x^2 - x + 4 \le 0$

17. $3x^3 - 2x^2 - x + 6 \ge 0$

18. $-x^3 - 3x^2 - 9x + 4 < 0$

19. $2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 5x + 6 < 0$

20. $3x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 12x + 16 \ge 0$

En los ejercicios del 21 al 24 resuelva las desigualdades siguientes para la función $f(x)$ dada.

a) $f(x) > 0$ **b)** $f(x) \geq 0$ **c)** $f(x) < 0$ **d)** $f(x) \leq 0$

21. $f(x) = (x^2 + 4)(2x^2 + 3)$

22. $f(x) = (x^2 + 1)(-2 - 3x^2)$

23. $f(x) = (2x^2 - 2x + 5)(3x - 4)^2$

24. $f(x) = (x^2 + 4)(3 - 2x)^2$

En los ejercicios del 25 al 32 determine los valores de x que hacen que la función sea **a)** cero, **b)** no definida, **c)** positiva y **d)** negativa.

25. $f(x) = \dfrac{x - 1}{(2x + 3)(x - 4)}$ **26.** $f(x) = \dfrac{(2x - 7)(x + 1)}{x + 5}$

27. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$ **28.** $f(x) = x^2|2x + 9|$

29. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{(2x + 1)(x - 1)}$ **30.** $f(x) = \dfrac{x - 1}{(x - 4)\sqrt{x + 2}}$

31. $f(x) = \dfrac{(2x + 5)\sqrt{x - 3}}{(x - 4)^2}$ **32.** $f(x) = \dfrac{3x - 1}{(x + 3)\sqrt{x - 5}}$

En los ejercicios del 33 al 44 resuelva la desigualdad utilizando un diagrama de signos. Respalde gráficamente.

33. $\dfrac{x - 1}{x^2 - 4} < 0$ **34.** $\dfrac{x + 2}{x^2 - 9} < 0$

35. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq 0$ **36.** $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4} > 0$

37. $\dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4x + 4} > 0$ **38.** $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 6x + 9} < 0$

39. $\dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1} \geq 0$ **40.** $\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 2} \leq 0$

41. $x|x - 2| > 0$ **42.** $\dfrac{x - 3}{|x + 2|} < 0$

43. $(2x - 1)\sqrt{x + 4} < 0$ **44.** $(3x - 4)\sqrt{2x + 1} \geq 0$

En los ejercicios del 45 al 54 resuelva la desigualdad.

45. $\dfrac{x^3(x - 2)}{(x + 3)^2} < 0$ **46.** $\dfrac{(x - 5)^4}{x(x + 3)} \geq 0$

47. $x^2 - \dfrac{2}{x} > 0$ **48.** $x^2 + \dfrac{4}{x} \geq 0$

49. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 3} \leq 0$ **50.** $\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{2}{x - 1} > 0$

51. $(x + 3)|x - 1| \geq 0$ **52.** $(3x + 5)^2|x - 2| < 0$

53. $\dfrac{(x - 5)|x - 2|}{\sqrt{2x - 3}} \geq 0$ **54.** $\dfrac{x^2(x - 4)^3}{\sqrt{x + 1}} < 0$

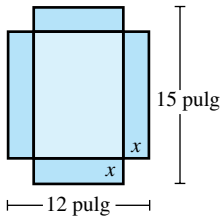
55. Escribir para aprender Escriba un párrafo que explique dos formas para resolver la desigualdad $3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$.

56. Salarios de una compañía Pederson Electric Co., cobra \$25 por llamada de servicio más \$18 por hora por trabajo de reparación en el hogar. ¿Cuánto trabajó un electricista, si el cobro fue menor que \$100? Suponga que los electricistas redondean el tiempo al cuarto de hora más cercano.

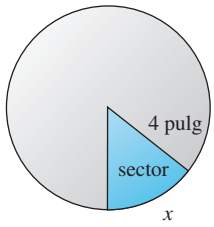
57. Conexión entre álgebra y geometría Considere la colección de todos los rectángulos que tienen largos 2 pulg menores que el doble de sus anchos. Determine los posibles anchos (en pulgadas) de estos rectángulos, si sus perímetros son menores que 200 pulg.

58. Planeación para utilidades La compañía Dulces Grovenor determina que el costo de fabricar cierta barra de dulce es \$0.13 por barra. Los gastos fijos ascienden a \$2,000 por semana. Si cada barra se vende en \$0.35, determine el número mínimo de barras de dulce que darán a la compañía una utilidad.

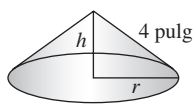
59. Diseño de una caja de cartón La Planta de Empaque de Picaro desea diseñar cajas con un volumen de *no más que* 100 pulg^3. Se cortan cuadrados de las esquinas de una pieza de cartón de 12 por 15 pulg (consulte la figura), y luego se doblan las solapas hacia arriba para construir una caja sin tapa. ¿De qué tamaño se deben cortar los cuadrados de la pieza de cartón?



60. Problema de un cono Comenzando con una pieza circular de papel con radio de 4 pulg como se muestra en a), se corta un sector con un arco de longitud x. Con la parte restante del papel se unen los lados radiales para formar un cono con radio r y altura h, como se muestra en b). ¿Qué longitud de arco producirá un cono con un volumen mayor que 21 pulg^3?



a)



b)

61. Diseño de una lata de jugo La fábrica de conservas Flannery envasa duraznos en latas cilíndricas de 0.5 L.

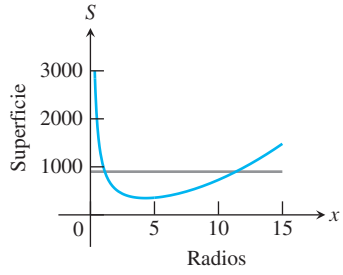
a) Exprese la superficie S de la lata como función del radio x (en cm).

b) Determine las dimensiones de la lata, si la superficie es menor que 900 cm^3.

c) Determine la menor superficie de la lata.



Ingeniería de diseño



62. Resistores La resistencia total R de dos resistores conectados en paralelo, con resistencias R_1 y R_2 está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Un resistor tiene una resistencia de 2.3 ohms. Sea x la resistencia del segundo resistor.

a) Exprese la resistencia total R como función de x.

b) Determine la resistencia en el segundo resistor, si la resistencia total del par es de al menos 1.7 ohms.

63. Ingreso per cápita El ingreso per cápita en Estados Unidos, durante varios años de 1990 a 2003, está dado en la tabla 2.22 en dólares de 2003.

Haga que $x = 0$ represente a 1990, $x = 1$, represente a 1991, y así sucesivamente.

a) Determine el modelo de regresión lineal para los datos.

b) Utilice el modelo para predecir cuándo el ingreso per cápita excederá $40,000.

Tabla 2.22 Ingreso per cápita Personal

Año	Ingreso (dólares)
1990	19,477
1992	20,958
1994	22,435
1996	24,488
1998	27,126
2000	29,847
2002	30,906
2003	31,632

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2001, 2004-2005.

64. Costo de una casa unifamiliar La mediana de los precios de venta de casas unifamiliares que se vendieron en Estados Unidos están dados para años seleccionados en la tabla 2.23. Sea x el número de años a partir de 1980.



a) Determine para una cúbica el modelo de regresión para los datos.

b) Utilice el modelo para predecir cuándo la mediana de los costos de una casa nueva excederá $250,000.

Tabla 2.23 Mediana de los precios de venta de una casa nueva

Año	Precio (dólares)
1980	64,600
1985	84,300
1990	122,900
1995	133,900
2000	169,000
2003	195,000

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos. Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2004-2005.

Preguntas de examen estandarizado

65. Verdadero o falso La gráfica de $f(x) = x^4(x + 3)^2(x - 1)^3$ cambia de signo en $x = 0$. Justifique su respuesta.

66. Verdadero o falso La gráfica de $r(x) = \dfrac{2x - 1}{(x + 2)(x - 1)}$ cambia de signo en $x = -2$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 67 al 70 resuelva el problema sin usar calculadora.

67. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la solución de $x^2 < x$?

A) $(0, \infty)$ **B)** $(1, \infty)$ **C)** $(0, 1)$

D) $(-\infty, 1)$ **E)** $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

68. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la solución para $\dfrac{1}{(x + 2)^2} \geq 0$?

A) $(-2, \infty)$ **B)** Toda $x \infty -2$ **C)** Toda $x \infty 2$

D) Todos los números reales **E)** No hay solución.

69. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la solución para $\dfrac{x^2}{x - 3} < 0$?

A) $(-\infty, 3)$ **B)** $(-\infty, 3]$ **C)** $(-\infty, 0] \cup (0, 3)$

D) $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$ **E)** No hay soluciones.

70. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la solución para $(x^2 - 1)^2 \leq 0$

A) $\{-1, 1\}$ **B)** $\{1\}$ **C)** $[-1, 1]$

D) $[0, 1]$ **E)** No hay soluciones.

Exploraciones

En los ejercicios 71 y 72 determine las asíntotas verticales y las intersecciones de la función racional. Luego utilice un diagrama de signos y una tabla de valores para bosquejar la función. Respalde su resultado usando un graficador. (*Sugerencia:* Podría ser necesario graficar la función en más de una ventana para ver diferentes partes de la gráfica).

71. $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 2)^2}{(x - 3)(x + 1)}$ **72.** $g(x) = \dfrac{(x - 3)^4}{x^2 + 4x}$

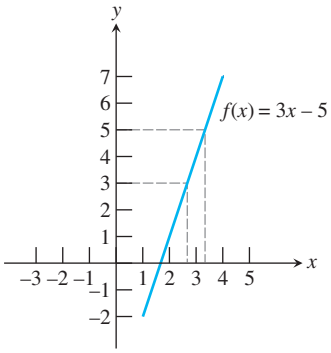
Ampliación de las ideas

73. Actividad en equipo **Una vista anticipada de cálculo** Sea $f(x) = 3x - 5$.

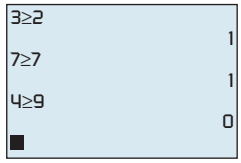
a) Suponga que x está en el intervalo definido por $|x - 3| < 1/3$. Proporcione un argumento convincente de que $|f(x) - 4| < 1$.

b) **Escriba para aprender** Explique cómo a) está modelada mediante la figura de la página siguiente.

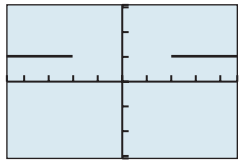
c) Muestre cómo el álgebra usada en a) puede modificarse para mostrar que si $|x - 3| < 0.01$, entonces $|f(x) - 4| < 0.03$. ¿Cómo debería cambiar la figura en la página siguiente para reflejar estas desigualdades?



74. Escriba para aprender **Operadores booleanos** El menú Test de muchos graficadores tiene símbolos de desigualdad que pueden usarse para construir proposiciones de desigualdad, como se muestra en a). Una respuesta de 1 indica que la proposición es verdadera y 0 indica que la proposición es falsa. En b) se muestra la gráfica de $Y_1 = (x^2 - 4 \geq 0)$ utilizando el modo Dot y la ventana $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$. Experimente con el menú Test y luego escriba un párrafo que explique cómo interpretar la gráfica en b).



a)



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

b)

En los ejercicios 75 y 76 utilice las propiedades de la desigualdad del capítulo R para probar las proposiciones.

75. Si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

76. Si $0 < a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Matemáticas en el trabajo

Tengo un doctorado en neurociencias computacionales. Me interesó este campo después haber trabajado como ingeniera de software. Ahora, heme aquí: ¡una mamá que regresa a la escuela de ingeniería en Suiza! Después de años de programación de software, encontré que había olvidado la mayoría de mi matemática, pero he descubierto que, al igual que otras habilidades, sólo es cuestión de práctica.

En este campo utilizo simulaciones en computadora para explorar formas de comprender lo que hacen las neuronas en el cerebro y el resto de nuestro sistema nervioso. El cerebro tiene muchas neuronas (y muchas clases de ellas); tantas que, si tratamos de hacer un modelo de verdad "realista" de una parte del cerebro, la simulación no sólo se ejecutaría muy lentamente en la computadora, ¡sino que también podría ser demasiado complicado de entender!

Lo que hacemos es utilizar modelos muy sencillos para neuronas individuales. Utilizamos matemáticas para calcular, de forma analítica, cantidades tales como la respuesta de un grupo de neuronas a una señal de entrada específica, o cuánta información pueden transmitir las neuronas bajo ciertas condiciones.



Alix Kamakaokalani Herrmann

Luego utilizamos simulaciones en computadora para probar si nuestra predicción teórica en realidad funciona. Cuando la teoría coincide con el experimento, ¡es realmente emocionante!

Una ecuación que se usa comúnmente en mi campo es la correspondiente al potencial de la membrana de una neurona. Ésta es la cantidad de corriente que la neurona es capaz de almacenar antes de "disparar" una acción potencial —que es como se comunica con otras neuronas, o incluso músculos— indicándoles moverse. Si conservamos constantes algunas de las cantidades en la ecuación podemos resolver para las otras. Por ejemplo, si la corriente de entrada y las resistencias se mantienen constantes, podemos resolver para el potencial de la membrana.

Ideas Clave DEL CAPÍTULO 2

PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

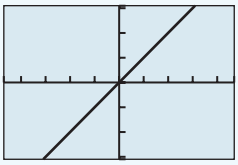
Propiedades del coeficiente de correlación, r 174
Forma del vértice de una función cuadrática 178
Movimiento vertical, en caída libre 180
Teorema de los extremos locales y ceros de funciones polinomiales 202
Criterio del término principal para el comportamiento en los extremos de un polinomio 204
Ceros de multiplicidad impar y par 206
Teorema del valor intermedio 206
Algoritmo de la división para polinomios 214
Teorema del residuo 215
Teorema del factor 216
Conexiones fundamentales para funciones polinomiales 217
Teorema de los ceros racionales 219
Teorema fundamental del álgebra 228
Teorema de la factorización lineal 228
Relaciones polinomiales fundamentales en el caso complejo 229
Teorema de los ceros complejos conjugados 230
Factores de un polinomio con coeficientes reales 232
Función polinomial de grado impar 233
Gráfica de una función racional 240

PROCEDIMIENTOS

Análisis de regresión 176
División larga de polinomios 214
División sintética, ejemplo 218
Resolución de desigualdades usando diagramas de signos 257

GALERÍA DE FUNCIONES

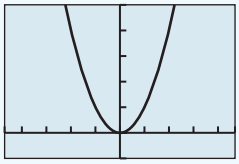
Identidad



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

$f(x) = x$

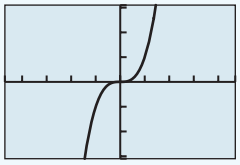
Cuadrática



[−4.7, 4.7] por [−1, 5]

$f(x) = x^2$

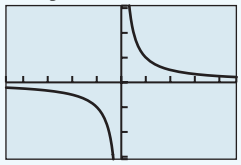
Cúbica



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

$f(x) = x^3$

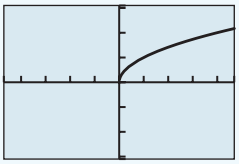
Recíproca



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

$f(x) = 1/x = x^{-1}$

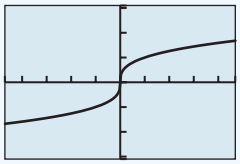
Raíz cuadrada



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

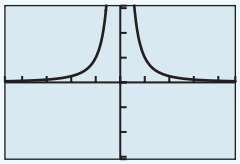
Raíz cúbica



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

Inverso del cuadrado



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

$f(x) = 1/x^2 = x^{-2}$

CAPÍTULO 2 Ejercicios de repaso

La colección de ejercicios marcados en azul podría utilizarse como un examen del capítulo.

En los ejercicios 1 y 2 escriba una ecuación para la función lineal f que satisfaga las condiciones dadas. Grafique $y = f(x)$.

1. $f(-3) = -2$ y $f(4) = -9$.

2. $f(-3) = 6$ y $f(1) = -2$.

En los ejercicios 3 y 4 describa cómo transformar la gráfica de $f(x) = x^2$ en la gráfica de la función dada. Bosqueje la gráfica y respalde su respuesta con un graficador.

3. $h(x) = 3(x - 2)^2 + 4$

4. $g(x) = -(x + 3)^2 + 1$

En los ejercicios del 5 al 8 determine el vértice y eje de la gráfica de la función. Respalde gráficamente su respuesta.

5. $f(x) = -2(x + 3)^2 + 5$ **6.** $g(x) = 4(x - 5)^2 - 7$

7. $f(x) = -2x^2 - 16x - 31$ **8.** $g(x) = 3x^2 - 6x + 2$

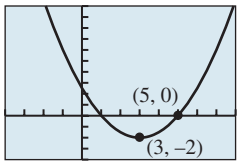
En los ejercicios 9 y 10 escriba una ecuación para la función cuadrática cuya gráfica contiene al vértice y los puntos dados.

9. Vértice $(-2, -3)$, punto $(1, 2)$

10. Vértice $(-1, 1)$, punto $(3, -2)$

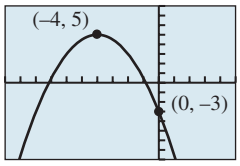
En los ejercicios 11 y 12 escriba una ecuación para la función cuadrática con la gráfica que se muestra, dado que uno de los puntos marcados es el vértice de la parábola.

11.



$[-4, 8]$ por $[-4, 10]$

12.



$[-10, 5]$ por $[-8, 8]$

En los ejercicios del 13 al 16 grafique la función en una ventana de visualización que muestre todos sus extremos y sus intersecciones x.

13. $f(x) = x^2 + 3x - 40$ **14.** $f(x) = -8x^2 + 16x - 19$

15. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 5$ **16.** $f(x) = x^3 - x^2 - 20x - 2$

En los ejercicios 17 y 18 escriba el enunciado como una ecuación con una función potencia. Sea k la constante de variación.

17. El área de la superficie, S, de una esfera varía directamente con el cuadrado del radio r.

18. La fuerza debida a la gravedad, F, que actúa sobre un objeto, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, d, del objeto al centro de la Tierra.

En los ejercicios 19 y 20 escriba una oración que exprese la relación en la fórmula, utilizando el lenguaje de variación o proporción.

19. $F = kx$, donde F es la fuerza necesaria para estirar un resorte x unidades de su longitud normal (sin estirar) y k es la constante de fuerza del resorte.

20. $A = \pi \cdot r^2$, donde A y r son el área y el radio de un círculo y π es la conocida constante matemática.

En los ejercicios del 21 al 24 indique los valores de las constantes k y a para la función $f(x) = k \cdot x^a$. Describa la parte de la curva que está en el primero o cuarto cuadrantes. Determine si f es par, impar o indefinida para $x < 0$. Describa el resto de la curva, si existe. Grafique la función para ver si coincide con la descripción.

21. $f(x) = 4x^{1/3}$ **22.** $f(x) = -2x^{3/4}$

23. $f(x) = -2x^{-3}$ **24.** $f(x) = (2/3)x^{-4}$

En los ejercicios del 25 al 28 divida $f(x)$ entre $d(x)$ y escriba un enunciado resumen en forma polinomial.

25. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 5$; $d(x) = x - 3$

26. $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x + 3$; $d(x) = x + 2$

27. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 14x + 7$; $d(x) = x^2 + 4$

28. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 3x - 6$; $d(x) = 3x + 1$

En los ejercicios 29 y 30 utilice el teorema del residuo para determinar el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - k$. Compruebe usando la división sintética.

29. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$; $k = -2$

30. $f(x) = -x^2 + 4x - 5$; $k = 3$

En los ejercicios 31 y 32 utilice el teorema del factor para determinar si el primer polinomio es un factor del segundo.

31. $x - 2$; $x^3 - 4x^2 + 8x - 8$

32. $x + 3$; $x^3 + 2x^2 - 4x - 2$

En los ejercicios 33 y 34 utilice la división sintética para probar que el número k es una cota superior para los ceros reales de la función.

33. $k = 5$; $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4$

34. $k = 4$; $f(x) = 4x^4 - 16x^3 + 8x^2 + 16x - 12$

En los ejercicios 35 y 36 utilice división sintética para probar que el número k es una cota inferior para los ceros reales de la función.

35. $k = -3$; $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 17x - 2$

36. $k = -3$; $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + x - 6$

En los ejercicios 37 y 38 utilice el teorema de los ceros racionales para escribir una lista de todos los potenciales ceros racionales. Luego determine cuáles, si los hay, son ceros.

37. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 - x - 6$

38. $f(x) = 6x^3 - 20x^2 + 11x + 7$

En los ejercicios del 39 al 42 realice la operación que se indica, y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

39. $(1 + i)^3$ **40.** $(1 + 2i)^2(1 - 2i)^2$

41. i^{29} **42.** $\sqrt{-16}$

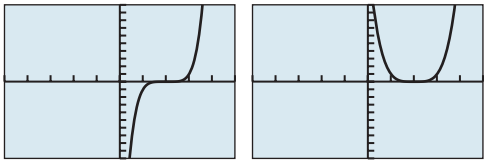
En los ejercicios 43 y 44 resuelva la ecuación.

43. $x^2 - 6x + 13 = 0$ **44.** $x^2 - 2x + 4 = 0$

En los ejercicios del 45 al 48 relacione la función polinomial con su gráfica. Explique el por qué de su elección.

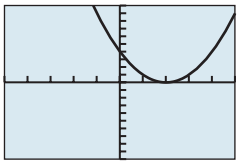
45. $f(x) = (x - 2)^2$ **46.** $f(x) = (x - 2)^3$

47. $f(x) = (x - 2)^4$ **48.** $f(x) = (x - 2)^5$

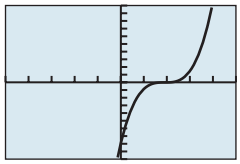


a)

b)



c)



d)

En los ejercicios del 49 al 52 determine todos los ceros reales de la función; siempre que sea posible determine valores exactos. Identifique cada cero como racional o irracional. Indique el número de ceros complejos no reales.

49. $f(x) = x^4 - 10x^3 + 23x^2$

50. $k(t) = t^4 - 7t^2 + 12$

51. $h(x) = x^3 - 2x^2 - 8x + 5$

52. $k(x) = x^4 - x^3 - 14x^2 + 24x + 5$

En los ejercicios del 53 al 56 determine todos los ceros y escriba una factorización lineal de la función.

53. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2x + 30$

54. $f(x) = 5x^3 - 24x^2 + x + 12$

55. $f(x) = 6x^4 + 11x^3 - 16x^2 - 11x + 10$

56. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 50x + 50$, dado que $1 + 2i$ es un cero.

En los ejercicios del 57 al 60 escriba la función como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles, todos con coeficientes reales.

57. $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$

58. $f(x) = 9x^3 - 3x^2 - 13x - 1$

59. $f(x) = 2x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 31x + 15$

60. $f(x) = 3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 17x + 10$

En los ejercicios del 61 al 66 escriba una función polinomial con coeficientes reales cuyos ceros y sus multiplicidades incluyan las listadas.

61. Grado 3; ceros: $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 3$

62. Grado 2; -3 único cero real

63. Grado 4; ceros: $3, -2, 1/3, -1/2$

64. Grado 3; ceros: $1 + i, 2$

65. Grado 4; ceros: -2(multiplicidad 2), 4 (multiplicidad 2)

66. Grado 3; ceros: $2 - i, -1$ y $f(2) = 6$

En los ejercicios 67 y 68 describa cómo puede obtenerse la gráfica de la función dada mediante la transformación de la gráfica de la función recíproca $f(x) = 1/x$. Identifique las asíntotas horizontales y verticales.

67. $f(x) = \dfrac{-x + 7}{x - 5}$ **68.** $f(x) = \dfrac{3x + 5}{x + 2}$

En los ejercicios del 69 al 72 determine las asíntotas e intersecciones de la función y grafique ésta.

69. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$ **70.** $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7}{x^2 + x - 6}$

71. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x + 3}$ **72.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 7}{x + 3}$

En los ejercicios del 73 al 74 determine las intersecciones, y analice y dibuje la gráfica de la función racional dada.

73. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x + 5}{x + 2}$ **74.** $f(x) = \dfrac{-x^4 + x^2 + 1}{x - 1}$

En los ejercicios del 75 al 82 resuelva algebraicamente la ecuación o desigualdad, y respalde gráficamente.

75. $2x + \dfrac{12}{x} = 11$

76. $\dfrac{x}{x + 2} + \dfrac{5}{x - 3} = \dfrac{25}{x^2 - x - 6}$

77. $2x^3 + 3x^2 - 17x - 30 < 0$

78. $3x^4 + x^3 - 36x^2 + 36x + 16 \geq 0$

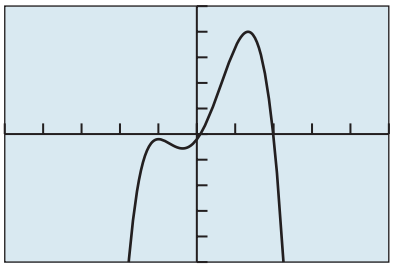
79. $\dfrac{x + 3}{x^2 - 4} \geq 0$ **80.** $\dfrac{x^2 - 7}{x^2 - x - 6} < 1$

81. $(2x - 1)^2|x + 3| \leq 0$ **82.** $\dfrac{(x - 1)|x - 4|}{\sqrt{x + 3}} > 0$

83. Escriba para aprender Determine si

$$f(x) = x^5 - 10x^4 - 3x^3 + 28x^2 + 20x - 2$$

tiene un cero fuera de la ventana de visualización. Explique (consulte la gráfica en la página siguiente).



[−5, 5] por [−50, 50]

84. Lanzamiento de piedras Larry utiliza una resortera (tirador) para lanzar una piedra directamente hacia arriba desde un punto a 6 pies del piso, con una velocidad inicial de 170 pies/s.

a) Determine una ecuación que modele la altura de la piedra t segundos después de que es lanzada, y grafique la ecuación (consulte el ejemplo 8 de la sección 2.1).

b) ¿Cuál es la altura máxima de la piedra? ¿Cuándo llegará a esa altura?

c) ¿Cuándo pegará con el piso la piedra?

85. Volumen de una caja Papelería Villareal CO. tiene un contrato para fabricar una caja sin tapa, que se construye quitando cuadrados de ancho x de las esquinas de una pieza de cartón de 30 por 70 pulg.

a) Determine una ecuación que modele el volumen de la caja.

b) Determine x de modo que la caja tenga un volumen de 5,800 pulg^3.

86. Ingeniería arquitectónica DeShanna, una ingeniera de J.P. Cook, Inc., termina las especificaciones estructurales para una viga de acero de 255 pies de longitud, fijada entre dos pilares a 50 pies por arriba del piso, como se muestra en la figura. Ella sabe que cuando un objeto de 250 lb se coloca a d pies al oeste del pilar, la viga se flexiona s pies, donde

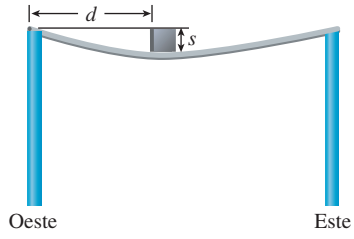
$$s = (8.5 \times 10^{-7})\,d^2(255 - d).$$

a) Grafique la función s.

b) ¿Cuáles son las dimensiones de una ventana de visualización que muestre una gráfica para los valores que tengan sentido en la situación de este problema?

c) ¿Cuál es la mayor cantidad de deflexión vertical s y dónde ocurre?

d) Escriba para aprender Proporcione un escenario posible que explique por qué la solución a la parte c) no sucede a la mitad de la viga.

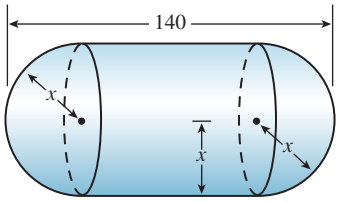


87. Contenedor para almacenar Un contenedor de líquidos de un camión tiene la forma de un cilindro con hemisferios en cada extremo, como se muestra en la figura. El cilindro y los hemisferios tienen el mismo radio. La longitud total del contenedor es 140 pies.

a) Determine el volumen V del contenedor como función del radio x.

b) Grafique la función $y = V(x)$.

c) ¿Cuál es el radio del contenedor con el mayor volumen posible? ¿Cuál es el volumen?



88. Becas Pell El préstamo máximo permitido bajo el programa federal de ayuda a estudiantes está dado en la tabla 2.24 para varios años. Haga que $x = 0$ represente a 1990, $x = 1$ represente a 1991, y así sucesivamente.

Tabla 2.24 Máxima beca Pell

Año	Monto (dólares)
1990	2300
1991	2400
1992	2400
1993	2300
1994	2300
1995	2340
1996	2470
1997	2700
1998	3000
1999	3125
2000	3300
2001	3750
2002	4000

Fuente: Departamento de Educación de Estados Unidos, de acuerdo con The Chronicle of Higher Education, 15 de febrero de 2002.

a) Determine un modelo de regresión cuadrática para los montos de Becas Pell, y grafíquela junto con un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine un modelo de regresión cuártica para los montos de Becas Pell, y grafíquela junto con un diagrama de dispersión de los datos.

c) Utilice cada ecuación de regresión para predecir el monto de una Beca Pell en 2006.

d) Escriba para aprender Determine el comportamiento en los extremos de los dos modelos de regresión. ¿Qué nos indica el comportamiento en los extremos con respecto a los montos de Becas Pell?

89. Gastos del Instituto Nacional de Salud La tabla 2.25 muestra el gasto en el Instituto Nacional de Salud para varios años. Haga que $x = 0$ represente a 1990, $x = 1$ represente a 1991, y así sucesivamente.

Tabla 2.25 Gasto en el Instituto Nacional de Salud

Año	Monto (miles de millones)
1993	10.3
1994	11.0
1995	11.3
1996	11.9
1997	12.7
1998	13.6
1999	15.6
2000	17.9
2001	20.5
2002	23.6

Fuente: Instituto Nacional de Salud, de acuerdo con The Chronicle of Higher Education, 26 de noviembre de 1999 y 15 de febrero de 2002.

a) Determine un modelo de regresión lineal y grafíquelo junto con un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine un modelo de regresión cuadrático y grafíquelo junto con un diagrama de dispersión de los datos.

c) Utilice los modelos de regresión lineal y cuadrático para estimar cuándo el monto en gasto excederá $30 mil millones.

90. Punto de equilibrio Artículos Deportivos MidTown ha determinado que, para ser competitivo, necesita vender sus espinilleras para fútbol soccer en $5.25 el par. Cuesta $4.32 producir cada par de espinilleras y los gastos generales de cada semana son $4,000.

a) Exprese el costo promedio, que incluya los gastos generales, de producir espinilleras como función del número x de espinilleras producidas cada semana.

b) Resuelva algebraicamente para determinar el número de espinilleras que debe venderse cada semana para obtener $8,000 en utilidades. Respalde gráficamente su trabajo.

91. Población de renos El número de renos P en cualquier instante t (en años), en una reserva federal, está dado por

$$P(t) = \frac{800 + 640t}{20 + 0.8t}.$$

a) Determine el número de renos cuando t es 15, 70 y 100.

b) Determine la asíntota horizontal de la gráfica de $y = P(t)$.

c) De acuerdo con el modelo, ¿cuál es la mayor población de renos posible?

92. Resistores La resistencia eléctrica R de dos resistores conectados en paralelo, con resistencias R_1 y R_2, está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

La resistencia total es 1.2 ohms. Sea $x = R_1$.

a) Exprese la segunda resistencia R_2 como función de x.

b) Determine R_2, si x es 3 ohms.

93. Mezcla ácida Suponga que x onzas de agua destilada se agregan a 50 onzas de ácido puro.

a) Exprese la concentración $C(x)$ *de la nueva mezcla como función de* x.

b) Utilice una gráfica para determinar cuánta agua destilada debe agregarse a ácido puro para producir una nueva solución que tenga menos de 60% de ácido.

c) Resuelva algebraicamente b).

94. Diseño industrial La fábrica de conservas Johnson envasará duraznos en latas cilíndricas de 1 L. Sea x el radio, en centímetros, de la base de la lata.

a) Exprese el área de la superficie, S, de la lata como función de x.

b) Determine el radio y la altura de la lata, si el área de la superficie es 900 cm^2.

c) ¿Cuáles dimensiones son posibles para la lata, si el área de la superficie será menor que 900 cm^2?

95. Diseño industrial Construcciones Gilman está contratada para construir un depósito rectangular con base cuadrada sin tapa. El depósito es para contener 1,000 $pies^3$ de agua. Sea x una longitud de la base.

a) Exprese el área de la superficie exterior, S, del depósito como función de x.

b) Determine el largo, ancho y la altura del depósito, si el área de la superficie exterior es 600 $pies^2$.

c) ¿Cuáles dimensiones son posibles para el depósito, si el área de la superficie exterior es menor que 600 $pies^2$?

CAPÍTULO 2 Proyecto

Modelación de la altura a la que rebota una pelota

Cuando una pelota rebota en una superficie plana, su altura con respecto al tiempo puede modelarse mediante una función cuadrática. Una forma de una función cuadrática es la forma del vértice:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

En esta ecuación y representa la altura de la pelota y x el tiempo transcurrido. Para este proyecto utilizará un dispositivo de detección de movimiento para reunir información de distancia y tiempo para una pelota que rebota; luego determinará un modelo matemático que describa la posición de la pelota.

Exploraciones

Tiempo total transcurrido (segundo)	Altura de la pelota (metros)	Tiempo total transcurrido (segundo)	Altura de la pelota (metros)
0.688	0	1.118	0.828
0.731	0.155	1.161	0.811
0.774	0.309	1.204	0.776
0.817	0.441	1.247	0.721
0.860	0.553	1.290	0.650
0.903	0.643	1.333	0.563
0.946	0.716	1.376	0.452
0.989	0.773	1.419	0.322
1.032	0.809	1.462	0.169
1.075	0.828		

1. Si reúne los datos empleando una CBL2 o CBR™, en su graficadora o en la pantalla de su computadora debe mostrarse una gráfica de la altura contra la distancia. Cualquier gráfico funcionará para este proyecto. Si no tiene acceso a una CBL2/CBR™, introduzca los datos de la tabla anterior en su graficadora o computadora. Cree un diagrama de dispersión de los datos.
2. Determine los valores para a, h y k de modo que la ecuación $y = a(x - h)^2 + k$ se ajuste a uno de los rebotes contenidos en los datos que graficó. Aproxime el vértice (h, k) con base a los datos y obtenga, en forma algebraica, el valor de a.
3. Cambie los valores de a, h y k en el modelo que encontró anteriormente y observe, en su graficadora o computadora, cómo cambia la gráfica de la función. Generalice cómo afecta cada uno de estos cambios a la gráfica.
4. Desarrolle la ecuación que encontró en la parte 2, de modo que esté en la forma cuadrática estándar $y = ax^2 + bx + c$.
5. Utilice su graficadora o computadora para seleccionar los datos del rebote que modeló antes y luego utilice regresión cuadrática para determinar un modelo para este conjunto de datos (consulte el instructivo de su graficadora para ver cómo llevar esto a cabo).
   ¿Cómo se compara este modelo con la forma cuadrática que encontró en la parte 4?
6. Complete el cuadrado para transformar el modelo de regresión a la forma del vértice de una cuadrática y compárelo con el primer modelo que encontró en la parte 2 (si lo desea, redondee los valores de a, b y c al milésimo más cercano antes de completar el cuadrado).

CAPÍTULO 3

Funciones exponencial, logística y logarítmica

3.1 Funciones exponencial y logística

3.2 Modelación exponencial y logística

3.3 Funciones logarítmicas y sus gráficas

3.4 Propiedades de las funciones logarítmicas

3.5 Modelación y resolución de ecuaciones

3.6 Matemáticas financieras



La intensidad de los sonidos que oímos está basada en la intensidad de la onda sonora asociada. Esta intensidad del sonido es la energía por unidad de tiempo de la onda sobre un área dada, medida en watts por metro cuadrado (W/m^2). La intensidad es máxima cerca de la fuente y disminuye conforme se aleja de ella, independientemente de si el sonido es el susurro de las hojas o música de rock. Debido al amplio rango de intensidades audibles, por lo común se convierten en *decibeles*, que tienen como base los logaritmos. Consulte la página 307.

Panorama general del capítulo 3

En este capítulo estudiaremos tres familias interrelacionadas de funciones: exponencial, logística y logarítmica. Las funciones polinomiales, funciones racionales y funciones potencia con exponentes racionales son **funciones algebraicas**; es decir, son funciones obtenidas al sumar, restar, multiplicar y dividir constantes y una variable independiente, y elevar expresiones a potencias enteras y extraer raíces. En este capítulo y el siguiente, exploraremos las **funciones trascendentales**, que van más allá —que trascienden— a estas operaciones algebraicas.

Al igual que sus primas algebraicas, las funciones exponencial, logística y logarítmica tienen muchas aplicaciones. Las exponenciales modelan crecimiento y decaimiento con respecto al tiempo, tal como el crecimiento *sin restricciones* de poblaciones y el decaimiento de sustancias radiactivas. Las funciones logísticas modelan crecimiento *restringido* de poblaciones, ciertas reacciones químicas y la propagación de rumores y enfermedades. Las funciones logarítmicas son la base de la escala Richter de la intensidad de terremotos, la escala de acidez pH y la medida del sonido en decibeles.

El capítulo termina con un estudio de matemáticas financieras, una aplicación de las funciones exponenciales y logarítmicas que se utiliza con frecuencia cuando se realizan inversiones.

3.1 Funciones exponencial y logística

Aprenderá acerca de...

- Las funciones exponenciales y sus gráficas
- La base natural *e*
- Las funciones logísticas y sus gráficas
- Los modelos de población

. . . porque

Las funciones exponencial y logística modelan muchos patrones de crecimiento, incluyendo el de poblaciones humanas y animales.

Funciones exponenciales y sus gráficas

Cada una de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$ incluyen una base elevada a un exponente, pero los papeles están al revés:

- Para $f(x) = x^2$, la base es la variable x y el exponente es la constante 2; f es una conocida función monomial y potencia.
- Para $g(x) = 2^x$, la base es la constante 2 y el exponente es la variable x; g es una *función exponencial*. Consulte la figura 3.1.

DEFINICIÓN Función exponencial

Sean a y b números reales constantes. Una **función exponencial** en x es una función que puede escribirse en la forma

$$f(x) = a \cdot b^x,$$

donde a es diferente de cero, b es positiva y $b \neq 1$. La constante a es el *valor inicial* de f (el valor en $x = 0$) y b es la **base**.

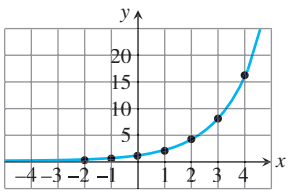


FIGURA 3.1 Bosquejo de $g(x) = 2^x$.

Las funciones exponenciales están definidas y son continuas para todos los números reales. Es importante reconocer si una función es una función exponencial.

EJEMPLO 1 Identificación de funciones exponenciales

a) $f(x) = 3^x$ es una función exponencial con un valor inicial de 1 y base de 3.

b) $g(x) = 6x^{-4}$ *no* es una función exponencial, ya que la base x es una variable y el exponente es una constante; g es una función potencia.

c) $h(x) = -2 \cdot 1.5^x$ es una función exponencial con un valor inicial de -2 y base de 1.5.

d) $k(x) = 7 \cdot 2^{-x}$ es una función exponencial con un valor inicial de 7 y base de 1/2, ya que $2^{-x} = (2^{-1})^x = (1/2)^x$.

e) $q(x) = 5 \cdot 6^{\pi}$ *no* es una función exponencial porque el exponente π es una constante; q es una función constante.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Una forma de evaluar una función exponencial, cuando las entradas son números racionales, es utilizar las propiedades de los exponentes.

EJEMPLO 2 Cálculo de valores de la función exponencial para entradas de números racionales

Para $f(x) = 2^x$,

a) $f(4) = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$

b) $f(0) = 2^0 = 1$

c) $f(-3) = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0.125$

d) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2^{1/2} = \sqrt{2} = 1.4142\ldots$

e) $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 2^{-3/2} = \dfrac{1}{2^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} = 0.35355\ldots$

Ahora resuelva el ejercicio 7.

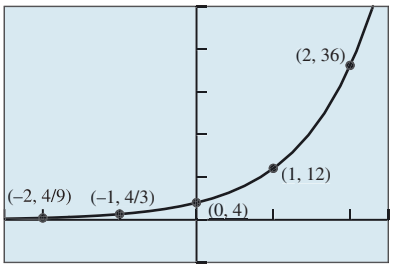
No hay forma de utilizar las propiedades de los exponentes para expresar el valor de una función exponencial para entradas *irracionales*. Por ejemplo, si $f(x) = 2^x$, $f(\pi) = 2^{\pi}$, pero, ¿qué significa 2^{π}? Utilizando propiedades de exponentes, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $2^{3.1} = 2^{31/10} = \sqrt[10]{2^{31}}$. Así que podemos encontrar un significado para 2^{π} mediante aproximaciones *racionales* cada vez más cercanas a π, como se muestra en la tabla 3.1.

Tabla 3.1 Valores de $f(x) = 2^x$ para números racionales x que se aproximan a $\pi = 3.14159265\ldots$

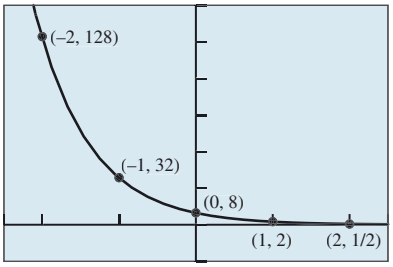
x	3	3.1	3.14	3.141	3.1415	3.14159
2^x	8	8.5...	8.81...	8.821...	8.8244...	8.82496...

Podemos concluir que $f(\pi) = 2^{\pi} \approx 8.82$, lo cual podríamos encontrar directamente usando una graficadora. Los métodos de cálculo permiten una definición más rigurosa de funciones exponenciales que la dada aquí; una definición que permite entradas tanto racionales como irracionales.

La forma en que las funciones exponenciales cambian las hacen útiles en aplicaciones. Este patrón de cambio puede observarse mejor en forma tabular.



[–2.5, 2.5] por [–10, 50]
a)



[–2.5, 2.5] por [–25, 150]
b)

FIGURA 3.2 Gráficas de a) $g(x) = 4 \cdot 3^x$ y b) $h(x) = 8 \cdot (1/4)^x$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Determinación de una función exponencial a partir de su tabla de valores

Determine fórmulas para las funciones exponenciales g y h cuyos valores se dan en la tabla 3.2

Tabla 3.2 Valores para dos funciones exponenciales

x	$g(x)$	$h(x)$
−2	4/9	128
	$\times 3$	$\times \frac{1}{4}$
−1	4/3	32
	$\times 3$	$\times \frac{1}{4}$
0	4	8
	$\times 3$	$\times \frac{1}{4}$
1	12	2
	$\times 3$	$\times \frac{1}{4}$
2	36	1/2

SOLUCIÓN Puesto que g es exponencial, $g(x) = a \cdot b^x$. Como $g(0) = 4$, el valor inicial a es 4. Ya que $g(1) = 4 \cdot b^1 = 12$, la base b es 3. Así que,

$$g(x) = 4 \cdot 3^x.$$

Puesto que h es exponencial, $h(x) = a \cdot b^x$. Como $h(0) = 8$, el valor inicial a es 8. Ya que $h(1) = 8 \cdot b^1 = 2$, la base b es 1/4. Así que,

$$h(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

La figura 3.2 muestra las gráficas de estas funciones que pasan por los puntos cuyas coordenadas se dan el la tabla 3.2. ***Ahora resuelva el ejercicio 11.***

Observe los patrones en las columnas de $g(x)$ y $h(x)$ en la tabla 3.2. Los valores de $g(x)$ aumentan en un factor de 3 y los valores de $h(x)$ se reducen en un factor de 1/4 conforme agregamos 1 a x, y se pasa al siguiente renglón de la tabla. En cada caso, el factor de cambio es la base de la función exponencial. Este patrón se generaliza a todas las funciones exponenciales, como se ilustra en la tabla 3.3.

Tabla 3.3 Valores para una función exponencial general $f(x) = a \cdot b^x$

x	$a \cdot b^x$
−2	ab^{-2}
	$\times b$
−1	ab^{-1}
	$\times b$
0	a
	$\times b$
1	ab
	$\times b$
2	ab^2

En la tabla 3.3, conforme x aumenta en 1, el valor de la función se multiplica por la base b. Esta relación conduce a la *fórmula recursiva* siguiente.

Crecimiento y decaimiento exponencial

Para cualquier función $f(x) = a \cdot b^x$ y cualquier número real,

$$f(x + 1) = b \cdot f(x).$$

Si $a > 0$ y $b > 1$, la función f es creciente y es una **función de crecimiento exponencial**. La base b es su **factor de crecimiento**.

Si $a > 0$ y $b < 1$, f es decreciente y es una **función de decaimiento exponencial**. La base b es su **factor de decaimiento**.

En el ejemplo 3, g es una función de crecimiento exponencial y h es una función de decaimiento exponencial. Conforme x aumenta en 1, $g(x) = 4 \cdot 3^x$ crece en un factor de 3, y $h(x) = 8 \cdot (1/4)^x$ decae en un factor de 1/4. La base de una función exponencial, al igual que la pendiente de una función lineal, nos dice si la función es creciente o decreciente y en cuánto.

Hasta ahora, hemos centrado nuestra atención en los aspectos algebraicos y numéricos de las funciones exponenciales. Ahora ponemos nuestra atención en las gráficas de estas funciones.

EXPLORACIÓN 1 Gráficas de funciones exponenciales

1. Grafique cada función en la ventana de visualización $[-2, 2]$ por $[-1, 6]$.

a) $y_1 = 2^x$ **b)** $y_2 = 3^x$ **c)** $y_3 = 4^x$ **d)** $y_4 = 5^x$

- ¿Qué punto tienen en común las cuatro gráficas?
- Analice las funciones, con respecto a dominio, rango, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, simetría, acotamiento, máximos y mínimos, asíntotas y comportamiento en los extremos.

2. Grafique cada función en la ventana de visualización $[-2, 2]$ por $[-1, 6]$.

a) $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **b)** $y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $y_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **d)** $y_4 = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

- ¿Cuál punto es común a las cuatro gráficas?
- Analice las funciones, con respecto a dominio, rango, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, simetría, acotamiento, máximos y mínimos, asíntotas y comportamiento en los extremos.

Resumimos lo que hemos aprendido acerca de las funciones exponenciales con un valor inicial de 1.

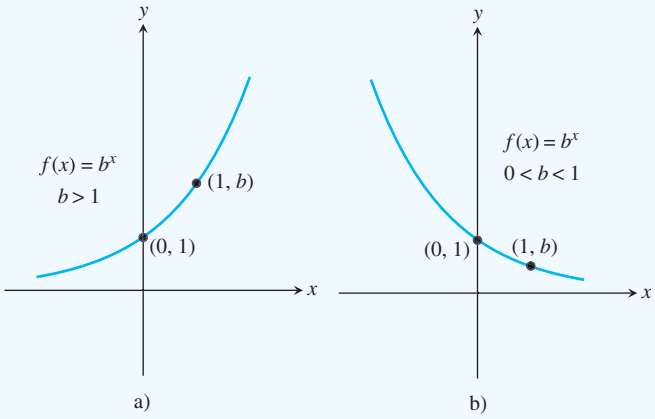


FIGURA 3.3 Gráficas de $f(x) = b^x$ para a) $b > 1$ y b) $0 < b < 1$.

Funciones exponenciales $f(x) = b^x$

Dominio: Todos los reales
Rango: $(0, \infty)$
Continua
No tiene simetría: no es par ni impar
Acotada por abajo, pero no por arriba
No tiene máximo ni mínimo
Asíntota horizontal: $y = 0$
Ni tiene asíntotas verticales

Si $b > 1$ (consulte la figura 3.3 a)) entonces,

- f es una función creciente,
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si $0 < b < 1$ (consulte figura 3.3 b)) entonces,

- f es una función decreciente,
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Las traslaciones, las reflexiones, los alargamientos y las compresiones estudiados en la sección 1.5 junto con nuestro conocimiento de las gráficas de funciones exponenciales básicas, nos permiten predecir las gráficas de las funciones del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Transformación de funciones exponenciales

Describa cómo transformar la gráfica de $f(x) = 2^x$ en la gráfica de la función dada. Bosqueje, a mano, las gráficas y respalde su respuesta con una graficadora.

a) $g(x) = 2^{x-1}$ **b)** $h(x) = 2^{-x}$ **c)** $k(x) = 3 \cdot 2^x$

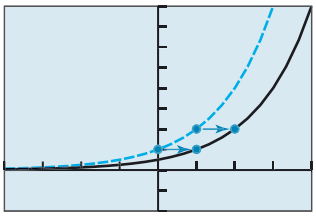
SOLUCIÓN

a) La gráfica de $g(x) = 2^{x-1}$ se obtiene mediante la traslación, una unidad hacia la derecha, de la gráfica de $f(x) = 2^x$ (figura 3.4 a)).

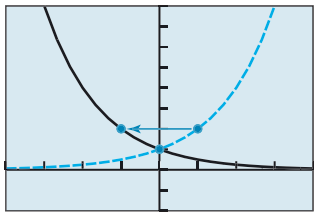
b) Podemos obtener la gráfica de $h(x) = 2^{-x}$ mediante la reflexión de la gráfica de $f(x) = 2^x$ con respecto al eje y (figura 3.4 b)). Puesto que $2^{-x} = (2^{-1})^x = (1/2)^x$, también podemos considerar a h como una función exponencial con un valor inicial de 1 y una base de 1/2.

c) Podemos obtener la gráfica de $k(x) = 3 \cdot 2^x$ mediante un alargamiento vertical de $f(x) = 2^x$ en un factor de 3 (figura 3.4 c)).

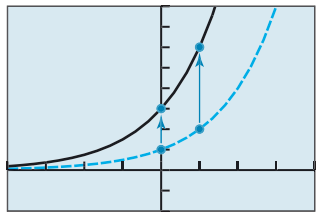
Ahora resuelva el ejercicio 15.



[–4, 4] por [–2, 8]
a)



[–4, 4] por [–2, 8]
b)



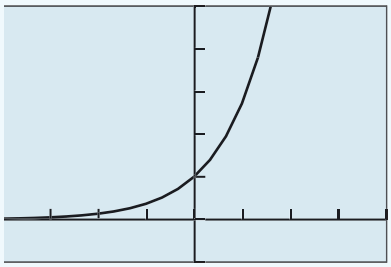
[–4, 4] por [–2, 8]
c)

FIGURA 3.4 La gráfica de $f(x) = 2^x$ junto con a) $g(x) = 2^{x-1}$, b) $h(x) = 2^{-x}$, y c) $k(x) = 3 \cdot 2^x$ (ejemplo 4).

La base natural *e*

La función $f(x) = e^x$ es una de las funciones básicas presentadas en la sección 1.3 y es una función de crecimiento exponencial.

FUNCIÓN BÁSICA La función exponencial



[–4, 4] por [–1, 5]

FIGURA 3.5 La gráfica de $f(x) = e^x$.

$f(x) = e^x$
Dominio: Todos los reales
Rango: $(0, \infty)$
Continua
Creciente para toda x
No tiene simetría
Acotada por abajo, pero no por arriba
No tiene máximo ni mínimo
Asíntota horizontal: $y = 0$
No tiene asíntotas verticales
Comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ y $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

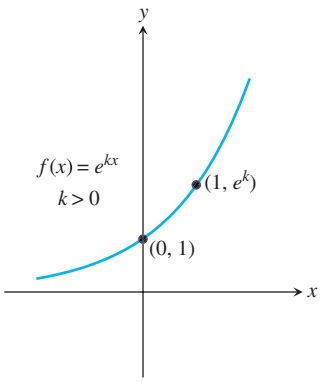


Puesto que $f(x) = e^x$ es creciente, es una función de crecimiento exponencial, por lo que $e > 1$. ¿Pero, ¿qué es e? y ¿qué hace de esta función exponencial *la* función exponencial?

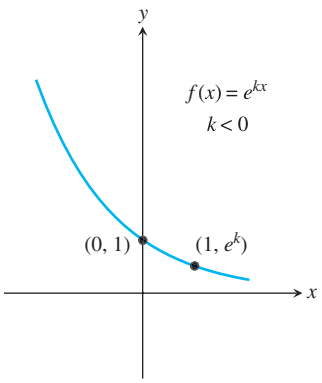
La letra e es la letra inicial del apellido de Leonhard Euler (1707-1783), quien introdujo la notación. Puesto que $f(x) = e^x$ tiene propiedades especiales de cálculo que simplifican muchos cálculos, e es la *base natural* de las funciones exponenciales para propósitos de cálculo y $f(x) = e^x$ se considera la *función exponencial natural*.

DEFINICIÓN La base natural *e*

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$



a)



b)

FIGURA 3.6 Gráficas de $f(x) = e^{kx}$ para a) $k > 0$ y b) $k < 0$.

No podemos calcular directamente el número irracional e pero, mediante la definición anterior, podemos obtener en forma sucesiva aproximaciones cada vez más cercanas a e, como se muestra en la tabla 3.4. Al continuar el proceso de la tabla 3.4, con una computadora suficientemente precisa, puede demostrarse que $e \approx 2.718281828459$.

Tabla 3.4 Aproximaciones a la base natural *e*

x	1	10	100	1,000	10,000	100,000
$(1 + 1/x)^x$	2	2.5. . .	2.70. . .	2.716. . .	2.7181. . .	2.71826. . .

Por lo general, estamos más interesados en la función exponencial $f(x) = e^x$ y variaciones de esta función que en el número irracional e. De hecho, *cualquier* función exponencial se puede expresar en términos de la base natural e.

TEOREMA Funciones exponenciales y la base de *e*

Cualquier función exponencial $f(x) = a \cdot b^x$ puede rescribirse como

$$f(x) = a \cdot e^{kx},$$

para una elección apropiada de la constante real k.

Si $a > 0$ y $k > 0$, $f(x) = a \cdot e^{kx}$ es una función de crecimiento exponencial (consulte la figura 3.6 a)).

Si $a > 0$ y $k < 0$, $f(x) = a \cdot e^{kx}$ es una función de decaimiento exponencial (consulte la figura 3.6 b)).

En la sección 3.3 desarrollaremos un poco de matemáticas de modo que, para cualquier número $b \neq 1$, con facilidad pueda determinarse el valor de k tal que $e^{kx} = b^x$. Mientras tanto, podemos utilizar métodos gráficos y numéricos para aproximar k, como lo descubrirá en la exploración 2.

EXPLORACIÓN 2 Sección de *k* para que $e^{kx} = 2^x$

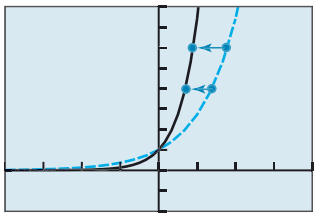
1. Grafique $f(x) = 2^x$ en la ventana de visualización $[-4, 4]$ por $[2, -8]$.
2. De una en una, sobreponga las gráficas de $g(x) = e^{kx}$ para $k = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ y 0.8. ¿Para cuál de estos valores de k la gráfica se acerca más a la gráfica de f?
3. Utilizando tablas determine el valor de k con 3 decimales, para el cual los valores de g se aproximan mucho más a los valores de f.

EJEMPLO 5 Transformación de funciones exponenciales

Describa cómo transformar la gráfica de $f(x) = e^x$ en la gráfica de la función dada. Bosqueje las gráficas y respalde su respuesta con una graficadora.

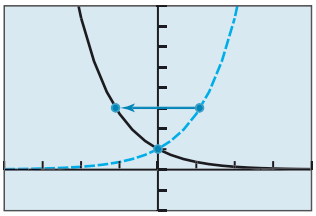
a) $g(x) = e^{2x}$ **b)** $h(x) = e^{-x}$ **c)** $k(x) = 3e^x$

continúa



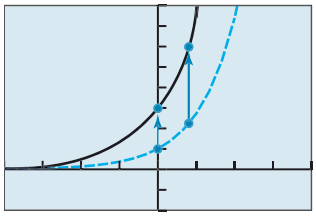
[–4, 4] por [–2, 8]

a)



[–4, 4] por [–2, 8]

b)



[–4, 4] por [–2, 8]

c)

FIGURA 3.7 La gráfica de $f(x) = e^x$ junto con a) $g(x) = e^{2x}$, b) $h(x) = e^{-x}$ y c) $k(x) = 3e^x$ (ejemplo 5).

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $g(x) = e^{2x}$ se obtiene mediante una compresión horizontal de la gráfica de $f(x) = e^x$ en un factor de 2 (consulte la figura 3.7a).

b) Podemos obtener la gráfica de $h(x) = e^{-x}$ mediante una reflexión de la gráfica de $f(x) = e^x$ con respecto al eje y (figura 3.7b).

c) Podemos obtener la gráfica de $k(x) = 3e^x$ mediante un alargamiento vertical, en un factor de 3, de la gráfica de $f(x) = e^x$ (figura 3.7c).

Ahora resuelva el ejercicio 21.

Funciones logísticas y sus gráficas

El crecimiento exponencial es *sin restricciones*. Una función de crecimiento exponencial aumenta a una razón siempre creciente y no está acotada por arriba. Sin embargo, en muchas situaciones de crecimiento, existe un límite para el crecimiento posible. Una planta puede crecer sólo hasta cierta altura; el número de peces de colores en un acuario está limitado por el tamaño del acuario. En tales situaciones, el crecimiento con frecuencia inicia de una manera exponencial, pero eventualmente desciende y la gráfica se estabiliza. La función de crecimiento asociada está acotada, tanto por arriba como por abajo, por asíntotas horizontales.

DEFINICIÓN Funciones de crecimiento logístico

Sean a, b, c y k constantes positivas, con $b < 1$. Una **función de crecimiento logístico** en x es una función que puede escribirse en la forma

$$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot b^x} \quad \text{o} \quad f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-kx}}$$

donde la constante c es el **límite de crecimiento**.

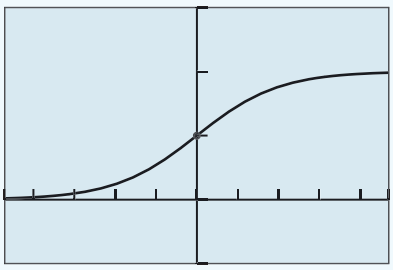
Si $b > 1$ o $k < 1$, estas fórmulas dan lugar a **funciones de decaimiento logístico**. A menos que se indique algo diferente, todas *las funciones logísticas* de este libro serán funciones de crecimiento logístico.

Haciendo $a = c = k = 1$, obtenemos la **función logística**

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Esta función, aunque está relacionada con la función exponencial e^x, *no puede* obtenerse de e^x mediante traslaciones, reflexiones y compresiones o alargamientos horizontales y verticales. Así que damos una introducción formal a la función logística:

FUNCIÓN BÁSICA Función logística



[–4.7, 4.7] por [–0.5, 1.5]

FIGURA 3.8 La gráfica de $f(x) = 1/(1 + e^{-x})$.

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Dominio: Todos los reales
Rango: (0, 1)
Continua
Creciente para toda x
Simetría con respecto a (0, 1/2), pero no es par ni impar
Acotada por arriba y por abajo
No tiene máximo ni mínimo
Asíntotas horizontales: $y = 0$ y $y = 1$
No tiene asíntotas verticales
Comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

Todas las funciones de crecimiento logístico tienen gráficas muy parecidas a la función logística básica. Su comportamiento en los extremos siempre se describe por las ecuaciones

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to\infty} f(x) = c,$$

donde c es el límite de crecimiento (consulte el ejercicio 73). Todas las funciones logísticas están acotadas por sus asíntotas horizontales, $y = 0$ y $y = c$, y tienen un rango de $(0, c)$. Aunque toda función logística es simétrica con respecto al punto de su gráfica con coordenada y igual a $c/2$, este punto de simetría, por lo general, no es la intersección y, como podemos ver en el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Graficación de las funciones de crecimiento logístico

Grafique la función. Determine la intersección y y las asíntotas horizontales.

a) $f(x) = \dfrac{8}{1 + 3 \cdot 0.7^x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{20}{1 + 2e^{-3x}}$

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $f(x) = 8/(1 + 3 \cdot 0.7^x)$ se muestra en la figura 3.9 a). La intersección y es

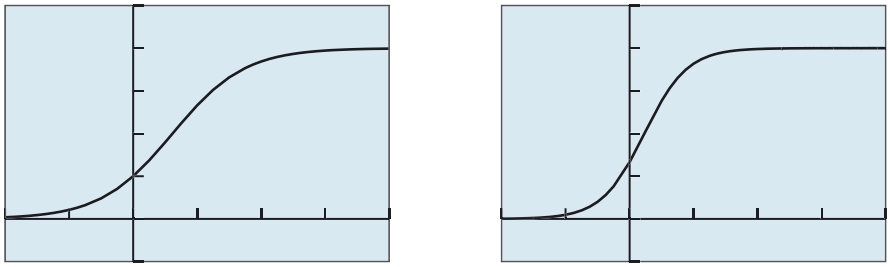
$$f(0) = \frac{8}{1 + 3 \cdot 0.7^0} = \frac{8}{1 + 3} = 2.$$

Puesto que el límite de crecimiento es 8, las asíntotas horizontales son $y = 0$ y $y = 8$.

b) La gráfica de $g(x) = 20/(1 + 2e^{-3x})$ se muestra en la figura 3.9 b). La intersección y es

$$g(0) = \frac{20}{1 + 2e^{-3 \cdot 0}} = \frac{20}{1 + 2} = 20/3 \approx 6.67.$$

Puesto que el límite de crecimiento es 20, las asíntotas horizontales son $y = 0$ y $y = 20$. ***Ahora resuelva el ejercicio 41.***



[–10, 20] por [–2, 10]
a)

[–2, 4] por [–5, 25]
b)

FIGURA 3.9 Las gráficas de a) $f(x) = 8/(1 + 3 \cdot 0.7^x)$ y b) $g(x) = 20/(1 + 2e^{-3x})$ (ejemplo 6).

Modelos de población

Las funciones exponenciales y las logísticas tienen muchas aplicaciones. Un área en donde ambos tipos de funciones son utilizadas es en la modelación de poblaciones. Entre 1990 y 2000, tanto Phoenix como San Antonio pasaron la marca de

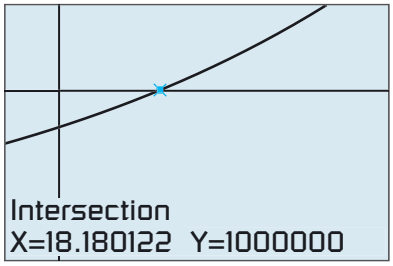
UNA OBSERVACIÓN SOBRE DATOS POBLACIONALES

Cuando la Oficina de Censos de Estados Unidos reporta una población para un año dado, generalmente se refiere a la población a mitad de año, alrededor del 1 de julio. Supondremos que éste es el caso cuando interpretemos los resultados de problemas de población.

Tabla 3.5 Población de San José, California

Año	Población
1990	782,248
2000	895,193

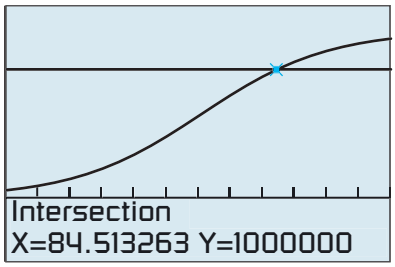
Fuente: World Almanac and Book of Facts 2005.



[–10, 60] por [0, 1,500,000]

FIGURA 3.10 Un modelo poblacional para San José, California (ejemplo 7).





[0, 120] por [−500,000, 1,500,000]

FIGURA 3.11 Un modelo poblacional para Dallas, Texas (ejemplo 8).

1 millón de habitantes. Con sus industrias en Silicon Valley, San José, California se perfila como la siguiente ciudad en Estados Unidos destinada a sobrepasar 1 millón de residentes. Cuando la población de una ciudad crece rápidamente, como en el caso de San José, ¿el modelo de crecimiento exponencial es razonable?

EJEMPLO 7 Modelación de la población de San José

Usando los datos de la tabla 3.5 y suponiendo el crecimiento exponencial, ¿cuándo la población de San José rebasará 1 millón de personas?

SOLUCIÓN

Modele Sea $P(t)$ la población de San José t años después de 1990. Puesto que —suponemos— P es exponencial, $P(t) = P_0 \cdot b^t$, donde P_0 es la población inicial (1990) de 782,248. Con base en la tabla 3.5, vemos que $P(10) = 782{,}248b^{10} = 895{,}193$. Por lo que,

$$b = \sqrt[10]{\frac{895{,}193}{782{,}248}} \approx 1.0136$$

y $P(t) = 782{,}248 \cdot 1.0136^t$.

Resuelva gráficamente La figura 3.10 muestra que este modelo de población interseca a $y = 1{,}000{,}000$ cuando la variable independiente es de alrededor de 18.18.

Interprete Puesto que 1990 + 18 = 2008, si el crecimiento de su población es exponencial San José sobrepasará la marca de un millón en 2008.

Ahora resuelva el ejercicio 51.

Aunque la población de San José está incrementándose, en otras ciudades importantes como Dallas, el crecimiento de la población está reduciéndose. La una vez aglomerada Dallas ahora está *restringiéndose* por sus ciudades vecinas. *Con frecuencia, una función logística es un modelo más apropiado para el crecimiento restringido*, tal como el crecimiento que Dallas está experimentando.

EJEMPLO 8 Modelación de la población de Dallas

Con base en información de censos recientes, un modelo logístico para la población de Dallas, t años después de 1900, es el siguiente:

$$P(t) = \frac{1{,}301{,}642}{1 + 21.602e^{-0.05054t}}$$

De acuerdo con este modelo, ¿cuándo la población fue de un millón?

SOLUCIÓN

La figura 3.11 muestra que el modelo de población interseca $y = 1{,}000{,}000$ cuando la variable independiente es alrededor de 84.51. Como 1900 + 85 = 1985, si la población de Dallas ha seguido este modelo logístico, su población fue de 1 millón al inicio de 1985.

Ahora resuelva el ejercicio 55.

REPASO RÁPIDO 3.1 *(Para obtener ayuda, consulte las secciones A.1 y R.1)*

En los ejercicios del 1 al 4 evalúe la expresión sin utilizar una calculadora.

1. $\sqrt[3]{-216}$

2. $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$

3. $27^{2/3}$

4. $4^{5/2}$

En los ejercicios del 5 al 8 reescriba la expresión usando un solo exponente.

5. $(2^{-3})^4$ **6.** $(3^4)^{-2}$

7. $(a^{-2})^3$ **8.** $(b^{-3})^{-5}$

En los ejercicios 9 y 10 utilice una calculadora para evaluar la expresión.

9. $\sqrt[5]{-5.37824}$ **10.** $\sqrt[4]{92.3521}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.1

En los ejercicios del 1 al 6, ¿cuáles de las siguientes son funciones exponenciales? Para aquellas que lo sean, indique el valor inicial y la base; para aquellas que no, explique la razón.

1. $y = x^8$

2. $y = 3^x$

3. $y = 5^x$

4. $y = 4^2$

5. $y = x^{\sqrt{x}}$

6. $y = x^{1.3}$

En los ejercicios del 7 al 10 calcule el valor exacto de la función para el valor x dado sin utilizar una calculadora.

7. $f(x) = 3 \cdot 5^x$, para $x = 0$

8. $f(x) = 6 \cdot 3^x$, para $x = -2$

9. $f(x) = -2 \cdot 3^x$, para $x = 1/3$

10. $f(x) = 8 \cdot 4^x$, para $x = -3/2$

En los ejercicios 11 y 12 determine una fórmula para la función exponencial cuyos valores se dan en la tabla 3.6.

11. $f(x)$

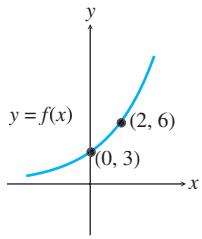
12. $g(x)$

Tabla 3.6 Valores para las dos funciones exponenciales

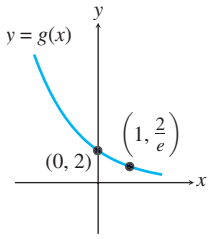
x	$f(x)$	$g(x)$
-2	6	108
-1	3	36
0	3/2	12
1	3/4	4
2	3/8	4/3

En los ejercicios 13 y 14 determine una fórmula para la función exponencial cuya gráfica se muestra en la figura.

13. $f(x)$



14. $g(x)$



En los ejercicios del 15 al 24 describa cómo transformar la gráfica de f en la gráfica de g. Bosqueje ambas gráficas y respalde su respuesta con una graficadora.

15. $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-3}$

16. $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{x+4}$

17. $f(x) = 4^x$, $g(x) = 4^{-x}$

18. $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{5-x}$

19. $f(x) = 0.5^x$, $g(x) = 3 \cdot 0.5^x + 4$

20. $f(x) = 0.6^x$, $g(x) = 2 \cdot 0.6^{3x}$

21. $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-2x}$

22. $f(x) = e^x$, $g(x) = -e^{-3x}$

23. $f(x) = e^x$, $g(x) = 2e^{3-3x}$

24. $f(x) = e^x$, $g(x) = 3e^{2x} - 1$

En los ejercicios del 25 al 30 **a)** relacione la función dada con su gráfica. **b) Escriba para aprender** Explique cómo hacer la elección sin utilizar una graficadora.

25. $y = 3^x$

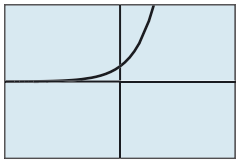
26. $y = 2^{-x}$

27. $y = -2^x$

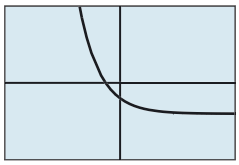
28. $y = -0.5^x$

29. $y = 3^{-x} - 2$

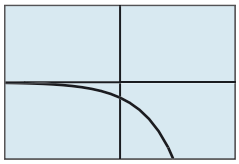
30. $y = 1.5^{x} - 2$



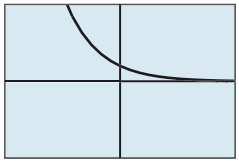
a)



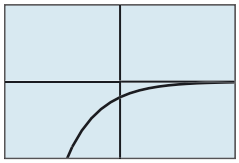
b)



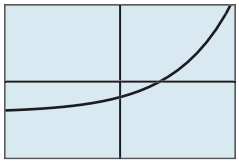
c)



d)



e)



f)

En los ejercicios del 31 al 34 indique si la función es una función de crecimiento exponencial o una función de decaimiento exponencial y, utilizando límites, describa su comportamiento en los extremos.

31. $f(x) = 3^{-2x}$

32. $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^{x}$

33. $f(x) = 0.5^{x}$

34. $f(x) = 0.75^{-x}$

En los ejercicios del 35 al 38 resuelva gráficamente la desigualdad.

35. $9^{x} < 4^{x}$

36. $6^{-x} > 8^{-x}$

37. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

38. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

Actividad en grupo En los ejercicios 39 y 40 utilice las propiedades de los exponentes para probar que dos de las tres funciones exponenciales dadas son idénticas. Apoye gráficamente.

39. a) $y_1 = 3^{2x+4}$

b) $y_2 = 3^{2x} + 4$

c) $y_3 = 9^{x+2}$

40. a) $y_1 = 4^{3x-2}$

b) $y_2 = 2(2^{3x-2})$

c) $y_3 = 2^{3x-1}$

En los ejercicios del 41 al 44 utilice una graficadora para graficar la función. Determine la intersección y y las asíntotas horizontales.

41. $f(x) = \dfrac{12}{1 + 2 \cdot 0.8^{x}}$

42. $f(x) = \dfrac{18}{1 + 5 \cdot 0.2^{x}}$

43. $f(x) = \dfrac{16}{1 + 3e^{-2x}}$

44. $g(x) = \dfrac{9}{1 + 2e^{-x}}$

En los ejercicios del 45 al 50 grafique la función y analícela con respecto a dominio, rango, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, simetría, acotamiento, mínimos/máximos, asíntotas y comportamiento en los extremos.

45. $f(x) = 3 \cdot 2^{x}$

46. $f(x) = 4 \cdot 0.5^{x}$

47. $f(x) = 4 \cdot e^{3x}$

48. $f(x) = 5 \cdot e^{-x}$

49. $f(x) = \dfrac{5}{1 + 4 \cdot e^{-2x}}$

50. $f(x) = \dfrac{6}{1 + 2 \cdot e^{-x}}$

51. Crecimiento poblacional Utilizando la información en la tabla 3.7 y suponiendo que el crecimiento es exponencial, ¿cuándo la población de Austin superará 800,000 personas?

52. Crecimiento poblacional Utilizando la información en la tabla 3.7 y suponiendo que el crecimiento es exponencial, ¿cuándo la población de Columbus superará 800,000 personas?

53. Crecimiento poblacional Utilizando la información en la tabla 3.7 y suponiendo que el crecimiento es exponencial, ¿cuándo la población de Austin y Columbus será igual?

54. Crecimiento poblacional Utilizando la información en la tabla 3.7 y suponiendo que el crecimiento es exponencial, ¿cuál ciudad (Austin o Columbus) tendrá primero una población de un millón y en qué año?



Tabla 3.7 Poblaciones de dos ciudades importantes de Estados Unidos

Ciudad	Población en 1990	Población en 2000
Austin, Texas	465,622	656,562
Columbus, Ohio	632,910	711,265

Fuente: World Almanac and Book of Facts 2005.

55. Crecimiento poblacional Con la información del censo del siglo XX para Estados Unidos, la población de Ohio puede modelarse mediante $P(t) = 12.79/(1 + 2.402e^{-0.0309x})$, donde P es la población en millones y t es el número de años desde 1900. Con base en este modelo, la población de Ohio, ¿cuándo fue de 10 millones?

56. Crecimiento poblacional Con los datos del censo de Estados Unidos del siglo XX, la población de Nueva York puede modelarse mediante

$$P(t) = \frac{19.875}{1 + 57.993e^{-0.035005t}},$$

donde P es la población en millones y t es el número de años desde 1800. Con base en este modelo,

a) ¿Cuál fue la población en 1850?

b) ¿Cuál será la población del estado de Nueva York en 2010?

c) ¿Cuál será la *máxima población sustentable* (límite de crecimiento) de Nueva York?

57. Crecimiento de bacterias El número B de bacterias en el cultivo de una caja de Petri al cabo de t horas está dado por

$$B = 100e^{0.693t}.$$

a) ¿Cuál fue el número inicial de bacterias en el cultivo?

b) Después de 6 horas, ¿cuántas bacterias estarán presentes?

58. Fechado con carbono La cantidad, C, en gramos de carbono 14 presente en cierta sustancia después de t años está dada por

$$C = 20e^{-0.0001216t}.$$

a) ¿Cuál es la cantidad inicial de carbono 14 presente?

b) ¿Cuánto quedará después de 10,400 años? ¿Cuándo la cantidad restante será de 10 g?

Preguntas de examen estandarizado

59. Verdadero o falso Toda función exponencial es estrictamente creciente. Justifique su respuesta.

60. Verdadero o falso Toda función logística tiene dos asíntotas horizontales. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 61 al 64 resuelva los problemas sin usar calculadora.

61. Opción múltiple ¿Cuál de las funciones siguientes es exponencial?

A) $f(x) = a^2$

B) $f(x) = x^3$

C) $f(x) = x^{2/3}$

D) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

E) $f(x) = 8^x$

62. Opción múltiple Todas las funciones de la forma $f(x) = b^x$ $(b > 0)$, ¿qué punto tienen en común?

A) (1, 1)

B) (1, 0)

C) (0, 1)

D) (0, 0)

E) (−1, −1)

63. Opción múltiple El factor de crecimiento para $f(x) = 4 \cdot 3^x$ es

A) 3. **B)** 4. **C)** 12.

D) 64. **E)** 81.

64. Opción múltiple Para $x > 0$, ¿cuál de las siguientes es **verdadera**?

A) $3^x > 4^x$ **B)** $7^x > 5^x$ **C)** $(1/6)^x > (1/2)^x$

D) $9^{-x} > 8^{-x}$ **E)** $0.17^x > 0.32^x$

Exploraciones

65. Grafique cada función y analícela con respecto a dominio, rango, comportamiento creciente o decreciente, cotas, mínimos/máximos, asíntotas y comportamiento en los extremos.

a) $f(x) = x \cdot e^x$ **b)** $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

66. Utilice las propiedades de los exponentes para resolver cada ecuación. Respalde gráficamente.

a) $2^x = 4^2$ **b)** $3^x = 27$

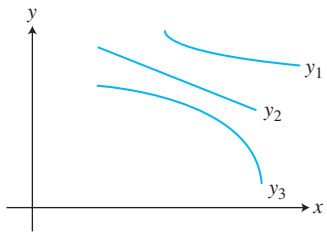
c) $8^{x/2} = 4^{x+1}$ **d)** $9^x = 3^{x+1}$

Ampliación de las ideas

67. Escriba para aprender La tabla 3.8 proporciona valores de las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$. También se muestran tres gráficas diferentes.

Tabla 3.8 Datos para dos funciones

x	$f(x)$	$g(x)$
1.0	5.50	7.40
1.5	5.35	6.97
2.0	5.25	6.44
2.5	5.17	5.76
3.0	5.13	4.90
3.5	5.09	3.82
4.0	5.06	2.44
4.5	5.05	0.71



a) ¿Cuál curva, de las mostradas, se parece mucho a la gráfica de $y = f(x)$? Explique su elección.

b) ¿Cuál curva, de las mostradas, se parece mucho a la gráfica de $y = g(x)$? Explique su elección.

68. Escriba para aprender Sea $f(x) = 2^x$. Explique por qué la gráfica de $f(ax + b)$ puede obtenerse aplicando una transformación a la gráfica de $y = c^x$ para un valor apropiado de c. ¿Cuál es c?

Los ejercicios del 69 al 72 se refieren a la expresión $f(a, b, c) = a \cdot b^c$. Si $a = 2$, $b = 3$y $c = x$, la expresión es $f(2, 3, x) = 2 \cdot 3^x$, una función exponencial.

69. $b = x$, indique condiciones sobre a y c bajo las cuales la expresión $f(a, b, c)$ es una función potencia cuadrática.

70. Si $b = x$, indique condiciones sobre a y c bajo las cuales la expresión $f(a, b, c)$ es una función lineal decreciente.

71. Si $c = x$, indique condiciones sobre a y b bajo las cuales la expresión $f(a, b, c)$ es una función exponencial creciente.

72. Si $c = x$, indique condiciones sobre a y b bajo las cuales la expresión $f(a, b, c)$ es una función exponencial decreciente.

73. Pruebe que $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{c}{1 + a \cdot b^x} = 0$ y $\lim_{x \to \infty} \dfrac{c}{1 + a \cdot b^x} = c$, para constantes a, b y c, donde $a > 0$, $0 < b < 1$ y $c > 0$.

3.2 Modelación exponencial y logística

Aprenderá acerca de...

- La tasa de porcentaje constante y funciones exponenciales
- Los modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial
- El uso de regresión para modelar poblaciones
- Los otros modelos logísticos

. . . porque

Las funciones exponenciales modelan muchos tipos de crecimiento sin restricciones; las funciones logísticas modelan crecimiento restringido, incluyendo la propagación de enfermedades y rumores.

Tasa de porcentaje constante y funciones exponenciales

Suponga que una población está cambiando a una **tasa de porcentaje constante** r, donde r es la tasa porcentual de cambio expresada en forma decimal. Entonces la población sigue el patrón que se muestra.

Tiempo en años	Población
0	$P(0) = P_0 =$ población inicial
1	$P(1) = P_0 + P_0 r = P_0(1 + r)$
2	$P(2) = P(1) \cdot (1 + r) = P_0(1 + r)^2$
3	$P(3) = P(2) \cdot (1 + r) = P_0(1 + r)^3$
⋮	⋮
t	$P(t) = P_0(1 + r)^t$

Así, en este caso, la población es una función exponencial del tiempo.

Modelo exponencial de población

Si una población P está cambiando a una tasa de porcentaje constante r cada año, entonces

$$P(t) = P_0(1 + r)^t,$$

donde P_0 es la población inicial, r está expresada como un decimal y t es el tiempo en años.

Si $r > 0$, entonces $P(t)$ es una función de crecimiento exponencial, y su *factor de crecimiento* es la base de la función exponencial, $1 + r$.

Por otra parte, si $r < 0$, la base $1 + r < 1$, entonces $P(t)$ es una función de decaimiento exponencial, y $1 + r$ es el *factor de decaimiento* para la población.

EJEMPLO 1 Determinación de las tasas de crecimiento y decaimiento

Diga si el modelo de población es una función de crecimiento o de decaimiento exponencial, y determine la tasa de porcentaje constante de crecimiento o decaimiento.

a) San José: $P(t) = 782{,}248 \cdot 1.0136^t$

b) Detroit: $P(t) = 1{,}203{,}368 \cdot 0.9858^t$

SOLUCIÓN

a) Puesto que $1 + r = 1.0136$, $r = 0.0136 > 0$. Así, P es una función de crecimiento exponencial con tasa de crecimiento de 1.36%.

b) Puesto que $1 + r = 0.9858$, $r = -0.0142 < 0$. Así, P es una función de decaimiento exponencial con tasa de disminución de 1.42%.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

EJEMPLO 2 Determinación de una función exponencial

Determine la función exponencial con valor inicial igual a 12, que crece a una tasa de 8% por año.

SOLUCIÓN

Puesto que $P_0 = 12$ y $r = 8\% = 0.08$, la función es $P(t) = 12(1 + 0.08)^t$ o $P(t) = 12 \cdot 1.08^t$. Podríamos escribir esto como $f(x) = 12 \cdot 1.08^t$, donde x representa tiempo.

Ahora resuelva el ejercicio 7.

Modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial

Los modelos de crecimiento y decaimiento exponencial se utilizan para poblaciones de animales, bacterias e incluso átomos radiactivos. El crecimiento y el decaimiento exponencial se aplican a cualquier situación donde el crecimiento es proporcional al tamaño actual de la cantidad de interés. Con frecuencia, tales situaciones se encuentran en biología, química, administración y ciencias sociales.

Los modelos de crecimiento exponencial pueden desarrollarse en términos del tiempo que tarda una cantidad en duplicarse. Por otro lado, los modelos de decaimiento exponencial pueden desarrollarse en términos del tiempo que tarda una cantidad en reducirse a la mitad. Los ejemplos 3 al 5 utilizan estas estrategias.

EJEMPLO 3 Modelación del crecimiento de bacterias

Suponga que un cultivo de 100 bacterias se coloca en una caja de Petri y el cultivo se duplica cada hora. Prediga cuándo el número de bacterias será de 350,000.

SOLUCIÓN

Modele

$$200 = 100 \cdot 2 \quad \text{Total de bacterias después de 1 hora}$$
$$400 = 100 \cdot 2^2 \quad \text{Total de bacterias después de 2 horas}$$
$$800 = 100 \cdot 2^3 \quad \text{Total de bacterias después de 3 horas}$$
$$\vdots$$
$$P(t) = 100 \cdot 2^t \quad \text{Total de bacterias después de } t \text{ horas}$$

Así que la función $P(t) = 100 \cdot 2^t$ representa la población de bacterias t horas después de que se colocaron en la caja de Petri.

Resuelva gráficamente La figura 3.12 muestra que la función de la población interseca a $y = 350{,}000$ cuando $t \approx 11.77$.

Interprete La población de bacterias, en la caja de Petri, será 350,000 en alrededor de 11 horas y 46 minutos.

Ahora resuelva el ejercicio 15.

Las funciones de decaimiento radiactivo modelan la cantidad de una sustancia radiactiva presente en una muestra. El número de átomos de un elemento específico que cambia de un estado radiactivo a uno no radiactivo es una fracción fija por unidad de tiempo. El proceso se denomina **decaimiento radiactivo** y el tiempo que pasa para que la mitad de la muestra cambie su estado es la **vida media** de la sustancia radiactiva.

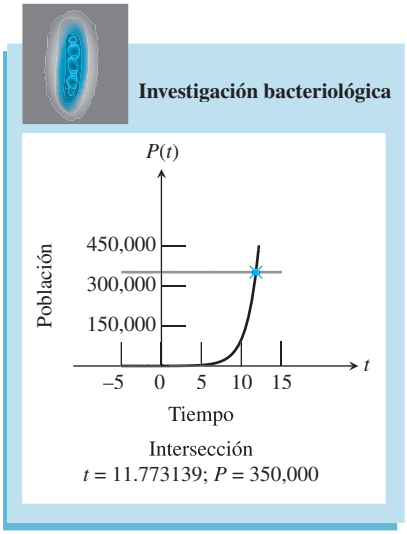


FIGURA 3.12 El rápido crecimiento de una población de bacterias (ejemplo 3).

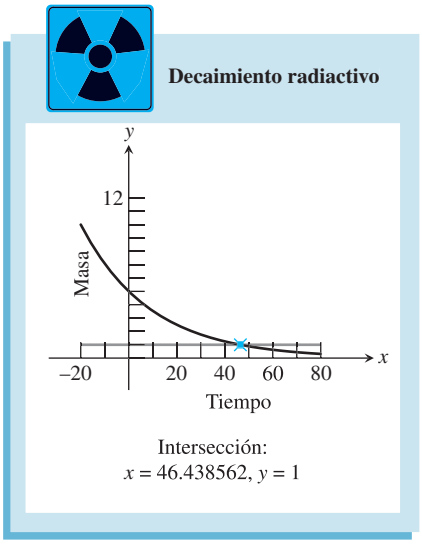


FIGURA 3.13 Decaimiento radiactivo (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Modelación de decaimiento radiactivo

Suponga que la vida media de cierta sustancia radiactiva es 20 días y que al inicio hay 5 g (gramos). Determine el momento en que quedará 1 g de la sustancia.

SOLUCIÓN

Modele Si t es el tiempo en días, el número de vidas medias será $t/20$.

$$\frac{5}{2} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{20/20} \quad \text{Gramos después de 20 días}$$

$$\frac{5}{4} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{40/20} \quad \text{Gramos después de 2(20) días}$$

$$\vdots$$

$$f(t) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20} \quad \text{Gramos después de t días}$$

Así la función $f(t) = 5 \cdot 0.5^{t/20}$ modela la masa en gramos de la sustancia radiactiva en el instante t.

Resuelva gráficamente La figura 3.13 muestra que la gráfica de $f(t) = 5 \cdot 0.5^{t/20}$ interseca a $y = 1$ cuando $t \approx 46.44$.

Interprete Quedará 1 g de la sustancia radiactiva después de, aproximadamente, 46.44 días, es decir, alrededor de 46 días y 11 horas.

Ahora resuelva el ejercicio 33.

Los científicos han establecido que la presión atmosférica al nivel del mar es 14.7 lb/pulg^2 y la presión se reduce a la mitad cada 3.6 millas sobre el nivel del mar. Por ejemplo, la presión a 3.6 millas sobre el nivel del mar es (1/2)(14.7) = 7.35 lb/pulg^2. Esta regla para la presión atmosférica se cumple para altitudes de hasta 50 millas sobre el nivel del mar. Aunque el contexto es diferente, la matemática de la presión atmosférica es muy parecida a la del decaimiento radiactivo.

EJEMPLO 5 Determinación de la altitud a partir de la presión atmosférica

Determine la altitud, por arriba del nivel del mar, a la cual la presión atmosférica es 4 lb/pulg^2.

SOLUCIÓN

Modele

$$7.35 = 14.7 \cdot 0.5^{3.6/3.6} \quad \text{Presión a 3.6 mi.}$$

$$3.675 = 14.7 \cdot 0.5^{7.2/3.6} \quad \text{Presión a 2(3.6) = 7.2 mi}$$

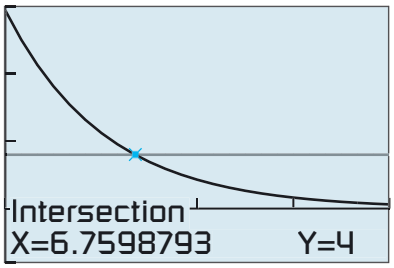
$$\vdots$$

$$P(h) = 14.7 \cdot 0.5^{h/3.6} \quad \text{Presión a } h \text{ mi}$$

Así que $P(h) = 14.7 \cdot 0.5^{h/3.6}$ modela la presión atmosférica P (en libras por pulgada cuadrada) como una función de la altura h (en millas sobre el nivel del mar). Debemos determinar el valor de h que satisface la ecuación

$$14.7 \cdot 0.5^{h/3.6} = 4.$$

continúa



[0, 20] por [–4, 15]

FIGURA 3.14 Un modelo para la presión atmosférica (ejemplo 5).

Resuelva gráficamente La figura 3.14 muestra que la gráfica de $P(h) = 14.7 \cdot 0.5^{h/3.6}$ interseca a $y = 4$ cuando $h \approx 6.76$.

Interprete La presión atmosférica es 4 lb/pulg^2 a una altura de aproximadamente 6.76 millas sobre el nivel del mar. ***Ahora resuelva el ejercicio 41.***

Uso de regresión para modelar poblaciones

Hasta ahora, nuestros modelos se nos han dado o desarrollado algebraicamente. A continuación utilizamos regresión exponencial y logística para construir modelos con base en datos de la población.

Debido a la explosión demográfica posterior a la Segunda Guerra Mundial y otros factores, el crecimiento exponencial no es un modelo perfecto para la población de Estados Unidos. Sin embargo, proporciona un medio para hacer predicciones adecuadas, como se ilustra en el ejemplo 6.

Tabla 3.9 Población (en millones)

Año	Población
1900	76.2
1910	92.2
1920	106.0
1930	123.2
1940	132.2
1950	151.3
1960	179.3
1970	203.3
1980	226.5
1990	248.7
2000	281.4
2003	290.8

Fuente: World Almanac and Book of Facts 2005.

EJEMPLO 6 Modelación de la población de Estados Unidos mediante regresión exponencial

Utilice la información de 1900 a 2000 en la tabla 3.9 y regresión exponencial para pronosticar la población de Estados Unidos en 2003.

SOLUCIÓN

Modele

Sea $P(t)$ la población, en millones, de Estados Unidos t años después de 1900. La figura 3.15a muestra un diagrama de dispersión de la información. Utilizando regresión exponencial, encontramos un modelo para los datos de 1990-2000:

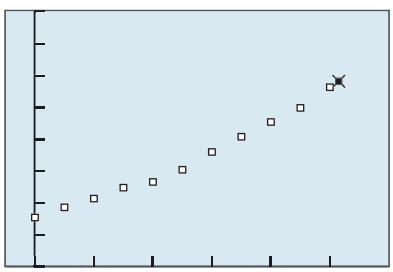
$$P(t) = 80.5514 \cdot 1.01289^t.$$

La figura 3.15b muestra el diagrama de dispersión con una gráfica del modelo poblacional que acabamos de encontrar. Puede ver que la curva se ajusta muy bien a los datos. El coeficiente de determinación es $r^2 \approx 0.995$, lo que indica un buen ajuste y apoya la evidencia visual.

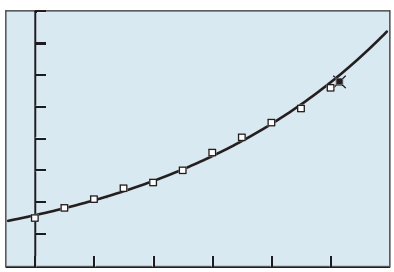
Resuelva gráficamente

Para pronosticar la población de Estados Unidos en 2003, sustituimos $t = 103$ en el modelo de regresión. La figura 3.15c muestra que $P(103) = 80.5514 \cdot 1.01289^{103} \approx 301.3$.

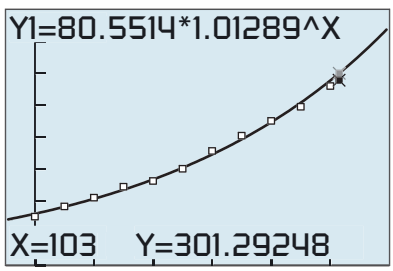
continúa



[–10, 120] por [0, 400]
a)



[–10, 120] por [0, 400]
b)



[–10, 120] por [0, 400]
c)

FIGURA 3.15 Diagramas de dispersión y gráficas para el ejemplo 6. La "x" en negro denota al dato para 2003. La "x" en gris en c) denota la predicción del modelo para 2003.

Interprete

El modelo pronostica que la población de Estados Unidos en 2003 fue 301.3 millones. La población real fue 290.8 millones. Sobreestimamos por 10.5 millones, menos del 4% de error.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

El crecimiento exponencial no tiene restricción, pero, con frecuencia, el crecimiento poblacional sí. Para muchas poblaciones, el crecimiento inicia de forma exponencial, pero eventualmente se reduce y se aproxima a un límite denominado **máxima población sustentable**.

En la sección 3.1 modelamos la población de Dallas con una función logística. Ahora utilizamos regresión logística para hacer lo mismo para la población de Florida y Pennsylvania. Como lo sugieren loa datos en la tabla 3.10, Florida ha crecido rápidamente en la segunda mitad del siglo XX, mientras que Pennsylvania parece aproximarse a su máxima población sustentable.



Tabla 3.10 Poblaciones de dos estados de Estados Unidos (en millones)

Año	Florida	Pennsylvania
1900	0.5	6.3
1910	0.8	7.7
1920	1.0	8.7
1930	1.5	9.6
1940	1.9	9.9
1950	2.8	10.5
1960	5.0	11.3
1970	6.8	11.8
1980	9.7	11.9
1990	12.9	11.9
2000	16.0	12.3

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

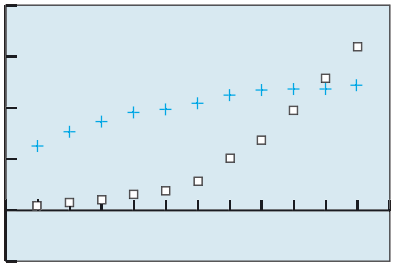
EJEMPLO 7 Modelación de la población de dos estados mediante regresión logística

Utilice los datos en la tabla 3.10 y regresión logística para predecir las máximas poblaciones sustentables para Florida y Pennsylvania. Grafique los modelos logísticos e interprete sus significados.

SOLUCIÓN Sean $F(t)$ y $P(t)$ las poblaciones (en millones) de Florida y Pennsylvania, respectivamente, t años *después de 1800*. La figura 3.16a muestra un diagrama de dispersión de los datos para ambos estados: los de Florida se muestran en negro y los de Pennsylvania en azul. Mediante regresión logística obtenemos los modelos para los dos estados:

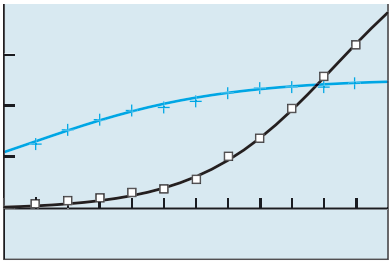
$$F(t) = \frac{28.021}{1 + 9018.63e^{-0.047015t}} \quad \text{y} \quad P(t) = \frac{12.579}{1 + 29.0003e^{-0.034315t}}$$

continúa



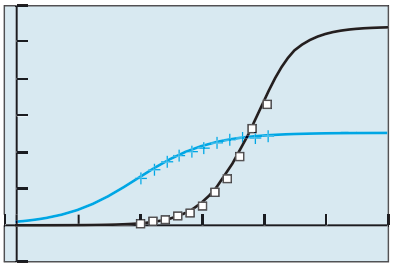
[90, 210] por [–5, 20]

a)



[90, 210] por [–5, 20]

b)



[–10, 300] por [–5, 30]

c)

FIGURA 3.16 Diagramas de dispersión y gráficas para el ejemplo 7.



La figura 3.16b muestra los diagramas de dispersión de los datos con gráficas de los dos modelos poblacionales. Puede ver que las curvas se ajustan bien a los datos. Con base en los numeradores de los modelos vemos que

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 28.021 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = 12.579.$$

Así que la máxima población sustentable para Florida es alrededor de 28 millones y para Pennsylvania 12.6 millones.

La figura 3.16c muestra un periodo de tres siglos para los dos estados. Pennsylvania tuvo un rápido crecimiento en el siglo XIX y la primera mitad del siglo XX, y ahora se está aproximando a su límite de crecimiento. Por otra parte, Florida en la actualidad está experimentando un crecimiento extremadamente rápido pero debe aproximarse a su máximo de población sustentable al final del siglo XXI. ***Ahora resuelva el ejercicio 50.***

Otros modelos logísticos

En el ejemplo 3, las bacterias no pueden continuar creciendo de forma exponencial por siempre, ya que no pueden crecer más allá de los límites de la caja de Petri. En el ejemplo 7, aunque la población de Florida ahora tiene una explosión demográfica, se nivelará tarde o temprano, al igual que lo hizo Pennsylvania. Los girasoles y muchas otras plantas crecen a una altura natural siguiendo un patrón logístico. Las curvas del análisis volumétrico químico ácido-base son logísticas. Los cultivos de levadura crecen de forma logística. El contagio en enfermedades e incluso los rumores se propagan de acuerdo con modelos logísticos.

EJEMPLO 8 Modelación de un rumor

La Escuela Watauga tiene 1200 estudiantes. Bob, Carol, Ted y Alice inician un rumor que se propaga de forma logística de modo que $S(t) = 1200/(1 + 39 \cdot e^{-0.9t})$ modela el número de estudiantes que han escuchado el rumor al final de t días, donde $t = 0$ es el día en que se inicia a difundir el rumor.

a) ¿Cuántos estudiantes han escuchado el rumor al final del día 0?

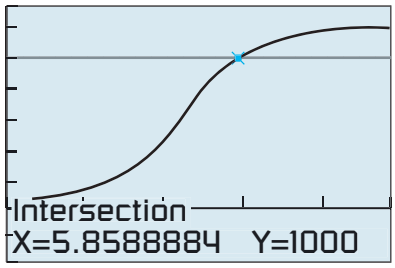
b) ¿Cuánto tiempo tarda en que 100 estudiantes escuchen el rumor?

SOLUCIÓN

a) $S(0) = \dfrac{1{,}200}{1 + 39 \cdot e^{-0.9 \cdot 0}} = \dfrac{1{,}200}{1 + 39} = 30$. Así que, 30 estudiantes han escuchado el rumor al final del día 0.

b) Necesitamos resolver $\dfrac{1{,}200}{1 + 39e^{-0.9t}} = 1{,}000$.

La figura 3.17 muestra la gráfica de $S(t) = 1{,}200/(1 + 39 \cdot e^{-0.9t})$ interseca a $y = 1{,}000$ cuando $t \approx 5.86$. Por lo que hacia el final del día 6, el rumor ha llegado a oídos de 1,000 estudiantes. ***Ahora resuelva el ejercicio 45.***



[0, 10] por [–400, 1400]

FIGURA 3.17 La propagación de un rumor (ejemplo 8).

REPASO RÁPIDO 3.2 *(Para obtener ayuda consulte la sección R.5)*

En los ejercicios 1 y 2 convierta el porcentaje a forma decimal o el decimal a porcentaje.

1. 15%

2. 0.04

3. Muestre cómo aumentar 23 en 7% usando una sola multiplicación.

4. Muestre como reducir 52 en 4% usando una sola multiplicación.

En los ejercicios 5 y 6 resuelva algebraicamente la ecuación.

5. $40 \cdot b^2 = 160$

6. $243 \cdot b^3 = 9$

En los ejercicios del 7 al 10 resuelva numéricamente la ecuación.

7. $782b^6 = 838$ **8.** $93b^5 = 521$

9. $672b^4 = 91$ **10.** $127b^7 = 56$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.2

En los ejercicios del 1 al 6 indique si la función es una función de crecimiento exponencial o de decaimiento exponencial, y determine la tasa de porcentaje constante de crecimiento o decaimiento.

1. $P(t) = 3.5 \cdot 1.09^t$ **2.** $P(t) = 4.3 \cdot 1.018^t$

3. $f(x) = 78{,}963 \cdot 0.968^x$ **4.** $f(x) = 5607 \cdot 0.9968^x$

5. $g(t) = 247 \cdot 2^t$ **6.** $g(t) = 43 \cdot 0.05^t$

En los ejercicios del 7 al 18 determine la función exponencial que satisfaga las condiciones dadas.

7. Valor inicial = 5, creciente a una tasa de 17% anual.

8. Valor inicial = 52, creciente a una tasa de 2.3% diario.

9. Valor inicial = 16, decreciente a una tasa de 50% mensual.

10. Valor inicial = 5, decreciente a una tasa de 0.59% semanal.

11. Población inicial = 28,900, decreciente a una tasa de 2.6% anual.

12. Población inicial = 502,000, creciente a una tasa de 1.7% anual.

13. Estatura inicial = 18 cm, crece a una tasa de 5.2% cada semana.

14. Masa inicial = 15 g, decreciente a una tasa de 4.6% diario.

15. Masa inicial = 0.6 g, se duplica cada 3 días.

16. Población inicial = 250, se duplica cada 7.5 horas.

17. Masa inicial = 592 g, se reduce a la mitad cada 6 años.

18. Masa inicial = 17 g, se reduce a la mitad cada 32 horas.

En los ejercicios 19 y 20 determine una fórmula para la función exponencial cuyos valores se proporcionan en la tabla 3.11.

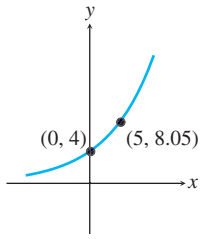
19. $f(x)$ **20.** $g(x)$

Tabla 3.11 Valores para dos funciones exponenciales

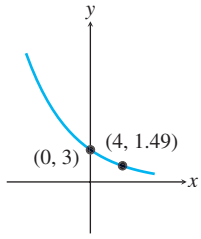
x	$f(x)$	$g(x)$
−2	1.472	−9.0625
−1	1.84	−7.25
0	2.3	−5.8
1	2.875	−4.64
2	3.59375	−3.7123

En los ejercicios 21 y 22 determine una fórmula para la función exponencial cuya gráfica se muestra en la figura.

21.



22.



En los ejercicios del 23 al 26 determine la función logística que satisface las condiciones dadas.

23. Valor inicial = 10, límite de crecimiento = 40, pasa por (1, 20).

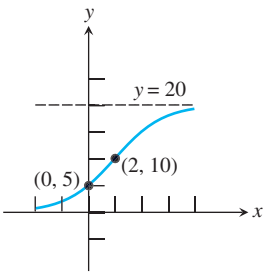
24. Valor inicial = 12, límite de crecimiento = 60, pasa por (1, 24).

25. Valor inicial = 16, máxima población sustentable = 128, pasa por (5, 32).

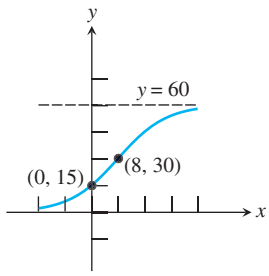
26. Altura inicial = 5, límite de crecimiento = 30, pasa por (3, 15).

En los ejercicios 27 y 28 determine una fórmula para la función logística cuya gráfica se muestra en la figura.

27.



28.



29. Crecimiento exponencial En 2000, la población de Jacksonville, Florida fue de 736,000 y ha estado aumentando a razón de 1.49% cada año. A esa tasa, ¿cuándo la población será de un millón?

30. Crecimiento exponencial En 2000, la población de Las Vegas, Nevada fue de 478,000 y ha estado aumentando a razón de 6.28% cada año. A esa tasa, ¿cuándo la población será de un millón?

31. Crecimiento poblacional En 1890, la población de Smallville era de 6,250. Suponga que la población aumentó a razón de 2.75% por año.

a) Estime la población en 1915 y 1940.

b) Pronostique cuando la población será de 50,000.

32. Crecimiento exponencial En 1910, la población de River City fue de 4,200. Suponga que la población aumenta a una tasa de 2.25% anual.

a) Estime la población en 1930 y 1945.

b) Pronostique cuándo la población llegará a 20,000.

33. Decaimiento radiactivo La vida media de cierta sustancia radiactiva es 14 días. Al principio, hay 6.6 g.

a) Exprese la cantidad de sustancia que queda como función del tiempo t.

b) ¿Cuándo quedará menos de 1 g?

34. Decaimiento radiactivo La vida media de cierta sustancia radiactiva es 65 días. Al inicio hay 3.5 g.

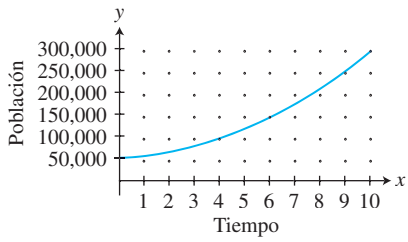
a) Exprese la cantidad de sustancia que queda, como función del tiempo t.

b) ¿Cuándo quedará menos de 1 g?

35. Escriba para aprender Sin utilizar fórmulas o gráficas, compare y contraste las funciones exponenciales y las funciones lineales.

36. Escriba para aprender Sin utilizar fórmulas o gráficas, compare y contraste las funciones exponenciales y las logísticas.

37. Escriba para aprender Mediante el modelo de población que está graficado, explique por qué el tiempo que tarda la población en duplicarse (tiempo de duplicación) es independiente del tamaño de la población.



38. Escriba para aprender Explique por qué la vida media de una sustancia radiactiva es independiente de la cantidad inicial de la sustancia que está presente.

39. Crecimiento de bacterias El número B de bacterias en un cultivo en una caja de Petri al cabo de t horas está dado por

$$B = 100e^{0.693t}.$$

¿Cuándo el número de bacterias será 200? Estime el tiempo de duplicación de las bacterias.

40. Fechado con radiocarbono La cantidad C, en gramos, de carbono 14 en cierta sustancia, después de t años, está dada por

$$C = 20e^{-0.0001216t}.$$

Estime la vida media del carbono 14.

41. Presión atmosférica Determine la presión atmosférica fuera de una aeronave que vuela a 52,800 pies (10 millas sobre el nivel del mar).

42. Presión atmosférica Determine la altitud, sobre el nivel del mar, a la que la presión atmosférica es 2.5 lb/pulg^2.

43. Modelación poblacional Utilice los datos de 1950 a 2000 de la tabla 3.12 y regresión exponencial para pronosticar la población de Los Ángeles para 2003. Compare el resultado con el valor listado para 2003.

44. Modelación poblacional Utilice la información de 1950 a 2000 de la tabla 3.12 y regresión exponencial para pronostica la población de Phoenix para 2003. Compare el resultado con el valor listado para 2003. Repita estos pasos con los datos de 1960 a 2000 para crear el modelo.

Tabla 3.12 Poblaciones de dos ciudades de Estados Unidos (en miles)

Año	Los Ángeles	Phoenix
1950	1970	107
1960	2479	439
1970	2812	584
1980	2969	790
1990	3485	983
2000	3695	1321
2003	3820	1388

Fuente: World Almanac and Book of Facts, 2002, 2005.

45. Propagación de gripe El número de estudiantes infectados con gripe en la Escuela Springfield después de t días se modela mediante la función

$$P(t) = \frac{800}{1 + 49e^{-0.2t}}.$$

a) ¿Cuál fue el número inicial de infectados?

b) ¿Cuándo el número de estudiantes infectados será 200?

c) La escuela cerrará cuando 300 de los 800 estudiantes estén infectados. ¿Cuándo cerrará la escuela?

46. Población de ciervos La población de ciervos después de t años en el Parque Estatal de Cedar está modelada mediante la función

$$P(t) = \frac{1{,}001}{1 + 90e^{-0.2t}}.$$

a) ¿Cuál fue la población inicial de ciervos?

b) ¿Cuándo el número de ciervos será de 600?

c) ¿Cuál es el número máximo de ciervos en el parque?

47. Crecimiento exponencial Con todos los datos de la tabla 3.9 calcule el modelo logístico de regresión y utilícelo para pronosticar la población de Estados Unidos en 2010.

48. Crecimiento poblacional Con la información en la tabla 3.13 confirme el modelo usado en el ejemplo 8 de la sección 3.1.

Tabla 3.13 Población de Dallas, Texas

Año	Población
1950	434,462
1960	679,684
1970	844,401
1980	904,599
1990	1,006,877
2000	1,188,589

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

49. Crecimiento poblacional Con los datos en la tabla 3.14 confirme el modelo usado en el ejercicio 56 de la sección 3.1.

50. Crecimiento poblacional Con los datos en la tabla 3.14 calcule un modelo logístico de regresión para la población de Arizona para t años desde 1800. Con base en su modelo y el modelo población de Nueva York del ejercicio 56 de la sección 3.1, ¿en algún momento la población de Arizona sobrepasará a la de Nueva York? Si es así, ¿cuándo?

Tabla 3.14 Poblaciones de dos estados de Estados Unidos (en millones)

Año	Arizona	Nueva York
1900	0.1	7.3
1910	0.2	9.1
1920	0.3	10.3
1930	0.4	12.6
1940	0.5	13.5
1950	0.7	14.8
1960	1.3	16.8
1970	1.8	18.2
1980	2.7	17.6
1990	3.7	18.0
2000	5.1	19.0

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

Preguntas de examen estandarizado

51. Verdadero o falso El crecimiento exponencial de una población está restringido con una máxima población sustentable. Justifique su respuesta.

52. Verdadero o falso Si la tasa de porcentaje constante de una función exponencial es negativa, entonces la base de la función es negativa. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 53 al 56 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver los problemas.

53. Opción múltiple ¿Cuál es la tasa (porcentual) de crecimiento constante de $P(t) = 1.23 \cdot 1.049^t$?

A) 49% **B)** 23% **C)** 4.9% **D)** 2.3% **E)** 1.23%

54. Opción múltiple ¿Cuál es la tasa (porcentual) de decaimiento constante de $P(t) = 22.7 \cdot 0.834^t$?

A) 22.7% **B)** 16.6% **C)** 8.34%

D) 2.27% **E)** 0.834%

55. Opción múltiple Una sola célula de amiba se duplica cada 4 días. Aproximadamente, ¿cuánto tiempo pasará para que una amiba produzca una población de 1,000?

A) 10 días **B)** 20 días **C)** 30 días

D) 40 días **E)** 50 días

56. Opción múltiple Un rumor se propaga en forma logística, de modo que $S(t) = 789/(1 + 16 \cdot e^{-0.8t})$ modela el número de personas que han escuchado el rumor al final de t días. Con base en este modelo, ¿cuál de lo siguiente es **verdadero**?

A) Después de 0 días, 16 personas han escuchado el rumor.

B) Después de 2 días, 439 personas han escuchado el rumor.

C) Después de 4 días, 590 personas han escuchado el rumor.

D) Después de 6 días, 612 personas han escuchado el rumor.

E) Después de 8 días, 769 personas han escuchado el rumor.

Exploraciones

57. **Crecimiento poblacional** **a)** Utilice los datos de 1900 y 1990 en la tabla 3.9 y regresión *logística* para pronosticar la población de Estados Unidos para 2000.

b) Escriba para aprender Compare el pronóstico con el valor listado en la tabla para 2000.

c) Observando los resultados del ejemplo 6, en este caso, ¿cuál modelo (exponencial o logístico) proporciona el mejor pronóstico?

58. **Crecimiento poblacional** Utilice la información de las tablas 3.9 y 3.15.

a) Con base en modelos de crecimiento exponencial, ¿la población de México sobrepasará a la de Estados Unidos? Y si es así, ¿cuándo?

b) Con base en modelos de crecimiento logístico, ¿la población de México sobrepasará a la de Estados Unidos? Y si es así, ¿cuándo?

c) ¿Cuáles son las máximas poblaciones sustentables para cada uno de los dos países?

d) Escriba para aprender En este caso, ¿cuál modelo, exponencial o logístico, tiene mayor validez? Justifique su elección.

Tabla 3.15 Población de México (en millones)

Año	Población
1900	13.6
1950	25.8
1960	34.9
1970	48.2
1980	66.8
1990	88.1
2001	101.9
2025	130.2
2050	154.0

Fuente: 1992 Salesman's Yearbook y World Almanac and Book of Facts 2002.

Ampliación de las ideas

59. La **función seno hiperbólico** se define por $\operatorname{senh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Pruebe que senh es una función impar.

60. La **función coseno hiperbólico** se define por $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Pruebe que cosh es una función par.

61. La **función tangente hiperbólica** se define por $\tanh(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$.

a) Pruebe que $\tanh(x) = \operatorname{senh}(x)/\cosh(x)$.

b) Pruebe que tanh es una función impar.

c) Pruebe que $f(x) = 1 + \tanh(x)$ es una función logística.

3.3 Funciones logarítmicas y sus gráficas

Aprenderá acerca de...

- Las funciones inversas de exponenciales
- Los logaritmos comunes, base 10
- Los logaritmos naturales, base *e*
- Las gráficas de funciones logarítmicas
- La medición del sonido usando decibeles

. . . porque

Las funciones logarítmicas se utilizan en muchas aplicaciones, incluyendo la medición de la intensidad relativa de los sonidos.

Funciones inversas de exponenciales

En la sección 1.4 aprendimos que, si una función pasa el *criterio de la recta horizontal*, entonces la inversa de la función también es una función. Así que una función exponencial $f(x) = b^x$ tiene una inversa que es una función. Consulte la figura 3.18. Esta inversa es la **función logarítmica con base *b***, expresada por $\log_b(x)$ o $\log_b x$. Esto es $f(x) = b^x$ con $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces $f^{-1}(x) = \log_b x$. Consulte la figura 3.19.

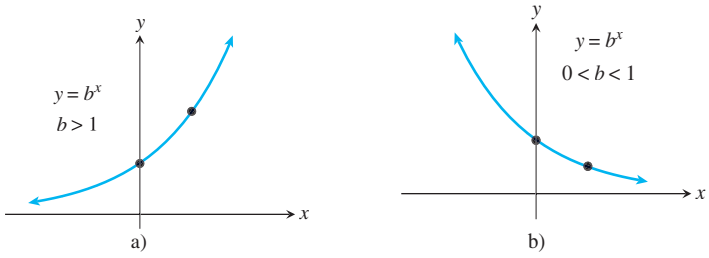


FIGURA 3.18 Las funciones exponenciales son a) crecientes, o bien b) decrecientes.

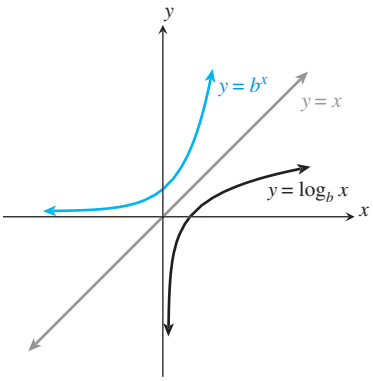


FIGURA 3.19 Puesto que las funciones logarítmicas son inversas de las funciones exponenciales, podemos obtener la gráfica de una función logarítmica mediante los métodos del espejo o de rotación, analizados en la sección 1.4.

UN POCO DE HISTORIA

Las funciones logarítmicas fueron desarrolladas alrededor de 1594, como herramientas computacionales, por el matemático escocés John Napier (1550-1617). Originalmente, les llamó "números artificiales", pero cambió el nombre por el de logaritmos, que significa "números de cálculo" o "números para calcular".

Una consecuencia inmediata y útil de esta definición es la relación entre una ecuación exponencial y su contraparte logarítmica.

Cambio entre forma logarítmica y exponencial

Si $x > 0$ y $0 < b \neq 1$, entonces

$$y = \log_b(x) \text{ si y sólo si } b^y = x.$$

Esta conexión indica que *un logaritmo* es *un exponente*. Puesto que los logaritmos son exponentes, podemos evaluar expresiones logarítmicas sencillas mediante nuestro conocimiento de los exponentes.

EJEMPLO 1 Evaluación de logaritmos

a) $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$.

b) $\log_3 \sqrt{3} = 1/2$ porque $3^{1/2} = \sqrt{3}$.

c) $\log_5 \dfrac{1}{25} = -2$ porque $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$.

d) $\log_4 1 = 0$ porque $4^0 = 1$.

e) $\log_7 7 = 1$ porque $7^1 = 7$.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Podemos generalizar las relaciones que se observaron en el ejemplo 1.

GENERALMENTE $b > 1$

En la práctica, las bases de los logaritmos, casi siempre, son mayores que 1.

Propiedades básicas de los logaritmos

Para $0 < b \neq 1$, $x > 0$, y cualquier número real y.

- $\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$.
- $\log_b b = 1$ porque $b^1 = b$.
- $\log_b b^y = y$ porque $b^y = b^y$.
- $b^{\log_b x} = x$ porque $\log_b x = \log_b x$.

Estas propiedades nos dan formas eficientes para evaluar logaritmos sencillos y algunas expresiones exponenciales. Las primeras dos partes del ejemplo 2 son las mismas que las primeras dos partes del ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Evaluación de expresiones logarítmicas y exponenciales

a) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$.

b) $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{1/2} = 1/2$.

c) $6^{\log_6 11} = 11$.

Ahora resuelva el ejercicio 5.

Las funciones logarítmicas son inversas de funciones exponenciales. Así que las entradas y las salidas se intercambian. La tabla 3.16 ilustra esta relación para $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

Tabla 3.16 Una función exponencial y su inversa

x	$f(x) = 2^x$	x	$f^{-1}(x) = \log_2 x$
-3	$1/8$	$1/8$	-3
-2	$1/4$	$1/4$	-2
-1	$1/2$	$1/2$	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3

Esta relación puede usarse para producir tablas y gráficas de las funciones logarítmicas, como lo descubrirá en la exploración 1.

EXPLORACIÓN **Comparación de funciones exponencial y logarítmica**

1. Ajuste su graficadora en modo paramétrico y modo de graficación simultáneo.

   Haga X1T = T y Y1T = 2^T.

   Haga X2T = 2^T y Y2T = T.

   Creación de tablas. Ajuste TblStart = −3 y △Tbl = 1. Utilice la característica de tablas de su graficadora para obtener la forma decimal de las dos partes de la tabla 3.16. Asegúrese de desplazarse hacia la derecha para ver X_{2T} y Y_{2T}.

   Dibujo de gráficas. Haga Tmin = −6, Tmax = 6 y Tstep = 0.5. Ajuste la ventana (x, y) a $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$. Utilice la característica Graph para obtener las gráficas simultáneas de $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \log_2 x$. Utilice la característica Trace para explorar las relaciones numéricas en las gráficas.

2. *Graficación en modo de función*. Grafique $y = 2^x$ en la misma ventana. Luego utilice el comando "dibujo de la inversa" para dibujar la gráfica de $y = \log_2 x$.

Logaritmos comunes, base 10

Los logaritmos con base 10 se denominan **logaritmos comunes**. Debido a su relación con nuestro sistema de base 10, el sistema métrico y la notación científica, los logaritmos comunes son especialmente útiles. Con frecuencia quitamos el subíndice 10 para la base cuando usamos logaritmos comunes. La función logaritmo común $\log_{10} x = \log x$ es la inversa de la función exponencial $f(x) = 10^x$. Así

$$y = \log x \quad \text{si y sólo si} \quad 10^y = x.$$

Aplicando esta relación podemos obtener otras relaciones para los logaritmos con base 10.

Propiedades básicas de los logaritmos comunes

Sea x y y números reales con $x > 0$.

- $\log 1 = 0$ ya que $10^0 = 1$.
- $\log 10 = 1$ ya que $10^1 = 10$.
- $\log 10^y = y$ ya que $10^y = 10^y$.
- $10^{\log x} = x$ ya que $\log x = \log x$.

Usando la definición de logaritmos comunes o estas propiedades básicas, podemos evaluar expresiones que incluyen una base de 10.

UNA ADVERTENCIA

En la figura 3.20, observe que usamos "10^ANS" en lugar de "10^1.537819095" para comprobar log(34.5). Esto es porque, generalmente, las graficadoras almacenan más dígitos de los que muestran, y así podemos obtener una comprobación más precisa. Incluso así, como log (34.5) es un número irracional, una graficadora no puede producir su valor exacto, por lo que comprobaciones como las que se muestran en la figura 3.20 no siempre funcionan tan perfectamente.

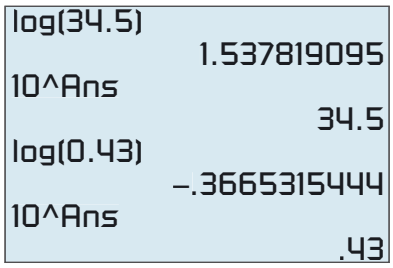


FIGURA 3.20 Realización y comprobación de cálculos con logaritmos comunes (ejemplo 4).

EJEMPLO 3 Evaluación de expresiones logarítmicas y exponenciales, base 10

a) $\log 100 = \log_{10} 100 = 2$ ya que $10^2 = 100$.

b) $\log \sqrt[5]{10} = \log 10^{1/5} = \frac{1}{5}$.

c) $\log \frac{1}{1{,}000} = \log \frac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3$.

d) $10^{\log 6} = 6$.

Ahora resuelva el ejercicio 7.

Los logaritmos comunes pueden evaluarse usando la tecla LOG en una calculadora, como se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Evaluación de logaritmos comunes con una calculadora

Utilice una calculadora para evaluar la expresión logarítmica, si está definida, y compruebe su resultado para evaluar las correspondiente expresión exponencial.

a) $\log 34.5 = 1.537...$ ya que $10^{1.537...} = 34.5$.

b) $\log 0.43 = -0.366...$ ya que $10^{-0.366...} = 0.43$.

Consulte la figura 3.20.

c) $\log(-3)$ no está definido ya que no existe número real y tal que $10^y = -3$. Como respuesta, una graficadora desplegará un mensaje de error o un número complejo para entradas tales como $\log(-3)$. Restringiremos el dominio de las funciones logarítmicas al conjunto de números reales positivos e ignoraremos respuestas que sean números complejos.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

En ocasiones, cambiar de forma logarítmica a forma exponencial es suficiente para resolver una ecuación que implique funciones logarítmicas.

EJEMPLO 5 Resolución de ecuaciones logarítmicas sencillas

Resuelva cada ecuación cambiándola a forma exponencial.

a) $\log x = 3$ **b)** $\log_2 x = 5$

SOLUCIÓN

a) Al cambiar a forma exponencial, $x = 10^3 = 1{,}000$.

b) Al cambiar a forma exponencial, $x = 2^5 = 32$.

Ahora resuelva el ejercicio 33.

Logaritmos naturales, base *e*



A consecuencia de sus propiedades especiales de cálculo, los logaritmos con base natural e se utilizan en muchas situaciones. Los logaritmos con base e son **logaritmos naturales**. Con frecuencia utilizamos la abreviación especial "ln" (sin subíndice)

CÓMO LEER UN LOGARITMO NATURAL

La expresión ln x, se pronuncia "ele ene de equis". La "l" es por logaritmo y la "n" por natural.

para denotar un logaritmo natural. Así, las función logaritmo natural $\log_e x = \ln x$. Es la inversa de la función exponencial $f(x) = e^x$. Por lo que

$$y = \ln x \text{ si y sólo si } e^y = x.$$

Al aplicar esta relación, podemos obtener otras relaciones fundamentales para logaritmos con la base natural e.

Propiedades básicas de logaritmos naturales

Sean x y y números reales con $x > 0$.

- $\ln 1 = 0$ ya que $e^0 = 1$.
- $\ln e = 1$ ya que $e^1 = e$.
- $\ln e^y = y$ ya que $e^y = e^y$.
- $e^{\ln x} = x$ ya que $\ln x = \ln x$.

Usando la definición del logaritmo natural o estas propiedades básicas podemos evaluar expresiones que incluyen a la base natural e.

EJEMPLO 6 Evaluación de expresiones logarítmicas y exponenciales, base *e*

a) $\ln \sqrt{e} = \log_e \sqrt{e} = 1/2$ ya que $e^{1/2} = \sqrt{e}$.

b) $\ln e^5 = \log_e e^5 = 5$.

c) $e^{\ln 4} = 4$.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Los logaritmos pueden evaluarse usando la tecla LN de una calculadora, como se ilustra en el ejemplo 7.

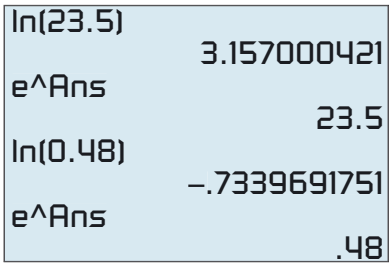


FIGURA 3.21 Cálculo y comprobación de logaritmos naturales (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Evaluación de logaritmos naturales con una calculadora

Utilice una calculadora para evaluar la expresión logarítmica, si está definida, y compruebe su resultado para evaluar la correspondiente expresión exponencial.

a) $\ln 23.5 = 3.157...$ porque $e^{3.157...} = 23.5$.

b) $\ln 0.48 = -0.733...$ porque $e^{-0.733...} = 0.48$.

Consulte la figura 3.21.

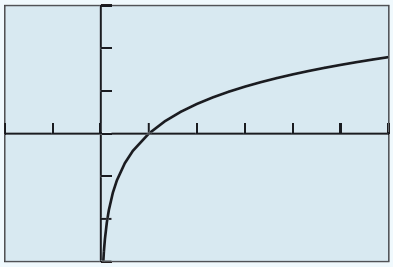
c) $\ln(-5)$ no está definida ya que no existe número real y tal que $e^y = -5$. Una graficadora, como respuesta, dará un mensaje de error o un número complejo para entradas tales como $\ln(-5)$. Continuaremos restringiendo el dominio de funciones logarítmicas al conjunto de números reales positivos e ignoraremos respuestas que sean números complejos.

Ahora resuelva el ejercicio 29.

Gráficas de funciones logarítmicas

La función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ es una de las funciones básicas presentadas en la sección 1.3. Ahora listamos sus propiedades.

FUNCIÓN BÁSICA Función logaritmo natural



[–2, 6] por [–3, 3]

FIGURA 3.22 Gráfica de la función logaritmo natural.

$f(x) = \ln x$
Dominio: $(0, \infty)$
Rango: Todos los reales
Continua en $(0, \infty)$
Creciente en $(0, \infty)$
No tiene simetría
No está acotada por arriba ni por abajo
No tiene máximos ni mínimos locales
No tiene asíntotas horizontales
Asíntota vertical: $x = 0$
Comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$

Cualquier función logarítmica $g(x) = \log_b x$ con $b > 1$ tiene el mismo dominio, rango, continuidad, comportamiento creciente, carencia de simetría y demás comportamiento general que $f(x) = \ln x$. Es raro interesarse en funciones logarítmicas $g(x) = \log_b x$ con $0 < b < 1$. Por lo que la gráfica y el comportamiento de $f(x) = \ln x$ es común de las funciones logarítmicas.

Consideremos ahora las gráficas de las funciones logaritmos común y natural y sus transformaciones geométricas. Para entender las gráficas de $y = \log x$ y $y = \ln x$ podemos comparar cada una de las gráficas de sus inversas, $y = 10^x$ y $y = e^x$, respectivamente. La figura 3.23a muestra que las gráficas de $y = \ln x$ y $y = e^x$ son reflexiones, una de la otra, con respecto a la recta $y = x$. De forma análoga, la figura 3.23b muestra que las gráficas de $y = \log x$ y $y = 10^x$ son reflexiones mutuas, con respecto a esta misma recta.

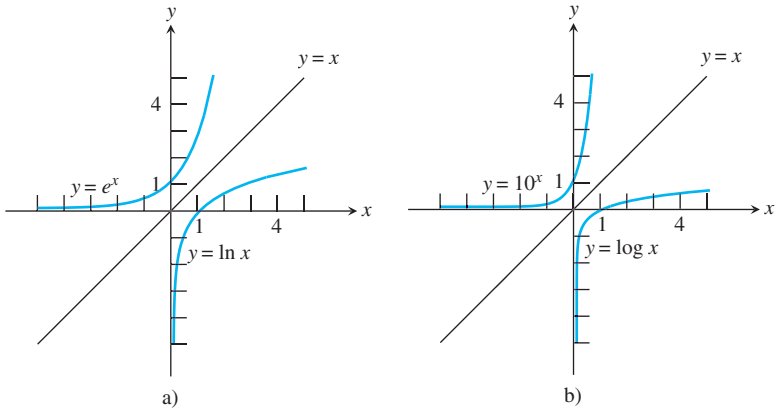
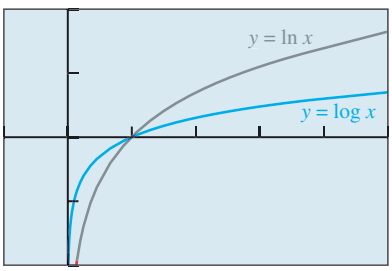


FIGURA 3.23 Dos pares de funciones inversas.



[–1, 5] por [–2, 2]

FIGURA 3.24 Las gráficas de las funciones logaritmo común y logaritmo natural.

Con base en la figura 3.24 podemos ver que las gráficas de $y = \log x$ y $y = \ln x$ tienen mucho en común. La figura 3.24 también muestra en qué difieren.

Las transformaciones geométricas estudiadas en la sección 1.5, junto con nuestro conocimiento de las gráficas de $y = \ln x$ y $y = \log x$, nos permite predecir las gráficas de las funciones del ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Transformación de gráficas logarítmicas

Describa cómo transformar la gráfica de $y = \ln x$ o $y = \log x$ en la gráfica de la función dada.

a) $g(x) = \ln (x + 2)$ **b)** $h(x) = \ln (3 - x)$

c) $g(x) = 3 \log x$ **d)** $h(x) = 1 + \log x$

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $g(x) = \ln (x + 2)$ se obtiene mediante la traslación, de 2 unidades hacia la izquierda, de la gráfica de $y = \ln (x)$. Consulte la figura 3.25a.

b) $h(x) = \ln (3 - x) = \ln [-(x - 3)]$. Así que obtenemos la gráfica de $h(x) = \ln (3 - x)$ a partir de la gráfica de $y = \ln x$ aplicando, en orden, una reflexión con respecto al eje y seguida de una traslación de 3 unidades hacia la derecha. Consulte la figura 3.25b.

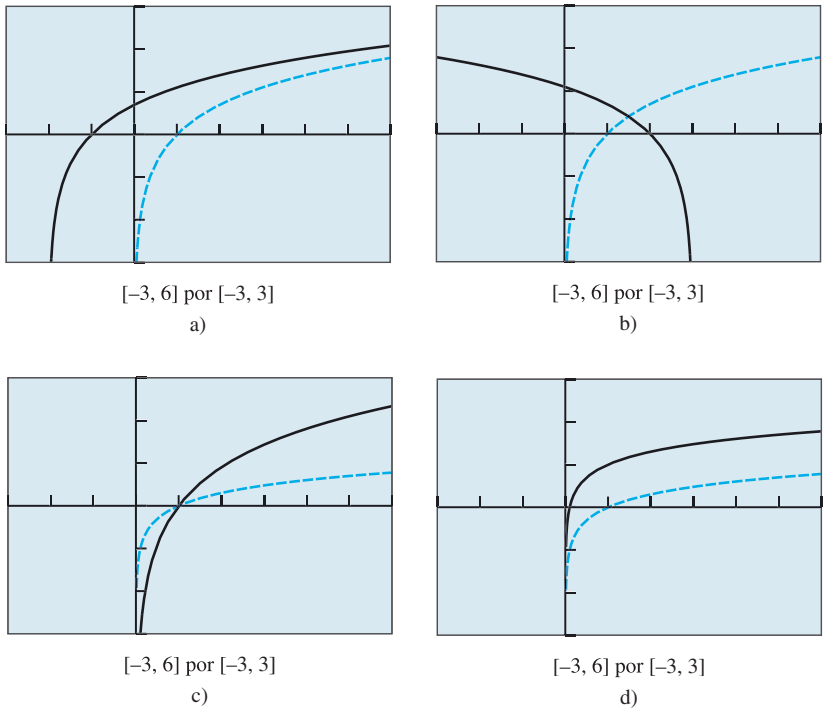


FIGURA 3.25 Transformación de $y = \ln x$ para obtener a) $g(x) = \ln(x + 2)$ y b) $h(x) = \ln (3 - x)$ y $y = \log x$ para obtener c) $g(x) = 3 \log x$ y d) $h(x) = 1 + \log x$ (ejemplo 8).

c) La gráfica de $g(x) = 3 \log x$ se obtiene mediante un alargamiento vertical, en un factor de 3, de la gráfica de $f(x) = \log x$. Consulte la figura 3.25c.

d) Podemos obtener la gráfica de $h(x) = 1 + \log x$ a partir de la gráfica de $f(x) = \log x$ mediante una traslación de una unidad hacia arriba. Consulte la figura 3.25d.

Ahora resuelva el ejercicio 41.

Medición del sonido usando decibeles

La tabla 3.17 lista de varios sonidos. Observe que un avión a reacción al despegar es 100 billones de veces más ruidoso que un suave susurro. Puesto que el rango de intensidades de sonido es muy amplia, se utilizan logaritmos comunes (potencias de 10) para comparar qué tan fuertes son los sonidos.

DEFINICIÓN Decibeles

El nivel de la intensidad del sonido, en **decibeles**, (dB) es

$$\beta = 10 \log(I/I_0),$$

donde β (beta) es el número de decibeles. I es la intensidad del sonido medido en W/m^2, e $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 es el umbral de audición humano (la intensidad de sonido más baja audible).

BEL ES POR BELL

La unidad original para la intensidad del sonido fue el bel (B), que resultó ser inconvenientemente grande; por eso fue reemplazado por el decibel, un décimo de bel. El bel fue llamado así en honor del escocés, naturalizado estadounidense, Alexander Graham Bell (1847-1922), inventor del teléfono.

Tabla 3.17 Intensidades aproximadas de sonidos seleccionados

Sonido	Intensidad (W/m^2)
Umbral de audición	10^{-12}
Susurro suave a 5 m	10^{-11}
Tráfico en la ciudad	10^{-5}
Tren subterráneo	10^{-2}
Umbral del dolor	10^{0}
Avión a reacción al despegar	10^{3}

Fuente: Adaptado de R. W. Reading Exploring Phisics: Concepts and Applications (Belmont, CA Wadsworth, 1984).



PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO (de la página 275)

PROBLEMA: ¿Qué tan fuerte es el sonido de un tren en un túnel subterráneo?

SOLUCIÓN: Con base en la información de la tabla 3.17,

$$\begin{aligned}\beta &= 10 \log(I/I_0)\\ &= 10 \log(10^{-2}/10^{-12})\\ &= 10 \log(10^{10})\\ &= 10 \cdot 10 = 100\end{aligned}$$

Así que el nivel de intensidad del sonido de un tren dentro de un túnel subterráneo es 100 dB.

REPASO RÁPIDO 3.3 *(Para obtener ayuda consulte la sección A.2)*

En los ejercicios del 1 al 6 evalúe la expresión sin el uso de una calculadora.

1. 5^{-2} **2.** 10^{-3}

3. $\dfrac{4^0}{5}$ **4.** $\dfrac{1^0}{2}$

5. $\dfrac{8^{11}}{2^{28}}$ **6.** $\dfrac{9^{13}}{27^8}$

En los ejercicios del 7 al 10 reescriba como una base elevada a un exponente racional.

7. $\sqrt{5}$ **8.** $\sqrt[3]{10}$

9. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ **10.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.3

En los ejercicios del 1 al 18 evalúe la expresión logarítmica sin el uso de una calculadora.

1. $\log_4 4$ **2.** $\log_6 1$

3. $\log_2 32$ **4.** $\log_3 81$

5. $\log_5 \sqrt[3]{25}$ **6.** $\log_6 \dfrac{1}{\sqrt[5]{36}}$

7. $\log 10^3$ **8.** $\log 10{,}000$

9. $\log 100{,}000$ **10.** $\log 10^{-4}$

11. $\log \sqrt[3]{10}$ **12.** $\dfrac{1}{\sqrt{1{,}000}}$

13. $\ln e^3$ **14.** $\ln e^{-4}$

15. $\ln \dfrac{1}{e}$ **16.** $\ln 1$

17. $\ln \sqrt[4]{e}$ **18.** $\ln \dfrac{1}{\sqrt{e^7}}$

En los ejercicios del 19 al 24 evalúe la expresión si utilizar una calculadora.

19. $7^{\log_7 3}$ **20.** $5^{\log_5 8}$

21. $10^{\log(0.5)}$ **22.** $10^{\log 14}$

23. $e^{\ln 6}$ **24.** $e^{\ln(1/5)}$

En los ejercicios del 25 al 32 utilice una calculadora para evaluar la expresión logarítmica, si está definida, y compruebe su resultado evaluando la correspondiente expresión exponencial.

25. $\log 9.43$ **26.** $\log 0.908$

27. $\log(-14)$ **28.** $\log(-5.14)$

29. $\ln 4.05$ **30.** $\ln 0.733$

31. $\ln(-0.49)$ **32.** $\ln(-3.3)$

En los ejercicios del 33 al 36 resuelva la ecuación cambiándola a la forma exponencial.

33. $\log x = 2$ **34.** $\log x = 4$

35. $\log x = -1$ **36.** $\log x = -3$

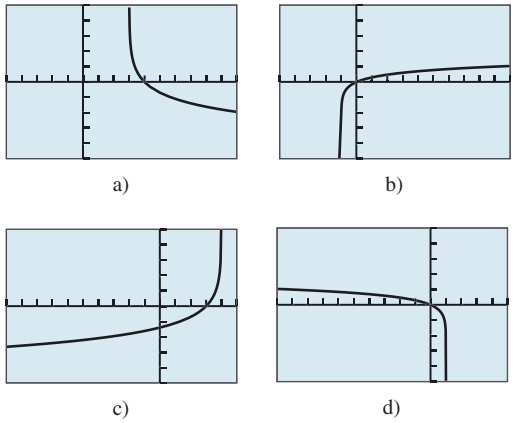
En los ejercicios del 37 al 40 relaciona la función con su gráfica.

37. $f(x) = \log(1 - x)$

38. $f(x) = \log(x + 1)$

39. $f(x) = -\ln(x - 3)$

40. $f(x) = -\ln(4 - x)$



a) b) c) d)

En los ejercicios del 41 al 46 describa cómo transformar la gráfica de $y = \ln x$ en la gráfica de la función dada. Bosqueje la gráfica y respalde su bosquejo con una graficadora.

41. $f(x) = \ln(x + 3)$ **42.** $f(x) = \ln(x) + 2$

43. $f(x) = \ln(-x) + 3$ **44.** $f(x) = \ln(-x) - 2$

45. $f(x) = \ln(2 - x)$ **46.** $f(x) = \ln(5 - x)$

En los ejercicios del 47 al 52 describa cómo transformar la gráfica de $y = \log x$ en la gráfica de la función dada. Bosqueje y respalde con una graficadora.

47. $f(x) = -1 + \log(x)$ **48.** $f(x) = \log(x - 3)$

49. $f(x) = -2\log(-x)$ **50.** $f(x) = -3\log(-x)$

51. $f(x) = 2\log(3 - x) - 1$ **52.** $f(x) = -3\log(1 - x) + 1$

En los ejercicios del 53 al 58 grafique la función y analícela con respecto a dominio, rango, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, acotamiento, mínimos y máximos, simetría, asíntotas y comportamiento en los extremos.

53. $f(x) = \log(x - 2)$ **54.** $f(x) = \ln(x + 1)$

55. $f(x) = -\ln(x - 1)$ **56.** $f(x) = -\log(x + 2)$

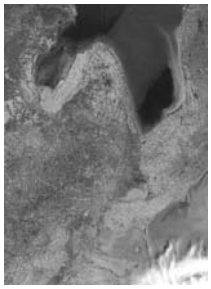
57. $f(x) = 3\log(x) - 1$ **58.** $f(x) = 5\ln(2 - x) - 3$

59. Intensidad de sonido Utilice la información en la tabla 3.17 para calcular la intensidad del sonido, en decibeles, para **a)** un murmullo suave, **b)** tráfico en la ciudad, **c)** el despegue de un avión a reacción.

60. Absorción de la luz La ley Beer-Lambert de absorción aplicada al lago Erie establece que la intensidad de la luz I (en lúmenes), a una profundidad de x pies, satisface la ecuación

$$\log \frac{I}{12} = -0.00235x.$$

Determine la intensidad de la luz a una profundidad de 30 pies.



61. Crecimiento poblacional Usando la información de la tabla 3.18 calcule un modelo logarítmico de regresión y utilícelo para predecir cuándo la población de San Antonio será de 1,500,000.

Tabla 3.18 Población de San Antonio

Año	Población
1970	654,153
1980	785,940
1990	935,933
2000	1,151,305

Fuente: World Almanac and Book of Facts 2005.

62. Disminución de población Mediante los datos en la tabla 3.19 calcule un modelo logarítmico de regresión y utilícelo para predecir cuándo llegará a 500,000 la población de Milwaukee.

Tabla 3.19 Población de Milwaukee

Año	Población
1970	717,372
1980	636,297
1990	628,088
2000	596,974

Fuente: World Almanac and Book of Facts 2005.

Preguntas de examen estandarizado

63. Verdadero o falso Una función logarítmica es la inversa de una función exponencial. Justifique su respuesta.

64. Verdadero o falso Los logaritmos comunes son logaritmos con base 10. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 65 al 68 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver el problema.

65. Opción múltiple ¿Cuál es el valor aproximado del logaritmo común de 2?

A) 0.10523 **B)** 0.20000

C) 0.30103 **D)** 0.69315

E) 3.32193

66. Opción múltiple ¿Cuál enunciado es **falso**?

A) $\log 5 = 2.5 \log 2$ **B)** $\log 5 = 1 - \log 2$

C) $\log 5 > \log 2$ **D)** $\log 5 < \log 10$

E) $\log 5 = \log 10 - \log 2$

67. Opción múltiple Con respecto a $f(x) = \ln x$, ¿cuál enunciado es **falso**?

A) Es creciente en su dominio.

B) Es simétrica con respecto al origen.

C) Es continua en su dominio.

D) Es no acotada.

E) Tiene una asíntota vertical.

68. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la inversa de $f(x) = 2 \cdot 3^x$?

(A) $f^{-1}(x) = \log_3(x/2)$ **(B)** $f^{-1}(x) = \log_2(x/3)$

(C) $f^{-1}(x) = 2\log_3(x)$ **(D)** $f^{-1}(x) = 3\log_2(x)$

(E) $f^{-1}(x) = 0.5\log_3(x)$

Exploraciones

69. Escriba para aprender Graficación paramétrica En la misma forma que en la exploración 1, construya una tabla y gráficas de $f(x) = 3^x$ y su inversa $f^{-1}(x) = \log_3 x$. Escriba un análisis comparativo de las dos funciones considerando dominio, rango, intersecciones y asíntotas.

70. Escriba para aprender Graficación paramétrica En la misma forma que en la exploración 1, construya una tabla y gráficas de $f(x) = 5^x$ y su inversa $f^{-1}(x) = \log_5 x$. Escriba un análisis comparativo de las dos funciones considerando dominio, rango, intersecciones y asíntotas.

71. Escriba para aprender Graficación paramétrica En la misma forma que en la exploración 1, determine el número $b > 1$ tal que las gráfica de $f(x) = b^x$ y su inversa $f^{-1}(x) = \log_b x$ tienen exactamente un punto de intersección. ¿Cuál es el punto que es común a las dos gráficas?

72. Escriba para aprender Explique por qué cero no está en el dominio de las funciones logarítmicas $y = \log_3 x$ y $y = \log_5 x$.

Ampliación de las ideas

73. Describa cómo transformar la gráfica de $f(x) = \ln x$ en la gráfica de $g(x) = \log_{1/e} x$.

74. Describa cómo transformar la gráfica de $f(x) = \log x$ en la gráfica de $g(x) = \log_{0.1} x$.

3.4 Propiedades de las funciones logarítmicas

Aprenderá acerca de...

- Las propiedades de los logaritmos
- El cambio de base
- Las gráficas de funciones logarítmicas con base b
- Cómo expresar información de otra forma

. . . porque

Las aplicaciones de los logaritmos tienen como base propiedades muy particulares, así que es necesario aprenderlas bien.

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos tienen rasgos algebraicos especiales que históricamente los han hecho indispensables para los cálculos y que aún los hace valiosos en muchas áreas de aplicaciones y modelación. En la sección 3.3 aprendimos acerca de la relación inversa entre exponentes y logaritmos, y cómo aplicar algunas propiedades básicas de los logaritmos. Ahora ahondaremos en la naturaleza de los logaritmos para prepararnos para la modelación y resolución de ecuaciones.

Propiedades de los logaritmos

Sean b, R y S números reales positivos, con $b \neq 1$, y c cualquier número real.

- **Regla del producto:** $\log_b (RS) = \log_b R + \log_b S$
- **Regla del cociente:** $\log_b \dfrac{R}{S} = \log_b R - \log_b S$
- **Regla de la potencia:** $\log_b R^c = c \log_b R$

PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES

Sean b, x, y y números reales con $b > 0$.

1. $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$
2. $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$
3. $(b^x)^y = b^{xy}$

Las propiedades de los exponentes, en el margen, son la base para estas tres propiedades de los logaritmos. Por ejemplo, la primera propiedad de los exponentes, listada en el margen, se usa para verificar la regla del producto.

EJEMPLO 1 Prueba de la regla del producto para logaritmos

Pruebe que $\log_b(RS) = \log_b R + \log_b S$.

SOLUCIÓN Sean $x = \log_b R$ y $y = \log_b S$. Los enunciados exponenciales correspondientes son $b^x = R$ y $b^y = S$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} RS &= b^x \cdot b^y \\ &= b^{x+y} && \text{Primera propiedad de exponentes.} \\ \log_b (RS) &= x + y && \text{Cambiar a la forma logarítmica.} \\ &= \log_b R + \log_b S && \text{Usar las definiciones de } x \text{ y } y. \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 37.

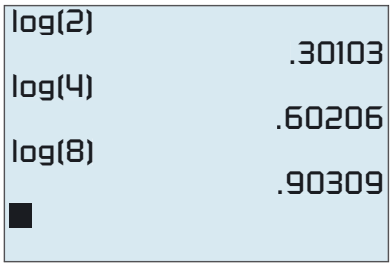


FIGURA 3.26 Un patrón aritmético de los logaritmos (exploración 1).

EXPLORACIÓN 1 **Exploración de la aritmética de los logaritmos**

Utilice las aproximaciones a 5 decimales que se muestran en la figura 3.26 para respaldar numéricamente las propiedades de los logaritmos.

1. Producto $\log (2 \cdot 4) = \log 2 + \log 4$
2. Cociente $\log \left(\frac{8}{2}\right) = \log 8 - \log 2$
3. Potencia $\log 2^3 = 3 \log 2$

Ahora evalúe los logaritmos comunes de otros enteros positivos usando la información dada en la figura 3.26 y sin el uso de su calculadora.

4. Utilice el hecho de que $5 = 10/2$ para evaluar $\log 5$.
5. Utilice el hecho de que 16, 32 y 64 son potencias de 2 para evaluar $\log 16$, $\log 32$ y $\log 64$.
6. Evalúe $\log 25$, $\log 40$ y $\log 50$.

Sin usar calculadora, liste todos los enteros positivos menores que 100 cuyos logaritmos comunes pueden evaluarse conociendo sólo $\log 2$ y las propiedades de los logaritmos.

Cuando resolvemos, en forma algebraica, ecuaciones que incluyen logaritmos, con frecuencia tenemos que rescribir las expresiones mediante las propiedades de los mismos. Casi siempre es necesario desarrollar o condensar tanto como sea posible. Los tres ejemplos siguientes ilustran cómo se pueden utilizar estas propiedades para cambiar la forma de expresiones que incluyen logaritmos.

EJEMPLO 2 Desarrollo del logaritmo de un producto

Suponiendo que x y y son positivos, utilice propiedades de los logaritmos para escribir $\log(8xy^4)$ como una suma de logaritmos o múltiplos de logaritmos.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \log (8xy^4) &= \log 8 + \log x + \log y^4 && \text{Regla del producto.} \\ &= \log 2^3 + \log x + \log y^4 && 8 = 2^3 \\ &= 3 \log 2 + \log x + 4 \log y && \text{Regla de la potencia} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 1.

EJEMPLO 3 Desarrollo del logaritmo de un cociente

Suponiendo que x es positiva, utilice propiedades de los logaritmos para escribir $\ln (\sqrt{x^2 + 5}/x)$ como una suma o diferencia de logaritmos o múltiplos de logaritmos.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x} &= \ln \frac{(x^2 + 5)^{1/2}}{x} \\ &= \ln (x^2 + 5)^{1/2} - \ln x && \text{Regla del cociente.} \\ &= \frac{1}{2} \ln (x^2 + 5) - \ln x && \text{Regla de la potencia.} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 9.

EJEMPLO 4 Cómo condensar una expresión logarítmica

Suponiendo que x y y son positivos, escriba $\ln x^5 - 2 \ln (xy)$ como un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \ln x^5 - 2 \ln (xy) &= \ln x^5 - \ln (xy)^2 && \text{Regla de la potencia.} \\ &= \ln x^5 - \ln (x^2 y^2) \\ &= \ln \frac{x^5}{x^2 y^2} && \text{Regla del cociente.} \\ &= \ln \frac{x^3}{y^2} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Como hemos visto, los logaritmos tienen algunas propiedades sorprendentes. Es fácil generalizar en exceso y caer en ideas equívocas acerca de los logaritmos. La exploración 2 debe ayudarle a discernir qué es cierto y qué es falso con respecto a las relaciones logarítmicas.

EXPLORACIÓN 2 Cómo descubrir cuáles son relaciones y cuáles no

De las ocho relaciones sugeridas a continuación, cuatro son *verdaderas* y cuatro son *falsas* (usando valores de x en los dominios en ambos lados de las ecuaciones). Considerando las propiedades de los logaritmos, haga una predicción acerca de la veracidad de cada enunciado. Luego pruebe cada una con algunos valores numéricos específicos para x. Por último, compare las gráficas de los dos lados de la ecuación.

1. $\ln (x + 2) = \ln x + \ln 2$
2. $\log_3 (7x) = 7 \log_3 x$
3. $\log_2 (5x) = \log_2 5 + \log_2 x$
4. $\ln \frac{x}{5} = \ln x - \ln 5$
5. $\log \frac{x}{4} = \frac{\log x}{\log 4}$
6. $\log_4 x^3 = 3 \log_4 x$
7. $\log_5 x^2 = (\log_5 x)(\log_5 x)$
8. $\log |4x| = \log 4 + \log |x|$

¿Cuáles cuatro son verdaderas y cuáles cuatro son falsas?

Cambio de base



Al trabajar con una expresión logarítmica con una base no deseable, es posible transformar la expresión en un cociente de logaritmos con una base diferente. Por ejemplo, es difícil evaluar $\log_4 7$, ya que 7 no es una potencia sencilla de 4 y no existe una tecla $\boxed{\log_4}$ en una calculadora o en un graficadora.

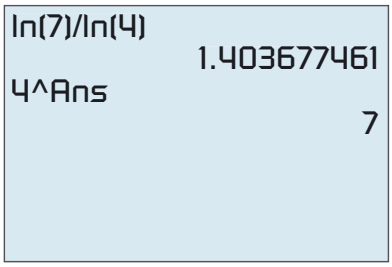


FIGURA 3.27 Evaluación y comprobación de $\log_4 7$.

Podemos resolver este problema con un poco de álgebra. Primero haga $y = \log_4 7$. Entonces

$$4^y = 7 \qquad \text{Intercambiar a forma exponencial.}$$
$$\ln 4^y = \ln 7 \qquad \text{Aplicar ln.}$$
$$y \ln 4 = \ln 7 \qquad \text{Regla de la potencia.}$$
$$y = \frac{\ln 7}{\ln 4} \qquad \text{Dividir entre ln 4.}$$

Así que usando un graficadora (consulte la figura 3.27), vemos que

$$\log_4 7 = \frac{\ln 7}{\ln 4} = 1.4036\ldots$$

Generalizamos este "truco" útil como la fórmula de cambio de base:

Fórmula de cambio de base para logaritmos

Para números reales positivos a, b y x con $a \neq 1$ y $b \neq 1$,

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Por lo general, las calculadoras y las graficadoras tienen dos teclas para logaritmos, LOG y LN, que corresponden a las base 10 y e, respectivamente. Así, con frecuencia utilizamos la fórmula de cambio de base en una de las dos formas siguientes:

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} \quad \text{o} \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Estas dos formas son útiles en la evaluación de logaritmos y en la graficación de funciones logarítmicas.

EJEMPLO 5 Evaluación de logaritmos mediante el cambio de base

a) $\log_3 16 = \dfrac{\ln 16}{\ln 3} = 2.523\ldots \approx 2.52$

b) $\log_6 10 = \dfrac{\log 10}{\log 6} = \dfrac{1}{\log 6} = 1.285\ldots \approx 1.29$

c) $\log_{1/2} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln (1/2)} = \dfrac{\ln 2}{\ln 1 - \ln 2} = \dfrac{\ln 2}{-\ln 2} = -1$

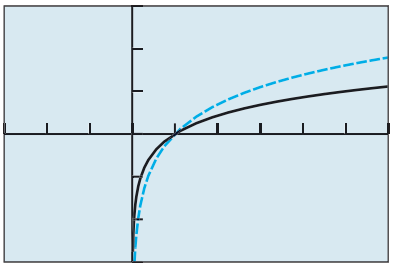
Ahora resuelva el ejercicio 23.

Gráficas de funciones logarítmicas con base *b*

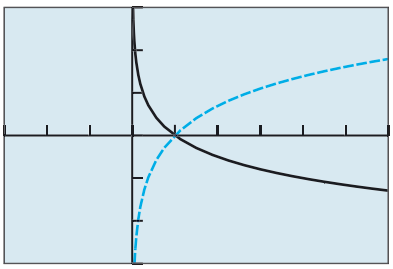
Con la fórmula de cambio de base podemos rescribir cualquier función logarítmica $g(x) = \log_b x$ como

$$g(x) = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{1}{\ln b} \ln x.$$

Así, toda función logarítmica es un múltiplo constante de la función logaritmo natural, $f(x) = \ln x$. Si la base es $b > 1$, la gráfica de $g(x) = \log_b x$ es un alargamiento o compresión vertical, en un factor de $1/\ln b$, de la gráfica de $f(x) = \ln x$. Si $0 < b < 1$ también se requiere una reflexión respecto del eje x.



[–3, 6] por [–3, 3]
a)



[–3, 6] por [–3, 3]
b)

FIGURA 3.28 Transformación de $f(x) = \ln x$ para obtener a) $g(x) = \log_5 x$ y b) $h(x) = \log_{1/4} x$ (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Graficación de funciones logarítmicas

Describa cómo transformar la gráfica de $f(x) = \ln x$ en la gráfica de la función dada. Bosqueje y luego respalde su respuesta con un graficadora.

a) $g(x) = \log_5 x$

b) $h(x) = \log_{1/4} x$

SOLUCIÓN

a) Como $g(x) = \log_5 x = \ln x/\ln 5$, su gráfica se obtiene mediante una compresión vertical en un factor de $1/\ln 5 \approx 0.62$, de la gráfica de $f(x) = \ln x$. Consulte la figura 3.28 a).

b) $h(x) = \log_{1/4} x = \dfrac{\ln x}{\ln 1/4} = \dfrac{\ln x}{\ln 1 - \ln 4} = \dfrac{\ln x}{-\ln 4} = -\dfrac{1}{\ln 4} \ln x$. Así que podemos obtener la gráfica de h a partir de la gráfica de $f(x) = \ln x$, mediante la aplicación, en cualquier orden, de una reflexión con respecto al eje x y una compresión vertical en un factor de $1/\ln 4 \approx 0.72$. Consulte la figura 3.28 b).

Ahora resuelva el ejercicio 39.

Podemos generalizar el ejemplo 6 b) de la manera siguiente: Si $b > 1$, entonces $0 < 1/b < 1$ y

$$\log_{1/b} x = -\log_b x.$$

Así, cuando se proporcione una función como $h(x) = \log_{1/4} x$, con una base entre 0 y 1, de inmediato podemos rescribirla como $h(x) = -\log_4 x$. Debido a que con facilidad podemos cambiar la base de logaritmos con bases entre 0 y 1, tales logaritmos rara vez se encuentran o se utilizan. En su lugar, trabajamos con logaritmos con bases $b > 1$, que son muy parecidos a logaritmos naturales y comunes, como resumimos a continuación.

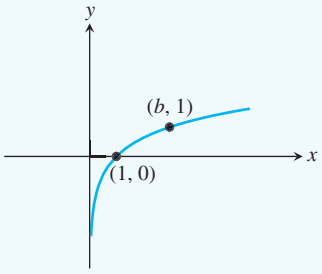


FIGURA 3.29 $f(x) = \log_b x$, $b > 1$.

Funciones logarítmicas $f(x) = \log_b x$, con $b > 1$

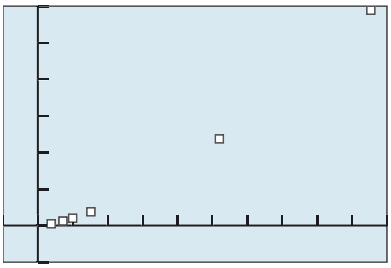
Dominio: $(0, \infty)$
Rango: Todos los reales
Continua
Creciente en su dominio
No es simétrica: no es par ni impar
No está acotada por arriba ni por abajo
No tiene máximos ni mínimos
No tiene asíntotas horizontales
Asíntota vertical: $x = 0$
Comportamiento en los extremos $\lim_{x \to \infty} \log_b x = \infty$

HABLANDO ASTRONÓMICAMENTE

Una unidad astronómica (UA) es la distancia promedio entre la Tierra y el Sol, alrededor de 149.6 millones de kilómetros (149.6 Gm).

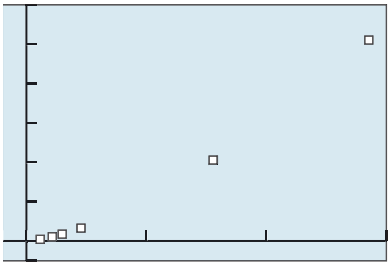
Cómo expresar información de otra forma

Al buscar un modelo para un conjunto de datos, con frecuencia es útil transformar los datos mediante la aplicación de una función a una o ambas variables del conjunto. Ya hicimos esto cuando tratamos los años 1900 a 2000 como 0 a 100. Tal transformación de un conjunto de datos es una **re-expresión** de los mismos.



[–1, 10] por [–5, 30]

a)



[–100, 1,500] por [–1,000, 12,000]

b)

FIGURA 3.30 Diagramas de dispersión de los datos planetarios de a) la tabla 3.20 y b) la tabla 2.10.

De la sección 2.2, recuerde que la tercera ley de Kepler establece que el cuadrado del periodo de la órbita T para cada planeta es proporcional al cubo de su distancia promedio a al Sol. Si expresamos la información planetaria de Kepler en la tabla 2.10 empleando unidades basadas en la Tierra, la constante de proporción se convierte en 1 y la expresión "es proporcional a" de la tercera ley de Kepler se convierte en "es igual a". Podemos hacer esto dividiendo la columna "distancia promedio" entre 149.6 Gm/UA y la columna "periodo de la órbita" entre 365.2 días/año. Los datos re-expresados se muestran en la tabla 3.20.

Tabla 3.20 Distancias promedio y periodos de órbitas para los seis planetas más internos

Planeta	Distancia promedio al sol (UA)	Periodo de la órbita (años)
Mercurio	0.3870	0.2410
Venus	0.7233	0.6161
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.86
Saturno	9.539	29.46

Fuente: Conversión de datos de Shupe, et al., National Geographics Atlas of the World (sexta edición revisada). Washington, DC: National Geographic Society. 1992, ilustración 116.

Observe que el patrón en el diagrama de dispersión de los datos re-expresados, mostrado en la figura 3.30a, en esencia es el mismo que el de los datos originales, que se muestra en la figura 3.30b. Lo que hicimos fue expresar los valores numéricos de los datos en forma más conveniente y garantizar que nuestra gráfica contenga al par ordenado (1, 1) para la Tierra, lo que potencialmente simplifica nuestro modelo. Lo que *no* hemos hecho, y aún deseamos hacer, es aclarar la relación entre las variables a (distancia al Sol) y T (periodo de la órbita).

Los logaritmos pueden utilizarse para re-expresar datos y ayudarnos a clarificar las relaciones y descubrir patrones ocultos. Para los datos planetarios, si trazamos las parejas $(\ln a, \ln T)$ en lugar de las parejas (a, T), el patrón es mucho más claro. En el ejemplo 7 realizamos la re-expresión de los datos y luego un *paseo de fuerza* algebraica para obtener la tercera ley de Kepler.

EJEMPLO 7 Obtención de la tercera ley de Kepler mediante una conversión logarítmica

Re-expresar las parejas de datos (a, T), de la tabla 3.20, como pares $(\ln a, \ln T)$. Determine un modelo de regresión lineal para los pares $(\ln a, \ln T)$. Rescriba la regresión lineal en términos de a y T, y rescriba la ecuación en una forma sin exponentes fraccionarios ni logaritmos.

SOLUCIÓN

Modele

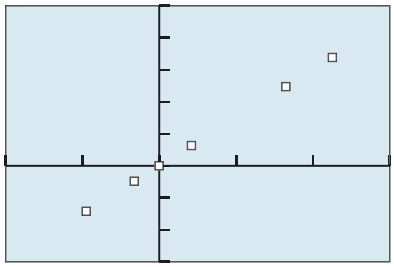
Utilizamos las operaciones para listas de la graficadora para obtener los pares $(\ln a, \ln T)$ (consulte la figura 3.31a en la página siguiente). En la figura 3.31b de la página siguiente, hacemos un diagrama de dispersión de los datos re-expresados. Las parejas $(\ln a, \ln T)$ parecen estar a lo largo de una línea recta.

continúa

L2	L3	L4
.241	−.9493	−1.423
.6161	−.3239	−.4843
1	0	0
1.881	.42068	.6318
11.86	1.6492	2.4732
29.46	2.2554	3.383
------	------	------

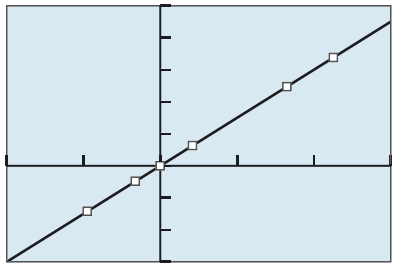
L4=ln(L2)

a)



[−2, 3] por [−3, 5]

b)



[−2, 3] por [−3, 5]

c)

FIGURA 3.31 Diagrama de dispersión y gráficas para el ejemplo 7.



Hacemos $y = \ln T$ y $x = \ln a$. Luego, usando regresión lineal, obtenemos el modelo siguiente:

$$y = 1.49950x + 0.00070 \approx 1.5x.$$

La figura 3.31c muestra el diagrama de dispersión para las parejas $(x, y) = (\ln a, \ln T)$ junto con una gráfica de $y = 1.5x$. Podemos ver que la recta se ajusta a los datos transformados bastante bien.

Remodele

Al regresar a las variables originales, a y T, obtenemos:

$$\ln T = 1.5 \cdot \ln a \qquad y = 1.5x$$

$$\frac{\ln T}{\ln a} = 1.5 \qquad \text{Dividir entre ln } a.$$

$$\log_a T = \frac{3}{2} \qquad \text{Cambiar de base.}$$

$$T = a^{3/2} \qquad \text{Intercambiar a la forma exponencial.}$$

$$T^2 = a^3 \qquad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

Interprete

¡Ésta es la tercera ley de Kepler!

Ahora resuelva el ejercicio 63.

REPASO RÁPIDO 3.4 *(Para obtener ayuda consulte las secciones A.1 y 3.3)*

En los ejercicios del 1 al 4, sin utilizar una calculadora, evalúe las expresiones.

1. $\log 10^2$
2. $\ln e^3$
3. $\ln e^{-2}$
4. $\log 10^{-3}$

En los ejercicios del 5 al 10 simplifique la expresión.

5. $\dfrac{x^5y^{-2}}{x^2y^{-4}}$
6. $\dfrac{u^{-3}v^7}{u^{-2}v^2}$
7. $(x^6y^{-2})^{1/2}$
8. $(x^{-8}y^{12})^{3/4}$
9. $\dfrac{(u^2v^{-4})^{1/2}}{(27u^6v^{-6})^{1/3}}$
10. $\dfrac{(x^{-2}y^3)^{-2}}{(x^3y^{-2})^{-3}}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.4

En los ejercicios del 1 al 12, suponiendo que x y y son positivos, utilice propiedades de logaritmos para escribir la expresión como una suma o diferencia de logaritmos, o como múltiplos de logaritmos.

1. $\ln 8x$

2. $\ln 9y$

3. $\log \dfrac{3}{x}$

4. $\log \dfrac{2}{y}$

5. $\log_2 y^5$

6. $\log_2 x^{-2}$

7. $\log x^3y^2$

8. $\log xy^3$

9. $\ln \dfrac{x^2}{y^3}$

10. $\log 1{,}000x^4$

11. $\log \sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}$

12. $\ln \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$

En los ejercicios del 13 al 22 suponiendo que x y y son positivos, utilice propiedades de los logaritmos para escribir la expresión como un solo logaritmo.

13. $\log x + \log y$

14. $\log x + \log 5$

15. $\ln y - \ln 3$

16. $\ln x - \ln y$

17. $\dfrac{1}{3}\log x$

18. $\dfrac{1}{5}\log z$

19. $2 \ln x + 3 \ln y$

20. $4 \log y - \log z$

21. $4 \log (xy) - 3 \log (yz)$

22. $3 \ln (x^3y) + 2 \ln (yz^2)$

En los ejercicios del 23 al 28 utilice la fórmula de cambio de base y su calculadora para evaluar el logaritmo.

23. $\log_2 7$

24. $\log_5 19$

25. $\log_8 175$

26. $\log_{12} 259$

27. $\log_{0.5} 12$

28. $\log_{0.2} 29$

En los ejercicios del 29 al 32 escriba la expresión utilizando sólo logaritmos naturales.

29. $\log_3 x$

30. $\log_7 x$

31. $\log_2 (a + b)$

32. $\log_5 (c - d)$

En los ejercicios del 33 al 36 escriba la expresión usando sólo logaritmos comunes.

33. $\log_2 x$

34. $\log_4 x$

35. $\log_{1/2} (x + y)$

36. $\log_{1/3} (x - y)$

37. Pruebe la regla del cociente para logaritmos.

38. Pruebe la regla de la potencia para logaritmos.

En los ejercicios del 39 al 42 describa cómo transformar la gráfica de $g(x) = \ln x$ en la gráfica de la función dada. Haga un bosquejo de la gráfica y respalde con un graficadora.

39. $f(x) = \log_4 x$

40. $f(x) = \log_7 x$

41. $f(x) = \log_{1/3} x$

42. $f(x) = \log_{1/5} x$

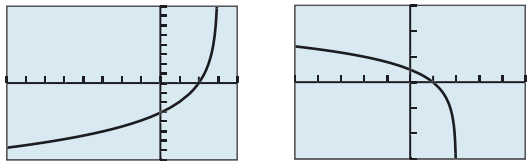
En los ejercicios del 43 al 46 relacione la función con su gráfica. Identifique las dimensiones de la ventana, Xscl y Yscl de la gráfica.

43. $f(x) = \log_4 (2 - x)$

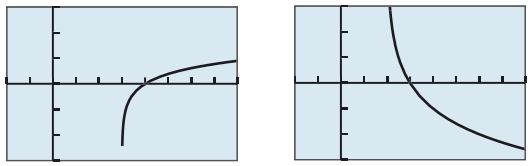
44. $f(x) = \log_6 (x - 3)$

45. $f(x) = \log_{0.5} (x - 2)$

46. $f(x) = \log_{0.7} (3 - x)$



a) b)



c) d)

En los ejercicios del 47 al 50 grafique la función y analícela con respecto a dominio, rango, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, asíntotas y comportamiento en los extremos.

47. $f(x) = \log_2 (8x)$

48. $f(x) = \log_{1/3} (9x)$

49. $f(x) = \log (x^2)$

50. $f(x) = \ln (x^3)$

51. Intensidad del sonido Calcule el nivel de intensidad del sonido, en decibeles, para cada sonido listado en la tabla 3.21.

Tabla 3.21 Intensidades aproximadas para sonidos seleccionados

Sonido	Intensidad (Watts/m^2)
a) Umbral de audición	10^{-12}
b) Susurro de hojas	10^{-11}
c) Conversación	10^{-6}
d) Cafetería escolar	10^{-4}
e) Martillo neumático	10^{-2}
f) Umbral de dolor	1

Fuente: J. J. Dwyer, College Physics (Belmont, CA: Wadsworth, 1984) y E. Connally et al., Functions Modeling Change (Nueva York: Wiley, 2000).

52. Intensidad de terremotos La magnitud en la **escala Richter**, R, de un terremoto tiene como base las características asociadas con la onda sísmica y se mide mediante

$$R = \log (a/T) + B,$$

donde a es la amplitud en μm (micrómetros), T es el periodo en segundos y B toma en cuenta el debilitamiento de la onda sísmica debido a la distancia del epicentro. Calcule la magnitud del terremoto R para cada conjunto de valores.

a) $a = 250$, $T = 2$, y $B = 4.25$

b) $a = 300$, $T = 4$, y $B = 3.5$

53. Intensidad de la luz en el lago Erie La relación entre la intensidad I de la luz (en lúmenes) a una profundidad de x pies en el lago Erie está dada por

$$\log \frac{I}{12} = -0.00235x.$$

¿Cuál es la intensidad a una profundidad de 40 pies?

54. Intensidad de la luz en el lago Superior La relación entre la intensidad I de la luz (en lúmenes) a una profundidad de x pies en el lago Superior está dada por

$$\log \frac{I}{12} = -0.0125x.$$

¿Cuál es la intensidad a una profundidad de 10 pies?

55. Escriba para aprender Utilice la fórmula de cambio de base para explicar cómo sabemos que la gráfica de $f(x) = \log_3 x$ puede obtenerse mediante la aplicación de una transformación a la gráfica de $g(x) = \ln x$.

56. Escriba para aprender Utilice la fórmula de cambio de base para explicar como la gráfica de $f(x) = \log_{0.8} x$ puede obtenerse mediante la aplicación de transformaciones a la gráfica de $g(x) = \log x$.

Preguntas de examen estandarizado

57. Verdadero o falso El logaritmo del producto de dos números positivos es la suma de los logaritmos de los números. Justifique su respuesta.

58. Verdadero o falso El logaritmo de un número positivo es positivo. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 59 al 62 resuelva los problemas sin usar una calculadora.

59. Opción múltiple $\log 12 =$

A) $3 \log 4$ **B)** $\log 3 + \log 4$

C) $4 \log 3$ **D)** $\log 3 \cdot \log 4$

E) $2 \log 6$

60. Opción múltiple $\log_9 64 =$

A) $5 \log_3 2$ **B)** $(\log_3 8)^2$

C) $(\ln 64)/(\ln 9)$ **D)** $2 \log_9 32$

E) $(\log 64)/9$

61. Opción múltiple $\ln x^5 =$

A) $5 \ln x$ **B)** $2 \ln x^3$

C) $x \ln 5$ **D)** $3 \ln x^2$

E) $\ln x^2 \cdot \ln x^3$

62. Opción múltiple $\log_{1/2} x^2 =$

A) $-2 \log_2 x$ **B)** $2 \log_2 x$

C) $-0.5 \log_2 x$ **D)** $0.5 \log_2 x$

E) $-2 \log_2 |x|$

Exploraciones

63. a) Calcule el modelo de regresión de una potencia para los datos siguientes.

x	4	6.5	8.5	10
y	2,816	31,908	122,019	275,000

b) Prediga el valor y asociado con $x = 7.1$ usando el modelo de regresión.

c) Re-exprese los datos en términos de sus logaritmos naturales y haga un diagrama de dispersión de $(\ln x, \ln y)$.

d) Calcule el modelo de regresión lineal $(\ln y) = a(\ln x) + b$ para $(\ln x, \ln y)$.

e) Confirme que $y = e^b \cdot x^a$ es el modelo de regresión determinado en a).

64. a) Calcule el modelo de regresión de una potencia para los datos siguientes.

x	2	3	4.8	7.7
y	7.48	7.14	6.81	6.41

b) Prediga el valor y asociado con $x = 9.2$ usando el modelo de regresión.

c) Re-exprese los datos en términos de sus logaritmos naturales y haga un diagrama de dispersión de $(\ln x, \ln y)$.

d) Calcule el modelo de regresión lineal $(\ln y) = a(\ln x) + b$ para $(\ln x, \ln y)$.

e) Confirme que $y = e^b \cdot x^a$ es el modelo de regresión determinado en a).

65. Conservación del calor, revisado el ejercicio 55 de la sección 2.2, recuerde que los científicos han determinado que el pulso, r, de los mamíferos es una función potencia de su peso corporal w.



a) Re-exprese los datos de la tabla 3.22 en términos de sus logaritmos *comunes* y haga un diagrama de dispersión de $(\log w, \log r)$.

b) Calcule el modelo de regresión lineal $(\log r) = a(\log w) + b$ para $(\log w, \log r)$.

c) Superponga la curva de regresión al diagrama de dispersión.

d) Utilice la ecuación de regresión para predecir el pulso para un caballo de 450 kg. ¿El resultado es cercano a los 38 latidos/min reportado por A. J. Clark en 1927?

e) Escriba para aprender ¿Por qué puede utilizar logaritmos comunes o naturales para re-expresar los datos que se ajustan a un modelo de una potencia?

Tabla 3.22 Peso y pulso de mamíferos seleccionados

Mamífero	Peso corporal (kg)	Pulso (latidos/min)
Rata	0.2	420
Conejillo de las Indias	0.3	300
Conejo	2	205
Perro pequeño	5	120
Perro grande	30	85
Oveja	50	70
Humano	70	72

Fuente: A. J. Clark, Comparative Physiology of the Heart (Nueva York: Macmillan, 1927).

66. Haga $a = \log 2$ y $b = \log 3$. Y después, por ejemplo, $\log 6 = a + b$. Liste los logaritmos comunes de todos los enteros positivos menores que 100 que pueden expresarse en términos de a y b, escribiendo, para cada caso, ecuaciones tales como $\log 6 = a + b$.

Ampliación de las ideas

67. Resuelva $\ln x > \sqrt[3]{x}$.

68. Resuelva $1.2^x \leq \log_{1.2} x$.

69. Actividad en grupo Trabaje en equipos de tres. Que cada miembro del equipo grafique y compare los dominios para un par de funciones.

(a) $f(x) = 2 \ln x + \ln (x - 3)$ y $g(x) = \ln x^2(x - 3)$

(b) $f(x) = \ln (x + 5) - \ln (x - 5)$ y $g(x) = \ln \dfrac{x + 5}{x - 5}$

(c) $f(x) = \log (x + 3)^2$ y $g(x) = 2 \log (x + 3)$

Escriba para aprender Después de analizar sus hallazgos, escriba un breve informe del equipo que incluya sus ideas y conclusiones globales.

70. Pruebe la fórmula de cambio de base para logaritmos.

71. Pruebe que $f(x) = \log x / \ln x$ es una función constante con dominio restringido, mediante la determinación del valor exacto de la constante $\log x / \ln x$, expresada como un logaritmo común.

72. Grafique $f(x) = \ln (\ln (x))$ y analícela con respecto a dominio, rango, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, simetría, asíntotas, comportamiento en los extremos e invertibilidad.

3.5 Modelación y resolución de ecuaciones

Aprenderá acerca de...

- La resolución de ecuaciones exponenciales
- La resolución de ecuaciones logarítmicas
- Las órdenes de magnitud y los modelos logarítmicos
- La ley de enfriamiento de Newton
- La transformación logarítmica

. . . porque

La escala Richter, el pH y la ley de enfriamiento de Newton están entre los usos más importantes de las funciones logarítmicas y exponenciales.

Resolución de ecuaciones exponenciales

Algunas ecuaciones logarítmicas pueden resolverse cambiando a la forma exponencial, como vimos en el ejemplo 5 de la sección 3.3. Sin embargo, para otras ecuaciones se utilizan las propiedades de los exponentes o las propiedades de logaritmos. Una propiedad de ambas funciones, que con frecuencia es útil al resolver ecuaciones, es que ellas son funciones uno a uno (inyectivas).

Propiedades de inyectividad (uno a uno)

Para cualquier función exponencial $f(x) = b^x$,

- Si $b^u = b^v$, entonces $u = v$.

Para cualquier función $f(x) = \log_b x$,

- Si $\log_b u = \log_b v$, entonces $u = v$.

El ejemplo 1 muestra cómo la inyectividad de las funciones exponenciales puede usarse. Los ejemplos 3 y 4 utilizan la propiedad uno a uno de los logaritmos.

EJEMPLO 1 Resolución algebraica de una ecuación exponencial

Resuelva $20(1/2)^{x/3} = 5$.

SOLUCIÓN

$$20\left(\frac{1}{2}\right)^{x/3} = 5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x/3} = \frac{1}{4} \qquad \text{Dividir entre 20.}$$

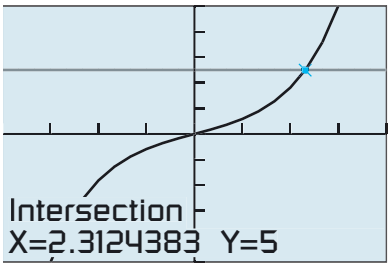
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{x}{3} = 2 \qquad \text{Propiedad uno a uno.}$$

$$x = 6 \qquad \text{Multiplicar por 3.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 1.

La ecuación en el ejemplo 2 incluye una diferencia de dos funciones exponenciales, lo que dificulta su resolución algebraica. Por lo tanto, conviene iniciar con un enfoque gráfico.



[–4, 4] por [–10, 10]

FIGURA 3.32 $y = (e^x - e^{-x})/2$ y $y = 5$ (ejemplo 2).

¿SENH?

Podemos reconocer el lado izquierdo de la ecuación en el ejemplo 2, como la función seno hiperbólico que se presentó en el ejercicio 59 de la sección 3.2. Esta función con frecuencia se utiliza en cálculo. Escribimos $\text{senh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación exponencial

Resuelva $(e^x - e^{-x})/2 = 5$.

SOLUCIÓN

Resuelva gráficamente La figura 3.32 muestra que las gráfica de $y = (e^x - e^{-x})/2$ y $y = 5$ se intersecan cuando $x \approx 2.31$.

Confirme algebraicamente El enfoque algebraico incluye un poco de ingenio. Si multiplicamos cada lado de la ecuación original por $2e^x$ y reacomodamos los términos podemos obtener una ecuación cuadrática en e^x:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 5$$

$$e^{2x} - e^0 = 10e^x \qquad \text{Multiplicar por } 2e^x.$$

$$(e^x)^2 - 10(e^x) - 1 = 0 \qquad \text{Restar } 10e^x.$$

Si hacemos $w = e^x$, esta ecuación se transforma en $w^2 - 10w - 1 = 0$ y la fórmula cuadrática proporciona

$$w = e^x = \frac{10 \pm \sqrt{104}}{2} = 5 \pm \sqrt{26}.$$

Ya que e^x siempre es positiva, rechazamos la posibilidad de que e^x tenga el valor negativo $5 - \sqrt{26}$. Por lo tanto,

$$e^x = 5 + \sqrt{26}$$

$$x = \ln(5 + \sqrt{26}) \qquad \text{Convertir a firma logarítmica.}$$

$$x = 2.312\ldots \approx 2.31 \qquad \text{Aproximar con un graficadora.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 31.

Resolución de ecuaciones logarítmicas

Cuando resolvemos ecuaciones logarítmicas algebraicamente, es importante llevar un registro del dominio de cada expresión en la ecuación que se está resolviendo. Un método algebraico particular puede introducir soluciones extrañas o, peor aún, *perder* algunas soluciones válidas, como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación logarítmica

Resuelva $\log x^2 = 2$

SOLUCIÓN

Método 1 Utilice la propiedad uno a uno de los logaritmos.

$$\log x^2 = 2$$

$$\log x^2 = \log 10^2 \qquad y = \log 10^y$$

$$x^2 = 10^2 \qquad \text{Propiedad uno a uno.}$$

$$x^2 = 100 \qquad 10^2 = 100$$

$$x = 10 \quad \text{o} \quad x = -10$$

continúa

Método 2 Cambie la ecuación de la forma logarítmica a la forma exponencial.

$$\log x^2 = 2$$
$$x^2 = 10^2 \qquad \text{Cambiar a la forma exponencial.}$$
$$x^2 = 100 \qquad 10^2 = 100$$
$$x = 10 \quad \text{o} \quad x = -10$$

Método 3 (incorrecto) Utilice la regla de la potencia de los logaritmos.

$$\log x^2 = 2$$
$$2 \log x = 2 \qquad \text{Regla de la potencia, aplicada de manera incorrecta.}$$
$$\log x = 1 \qquad \text{Dividir entre 2.}$$
$$x = 10 \qquad \text{Cambiar a la forma exponencial.}$$

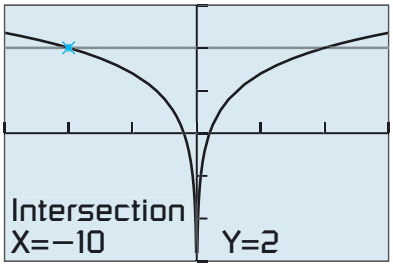
Respalde gráficamente

La figura 3.33 muestra que las gráficas de $f(x) = \log x^2$ y $y = 2$ se intersecan cuando $x = -10$. Por la simetría de las gráficas debido a que f es una función par, podemos ver que $x = 10$ también es una solución.

Interprete

El método 1 y el 2 son correctos. El método 2 falla debido a que el dominio de $\log x^2$ es el conjunto de todos los reales diferentes de cero, pero el dominio de $\log x$ sólo comprende a los números reales positivos. La solución correcta incluye a 10 y -10, puesto que estos dos valores de x hacen verdadera la ecuación original.

Ahora resuelva el ejercicio 25.



[–15, 15] por [–3, 3]

FIGURA 3.33 Gráficas de $f(x) = \log x^2$ y $y = 2$ (ejemplo 3).

El método 3 anterior viola una condición fácil de pasar por alto de la regla de la potencia $\log_b R^c = c \log_b R$: que la regla se cumple *si* R es *positiva*. En la expresión $\log x^2$, x desempeña el papel de R, y x puede ser -10, que *no* es positivo. Puesto que la manipulación algebraica de una ecuación logarítmica puede producir expresiones con dominios diferentes, con frecuencia una solución gráfica es menos proclive al error.

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación logarítmica

Resuelva $\ln(3x - 2) + \ln(x - 1) = 2 \ln x$.

SOLUCIÓN

Para utilizar el método de la intersección x, reescribimos la ecuación como

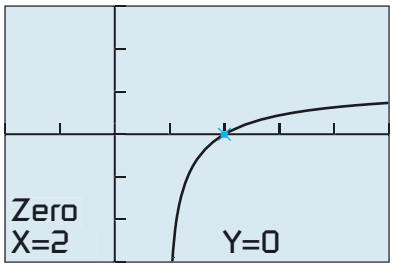
$$\ln(3x - 2) + \ln(x - 1) - 2 \ln x = 0,$$

y graficamos

$$f(x) = \ln(3x - 2) + \ln(x - 1) - 2 \ln x,$$

como se muestra en la figura 3.34. La intersección x es $x = 2$, que es la solución para la ecuación.

Ahora resuelva el ejercicio 35.



[–2, 5] por [–3, 3]

FIGURA 3.34 El cero de $f(x) = \ln(3x - 2) + \ln(x - 1) - 2 \ln x$ es $x = 2$ (ejemplo 4).

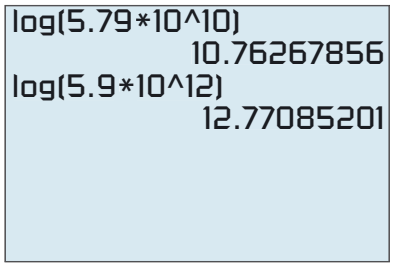


FIGURA 3.35 Plutón está dos órdenes de magnitud más lejos del Sol que Mercurio.

Órdenes de magnitud y modelos logarítmicos

Al comparar cantidades, en ocasiones sus tamaños abarcan un rango amplio. Ésta es la razón por la que se desarrolló la notación científica.

Por ejemplo, el planeta Mercurio está 57.9 mil millones de metros del Sol; mientras que Plutón está a 5,900 mil millones de metros del Sol, más o menos, ¡100 veces más lejos! En notación científica, Mercurio está a 5.79×10^{10} m del Sol y Plutón está a 5.9×10^{12} m del Sol. Así que la distancia de Plutón es 2 potencias de diez mayor que la distancia de Mercurio. Con base en la figura 3.35, vemos que la diferencia en los logaritmos comunes de estas dos distancias es alrededor de 2. El logaritmo común de una cantidad positiva es su **orden de magnitud**. Así, expresamos que la distancia de Plutón al Sol es 2 órdenes de magnitud mayor que Mercurio.

Los órdenes de magnitud pueden usarse para comparar cualesquier cantidades similares:

- Un kilómetro es 3 órdenes de magnitud mayor que un metro.
- Un dólar es 2 órdenes de magnitud mayor que un centavo.
- Un caballo que pesa 400 kg es 4 órdenes de magnitud más pesado que un ratón de 40 g.
- La ciudad de Nueva York con 8 millones de personas es 6 órdenes de magnitud mayor que Earmuff Junction, que tiene una población de 8 personas.

EXPLORACIÓN 1 **Comparación de notación científica y logaritmos comunes**

1. Con una calculadora calcule $(4 \cdot 10)$, $\log (4 \cdot 10^2)$, $\log (4 \cdot 10^3)$, . . . , $\log (4 \cdot 10^{10})$.
2. ¿Cuál es el patrón en las partes enteras de estos números?
3. ¿Cuál es el patrón de sus partes decimales?
4. ¿Cuántos órdenes de magnitud es mayor $4 \cdot 10^{10}$ que $4 \cdot 10$?

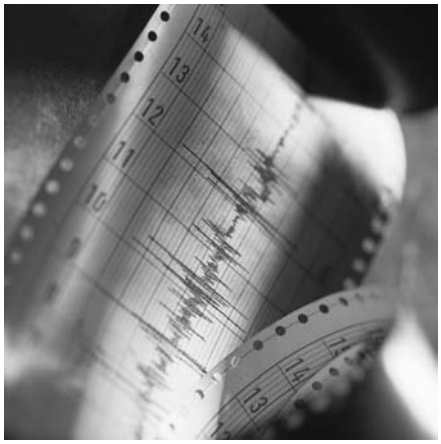
Los órdenes de magnitud tienen muchas aplicaciones. Para un sonido o ruido, el *bel*, mencionado en la sección 3.3, mide el orden de magnitud de su intensidad comparada con el umbral de audición. Por ejemplo, un sonido de 3 bels o 30 dB (decibeles) tiene una intensidad de sonido 3 órdenes de magnitud por arriba del umbral de audición.

Los órdenes de magnitud también se utilizan para comparar la intensidad de los terremotos y la acidez de soluciones químicas. Centraremos nuestra atención en estas dos aplicaciones.

Como se mencionó en el ejercicio 52 de la sección 3.4, la magnitud, R, en la *escala Richter* de un terremoto es

$$R = \log \frac{a}{T} + B,$$

donde a es la amplitud en micrómetros (μm) del movimiento vertical del suelo en la estación receptora, T es el periodo de la onda sísmica asociada en segundos, y B toma en cuenta el debilitamiento de la onda sísmica con el aumento de la distancia con respecto al centro del terremoto.



EJEMPLO 5 Comparación de intensidades de terremotos

¿Cuántas veces fue más severo el terremoto de 2001 en Gujarat, India ($R_1 = 7.9$) que el terremoto de 1999 en Atenas, Grecia ($R_2 = 5.9$)?

SOLUCIÓN

Modele

La severidad de un terremoto se mide por la amplitud asociada. Sea a_1 la amplitud para el terremoto de Gujarat y a_2 la amplitud para el terremoto de Atenas. Entonces

$$R_1 = \log\frac{a_1}{T} + B = 7.9$$

$$R_2 = \log\frac{a_2}{T} + B = 5.9$$

Resuelva algebraicamente Buscamos la razón de las intensidades a_1/a_2:

$$\left(\log\frac{a_1}{T} + B\right) - \left(\log\frac{a_2}{T} + B\right) = R_1 - R_2$$

$$\log\frac{a_1}{T} - \log\frac{a_2}{T} = 7.9 - 5.9 \qquad B - B = 0$$

$$\log\frac{a_1}{a_2} = 2 \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = 10^2 = 100$$

Interprete

Una diferencia de 2 en la escala Richter corresponde a una razón de 2 potencias de 10, o $10^2 = 100$. Por lo que el terremoto de Gujarat fue 100 veces más fuerte que el terremoto de Atenas.

Ahora resuelva el ejercicio 45.

En química, la acidez de una solución acuosa se mide por la concentración de iones de hidrógeno en la solución (en moles por litro). La concentración de iones hidrógeno se escribe $[H^+]$. Puesto que tales concentraciones por lo regular incluyen potencias *negativas* de diez, se utilizan órdenes *negativos* de magnitud para comparar niveles de acidez. La medida de acidez usada es el **pH**, el negativo del logaritmo común de la concentración de iones hidrógeno:

$$\text{pH} = -\log [H^+]$$

Soluciones más ácidas tienen mayores concentraciones de ión hidrógeno y valores menores del pH.

EJEMPLO 6 Comparación de acidez química

Algunos vinagres especialmente ácidos tiene un pH de 2.4 y una caja de bicarbonato de sodio tiene un pH de 8.4.

a) ¿Cuáles son sus concentraciones de ión hidrógeno?

b) ¿Cuántas veces es mayor la concentración de iones hidrógeno del vinagre que el del bicarbonato de sodio?

c) ¿En cuántos órdenes de magnitud difieren las concentraciones?

SOLUCIÓN

a) Vinagre: $-\log [H^+] = 2.4$

$$\log [H^+] = -2.4$$

$$[H^+] = 10^{-2.4} \approx 3.98 \times 10^{-3} \text{ moles por litro.}$$

Bicarbonato de sodio: $-\log [H^+] = 8.4$

$$\log [H^+] = -8.4$$

$$[H^+] = 10^{-8.4} \approx 3.98 \times 10^{-9} \text{ moles por litro.}$$

b) $$\frac{[H^+] \text{ del vinagre}}{[H^+] \text{ del bicarbonato de sodio}} = \frac{10^{-2.4}}{10^{-8.4}} = 10^{(-2.4)-(-8.4)} = 10^6$$

c) La concentración de ión hidrógeno del vinagre es 6 órdenes de magnitud mayor que el del bicarbonato de sodio, exactamente la diferencia en sus valores del pH.

Ahora resuelva el ejercicio 47.

Ley de enfriamiento de Newton

Un objeto que se ha calentando se enfriará a la temperatura del medio en que se coloca, tal como el aire o el agua circundante. La temperatura T del objeto en el instante t puede modelarse mediante

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

para un valor apropiado de k, donde

T_m = temperatura del medio circundante,

T_0 = temperatura inicial del objeto.

Este modelo supone que el medio circundante, aunque toma calor del objeto, en esencia se mantiene a temperatura constante. En honor del físico y matemático inglés Isaac Newton (1643-1727), este modelo se denomina **Ley de enfriamiento de Newton**.

EJEMPLO 7 Aplicación de la ley de enfriamiento de Newton

Un huevo cocido a temperatura de 96 °C se coloca en agua a 16 °C para enfriarlo. Cuatro minutos después la temperatura del huevo es 45 °C. Utilice la ley de enfriamiento de Newton para determinar el momento en que el huevo estará a 20 °C.

SOLUCIÓN

Modele Ya que $T_0 = 96$ y $T_m = 16$, $T_0 - T_m = 80$ y

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt} = 16 + 80e^{-kt}.$$

Para determinar el valor de k utilizamos el hecho que $T = 45$ cuando $t = 4$.

$$45 = 16 + 80e^{-4k}$$

$$\frac{29}{80} = e^{-4k} \qquad \text{Restar 16, luego dividir entre 80.}$$

$$\ln\frac{29}{80} = -4k \qquad \text{Cambiar a la forma logarítmica.}$$

$$k = -\frac{\ln(29/80)}{4} \qquad \text{Dividir entre } -4.$$

$$k = 0.253\ldots$$

Guardamos el valor de esta k ya que es parte de nuestro modelo (consulte la figura 3.36).

continúa

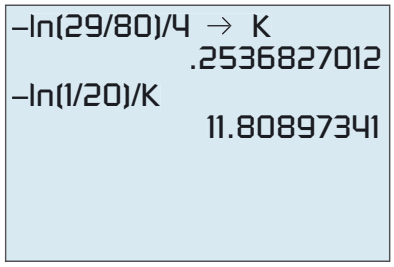
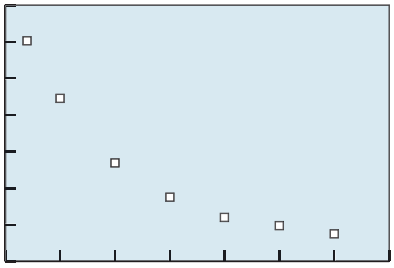


FIGURA 3.36 Cómo almacenar y utilizar la constante k.

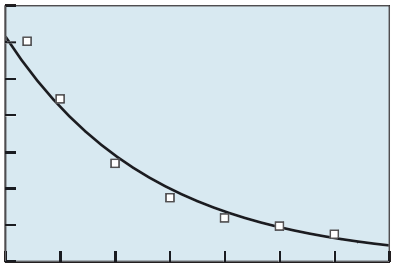
Tabla 3.23 Datos de temperatura de un experimento con una CBL™

Tiempo t	Temp T	$T - T_m$
2	64.8	60.3
5	49.0	44.5
10	31.4	26.9
15	22.0	17.5
20	16.5	12.0
25	14.2	9.7
30	12.0	7.5



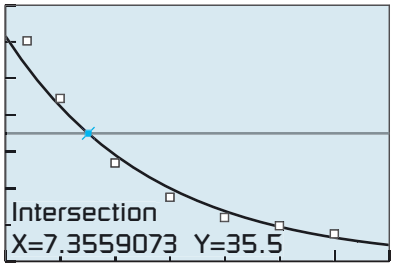
[0, 35] por [0, 70]

a)



[0, 35] por [0, 70]

b)



[0, 35] por [0, 70]

c)

FIGURA 3.37 Diagrama de dispersión y gráficas para el ejemplo 8.

Resuelva algebraicamente Para determinar t cuando $T = 20°C$, resolvemos la ecuación

$$20 = 16 + 80e^{-kt}$$

$$\frac{4}{80} = e^{-kt} \qquad \text{Restar 16, luego dividir entre 80.}$$

$$\ln \frac{4}{80} = -kt \qquad \text{Cambiar a forma logarítmica.}$$

$$t = -\frac{\ln(4/80)}{k} \approx 11.81 \qquad \text{Consulte la figura 3.36.}$$

Interprete La temperatura del huevo será de 20°C al cabo de alrededor de 11.81 minutos (11 min 49 seg).

Ahora resuelva el ejercicio 49.

Podemos reescribir de la ley de enfriamiento de Newton en la forma siguiente:

$$T(t) - T_m = (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

Utilizamos esta forma de la ley de enfriamiento de Newton cuando se modela la temperatura usando datos reunidos en un experimento real. Puesto que la diferencia $T - T_m$ es una función exponencial del tiempo t, podemos utilizar regresión exponencial sobre $T - T_m$ contra t para obtener un modelo, como se ilustra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Modelación con la ley de enfriamiento de Newton

En un experimento, una sonda de temperatura conectada a un dispositivo CBL™ (calculadora de laboratorio) se sacó de una taza de café caliente y se colocó en un vaso con agua fría. Las primeras dos columnas de la tabla 3.23 muestran los datos resultantes para el tiempo t (en segundos desde que la sonda se colocó en el agua) y la temperatura T (en °C). En la tercera columna, la información de la temperatura está *re-expresada* restando la temperatura del agua, que fue 4.5°C.

a) Estime la temperatura del café.

b) Estime el instante cuando la lectura de la sonda de temperatura fue 40°C.

SOLUCIÓN

Modele La figura 3.37a muestra un diagrama de dispersión de los datos re-expresados de la temperatura. Usando regresión exponencial, obtenemos el modelo siguiente:

$$T(t) - 4.5 = 61.656 \times 0.92770^t$$

La figura 3.37b muestra la gráfica de este modelo con el diagrama de dispersión de los datos. Puede ver que la curva se ajusta muy bien a los datos.

a) Resuelva algebraicamente En el modelo podemos ver que $T_0 - T_m \approx 61.656$. Por lo que

$$T_0 \approx 61.656 + T_m = 61.656 + 4.5 \approx 66.16$$

b) Resuelva gráficamente La figura 3.37c muestra que la gráfica de $T(t) - 4.5 = 61.656 \times 0.92770^t$ interseca $y = 40 - 4.5 = 35.5$ cuando $t \approx 7.36$.

Interprete La temperatura del café era aproximadamente 66.2°C, y la lectura de la sonda era 40°C aproximadamente 7.4 s después de que se colocó en el agua.

Ahora resuelva el ejercicio 51.

Transformación logarítmica

En el ejemplo 7 de la sección 3.4 aprendimos que los pares de datos (x, y) que se ajustan a un modelo potencia tienen una relación lineal cuando se re-expresan como pares $(\ln x, \ln y)$. Ahora ilustraremos que pares de datos (x, y) que se ajustan a modelos de regresión logarítmica o exponencial también pueden *linealizarse* por medio de una *transformación logarítmica*.

Modelos de regresión relacionados a una transformación logarítmica

- **Regresión lineal** $y = ax + b$
- **Regresión logaritmo natural**: $y = a + b \ln x$
- **Regresión exponencial**: $y = a \cdot b^x$
- **Regresión potencia**: $y = a \cdot x^b$

Cuando examinamos un diagrama de dispersión de pares de datos (x, y), debemos preguntar si uno de estos cuatro modelos de regresión podría ser la mejor elección. Si los datos graficados parecen ser lineales, una regresión lineal podría ser la mejor opción. Por otro lado, cuando visualmente es evidente que la gráfica no es lineal, la mejor elección podría ser una regresión logarítmica natural, exponencial o potencia.

El conocimiento de la forma de las gráficas de las funciones logarítmica, exponencial y potencia nos ayuda a elegir un modelo apropiado. Además, con frecuencia es útil re-expresar los pares de datos (x, y) como $(\ln x, y)$, $(x, \ln y)$ o $(\ln x, \ln y)$ y crear diagramas de dispersión de los datos transformados. Si cualquiera de los diagramas de dispersión parece ser lineal, entonces quizá tenemos una opción para un modelo apropiado. Consulte la página 329.

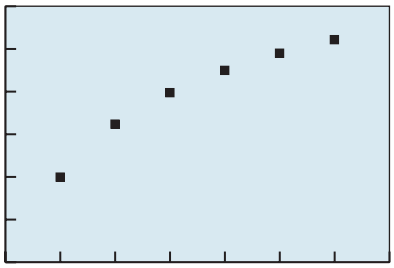
Los tres modelos de regresión pueden justificarse de forma algebraica. Damos la justificación para la regresión exponencial, y dejamos, como ejercicios, las otras dos justificaciones.

$$
\begin{aligned}
v &= ax + b \\
\ln y &= ax + b && v = \ln y \\
y &= e^{ax+b} && \text{Cambiar a forma exponencial.} \\
y &= e^{ax} \cdot e^{b} && \text{Usar las leyes de exponentes.} \\
y &= e^{b} \cdot (e^{a})^{x} \\
y &= c \cdot d^{x} && \text{Sea } c = e^{b} \text{ y } d = e^{a}.
\end{aligned}
$$

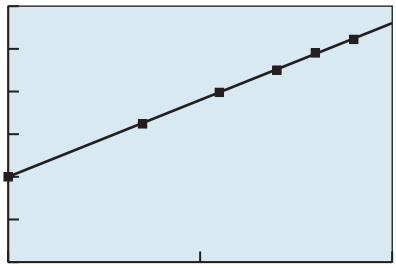
El ejemplo 9 ilustra cómo una combinación del conocimiento de las formas de las gráficas de las funciones logarítmica, exponencial y potencia se utiliza junto con la transformación logarítmica para elegir una curva que se ajuste mejor.

Tres tipos de transformaciones logarítmicas

1. Regresión logaritmo natural, re-expresada: $(x, y) \rightarrow (\ln x, y)$



[0, 7] por [0, 30]
(x, y) datos
a)

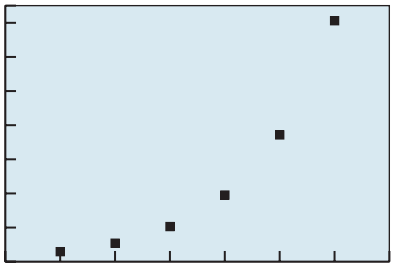


[0, 2] por [0, 30]
$(\ln x, y) = (u, y)$ datos con el modelo de regresión lineal $y = au + b$
b)

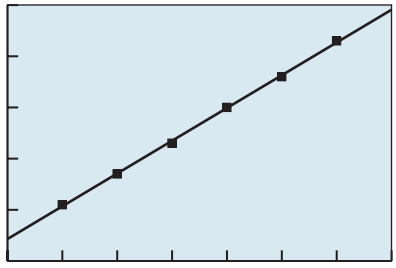
Conclusión:

$y = a \ln x + b$ es el modelo logarítmico de regresión para los datos (x, y).

2. Regresión exponencial, re-expresada: $(x, y) \rightarrow (x, \ln y)$



[0, 7] por [0, 75]
(x, y) datos
a)

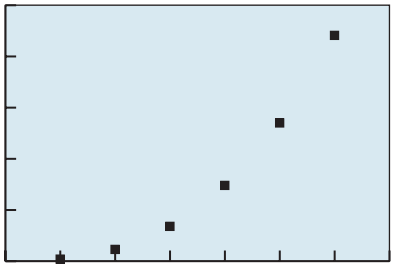


[0, 7] por [0, 5]
$(x, \ln y) = (x, v)$ datos con el modelo de regresión lineal $v = ax + b$
b)

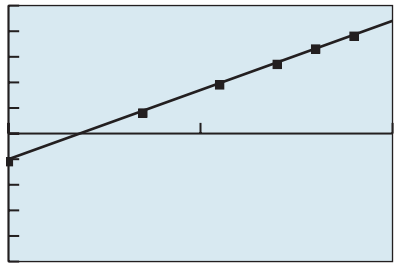
Conclusión:

$y = c(d^x)$, donde $c = e^b$ y $d = e^a$, es el modelo exponencial de regresión para los datos(x, y).

3. Regresión potencia, re-expresada: $(x, y) \rightarrow (\ln x, \ln y)$



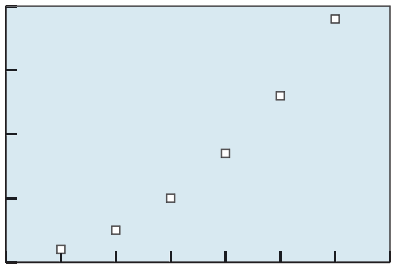
[0, 7] por [0, 50]
(x, y) datos
a)



[0, 2] por [–5, 5]
$(\ln x, \ln y) = (u, v)$ datos con el modelo de regresión lineal $v = au + b$
b)

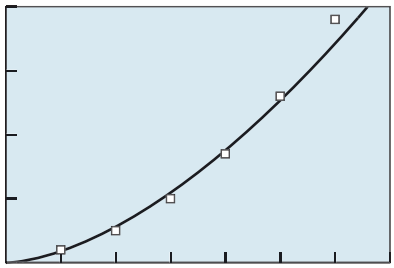
Conclusión:

$y = c(x^a)$, donde $c = e^b$, es el modelo potencia de regresión para los datos (x, y).



[0, 7] por [0, 40]

FIGURA 3.38 Un diagrama de dispersión para los datos originales del ejemplo 9.



[0, 7] por [0, 40]

FIGURA 3.40 Un modelo de regresión potencia se ajusta a los datos del ejemplo 9.

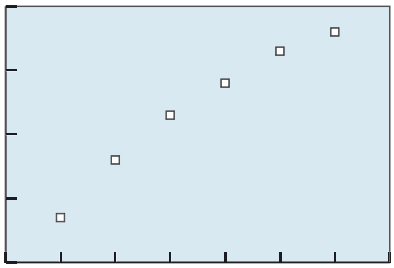
EJEMPLO 9 Selección de un modelo de regresión

Decida si estos datos pueden modelarse mejor mediante regresión logarítmica, exponencial o potencia. Determine el modelo de regresión apropiado.

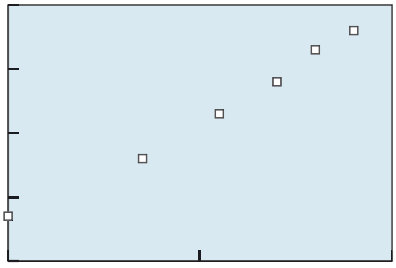
x	1	2	3	4	5	6
y	2	5	10	17	26	38

SOLUCIÓN La forma de la gráfica de los datos de la figura 3.38 sugiere que los datos podrían modelarse mediante una función exponencial o potencia.

La figura 3.39a muestra la gráfica de $(x, \ln y)$ y la figura 3.39b muestra la gráfica de $(\ln x, \ln y)$. De éstas dos, la de $(\ln x, \ln y)$ parece ser más lineal, así que determinamos el modelo potencia de regresión para los datos originales.



[0, 7] por [0, 4]
$(x, \ln y)$
a)



[0, 2] por [0, 4]
$(\ln x, \ln y)$
b)

FIGURA 3.39 Dos re-expresiones (transformaciones) logarítmicas de los datos del ejemplo 9.

La figura 3.40 muestra el diagrama de dispersión de los datos originales (x, y) con la gráfica del modelo de regresión $y = 1.7910x^{1.6472}$ superpuesta.

Ahora resuelva el ejercicio 55.

REPASO RÁPIDO 3.5 *(Para obtener ayuda consulte las secciones R.1 y 1.4)*

En los ejercicios del 1 al 4 pruebe que cada función, en el par dado, es la inversa de la otra.

1. $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = \ln(x^{1/2})$

2. $f(x) = 10^{x/2}$ y $g(x) = \log x^2$, $x > 0$

3. $f(x) = (1/3) \ln x$ y $g(x) = e^{3x}$

4. $f(x) = 3 \log x^2$, $x > 0$ y $g(x) = 10^{x/6}$

En los ejercicios 5 y 6 escriba el número en notación científica.

5. La distancia media de Júpiter al Sol es alrededor de 778,300,000 km.

6. Un núcleo atómico tiene un diámetro de casi 0.000000000000001 m.

En los ejercicios 7 y 8 escriba el número en forma decimal.

7. El número de Avogadro es alrededor de 6.02×10^{23}.

8. La unidad de masa atómica es casi 1.66×10^{-27} kg.

En los ejercicios 9 y 10 utilice notación científica para simplificar la expresión (deje su respuesta en notación científica).

9. $(186{,}000)(31{,}000{,}000)$ **10.** $\dfrac{0.0000008}{0.000005}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.5

En los ejercicios del 1 al 10 determine algebraicamente la solución exacta y compruébela por sustitución en la ecuación original.

1. $36\left(\frac{1}{3}\right)^{x/5} = 4$

2. $32\left(\frac{1}{4}\right)^{x/3} = 2$

3. $2 \cdot 5^{x/4} = 250$

4. $3 \cdot 4^{x/2} = 96$

5. $2(10^{-x/3}) = 20$

6. $3(5^{-x/4}) = 15$

7. $\log x = 4$

8. $\log_2 x = 5$

9. $\log_4 (x - 5) = -1$

10. $\log_4 (1 - x) = 1$

En los ejercicios del 11 al 18 resuelva algebraicamente cada ecuación. Obtenga una aproximación numérica a su solución y compruébela sustituyendo en la ecuación original.

11. $1.06^x = 4.1$

12. $0.98^x = 1.6$

13. $50e^{0.035x} = 200$

14. $80e^{0.045x} = 240$

15. $3 + 2e^{-x} = 6$

16. $7 - 3e^{-x} = 2$

17. $3 \ln (x - 3) + 4 = 5$

18. $3 - \log (x + 2) = 5$

En los ejercicios del 19 al 24 indique el dominio de cada función. Luego relacione la función con su gráfica (cada gráfica que se muestra tiene una ventana de $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$.

19. $f(x) = \log [x(x + 1)]$

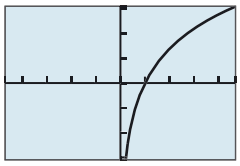
20. $g(x) = \log x + \log (x + 1)$

21. $f(x) = \ln \frac{x}{x + 1}$

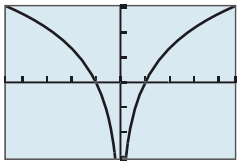
22. $g(x) = \ln x - \ln (x + 1)$

23. $f(x) = 2 \ln x$

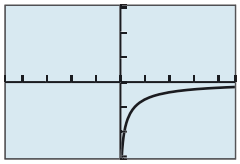
24. $g(x) = \ln x^2$



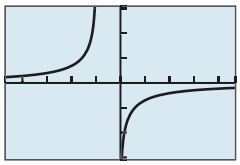
a)



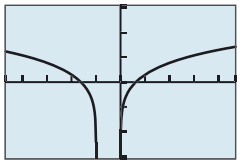
b)



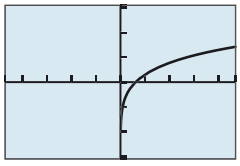
c)



d)



e)



f)

En los ejercicios del 25 al 38 resuelva cada ecuación por el método que elija. Respalde su solución mediante un segundo método.

25. $\log x^2 = 6$

26. $\ln x^2 = 4$

27. $\log x^4 = 2$

28. $\ln x^6 = 12$

29. $\frac{2^x - 2^{-x}}{3} = 4$

30. $\frac{2^x + 2^{-x}}{2} = 3$

31. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 4$

32. $2e^{2x} + 5e^x - 3 = 0$

33. $\frac{500}{1 + 25e^{0.3x}} = 200$

34. $\frac{400}{1 + 95e^{-0.6x}} = 150$

35. $\frac{1}{2} \ln (x + 3) - \ln x = 0$

36. $\log x - \frac{1}{2} \log (x + 4) = 1$

37. $\ln (x - 3) + \ln (x + 4) = 3 \ln 2$

38. $\log (x - 2) + \log (x + 5) = 2 \log 3$

En los ejercicios del 39 al 44 determine en cuántos órdenes de magnitud difieren las cantidades.

39. Un billete de \$100 un una moneda de 10 centavos.

40. Un canario que pesa 20 g y una gallina que pesa 2 kg.

41. Un terremoto con intensidad 7 en la escala Richter y uno de 5.5.

42. Jugo de limón con pH = 2.3 y cerveza con pH = 4.1.

43. Las intensidades de sonido de una remachadora a 95 dB y una conversación ordinaria a 65 dB.

44. Las intensidades de sonido de tráfico en la ciudad a 70 dB y el susurro de las hojas a 10 dB.

45. **Comparación de terremotos** ¿Cuántas veces fue más fuerte el terremoto de 1978 en la ciudad de México ($R = 7.9$) que el terremoto de 1994 en Los Ángeles ($R = 6.6$)?

46. **Comparación de terremotos** ¿Cuántas veces fue más fuerte el terremoto de 1995 en Kobe, Japón ($R = 7.2$) que el terremoto de 1994 en Los Ángeles ($R = 6.6$)?

47. **Acidez química** El pH de agua carbonatada es 3.9 y el pH de una solución casera de amoníaco es 11.9.

a) ¿Cuáles son sus concentraciones de ión hidrógeno?

b) ¿Cuántas veces es mayor la concentración de ión hidrógeno del agua carbonatada que el del amoniaco?

c) ¿En cuántos órdenes de magnitud difieren las concentraciones?

48. **Acidez química** El ácido gástrico tiene un pH de alrededor de 2.0 y la sangre tiene un pH de 7.4.

a) ¿Cuáles son sus concentraciones de ión hidrógeno?

b) ¿Cuántas veces es mayor la concentración de ión hidrógeno del ácido gástrico que el de la sangre?

c) ¿En cuántos órdenes de magnitud difieren las concentraciones?

49. Ley de enfriamiento de Newton Una taza de café se enfrió de 92 °C a 50 °C en 12 minutos, en una habitación a 22°C. ¿Cuánto tiempo tardará la taza en enfriarse a 30 °C?

50. Ley de enfriamiento de Newton Un pastel se sacó de un horno a 350 °F y se enfrió a 120 °F al cabo de 20 minutos, en una habitación a 65 °F. ¿Cuánto tardará en enfriarse el pastel a 90 °F?

51. Experimento con la ley de enfriamiento de Newton Un termómetro se saca de una taza de café y se coloca en agua con una temperatura (T_m) de 10°C. En la tabla 3.24 se reunieron los datos durante los siguientes 30 segundos.

Tabla 3.24 Datos experimentales

Tiempo t	Temp T	$T - T_m$
2	80.47	70.47
5	69.39	59.39
10	49.66	39.66
15	35.26	25.26
20	28.15	18.15
25	23.56	13.56
30	20.62	10.62

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos $T - T_m$.

b) Determine una ecuación de regresión exponencial para los datos $T - T_m$. Superponga su gráfica al diagrama de dispersión.

c) Estime la lectura del termómetro cuando se sacó del café.

52. Experimento con la ley de enfriamiento de Newton Un termómetro se saca de una taza con chocolate caliente y se coloca en agua con una temperatura $T_m = 0$ °C. En la tabla 3.25 se reunieron los datos durante los siguientes 30 segundos.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos $T - T_m$.

b) Determine una ecuación de regresión exponencial para los datos $T - T_m$. Superponga su gráfica sobre el diagrama de dispersión.

c) Estime la lectura del termómetro cuando se sacó del chocolate caliente.

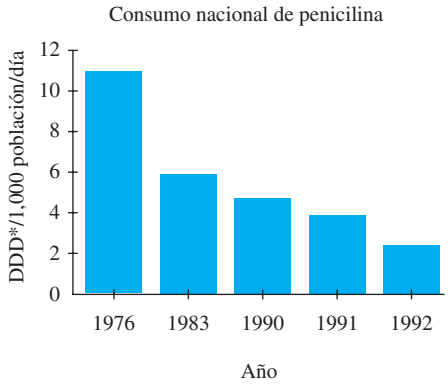
Tabla 3.25 Datos experimentales

Tiempo t	Temp T	$T - T_m$
2	74.68	74.68
5	61.99	61.99
10	34.89	34.89
15	21.95	21.95
20	15.36	15.36
25	11.89	11.89
30	10.02	10.02

53. Uso de la penicilina En 1980, el uso de la penicilina se generalizó tanto en Hungría que se volvió prácticamente inútil contra la sinusitis e infecciones del oído. Ahora el uso de antibióticos más efectivos ha provocado una disminución en la resistencia a la penicilina. La gráfica de barras muestra el uso de la penicilina en Hungría para años seleccionados.

a) En la gráfica de barras es posible leer que las parejas de datos son aproximadamente (1, 11), (8, 6), (15, 4.8), (16, 4) y (17, 2.5), usando $t = 1$ para 1976, $t = 8$ para 1983 y así sucesivamente. Complete un diagrama de dispersión para estos datos.

b) Escriba para aprender Analice si la gráfica de barras mostrada o el diagrama de dispersión que hizo representan mejor a los datos y por qué.



*Dosis Diaria Definida.
Fuente: Science, vol. 264, 15 de abril de 1994. American Association for the Advancement of Science.

54. Escriba para aprender ¿Cuál modelo de regresión utilizaría para los datos del ejercicio 53? Analice las diferentes opciones y explique el por qué de su elección. Respalde su redacción con tablas y gráficas como sea necesario.

Escriba para aprender En los ejercicios del 55 al 58 se dan las tablas de los pares (x, y). Determine si el mejor modelo para los datos es una ecuación de regresión lineal, logarítmica, exponencial o potencia. Explique su elección. Respalde su redacción con tablas y gráficas como sea necesario.

55.

x	1	2	3	4
y	3	4.4	5.2	5.8

56.

x	1	2	3	4
y	6	18	54	162

57.

x	1	2	3	4
y	3	6	12	24

58.

x	1	2	3	4
y	5	7	9	11

Preguntas de examen estandarizado

59. Verdadero o falso El orden de magnitud de un número positivo es su logaritmo natural. Justifique su respuesta.

60. Verdadero o falso De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, un objeto tenderá a la temperatura del medio que lo rodea. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 61 al 64 resuelva el problema sin utilizar una calculadora.

61. Opción múltiple Resuelva $2^{3x-1} = 32$.

A) $x = 1$ **B)** $x = 2$ **C)** $x = 4$

D) $x = 11$ **E)** $x = 13$

62. Opción múltiple Resuelva $\ln x = -1$.

A) $x = -1$ **B)** $x = 1/e$ **C)** $x = 1$

D) $x = e$ **E)** No hay solución posible.

63. Opción múltiple ¿Cuántas veces fue más fuerte el terremoto de 2001 en Arequipa, Perú ($R_1 = 8.1$) que el terremoto doble de 1998 en la provincia de Takhar, Afganistán ($R_2 = 6.1$)?

A) 2 **B)** 6.1 **C)** 8.1

D) 14.2 **E)** 100

64. Opción múltiple La ley de enfriamiento de Newton es

A) Un modelo exponencial **B)** Un modelo lineal

C) Un modelo logarítmico **D)** Un modelo logístico

E) Un modelo potencia

Exploraciones

En los ejercicios 65 y 66 utilice la tabla 3.26. Determine si una ecuación de regresión lineal, logarítmica, exponencial, potencia o logística constituye el mejor modelo para los datos. Explique el por qué de su elección. Respalde su redacción con tablas y gráficas, como considere necesario.

Tabla 3.26 Poblaciones de dos estados de Estados Unidos (en miles)

Año	Alaska	Hawai
1900	63.6	154
1910	64.4	192
1920	55.0	256
1930	59.2	368
1940	72.5	423
1950	128.6	500
1960	226.2	633
1970	302.6	770
1980	401.9	965
1990	550.0	1108
2000	626.9	1212

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.

65. Escriba para aprender Modelación poblacional ¿Cuál ecuación de regresión es el mejor modelo para la población de Alaska?

66. Escriba para aprender Modelación poblacional ¿Cuál ecuación de regresión es el mejor modelo para la población de Hawai?

67. Actividad en grupo Modelación poblacional La función

$$f(x) = k \cdot e^{-cx^2},$$

donde c y k son constantes positivas, es una curva en forma de campana que es útil en probabilidad y estadística.

a) Grafique f para $c = 1$ y $k = 0.1, 0.5, 1, 2, 10$. Explique el efecto del cambio en k.

b) Grafique f para $k = 1$ y $c = 0.1, 0.5, 1, 2, 10$. Explique el efecto del cambio en c.

Ampliación de las ideas

68. Escriba para aprender Pruebe, si $u/v = 10^n$, para $u > 0$ y $v > 0$, y luego $\log u - \log v = n$. Explique cómo este resultado relaciona a potencias de diez y órdenes de magnitud.

69. Energía potencial La energía potencial E (la energía almacenada para usarla posteriormente) entre dos iones en cierta estructura molecular se modela mediante la función

$$E = -\frac{5.6}{r} + 10e^{-r/3}$$

donde r es la distancia que separa los núcleos.

a) Escriba para aprender Grafique esta función en la ventana $[-10, 10]$ por $[-10, 30]$ y explique cuál parte de la gráfica no representa esta situación de energía potencial.

b) Identifique una ventana de visualización que muestre la parte de la gráfica (con $r \leq 10$) que represente esta situación y determine el valor máximo para E.

70. En el ejemplo 8, el modelo de la ley de enfriamiento de Newton era

$$T(t) - T_m = (T_0 - T_m)e^{-kt} = 61.656 \times 0.92770^t$$

Determine el valor de k.

71. Justifique la conclusión hecha acerca de la regresión logarítmica natural de la página 329.

72. Justifique la conclusión realizada acerca de la regresión potencia de la página 329.

En los ejercicios del 73 al 78 resuelva la ecuación o la desigualdad.

73. $e^x + x = 5$

74. $e^{2x} - 8x + 1 = 0$

75. $e^x < 5 + \ln x$

76. $\ln |x| - e^{2x} \geq 3$

77. $2 \log x - 4 \log 3 > 0$

78. $2 \log (x + 1) - 2 \log 6 < 0$

3.6 Matemáticas financieras

Aprenderá acerca de...

- Interés capitalizable anualmente
- Interés capitalizable k veces por año
- Porcentaje de rendimiento anual
- Rendimiento porcentual anual
- Anualidades, valor futuro
- Préstamos e hipotecas, valor presente

. . . porque

La matemática financiera es la ciencia de hacer que su dinero trabaje para usted: ¡en realidad es información muy valiosa!

Interés capitalizable anualmente

En negocios, como dice el refrán, "el tiempo es dinero". Debemos pagar interés por el uso de bienes o del dinero a través del tiempo. Cuando pedimos prestado pagamos interés y cuando prestamos dinero recibimos interés. Cuando invertimos en una cuenta de ahorros, en realidad prestamos dinero al banco.

Suponga que un principal (o capital) de P dólares se invierten en una cuenta que produce una tasa de interés, r, expresada en forma decimal y calculada al final de cada año. Si A_n representa el monto total en la cuenta al final de n años, entonces el valor de la inversión sigue el patrón de crecimiento que se muestra en la tabla 3.27.

Tabla 3.27 Interés compuesto cada año

Tiempo en años	Monto en la cuenta
0	$A_0 = P =$ capital
1	$A_1 = P + P \cdot r = P(1 + r)$
2	$A_2 = A_1 \cdot (1 + r) = P(1 + r)^2$
3	$A_3 = A_2 \cdot (1 + r) = P(1 + r)^3$
⋮	⋮
n	$A = A_n = P(1 + r)^n$

Observe que éste es el patrón de crecimiento con porcentaje constante estudiado en la sección 3.2 y, por tanto, el valor de una inversión es una función exponencial del tiempo. Al interés capitalizable, o compuesto de esta manera, le llamamos **interés compuesto**, ya que el interés se convierte en parte de la inversión, así que el interés se genera sobre el mismo interés.

Interés compuesto anualmente

Si un principal, P, se invierte a una tasa fija de interés anual, r, calculado al final de cada año, entonces el valor de la inversión al cabo de n años, es

$$A = P(1 + r)^n,$$

donde r se expresa como un decimal.

EJEMPLO 1 Capitalización anual

Suponga que Quan Li invierte \$500 al 7% de interés compuesto cada año. Determine el valor de su inversión después de 10 años.

SOLUCIÓN Haciendo $P = 500$, $r = 0.07$ y $n = 10$,

$A = 500(1 + 0.07)^{10} = 983.575...$ Al redondear al centavo más cercano, vemos que el valor de la inversión de Quan Li después de 10 años es \$983.58.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Interés capitalizable *k* veces por año

Suponga que un capital P se invierte durante t años a una tasa de interés anual, r, capitalizable k veces durante un año. Entonces r/k es la tasa de interés por periodo de capitalización, y kt es el número de periodos de capitalización. El monto, A, en la cuenta después de t años es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}.$$

EJEMPLO 2 Capitalización mensual

Suponga que Roberto invierte \$500 al 9% de interés anual *capitalizable cada mes*, es decir, compuesto 12 veces en un año. Determine el valor de su inversión después de 5 años.

SOLUCIÓN Haciendo $P = 500$, $r = 0.09$, $k = 12$ y $t = 5$,

$$A = 500\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12(5)} = 782.840\ldots$$

Así que el valor de la inversión de Roberto después de 5 años es \$782.84.

Ahora resuelva el ejercicio 5.

Los problemas de los ejemplos 1 y 2 requirieron el cálculo de A. Los ejemplos 3 y 4 ilustran situaciones que piden determinar los valores de otras variables en la fórmula de interés compuesto.

EJEMPLO 3 Determinación del plazo de una inversión

Judy tiene \$500 para invertir al 9% de interés anual compuesto cada mes. ¿Cuánto tiempo le tomará a su inversión crecer a \$3,000?

SOLUCIÓN

Modele Sean $P = 500$, $r = 0.09$, $k = 12$ y $A = 3{,}000$ en la ecuación

$$A = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt},$$

y despeje a t.

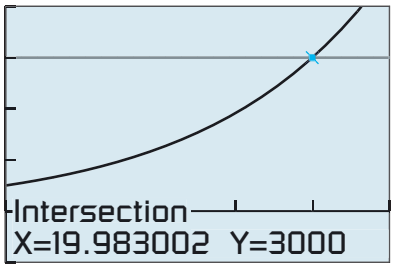
Resuelva gráficamente Para

$$3{,}000 = 500\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12t},$$

hacemos

$$f(t) = 500\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12t} \quad \text{y} \quad y = 3{,}000,$$

y luego determinamos el punto de intersección de las gráficas. La figura 3.41 muestra que esto ocurre en $t \approx 19.98$.



[0, 25] por [–1,000, 4,000]

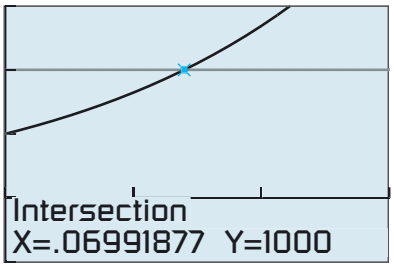
FIGURA 3.41 Gráfica para el ejemplo 3.

continúa

Confirme algebraicamente

$$\begin{aligned} 3{,}000 &= 500(1 + 0.09/12)^{12t} \\ 6 &= 1.0075^{12t} && \text{Dividir entre 500.} \\ \ln 6 &= \ln (1.0075^{12t}) && \text{Aplicar ln en cada lado.} \\ \ln 6 &= 12t \ln (1.0075) && \text{Regla de la potencia.} \\ t &= \frac{\ln 6}{12 \ln 1.0075} && \text{Dividir entre 12 ln 1.0075.} \\ &= 19.983\ldots && \text{Calcular.} \end{aligned}$$

Interprete Así tardará 20 años para que el valor de la inversión de Judy alcance (y exceda un poco a) \$3,000. ***Ahora resuelva el ejercicio 21.***



[0, 0.15] por [–500, 1,500]

FIGURA 3.42 Gráfica para el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Determinación de una tasa de interés

Stephen tiene \$500 para invertir. ¿Cuál es la tasa de interés anual, *compuesta trimestralmente* (cuatro veces por años), que se necesita para duplicar su dinero en 10 años?

SOLUCIÓN

Modele Haciendo $P = 500$, $k = 4$, $t = 10$ y $A = 1{,}000$ se obtiene la ecuación

$$1{,}000 = 500\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4(10)}$$

en donde despejamos a r.

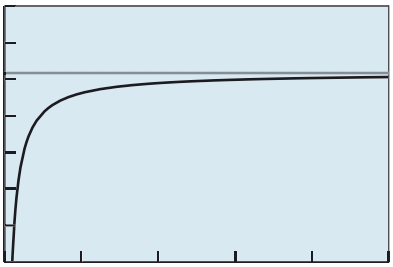
Resuelva gráficamente La figura 3.42 muestra que $f(r) = 500(1 + r/4)^{40}$ y $y = 1{,}000$ interseca en $r \approx 0.0699$ o $r = 6.99\%$.

Interprete La inversión de Stephen de \$500 se duplicará en 10 años a una tasa de interés anual de 6.99% compuesta cada trimestre.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

Porcentaje de rendimiento anual

En la exploración 1, \$1,000 se invierten durante 1 año a una tasa de interés de 10%. Investigamos el valor de la inversión al final de cada año conforme el número de periodos, k, se incrementa. En otras palabras, determinamos el valor "límite" de la expresión $1{,}000(1 + 0.1/k)^k$ conforme k toma valores enteros cada vez más grandes.



[0, 50] por [1,100, 1,107]

FIGURA 3.43 Gráfica para la exploración 1.

EXPLORACIÓN 1 **Aumento ilimitado en el número de periodos de capitalización**

Sea $A = 1{,}000\left(1 + \dfrac{0.1}{k}\right)^k$.

1. Complete una tabla de valores de A para $k = 10, 20, \ldots, 100$. ¿Qué patrón observa?
2. La figura 3.43 muestra las gráficas de la función $A(k) = 1{,}000(1 + 0.1/k)^k$ y la recta horizontal $y = 1{,}000e^{0.1}$. Interprete el significado de estas gráficas.

De la sección 3.1, recuerde que $e = \lim_{x \to \infty}(1 + 1/x)^x$. Por lo tanto, para una tasa de interés fija, r, si hacemos $x = k/r$,

$$\lim_{k \to \infty}\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k/r} = e.$$

Aún no sabemos lo suficiente sobre límites, pero con un poco de cálculo, podemos demostrar que $\lim_{k\to\infty} P(1 + r/k)^{kt} = Pe^{rt}$. So $A = Pe^{rt}$. Así que $A = Pe^{rt}$ es la fórmula utilizada cuando el interés se **capitaliza de forma continua**. En casi cualquier situación, puede usarse una de las siguientes dos fórmulas para calcular interés compuesto:

Interés compuesto-valor de una inversión

Suponga que un capital, P, se invierte a una tasa fija de interés anual. El valor de la inversión después de t años es

- $A = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$ cuando el interés se capitaliza k veces por año.
- $A = Pe^{rt}$ cuando el interés se capitaliza de forma continua.

X	Y_1
1	108.33
2	117.35
3	127.12
4	137.71
5	149.18
6	161.61
7	175.07

$Y_1 = 100e^{(0.08X)}$

FIGURA 3.44 Tabla de valores para el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Capitalización continua

Suponga que LaTasha invierte \$100 al 8% de interés anual capitalizable de forma continua. Determine el valor de su inversión al final de cada uno de los años 1, 2,..., 7.

SOLUCIÓN Al sustituir en la fórmula para capitalización continua, obtenemos $A(t) = 100e^{0.08t}$. La figura 3.44 muestra los valores de $y_1 = A(x) = 100e^{0.08x}$ para $x = 1, 2,..., 7$. Por ejemplo, el valor de su inversión es \$149.18 al final de 5 años y \$175.07 al final de 7 años. *Ahora resuelva el ejercicio 9.*

Rendimiento porcentual anual

Con tantas tasas de interés diferentes y métodos de capitalización, en ocasiones es difícil para un consumidor comparar dos opciones diferentes. Por ejemplo, ¿qué preferiría: una inversión que generara 8.75% anual compuesto cada trimestre, o una que generara 8.7% capitalizable cada mes?

Una base común para la comparación de inversiones es el **rendimiento porcentual anual (RPA)** (que también se conoce como tasa equivalente anual) la tasa porcentual que, compuesta anualmente, produciría el mismo rendimiento que la tasa de interés dada con el periodo de capitalización dado.

EJEMPLO 6 Cálculo del rendimiento porcentual anual (RPA)

Úrsula invierte \$2,000 en el banco Creb Key al 5.15% de interés anual capitalizable cada trimestre. ¿Cuál es el RPA equivalente?

SOLUCIÓN Sea x = el RPA equivalente. El valor de la inversión al final de un año, usando esta tasa, es $A = 2{,}000(1 + x)$. Por tanto, tenemos

$$2{,}000(1 + x) = 2{,}000\left(1 + \frac{0.0515}{4}\right)^4$$

$$(1 + x) = \left(1 + \frac{0.0515}{4}\right)^4 \quad \text{Dividir entre 2,000.}$$

$$x = \left(1 + \frac{0.0515}{4}\right)^4 - 1 \quad \text{Restar 1.}$$

$$\approx 0.0525 \quad \text{Calcular.}$$

continúa

El rendimiento porcentual anual es 5.25%. En otras palabras, los $2,000 de Úrsula invertidos al 5.15% capitalizable cada trimestre durante un año genera el mismo interés y produce el mismo valor que $2,000 invertidos en otro lugar que pague 5.25% de interés una vez al final del año.

Ahora resuelva el ejercicio 41.

El ejemplo 6 muestra que el RPA no depende del principal, ya que ambos lados de la ecuación se dividieron entre $P = 2{,}000$. Así que, al comparar inversiones, podemos suponer que $P = 1$.

EJEMPLO 7 Comparación de RPA

¿Cuál inversión es más atractiva, una que paga 8.75% compuesta cada trimestre u otra que paga 8.7% compuesta cada mes?

SOLUCIÓN

Sean

r_1 = el RPA para la tasa de 8.75%,

r_2 = el RPA para la tasa de 8.7%.

$$1 + r_1 = \left(1 + \frac{0.0875}{4}\right)^4 \qquad 1 + r_2 = \left(1 + \frac{0.087}{12}\right)^{12}$$

$$r_1 = \left(1 + \frac{0.0875}{4}\right)^4 - 1 \qquad r_2 = \left(1 + \frac{0.087}{12}\right)^{12} - 1$$

$$\approx 0.09041 \qquad \approx 0.09055$$

La tasa de 8.7% capitalizable cada mes es más atractiva ya que su RPA es 9.055% en comparación con 9.041% para la tasa de 8.75% compuesta cada trimestre.

Ahora resuelva el ejercicio 45.

Anualidades, valor futuro

Hasta ahora, en todas las situaciones de inversión hemos considerado que el inversionista ha realizado un solo *pago único* de depósito. Supongamos ahora que un inversionista hace depósitos regulares cada mes, cada trimestre o cada año (la misma cantidad cada vez). Ésta es una anualidad.



FIGURA 3.45 Pagos en una anualidad ordinaria.

Una **anualidad** es una sucesión de pagos periódicos e iguales. La anualidad es **ordinaria (o vencida)** si los depósitos se realizan al final de cada periodo, en el mismo instante en que se contabiliza el interés en la cuenta. La figura 3.45 representa, en forma gráfica, la situación. En este libro sólo consideraremos anualidades ordinarias.

Consideremos un ejemplo. Suponga que Sarah realiza depósitos trimestrales de $500 el final de cada trimestre en una cuenta de retiro que paga 8% de interés anual compuesto cada trimestre. ¿Cuánto habrá en la cuenta de Sarah al final del primer año? Observe el siguiente patrón:

Al final del trimestre 1:

$$\$500 = \$500$$

Al final del trimestre 2:

$$\$500 + \$500(1.02) = \$1{,}010$$

Al final del trimestre 3:

$$\$500 + \$500(1.02) + \$500(1.02)^2 = \$1{,}530.20$$

Al final del año:

$$\$500 + \$500(1.02) + \$500(1.02)^2 + \$500(1.02)^3 \approx \$2{,}060.80$$

Así que el valor total de la inversión ganada por una anualidad consiste en todos los pagos periódicos junto con todos los intereses. Este valor se denomina valor futuro de la anualidad, ya que generalmente se calcula cuando se proyecta en el futuro.

Valor futuro de una anualidad

El valor futuro, VF, de una anualidad consistente en n pagos periódicos iguales de R dólares a una tasa de interés i por periodo de capitalización (intervalo de pago) es

$$VF = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

EJEMPLO 8 Cálculo del valor de una anualidad

Al final de cada trimestre del año, Emily hace un pago de \$500 en el fondo de inversión Lanaghan. Si sus inversiones generan 7.88% de interés anual compuesto cada trimestre, ¿cuál será el valor de la anualidad de Emily en 20 años?

SOLUCIÓN Sean $R = 500$, $i = 0.0788/4$, $n = 20(4) = 80$. Entonces,

$$VF = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$VF = 500 \cdot \frac{(1 + 0.0788/4)^{80} - 1}{0.0788/4}$$

$$VF = 95{,}483.389\ldots$$

Así que el valor de la anualidad de Emily dentro de 20 años será de \$95,483.39.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Préstamos e hipotecas, valor presente

Una anualidad es una sucesión de pagos periódicos iguales. La cantidad neta de dinero puesta en una anualidad es su **valor presente**; el monto neto generado por la anualidad es su valor futuro. Los pagos periódicos e iguales sobre un préstamo o una hipoteca en realidad constituyen una anualidad.

¿Cómo hacen los bancos para determinar cuál debe ser el pago periódico? Consideran lo que sucedería al valor presente de una inversión con interés compuesto durante el plazo del préstamo y comparan el resultado con el valor futuro de la anualidad de los pagos al préstamo.

Ilustramos este razonamiento suponiendo que un banco le presta un valor presente VP = \$50,000 al 6%, para comprar una casa con la expectativa de que usted hará un pago a la hipoteca cada mes (a la tasa de interés mensual de 0.06/12 = 0.005).

• El valor futuro de una inversión al 6% compuesto cada mes durante n meses es

$$VP(1 + i)^n = 50{,}000(1 + 0.005)^n.$$

• El valor futuro de una anualidad de R dólares (los pagos al préstamos) es

$$R\frac{(1+i)^n-1}{i}=R\frac{(1+0.005)^n-1}{0.005}.$$

Para determinar R resolveríamos la ecuación

$$50{,}000(1+0.005)^n=R\frac{(1+0.005)^n-1}{0.005}.$$

En general, los pagos mensuales de R dólares para un préstamos de VP dólares debe satisfacer la ecuación

$$VP(1+i)^n=R\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

Al dividir ambos lados entre $(1+i)^n$ se obtiene la siguiente fórmula para el valor presente de una anualidad:

Valor presente de una anualidad

El valor presente VP de una anualidad, que consiste en n pagos iguales de R dólares, que generan una tasa de interés i por periodo (intervalo de pago) es

$$VP=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

La tasa de interés anual que se cobra en préstamos al consumidor es la **tasa porcentual anual (TPA)**. El RPA para el prestamista es más alto que la TPA. Consulte el ejercicio 58.

EJEMPLO 9 Cálculo de pagos de un préstamo

Carlos compra una camioneta nueva en $18,500. ¿Cuáles son los pagos mensuales, para un préstamo con plazo de 4 años, con un pago inicial de $200, si la tasa de interés anual (TPA) es 2.9%?

SOLUCIÓN

Modele El pago inicial es $2,000, de tal manera que el monto que se presta es $16,500. Como la TPA $= 2.9\%$, $i = 0.029/12$ y el pago mensual es la solución para

$$16{,}500=R\frac{1-(1+0.029/12)^{-4(12)}}{0.029/12}.$$

Resuelva algebraicamente

$$R\left[1-\left(1+\frac{0.029}{12}\right)^{-4(12)}\right]=16{,}500\left(\frac{0.029}{12}\right)$$

$$R=\frac{16{,}500(0.029/12)}{1-(1+0.029/12)^{-48}}$$

$$=364.487\ldots$$

Interprete Carlos tendrá que pagar $364.49 cada mes durante 47 meses y un pago un poco menor el último mes.

Ahora resuelva el ejercicio 19.

REPASO RÁPIDO 3.6

1. Determine el 3.5% de 200.
2. Determine el 2.5% de 150.
3. ¿Cuánto es un cuarto de 7.25%?
4. ¿Cuánto es un doceavo de 6.5%?
5. ¿Qué porcentaje es 78 de 120?
6. ¿Qué porcentaje es 28 de 80?
7. 48 es 32%, ¿de qué número?
8. 176.4 es 84%, ¿de qué número?
9. ¿Cuánto tendrá Jane al final de un año si invierte $300 al 5% de interés simple?
10. ¿Cuánto tendrá Reggie al final de un año si invierte $500 al 4.5% de interés simple?

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.6

En los ejercicios del 1 al 4 determine el monto A acumulado después de invertir un capital P durante t años a una tasa de interés r compuesta cada año.

1. $P = \$1{,}500$, $r = 7\%$, $t = 6$
2. $P = \$3{,}200$, $r = 8\%$, $t = 4$
3. $P = \$12{,}000$, $r = 7.5\%$, $t = 7$
4. $P = \$15{,}500$, $r = 9.5\%$, $t = 12$

En los ejercicios del 5 al 8 determine el monto A acumulado después de invertir un capital P durante t años a una tasa de interés compuesta k veces por año.

5. $P = \$1{,}500$, $r = 7\%$, $t = 5$, $k = 4$
6. $P = \$3{,}500$, $r = 5\%$, $t = 10$, $k = 4$
7. $P = \$40{,}500$, $r = 3.8\%$, $t = 20$, $k = 12$
8. $P = \$25{,}300$, $r = 4.5\%$, $t = 25$, $k = 12$

En los ejercicios del 9 al 12 determine el monto A acumulado después de invertir un capital P durante t años a una tasa de interés r compuesta de forma continua.

9. $P = \$1{,}250$, $r = 5.4\%$, $t = 6$
10. $P = \$3{,}350$, $r = 6.2\%$, $t = 8$
11. $P = \$21{,}000$, $r = 3.7\%$, $t = 10$
12. $P = \$8{,}875$, $r = 4.4\%$, $t = 25$

En los ejercicios del 13 al 16 determine el valor futuro, VF, acumulado de una anualidad después de invertir pagos periódicos R durante t años a una tasa de interés anual r, con pagos realizados e interés acreditado k veces por año.

13. $R = \$500$, $r = 7\%$, $t = 6$, $k = 4$
14. $R = \$300$, $r = 6\%$, $t = 12$, $k = 4$
15. $R = \$450$, $r = 5.25\%$, $t = 10$, $k = 12$
16. $R = \$610$, $r = 6.5\%$, $t = 25$, $k = 12$

En los ejercicios 17 y 18 determine el valor presente VP de un préstamo con una tasa de interés anual r y pagos periódicos R durante un plazo de t años, con pagos realizados e intereses cargados 12 veces por año.

17. $r = 4.7\%$, $R = \$815.37$, $t = 5$
18. $r = 6.5\%$, $R = \$1856.82$, $t = 30$

En los ejercicios 19 y 20 determine el pago periódico R de un préstamo con valor presente VP y una tasa de interés anual r durante un plazo de t años, con pagos realizados e interés cargado 12 veces por año.

19. $VP = \$18{,}000$, $r = 5.4\%$, $t = 6$
20. $VP = \$154{,}000$, $r = 7.2\%$, $t = 15$
21. **Determinación del tiempo** Si John invierte $2,300 en una cuenta de ahorros con una tasa de interés del 9% anual compuesta cada mes, ¿cuánto tardará para que la cuenta de John alcance un saldo de $4,150?
22. **Determinación del tiempo** Si Joelle invierte $8,000 en una cuenta de retiro con una tasa de interés de 9% compuesta cada mes, ¿cuánto tardará en que este pago único haya crecido en su cuenta a $16,000?
23. **Asesora financiera** Megan es asesora financiera de una herencia. Si invierte $15,000 en una cuenta que gana una tasa de interés de 8% compuesta cada mes, ¿cuánto tiempo pasará hasta que la cuenta tenga un valor de $45,00 para el cliente de Megan?
24. **Agente financiero** Willis es el agente financiero de una universidad privada y tiene la responsabilidad de administrar una donación. Si invierte $1.5 millones a una tasa de interés de 8% compuesto cada trimestre, ¿cuánto tiempo tardará la cuenta en exceder $3.75 millones?
25. **Determinación de la tasa de interés** ¿Qué tasa de interés compuesta cada día (365 días/año) se requiere para que una inversión de $22,000 crezca a $36,500 en 5 años?
26. **Determinación de la tasa de interés** ¿Qué tasa de interés compuesta cada mes se requiere para que una inversión de $8,500 se triplique en 5 años?
27. **Agente de pensiones** Jack es un actuario que trabaja para una compañía de fondos de pensiones y necesita hacer que $14.6 millones crezcan a $22 millones en 6 años. ¿Cuál es la tasa de interés compuesta cada año que necesita para esta inversión?
28. **Presidente de banco** El presidente de un banco tiene $18 millones en el portafolio de inversión de su banco y quiere que se incremente a $25 millones en 8 años. ¿Cuál es la tasa de interés compuesta cada año que él necesita para esta inversión?

29. Duplicación de su dinero Determine cuánto tiempo se necesita para que una inversión duplique su valor, si el interés se devenga a la tasa de 5.75% compuesta cada trimestre.

30. Triplicación de su dinero Determine cuánto tiempo se necesita para que una inversión triplique su valor, si el interés se devenga a la tasa de 6.25% compuesta cada trimestre.

En los ejercicios del 31 al 34 complete la tabla acerca de capitalización continua.

	Inversión inicial	TPA	Tiempo en duplicarse	Monto en 15 años
31.	$12,500	9%	?	?
32.	$32,500	8%	?	?
33.	$ 9,500	?	4 años	?
34.	$16,800	?	6 años	?

En los ejercicios del 35 al 40 complete la tabla acerca del tiempo de duplicación de una inversión.

	TPA	Periodos de capitalización	Monto en 15 años
35.	4%	Trimestralmente	?
36.	8%	Trimestralmente	?
37.	7%	Anualmente	?
38.	7%	Trimestralmente	?
39.	7%	Mensualmente	?
40.	7%	Continuamente	?

En los ejercicios del 41 al 44 determine el rendimiento porcentual anual (RPA) para las inversiones.

41. $3,000 al 6% compuesto cada trimestre.

42. $8,000 al 5.75% compuesto diariamente.

43. P dólares al 6.3% compuesto de forma continua.

44. P dólares al 4.7% compuesto cada mes.

45. Comparación de inversiones ¿Cuál inversión es más atractiva, con 5% compuesto cada mes o con 5.1% compuesto cada trimestre?

46. Comparación de inversiones ¿Cuál inversión es más atractiva, con $5\frac{1}{8}$% compuesto cada año, o con 5% compuesto de forma continua?

En los ejercicios del 47 al 50 se hacen pagos y el interés se carga al final de cada mes.

47. Una cuenta IRA Amy aporta $50 cada mes en el Fondo Lincoln National Bond que genera 7.26% de interés anual. ¿Cuál es el valor de la inversión de Amy al cabo de 25 años?

48. Una cuenta IRA Andrew contribuye con $50 cada mes al fondo Hoffbrau que genera 15.5% de interés anual. ¿Cuál es el valor de su inversión al cabo de 20 años?

49. Inversión en una anualidad Jolinda aporta al Fondo de Retiro de Celebridades que genera 12.4% de interés anual. ¿Cuáles deben ser sus pagos mensuales si quiere acumular $250,000 en 20 años?

50. Inversión en una anualidad Diego contribuye a la cuenta en mercado de dinero, Comercial Nacional, que genera 4.5% de interés anual. ¿Cuáles deben ser sus pagos mensuales si quiere acumular $120,000 en 30 años?

51. Pago de un préstamo automotriz ¿Cuál debe ser el pago mensual de Kim para un préstamo automotriz a un plazo de 4 años con una TPA de 7.95% del banco Century?

52. Pago de un préstamo automotriz ¿Cuál debe ser el pago mensual de Ericka para un préstamo automotriz a un plazo de 3 años con una TPA de 10.25% del Banco de Ahorros del Condado?

53. Pago de la hipoteca de una casa Del Banco Nacional de la Ciudad, Gendo obtiene un préstamo de $86,000 para una casa a un plazo de 30 años con una TPA de 8.75%. ¿Cuál debe ser su pago mensual?

54. Pago de un préstamo automotriz Del Banco NBD, Roberta obtiene un préstamo de $100,000 para una casa a un plazo de 25 años con una TPA de 9.25%. ¿Cuál debe ser su pago mensual?

55. Planeación del pago de una hipoteca Una hipoteca de $86,000 a 30 años y a una TPA de 12% requiere pagos de $884.61. Suponga que decide hacer pagos mensuales de $1,050.00.

a) ¿Cuándo se terminará de pagar la hipoteca?

b) ¿Cuánto ahorrará al realizar pagos mayores en comparación con el plan original?



56. Planeación del pago de una hipoteca Suponga que realiza pagos de $884.61 por la hipoteca de $86,000 (ejercicio 53) durante 10 años y luego realiza pagos de $1,050 hasta que se termine de pagar el préstamo.

a) Bajo estas circunstancias, ¿cuándo se terminará de pagar la hipoteca?

b) ¿Cuánto ahorrará al realizar pagos mayores, en comparación con el plan original?

57. Escribir para aprender Explique por qué el cálculo del RPA para un inversión no depende del monto real que será invertido. Proporcione una fórmula para el RPA sobre una inversión de $1 a una tasa anual r compuesta k veces en un año. ¿Cómo extiende el resultado a una inversión de $1,000?

58. Escriba para aprender Proporcione las razones de que los bancos puedan no anunciar su RPA sobre los préstamos que le harían a usted a una TPA. ¿Cuál es el RPA del banco sobre un préstamo que ellos hacen a un TPA de 4.5%?

59. Actividad en grupo Trabaje en equipos de tres o cuatro. Considere el crecimiento de una población de humanos o de animales, crecimiento de bacterias, decaimiento radiactivo e interés compuesto. Explique en qué son similares estas situaciones y en qué difieren. Proporcione ejemplos para respaldar su punto de vista.

60. Interés simple en comparación con compuesto anualmente Steve compra un certificado de depósito; ganará 6% cada año. El interés le será enviado por correo, por lo que él no ganaría interés sobre su interés.

a) Escriba para aprender Explique por qué al cabo de t años, el monto total de interés que él recibe por su inversión más los $1,000 originales, está dado por

$$f(t) = 1{,}000(1 + 0.06t).$$

b) Steve invierte otros $1,000 al 6% compuesto anualmente. Construya una tabla que compare el valor de las dos inversiones para $t = 1, 2,..., 10$ años.

Preguntas de examen estandarizado

61. Verdadero o falso Si $100 se invierten al 5% de interés anual durante 1 año no existe límite para el valor final de la inversión, si ésta se capitaliza con suficiente frecuencia. Justifique su respuesta.

62. Verdadero o falso El interés total pagado sobre una hipoteca a 15 años es menor que la mitad del interés total pagado sobre una hipoteca a 30 años con el mismo monto del préstamo y la misma TPA. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 63 al 66 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver el problema.

63. Opción múltiple ¿Cuál es el valor total, después de 6 años, de una inversión inicial de $2,250 que genera 7% de interés compuesto cada trimestre?

A) $3,376.64 **B)** $3,412.00 **C)** $3,424.41
D) $3,472.16 **E)** $3,472.27

64. Opción múltiple El rendimiento porcentual anual de una cuenta que paga 6% compuesto mensualmente es

A) 6.03%. **B)** 6.12%. **C)** 6.17%.
D) 6.20%. **E)** 6.24%.

65. Opción múltiple Mary Jo deposita $300 cada mes en su cuenta de retiro, que paga una TPA de 4.5% (0.375% al mes). Utilice la fórmula $VF = R((1 + i)^n - 1)/i$ para determinar el valor de su anualidad al cabo de 20 años.

A) $71,625.00
B) $72,000.00
C) $72,375.20
D) $73,453.62
E) $116,437.31

66. Opción múltiple Para financiar su casa, el señor y la señora Dass han acordado un préstamo hipotecario de $120,000 a una TPA de 7.25%. Utilice la fórmula $VP = R(1 - (1 + i)^{-n})/i$ para determinar sus pagos mensuales si el préstamo tiene un plazo de 15 años.

A) $1,095.44
B) $1,145.44
C) $1,195.44
D) $1,245.44
E) $1,295.44

Exploraciones

67. Pago de un préstamo Utilice la información del préstamos para el camión de Carlos, en el ejemplo 9, para elaborar una hoja de cálculo de la programación de pagos. Las primeras líneas de la hoja de cálculo se verían como la tabla siguiente:

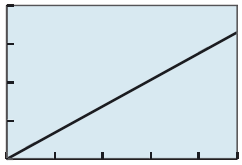
Mes núm.	Pago	Interés	Pago al capital	Saldo
0				$16,500.00
1	$364.49	$39.88	$324.61	$16,175.39
2	$364.49	$39.09	$325.40	$15,849.99

Sin embargo, para crear la hoja de cálculo correctamente, necesita utilizar fórmulas para muchas de las celdas, como se muestran en negritas a continuación:

Mes núm.	Pago	Interés	Pago al capital	Saldo
0				$16,500.00
=A2+1	$364.49	**=redondear(E2*2.9%/12,2)**	**=B3–C3**	**=E2–D3**
=A3+1	$364.49	**=redondear(E3*2.9%/12,2)**	**=B4–C4**	**=E3–D4**

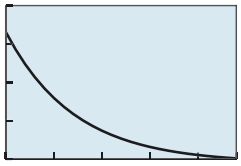
Complete la hoja de cálculo utilizando las técnicas de copiar y pegar, y determine el monto del 48° y último pago, de modo que el saldo final sea $0.00.

68. Escriba para aprender Pago de un préstamo ¿Cuál de las gráficas siguientes es una gráfica precisa del saldo insoluto de un préstamo como función del tiempo, con base en el préstamo del camión de Carlos del ejemplo 9 y el ejercicio 67? Explique su elección con base en el comportamiento creciente decreciente y otras características analíticas. ¿Esperaría que la gráfica del saldo insoluto contra el tiempo para una hipoteca a 30 años, al doble de la tasa de interés, tenga la misma forma o una forma diferente a la del préstamo del camión? Explique.



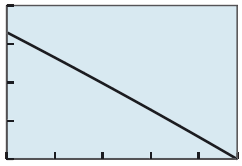
[0, 48] por [0, 20,000]

a)



[0, 48] por [0, 20,000]

b)



[0, 48] por [0, 20,000]

c)

Ampliación de las ideas

69. La función

$$f(x) = 100\frac{(1 + 0.08/12)^x - 1}{0.08/12}$$

describe el valor futuro de cierta anualidad.

a) ¿Cuál es la tasa de interés anual?

b) ¿Cuántos pagos se hacen por año?

c) ¿Cuál es el monto de cada pago?

70. La función

$$f(x) = 200\frac{1 - (1 + 0.08/12)^{-x}}{0.08/12}$$

describe el valor presente de cierta anualidad.

a) ¿Cuál es la tasa de interés anual?

b) ¿Cuántos pagos se hacen por año?

c) ¿Cuál es el monto de cada pago?

Ideas Clave DEL CAPÍTULO 3

PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

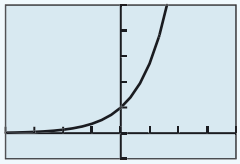
Crecimiento y decaimiento exponencial 279
Funciones exponenciales $f(x) = b^x$ 280
Funciones exponenciales y la base e 282
Modelo exponencial de población 290
Cambio entre forma logarítmica y exponencial 300
Propiedades básicas de los logaritmos 301
Propiedades básicas de los logaritmos comunes 302
Propiedades básicas de logaritmos naturales 304
Propiedades de los logaritmos 310
Fórmula de cambio de base para logaritmos 313
Funciones logarítmicas $f(x) = \log_b x$, con $b > 1$ 314
Propiedades de inyectividad (uno a uno) 320
Ley de enfriamiento de Newton 326
Interés capitalizable anualmente 334
Interés compuesto k veces por año 335
Porcentaje de rendimiento anual 336
Rendimiento porcentual anual 337
Valor presente de una anualidad 340

PROCEDIMIENTOS

Cómo expresar información de otra forma 314-316
Transformación logarítmica 328-329

GALERÍA DE FUNCIONES

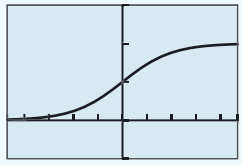
Exponencial



[–4, 4] por [–1, 5]

$f(x) = e^x$

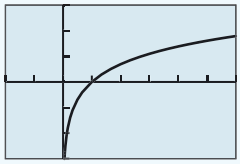
Logística básica



[–4.7, 4.7] por [–0.5, 1.5]

$f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

Logarítmica natural



[–2, 6] por [–3, 3]

$f(x) = \ln x$

CAPÍTULO 3 Ejercicios de repaso

La colección de ejercicios marcados en azul podría utilizarse como un examen del capítulo.

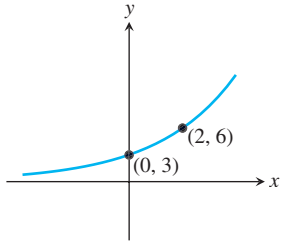
En los ejercicios 1 y 2 calcule el valor exacto de la función para el valor de x dado. No utilice calculadora.

1. $f(x) = -3 \cdot 4^x$ para $x = \dfrac{1}{3}$

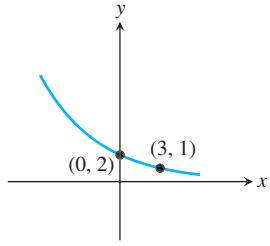
2. $f(x) = 6 \cdot 3^x$ para $x = -\dfrac{3}{2}$

En los ejercicios 3 y 4 determine una fórmula para la función exponencial cuya gráfica se muestra en la figura.

3.



4.



En los ejercicios del 5 al 10 describa cómo transformar la gráfica de f en la gráfica de $g(x) = 2^x$ o $h(x) = e^x$. Haga un bosquejo y respalde su respuesta con un graficadora.

5. $f(x) = 4^{-x} + 3$ **6.** $f(x) = -4^{-x}$

7. $f(x) = -8^{-x} - 3$ **8.** $f(x) = 8^{-x} + 3$

9. $f(x) = e^{2x-3}$ **10.** $f(x) = e^{3x-4}$

En los ejercicios 11 y 12 determine la intersección y y las asíntotas horizontales.

11. $f(x) = \dfrac{100}{5 + 3e^{-0.05x}}$ **12.** $f(x) = \dfrac{50}{5 + 2e^{-0.04x}}$

En los ejercicios 13 y 14 indique si la función es una función con crecimiento exponencial o una función con decaimiento exponencial, y describa su comportamiento en los extremos mediante límites.

13. $f(x) = e^{4-x} + 2$ **14.** $f(x) = 2(5^{x-3}) + 1$

En los ejercicios del 15 al 18 grafique la función y analícela con respecto al dominio, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, simetría, acotamiento, mínimos y máximos, asíntotas y comportamiento en los extremos.

15. $f(x) = e^{3-x} + 1$ **16.** $g(x) = 3(4^{x+1}) - 2$

17. $f(x) = \dfrac{6}{1 + 3 \cdot 0.4^x}$ **18.** $g(x) = \dfrac{100}{4 + 2e^{-0.01x}}$

En los ejercicios del 19 al 22 determine la función exponencial que satisface las condiciones dadas.

19. Valor inicial = 24, creciente a una tasa de 5.3% diaria.

20. Población inicial = 67,000, creciente a una tasa de 1.67% anual.

21. Estatura inicial = 18 cm, se duplica cada 3 semanas.

22. Masa inicial = 117 g, se reduce a la mitad cada 262 horas.

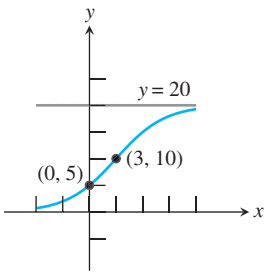
En los ejercicios 23 y 24 determine la función logística que satisface las condiciones dadas.

23. Valor inicial = 12, límite de crecimiento = 30, pasa por (2, 20).

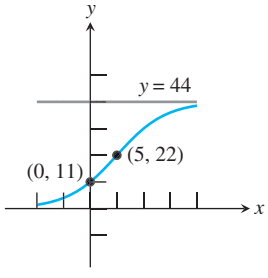
24. Altura inicial = 6, límite de crecimiento = 20, pasa por (3, 15).

En los ejercicios 25 y 26 determine una fórmula para la función logística cuya gráfica se muestra en la figura.

25.



26.



En los ejercicios del 27 al 30 evalúe la expresión logarítmica sin utilizar calculadora.

27. $\log_2 32$ **28.** $\log_3 81$

29. $\log \sqrt[3]{10}$ **30.** $\ln \dfrac{1}{\sqrt{e^7}}$

En los ejercicios del 31 al 34 reescriba la ecuación en forma exponencial.

31. $\log_3 x = 5$ **32.** $\log_2 x = y$

33. $\ln \dfrac{x}{y} = -2$ **34.** $\log \dfrac{a}{b} = -3$

En los ejercicios del 35 al 38 describa cómo transformar la gráfica de $y = \log_2 x$ en la gráfica de la función dada. Bosqueje a mano la gráfica y respalde su respuesta con un graficadora.

35. $f(x) = \log_2 (x + 4)$ **36.** $g(x) = \log_2 (4 - x)$

37. $h(x) = -\log_2 (x - 1) + 2$ **38.** $h(x) = -\log_2 (x + 1) + 4$

En los ejercicios del 39 al 42 grafique la función y analícela con respecto a dominio, continuidad, comportamiento creciente o decreciente, simetría, acotamiento, mínimos y máximos, asíntotas y comportamiento en los extremos.

39. $f(x) = x \ln x$ **40.** $f(x) = x^2 \ln x$

41. $f(x) = x^2 \ln |x|$ **42.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

En los ejercicios del 43 al 54 resuelva la ecuación.

43. $10^x = 4$ **44.** $e^x = 0.25$

45. $1.05^x = 3$ **46.** $\ln x = 5.4$

47. $\log x = -7$ **48.** $3^{x-3} = 5$

49. $3 \log_2 x + 1 = 7$ **50.** $2 \log_3 x - 3 = 4$

51. $\dfrac{3^x - 3^{-x}}{2} = 5$ **52.** $\dfrac{50}{4 + e^{2x}} = 11$

53. $\log (x + 2) + \log (x - 1) = 4$

54. $\ln (3x + 4) - \ln (2x + 1) = 5$

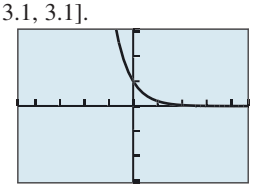
En los ejercicios 55 y 56 escriba la expresión utilizando sólo logaritmos naturales.

55. $\log_2 x$ **56.** $\log_{1/6} (6x^2)$

En los ejercicios 57 y 58 escriba la expresión utilizando solamente logaritmos comunes.

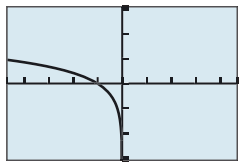
57. $\log_5 x$ **58.** $\log_{1/2} (4x^3)$

En los ejercicios del 59 al 62 relacione las funciones con sus gráficas. Todas las gráficas se dibujaron en la ventana $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$.



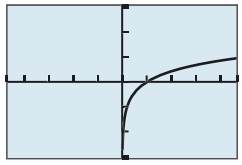
[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

a)



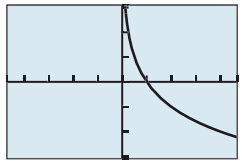
[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

b)



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

c)



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

d)

59. $f(x) = \log_5 x$ **60.** $f(x) = \log_{0.5} x$

61. $f(x) = \log_5 (-x)$ **62.** $f(x) = 5^{-x}$

63. Interés compuesto Determine la cantidad acumulada, A, después de invertir un capital de $P = \$450$ durante 3 años a una tasa de interés de 4.6% compuesta anualmente.

64. Interés compuesto Determine la cantidad acumulada, A, después de invertir un capital de $P = \$4{,}800$ durante 17 años a una tasa de interés de 6.2% compuesta cada trimestre.

65. Interés compuesto Determine la cantidad acumulada, A, después de invertir un capital P durante t años a una tasa de interés anual r capitalizable de forma continua.

66. Valor futuro Determine el valor futuro VF, acumulado en una anualidad, después de invertir periódicamente pagos R durante t años a una tasa anual de interés r, con pagos hechos e interés abonado k veces por año.

67. Valor presente Determine el valor presente, VP, de un préstamo con tasa de interés anual $r = 5.5\%$ y pagos periódicos $R = \$550$ durante un plazo de $t = 5$ años, con pagos hechos e interés cobrado 12 veces por año.

68. Valor presente Determine el valor presente, VP, de un préstamo con tasa de interés anual $r = 7.25\%$ y pagos periódicos $R = \$953$ durante un plazo de $t = 15$ años, con pagos hechos e interés cobrado 26 veces por año.

En los ejercicios 69 y 70 determine el valor de k de modo que la gráfica de f pase por el punto dado.

69. $f(x) = 20e^{-kx}$, (3, 50) **70.** $f(x) = 20e^{-kx}$, (1, 30)

En los ejercicios 71 y 72 utilice la información de la tabla 3.28.

Tabla 3.28 Poblaciones de dos estados de Estados Unidos (en millones)

Año	Georgia	Illinois
1900	2.2	4.8
1910	2.6	5.6
1920	2.9	6.5
1930	2.9	7.6
1940	3.1	7.9
1950	3.4	8.7
1960	3.9	10.1
1970	4.6	11.1
1980	5.5	11.4
1990	6.5	11.4
2000	8.2	12.4

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, de acuerdo con el World Almanac and Book of Facts 2005.

71. Modelación poblacional Determine un modelo exponencial de regresión para la población de Georgia y utilícelo para pronosticar la población en 2005.

72. Modelación poblacional Determine un modelo logístico de regresión para la población de Illinois y utilícelo para pronosticar la población en 2010.

73. Absorción de una droga Una droga se administra en forma intravenosa para aliviar el dolor. La función $f(t) = 90 - 52 \ln(1 + t)$, donde $0 \le t \le 4$ proporciona la cantidad de la droga en el cuerpo después de t horas.

a) ¿Cuál fue el número inicial ($t = 0$) de unidades de droga administradas?

b) ¿Cuánta droga estará presente después de 2 horas?

c) Dibuje la gráfica de f.

74. Disminución de una población La población de Metroville es 123,000 y está disminuyendo 2.4% por año.

a) Escriba una función que modele la población como una función del tiempo t.

b) Prediga cuándo la población será de 90,000.

75. Disminución de una población La población de Preston es 89,000 y disminuye 1.8% cada año.

a) Escriba una función que modele la población como una función del tiempo t.

b) Prediga cuándo la población será 50,000.

76. Propagación de gripe El número, P, de estudiantes infectados con gripe, en la Escuela Northridge, t días después de su exposición, está modelado mediante

$$P(t) = \frac{300}{1 + e^{4-t}}.$$

a) ¿Cuál es el número inicial ($t = 0$) de estudiantes infectados con gripe?

b) Después de 3 días, ¿cuántos estudiantes fueron contagiados?

c) ¿Cuándo estarán contagiados 100 estudiantes?

d) ¿Cuál será el número máximo de estudiantes infectados?

77. Población de conejos El número de conejos en Elkgrove se duplica cada mes. Al principio hay 20 conejos.

a) Exprese el número de conejos como función del tiempo t.

b) ¿Cuántos conejos estaban presentes al cabo de 1 año? ¿Después de 5 años?

c) ¿Cuándo habrá 10,000 conejos?

78. Población de *guppies* El número de guppies en el acuario de Susan se duplica cada día. Al principio hay cuatro *guppies*.

a) Exprese el número de *guppies* como función del tiempo t.

b) ¿Cuántos *guppies* estaban presentes después de 4 días? ¿Después de una semana?

c) ¿Cuándo habrá 2,000 *guppies*?

79. Decaimiento radiactivo La vida media de cierta sustancia radiactiva es de 1.5 s. La cantidad inicial de sustancia es S_0 gramos.

a) Exprese la cantidad de sustancia S restante como una función del tiempo t.

b) ¿Cuánta sustancia quedará después de 1.5 s? ¿Después de 3 s?

c) Determine S_0, si quedaba 1 g después de 1 minuto.

80. Decaimiento radiactivo La vida media de cierta sustancia radiactiva es de 2.5 seg. La cantidad inicia de sustancia es S_0 gramos.

a) Exprese la cantidad de sustancia S que queda como función del tiempo t.

b) ¿Cuánta sustancia queda después de 2.5 seg? ¿Después de 7.5 seg?

c) Determine S_0 si quedaba 1 g después de 1 minuto.

81. Escala Richter Afganistán sufrió dos importantes terremotos en 1998. El del 4 de febrero tuvo una magnitud de 6.1 en la escala de Richter y causó alrededor de 2,300 muertes; el del 30 de mayo alcanzó 6.9 en la escala de Richter y produjo la muerte de 4,700 personas. ¿Cuántas veces fue más fuerte el terremoto más mortífero?

82. Acidez química El pH del agua de mar es 7.6, y el pH de la leche de magnesia es 10.5.

a) ¿Cuál es su concentración de ión hidrógeno de cada una?

b) ¿Cuántas veces es mayor la concentración de ión hidrógeno del agua de mar que el de la leche de magnesia?

c) ¿En cuántos órdenes de magnitud difieren las concentraciones?

83. Determinación del tiempo de una anualidad Si Joenita invierte $1,500 en una cuenta de retiro con una tasa de interés que se capitaliza cada trimestre, ¿cuánto tardará, este único pago, en crecer a $3,750?

84. Determinación del tiempo de una anualidad Si Juan invierte $12,500 en una cuenta de retiro con un interés de 9% compuesto de manera continua, ¿cuánto tiempo tomará para que esta cantidad se triplique?

85. Pagos mensuales El tiempo, en meses, que tarda en saldarse un préstamo de $60,000 al 9% de interés anual, con pagos mensuales de x dólares, está dado por

$$t = 133.83 \ln\left(\frac{x}{x - 450}\right).$$

Estime el plazo del préstamo de $60,000, si los pagos mensuales son de $700.

86. Pagos mensuales Mediante la ecuación del ejercicio 85 estime el plazo del préstamo de $60,000, si los pagos mensuales son de $500.

87. Determinación del RPA Determine el rendimiento porcentual anual de una inversión con una tasa de interés de 8.25% compuesto mensualmente.

88. Determinación del RPA Determine el rendimiento porcentual anual que puede utilizarse para anunciar una cuenta que paga interés de 7.20% compuesto continuamente.

89. Absorción de la luz La ley Beer-Lambert de absorción, aplicada al Lago Superior, establece que la intensidad de la luz I (en lumenes) a una profundidad de x pies satisface la ecuación

$$\log \frac{I}{12} = -0.0125x.$$

Determine la intensidad de la luz a una profundidad de 25 pies.

90. ¿Para qué valores de b, es $\log_b x$ un alargamiento de $y = \ln x$? ¿Una compresión vertical de $y = \ln x$?

91. ¿Para qué valores de b, es $\log_b x$ un alargamiento de $y = \log x$? ¿Una compresión vertical de $y = \log x$?

92. Si $f(x) = ab^x$, $a > 0$, $b > 0$, pruebe que $g(x) = \ln f(x)$ es una función lineal. Determine su pendiente y su intersección y.

93. Propagación de la gripe El número de estudiantes de la Escuela Springfield infectados con gripe, después de t días, se modela mediante la función

$$P(t) = \frac{1{,}600}{1 + 99e^{-0.4t}}.$$

a) ¿Cuál es el número inicial de estudiantes infectados?

b) ¿Cuándo estarán contagiados 800 estudiantes?

c) La escuela cerrará cuando 400 de los 1,600 estudiantes estén infectados. ¿Cuándo cerraría la escuela?

94. Población de ciervos La población P de ciervos, después de t años, en el parque estatal Briggs está modelada por la función

$$P(t) = \frac{1{,}200}{1 + 99e^{-0.4t}}.$$

a) ¿Cuál fue la población inicial de ciervos?

b) ¿Cuándo habrá 1,000 ciervos?

c) ¿Cuál es el número máximo de ciervos previstos para el parque?

95. Ley de enfriamiento de Newton Una taza de café se enfría de 96°C a 65°C en 8 minutos en una habitación a 20°C. ¿Cuándo se enfriará a 25°C?

96. Ley de enfriamiento de Newton Un pastel se saca a 220°F de un horno y se enfría a 150°F después de 35 minutos en una habitación a 75°F. ¿Cuándo se enfriará a 95°F?

97. La función

$$f(x) = 100\,\frac{(1 + 0.09/4)^x - 1}{0.09/4}$$

describe el valor futuro de cierta anualidad.

a) ¿Cuál es la tasa de interés anual?

b) ¿Cuántos pagos se hacen por año?

c) ¿Cuál es el monto de cada pago?

98. La función

$$g(x) = 200\frac{1 - (1 + 0.11/4)^{-x}}{0.11/4}$$

describe el valor presente de cierta anualidad.

a) ¿Cuál es la tasa de interés anual?

b) ¿Cuántos pagos se hacen por año?

c) ¿Cuál es el monto de cada pago?

99. Interés simple en comparación con interés capitalizable de manera continua Grace compra un certificado de depósito de $1,000 que genera 5% cada año. El interés le será enviado a ella, así que no se generará interés sobre su interés.

a) Muestre que después de t años, el monto total de interés que ella recibe de su inversión más los $100 originales está dado por

$$f(t) = 1{,}000(1 + 0.05t).$$

b) Grace invierte otros $1,000 al 5% capitalizable de forma continua. Construya una tabla que compare los valores de las dos inversiones para $t = 1, 2, \ldots, 10$ años.

CAPÍTULO 3 Proyecto

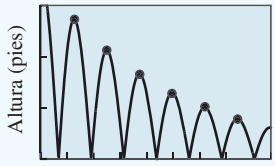
Análisis del rebote de una pelota

Cuando una pelota rebota hacia arriba y hacia abajo sobre una superficie plana, su altura máxima disminuye con cada rebote. Cada rebote es un porcentaje de la altura previa; para la mayoría de las pelotas, el porcentaje es constante. En este proyecto utilizará un dispositivo de detección de movimiento para recolectar datos del rebote de una pelota debajo de un detector de movimiento, luego determinará un modelo matemático que describa la altura máxima del rebote como una función del número del rebote.

Recolección de datos

Configure el sistema CBL™ (calculadora de laboratorio) con un detector de movimiento o un sistema CBR™ (calculadora de campo) para recolectar la información de la pelota que rebota, mediante un programa para la CBL o la aplicación Ball Bounce (pelota que rebota) para el CBR. Consulte la guía de la CBL/CBR para instrucción específica de configuración.

Mantenga la pelota al menos a 2 pies del detector y suéltela para que rebote hacia arriba y hacia abajo, directamente debajo del detector. Esos programas convierten la distancia contra el tiempo a altura con respecto del suelo contra el tiempo. La gráfica muestra un ejemplo de datos recolectados con una pelota de racquetbol y la CBR. La tabla de abajo muestra todas las alturas máximas recopiladas.



Número de rebote	Altura máxima (pies)
0	2.7188
1	2.1426
2	1.6565
3	1.2640
4	0.98309
5	0.77783

EXPLORACIONES

1. Si usted reúne información mediante una CBL o CBR, en su calculadora graficadora o en la pantalla de la computadora debe aparecer una gráfica de la altura contra el tiempo. Localice la altura máxima para cada rebote, registre el dato en una tabla y utilice otras listas de su calculadora para introducirlo. Si no tiene acceso a una CBL/CBR, ingrese en su calculadora o computadora los datos dados en la tabla.
2. ¿Qué porcentaje de la altura del rebote 0 es la altura del rebote 1? Calcule el porcentaje al que regresa para cada rebote. El número será casi constante.
3. Haga un diagrama de dispersión para la altura máxima en contra del número de rebote.
4. Para el rebote 1, la altura se predice multiplicando la altura del rebote 0, o H, por el porcentaje P. La segunda altura se predice multiplicando esta altura HP por P lo que da HP^2. Explique por qué $y = HP^x$ es el modelo adecuado para estos datos, donde x es el número de rebote.
5. Ingrese esta ecuación a su calculadora utilizando sus valores para H y P. ¿Cómo se ajusta el modelo a sus datos?
6. Utilice las características estadísticas de su calculadora para determinar la regresión exponencial para estos datos. Compárela con la ecuación que utilizó como modelo.
7. Si utiliza un tipo diferente de pelota, ¿cómo cambiarían sus datos y su ecuación?
8. ¿Qué factores cambiarían el valor de H y qué factores influirían en el valor de P?
9. Rescriba su ecuación usando la base e, en lugar de usar P como la base para la ecuación exponencial.
10. ¿Qué podría decir acerca de cómo se ve la gráfica de ln(altura del rebote) contra el número de rebote?
11. Trace ln(altura del rebote) contra número de rebote. Calcule la regresión lineal y utilice el concepto de re-expresión (transformación) logarítmica, para explicar cómo la pendiente y la intersección y están relacionadas con P y H.

CAPÍTULO 4

Funciones trigonométricas

4.1 Ángulos y sus medidas

4.2 Funciones trigonométricas de ángulos agudos

4.3 Trigonometría ampliada: las funciones circulares

4.4 Gráficas de seno y coseno: sinusoides

4.5 Gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante

4.6 Gráficas de funciones trigonométricas compuestas

4.7 Funciones trigonométricas inversas

4.8 Resolución de problemas con trigonometría



Cuando el movimiento de un objeto provoca que las moléculas del aire vibren escuchamos un sonido. Medimos el sonido con base en el tono y la intensidad, atributos asociados con la frecuencia y la amplitud de las ondas sonoras. Como veremos más adelante, la rama de las matemáticas llamada trigonometría nos permite analizar ondas de todo tipo, una de las muchas aplicaciones de esta versátil herramienta analítica. En la página 431 se muestra una aplicación trigonométrica para el estudio de las ondas sonoras.

HIPARCO DE NICEA (190–120 a. C.)

Hiparco de Nicea, "el padre de la trigonometría", compiló las primeras tablas trigonométricas para simplificar el estudio de la astronomía hace más de 2,000 años. Hoy en día, esa misma rama de las matemáticas nos permite almacenar ondas sonoras digitales en un disco compacto. Hiparco realizó su trabajo durante el segundo siglo antes de Cristo pero no fue el primer matemático en "hacer" trigonometría. Los matemáticos griegos como Hipócrates de Quios (470–410 a. C.) y Eratóstenes de Cirene (276–194 a. C.) ya habían pavimentado el camino puesto que emplearon las proporciones de los triángulos para el estudio de la astronomía, y esas mismas proporciones de los triángulos ya habían sido utilizados por los ingenieros egipcios y babilonios 4,000 años antes. El término "trigonometría" surgió por sí mismo en el siglo XVI, aunque tiene raíces griegas: "tri" (tres), "gonos" (lado) y "metros" (medida).

Visión general del capítulo 4

Las funciones trigonométricas surgieron de la observación de las proporciones de los triángulos rectángulos, los cuales fueron la herramienta de cálculo fundamental de los ingenieros del mundo antiguo. En la medida en que la civilización pasó de creer que la tierra era plana a concebir al universo como un conjunto de círculos y esferas, se consideró a la trigonometría como el secreto para entender los fenómenos circulares. El movimiento circular condujo hacia el movimiento armónico y las ondas, y súbitamente la trigonometría fue la herramienta indispensable para comprender todo desde la corriente eléctrica hasta las telecomunicaciones modernas.

El surgimiento del Cálculo hizo más importantes que nunca a las funciones trigonométricas. Esto condujo a que cualquier tipo de comportamiento periódico (recurrente) pueda modelarse con algún grado de precisión por medio de la simple combinación de funciones seno; las posibilidades de modelación de las funciones trigonométricas es uno de nuestros objetos de estudio.

4.1 Los ángulos y sus medidas

Aprenderá acerca de...

- El problema de la medición angular
- Los grados y radianes
- La longitud de un arco circular
- El movimiento angular y lineal

. . . porque

Los ángulos son los principales elementos de las funciones trigonométricas.

El problema de la medición angular

La variable de entrada de una función trigonométrica es la medida del ángulo; la variable de salida es un número real. Créalo o no, esto nos conduce a un problema inmediato si se elige medir los ángulos en grados (como la mayoría de nosotros lo hicimos en nuestros cursos de geometría).

El problema es que las unidades de grados no tienen relación matemática alguna con las unidades lineales: hay 360 grados en un círculo de radio 1. ¿Qué relación tienen los 360 grados y la unidad que mide el radio? ¿Qué tan grandes son 360 grados? Contestar estas preguntas no es posible porque un "grado" es por completo otra unidad.

Considere los diagramas de la figura 4.1. La razón entre s y h del triángulo rectángulo de la figura 4.1a es independiente del tamaño del triángulo (tal vez recuerde ese aspecto de los triángulos semejantes en sus cursos de geometría). Ese hecho permitió a los primeros ingenieros calcular las proporciones de los triángulos en pequeña escala antes de aplicarlos en proyectos mucho más grandes. Eso fue (y aún es) trigonometría en su forma más básica. Sin embargo, para los astrónomos que observan el movimiento celeste, el diagrama ampliado de la figura 4.1b fue más interesante. En este dibujo, s es la mitad del arco de un círculo de radio h y θ es un **ángulo central** del círculo que interseca a un arco circular de longitud a. Si θ midiera 40 grados, llamaríamos a a un "arco de 40 grados" debido a su asociación directa con el ángulo central θ, pero observe que a también tiene una *longitud* que puede medirse en las *mismas unidades* que las otras longitudes del dibujo. Llega a ser natural pensar que el ángulo está determinado por el arco en vez de que el arco esté determinado por el ángulo, lo cual conduce a la medida en radianes.

¿POR QUÉ 360°?

La idea de dividir un círculo en 360 partes iguales se remonta al sistema sexagesimal (base 60) de los antiguos sumerios. El atractivo del número 60 fue que es divisible entre muchos números (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30). En los primeros cálculos astronómicos se empleó el sistema sexagesimal para la medición de los círculos; el resto es historia.

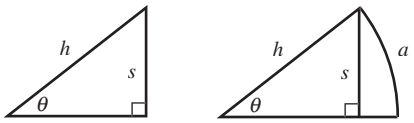


FIGURA 4.1 Los dibujos que propiciaron el surgimiento de la trigonometría.

CONVERSIONES CON CALCULADORA

Su calculadora probablemente tenga una función para convertir grados al sistema DMS. Consulte el manual de usuario. Mientras tanto, es recomendable que practique algunas conversiones sin su calculadora para que adquiera un mejor conocimiento de cómo trabajar con el sistema DMS.

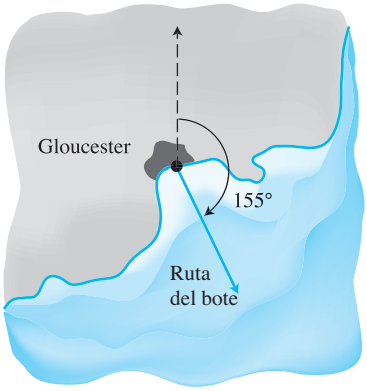


FIGURA 4.2 El rumbo de un bote de pesca localizado a 155° fuera de Gloucester.

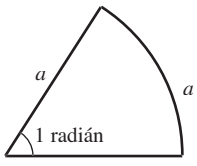


FIGURA 4.3 En un círculo, el ángulo central de un radián interseca a un arco cuya longitud mide una vez el radio.

Grados y radianes

Un **grado**, representado por el símbolo °, es una unidad de medición angular igual a 1/180 del ángulo que se forma con la línea horizontal. En el sistema DMS (***D**egrees-**M**inutes-**S**econds*, grados-minutos-segundos) de la medida angular, cada grado está subdivido en 60 **minutos** (simbolizados con ′) y cada minuto está subdividido en 60 **segundos** (simbolizados con ″) (observe nuevamente la influencia sumeria).

El ejemplo 1 ilustra cómo convertir los grados de la forma decimal al sistema DMS y viceversa.

EJEMPLO 1 Práctica con el sistema DMS

a) Convierta 37.425° al sistema DMS.

b) Convierta 42°24′36″ a grados.

SOLUCIÓN

a) Necesitamos convertir la parte decimal a minutos y segundos. Primero se convierte 0.425° a minutos:

$$0.425°\left(\frac{60'}{1°}\right) = 25.5'.$$

Posteriormente, se convierte 0.5 minutos a segundos:

$$0.5'\left(\frac{60''}{1'}\right) = 30''.$$

Se unen los resultados y se encuentra que 37.425°= 37°25′30″.

b) Cada minuto es 1/60 de un grado y cada segundo es 1/3,600 de un grado. Por lo tanto,

$$42°24'36'' = 42° + \left(\frac{24}{60}\right)° + \left(\frac{36}{3{,}600}\right)° = 42.41°.$$

Ahora resuelva el ejercicio 3.

En navegación, el **rumbo** o **curso** de un objeto en algunas ocasiones depende del ángulo de la **línea de viaje** que se mide en el sentido en el que giran las manecillas del reloj desde el punto norte. Por ejemplo, la línea de viaje en la figura 4.2 tiene el curso de 155°. El conjunto de números reales está **ordenado**. Esto significa que podemos comparar cualesquiera dos números reales que no sean iguales mediante desigualdades y decir que uno "es menor que" o "mayor que" el otro.

En este libro se emplean grados para medir los ángulos en el contexto geométrico, especialmente cuando se aplica la trigonometría a los problemas del mundo real en agrimensura, construcción y navegación, donde los grados se aceptan como unidades de medida. Sin embargo, cuando se trata de funciones *trigonométricas*, los ángulos se medirán en radianes, de tal manera que el dominio y el rango de los valores puedan medirse en escalas comparables.

DEFINICIÓN Radián

Un ángulo central de un círculo mide 1 **radián** si interseca un arco cuya longitud mide lo mismo que el radio (consulte la figura 4.3).

EXPLORACIÓN 1 **Construcción de un ángulo de 1 radián**

Cuidadosamente dibuje un círculo grande en una hoja de papel, trazando alrededor de un objeto circular o usando un compás. Identifique el centro del círculo (O), dibuje un radio horizontal desde O hacia la derecha e interseque el círculo en el punto A. Luego corte un pedazo de hilo o cuerda con la misma longitud del radio. Coloque un extremo de la cuerda en el punto A y sobrepóngala al círculo en el sentido contrario al que giran las manecillas del reloj, marque el punto B sobre el círculo en donde termine la cuerda. Dibuje el radio de O a B.

La medida del ángulo AOB es un radián.

1. ¿Cuál es la circunferencia del círculo, en términos del su radio r?
2. ¿Cuántos radianes debe haber en un círculo completo?
3. Si se corta una cuerda que mida 3 veces lo que mide el radio, ¿cubriría a la mitad de la circunferencia? ¿Por qué sí o por qué no?
4. ¿Cuántos radianes hay en un ángulo recto?

EJEMPLO 2 Práctica con medidas en radianes

a) ¿Cuántos radianes hay en 90 grados?

b) ¿Cuántos radianes hay en $\pi/3$ radianes?

c) Determine la longitud del arco que se interseca con el ángulo central de 1/2 de radian en un círculo cuyo radio mide 5 pulgadas.

d) Determine la medida en radianes de un ángulo central que interseca a un arco de longitud s en un círculo de radio r.

SOLUCIÓN

a) Ya que un ángulo llano (el ángulo que forma una línea recta) mide tanto π radianes como 180°, podemos utilizar el factor de conversión (π radianes)/(180°) = 1 para convertir grados a radianes:

$$90^\circ\left(\frac{\pi \text{ radianes}}{180^\circ}\right) = \frac{90\pi}{180} \text{ radianes} = \frac{\pi}{2} \text{ radianes.}$$

b) En este caso utilizamos el factor de conversión (180°)/(π radianes) = 1 para convertir radianes en grados:

$$\left(\frac{\pi}{3} \text{ radianes}\right)\left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ radianes}}\right) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ.$$

c) Un ángulo central que mide 1 radián interseca a un arco de longitud 1 radio, que en este ejemplo mide 5 pulgadas. Por tanto, un ángulo central que mide 1/2 radián interseca a un arco de longitud 1/2 radio, que en este ejemplo equivale a 2.5 pulgadas.

d) Se puede resolver este problema con las siguientes proporciones

$$\frac{x \text{ radianes}}{s \text{ unidades}} = \frac{1 \text{ radián}}{r \text{ unidades}}$$

$$xr = s$$

$$x = \frac{s}{r},$$

Ahora resuelva los ejercicios 11 y 19.

Conversión de grados a radianes y viceversa

Para convertir radianes a grados, se multiplica por $\dfrac{180^\circ}{\pi \text{ radianes}}$.

Para convertir grados a radianes, se multiplica por $\dfrac{\pi \text{ radianes}}{180^\circ}$.

Con la práctica podrá hacer esas conversiones mentalmente. La clave es pensar que el ángulo que forma una línea horizontal es igual a π radianes, y al mismo tiempo sabe que mide 180°.

Longitud de un arco circular

Debido a que el ángulo central de 1 radián siempre interseca a un arco cuya longitud equivale a lo que mide el radio, se infiere que el ángulo central de π radianes en un círculo de radio r interseca un arco de longitud πr. Esto nos proporciona una fórmula para medir la longitud de un arco.

Fórmula de la longitud de un arco (medido en radianes)

Si θ es un ángulo central en un círculo de radio r y si θ se mide en radianes, entonces la longitud, s, del arco intersecado se obtiene mediante la fórmula:

$$s = r\theta.$$

¿UN RADIÁN TIENE UNIDADES?

La fórmula $s = r\theta$ conlleva un interesante dato acerca de los radianes: mientras que s y r pueden medirse en las mismas unidades, las unidades de medición de los radianes son neutrales. Por ejemplo, si $r = 5$ pulg y $\theta = 2$ radianes, entonces $s = 10$ pulgadas (no 10 "pulgadas radianes"). Esta situación inusual surge del hecho de que en la definición de radián se utiliza la longitud del radio y sus unidades de medición.

En algunas ocasiones se emplea una fórmula menos sencilla (la cual incluye la fórmula de conversión de grados a radianes) que se utiliza cuando el ángulo θ se mide en grados.

Fórmula de la longitud de un arco (medido en grados)

Si θ es un ángulo central en un círculo de radio r y si θ se mide en grados, entonces la longitud s del arco intersecado se obtiene mediante la fórmula:

$$s = \frac{\pi r\theta}{180}.$$

EJEMPLO 3 Perímetro de una rebanada de pizza

Determine el perímetro de una rebanada de pizza grande cuyo ángulo mide 60° y su radio mide 7 pulgadas.

SOLUCIÓN

El perímetro (figura 4.4) es 7 pulg + 7 pulg + s pulg, en donde s es la longitud del borde de la rebanada de la pizza. Por la fórmula de la longitud de arco:

$$s = \frac{\pi(7)(60)}{180} = \frac{7\pi}{3} \approx 7.3.$$

El perímetro mide aproximadamente 21.3 pulg.

Ahora resuelva el ejercicio 35.

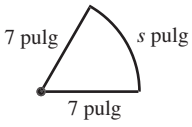


FIGURA 4.4 Un rebanada de pizza cuyo ángulo mide 60° (ejemplo 3).

EJEMPLO 4 Diseño de una pista de atletismo

Los carriles de la pista Emery Sears del colegio Bluffton miden 1 metro de ancho. El radio interno del primer carril es de 33 metros mientras que el radio interno del segundo carril es de 34 metros. ¿Cuánto más se recorre en el segundo carril con respecto al primero en una vuelta? (Consulte la figura 4.5.)

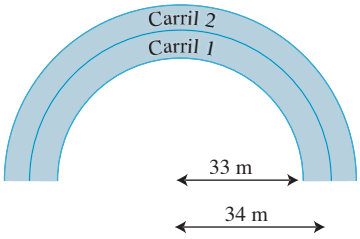


FIGURA 4.5 Dos carriles de la pista descrita en el ejemplo 4.

SOLUCIÓN La solución de este problema se obtiene en radianes. Cada carril es un semicírculo con ángulo central $\theta = \pi$ y longitud $s = r\theta = r\pi$. La diferencia de sus longitudes, por lo tanto, es $34\pi - 33\pi = \pi$. El segundo carril es aproximadamente 3.14 metros más largo que el primer carril.

Ahora resuelva el ejercicio 37.

Movimiento angular y lineal

En las aplicaciones, algunas veces es necesario relacionar la *velocidad angular* (medida en unidades como revoluciones por minuto) a *velocidad lineal* (medida en unidades como millas por hora). La relación se puede hallar con las fórmulas de longitud de un arco o por los factores de conversión en las que se iguala "1 radián" de medida angular con "1 radio" de longitud de arco.

EJEMPLO 5 Uso de la velocidad angular

El camión de Alberto Juárez tiene ruedas de 36 pulgadas de diámetro que giran a 630 rpm (revoluciones por minuto). Encuentre la velocidad del camión en millas por hora.

SOLUCIÓN Convertimos las revoluciones por minuto a millas por hora por medio de una serie de factores de conversión de unidades. Observe que el factor de conversión $\frac{18 \text{ pulg}}{1 \text{ radián}}$ se utiliza en este ejemplo porque el radio mide 18 pulg.

$$\frac{630 \text{ rev}}{1 \text{ min}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ hr}} \times \frac{2\pi \text{ radianes}}{1 \text{ rev}} \times \frac{18 \text{ pulg}}{1 \text{ radián}} \times \frac{1 \text{ pie}}{12 \text{ pulg}} \times \frac{1 \text{ mi}}{5{,}280 \text{ pies}}$$

$$\approx 67.47 \frac{\text{mi}}{\text{hr}}$$

Ahora resuelva el ejercicio 45.

Una **milla náutica** es la longitud del arco que se forma a lo largo del Ecuador de la Tierra cuando el ángulo central mide 1 minuto. En la figura 4.6 se puede observar, aunque no a escala, el ángulo central AOB de la Tierra que mide 1/60 de un grado. Este interseca un arco que mide una milla náutica.

La fórmula de la longitud del arco nos permite hacer la conversión de millas náuticas a **millas terrestres,** la conocida "milla" de 5,280 pies.

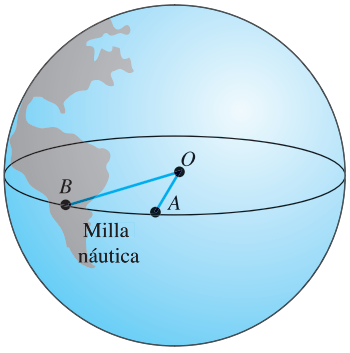


FIGURA 4.6 Aunque la Tierra no es una esfera perfecta, su diámetro es, en promedio, 7,912.18 millas. Una milla náutica es $1'$ de la circunferencia de la Tierra en el Ecuador.

EJEMPLO 6 Conversión a millas náuticas

Megan McCarty, un piloto de Western Airlines, frecuentemente vuela aviones de Boston a San Francisco, ciudades que distan 2,698 millas. Los cálculos del capitán McCarty del tiempo de vuelo se hacen en millas náuticas. ¿Cuántas millas náuticas hay de Boston a San Francisco?

SOLUCIÓN El radio de la Tierra en el Ecuador mide aproximadamente 3,956 millas. Convierta 1 minuto a radianes:

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{10{,}800} \text{ radianes.}$$

Ahora podemos aplicar la fórmula $s = r\theta$:

$$1 \text{ milla náutica} = (3{,}956)\left(\frac{\pi}{10{,}800}\right) \text{millas}$$

$$\approx 1.15 \text{ millas}$$

$$1 \text{ milla} = \left(\frac{10{,}800}{3{,}956\pi}\right) \text{millas náuticas}$$

$$\approx 0.87 \text{ milla náutica}$$

La distancia de Boston a San Francisco es

$$2{,}698 \text{ millas} = \frac{2{,}698 \cdot 10{,}800}{3{,}956\pi} \approx 2{,}345 \text{ millas náuticas.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 51.

Conversión de distancias

1 milla $\approx$ .87 milla náutica

1 milla náutica $\approx$ 1.15 millas

REPASO RÁPIDO 4.1 *(Para obtener ayuda consulte la sección 1.7)*

En los ejercicios 1 y 2 encuentre la circunferencia del círculo cuyo radio r se da. Expréselo con la unidad de medición correcta.

1. $r = 2.5$ pulg **2.** $r = 4.6$ m

En los ejercicios 3 y 4 encuentre el radio del círculo que corresponde a la circunferencia C.

3. $C = 12$ m **4.** $C = 8$ pies

En los ejercicios 5 y 6 calcule la expresión solicitada para los valores que se muestran y exprésela en las unidades de medición correctas.

5. $s = r\theta$

a) $r = 9.9$ pies $\theta = 4.8$ radianes

b) $r = 4.1$ km $\theta = 9.7$ radianes

6. $v = r\omega$

a) $r = 8.7$ m $\omega = 3.0$ radianes/s

b) $r = 6.2$ ft $\omega = 1.3$ radianes/s

En lo ejercicios del 7 al 10 convierta de millas por hora a pies por segundo o de pies por segundo a millas por hora.

7. 60 mph **8.** 45 mph

9. 8.8 pies/s **10.** 132 pies/s

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.1

En los ejercicios del 1 al 4 convierta del sistema DMS a la forma decimal.

1. 23°12′ **2.** 35°24′

3. 118°44′15″ **4.** 48°30′36″

En los ejercicios del 5 al 8 convierta de la forma decimal a grados, minutos, segundos (DMS).

5. 21.2° **6.** 49.7°

7. 118.32° **8.** 99.37°

En los ejercicios del 9 al 16 convierta del sistema DMS a radianes.

9. 60° **10.** 90°

11. 120° **12.** 150°

13. 71.72° **14.** 11.83°

15. 61°24′ **16.** 75°30′

En los ejercicios del 17 al 24 convierta de radianes a grados.

17. $\pi/6$ **18.** $\pi/4$

19. $\pi/10$ **20.** $3\pi/5$

21. $7\pi/9$ **22.** $13\pi/20$

23. 2 **24.** 1.3

En los ejercicios del 25 al 32 use la fórmula de la longitud del arco apropiada para encontrar la información que falta.

	s	r	θ
25.	?	2 pulg	25 radianes
26.	?	1 cm	70 radianes
27.	1.5 pies	?	$\pi/4$ radianes
28.	2.5 cm	?	$\pi/3$ radianes
29.	3 m	1 m	?
30.	4 pulg	7 pulg	?
31.	40 cm	?	20°
32.	?	5 pies	18°

En los ejercicios 33 y 34, el ángulo central θ interseca a los arcos s_1 y s_2 de dos círculos concéntricos con radios r_1 y r_2 respectivamente. Encuentre la información que falta.

	θ	r_1	s_1	r_2	s_2
33.	?	11 cm	9 cm	44 cm	?
34.	?	8 km	36 km	?	72 km

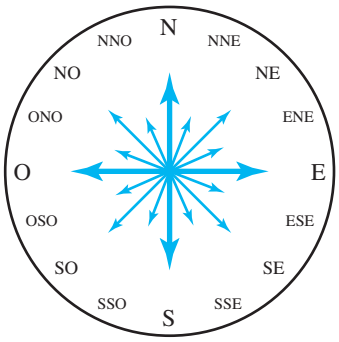
35. Encuentre el perímetro de un sector de 10 grados que se obtiene de un disco cuyo radio mide 11 centímetros. Redondee a la pulgada más cercana.

36. Un arco de 100° tiene una longitud de 7 cm. ¿Cuánto mide el radio del círculo al que pertenece el arco? Redondee al centímetro más cercano.

37. Para formar una pista de carreras para dos coches de juguete se requieren 10 piezas idénticas. Si el arco interno de cada pieza es 3.4 pulg mas corto que el arco externo, ¿cuánto mide el ancho de la pista?

38. Los círculos concéntricos de un blanco están separados por 6 pulgadas. El perímetro del círculo interno (rojo) mide 37.7 pulgadas. ¿Cuánto mide el perímetro del círculo próximo más alejado (amarillo)?

Los ejercicios 39 al 42 se refieren a la brújula de 16 posiciones que se muestra a continuación. El norte corresponde al ángulo que mide 0° y los otros ángulos se miden desde el norte en el sentido que giran las manecillas del reloj.



39. Lectura de brújula Encuentre el ángulo en grados que describe la localización que indica la brújula.

a) NE (noreste).

b) NNE (nor-noreste).

b) OSO (oeste-suroeste).

40. Lectura de brújula Encuentre el ángulo en grados que describe la localización que indica la brújula.

a) SSO (sur-suroeste).

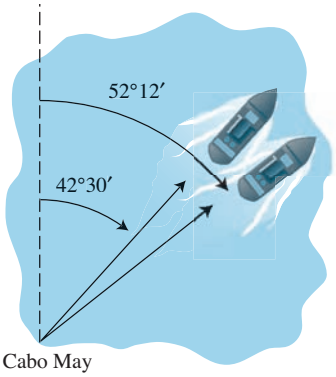
b) ONO (oeste-noroeste).

c) NNO (nor-noroeste).

41. Lectura de brújula ¿Qué dirección de la brújula es más cercana a la localización 121°?

42. Lectura de brújula ¿Qué dirección de la brújula es más cercana a la localización 219°?

43. Navegación Dos botes de guardacostas parten de Cabo May al mismo tiempo. Uno navega con un curso de 42°30′ y el otro con uno de 52°12′. Si viajan a la misma velocidad, ¿qué tan separados estarán uno del otro cuando se hayan alejado 25 millas de Cabo May?



44. Diseño automotriz La tabla 4.1 muestra las especificaciones de dimensiones para las llantas incluidas en el equipamiento estándar de tres distintos vehículos estadounidenses.

Tabla 4.1 Dimensiones de las llantas de tres tipos de vehículos

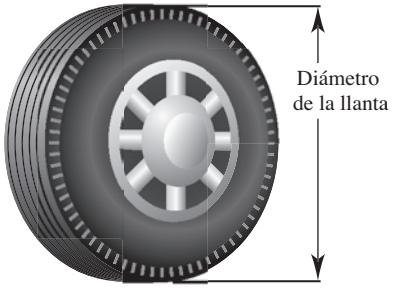
Vehículo	Tipo de llanta	Diámetro de la llanta
Ford Taurus	215/60–16	26.16 pulg
Dodge Charger RT	225/60–18	28.63 pulg
Mercury Mariner	235/70–16	28.95 pulg

Fuente: Asociación Nacional de Educación, como se reporta en The World Almanac and Book of Facts, 2005.

a) Determine la velocidad de cada vehículo en mph cuando las llantas giran a 8,000 revoluciones por minuto.

b) Comparado con el Mercury Mariner, ¿cuántas revoluciones por minuto más deben girar las llantas del Ford Taurus para viajar una milla?

c) Escriba para aprender Es poco inteligente (y en algunas ocasiones ilegal) equipar a los vehículos con llantas con diámetro mayor para el que fue diseñado. Si un Ford Taurus 2006 se equipase con llantas de 28 pulgadas, ¿cómo se vería esto afectado en el odómetro (en términos de la distancia en millas) y en el velocímetro?



45. Carreras de bicicletas Cathy Nguyen conduce una bicicleta con llantas cuyo radio mide 13 pulgadas. Cuando está pedaleando a una velocidad de 44 pies/s, ¿a cuántas revoluciones por minuto están rodando las llantas?

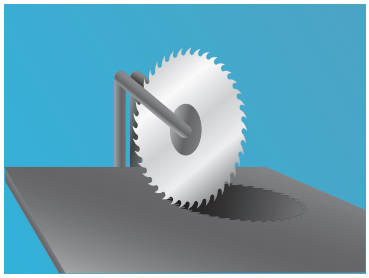
46. Dimensiones de las llantas Los números en la columna "tipo de llanta" del ejercicio 44 dan las dimensiones de la llanta en el sistema P-métrico. Cada número está expresado en la forma *W*/*R*-*D* (por sus siglas en inglés), donde *W* es el ancho de la llanta en milímetros, *R*/100 es la razón del flanco de la llanta (*S*) a su ancho *W*, y *D* es el diámetro (en pulgadas) de la rueda sin la llanta.

a) Muestre que $S = WR/100$ milímetros $= WR/2{,}540$ pulg.

b) El diámetro de la llanta es $D + 2S$. Encuentre una fórmula para el diámetro de la llanta que involucre únicamente las variables *D*, *W* y *R*.

c) Utilice la fórmula obtenida en el inciso anterior para verificar los diámetros de las llantas del ejercicio 44. Después encuentre el diámetro de la llanta para el Honda Ridgeline 2006, el cual viene equipado con llantas tipo 245/65 – 17.

47. Diseño de herramientas Una sierra circular tiene una hoja afilada con diámetro de 10 pulgadas que gira a 2,000 rpm. Si la hoja tiene 12 dientes por pulgadas, ¿cuantos dientes por segundo pasan por la superficie que se desea cortar?



48. Navegación Esboce un diagrama de un barco que siga el rumbo que se indica.

a) 35° **b)** 128° **c)** 310°

49. Navegación El capitán del barco turístico *Julia* parte de Oak Harbor y sigue un rumbo de 38° en las primeras 2 millas y posteriormente cambia el rumbo a 47° en las siguientes 4 millas. Dibuje un esquema que represente la ruta que siguió el barco.

50. Navegación Los puntos A y B están separados 257 millas náuticas. ¿Qué tan alejados están uno del otro en millas terrestres?

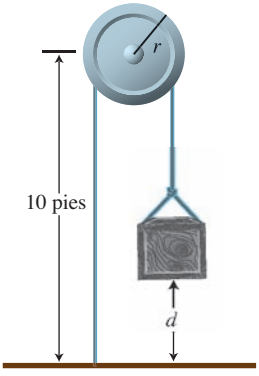
51. Navegación Los puntos C y D están separados 895 millas terrestres. ¿Qué tan alejados están uno del otro en millas náuticas?

52. Diseño de un complejo deportivo En el ejemplo 4 se calcula la diferencia de la distancia que se recorre en una vuelta en el primer y en el segundo carril de una pista de atletismo. Encuentre la diferencia de la distancia que se recorre en una vuelta en los carriles de la misma pista que se señalan a continuación.

a) Carriles 5 y 6 **b)** Carriles 1 y 6

53. Ingeniería mecánica Una polea simple con radio r se usa para levantar un objeto pesado colocado 10 pies arriba del suelo. La polea gira θ°; determine la altura a la cual se eleva el objeto.

a) $r = 4$ pulg, $\theta = 720°$ **b)** $r = 2$ pies, $\theta = 180°$



54. Péndulo de Foucault En 1851, el físico francés Jean Foucault usó un péndulo para demostrar la rotación de la Tierra. Hoy en día hay más de 30 péndulos de Foucault distribuidos en Estados Unidos. El péndulo de Foucault en el Instituto Smithsoniano en Washington, DC, consiste en una bola grande de latón suspendida en un cable delgado que mide 52 pies de largo. Si la bola oscila en un ángulo de 1°, ¿qué distancia recorre?

55. Actividad en equipo Banda del aire acondicionado La banda del aire acondicionado de un automóvil conecta dos ruedas metálicas con radio $r = 4$ cm y $R = 7$ cm. La velocidad angular de la rueda más grande es 120 rpm.

a) ¿Cuál es la velocidad angular en radianes por segundo de la rueda más grande?

b) ¿Cuál es la velocidad lineal en centímetros por segundo de la banda?

c) ¿Cuál es la velocidad angular en radianes por segundo de la rueda más chica?

56. Actividad en equipo Hélice de un barco Las hélices del *Amazon Paradise* tienen un radio de 1.2 metros. A toda velocidad, las hélices giran a 135 rpm.

a) ¿Cuál es la velocidad angular en radianes por segundo de una de las aletas de la hélice?

b) ¿Cuál es la velocidad lineal en metros por segundo de la punta de una de las aletas de la hélice?

b) ¿Cuál es la velocidad lineal (en metros por segundo) de un punto sobre la mitad de la distancia entre el centro de la hélice y el extremo de una aleta?

Preguntas de examen estandarizado

57. Verdadero o falso Si el caballo A está dos veces más alejado del centro de un carrusel que el caballo B, entonces el caballo A gira dos veces más rápido que el caballo B. Justifique su respuesta.

58. Verdadero o falso Las medidas en radianes de los tres ángulos de un triángulo pueden ser números enteros. Justifique su respuesta.

Puede utilizar una calculadora graficadora para responder las siguientes preguntas.

59. Opción múltiple ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo de x grados?

A) πx **B)** $x/180$

C) $\pi x/180$ **D)** $180x/\pi$

E) $180/x\pi$

60. Opción múltiple Si el perímetro de un área mide 4 veces más que su radio, entonces el ángulo central del área mide, en radianes,

A) 2 **B)** 4

C) $2/\pi$ **D)** $4/\pi$

E) Es imposible determinarlo si no está especificado el radio

61. **Opción múltiple** Una bicicleta tiene ruedas cuyo diámetro es de 26 pulgadas y lleva una velocidad de 10 millas por hora, ¿cuántas revoluciones por minuto gira cada rueda? (redondee al entero más cercano).

A) 54 **B)** 129

C) 259 **D)** 406

E) 646

62. **Opción múltiple** El ángulo central de un círculo con radio r mide θ radianes. Si ese mismo ángulo central perteneciera a un círculo de radio $2r$, la medida en radianes sería:

A) $\frac{\theta}{2}$. **B)** $\frac{\theta}{2r}$.

C) θ. **D)** 2θ.

E) $2r\theta$.

Exploraciones

En la tabla 4.2 se muestra la latitud y la longitud en las que se encuentran localizadas varias ciudades de Estados Unidos. La latitud se mide desde el Ecuador; la longitud se mide desde el meridiano de Greenwich, que pasa por Londres de norte a sur.

Tabla 4.2 Latitud y longitud de algunas ciudades de Estados Unidos

Ciudad	Latitud	Longitud
Atlanta	33°45′	84°23′
Chicago	41°51′	87°39′
Detroit	42°20′	83°03′
Los Ángeles	34°03′	118°15′
Miami	25°46′	80°12′
Minneapolis	44°59′	93°16′
Nueva Orleáns	29°57′	90°05′
Nueva York	40°43′	74°0′
San Diego	32°43′	117°09′
San Francisco	37°47′	122°25′
Seattle	47°36′	122°20′

Fuente: Departamento del Interior de E.U. de acuerdo con The World Almanac and Book of Facts 2005.

En los ejercicios 63 al 66 encuentre la diferencia de la longitud para las ciudades especificadas.

63. Atlanta y San Francisco.

64. Nueva York y San Diego.

65. Minneapolis y Chicago.

66. Miami y Seattle.

En los ejercicios 67 al 70 suponga que las dos ciudades tienen la misma longitud (es decir, suponga que una está directamente en el norte de la otra), y encuentre la distancia entre ellas en millas náuticas. Considere que el diámetro de la Tierra es de 7,912 millas.

67. San Diego y Los Ángeles.

68. Seattle y San Francisco.

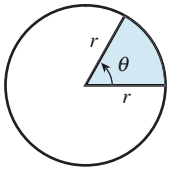
69. Nueva Orleáns y Minneapolis.

70. Detroit y Atlanta.

71. **Actividad en equipo** **Área de un sector** Un *sector de un círculo* (sombreado en la figura) es una región definida por el ángulo central de un círculo y el arco que interseca. Suponga que las áreas de los sectores son proporcionales a sus ángulos centrales para probar que:

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

donde r es el radio y θ es la medida en radianes.



Ampliación de las ideas

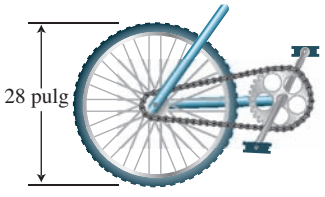
72. **Área de un sector** Use la fórmula $A = (1/2)r^2\theta$ para determinar el área de un sector, dado el radio r y el ángulo central θ.

a) $r = 5.9$ pies, $\theta = p/5$

b) $r = 1.6$ kilómetros, $\theta = 3.7$

73. **Navegación** La torre de control A está a 60 millas del este de la torre de control B. En cierto momento, un aeroplano está localizado a 340° de la torre A y a 37° de la torre B. En un dibujo muestre la localización exacta del aeroplano.

74. **Carrera de bicicletas** Las llantas de la bicicleta de Ben Scheltz miden 28 pulg de diámetro, el engrane (la *estrella*) de alta velocidad del pedal tiene 9 pulg de diámetro y el engrane de la rueda (el *sprocket*) mide 3 pulg de diámetro. Encuentre la velocidad angular en radianes por segundo de la llanta y de ambas estrellas cuando Ben alcanza su velocidad más alta de carrera de 66 pies/seg.



4.2 Funciones trigonométricas de ángulos agudos

Aprenderá acerca de...

- Trigonometría del triángulo rectángulo
- Dos triángulos famosos
- La evaluación de las funciones trigonométricas con calculadora
- Las aplicaciones de la trigonometría del triángulo rectángulo

. . . porque

Las diversas aplicaciones de la trigonometría de los triángulos rectángulos le dieron el nombre a la materia.

Trigonometría del triángulo rectángulo

Recuerde que las figuras geométricas son **semejantes** si tienen la misma forma incluso cuando sean de distinto tamaño. Tener la misma forma significa que los ángulos de uno son congruentes con los ángulos del otro y sus lados correspondientes son proporcionales. La semejanza es la base de muchas aplicaciones, incluyendo los dibujos a escala, los mapas y la **trigonometría de los triángulos rectángulos**, la cual constituye el tema de esta sección.

Dos triángulos son semejantes si los ángulos de uno son congruentes con los ángulos del otro. En el caso de dos triángulos *rectángulos,* es necesario saber sólo que un ángulo agudo de uno es igual a un ángulo agudo del otro para concluir que los triángulos son semejantes. De esta manera, un ángulo agudo θ de un triángulo rectángulo determina seis distintas razones de la longitud de los lados. Cada razón puede considerarse una función de θ en las que θ toma valores de 0° a 90° o de 0 radianes a $\pi/2$ radianes. Queremos estudiar estas funciones de los ángulos agudos con mayor profundidad.

Para utilizar el potencial de la geometría con coordenadas en el dibujo, a menudo los ángulos agudos se dibujan en **posición estándar** en el plano xy, con el vértice en el origen, un rayo a lo largo del lado positivo del eje x, y el otro rayo extendido dentro del primer cuadrante (observe la figura 4.7).

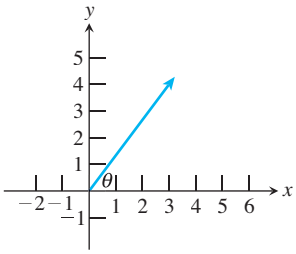


FIGURA 4.7 Un ángulo agudo θ en **posición estándar**, con un rayo a lo largo del lado positivo del eje x y el otro rayo extendido dentro del primer cuadrante.

Las seis razones de la longitud de los lados en un triángulo rectángulo son las *funciones trigonométricas* de un ángulo θ. Se definen tomando como referencia el triángulo $\triangle ABC$ como se muestra en la figura 4.8. Las abreviaciones *op*, *ady* e *hip*, aluden a la longitud del lado opuesto de θ, al lado adyacente de θ y a la hipotenusa, respectivamente.

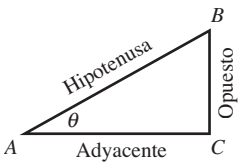


FIGURA 4.8 El triángulo rectángulo de referencia en nuestra definición de las funciones trigonométricas.

DEFINICIÓN Funciones trigonométricas

Sea θ un ángulo agudo del $\triangle ABC$ rectángulo (figura 4.8). Entonces

$$\text{seno } (\theta) = \operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} \qquad \text{cosecante } (\theta) = \csc\theta = \frac{hip}{op}$$

$$\text{coseno } (\theta) = \cos\theta = \frac{ady}{hip} \qquad \text{secante } (\theta) = \sec\theta = \frac{hip}{ady}$$

$$\text{tangente } (\theta) = \tan\theta = \frac{op}{ady} \qquad \text{cotangente } (\theta) = \cot\theta = \frac{ady}{op}$$

AVISO ACERCA DE LA NOTACIÓN DE FUNCIÓN

Tanto sen θ como sen(θ) representan la misma función de la variable θ. Ninguna de las notaciones implica una multiplicación de θ. La notación sen(θ) es similar a la notación $f(x)$, mientras que la notación sen θ es una forma abreviada ampliamente aceptada. Esta misma notación se aplica para las seis funciones trigonométricas.

EXPLORACIÓN 1 **Exploración de las funciones trigonométricas**

Hay el doble de funciones trigonométricas que lados de un triángulo, por lo que se pueden explorar algunas maneras en las cuales se relacionan las funciones trigonométricas entre sí. Llevar a cabo esta actividad le ayudará a aprender a identificar las razones.

1. Cada una de las funciones trigonométricas puede agruparse con otra que es su recíproca. Encuentre los tres pares que son recíprocos.
2. ¿Cuál función trigonométrica puede escribirse como el cociente de sen θ/cos θ?
3. ¿Cuál función trigonométrica puede escribirse como el cociente de csc θ/cot θ?
4. ¿Cuál es el resultado (simplificado) de multiplicar juntas a todas las funciones trigonométricas?
5. ¿Cuáles dos de las funciones trigonométricas deben ser menores a 1 para cualquier ángulo agudo θ? [Sugerencia: ¿cuál es siempre el lado más largo de un triángulo rectángulo?]

Dos triángulos famosos

Para el cálculo de funciones trigonométricas se utilizaban tablas trigonométricas o reglas de cálculo; ahora sólo se necesita una calculadora. Sin embargo, pueden calcularse *geométricamente* las razones de los lados de los ángulos que aparecen en los triángulos rectángulos. Todo estudiante de trigonometría debe ser capaz de calcular esas razones particulares sin calculadora.

EJEMPLO 1 Cálculo de las funciones trigonométricas del ángulo de 45°

Determine los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo de 45°.

SOLUCIÓN El ángulo de 45° aparece en un *triángulo rectángulo isósceles*, cuyos ángulos miden 45°−45°−90° (consulte la figura 4.9).

Debido a que el tamaño exacto de los lados es irrelevante, hacemos que los dos catetos midan 1. La hipotenusa, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, es $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Aplicando las definiciones, encontramos:

$$\text{sen } 45° = \frac{op}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 \qquad \text{csc } 45° = \frac{hip}{op} = \frac{\sqrt{2}}{1} \approx 1.414$$

$$\cos 45° = \frac{ady}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 \qquad \sec 45° = \frac{hip}{ady} = \frac{\sqrt{2}}{1} \approx 1.414$$

$$\tan 45° = \frac{op}{ady} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot 45° = \frac{ady}{op} = \frac{1}{1} = 1$$

Ahora resuelva el ejercicio 1.

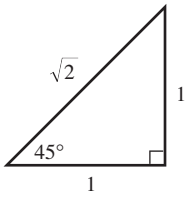


FIGURA 4.9 Un triángulo rectángulo isósceles (ejemplo 1).

Siempre que se conozcan dos lados de los triángulos rectángulo, puede calcularse el tercer lado si se utiliza el teorema de Pitágoras. También se pueden obtener las seis funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo. Esto lo ilustramos en el ejemplo 2 con otro triángulo bien conocido.

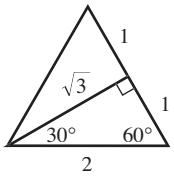


FIGURA 4.10 Una altura a partir de cualquier lado de un triángulo equilátero crea dos triángulos congruentes cuyos ángulos miden 30°−60°−90°. Si cada lado del triángulo equilátero tiene una longitud de 2, entonces los lados de los triángulos resultantes miden 2, 1 y $\sqrt{3}$ (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Cálculo de las funciones trigonométricas del ángulo de 30°

Determine los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo de 30°.

SOLUCIÓN Un ángulo de 30° puede hallarse en un triángulo de ángulos **30°−60°−90°**, el cual puede construirse a partir de un triángulo equilátero (cuyos tres ángulos miden 60°) mediante el trazo de una línea que representa la altura del triángulo en cualquier lado del mismo. Debido a que el tamaño es irrelevante, inicie los cálculos con un triángulo equilátero en el que la longitud de cada lado mide 2 unidades. La altura que se trazó divide a la figura inicial en dos triángulos congruentes de ángulos de 30°, 60° y 90° con hipotenusa de longitud 2 y el cateto más pequeño de longitud 1. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, el cateto más largo tiene una longitud de $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. (Consulte la figura 4.10.)

Aplicando las definiciones de las funciones trigonométricas se obtiene:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{op}{hip} = \frac{1}{2} \qquad \csc 30° = \frac{hip}{op} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\cos 30° = \frac{ady}{hip} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866 \qquad \sec 30° = \frac{hip}{ady} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.155$$

$$\tan 30° = \frac{op}{ady} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577 \qquad \cot 30° = \frac{ady}{op} = \frac{\sqrt{3}}{1} \approx 1.732$$

Ahora resuelva el ejercicio 3.

EXPLORACIÓN 1 **Cálculo de las funciones trigonométricas del ángulo de 60°**

1. Obtenga las seis funciones trigonométricas para un ángulo de 60°. Tome en cuenta que en el ejemplo 2 ya se realizó mucho del trabajo preliminar.
2. Compare los seis valores de la función para 60° con los seis valores de las funciones trigonométricas para un ángulo de 30°, ¿qué observa?
3. Tarde o temprano aprenderá una regla que relaciona las funciones trigonométricas de cualquier ángulo con las del ángulo *complementario* correspondiente. (Recuerde de sus clases de geometría que 30 y 60° son complementarios porque su suma es igual a 90°). Con base en esta actividad, ¿puede predecir de qué regla se trata? [*Sugerencia:* El "co" de coseno, cotangente y cosecante viene de "complemento"].

El ejemplo 3 ilustra que conocer una razón trigonométrica de un triángulo rectángulo es suficiente para encontrar las otras cinco.

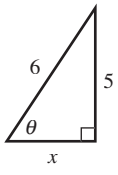


FIGURA 4.11 Cómo crear un ángulo agudo θ tal que $\operatorname{sen}\theta = 5/6$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Uso de una razón trigonométrica para encontrar las demás

Sea θ un ángulo agudo tal que $\operatorname{sen}\theta = 5/6$. Calcule las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN Dibuje un ángulo en el que se muestre el ángulo agudo θ. Asigne al lado opuesto una longitud de 5 y una de 6 a la hipotenusa (observe la figura 4.11). Debido a que $\operatorname{sen}\theta = 5/6$, ¡ése debe ser el ángulo que vamos a utilizar! Ahora necesitamos saber la longitud del otro lado del triángulo (llamado x en la figura).

continúa

Del teorema de Pitágoras se desprende que $x^2 + 5^2 = 6^2$, entonces $x = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$. Aplicando las definiciones se tiene que:

$$\text{sen } \theta = \frac{op}{hip} = \frac{5}{6} \approx 0.833 \qquad \csc \theta = \frac{hip}{op} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$\cos \theta = \frac{ady}{hip} = \frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0.553 \qquad \sec \theta = \frac{hip}{ady} = \frac{6}{\sqrt{11}} \approx 1.809$$

$$\tan \theta = \frac{op}{ady} = \frac{5}{\sqrt{11}} \approx 1.508 \qquad \cot \theta = \frac{ady}{op} = \frac{\sqrt{11}}{5} \approx 0.663$$

Ahora resuelva el ejercicio 9.

Evaluación de las funciones trigonométricas con calculadora

El uso de la calculadora para evaluar las funciones le permite concentrar todas sus habilidades de resolución de problemas en el paso de modelación, el paso que involucra a la trigonometría real. El peligro es que su calculadora estime los valores que desea incluso cuando usted cometa algún error al solicitarle algo que no es lo que necesita. Tendrá suerte si, al equivocarse, aparece un mensaje de error en la pantalla de la calculadora. En la mayoría de los casos, desafortunadamente encontrará una respuesta que en realidad es errónea pero que usted supondrá correcta. Se listan los errores más comunes asociados con la estimación de las funciones trigonométricas con calculadoras.

Errores comunes que se cometen con la calculadora cuando se evalúan las funciones trigonométricas

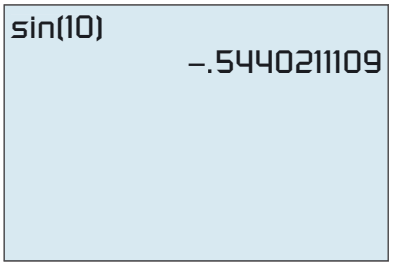


FIGURA 4.12 Forma incorrecta de encontrar sen (10°).

1. Uso de la calculadora con el modo de medida angular incorrecto (grados/radianes) Este error es tan común que todos lo cometen al menos una vez. Sólo se puede esperar que usted lo reconozca cuando suceda. Por ejemplo, suponga que está resolviendo un problema para el que necesita estimar el seno de 10 grados. En la calculadora puede verse una pantalla como la que se muestra en la figura 4.12.

¿Por qué la respuesta es negativa? La primera reacción es comprobar el modo empleado. Seguramente se estaba utilizando el modo de radianes. Si se cambia a grados se tiene que sen(10) = 0.1736481777, la cual es una respuesta razonable. (Aún queda abierta la pregunta de por qué el seno de 10 radianes es negativo, lo que se tratará en la siguiente sección.) Se revisará el problema más adelante cuando se estudien las gráficas trigonométricas.

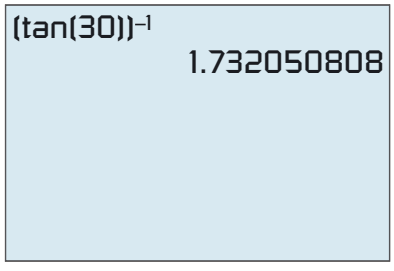


FIGURA 4.13 Obtención de cot (30°).

2. Uso de las teclas de la inversa de las funciones trigonométricas para estimar la cotangente, la secante y la cosecante En la mayoría de las calculadoras no hay botones para obtener la cotangente, la secante y la cosecante. Esto se debe a que pueden calcularse fácilmente si se estima el recíproco de la tangente, la cosecante y el seno, respectivamente. Por ejemplo, en la figura 4.13 se muestra la forma correcta de obtener la cotangente de 30 grados.

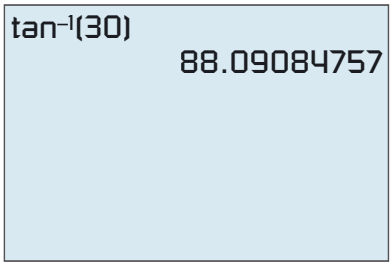


FIGURA 4.14 Esto no es cot (30°).

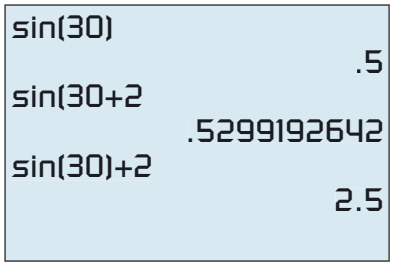


FIGURA 4.15 Una manera correcta y otra incorrecta de encontrar sen (30°) + 2.

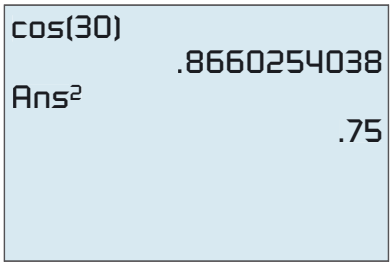


FIGURA 4.16 (Ejemplo 4).

En la calculadora también hay una tecla "TAN^{-1}" pero ¡no es la función cotangente! Recuerde que el exponente -1 de una función nunca se utiliza para expresar el recíproco; siempre se emplea para indicar que se trata de la *función inversa*. Se estudiará la inversa de las funciones trigonométricas más adelante; mientras tanto observe que es una forma incorrecta de calcular cot(30) (figura 4.14).

3. **Uso de funciones abreviadas que la calculadora no reconoce** Este error es menos peligroso porque, por lo regular, la calculadora despliega un mensaje de error. Generalmente, las potencias de las funciones trigonométricas se expresan escribiendo (por ejemplo) "$\text{sen}^3\theta - \cos^3\theta$" en lugar del menos práctico "$(\text{sen}(\theta))^3 - (\cos(\theta))^3$". La calculadora no reconoce la notación abreviada y aparece un mensaje de error.

4. **Paréntesis no cerrados** Este error algebraico es fácil de encontrarse en las calculadoras que automáticamente abren un par de paréntesis siempre que se oprime una tecla de una función. Compruébelo en su calculadora presionando la tecla "SIN": si en la pantalla aparece "sin(" en lugar de "sin", entonces su calculadora es de ese tipo. El peligro es que el paréntesis se *cierre* automáticamente al final de la orden si usted olvidó hacerlo. Eso es correcto si lo que *desea* es poner el paréntesis al final de la expresión pero no lo es si debe ir en otro lugar. Por ejemplo, si quiere calcular "sen(30°)" y escribe "sin(30" obtendrá el resultado buscado, pero si lo que desea estimar es "sen(30°) + 2" y escribe "sen(30 + 2", no tendrá la cifra correcta (figura 4.15).

A menudo es imposible hallar la respuesta "exacta" con la calculadora, especialmente cuando se evalúan las funciones trigonométricas. Los valores reales, por lo regular, son números irracionales cuyos decimales son infinitos y no periódicos. Sin embargo, se pueden encontrar los números exactos si se sabe lo que se está buscando, como en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Obtención de la "respuesta exacta" con calculadora

Con calculadora, obtenga el valor exacto de cos 30°.

SOLUCIÓN Como puede observar en la figura 4.16, la calculadora da como respuesta 0.8660254038. Sin embargo, recuerde que el ángulo de 30° es uno de nuestros ángulos especiales (vea el ejemplo 2 en esta sección); podríamos recordar que la respuesta exacta puede escribirse en términos de una raíz cuadrada. Elevamos al cuadrado el valor obtenido con la calculadora y se tendría 0.75, lo que sugiere que el valor exacto de cos 30° es $\sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

Aplicaciones de la trigonometría del triángulo rectángulo

Un triángulo tiene 6 "partes" —tres ángulos y tres lados—, pero no es necesario conocer las seis partes para determinar la congruencia del mismo. De hecho, por lo regular son suficientes tres partes. Las funciones trigonométricas emplean esta observación para *encontrar* las otras partes una vez que se conocen las partes necesarias para establecer la congruencia del triángulo. El uso de algunas partes del triángulo para hallar las demás se conoce como **resolución de un triángulo**.

Aprenderá cómo resolver triángulos generales en las secciones 5.5 y 5.6, pero ya puede resolver algunos triángulos utilizando las razones trigonométricas.

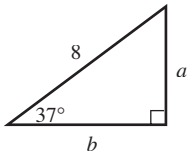


FIGURA 4.17 (Ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Resolución de un triángulo

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 37° y su hipotenusa mide 8 unidades (figura 4.17). Obtenga las medidas de los otros dos ángulos y la longitud de los lados restantes.

SOLUCIÓN Debido a que se trata de un triángulo rectángulo, uno de los ángulos mide 90°. Por lo tanto, el tercer ángulo mide $180° - 90° - 37° = 53°$. De acuerdo con la figura 4.17 se tiene que

$$\operatorname{sen} 37° = \frac{a}{8} \qquad \cos 37° = \frac{b}{8}$$

$$a = 8 \operatorname{sen} 37° \qquad b = 8 \cos 37°$$

$$a \approx 4.81 \qquad b \approx 6.39$$

Ahora resuelva el ejercicio 55.

Las aplicaciones de la resolución de triángulos en el mundo real son muchas, lo que se refleja en la frecuencia con la que se encuentran formas triangulares en la vida diaria.

EJEMPLO 6 Encuentre la altura de un edificio

Desde un punto a 340 pies de la base del Peachtree Center Plaza en Atlanta, Georgia, el ángulo de elevación hasta de la parte alta del edificio es de 65° (consulte la figura 4.18). Encuentre la altura h del edificio.

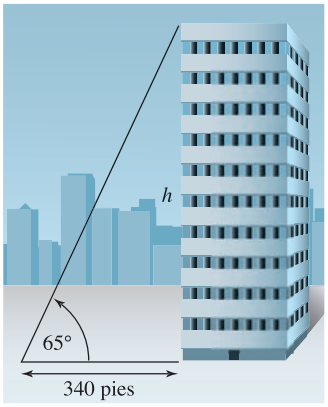


FIGURA 4.18 (Ejemplo 6).

SOLUCIÓN Necesitamos una razón que relacione un ángulo con los catetos opuesto y adyacente. La elección apropiada es la tangente.

$$\tan 65° = \frac{h}{340}$$

$$h = 340 \tan 65°$$

$$h \approx 729 \text{ pies}$$

Ahora resuelva el ejercicio 61.

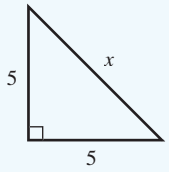
NOTA ACERCA DEL REDONDEO DE LAS SOLUCIONES

Note que en el ejemplo 6 se redondeó la solución al entero más cercano. En los problemas de aplicación es ilógico que las soluciones tengan más decimales que las variables que se utilizaron como datos para plantear el problema. Una respuesta de 729.132 pies es demasiado precisa, ya que la altura reportada del edificio (340 pies) es mucho menos exacta. (Así como el ángulo de 65°.) Si un ingeniero siguiera los criterios de redondeo con base en "dígitos significativos", probablemente reportaría la respuesta del ejemplo 6 como 730 pies. No seremos muy quisquillosos en lo referente al redondeo, pero trataremos de que las respuestas sean razonables.

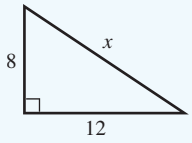
REPASO RÁPIDO 4.2 *(Para obtener ayuda consulte las secciones P.2 y 1.7)*

En los ejercicios del 1 al 4 utilice el teorema de Pitágoras para encontrar x.

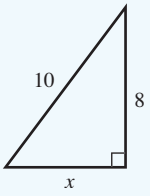
1.



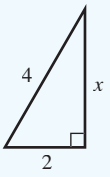
2.



3.



4.



En los ejercicios del 1 al 4 convierta a las unidades indicadas.

5. 8.4 pies a pulg

6. 940 pies a millas

En los ejercicios del 7 al 10 resuelva la ecuación. Determine las unidades correctas.

7. $0.388 = \dfrac{a}{20.4 \text{ km}}$

8. $1.72 = \dfrac{23.9 \text{ pies}}{b}$

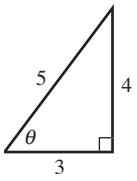
9. $\dfrac{2.4 \text{ pulg}}{31.6 \text{ pulg}} = \dfrac{a}{13.3}$

10. $\dfrac{5.9}{\beta} = \dfrac{8.66 \text{ cm}}{6.15 \text{ cm}}$

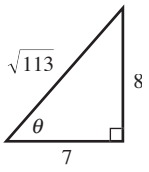
EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.2

En los ejercicios del 1 al 8 encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ.

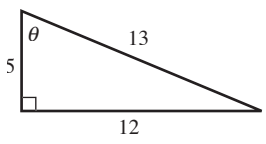
1.



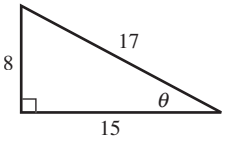
2.



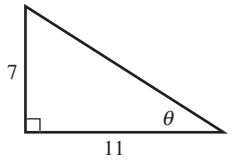
3.



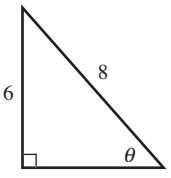
4.



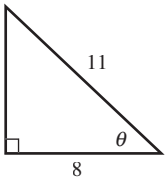
5.



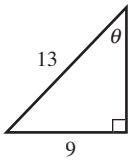
6.



7.



8.



En los ejercicios del 9 al 18 suponga que θ es un ángulo agudo en un triángulo rectángulo que cumple con las condiciones dadas. Calcule las demás funciones trigonométricas.

9. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{7}$

10. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{3}$

11. $\cos\theta = \dfrac{5}{11}$

12. $\cos\theta = \dfrac{5}{8}$

13. $\tan\theta = \dfrac{5}{9}$

14. $\tan\theta = \dfrac{12}{13}$

15. $\cot\theta = \dfrac{11}{3}$

16. $\csc\theta = \dfrac{12}{5}$

17. $\csc\theta = \dfrac{23}{9}$

18. $\sec\theta = \dfrac{17}{5}$

En los ejercicios del 19 al 24 evalúe las funciones trigonométricas *sin* calculadora.

19. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

20. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

21. $\cot\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

22. $\sec\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

23. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

24. $\csc\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

En los ejercicios del 25 al 28 obtenga los valores sin utilizar calculadora. Proporcione un valor exacto, no una respuesta aproximada (consulte el ejemplo 4).

25. $\sec 45°$

26. $\operatorname{sen} 60°$

27. $\csc\left(\frac{\pi}{3}\right)$

28. $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

En los ejercicios del 29 al 40 obtenga los valores utilizando la calculadora. Asegúrese de que la calculadora está en el modo correcto. Proporcione la respuesta correcta con tres decimales.

29. sen 74°

30. tan 8°

31. cos 19°23′

32. tan 23°42′

33. $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

34. $\text{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)$

35. sec 49°

36. csc 19°

37. cot 0.89

38. sec 1.24

39. $\cot\left(\frac{\pi}{8}\right)$

40. $\csc\left(\frac{\pi}{10}\right)$

En los ejercicios del 41 al 48 encuentre el ángulo agudo θ que satisfaga la ecuación. Exprese θ en grados y radianes. Se recomienda no utilizar calculadora.

41. $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$

42. $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

43. $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

44. $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

45. $\sec\theta = 2$

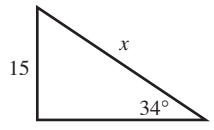
46. $\cot\theta = 1$

47. $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

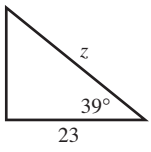
48. $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

En los ejercicios del 49 al 54 resuelva para la variable solicitada.

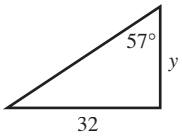
49.



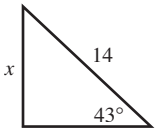
50.



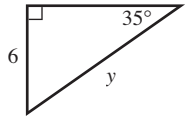
51.



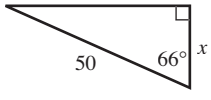
52.



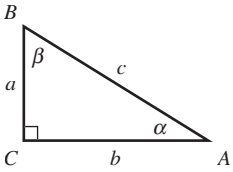
53.



54.



En los ejercicios del 55 al 58 encuentre las partes desconocidas del triángulo rectángulo D*ABC*.



55. $\alpha = 20°$; $a = 12.3$

56. $\alpha = 41°$; $c = 10$

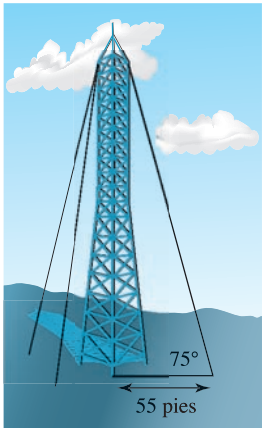
57. $\beta = 55°$; $a = 15.58$

58. $a = 5$; $\beta = 59°$

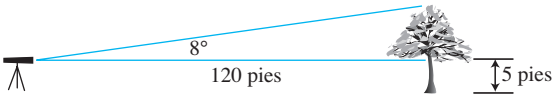
59. Escriba para aprender ¿Cuál es el $\lim_{\theta\to 0} \text{sen}\,\theta$? Explique su respuesta en términos de triángulos rectángulos en los que θ se hace cada vez más pequeño.

60. Escriba para aprender ¿Cuál es el $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta$? Explique su respuesta en términos de triángulos rectángulos en los que θ se hace cada vez más pequeño.

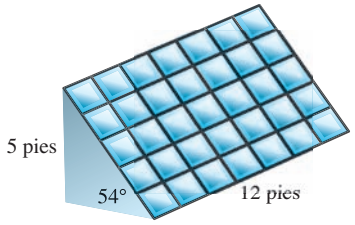
61. Altura Un cable colocado en lo alto de la torre de transmisión WJBC forma un ángulo de 75° con el piso a 55 pies de distancia de la base de la torre. ¿Cuánto mide de alto la torre?



62. Altura Kirsten coloca su telescopio topográfico sobre un trípode que está 5 pies por arriba del nivel del suelo. Mide una elevación de 8° sobre la horizontal a lo alto de un árbol que está alejado 120 pies. ¿Cuál es la altura del árbol?

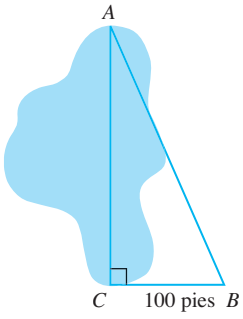


63. Actividad en equipo **Área** Para lugares ubicados entre la latitud 20° y 60° norte, un panel solar debe colocarse de tal manera que el ángulo que forme con la horizontal sea 20° mayor que la latitud local. En consecuencia, el panel solar colocado en el techo de Solar Energy, Inc. en Atlanta (latitud 34°) forma un ángulo de 54° con la horizontal. El borde superior del panel mide 12 pies de largo y está sobre el techo, y la altura del panel es de 5 pies por arriba del techo. ¿Cuánto mide el área del panel rectangular?

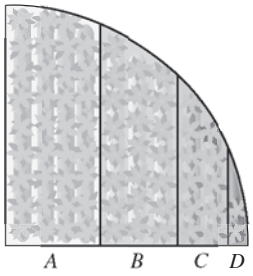


64. Altura El edificio Chrysler, ubicado en Nueva York, fue la edificación más alta del mundo cuando se estaba construyendo. Éste proyecta una sombra de aproximadamente 130 pies de largo sobre la calle cuando los rayos solares forman un ángulo de 82.9° con la Tierra. ¿Cuál es la altura del edificio?

65. Distancia El equipo de topografía de DaShanda tenía que encontrar la distancia de AC a lo largo del lago de Montgomery County Park. Los asistentes de campo se colocaron en los puntos A y C mientras que DaShanda colocó un instrumento para medir el ángulo en el punto B, a 100 pies del punto C en dirección perpendicular. DaShanda midió el $\angle ABC$ como $75°12'42''$. ¿Cuál es la longitud de AC?



66. Actividad en equipo **Diseño de jardín** El jardín de Allen tiene la forma de un cuarto de un círculo con un radio de 10 pies. Desea sembrar en franjas paralelas, como se muestra en la figura, de tal manera que los arcos que se forman en los bordes circulares del jardín tengan igual longitud. Después de trazar los cuatro arcos iguales, mide cuidadosamente el ancho de las barras y apunta sus datos en una tabla como la que se muestra a continuación:



Barra	Ancho
A	3.827 pies
B	3.344 pies
C	2.068 pies
D	0.761 pies

Alicia observa los datos de Allen y se da cuenta que pudo haberse ahorrado algo de trabajo si hubiera calculado el ancho de las franjas empleando trigonometría. Alicia encontró dos errores en las medidas al comprobar los datos con calculadora. Encuentre los dos errores de Allen y corríjalos.

Preguntas de examen estandarizado

67. Verdadero o falso Si θ es un ángulo de cualquier triángulo, entonces $\tan\theta$ es igual a la longitud del lado opuesto de θ dividido entre la longitud del lado adyacente de θ. Justifique su respuesta.

68. Verdadero o falso Si A y B son ángulos de un triángulo tales que $A > B$, entonces $\cos A > \cos B$. Justifique su respuesta. Se recomienda que responda las siguientes preguntas sin utilizar calculadora.

69. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes expresiones no representa un número real?

A) sen 30° **B)** tan 45° **C)** cos 90°
D) csc 90° **E)** sec 90°

70. Opción múltiple Si θ es el ángulo más pequeño de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3-4-5; entonces, $\text{sen}\,\theta =$

A) $\frac{3}{5}$. **B)** $\frac{3}{4}$. **C)** $\frac{4}{5}$.
D) $\frac{5}{4}$. **E)** $\frac{5}{3}$.

71. Opción múltiple Si una línea no horizontal tiene como pendiente a sen θ, entonces será perpendicular a una línea con pendiente:

A) $\cos\theta$. **B)** $-\cos\theta$. **C)** $\csc\theta$.
D) $-\csc\theta$. **E)** $-\text{sen}\,\theta$

72. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes razones trigonométricas no *podría* ser θ?

A) $\tan\theta$ **B)** $\cos\theta$ **C)** $\cot\theta$

D) $\sec\theta$ **E)** $\csc\theta$

73. Tablas trigonométricas Antes de que las calculadoras fueran comunes en los salones de clases, los estudiantes utilizaban tablas para encontrar las razones trigonométricas. A continuación encontrará una tabla trigonométrica simplificada para ángulos de entre 40 y 50°. *Sin usar calculadora*, ¿puede determinar cuál columna corresponde a la función seno, cuál al coseno y cuál a la tangente?

Tablas trigonométricas para seno, coseno y tangente

Ángulo	?	?	?
40°	0.8391	0.6428	0.7660
42°	0.9004	0.6691	0.7431
44°	0.9657	0.6947	0.7193
46°	1.0355	0.7193	0.6947
48°	1.1106	0.7431	0.6691
50°	1.1917	0.7660	0.6428

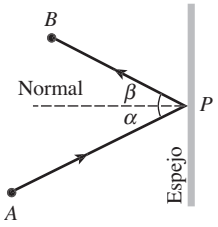
74. Tablas trigonométricas A continuación encontrará una tabla trigonométrica simplificada para ángulos de entre 30 y 40°. *Sin usar calculadora*, ¿puede determinar cuál columna corresponde a la función cotangente, cuál a la secante y cuál a la cosecante?

Tablas trigonométricas para cotangente, secante y cosecante

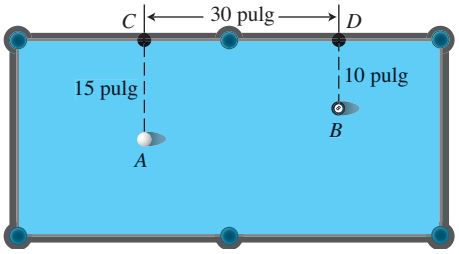
Ángulo	?	?	?
30°	1.1547	1.7321	2.0000
32°	1.1792	1.6003	1.8871
34°	1.2062	1.4826	1.7883
36°	1.2361	1.3764	1.7013
38°	1.2690	1.2799	1.6243
40°	1.3054	1.1918	1.5557

Exploraciones

75. Espejos En la figura, un rayo de luz que ilumina del punto A al punto P en el espejo rebota hacia el punto B de tal manera que el *ángulo de incidencia* a es igual al *ángulo de reflexión* β. A esto se le conoce como *ley de reflexión* y se dedujo de experimentos físicos. Ambos ángulos se miden desde la *línea normal*, la cuál es perpendicular al espejo en el punto de reflexión P. Si A está 2 metros más alejado del espejo que B, y si $\alpha = 30°$ y $AP = 5$ m. ¿Cuál es la longitud de PB?

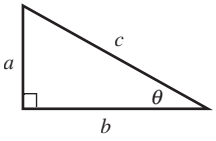


76. Billar En la mesa de billar que se muestra en la figura, ¿a qué punto del segmento CD del extremo de la mesa debe dirigirse la bola A de tal manera que se refleje en ese punto y golpee a la bola B? Suponga que A sigue la ley de la reflexión en la banda CD.

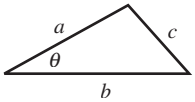


Ampliación de las ideas

77. Utilice los lados del triángulo de la imagen que se muestra abajo para probar que si θ es un ángulo agudo de cualquier ángulo rectángulo, $(\text{sen}\,\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$.



78. Utilice los lados del triángulo de la imagen que se muestra abajo para probar que el área del triángulo es igual a $(1/2)\,ab$ sen θ. [*Sugerencia:* Comience por trazar la altura a partir del lado b y calcule su longitud].



4.3 Trigonometría ampliada: las funciones circulares

Aprenderá acerca de...

- Las funciones trigonométricas de cualquier ángulo
- Las funciones trigonométricas de números reales
- Las funciones periódicas
- El círculo unitario de 16 puntos

. . . porque

Las funciones trigonométricas más allá de las razones de los triángulos abren un nuevo panorama de aplicaciones.

Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

En esta sección se ampliarán las definiciones de las seis funciones trigonométricas básicas más allá de los triángulos; es decir, no se restringe su estudio únicamente a los ángulos agudos ni a los ángulos positivos.

En geometría se considera que un ángulo es la unión de dos rayos con un vértice en común. La trigonometría toma un giro más dinámico cuando se define a los ángulos en términos de la rotación de uno de sus rayos. La posición inicial del rayo, **lado inicial**, gira con respecto a su punto final, al que se le llama **vértice**. A la posición final se le conoce como **lado terminal**. La **magnitud (o medida) de un ángulo** es el número que describe qué tanta rotación hay entre el lado inicial y el lado final del ángulo. Los **ángulos positivos** se generan mediante rotaciones en el sentido contrario al que giran las manecillas del reloj, mientras que los **ángulos negativos** se forman cuando la rotación es en el sentido en el que giran las manecillas del reloj. En la figura 4.19 se muestra un ángulo que mide α (α un número positivo).

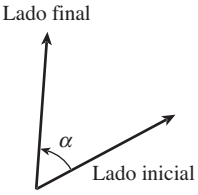
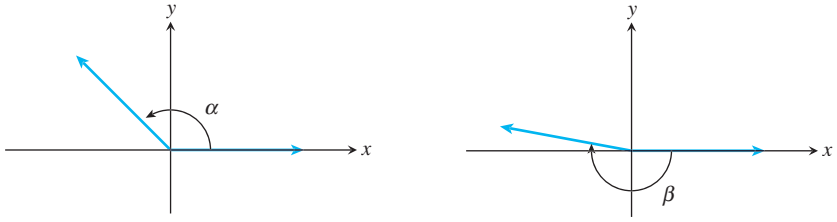


FIGURA 4.19 Un ángulo con magnitud positiva α.

Para aplicar al dibujo el potencial de la geometría con coordenadas, se coloca al ángulo en **posición estándar** en el plano Cartesiano, con el vértice del ángulo en el origen y su lado inicial a lo largo de la porción positiva del eje x. En la figura 4.20 se pueden apreciar dos ángulos en posición estándar, uno con magnitud positiva α y el otro con magnitud negativa β.

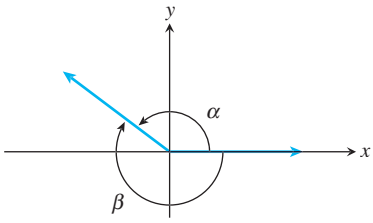


Un ángulo positivo
(Sentido contrario al que giran las manecillas del reloj)
a)

Un ángulo negativo
(Sentido en el que giran las manecillas del reloj)
b)

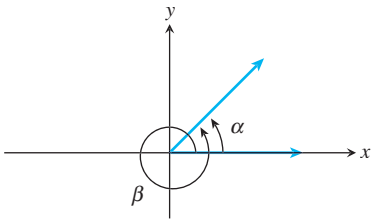
FIGURA 4.20 Dos ángulos en posición estándar. En a), la rotación en el sentido contrario al que giran las manecillas del reloj genera un ángulo positivo α. En b), la rotación en el sentido en que giran las manecillas del reloj genera un ángulo negativo β.

En este sistema de medición angular extendido, dos ángulos podrían tener los mismo lados iniciales y finales, aunque distinta magnitud. A esos ángulos les llamamos **ángulos coterminales** (observe la figura 4.21 en la siguiente página). Por ejemplo,



Ángulos coterminales
uno positivo y otro negativo

a)



Dos ángulos
coterminales positivos

b)

FIGURA 4.21 Ángulo coterminales. En a), un ángulo positivo y uno negativo que son coterminales, mientras que en b), ambos ángulos coterminales son positivos.

los ángulos de 90°, 450° y −270° son coterminales, al igual que los ángulos de π radianes, 3π radianes y -99π radianes. De hecho, los ángulos son coterminales siempre que difieran por un número entero múltiplo de 360° o por un número entero múltiplo de 2π radianes.

EJEMPLO 1 Determinación de ángulos coterminales

Encuentre y dibuje un ángulo positivo y otro negativo que sean coterminales a los ángulos que se señalan.

a) 30° **b)** −150° **c)** $\frac{2\pi}{3}$ radianes

SOLUCIÓN Hay una infinidad de posibles soluciones; mostraremos dos de cada ángulo.

a) Sume 360°: $30° + 360° = 390°$

Reste 360°: $30° - 360° = -330°$

En la figura 4.22 se muestran estos dos ángulos, los cuales son coterminales con el ángulo de 30°.

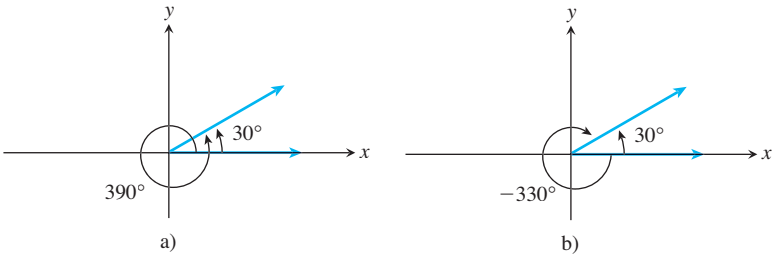


FIGURA 4.22 Dos ángulos coterminales de 30° (ejemplo 1a).

b) Sume 360°: $-150° + 360° = 210°$

Reste 720°: $-150° - 720° = -870°$

Se deja al lector que dibuje los ángulos coterminales respectivos.

c) Sume 2π: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$

Reste 2π: $\frac{2\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$

Nuevamente, se deja al lector que dibuje los ángulos coterminales respectivos.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

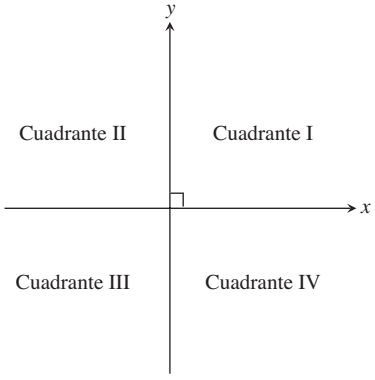


FIGURA 4.23 Los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. En el CI (Cuadrante I) tanto x como y son positivos. Los cuadrantes, al igual que los Súper Tazones, se identifican con números romanos.

Es muy sencillo aplicar las definiciones de las seis funciones trigonométricas a cualquier ángulo, pero primero es necesario entender cómo se relacionan las definiciones con las coordenadas (x, y) en el plano Cartesiano. Se iniciará en el primer cuadrante (consulte la figura 4.23), donde todos los ángulos son agudos. Antes de continuar lleve a cabo la exploración 1.

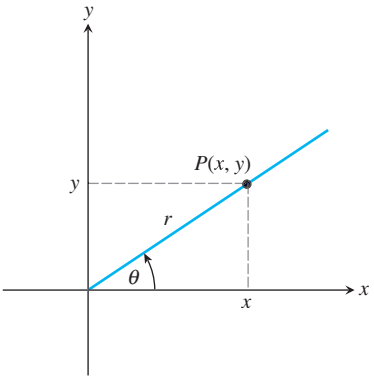


FIGURA 4.24 Un punto $P(x, y)$ en el cuadrante I determina un ángulo agudo θ. El número r denota la distancia de P al origen (exploración 1).

EXPLORACIÓN 1 **Estudio de la trigonometría en el primer cuadrante**

Sea $P(x, y)$ un punto en el primer cuadrante (PC), y sea r la distancia del punto P al origen (consulte la figura 4.24).

1. Utilice la definición de la función seno de un ángulo agudo (sección 4.2) para probar que $\operatorname{sen}\theta = y/r$.
2. Exprese $\cos\theta$ en términos de x y r.
3. Exprese $\tan\theta$ en términos de x y y.
4. Exprese la tres funciones trigonométricas básicas en términos de x, y y r.

Si completó sin dificultad la exploración 1, no deberá tener problemas para verificar la solución del ejemplo 2, que se muestra a continuación sin mayores detalles.

EJEMPLO 2 **Evaluación de las funciones trigonométricas determinadas por un punto en el PC**

Sea θ el ángulo agudo en posición estándar cuyo lado final contiene al punto (5, 3). Determine las seis funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN La distancia de (5, 3) al origen es $\sqrt{34}$.

Entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{34}} \approx 0.514 \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{34}}{3} \approx 1.944$$

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{34}} \approx 0.857 \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{34}}{5} \approx 1.166$$

$$\tan\theta = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad \cot\theta = \frac{5}{3} \approx 1.667$$

Ahora resuelva el ejercicio 5.

Ahora ya tenemos una forma fácil de extender las funciones trigonométricas a cualquier ángulo: utilice la misma definición en términos de x, y y r —*sin importar si* x y y *son o no positivos*. Compare el ejemplo 3 con el ejemplo 2.

EJEMPLO 3 **Evaluación de las funciones trigonométricas determinadas por un punto que no está en el PC**

Sea θ cualquier ángulo agudo en posición estándar cuyo lado final contiene al punto $(-5, 3)$. Encuentre las seis funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN La distancia de $(-5, 3)$ al origen es $\sqrt{34}$.

Entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{34}} \approx 0.514 \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{34}}{3} \approx 1.944$$

$$\cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{34}} \approx -0.857 \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{34}}{-5} \approx -1.166$$

$$\tan\theta = \frac{3}{-5} = -0.6 \qquad \cot\theta = \frac{-5}{3} \approx -1.667$$

Ahora resuelva el ejercicio 11.

Observe en el ejemplo 3 que θ es *cualquier* ángulo en posición estándar cuyo lado final contiene al punto $(-5, 3)$. Hay un número infinito de ángulos coterminales que podrían ser θ, algunos de ellos positivos y otros negativos. El valor de las seis funciones trigonométricas sería la misma para todos ellos.

En este punto ya podemos establecer la definición formal.

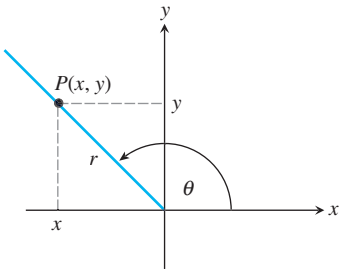


FIGURA 4.25 Definición de las seis funciones trigonométricas de θ.

DEFINICIÓN Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Sea θ cualquier ángulo agudo en posición estándar y $P(x, y)$ cualquier punto en el lado final del ángulo (excepto el origen). Sea r la distancia de $P(x, y)$ al origen, por ejemplo, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (consulte la figura 4.25). Entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}\ (y \neq 0)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}\ (x \neq 0)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$$

Los ejemplos 2 y 3 iniciaron con un punto P(x, y) en lugar de hacerlo con un ángulo θ. En realidad, el punto ofrece tanta información acerca de las razones trigonométricas que pueden calcularse todas incluso sin encontrar θ. Entonces, ¿qué debe hacerse si se desea calcular las funciones trigonométricas y la información que se proporciona es el ángulo θ en posición estándar? Intentamos encontrar un punto (x, y) en su lado final. Se ilustra este proceso en el ejemplo 4.

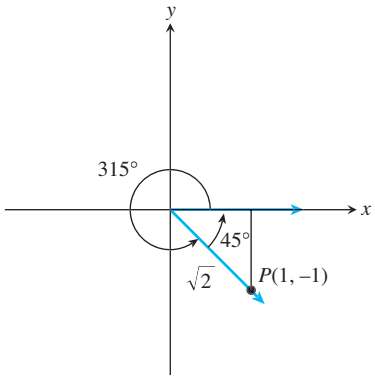


FIGURA 4.26 Un ángulo de 315° en posición estándar determina un triángulo de referencia con ángulos de 45°−45°−90° (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Evaluación de las funciones trigonométricas del ángulo de 315°

Obtenga las seis funciones trigonométricas del ángulo de 315°.

SOLUCIÓN Primero dibuje el ángulo de 315° en posición estándar. Sin definir una escala, seleccione un punto P en el lado final y únalo al eje x mediante un segmento perpendicular. Note que el triángulo formado (llamado **triángulo de referencia**) tiene ángulos de 45°−45°−90°. Si se elige arbitrariamente que los lados horizontal y vertical del triángulo de referencia tengan una longitud de 1, entonces P tiene las coordenadas $(1, -1)$ (consulte la figura 4.26).

De esta manera se tiene que $x = 1$, $y = 1$ y $r = \sqrt{2}$.

$$\operatorname{sen} 315° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \csc 315° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 315° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\tan 315° = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cot 315° = \frac{1}{-1} = -1$$

Ahora resuelva el ejercicio 25.

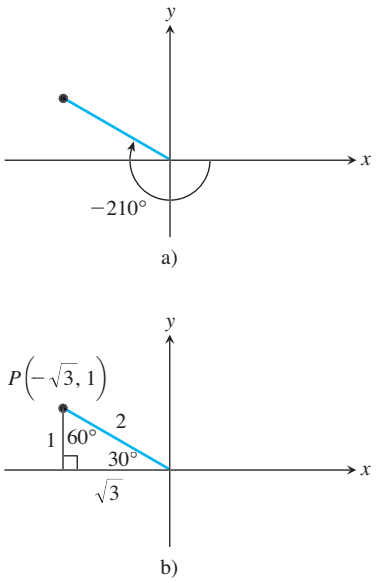


FIGURA 4.27 (Ejemplo 5 a).

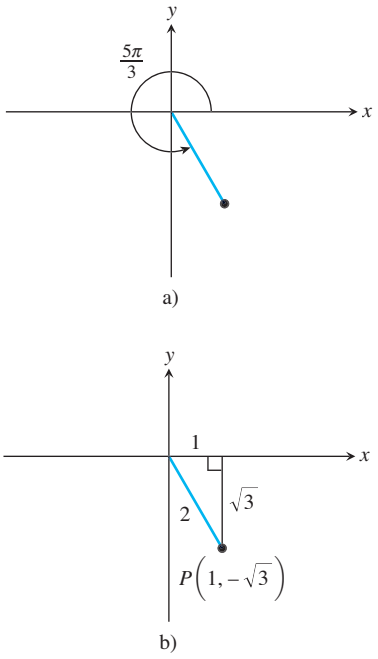


FIGURA 4.28 (Ejemplo 5 b).

El hecho afortunado de que el triángulo de referencia del ejemplo 4 tenga ángulos de 45°−45°−90° no permite definir las coordenadas del punto P en el lado final del ángulo de 315° para encontrar los valores de las funciones trigonométricas. También podríamos determinar el punto P si el ángulo dado fuera el producto de un triángulo de referencia de 30°−60°−90°

Evaluación de las funciones trigonométricas de un ángulo θ que no sea de cuadrante (por ejemplo, que su lado final no esté en alguno de los ejes coordenados)

1. Dibuje el ángulo θ en posición estándar; asegúrese de colocar el lado final en el cuadrante correcto.
2. Sin definir una escala en los ejes, seleccione un punto P (que no sea el origen) en el lado final de θ.
3. Dibuje un segmento perpendicular desde el punto P al eje x para determinar el *triángulo de referencia*. Si se conocen las proporciones del triángulo defina la longitud de los lados, de lo contrario tendrá que utilizar su calculadora.
4. Emplee los lados del triángulo para determinar las coordenadas del punto P, los cuales son positivos o negativos según el signo que tengan x y y en el cuadrante en el que se encuentren.
5. Emplee las coordenadas del punto P y las definiciones para estimar las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 5 Evaluación de más funciones trigonométricas

Sin calculadora, determine las funciones trigonométricas que se indican a continuación:

a) sen (–210°)

b) tan ($5\pi/3$)

c) sec ($-3\pi/4$)

SOLUCIÓN

a) Un ángulo de –210° en posición estándar determina un triángulo de referencia de ángulo de 30°, –60° y –90° en el segundo cuadrante (figura 4.27). Definimos los lados de acuerdo a lo visto anteriormente, por lo que se usan las longitudes de los lados para establecer el punto $P(-\sqrt{3}, 1)$. (Observe que la coordenada x es negativa en el segundo cuadrante.) La hipotenusa es $r = 2$. Por lo tanto, sen $(-210°) = y/r = 1/2$.

b) Un ángulo de $5\pi/3$ radianes en posición estándar determina un triángulo de referencia de 30°−60°−90° en el cuarto cuadrante (figura 4.28). Marcamos los lados como corresponde y utilizamos las longitudes de los lados para determinar el punto $P(1, -\sqrt{3})$. (Observe que la coordenada y es negativa en el cuarto cuadrante.) La hipotenusa es $r = 2$. Por lo tanto $(5\pi/3) = y/x = -\sqrt{3}/1 = -\sqrt{3}$.

c) Un ángulo de $-3\pi/4$ radianes en posición estándar determina un triángulo de referencia de 45°–45°–90° en el tercer cuadrante (consulte la figura 4.29 en la página siguiente). Marcamos los lados como corresponde y usamos las longitudes de los lados para establecer el punto $P(-1, -1)$. (Observe que ambas coordenadas son negativas en el tercer cuadrante.) La hipotenusa es $r = \sqrt{2}$. Por lo tanto sec $(-3\pi/4) = r/x = \sqrt{2}/-1 = -\sqrt{2}$.

Ahora resuelva el ejercicio 29.

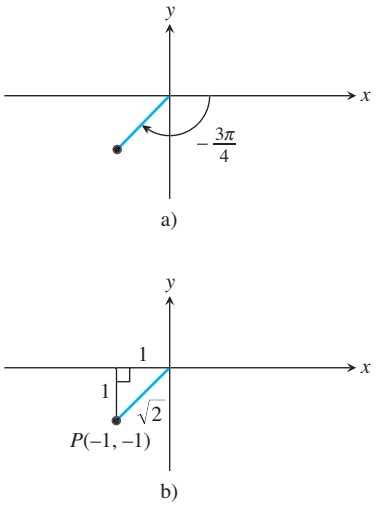


FIGURA 4.29 (Ejemplo 5 c).

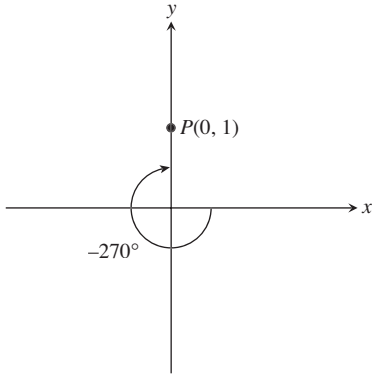


FIGURA 4.30 (Ejemplo 6 a).

A los ángulos cuyos lados finales están a lo largo de uno de los ejes de las coordenadas se les conoce como **ángulos de cuadrante**, y aunque no producen triángulos de referencia es fácil definir un punto P a lo largo de los ejes.

EJEMPLO 6 Evaluación de las funciones trigonométricas de los ángulos de cuadrante

Si existen, encuentre las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos. Si algún valor buscado no está definido, escriba "indefinido".

a) sen $(-270°)$

b) tan 3π

c) sec $\dfrac{11\pi}{2}$

SOLUCIÓN

a) En posición estándar, el lado final de un ángulo de $-270°$ está colocado a lo largo de lado positivo del eje y (figura 4.30). Un punto P conveniente a lo largo del lado positivo del eje y es el punto en el que $r = 1$, es decir (0, 1). Por lo tanto

$$\text{sen } (-270°) = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1.$$

b) En posición estándar, el lado final de un ángulo de 3π radianes está colocado a lo largo del lado negativo del eje x (consulte la figura 4.31 en la página siguiente). Un punto conveniente P a lo largo del lado negativo del eje x es el punto en el que $r = 1$, es decir, $(-1, 0)$. Por lo tanto

$$\tan 3\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

c) En posición estándar, el lado final de un ángulo de $11\pi/2$ radianes está colocado a lo largo del lado negativo del eje y (Consulte la figura 4.31 en la página siguiente). Un punto conveniente P a lo largo del lado negativo del eje y es el punto en el que $r = 1$, es decir, $(0, -1)$. Por lo tanto,

$$\sec \frac{11\pi}{2} = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}. \quad \text{indefinido}$$

Ahora resuelva el ejercicio 41.

¿POR QUÉ NO USAR CALCULADORA?

Tal vez se pregunte por qué practicar estos procedimientos para calcular los valores si pueden estimarse fácilmente con calculadora. La respuesta es: para entender cómo funciona la trigonometría en el plano cartesiano. Irónicamente, la tecnología ha hecho que el entendimiento de los procedimientos que se están practicando sean más importantes, puesto que con las calculadoras se ha eliminado la necesidad de las estimaciones repetitivas que alguna vez le dieron a los estudiantes un panorama inicial de las funciones trigonométricas básicas.

Otro ejercicio ilustrativo es usar la información de una razón trigonométrica para calcular las otras cinco. No necesitamos conocer el ángulo θ aunque si necesitamos algún indicio con respecto a la ubicación de su lado terminal, con el fin de poder dibujar el triángulo de referencia en el cuadrante correcto (o colocar un ángulo de cuadrante en el lado correcto a partir del origen). El ejemplo 7 ilustra esto.

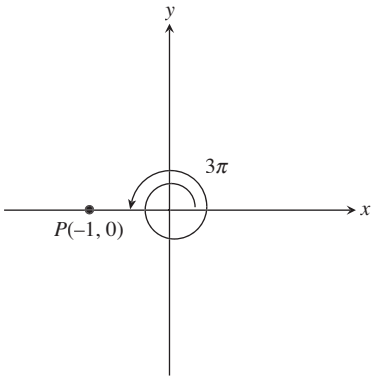


FIGURA 4.31 (Ejemplo 6 b).

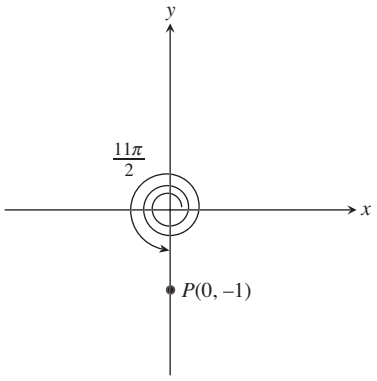


FIGURA 4.32 (Ejemplo 6 c).

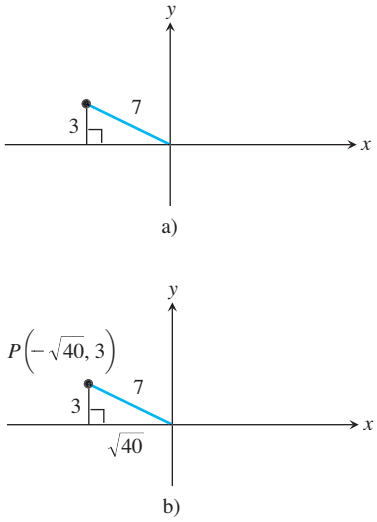


FIGURA 4.33 (Ejemplo 7 a).

EJEMPLO 7 Uso de una razón trigonométrica para encontrar las otras

Encuentre cos θ y tan θ mediante el uso de la información proporcionada para construir un triángulo de referencia.

a) sen $\theta = \dfrac{3}{7}$ y tan $\theta < 0$

b) sec $\theta = 3$ y sen $\theta > 0$

c) cot θ está indefinido y sec θ es negativo

SOLUCIÓN

a) Ya que sen θ es positivo, el lado final está en el CI o en el CII. La información adicional de que tan θ es negativo significa que el lado final está en el CII. Se dibuja un triángulo de referencia en el CII con $r = 7$ y $y = 3$ (figura 4.33); entonces utilizamos el teorema de Pitágoras para encontrar que $x = -1\sqrt{7^2 - 3^2} = -\sqrt{40}$ (observe que x es negativo en el CII).

Usamos las definiciones para obtener

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{40}}{7} \approx -0.904 \text{ y } \tan\theta = \frac{3}{-\sqrt{40}} \approx -0.474.$$

b) Ya que sec θ es positiva, el lado final está en el CI o en el CIV. La información adicional de que sen θ es positivo significa que el lado final está en el CI. Dibujamos un triángulo de referencia en el CI con $r = 3$ y $x = 1$ (figura 4.34); luego utilizamos el teorema de Pitágoras para determinar que $y = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$ (observe que y es positivo en el CI.)

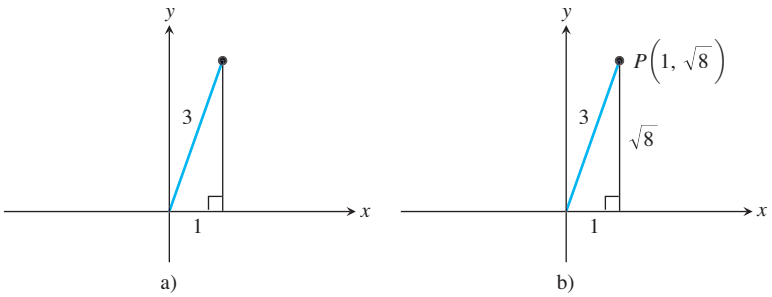


FIGURA 4.34 (Ejemplo 7 b)).

Después usamos las definiciones para obtener

$$\cos\theta = \frac{1}{3} \approx 0.333 \text{ y } \tan\theta = \frac{\sqrt{8}}{1} \approx 2.828.$$

(También podríamos haber determinado cos θ en forma directa como el recíproco de sec θ.)

c) Ya que cot θ está indefinida, se concluye que $y = 0$ y que θ es un ángulo de cuadrante sobre el eje x. La información adicional de que sec θ es negativa significa que el lado final está a lo largo del lado negativo del eje x. Elegimos el punto $(-1, 0)$ en el lado final y se emplean las definiciones para obtener

$$\cos\theta = -1 \text{ y } \tan\theta = \frac{0}{-1} = 0.$$

Ahora resuelva el ejercicio 43.

¿POR QUÉ NO GRADOS?

En realidad, es posible desarrollar una teoría de funciones trigonométricas con base en un eje x cuya escala esté en "grados". Por ejemplo, su calculadora graficadora probablemente creará gráficas razonables en el modo de grado. En cálculo, sin embargo, se emplean reglas que dependen de medidas en radianes para todas las funciones trigonométricas, por lo que es prudente para estudiantes de precálculo que se acostumbren a ello desde ahora.

Funciones trigonométricas de números reales

Ahora que ya hemos calculado las seis funciones trigonométricas básicas de cualquier ángulo, éstas se pueden considerar como funciones de números reales para estudiar su comportamiento. Primero, por las razones que se explicaron en la primera sección de este capítulo, θ debe medirse en el modo radián para que los números reales de las unidades de entrada correspondan a los números reales de las unidades de salida.

Cuando se consideran las funciones trigonométricas como funciones de números reales, los ángulos deben medirse en radianes.

DEFINICIÓN Círculo unitario

El círculo unitario es un círculo de radio 1 con centro en el origen (figura 4.35)

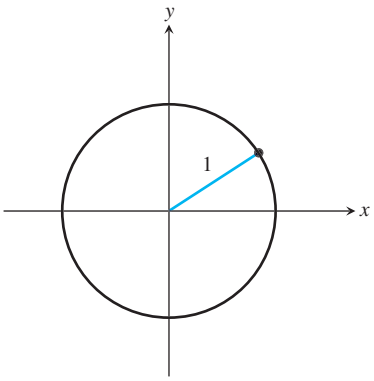


FIGURA 4.35 El círculo unitario.

El círculo unitario brinda una conexión ideal entre la trigonometría de los triángulos y las funciones trigonométricas. Debido a que la longitud del arco del círculo unitario corresponde exactamente a la medida en radianes, se puede utilizar al mismo círculo como un tipo de "recta numérica" para definir valores de entrada de las funciones. Esto incluye a la **función envolvente**, la cual asocia puntos de la recta numérica con puntos del círculo.

En la figura 4.36 se ilustra el empleo de la función envolvente. La recta numérica es tangente al círculo unitario en el punto (1, 0), a partir del cual se miden los ángulos en la posición estándar. Cuando la recta se coloca alrededor del círculo unitario en dirección positiva (en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj) y en dirección negativa (en el sentido en que giran las manecillas del reloj), cada punto t en el la recta numérica quedará en un punto del círculo que corresponde al lado final del ángulo de t radianes en posición estándar. Usando las coordenadas (x, y) de este punto se pueden encontrar las seis razones trigonométricas para el ángulo t, como se hizo en el ejemplo 7, e incluso de forma más sencilla, ya que $r = 1$.

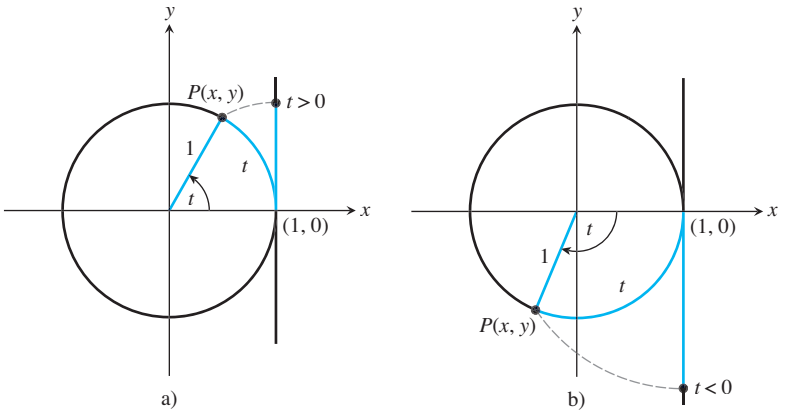


FIGURA 4.36 Cómo la recta numérica se envuelve en el círculo unitario. Observe que cada número t (positivo o negativo) se "enrolla" hacia el punto P de tal manera que está colocado en el lado final de un ángulo de t radianes en posición estándar.

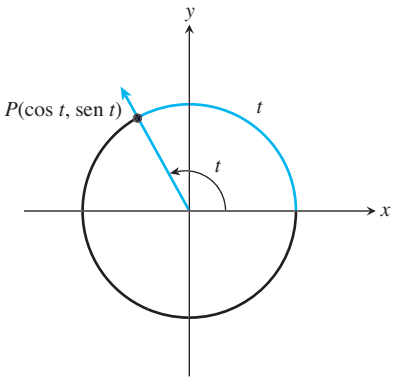


FIGURA 4.37 El número real t siempre está colocado en el punto (cos t, sen t) sobre el círculo unitario.

DEFINICIÓN Funciones trigonométricas de números reales

Sea t cualquier número real y $P(x, y)$ el punto correspondiente a t cuando la recta numérica se coloca en el círculo, como se explicó anteriormente. Entonces

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \csc t = \frac{1}{y} \ (y \neq 0)$$

$$\cos t = x \qquad \sec t = \frac{1}{x} \ (x \neq 0)$$

$$\tan t = \frac{y}{x} \ (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \ (y \neq 0)$$

Por lo tanto, el número t que está en la recta numérica siempre estará ubicado en el punto (cos t, sen t) sobre el círculo unitario (figura 4.37).

Aunque es muy útil dibujar los triángulos de referencia dentro del círculo unitario para observar las razones, no son indispensables para comprender las definiciones recién provistas. El número real t determina un punto sobre el círculo unitario y las coordenadas (x, y) del punto estipulan las seis razones trigonométricas. Por esa razón, usualmente se denomina **funciones circulares** a las funciones trigonométricas cuando se aplican a números reales.

EXPLORACIÓN 1 Exploración del círculo unitario

Esta actividad puede realizarse bien si se hace en equipo. Reúnase en equipos de dos o tres y explíquense porque las siguientes afirmaciones son verdaderas. Base sus explicaciones en el círculo unitario (figura 4.37). Recuerde que $-t$ cubre la misma longitud que t, pero en dirección opuesta.

1. Para cualquier t, el valor de cos t está entre -1 y 1 inclusive.
2. Para cualquier t, el valor de sen t está entre -1 y 1 inclusive.
3. Los valores de cos t y cos $(-t)$ son siempre iguales (recuerde que ésta es la comprobación para cualquier función *par*).
4. Los valores de sen t y sen $(-t)$ son siempre opuestos (recuerde que ésta es la comprobación para cualquier función *impar*).
5. Los valores de sen t y sen $(t + 2\pi)$ son siempre iguales. De hecho, esto es cierto para las seis funciones trigonométricas, por las mismas razones.
6. Los valores de sen t y sen $(t + \pi)$ son siempre opuestos. Lo mismo es verdadero para cos t y cos $(t + \pi)$.
7. Los valores de tan t y tan $(t + \pi)$ son siempre iguales (a menos que ambos estén indefinidos).
8. La suma de $(\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2$ siempre es igual a 1.
9. (Reto) ¿Puede descubrir una relación similar que no haya sido mencionada en la lista anterior? Hay algunas que pueden encontrarse.

Funciones periódicas

Las afirmaciones 5 y 7 de la exploración 2 revelan una propiedad importante de las funciones circulares que es necesario definir para referencias futuras.

DEFINICIÓN Funciones periódicas

Una función $y = f(t)$ es **periódica** si hay un número positivo c tal que $f(t + c) = f(t)$ para todos los valores de t en el dominio de f. Al más pequeño de tales números c se le conoce como **periodo**.

La exploración 2 sugiere que las funciones seno y coseno tienen un periodo equivalente a 2π y que la función tangente tiene un periodo π. Se usará esta periodicidad más adelante para modelar lo previsible del comportamiento repetitivo en el mundo real, pero mientras tanto podemos utilizarlo para resolver pequeños problemas de entrenamiento sin calculadora, como algunos ejemplos que ya se resolvieron en esta sección.

EJEMPLO 8 Uso de la periodicidad

Encuentre los valores que se solicitan, sin utilizar la calculadora.

a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{57{,}801\pi}{2}\right)$

b) $\cos(288.45\pi) - \cos(280.45\pi)$

c) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 99{,}999\pi\right)$

SOLUCIÓN

a) $$\operatorname{sen}\left(\frac{57{,}801\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{57{,}800\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 28{,}900\pi\right)$$
$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Observe que $28{,}900\pi$ es sólo un múltiplo grande de 2π, entonces $\pi/2$ y $((\pi/2) + 28{,}900\pi)$ están en el mismo punto del círculo unitario, $(0, 1)$.

b) $\cos(288.45\pi) - \cos(280.45\ \pi) =$
$\cos(280.45\pi + 8\pi) - \cos(280.45\ \pi) = 0$

Observe que 280.45π y $(280.45\pi + 8\pi)$ están en el mismo punto del círculo unitario, por lo que el coseno de uno es el mismo que el coseno del otro.

c) Debido a que el periodo de la función tangente es π en lugar de 2π, $99{,}999\pi$ es un múltiplo grande del periodo de la función tangente. Por lo tanto,

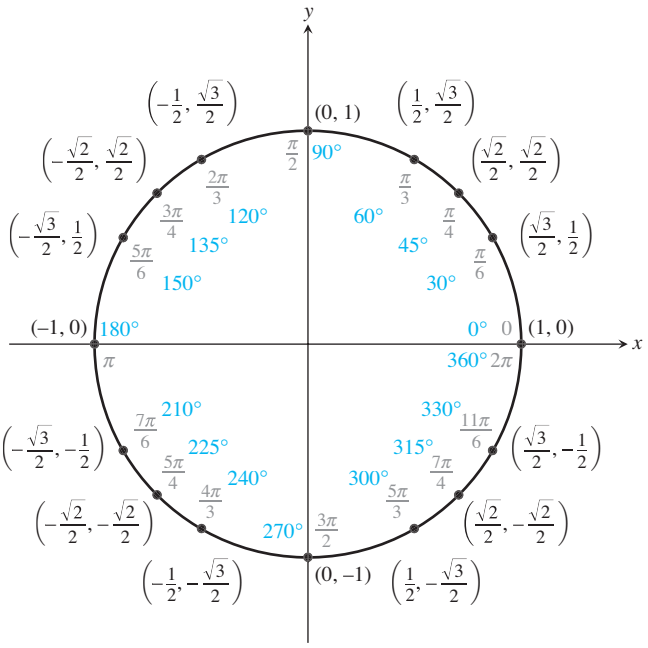
$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - 99{,}999\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Ahora resuelva el ejercicio 49.

El estudio de las propiedades de las seis funciones circulares se ampliará en las dos siguientes secciones.

El círculo unitario de 16 puntos

En este punto, el lector debe ser capaz de usar triángulos de referencia y ángulos de cuadrante para estimar las funciones trigonométricas para todos los múltiplos enteros de 30 o 45° (equivalente a $\pi/6$ radianes o $\pi/4$ radianes). Todos esos valores especiales están colocados en los 16 puntos especiales que se muestran en el círculo unitario incluido a continuación. Estudie este diagrama hasta que esté seguro de que puede encontrar las coordenadas de esos puntos con facilidad, pero evite usar esto como referencia cuando esté resolviendo problemas.



REPASO RÁPIDO 4.3 *(Para obtener ayuda consulte a la sección 4.1)*

En los ejercicios del 1 al 4 exprese el valor del ángulo θ en grados.

1. $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

2. $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$

3. $\theta = \dfrac{25\pi}{4}$

4. $\theta = \dfrac{16\pi}{3}$

En los ejercicios 5 al 8 use triángulos especiales para calcular.

5. $\tan \dfrac{\pi}{6}$

6. $\cot \dfrac{\pi}{4}$

7. $\csc \dfrac{\pi}{4}$

8. $\sec \dfrac{\pi}{3}$

En los ejercicios 9 y 10 use un triángulo rectángulo para hallar las otras cinco funciones trigonométricas del ángulo *agudo* θ.

9. $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{5}{13}$

10. $\cos \theta = \dfrac{15}{17}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.3

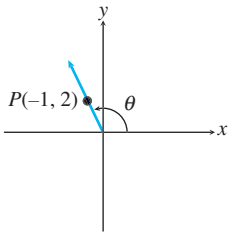
En los ejercicios 1 y 2 identifique el ángulo que no es coterminal a todos los demás.

1. $150°, 510°, -210°, 450°, 870°$

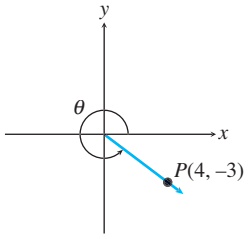
2. $\frac{5\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}, \frac{365\pi}{3}$

En los ejercicios del 3 al 6 estime las seis funciones trigonométricas del ángulo θ.

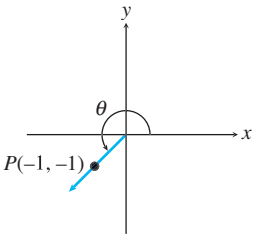
3.



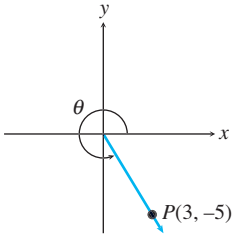
4.



5.



6.



En los ejercicios del 7 al 12, el punto P está sobre el lado final del ángulo θ. Calcule las seis funciones trigonométricas de θ. Si la función no está definida, escriba "indefinida".

7. $P(3, 4)$ **8.** $P(-4, -6)$

9. $P(0, 5)$ **10.** $P(-3, 0)$

11. $P(5, -2)$ **12.** $P(22, -22)$

En los ejercicios del 13 al 16 indique el signo (+ o −) de **a)** sen t, **b)** cos t y **c)** tan t para los valores de t incluidos en el intervalo dado.

13. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **14.** $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

15. $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ **16.** $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

En los ejercicios 17 al 20 determine el signo (+ o −) de los valores indicados sin usar la calculadora.

17. cos 143° **18.** tan 192°

19. $\cos \frac{7\pi}{8}$ **20.** $\tan \frac{4\pi}{5}$

En los ejercicios 21 al 24 seleccione el punto sobre el lado final de θ.

21. $\theta = 45°$

a) $(2, 2)$ **b)** $(1, \sqrt{3})$ **c)** $(\sqrt{3}, 1)$

22. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

a) $(-1, 1)$ **b)** $(-1, \sqrt{3})$ **c)** $(-\sqrt{3}, 1)$

23. $\theta = \frac{7\pi}{6}$

a) $(-\sqrt{3}, -1)$ **b)** $(-1, \sqrt{3})$ **c)** $(-\sqrt{3}, 1)$

24. $\theta = -60°$

a) $(-1, -1)$ **b)** $(1, -\sqrt{3})$ **c)** $(-\sqrt{3}, 1)$

En los ejercicios del 25 al 36 evalúe los valores con las razones de un triángulo de referencia y sin usar la calculadora.

25. cos 120° **26.** tan 300°

27. $\sec \frac{\pi}{3}$ **28.** $\csc \frac{3\pi}{4}$

29. $\operatorname{sen} \frac{13\pi}{6}$ **30.** $\cos \frac{7\pi}{3}$

31. $\tan -\frac{15\pi}{4}$ **32.** $\cot \frac{13\pi}{4}$

33. $\cos \frac{23\pi}{6}$ **34.** $\cos \frac{17\pi}{4}$

35. $\operatorname{sen} \frac{11\pi}{3}$ **36.** $\cot \frac{19\pi}{6}$

En los ejercicios del 37 al 42 determine **a)** sen θ, **b)** cos θ y **c)** tan θ para el ángulo de cuadrante. Si el valor no está definido, escriba "indefinido".

37. $-450°$ **38.** $-270°$

39. 7π **40.** $\frac{11\pi}{2}$

41. $-\frac{7\pi}{2}$ **42.** -4π

En los ejercicios del 43 al 48 calcule los valores sin usar calculadora.

43. Determine sen θ y tan θ, si $\theta = \frac{2}{3}$ y $\cot \theta > 0$.

44. Determine cos θ y cot θ, si sen $\theta = \frac{1}{4}$ y $\tan \theta < 0$.

45. Determine tan θ y sec θ, si sen $\theta = -\frac{2}{5}$ y $\cos \theta > 0$.

46. Determine sen θ y csc θ, si cot $\theta = = \frac{3}{7}$ y $\sec \theta < 0$.

47. Determine sec θ y csc θ, si cot $\theta = -\frac{4}{3}$ y $\cos \theta < 0$.

48. Determine csc θ y cot θ, si tan $\theta = -\frac{4}{3}$ y sen $\theta > 0$.

En los ejercicios del 49 al 52 evalúe usando el periodo de la función.

49. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 49{,}000\pi\right)$

50. $\tan(1{,}234{,}567\pi) - \tan(7{,}654{,}321\pi)$

51. $\cos\left(\frac{5{,}555{,}555\pi}{2}\right)$

52. $\tan\left(\frac{3\pi - 70{,}000\pi}{2}\right)$

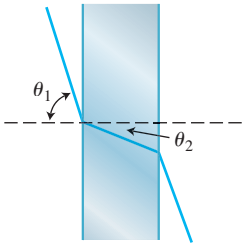
53. Actividad en equipo Utilice una calculadora para estimar las expresiones de los ejercicios 49 al 52. ¿Su calculadora proporciona las respuestas correctas? Muchas calculadoras fallan en el cálculo de esos valores. Dé una breve explicación de lo que probablemente esté mal.

54. Escriba para aprender Proporcione un argumento convincente con el que se explique que el periodo de sen t es 2π. Esto es, muestre que no hay un número real positivo p más pequeño para el que sen $(t + p) = \operatorname{sen} t$ para todos los número reales t.

55. Luz refractada La luz se *refracta* (se dobla) cuando pasa a través de un vidrio. En la figura que se muestra a continuación θ_1 es el ángulo de incidencia y θ_2 es el *ángulo de refracción*. El *índice de refracción* es una constante m que satisface la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \mu \operatorname{sen}\theta_2.$$

Si $\theta_1 = 83°$ y $\theta_2 = 36°$ para cierta pieza de vidrio, determine el índice de refracción.



56. Luz refractada Una pieza de vidrio tiene un índice de refracción de 1.52. Si un rayo de luz pasa a través de un vidrio en un ángulo de $\theta_1 = 42°$, ¿cuál es el sen θ_2?

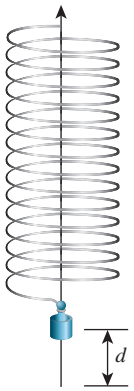
57. Movimiento armónico amortiguado Considere un peso suspendido de un resorte que está en movimiento. Su desplazamiento d con respecto del punto de equilibrio está modelado mediante la ecuación

$$d = 0.4e^{-0.2t}\cos 4t.$$

donde d es el desplazamiento en pulgadas y t es el tiempo en segundos. Encuentre el desplazamiento en el tiempo que se indica. Use la medición en radianes.

a) $t = 0$

b) $t = 3$.



58. Péndulo oscilante El Museo de la Ciencia e Industria de Columbus tiene en exhibición un péndulo de Foucault de 32 pies de largo que oscila de atrás para adelante en 6 segundos aproximadamente. El ángulo θ (en radianes) entre el cable y una línea vertical imaginaria se modela mediante la ecuación

$$\theta = 0.25\cos t.$$

Encuentre cuánto mide el ángulo θ cuando $t = 0$ y $t = 2.5$.



59. Demasiado cercano para ser cómodo Un avión F-15 que vuela a una altitud de 8,000 pies pasa directamente sobre un grupo de turistas que practican alpinismo a 7,400 pies. Si θ es el ángulo de elevación desde los alpinistas hasta el F-15, halle la distancia d desde el grupo al jet para el ángulo mostrado.

a) $\theta = 45°$ **b)** $\theta = 90°$ **c)** $\theta = 140°$

60. Manufactura de trajes de baño Get Wet, Inc. fabrica trajes de baño, un producto de temporada. Las ventas mensuales x (en miles) de los trajes de baño de Get Wet Inc. se modela con la ecuación

$$x = 72.4 + 61.7\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6},$$

en donde $t = 1$ representa a enero, $t = 2$ a febrero y así sucesivamente. Estime el número de trajes de baño que se vendieron en enero, abril, junio, octubre y diciembre. ¿Para cuáles dos meses las ventas son las mismas? Explique por qué sucede eso.

Preguntas de examen estandarizado

61. Verdadero o falso Si θ es un ángulo de un triángulo en el que $\cos\theta < 0$, entonces θ es obtuso. Justifique su respuesta.

62. Verdadero o falso Si θ es un ángulo en posición estándar determinado por el punto $(8, -6)$, entonces $\operatorname{sen}\theta = -0.6$. Justifique su respuesta.

Se recomienda que responda las siguientes preguntas sin utilizar calculadora.

63. Opción múltiple Si sen $\theta = 0.4$, entonces sen $(-\theta) + \csc\theta =$

A) -0.15 **B)** 0 **C)** 0.15 **D)** 0.65 **E)** 2.1

64. Opción múltiple Si $\cos\theta = 0.4$, entonces $\cos(\theta + \pi) =$

A) -0.6 **B)** -0.4 **C)** 0.4 **D)** 0.6 **E)** 3.54

65. Opción múltiple El rango de la función $f(t) = (\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2$ es

A) $\{1\}$ **B)** $[-1, 1]$ **C)** $[0, 1]$

D) $[0, 2]$ **E)** $[0, \infty)$

66. Opción múltiple Si $\cos\theta = -\frac{5}{13}$ y $\tan\theta > 0$, entonces sen θ

A) $-\frac{12}{13}$ **B)** $-\frac{5}{12}$ **C)** $\frac{5}{13}$ **D)** $\frac{5}{12}$ **E)** $\frac{12}{13}$

Exploraciones

En los ejercicios del 67 al 70 encuentre el valor del único número real θ entre 0 y 2π que satisface las dos condiciones dadas.

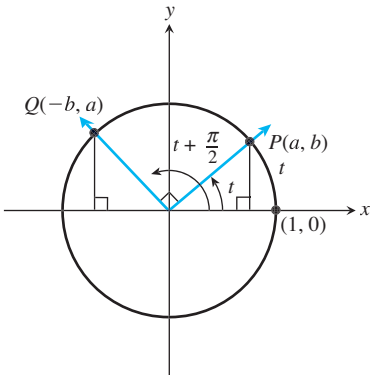
67. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ y $\tan\theta < 0$.

68. $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$.

69. $\tan\theta = -1$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$.

70. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\tan\theta > 0$.

En los ejercicios del 71 al 74 tome como referencia al círculo unitario de la figura. El punto P está sobre el lado final de un ángulo t y el punto Q está sobre el lado final de un ángulo $t + \pi/2$.



71. Uso de la geometría en trigonometría Dibuje líneas perpendiculares desde los puntos P y Q al eje de las x de tal manera que se formen dos triángulos rectángulos. Explique de qué manera están relacionados los triángulos que se crearon.

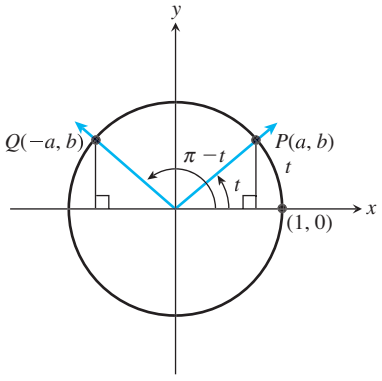
72. Uso de la geometría en trigonometría Si las coordenadas del punto P son (a, b), explique por qué las coordenadas del punto Q son $(-b, a)$.

73. Explique por qué $\operatorname{sen}\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos t$.

74. Explique por qué $\cos\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} t$.

75. Escriba para aprender En la figura que se empleó para los ejercicios del 71 al 74, t es un ángulo cuya medición en radianes está en el rango $0 < t < \pi/2$. Dibuje una figura similar para un ángulo que mide en radianes $\pi/2 < t <$ y utilícelo para explicar por qué sen $(t + \pi/2) = \cos t$.

76. Escriba para aprender Use la siguiente figura para explicar cada una de las afirmaciones siguientes:



a) sen $(\pi - t) =$ sen t **b)** cos $(\pi - t) = -\cos t$

Ampliación de las ideas

77. Aproximación y análisis de error Use su graficadora para completar la tabla en la que se muestra que sen $\theta \approx \theta$ (en radianes) cuando $|\,\theta\,|$ es pequeño. Los físicos a menudo usan la aproximación sen $\theta \approx \theta$ para valores pequeños de θ. ¿Para qué valores de θ la *magnitud del error* es menos de 1% de θ? Esto es, resuelva la relación.

$$|\operatorname{sen}\theta - \theta| < 0.01\,|\operatorname{sen}\theta|.$$

(*Sugerencia:* Amplíe la tabla para incluir una columna con los valores de

$$\frac{|\operatorname{sen}\theta - \theta|}{|\operatorname{sen}\theta|}.)$$

θ	sen θ	sen $\theta - \theta$
−0.03		
−0.02		
−0.01		
0		
0.01		
0.02		
0.03		

78. Presentación de un teorema Si t es cualquier número real, pruebe que $1 + (\tan t)^2 = (\sec t)^2$.

Polinomios de Taylor Si se emplea la medición en radianes se pueden obtener los valores de las funciones trigonométricas a través de simples funciones polinomiales. Por ejemplo, en los ejercicios 79 y 80, los valores aproximados de las funciones seno y coseno se obtienen mediante polinomios de Taylor, llamados así por el matemático inglés Brook Taylor (1685-1731). Complete cada tabla; en la tercera columna de cada una hay un polinomio de Taylor. Describa los patrones que se observan en cada tabla.

79.

θ	sen θ	$\theta - \dfrac{\theta^3}{6}$	sen $\theta - \left(\theta - \dfrac{\theta^3}{6}\right)$
−0.3	−0.295…		
−0.2	−0.198…		
−0.1	−0.099…		
0	0		
0.1	0.099…		
0.2	0.198…		
0.3	0.295…		

80.

θ	cos θ	$1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{\theta^4}{24}$	cos $\theta - \left(1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{\theta^4}{24}\right)$
−0.3	0.955…		
−0.2	0.980…		
−0.1	0.995…		
0	1		
0.1	0.995…		
0.2	0.980…		
0.3	0.955…		

4.4
Gráficas del seno y el coseno: sinusoides

Aprenderá acerca de...

- Revisión de las ondas básicas
- Las sinusoidales y transformaciones
- La modelación del comportamiento periódico con sinusoidales

. . . porque

El seno y el coseno adquieren relevancia cuando se usa para modelar ondas y comportamiento periódico

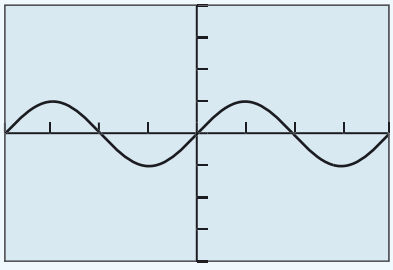
Revisión de las ondas básicas

En las primeras tres secciones de este capítulo observó cómo se emplean las funciones trigonométricas en la geometría de los triángulos y los círculos. Esas conexiones con la geometría son lo que le dan a las funciones trigonométricas su poder matemático y hace que tengan una aplicabilidad muy extendida en muchos campos.

El círculo unitario de la sección 4.3 fue la clave para definir las funciones trigonométricas como funciones de números reales. Esto último es lo que permite que se les haga el mismo análisis que las otras funciones presentadas en el capítulo 1 (en efecto, dos de nuestras "Doce funciones básicas" son trigonométricas). Ahora haremos un acercamiento a las propiedades algebraicas, gráficas y numéricas de las funciones trigonométricas, empezando con el seno y el coseno.

Recuerde que podemos aprender mucho acerca de la función seno dando una mirada a su gráfica. Aquí hay un resumen de sus propiedades:

FUNCIÓN BÁSICA La función exponencial



[–2π, 2π] por [–4, 4]

$f(x) = \operatorname{sen} x$.
Dominio: Todos los reales.
Rango: $[-1, 1]$.
Continua.
Crece y decrece alternadamente en ondas periódicas.
Simétrica con respecto a origen (impar).
Acotada.
Máximo absoluto de 1.
Mínimo absoluto de -1.
Sin asíntotas horizontales.
Sin asíntotas verticales.
Comportamiento en los extremos: $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x$ y $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ no existen (los valores de las funciones oscilan continuamente entre -1 e 1 sin aproximarse a un límite).

A esta lista podemos añadir que $y = \operatorname{sen} x$ es *periódica*, con periodo 2π. También podemos agregar a la lista el origen de la función seno: por definición, sen t es la coordenada y del punto P del círculo unitario que encierra al número t (o, equivalentemente, el punto P del círculo unitario determinado por un ángulo de t radianes en posición estándar). De hecho, ahora puede observarse de dónde viene la gráfica ondulada. Intente llevar a cabo la exploración 1.

EXPLORACIÓN 1 **Gráfica de sen *t* como una función de *t***

Establezca su graficadora en modo radián, paramétrico y graficación "simultánea".

Seleccione Tmín $= 0$, Tmáx $= 6.3$ Tstep $= \pi/24$.

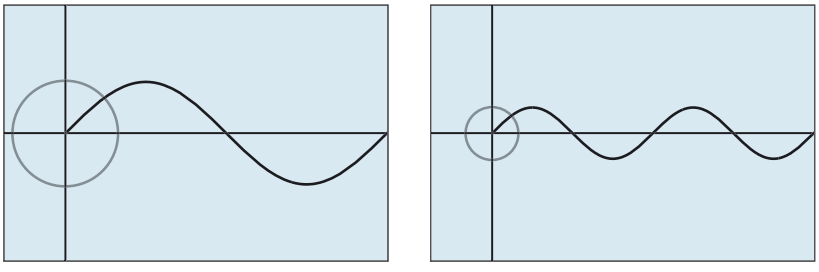
Seleccione la ventana (x, y) para $[-1.2, 6.3]$ por $[-2.5, 2.5]$

Seleccione $X_{1T} = \cos(T)$ y $Y_{1T} = \text{sen}(T)$. Esto graficará al círculo unitario. Seleccione $X_{2T} = T$ y $Y_{2T} = \text{sen}(T)$. Esto graficará sen(T) como una función de T.

Ahora inicie la gráfica y observe el punto que va en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj alrededor del circulo unitario en el que t va de 0 a 2π en dirección positiva. Simultáneamente verá la coordenada y del punto en el que inició la gráfica como una función de t a lo largo del eje horizontal x. Puede borrar el dibujo y observar la gráfica tantas veces como lo requiera a fin de responder las siguientes pregunta:

1. ¿Dónde está el punto del círculo unitario cuando la onda es más grande?
2. ¿Dónde está el punto del círculo unitario cuando la onda es más pequeña?
3. ¿Por qué ambas gráficas cruzan el eje de las x al mismo tiempo?
4. Duplique el valor de Tmáx y cambie la ventana para $[-2.4, 12.6]$ por $[-5, 5]$. Si su graficadora puede cambiar de "estilo" para mostrar un punto móvil, seleccione ese estilo para elaborar la gráfica del círculo unitario. Corra la gráfica y observe cómo la curva seno sigue la coordenada y del punto conforme se mueve alrededor del círculo unitario.
5. Explique de lo que ha observado por qué el periodo de la función seno es 2π.
6. Reto: ¿Puede modificar los parámetros de la calculadora para mostrar dinámicamente cómo la función coseno sigue la coordenada x del punto que se mueve alrededor del círculo unitario?

Aunque una figura estática no es lo mismo que una simulación dinámica, la figura 4.38 muestra las pantallas finales de las dos gráficas de la exploración 1.

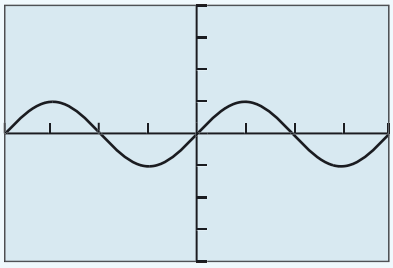


$[-1.2, 6.3]$ por $[-2.5, 2.5]$
a)

$[-2.4, 12.6]$ por $[-5, 5]$
b)

FIGURA 4.38 La gráfica de $y = \text{sen } x$ sigue a la coordenada y del punto determinado por t conforme éste se mueve alrededor del círculo unitario.

FUNCIÓN BÁSICA Función Coseno



[-2π, 2π] por [-4, 4]

$f(x) = \cos x$.
Dominio: Todos los reales.
Rango: $[-1, 1]$.
Continua.
Crece y decrece alternadamente en ondas periódicas.
Simétrica con respecto al eje de las y (par).
Acotada.
Máximo absoluto de 1.
Mínimo absoluto de -1.
Sin asíntotas horizontales.
Sin asíntotas verticales.
Comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ y $\lim_{x \to \infty} \cos x$ no existen (los valores de las funciones oscilan continuamente entre -1 y 1 sin aproximarse a un límite).

Como en el caso de la función seno, se puede añadir que es periódica, con periodo 2π.

Sinusoidales y transformaciones

Una comparación de las gráficas de $y = \text{sen } x$ y de $y = \cos x$ sugiere que cualquiera de ellas puede obtenerse a partir de la otra mediante una traslación horizontal (sección 1.5). De hecho, probaremos más adelante en esta misma sección, que $\cos x = \text{sen}(x + \pi/2)$. Cada gráfica es un ejemplo de una sinusoide. En general, cualquier transformación de una función seno (o la gráfica de ese tipo de función) es una sinusoidal.

DEFINICIÓN Sinusoidal

Una función es una **sinusoidal** si puede escribirse en la forma

$$f(x) = a \text{ sen } (bx + c) + d$$

en donde a, b, c y d son constantes y ni a ni b son 0.

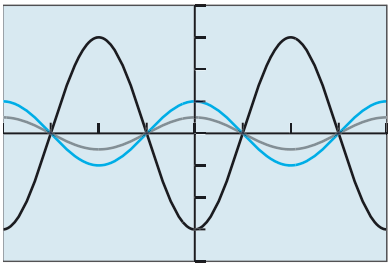
Ya que las funciones coseno son, por sí mismas, traslaciones de las funciones seno, cualquier transformación de la función coseno también es una sinusoidal según la definición anterior.

Hay un vocabulario especial para describir algunas de las transformaciones graficas cuando se aplican a las sinusoidales. Los alargamientos y las compresiones horizontales afectan al *periodo* y a la *frecuencia*; los alargamientos y las compresiones verticales afectan a la *amplitud* y las traslaciones traen consigo un *cambio de fase*. Todos esos términos están asociados con ondas, y las ondas están asociadas naturalmente con sinusoidales.

DEFINICIÓN Amplitud de una sinusoide

La **amplitud** de una sinusoide $f(x) = a \text{ sen } (bx + c) + d$ es $|a|$. Similarmente, la amplitud de $f(x) = a \cos (bx + c) + d$ es $|a|$.

Gráficamente, la amplitud es la mitad de la altura de la onda.



$[-2\pi, 2\pi]$por $[-4, 4]$

FIGURA 4.39 Sinusoidales (en este caso, curvas coseno) de diferentes amplitudes (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Alargamiento o compresión vertical y amplitud

Encuentre la amplitud de cada función y utilice el lenguaje de transformación para describir cómo se relacionan las gráficas.

a) $y_1 = \cos x$ **b)** $y_2 = \frac{1}{2}\cos x$ **c)** $y_3 = -3\cos x$

SOLUCIÓN

Resolver algebraicamente Las amplitudes son a) 1, b) 1/2 y c) $|-3| = 3$.

La gráfica de y_2 es una compresión vertical, en un factor de 1/2, de la gráfica de y_1.

La gráfica de y_3 es un alargamiento vertical de la gráfica y_1 por un factor de 3, y una reflexión con respecto del eje x, realizada en cualquier orden. (A esto no le llamamos alargamiento vertical por un factor de -3, ni se dice que la amplitud es -3.)

Respaldar gráficamente Las gráficas de las tres funciones se muestran en la figura 4.39. Debe poder indicar fácilmente cuál es cuál verificando las amplitudes.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

En la sección 1.5 aprendió que la gráfica de $y = f(bx)$ cuando $|b| > 1$ es una compresión horizontal de la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de $1/|b|$. Esto es exactamente lo que pasa con las sinusoidales, pero se puede agregar la observación de que el periodo se encoge por el mismo factor. Cuando$|b| > 1$, el efecto en ambas gráficas y el periodo es un alargamiento horizontal por un factor de $1/|b|$, más una reflexión con respecto del eje de las y si $b < 0$.

Periodo de una sinusoide

El periodo de una sinusoidal $f(x) = a\ \text{sen}\ (bx + c) + d$ es $2\pi/|b|$. Similarmente, el periodo de $f(x) = a\cos(bx + c) + d$ es $2\pi/|b|$.

Gráficamente, el periodo es la longitud de un ciclo completo de la onda.

EJEMPLO 2 Alargamiento y compresión horizontal y periodo

Determine el periodo de cada función y utilice un lenguaje de transformaciones para describir cómo están relacionadas las gráficas.

a) $y_1 = \text{sen}\ x$ **b)** $y_2 = -2\ \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$ **c)** $y_3 = 3\ \text{sen}\ (-2x)$

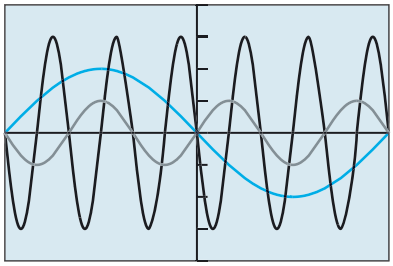
SOLUCIÓN

Resolver algebraicamente Los periodos son a) 2π, b) $2\pi/(1/3) = 6\pi$, y c) $2\pi/|-2| = \pi$.

La gráfica de y_2 es un alargamiento horizontal de la gráfica y_1, en un factor de 3, un alargamiento vertical por un factor de 2, y una reflexión respecto del eje x, realizados en cualquier orden.

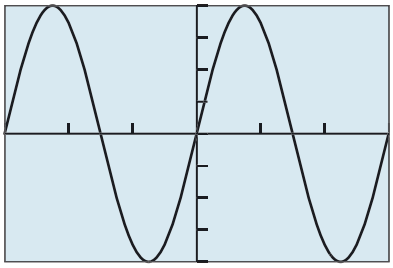
La gráfica de y_3 es un encogimiento horizontal de la gráfica y_1 por un factor de 1/2, un alargamiento vertical por un factor de 3 y una reflexión a través del eje de las y, realizada en algún orden. (Observe que no llamamos a esto una compresión horizontal por un factor de $-1/2$, ni se dice que el periodo es $-\pi$).

continúa



$[-3\pi, 3\pi]$ por $[-4, 4]$

FIGURA 4.40 Sinusoidales (en este caso, curvas seno) de diferentes amplitudes y periodos (ejemplo 2).



$[-3\pi, 3\pi]$ por $[-4, 4]$

FIGURA 4.41 La gráfica de la función $f(x) = 4 \operatorname{sen}(2x/3)$. Tiene frecuencia $1/(3\pi)$, por lo tanto, completa un ciclo entero, por intervalo de longitud 3π (ejemplo 3).

Respalde gráficamente Las gráficas de las tres funciones se muestran en la figura 4.40. Debe poder decir cuál es cuál fácilmente verificando los periodos o las amplitudes.

Ahora resuelva el ejercicio 9.

En algunas aplicaciones, la *frecuencia* de una sinusoidal es una consideración importante. La frecuencia simplemente es el recíproco del periodo.

Frecuencia de una sinusoidal

La **frecuencia** de una sinusoidal $f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c) + d$ es $|b|/2\pi$. Similarmente, la frecuencia de $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ es $|b|/2\pi$.

Gráficamente, la frecuencia es el número de ciclos completos que la onda realiza en un intervalo unidad.

EJEMPLO 3 Obtención de la frecuencia de una sinusoide

Encuentre la frecuencia de la función $f(x) = 4 \operatorname{sen}(2x/3)$ e interprete su significado gráficamente.

Grafique en la ventana $[-3\pi, 3\pi]$ por $[-4, 4]$.

SOLUCIÓN La frecuencia es $(2/3) \div 2\pi = 1/(3\pi)$. Éste es el recíproco del periodo, el cual es 3π. La interpretación es que la gráfica completa un ciclo entero por intervalo de longitud 3π (por eso el periodo es de 3π). La gráfica se muestra en la figura 4.41.

Ahora resuelva el ejercicio 17.

Recuerde de la sección 1.5 que la gráfica de $y = f(x + c)$ es una traslación de c unidades a la izquierda de la gráfica de $y = f(x)$ cuando $c > 0$. Esto es exactamente lo que pasa con las sinusoidales, pero usando terminología que proviene de la ingeniería eléctrica se dice que la onda experimenta un **corrimiento de fase** de $-c$.

EJEMPLO 4 Obtención de una sinusoidal a partir de otra mediante un corrimiento de fase

a) Obtenga la función coseno a partir de un corrimiento de fase de la función seno.

b) Obtenga la función seno a partir de un corrimiento de fase de la función coseno.

SOLUCIÓN

a) La función $y = \operatorname{sen} x$ tiene un máximo en $x = \pi/2$, mientras que la función $y = \cos x$ tiene un máximo en $x = 0$. Por lo tanto, se necesita mover la curva seno $\pi/2$ unidades a la *izquierda* para obtener la curva coseno:

$$\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2).$$

b) De acuerdo con el trabajo hecho en a), se necesita mover la curva coseno $\pi/2$ unidades a la *derecha* para obtener la curva seno:

$$\operatorname{sen} x = \cos(x - \pi/2).$$

Puede comprobar la veracidad de estos resultados con su graficadora. Incidentalmente, hay muchas otras translaciones que también podrían trabajarse. Añadir cualquier múltiplo entero de 2π para correr la fase daría como resultado la misma gráfica.

Ahora resuelva el ejercicio 41.

Debe tenerse precaución cuando se combinan esas transformaciones. Un alargamiento o compresión horizontal afecta la variable a lo largo del eje horizontal, por lo que *también afecta el corrimiento de fase*. Observe las transformaciones en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Combinación de un corrimiento de fase con un cambio de periodo

Construya una sinusoidal con periodo $\pi/5$, amplitud 6 y que pase por el punto $(2, 0)$.

SOLUCIÓN

Para determinar el coeficiente de x hacemos $2\pi/|b| = \pi/5$ y resolvemos para encontrar que $b = \pm 10$. De forma arbitraria elegimos $b = 10$ (cualesquiera de los dos números satisfará las condiciones especificadas).

Para la amplitud 6 se tiene que $|a| = 6$. Otra vez, arbitrariamente elegimos el valor positivo. La gráfica de $y = 6 \operatorname{sen}(10x)$ tiene la amplitud y el periodo requeridos, pero no pasa por el punto $(2, 0)$. Sin embargo, sí pasa por el punto $(0, 0)$, por lo que todo lo que necesitamos es un corrimiento de fase de $+2$ para encontrar la función. Remplazando x por $x - 2$, obtenemos

$$y = 6 \operatorname{sen}(10(x - 2)) = 6 \operatorname{sen}(10x - 20).$$

Observe que *no* se obtuvo la función $y = 6 \operatorname{sen}(10x - 2)$. Esa función representaría un cambio de fase de $y = \operatorname{sen}(10x)$, pero sólo por 2/10, no 2. Los paréntesis son importantes cuando se combinan corrimientos de fase con alargamiento y compresiones horizontales.

Ahora resuelva el ejercicio 59.

Gráficas de sinusoidales

Las gráficas de $y = a \operatorname{sen}(b(x - h)) + k$ y $y = a \cos(b(x - h)) + k$ (donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$) tienen las siguientes características:

$$\text{amplitud} = |a|;$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{|b|};$$

$$\text{frecuencia} = \frac{|b|}{2\pi}.$$

Cuando se compararan las gráficas de $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$, respectivamente, se observa que tienen también las siguientes características:

un corrimiento de fase de h;

una traslación vertical de k.

EJEMPLO 6 Construcción de una sinusoidal mediante transformaciones

Construya una sinusoidal $y = f(x)$ que tenga un valor mínimo de $y = 5$ cuando $x = 0$ y un valor máximo $y = 25$ cuando $x = 32$ (consulte la figura 4.42).

SOLUCIÓN

Resolver algebraicamente La amplitud de esta sinusoidal es la mitad de la altura de la gráfica: $(25 - 5)/2 = 10$. Así que $|a| = 10$. El periodo es 64 (ya que un periodo completo va del mínimo al máximo y regresa al mínimo). Entonces se tiene que $2\pi/|b| = 64$. Resolviendo, se obtiene que $b| = \pi/32$.

continúa

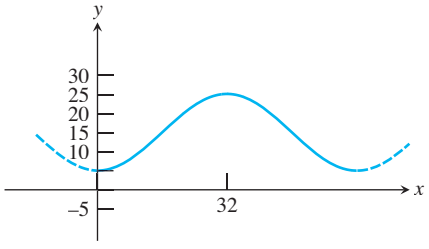
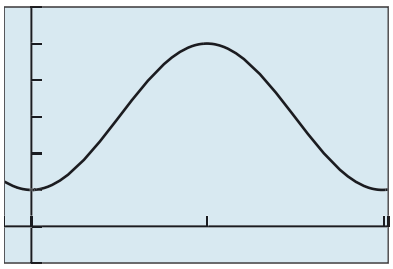


FIGURA 4.42 Una sinusoidal con especificaciones (ejemplo 6).



[–5, 65] por [–5, 30]

FIGURA 4.43 La gráfica de la función $y = -10 \cos((\pi/32)x) + 15$ (ejemplo 8).

Necesitamos una sinusoidal cuyo valor mínimo esté en $x = 0$. Se puede mover horizontalmente la gráfica de seno o de coseno, pero es más fácil tomar la curva coseno (que toma su valor *máximo* en $x = 0$) y la volteamos. Esta reflexión se puede obtener estableciendo $a = -10$ en lugar de 10.

Hasta ahora tenemos:

$$y = -10 \cos\left(\pm\frac{\pi}{32}x\right)$$

$$= -10 \cos\left(\frac{\pi}{32}x\right) \qquad \text{(Debido a que coseno es una función par).}$$

Finalmente, el rango de esta función tiene como valor mínimo -10 y como máximo 10. Movemos verticalmente la gráfica 15 unidades para obtener una función cuyo rango tenga como mínimo 5 y como máximo 15, como se requiere. De esta manera

$$y = -10 \cos\left(\frac{\pi}{32}x\right) + 15.$$

Respaldar gráficamente La respuesta obtenida queda respaldada con la gráfica de la función (figura 4.43).

Ahora resuelva el ejercicio 69.

Modelación del comportamiento periódico con sinusoidales

El ejemplo 6 tenía la intención de ser más que sólo una revisión de las transformaciones gráficas. La construcción de una sinusoidal con propiedades específicas es a menudo un paso clave en el modelado de situaciones físicas que exhiben un comportamiento periódico. El procedimiento llevado a cabo en el ejemplo 6 puede resumirse de la siguiente manera:

Construcción de un modelo sinusoidal empleando el tiempo

1. Determine el valor máximo M y el valor mínimo m. La amplitud A de la sinusoidal es $A = \dfrac{M - m}{2}$, y el cambio vertical es $C = \dfrac{M + m}{2}$.
2. Determine el periodo p, el intervalo de tiempo de un ciclo sencillo de la función periódica. La compresión (o el alargamiento) horizontal es $B = \dfrac{2\pi}{p}$.
3. Elija una sinusoidal apropiada para un comportamiento en un momento dado T. Por ejemplo, en el momento T:

   $f(t) = A \cos(B(t - T)) + C$ alcanza un valor máximo;

   $f(t) = -A \cos(B(t - T)) + C$ alcanza un valor mínimo;

   $f(t) = A \operatorname{sen}(B(t - T)) + C$ está a la mitad entre un valor mínimo y uno máximo;

   $f(t) = -A \operatorname{sen}(B(t - T)) + C$ está a la mitad entre un valor máximo y uno mínimo.

Aplicamos el procedimiento utilizado en el ejemplo 7 para modelar los altibajos de una marea.

EJEMPLO 7 Cálculo de los vaivenes de las mareas

Un particular 4 de julio en Galveston, TX, hubo marea alta a las 9:36 A.M. En ese momento, el agua al final del muelle de la calle 61 estaba a 2.7 m de profundidad. Hubo marea baja a las 3:48 P.M., a esa hora el agua estaba a 2.1 m de profundidad. Suponga que la profundidad del agua es una función sinusoidal del tiempo cuyo periodo es la mitad de un día lunar (aproximadamente 12 horas 24 minutos).

a) ¿A qué hora del 4 de julio hubo la primera marea baja?

b) ¿Cuál era la profundidad aproximada del agua entre las 6:00 A.M y las 3:00 P.M. de ese día?

c) ¿Cuál fue el primer momento del 4 de julio que el agua estuvo a 2.4 metros de profundidad?

SOLUCIÓN

Modele

Necesitamos modelar la profundidad D como una función sinusoidal del tiempo t. La profundidad varía de un máximo de 2.7 m a un mínimo de 2.1 m, entonces la amplitud $A = \dfrac{2.7 - 2.1}{2} = 0.3$, y el desplazamiento vertical es $C = \dfrac{2.7 + 2.1}{2} = 2.4$. El periodo es de 12 horas 24 minutos, el cual se convierte en 12.4 horas, entonces $B = \dfrac{2\pi}{12.4} = \dfrac{\pi}{6.2}$.

Necesitamos una sinusoidal que tenga su valor máximo a las 9:36 A.M. (Lo que equivale a 9.6 horas después de la medianoche, un conveniente tiempo 0.) Se elige el modelo coseno. De esta manera,

$$D(t) = 0.3 \cos\left(\frac{\pi}{6.2}(t - 9.6)\right) + 2.4.$$

Resolver gráficamente

La gráfica de un periodo de 24 horas del 4 de julio se muestra en la figura 4.44.

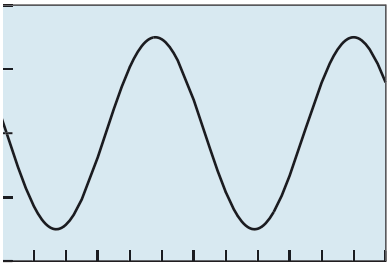
Ahora se utiliza la gráfica para responder las preguntas formuladas.

a) La primera marea baja corresponde al primer mínimo local de la gráfica. Se encuentra a través de la gráfica que esto sucede en $t = 3.4$. Esto se convierte en $3 + (0.4)(60) = 3{:}24$ A.M.

b) La profundidad a las 6:00 A.M. es $D(6) \approx 2.32$ m. La profundidad a las 3:00 P.M. es $D(12 + 3) = D(15) \approx 2.12$ m.

c) El primer momento en el que el agua está a 2.4 m de profundidad corresponde al punto de la intersección más a la izquierda de la sinusoidal con la recta $y = 2.4$. Utilizamos una graficadora para encontrar que $t = 0.3$. Éste traslada a $0 + (0.3)(60) = 00{:}18$ A.M., que puede escribirse como 12:18 A.M.

Ahora resuelva el ejercicio 75.



[0, 24] por [2, 2.8]

FIGURA 4.44 La gráfica de la marea de Galveston.

En la sección 4.8 veremos más aplicaciones de este tipo cuando se aborde el *movimiento armónico simple.*

REPASO RÁPIDO 4.4 *(Para obtener ayuda consulte las secciones 1.6, 4.1 y 4.2)*

En los ejercicios del 1 al 3 indique el signo (positivo o negativo) de la función en cada cuadrante.

1. sen x **2.** cos x

3. tan x

En los ejercicios del 4 al 6 dé la medida del ángulo en radianes.

4. 135° **5.** −150° **6.** 450°

En los ejercicios del 7 al 10 encuentre una transformación que convierta a la gráfica de y_1 a la gráfica de y_2.

7. $y_1 = \sqrt{x}$ y $y_2 = 3\sqrt{x}$

8. $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$

9. $y_1 = \ln x$ y $y_2 = 0.5 \ln x$

10. $y_1 = x^3$ y $y_2 = x^3 - 2$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.4

En los ejercicios del 1 al 6 encuentre la amplitud de la función y use el lenguaje de transformaciones para describir cómo la gráfica de la función está relacionada con la gráfica $y = \text{sen } x$.

1. $y = 2 \text{ sen } x$ **2.** $y = \frac{2}{3} \text{ sen } x$

3. $y = -4 \text{ sen } x$ **4.** $y = -\frac{7}{4} \text{ sen } x$

5. $y = 0.73 \text{ sen } x$ **6.** $y = -2.34 \text{ sen } x$

En los ejercicios del 7 al 12 encuentre el periodo de la función y use el lenguaje de transformaciones para describir cómo la gráfica de la función está relacionada con la gráfica de $y = \cos x$.

7. $y = \cos 3x$ **8.** $y = \cos x/5$

9. $y = \cos(-7x)$ **10.** $y = \cos(-0.4x)$

11. $y = 3 \cos 2x$ **12.** $y = \frac{1}{4} \cos \frac{2x}{3}$

En los ejercicios del 13 al 16 encuentre la amplitud, el periodo y la frecuencia de la función, y utilice esta información (no su calculadora) para esbozar una gráfica de la función en la ventana de visualización $[-3\pi, 3\pi]$ por $[-4, 4]$.

13. $y = 3 \text{ sen } \frac{x}{2}$ **14.** $y = 2 \cos \frac{x}{3}$

15. $y = -\frac{3}{2} \text{ sen } 2x$ **16.** $y = -4 \text{ sen } \frac{2x}{3}$

En los ejercicios 17 al 22 grafique un periodo de la función. Use su conocimiento de transformaciones, no su calculadora graficadora. Asegúrese de mostrar la escala en ambos ejes.

17. $y = 2 \text{ sen } x$ **18.** $y = 2.5 \text{ sen } x$

19. $y = 3 \cos x$ **20.** $y = -2 \cos x$

21. $y = -0.5 \text{ sen } x$ **22.** $y = 4 \cos x$

En los ejercicios 23 al 28 grafique tres periodos de la función. Use su conocimiento de transformaciones, no su calculadora graficadora. Asegúrese de mostrar la escala en ambos ejes.

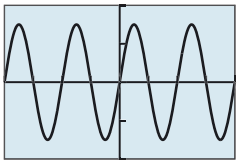
23. $y = 5 \text{ sen } 2x$ **24.** $y = 3 \cos \frac{x}{2}$

25. $y = 0.5 \cos 3x$ **26.** $y = 20 \text{ sen } 4x$

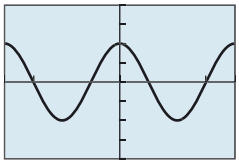
27. $y = 4 \text{ sen } \frac{x}{4}$ **28.** $y = 8 \cos 5x$

En los ejercicios del 29 al 34 especifique el periodo y la amplitud de cada función. Después proporcione la ventana de visualización en la que la puede apreciarse la gráfica. Use su conocimiento de transformaciones, no su calculadora graficadora.

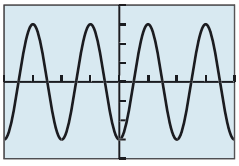
29. $y = 1.5 \text{ sen } 2x$



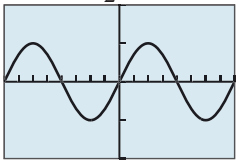
30. $y = 2 \cos 3x$



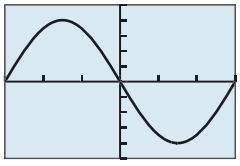
31. $y = -3 \cos 2x$



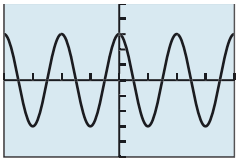
32. $y = 5 \text{ sen } \frac{x}{2}$



33. $y = -4 \text{ sen } \frac{\pi}{3}x$



34. $y = 3 \cos \pi x$



En los ejercicios 35 al 40 identifique el valor máximo, el valor mínimo y los ceros de la función en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Use su conocimiento de transformaciones, no su calculadora graficadora.

35. $y = 2 \text{ sen } x$ **36.** $y = 3 \cos \frac{x}{2}$

37. $y = \cos 2x$ **38.** $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$

39. $y = -\cos 2x$ **40.** $y = -2 \text{ sen } x$

41. Escriba la función $y = -\text{sen } x$ como un corrimiento de fase de $y = \text{sen } x$.

42. Escriba la función $y = -\cos x$ como un corrimiento de fase de $y = \text{sen } x$.

En los ejercicios 43 al 48 describa las transformaciones que se requieren para obtener la gráfica de la función dada a partir de la gráfica de una función trigonométrica básica.

43. $y = 0.5 \operatorname{sen} 3x$ **44.** $y = 1.5 \cos 4x$

45. $y = -\frac{2}{3}\cos\frac{x}{3}$ **46.** $y = \frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{x}{5}$

47. $y = 3\cos\frac{2\pi x}{3}$ **48.** $y = -2\operatorname{sen}\frac{\pi x}{4}$

En los ejercicios 49 al 52 describa las transformaciones requeridas para obtener la gráfica de y_2 a partir de la gráfica y_1.

49. $y_1 = \cos 2x$ y $y_2 = \frac{5}{3}\cos 2x$

50. $y_1 = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ y $y_2 = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

51. $y_1 = 2\cos \pi x$ y $y_2 = 2\cos 2\pi x$

52. $y_1 = 3\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{3}$ y $y_2 = 2\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}$

En los ejercicios del 53 al 56 seleccione el par de funciones que tiene gráficas idénticas.

53. a) $y = \cos x$ **b)** $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

54. a) $y = \operatorname{sen} x$ **b)** $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = \cos x$

55. a) $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = -\cos(x - \pi)$

c) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

56. a) $y = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

En los ejercicios del 57 al 60 construya una sinusoidal con la amplitud dada y el periodo que pasa por el punto dado.

57. Amplitud 3, periodo π, punto (0, 0).

58. Amplitud 2, periodo 3π, punto (0, 0).

59. Amplitud 1.5, periodo $\pi/6$, punto (1, 0).

60. Amplitud 3.2, periodo $\pi/7$, punto (5, 0).

En los ejercicios del 61 al 68 especifique la amplitud y el periodo de la sinusoidal y (con respecto a la función básica) el corrimiento de fase y la traslación vertical.

61. $y = -2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ **62.** $y = -3.5\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

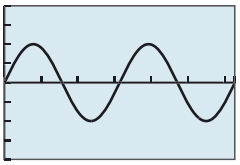
63. $y = 5\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 0.5$ **64.** $y = 3\cos(x + 3) - 2$

65. $y = 2\cos 2\pi x + 1$ **66.** $y = 4\cos 3\pi x - 2$

67. $y = \frac{7}{3}\operatorname{sen}\left(x + \frac{5}{2}\right) - 1$ **68.** $y = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{x - 3}{4}\right) + 1$

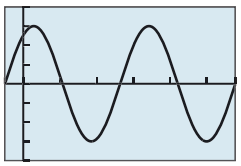
En los ejercicios 69 y 70 determine los valores a, b, h y k de tal forma que la gráfica de la función $y = a\operatorname{sen}(b(x + h)) + k$ sea la curva mostrada.

69.



[0, 6.28] por [–4, 4]

70.



[–0.5, 5.78] por [–4, 4]

71. Puntos de intersección Grafique $y = 1.3^{-x}$ y $y = 1.3^{-x}\cos x$ para x en el intervalo $[-1, 8]$.

a) ¿En cuántos puntos parece que se intersecan?

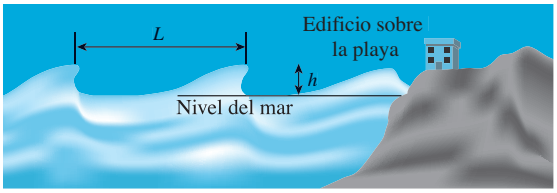
b) Encuentre las coordenadas de cada punto de intersección.

72. Movimiento de una boya Una boya de señalización en la bahía Chesapeake se balancea de arriba hacia abajo con la altura h de su transmisor (en pies) sobre el nivel del mar modelado por $h = a\operatorname{sen} bt + 5$. Durante una pequeña tormenta su altura varía de 1 pie a 9 pies y hay 3.5 segundos entre cada vez que la boya alcanza una altura de 9. ¿Cuáles son los valores de las constantes a y b?



73. Rueda de la fortuna Una rueda de la fortuna de 50 pies de diámetro completa una revolución cada 40 segundos. Si el centro de la rueda está 30 pies sobre el piso, ¿qué altura alcanzará un asiento de la rueda que está a 50 pies del nivel del piso después de alcanzar el punto más bajo?

74. Onda de un tsunami Un terremoto ocurrió a las 9:40 A.M. del 1 de noviembre de 1775, en Lisboa, Portugal, e inició un *tsunami* (algunas veces se les llama maremoto) con olas que viajaron a más de 540 pies/segundo (370 mph) y alcanzaron una altura de 60 pies. Si el periodo de las ondas fue de 30 minutos (1,800 segundos). Estime la longitud L entre las crestas.



75. Vaivenes En un Día del Trabajo particular, la marea alta en el sur de California tiene lugar a las 7:12 A.M. En ese momento el agua al final del muelle de Santa Mónica estuvo a 11 pies de profundidad. A la 1:24 P.M., la marea baja y el agua alcanza sólo 7 pies de profundidad. Suponga que la profundidad del agua es una función sinusoidal del tiempo con un periodo de 1/2 día lunar, el cual equivale a 12 horas 24 minutos.

a) ¿A qué hora del Día del Trabajo se presenta la primera marea baja?

b) ¿Cuál era la profundidad aproximada del agua a las 4:00 A.M. y las 9:00 P.M.?

c) ¿Cuál fue el primer momento de ese Día del Trabajo que el agua estuvo a 9 pies de profundidad?

76. Presión sanguínea La función

$$P = 120 + 30 \operatorname{sen} 2\pi t$$

modela la presión de la sangre (en milímetros de mercurio) para una persona que tiene una presión (alta) de 150/90; t representa segundos.

a) ¿Cuál es el periodo de la función?

b) ¿Cuántos latidos de corazón hay cada minuto?

c) Grafique esta función para modelar un intervalo de 10 segundos.

77. Rebote de un bloque Un bloque está colocado en un resorte que se pone en movimiento directamente sobre un detector de movimiento, el cual registra la distancia en intervalos de 0.1 segundos. Cuando el bloque se suelta está a 7.2 centímetros por arriba del detector del movimiento. La tabla siguiente muestra los datos recolectados por el detector durante los primeros dos segundos, con la distancia d medida en centímetros:

a) Haga un diagrama de dispersión de d como una función de t y estime visualmente el máximo d. Utilice ese número y el mínimo dado (7.2) para calcular la amplitud del movimiento del bloque.

b) Estime visualmente el movimiento del bloque a partir del diagrama de dispersión.

c) Modele el movimiento del bloque como una función sinusoidal $d(t)$.

d) Grafique su función con el diagrama de dispersión para justificar gráficamente su modelo.

t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
d	9.2	13.9	18.8	21.4	20.0	15.6	10.5	7.4	8.1	12.1

t	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
d	17.3	20.8	20.8	17.2	12.0	8.1	7.5	10.5	15.6	19.9

78. Tocadiscos (tornamesa) Una aguja está sujetada verticalmente en el extremo exterior de una tornamesa diseñada para tocar grabaciones fonográficas LP (pregunte a sus padres). Un detector de movimiento está situado a 60 cm. La tornamesa está conectada y el detector de movimiento mide la distancia a la aguja conforme gira el disco. La tabla siguiente muestra la distancia d como una función del tiempo durante los primeros 4 segundos.

t	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
d	63.5	71.6	79.8	84.7	84.7	79.8	71.6	63.5	60.0	63.5

t	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
d	71.6	79.8	84.7	84.7	79.8	71.6	63.5	60.0	63.5	71.6

a) El diámetro de la tornamesa mide 25.4 cm; encuentre la amplitud del movimiento de la aguja.

b) Encuentre el periodo del movimiento de la aguja mediante el análisis de la tabla.

c) Modele el movimiento de la aguja como una función sinusoidal $d(t)$.

d) Grafique su función con el diagrama de dispersión para justificar gráficamente su modelo.

79. Datos de temperatura La temperatura Fahrenheit normal mensual en Alburquerque, NM, se puede observar en la siguiente tabla (mes 1 = enero, 2 = febrero y así sucesivamente).

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temp	36	41	48	56	65	75	79	76	69	57	44	36

Fuente: Centro Nacional de Información Climática, de acuerdo con The Word Almanac and Book of Facts 2005.

Modele la temperatura T como una función sinusoidal del tiempo, usando 36 como valor mínimo y 79 como valor máximo. Respalde su respuesta graficando su función con un diagrama de dispersión.

80. Datos de temperatura La temperatura Fahrenheit normal mensual en Helena, MT, se puede observar en la siguiente tabla (mes 1 = enero, 2 = febrero y así sucesivamente).

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temp	20	26	35	44	53	61	68	67	56	45	31	21

Fuente: Centro Nacional de Información Climática, de acuerdo con The Word Almanac and Book of Facts 2005.

Modele la temperatura T como una función sinusoidal del tiempo, usando 20 como valor mínimo y 68 como valor máximo. Respalde su respuesta graficando su función con un diagrama de dispersión.

Preguntas de examen estandarizado

81. Verdadero o falso El periodo de la gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ es la mitad que el periodo de la gráfica $y = \operatorname{sen} 4x$. Justifique su respuesta.

82. Verdadero o falso Toda sinusoidal puede escribirse como $y = A \cos(Bx + C)$ para algunos números reales A, B y C. Justifique su respuesta.

Puede usar una calculadora graficadora para responder estas preguntas.

83. Opción múltiple Una sinusoidal con amplitud 4 tiene un valor mínimo de 5. Su valor máximo es:

A) 7. **B)** 9. **C)** 11.

D) 13. **E)** 15.

84. Opción múltiple La gráfica de $y = f(x)$ es una sinusoidal con periodo 45 que pasa por el punto (6, 0). ¿Cuál de los siguientes datos puede determinarse a partir de la información dada?

I. $f(0)$ **II.** $f(6)$ **III.** $f(96)$

A) Sólo I **B)** Sólo II

C) Sólo I y III **D)** Sólo II y III

E) I, II y III

85. Opción múltiple El periodo de la función $f(x) = 210 \operatorname{sen}(420x + 840)$ es

A) $\pi/840$. **B)** $\pi/420$. **C)** $\pi/210$.

D) $210/\pi$. **E)** $420/\pi$.

86. Opción múltiple El número de soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}(2{,}000x) = 3/7$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ es

A) 1,000. **B)** 2,000. **C)** 4,000.

D) 6,000. **E)** 8,000.

Exploraciones

87. Aproximación de coseno

a) Dibuje un diagrama de dispersión $(x, \cos x)$ para los 17 ángulos especiales x, donde $-\pi \le x \le \pi$.

b) Encuentre una regresión cuadrática de los datos.

c) Compare la aproximación de la función coseno dada por la regresión cuadrática con las aproximaciones del polinomio de Taylor dada en el ejercicio 80 de la sección 4.3.

88. Aproximación de seno

a) Dibuje un diagrama de dispersión $(x, \text{sen } x)$ para los 17 ángulos especiales x, donde $-\pi \le x \le \pi$.

b) Encuentre una regresión cúbica de los datos.

c) Compare la aproximación de la función seno dada por la regresión cúbica con las aproximaciones del polinomio de Taylor dada en el ejercicio 79 de la sección 4.3.

89. Visualización de una nota musical Un afinador de pianos golpea un diapasón para la nota media de C y crea una onda de sonido que puede modelarse con la ecuación

$$y = 1.5 \text{ sen } 524\pi t,$$

donde t es el tiempo en segundos.

a) ¿Cuál es el periodo p de esta función?

b) ¿Cuál es la frecuencia $f = 1/p$ de esta nota?

c) Grafique la función.

90. Escriba para aprender En cierto videojuego, un cursor lleva un movimiento horizontal de vaivén a lo largo de la pantalla a una velocidad constante. Su distancia d desde el centro de la pantalla varía con respecto al tiempo t y, por lo tanto, puede escribirse como una función de t. Explique por qué esa distancia horizontal d desde el centro de la pantalla *no varía* de acuerdo con la ecuación $d = a \text{ sen } bt$, en donde t representa segundos. Tal vez encuentre útil graficar esa función.

91. Escriba para aprender Usando sólo valores enteros de a y b entre 1 y 9 inclusive, observe las gráficas de las funciones de la forma

$$y = \text{sen } (ax) \cos (bx) - \cos (ax) \text{ sen } (bx)$$

para diversos valores de a y b. (Un grupo de personas puede observar más de una gráfica a la vez que una persona sola).

a) Algunos valores de a y b resultan de la gráfica de $y = \text{sen } x$. Encuentre una regla general para tales valores de a y b.

b) Algunos valores de a y b resultan de la gráfica de $y = \text{sen } 2x$. Encuentre una regla general para tales valores de a y b.

c) ¿Puede adivinar cuáles valores de a y b resultarán de la gráfica $y = \text{sen } kx$ para un entero arbitrario k?

92. Actividad en equipo Usando sólo valores enteros de a y b entre 1 y 9 inclusive, observe las gráficas de las funciones de la forma

$$y = \cos (ax) \cos (bx) + \text{sen } (ax) \text{ sen } (bx)$$

para diversos valores de a y b (un grupo de personas puede observar más de una gráfica a la vez que una persona sola).

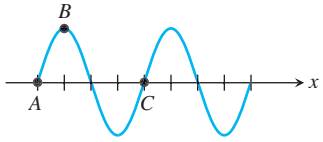
a) Algunos valores de a y b resultan en la gráfica de $y = \cos x$. Encuentre una regla general para tales valores de a y b.

b) Algunos valores de a y b resultan en la gráfica de $y = \cos 2x$. Encuentre una regla general para tales valores de a y b.

c) ¿Puede adivinar cuáles valores de a y b resultarán en la gráfica $y = \cos kx$ para un entero arbitrario k?

Ampliación de las ideas

En los ejercicios del 93 al 96, las gráficas de las funciones seno y coseno tienen forma de ondas, como se muestra en la figura siguiente. Si etiqueta correctamente las coordenadas de los puntos A, B y C, obtendrá la gráfica de la función dada.



93. $y = 3 \cos 2x$ y $A = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$. Determine B y C.

94. $y = 4.5 \text{ sen } \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ y $A = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$. Determine B y C.

95. $y = 2 \text{ sen} \left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ y $A = \left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$. Determine B y C.

96. $y = 3 \text{ sen } (2x - \pi)$, y A es la primera intersección a la derecha del eje de las y. Encuentre A, B y C.

97. La ecuación general sinusoidal Es un hecho interesante que cualquier sinusoidal puede escribirse de la siguiente forma

$$y = a \text{ sen } [b(x - H)] + k,$$

donde a y b son números positivos.

a) Explique por qué se puede suponer que b es positivo. (*Sugerencia:* Reemplace b por $-B$ y simplifique).

b) Use una identidad de traslación horizontal para probar que la ecuación

$$y = a \cos [b(x - h)] + k$$

tiene la misma gráfica que

$$y = a \text{ sen } [b(x - H)] + k$$

para una H correctamente elegida. Explique cómo elegir H.

c) Proporcione un argumento con el círculo unitario para explicar la identidad $\text{sen}(\theta + \pi) = -\text{sen } \theta$. Justifique gráficamente su argumento.

d) Use la identidad de c) para probar que

$$y = -a \text{ sen } [b(x - h)] + k, a > 0,$$

tiene la misma gráfica que

$$y = a \text{ sen } [b(x - H)] + k, a > 0$$

para una H correctamente elegida. Explique cómo elegir H.

e) Combine sus resultados de (a)−(d) para probar que cualquier sinusoidal puede representarse con la ecuación

$$y = a \text{ sen } [b(x - H)] + k$$

en donde a y b son positivos.

4.5 Gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante

Aprenderá acerca de...

- La función tangente
- La función cotangente
- La función secante
- La función cosecante

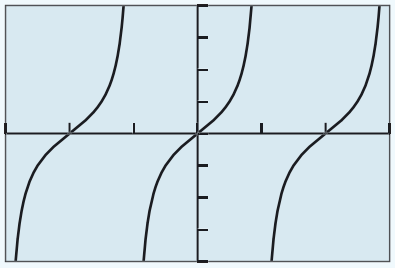
. . . porque

Esto proporciona las funciones de las razones trigonométricas restantes.

La función tangente

La gráfica de la función tangente se muestra a continuación. Como sucede en los casos de las gráficas de seno y coseno, esta gráfica nos indica muchas propiedades de la función. En el siguiente recuadro se encuentra un resumen de las características de la tangente:

FUNCIÓN TANGENTE



[$-3\pi/2$, $3\pi/2$] por [-4, 4]

$f(x) = \tan x$.
Dominio: Todos los reales excepto los múltiplos impares de $\pi/2$.
Rango: Todos los reales.
Continua (por ejemplo, continua en su dominio).
Crece en cada intervalo de su dominio.
Simétrica con respecto al origen (impar).
Sin cota superior ni inferior.
Sin mínimos ni máximos locales.
Sin asíntotas horizontales.
Asíntotas verticales $x = k \cdot (\pi/2)$ para todos los impares enteros k.
Comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} \tan x$ y $\lim_{x \to \infty} \tan x$ no existen. (Los valores de las funciones oscilan continuamente entre $-\infty$ e ∞ sin aproximarse a un límite).

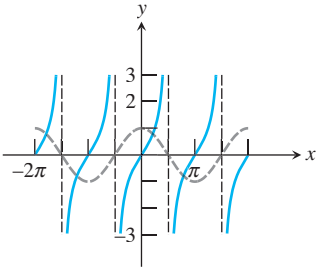


FIGURA 4.45 La función tangente tiene asíntotas justo en donde la función coseno es cero.

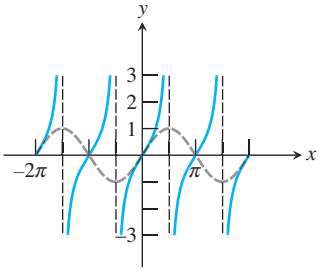


FIGURA 4.46 La función tangente es cero justo en donde la función seno también es cero.

Ahora analizaremos las razones de que la gráfica $f(x) = \tan x$ presente el comportamiento señalado. De las definiciones de las funciones trigonométricas (sección 4.2) se sigue que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

A diferencia de las sinusoidales, la función tangente tiene un denominador que puede ser cero, lo que hace que la función sea indefinida en ese caso. Eso ocurre un número infinito de veces: en todos los valores de x para los cuales $\cos x = 0$. Es por eso que la función tangente tiene asíntotas verticales en esos valores (figura 4.45). La función tangente es cero justo donde la función seno también es cero: todos los múltiplos enteros de π (figura 4.46).

Ya que sen x y cos x tienen como periodo 2π, tal vez espere que el periodo de la función tangente sea el mismo. Las gráficas muestran, sin embargo, que es π.

Las constantes a, b, h y k influyen en el comportamiento de $y = a\tan(b(x - h) + k$ en la misma forma que lo hacen en la gráfica de $y = a\,\text{sen}(b(x - h) + k$. La constante a genera un estiramiento o compresión vertical, b afecta al periodo, h provoca una traslación horizontal y k causa que se tenga una traslación vertical. Sin embargo, los términos *amplitud* y *corrimiento de fase* no se emplean, como se hace únicamente para las sinusoidales.

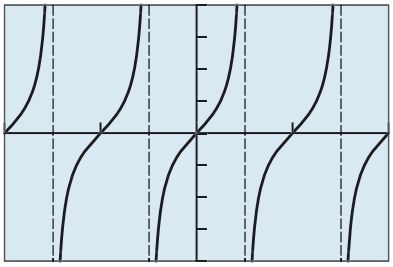
EJEMPLO 1 Gráfica de la función tangente

Describa la gráfica de la función $y = -\tan 2x$ en términos de una función trigonométrica básica. Localice las asíntotas verticales y grafique cuatro periodos de la función.

SOLUCIÓN El efecto del 2 es una compresión horizontal de la gráfica de $y = \tan x$ por un factor de 1/2, mientras que el efecto del -1 es un reflejo con respecto al eje x. Ya que las asíntotas verticales de $y = \tan x$ son múltiplos impares de $\pi/2$, el factor de compresión provoca que las asíntotas verticales de $y = \tan 2x$ sean múltiplos impares de $\pi/2$ (figura 4.47a). El reflejo respecto al eje x (figura 4.47b) no cambia las asíntotas.

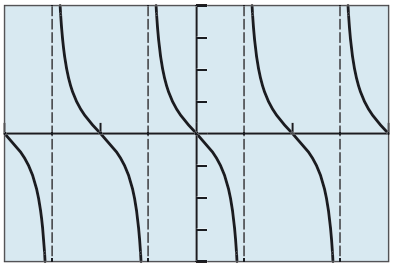
Debido a que el periodo de la función $y = \tan x$ es π, el periodo de la función $y = -\tan 2x$ es (nuevamente, gracias al factor de compresión) $\pi/2$. De esta manera, para cualquier intervalo de longitud 2π se observarán cuatro periodos. En la figura 4.47b se utiliza la ventana $[-\pi, \pi]$ por $[-4, 4]$.

Ahora resuelva el ejercicio 5.



$[-\pi, \pi]$ por $[-4, 4]$

a)



$[-\pi, \pi]$ por $[-4, 4]$

b)

FIGURA 4.47 La gráfica de a) $y = \tan 2x$ se refleja sobre el eje x para producir la gráfica b) $y = -\tan 2x$ (ejemplo 1).

Las otras tres funciones trigonométricas (cotangente, secante y cosecante) son recíprocas de la tangente, el coseno y el seno, respectivamente. (Ésa es la razón por la que, probablemente, las calculadoras no tengan botones para esas funciones.) Estas funciones básicas son interesantes pero innecesarias, pues se puede hacer la modelación trigonométrica y la resolución de ecuaciones con las otras tres. No obstante, destinamos una breve sección a cada una de ellas en este libro.

La función cotangente

La función cotangente es la recíproca de la función tangente. Esto es,

$$\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}.$$

La gráfica de $y = \cot x$ tendrá asíntotas justo donde la función seno es cero (figura 4.48) y su valor es cero justo donde la función coseno también es cero (figura 4.49).

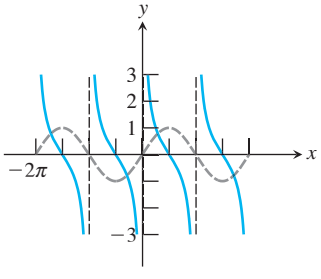


FIGURA 4.48 La función cotangente tiene asíntotas justo en donde la función seno es cero.

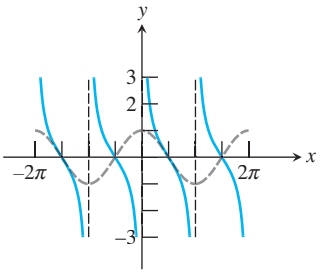
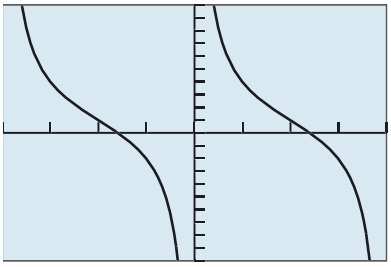


FIGURA 4.49 La función cotangente es cero justo en donde la función coseno también es cero.

CÁLCULO DE LA COTANGENTE CON LA CALCULADORA

Si su calculadora no tiene un botón "cotan", se recomienda que utilice el hecho de que la cotangente y la tangente son recíprocas. Por ejemplo, la función del ejemplo 2 puede ingresarse en la calculadora como $y = 3/\tan(x/2) + 1$ o como $y = 3(\tan(x/2))^{-1} + 1$. Recuerde que no puede ingresarlo como $y = 3\tan^{-1}(x/2) + 1$. (El exponente -1 en esa posición representa una función inversa y no una recíproca.)



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-10, 10]$

FIGURA 4.50 Dos periodos de $f(x) = 3\cot(x/2) + 1$ (ejemplo 2).

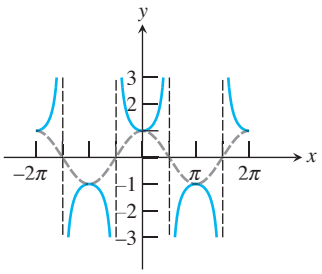


FIGURA 4.51 Las características de la función secante se infieren del hecho de que es recíproca de la función coseno.

EJEMPLO 2 Gráfica de la función cotangente

Describa la gráfica de $f(x) = 3\cot(x/2) + 1$ en términos de una función trigonométrica básica. Localice las asíntotas verticales y grafique dos periodos.

SOLUCIÓN La gráfica se obtiene de la gráfica de $y = \cot x$ pero efectuando un alargamiento horizontal con un factor de 2, un alargamiento vertical con un factor de 3 y una traslación vertical hacia arriba de 1 unidad. El alargamiento horizontal hace que el periodo de la función sea 2π (dos veces el periodo de $y = \cot x$) y las asíntotas estén en los múltiplos pares de π. En la figura 4.50 se pueden apreciar dos periodos de la gráfica de f.

Ahora resuelva el ejercicio 9.

La función secante

Las características importantes de la función secante pueden inferirse a partir del hecho de que es el recíproco de la función coseno.

Siempre que $\cos x = 1$, su función recíproca, $\sec x$, es también 1. La gráfica de la función secante tiene asíntotas donde el valor de la función coseno es cero. El periodo de la función secante es 2π, el mismo que su recíproco, la función coseno.

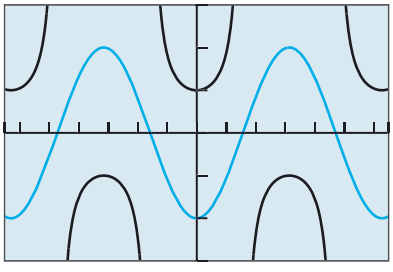
La gráfica de $y = \sec x$ se muestra junto con la gráfica de $y = \cos x$ en la figura 4.51. Un máximo local de $y = \cos x$ corresponde a un mínimo local de $y = \sec x$, mientras que mínimo local de $y = \cos x$ corresponde a un máximo local de $y = \sec x$.

EXPLORACIÓN 1 Presentación de una gráfica con una giba

La figura 4.52 muestra que las gráficas de $y = \sec x$ y $y = -2\cos x$ parecen no intersecarse nunca.

Si se alarga verticalmente la gráfica reflejada del coseno en un número suficientemente grande, ¿continuará sin intersecarse con la gráfica de la secante?, ¿o hay una valor (positivo) suficientemente grande de k tal que la gráfica de $y = \sec x$ *sí* interseque a la gráfica de $y = -k\cos x$?

1. Intente con algunos valores de k en su calculadora, ¿se intersecan las gráficas?
2. Su exploración debió haberlo conducido a conjeturar que las gráficas de $y = \sec x$ y $y = -k\cos x$ *nunca* se intersecarán para cualquier valor positivo de k. Verifique esta conjetura comprobando **algebraicamente** que la ecuación
$$-k\cos x = \sec x$$
no tiene soluciones reales cuando k es un número positivo.



$[-6.5, 6.5]$ por $[-3, 3]$

FIGURA 4.52 La gráficas de $y = \sec x$ y $y = -2\cos x$ (exploración 1).

EJEMPLO 3 Resolución algebraica de una ecuación trigonométrica

Determine el valor de x entre π y $3\pi/2$ que satisface la ecuación $\sec x = -2$.

SOLUCIÓN Construimos un triángulo de referencia en el tercer cuadrante que tenga la razón apropiada, *hip/ady*, igual a -2. Si se elige que la coordenada x sea igual a -1 y la hipotenusa mida 2, el cálculo será más sencillo (figura 4.53a). El triángulo resultante tiene ángulos de $30°-60°-90°$, que determina un ángulo de $240°$, el cual equivale a $4\pi/3$ radianes (figura 4.53b).

Por lo tanto, la respuesta es $4\pi/3$.

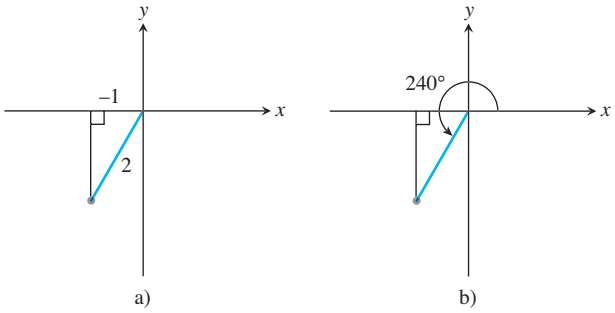


FIGURA 4.53 Un triángulo de referencia en el tercer cuadrante a) con *hip/ady* $= -2$ determina un ángulo b) de 240 grados, el cual equivale a $4\pi/3$ radianes (ejemplo 3).

Ahora resuelva el ejercicio 29.

La función cosecante

Importantes características de la función cosecante se infieren del hecho de que es recíproca de la función seno.

Siempre que $\operatorname{sen} x = 1$ su recíproco $\csc x$ también es 1. La gráfica de la función cosecante tiene asíntotas donde la función seno es igual a cero. El periodo de la función cosecante es 2π, la misma que su recíproco, la función seno.

En la figura 4.54 se nuestra la gráfica de $y = \csc x$ junto con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. Un máximo local de $y = \operatorname{sen} x$ corresponde a un mínimo local de $y = \csc x$, mientras que un mínimo local de $y = \operatorname{sen} x$ corresponde a un máximo local de $y = \csc x$.

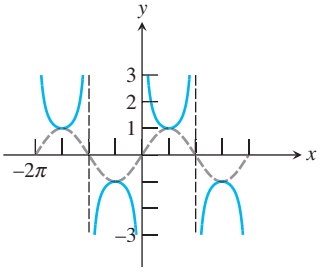


FIGURA 4.54 Las características de la función cosecante se infieren del hecho de que es recíproca de la función seno.

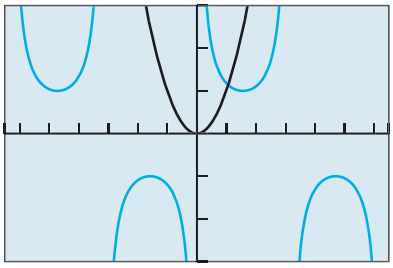
¿LA GRÁFICA DE LA COSECANTE FORMA CURVAS PARÁBOLAS?

La figura 4.55 muestra una parábola que interseca a una de la infinidad de curvas en forma de U que surgen a partir de la gráfica de la función cosecante. De hecho, la parábola interseca a todas aquellas curvas que están por arriba del eje de las x, ya que la parábola se extiende para cubrir el dominio completo de $y = x^2$, que es ¡todos los números reales! Las curvas de la función cosecante no se extienden, ya que las asíntotas las acotan. Eso significa que las curvas en forma de U de la función cosecante no son parábolas.

EJEMPLO 4 Resolución gráfica de una ecuación trigonométrica

Determine el número positivo más pequeño x tal que $x^2 = \csc x$.

SOLUCIÓN No existe alguna forma algebraica para solucionar este problema, así que se resolverá gráficamente. El punto de intersección de las gráficas $y = x^2$ y $y = \csc x$ que tiene el valor de la coordenada positiva x más pequeña se muestra en la figura 4.55. Se utilizó la graficadora para determinar que $x \approx 1.068$.



[–6.5, 6.5] por [–3, 3]

FIGURA 4.55 Una solución gráfica de una ecuación trigonométrica (ejemplo 4).

Ahora resuelva el ejercicio 39.

Terminaremos esta sección con una tabla que resume las propiedades de las seis funciones trigonométricas básicas. Debe considerarse que la "n" que aparece en muchos lugares de la tabla toma todos los valores enteros posibles: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Resumen: Funciones trigonométricas básicas

Función	Periodo	Dominio	Rango	Asíntotas	Ceros	Par/ Impar
sen x	2π	Todos los reales	$[-1, 1]$	Ninguna	$n\pi$	Impar
cos x	2π	Todos los reales	$[-1, 1]$	Ninguna	$\pi/2 + n\pi$	Par
tan x	π	$x \neq \pi/2 + n\pi$	Todos los reales	$x = \pi/2 + n\pi$	$n\pi$	Impar
cot x	π	$x \neq n\pi$	Todos los reales	$x = n\pi$	$\pi/2 + n\pi$	Impar
sec x	2π	$x \neq \pi/2 + n\pi$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$x = \pi/2 + n\pi$	Ninguna	Par
csc x	2π	$x \neq n\pi$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$x = n\pi$	Ninguna	Impar

REPASO RÁPIDO 4.5 *(Para obtener ayuda consulte las secciones 1.2, 2.6 y 4.3)*

En los ejercicios del 1 al 4 establezca el periodo de la función.

1. $y = \cos 2x$ **2.** $y = \text{sen } 3x$

3. $y = \text{sen } \frac{1}{3}x$ **4.** $y = \cos \frac{1}{2}x$

En los ejercicios del 5 al 8 encuentre los ceros y las asíntotas verticales de la función.

5. $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ **6.** $y = \dfrac{x+5}{x-1}$

7. $y = \dfrac{x+1}{(x-2)(x+2)}$ **8.** $y = \dfrac{x+2}{x(x-3)}$

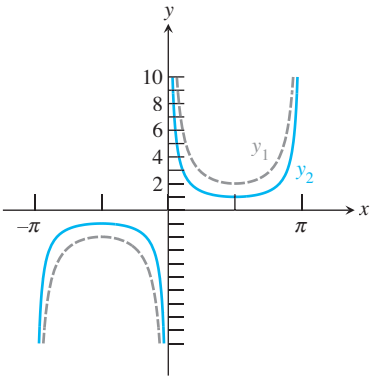
En los ejercicios 9 y 10 especifique si la función es par, impar o ninguna de las dos.

9. $y = x^2 + 4$ **10.** $y = \dfrac{1}{x}$

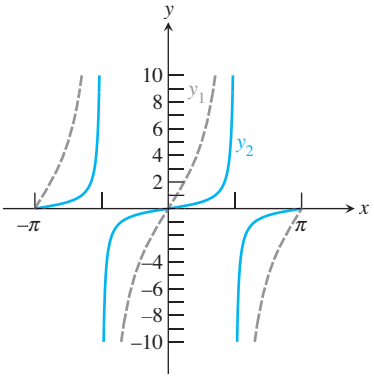
EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.5

En los ejercicios del 1 al 4 identifique la gráfica de cada función. Use su conocimiento de transformaciones y no su calculadora graficadora.

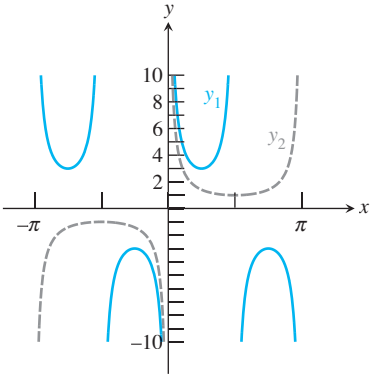
1. Se muestran las gráficas de un periodo de csc x y de 2 csc x.



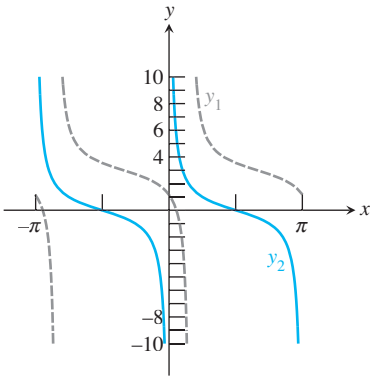
2. Se muestran las gráficas de dos periodos de 0.5 tan x y de 5 tan x.



3. Se muestran las gráficas csc x y de 3 csc $2x$.



4. Se muestran las gráficas cot x y de $\cot(x - 0.5) + 3$.



En los ejercicios del 5 al 12 describa la gráfica de la función en términos de una función trigonométrica básica. Localice las asíntotas verticales y grafique dos periodos de la función.

5. $y = \tan 2x$

6. $y = -\cot 3x$

7. $y = \sec 3x$

8. $y = \csc 2x$

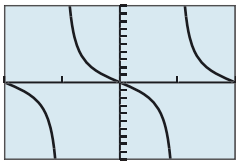
9. $y = 2 \cot 2x$

10. $y = 3 \tan (x/2)$

11. $y = \csc (x/2)$

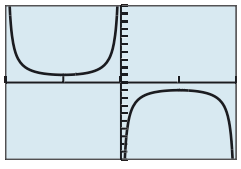
12. $y = 3 \sec 4x$

En los ejercicios del 13 al 16 relacione la función trigonométrica con su gráfica. Después proporcione los valores Xmín y Xmáx para la ventana de visualización en la que se muestra la gráfica. Utilice su conocimiento de transformaciones y no su calculadora graficadora.



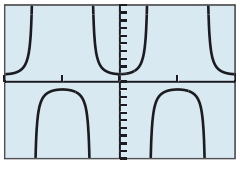
[?, ?] por [–10, 10]

a)



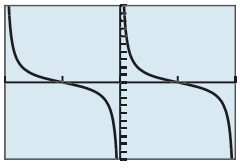
[?, ?] por [–10, 10]

b)



[?, ?] por [–10, 10]

c)



[?, ?] por [–10, 10]

d)

13. $y = -2 \tan x$

14. $y = \cot x$

15. $y = \sec 2x$

16. $y = -\csc x$

En los ejercicios del 17 al 20 analice para cada función su dominio, rango, continuidad, crecimiento o decrecimiento, simetría, acotamiento, máximos y mínimos, asíntotas y comportamiento en los extremos.

17. $f(x) = \cot x$ **18.** $f(x) = \sec x$

19. $f(x) = \csc x$ **20.** $f(x) = \tan(x/2)$

En los ejercicios del 21 al 28 describa las transformaciones requeridas para obtener la gráfica de la función dada a partir de gráficas de funciones trigonométricas básicas.

21. $y = 3 \tan x$ **22.** $y = -\tan x$

23. $y = 3 \csc x$ **24.** $y = 2 \tan x$

25. $y = -3 \cot \frac{1}{2}x$ **26.** $y = -2 \sec \frac{1}{2}x$

27. $y = -\tan \frac{\pi}{2}x + 2$ **28.** $y = 2 \tan \pi x - 2$

En los ejercicios del 29 al 34 resuelva para x en el intervalo indicado. Debe ser capaz de determinar estos números sin calculadora, utilizando triángulos de referencia en el cuadrante apropiado.

29. $\sec x = 2$, $0 \le x \le \pi/2$

30. $\csc x = 2$, $\pi/2 \le x \le \pi$

31. $\cot x = -\sqrt{3}$, $\pi/2 \le x \le \pi$

32. $\sec x = -\sqrt{2}$, $\pi \le x \le 3\pi/2$

33. $\csc x = 1$, $2\pi \le x \le 5\pi/2$

34. $\cot x = 1$, $-\pi \le x \le -\pi/2$

En los ejercicios del 35 al 40 use una calculadora para resolver para x en el intervalo indicado.

35. $\tan x = 1.3$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

36. $\sec x = 2.4$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

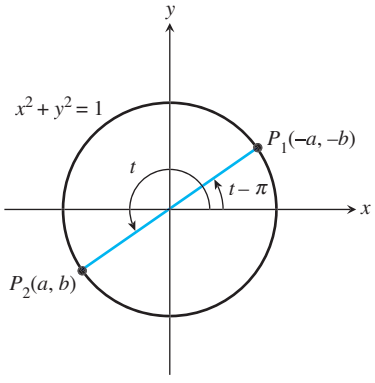
37. $\cot x = -0.6$, $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$

38. $\csc x = -1.5$, $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$

39. $\csc x = 2$, $0 \le x \le 2\pi$

40. $\tan x = 0.3$, $0 \le x \le 2\pi$

41. Escriba para aprender La figura muestra un círculo unitario y un ángulo t cuyo lado terminal está en el cuadrante III.



a) Si la coordenadas del punto P_2 son (a, b), explique por qué las coordenadas del punto P_1 sobre el círculo y el lado terminal del ángulo $t - \pi$ son $(-a, -b)$.

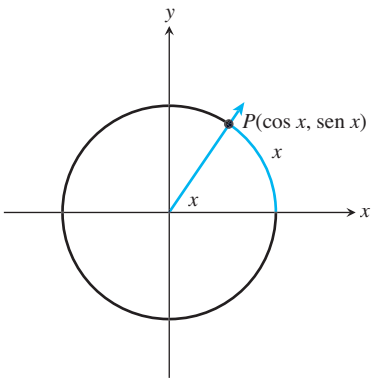
b) Explique por qué $t = \frac{b}{a}$.

c) Encuentre $\tan(t - \pi)$, y muestre que $\tan t = \tan(t - \pi)$.

d) Explique por qué el periodo de la función tangente es π.

e) Explique por qué el periodo de la función cotangente es π.

42. Escriba para aprender Explique por qué es correcto decir $y = \tan x$ es la pendiente del lado terminal del ángulo x en posición estándar. P es un punto en el círculo unitario.



43. Funciones periódicas Sea f una función periódica con periodo p. Esto es, p es el número positivo más pequeño tal que

$$f(x + p) = f(x)$$

para cualquier valor de x en el dominio de f. Muestre que el recíproco $1/f$ es periódico con periodo p.

44. Identidades Utilice el círculo unitario para dar un argumento convincente para las identidades señaladas.

a) $\text{sen}(t + \pi) = -\text{sen } t$

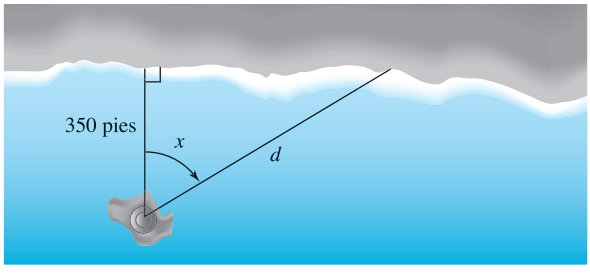
b) $\cos(t + \pi) = -\cos t$

c) Use a) y b) para mostrar que $\tan(t + \pi) = \tan t$. Explique por qué esto *no* es suficiente concluir que el periodo de la tangente es π.

45. Área cubierta por un faro El faro Bolívar se ubica en una pequeña isla a 350 pies de la orilla de tierra firme, como se muestra en la figura.

a) Exprese la distancia d como una función del ángulo x.

b) Si el ángulo mide 1.55 radianes, ¿cuánto vale d?

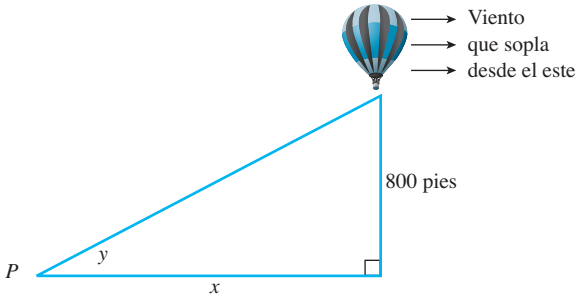


46. Globo aerostático Un globo aerostático que está sobre Albuquerque, Nuevo México, se traslada por la acción del viento desde el este a partir del punto P a una altura constante de 800 pies. El ángulo y está formado por el piso y la línea de visión desde P hacia el globo. El ángulo cambia a medida que el globo se mueve.

a) Exprese la distancia horizontal x como una función del ángulo y.

b) ¿Cuánto mide la distancia horizontal desde P cuando el ángulo mide $\pi/20$ radianes?

c) ¿A cuántos grados equivale un ángulo que mide $\pi/20$ radianes?



En los ejercicios del 47 al 50 obtenga soluciones aproximadas para las ecuaciones en el intervalo $-\pi < x < \pi$.

47. $\tan x = \csc x$

48. $\sec x = \cot x$

49. $\sec x = 5 \cos x$

50. $4 \cos x = \tan x$

Preguntas de examen estandarizado

51. Verdadero o falso La función $f(x) = \tan x$ se incrementa en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Justifique su respuesta.

52. Verdadero o falso Si $x = a$ es una asíntota de la función secante, entonces $\cot a = 0$. Justifique su respuesta.

Responda a las siguientes preguntas sin emplear calculadora.

53. Opción múltiple La gráfica de $y = \cot x$ puede obtenerse mediante un desplazamiento horizontal de la grafica de $y =$

A) $-\tan x$. **B)** $-\cot x$. **C)** $\sec x$.

D) $\tan x$. **E)** $\csc x$.

54. Opción múltiple La gráfica de $y = \sec x$ nunca se interseca con la gráfica de $y =$

A) x. **B)** x^2. **C)** $\csc x$.

D) $\cos x$. **E)** $\operatorname{sen} x$.

55. Opción múltiple Si $k \neq 0$, ¿cuál es el rango de la función $y = k \csc x$?

A) $[-k, k]$ **B)** $(-k, k)$

C) $(-\infty, -k) \cup (k, \infty)$ **D)** $(-\infty, -k] \cup [k, \infty)$

E) $(-\infty, -1/k] \cup [1/k, \infty)$

56. Opción múltiple La gráfica de $y = \csc x$ tiene el mismo conjunto de asíntotas que la gráfica de $y =$

A) $\operatorname{sen} x$. **B)** $\tan x$. **C)** $\cot x$.

D) $\sec x$. **E)** $\csc 2x$.

Exploraciones

En los ejercicios 57 y 58 grafique f y g en la ventana de visualización $[-\pi, \pi]$ por $[-10, 10]$. Estime valores en el intervalo $[-\pi, \pi]$ para los que $f > g$.

57. $f(x) = 5 \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cot x$

58. $f(x) = -\tan x$ y $g(x) = \csc x$

59. Escriba para aprender Grafique la función $f(x) = -\cot x$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Explique por qué es correcto decir que f es creciente en el intervalo $(0, \pi)$, pero es incorrecto decir que f es creciente en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

60. Escriba para aprender Grafique la función $f(x) = -\sec x$ y

$$g(x) = \frac{1}{x - (\pi/2)}$$

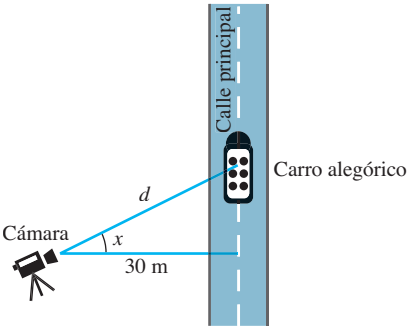
simultáneamente en la ventana de visualización $[0, \pi]$ por $[-10, 10]$. ¿Considera que las funciones f y g son equivalentes?

61. Escriba $\csc x$ como una traslación horizontal de $\sec x$.

62. Escriba $\cot x$ como una reflexión de una traslación horizontal de $\tan x$ con respecto al eje x.

Ampliación de las ideas

63. Actividad en equipo Cobertura de televisión Una cámara de televisión está sobre una plataforma de 30 metros desde el punto de High Street por donde pasará el desfile Worthington Memorial Day. Exprese la distancia d desde la cámara a un carro alegórico del desfile como una función del ángulo x, y grafique la función en el intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.



64. ¿Qué hay en un nombre? La palabra *seno* viene de la palabra latina *sinus*, que significa "bahía" o "cueva". Se introdujo al lenguaje con un error (algunos lo atribuyen a Gerardo de Cremona y otros a Robert de Chester) pues al traducirlo se empleó equivocadamente la palabra árabe "jiba" (cuerda) como si fuera "jaib" (bahía). Esto se debió a que los árabes abreviaban los términos técnicos, como lo hacemos actualmente. Fue como si alguien que no estaba familiarizado con el término técnico "cosecante" hubiera traducido su abreviatura, "csc", como "cascada".

Los nombres de las otras funciones trigonométricas también pueden explicarse.

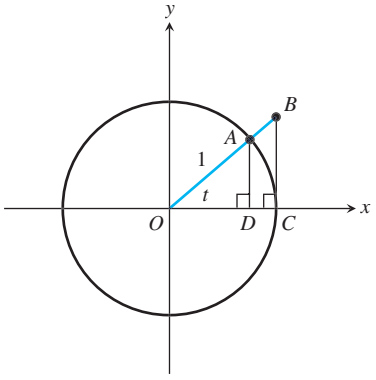
a) *Coseno* significa "*seno* del complemento". Explique por qué es correcto ese nombre para el coseno.

b) En la figura siguiente, BC es perpendicular a OC, el cual es el radio del círculo unitario. Por un teorema de geometría, BC es tangente al círculo. OB es parte de una secante que interseca al círculo unitario en el punto A. El segmento OB se encuentra colocado a lo largo del lado final de un ángulo de t radianes en posición estándar. Escriba las coordenadas de A como función de t.

c) Use triángulos semejantes para encontrar la longitud de BC expresada como una función trigonométrica de t.

d) Use triángulos semejantes para encontrar la longitud de OB expresada como una función trigonométrica de t.

e) Use los resultados de los incisos a), b) y c) para explicar de dónde provienen los nombres "tangente, cotangente, secante" y "cosecante".



65. Acción capilar Una película de líquido en un tubo delgado (capilar) tiene una tensión superficial γ (gamma) equivalente a

$$\gamma = \frac{1}{2} h\rho g r \sec \phi,$$

en donde h es la altura que alcanza el líquido en el tubo, ρ (rho) es la densidad del líquido, $g = 9.8$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad, r es el radio del tubo y ϕ (fi) es el ángulo del contacto entre el tubo y la superficie del líquido. La sangre tiene una tensión superficial de 0.058 N/m (newton por metro) y una densidad de 1,050 kg/m^3. Suponga que la sangre alcanza una altura de 1.5 m en un vaso sanguíneo de radio 4.7×10^{-6} m. ¿Cuál es el ángulo de contacto entre el vaso sanguíneo y la superficie de la sangre? (1 N = 1 (kg • m)/sec^2.

66. Ajuste de curva Una investigadora tiene razones para creer que los datos de la tabla que se muestra a continuación pueden describirse mejor mediante un modelo algebraico en el que se utilice la función secante:

$$y = a \sec (bx).$$

Desafortunadamente, su calculadora sólo puede hacer cálculos con la función seno. Se da cuenta de que pueden ayudarle dos equivalencias:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a \sec (bx)} = \frac{1}{a} \cos (bx)$$

y

$$\cos (bx) = \operatorname{sen}\left(bx + \frac{\pi}{2}\right).$$

a) Use estas dos equivalencia para mostrar que

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} \operatorname{sen}\left(bx + \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Guarde los valores de x de la tabla en L1 en su calculadora y los valores de y en L2. Guarde los valores *recíprocos* de y en L3. Posteriormente, haga una regresión de seno para L3 $(1/y)$ como una función de L1(x). Escriba la ecuación de regresión.

c) Use la ecuación de regresión de b) para determinar los valores de a y b.

d) Escriba el modelo secante: $y = a \sec(bx)$. ¿La curva se ajusta al diagrama de dispersión de (L1, L2)?

x	1	2	3	4
y	5.0703	5.2912	5.6975	6.3622

x	5	6	7	8
y	7.4359	9.2541	12.716	21.255

4.6 Gráficas de funciones trigonométricas compuestas

Aprenderá acerca de...

- La combinación de funciones algebraicas y trigonométricas
- Las sumas y diferencias de sinusoidales
- La oscilación amortiguada

. . . porque

La composición de funciones amplía la habilidad de modelar fenómenos periódicos como los latidos del corazón y las ondas sonoras.

Combinación de funciones algebraicas y trigonométricas

Un tema de este libro ha sido "familia de funciones". Hemos estudiado las funciones polinomiales, funciones exponenciales, funciones logarítmicas y funciones racionales (por nombrar algunas), y en este capítulo hemos estudiado las funciones trigonométricas. Ahora consideraremos las funciones trigonométricas que se suman, se multiplican y se combinan con las funciones de esas otras familias.

La notable propiedad que distingue a las funciones trigonométricas de otras es la periodicidad que ya se ha estudiado. El ejemplo 1 muestra que cuando una función trigonométrica se combina con una polinomial, la función resultante puede ser o no periódica.

EJEMPLO 1 Combinación de la función seno con x^2

Grafique cada una de las siguientes funciones para $-2\pi \le x \le 2\pi$, ajustando el rango como considere necesario. ¿Cuál de las siguientes funciones parece ser periódica?

a) $y = \operatorname{sen} x + x^2$

b) $y = x^2 \operatorname{sen} x$

c) $y = (\operatorname{sen} x)^2$

d) $y = \operatorname{sen}(x^2)$

SOLUCIÓN En la figura 4.56, en la página siguiente, mostramos las gráficas y sus ventanas. Sólo la gráfica de $y = (\operatorname{sen} x)^2$ presenta un comportamiento periódico en el intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$ (puede ampliar la porción de la función a graficar para tener evidencia de que es la única función periódica de las cuatro).

Ahora resuelva el ejercicio 5.

EJEMPLO 2 Verificación algebraica de la periodicidad

Verifique algebraicamente que $f(x) = (\operatorname{sen} x)^2$ es periódica y determine su periodo gráficamente.

SOLUCIÓN Utilizamos la propiedad de que el periodo de la función seno es 2π, esto es, $\operatorname{sen}(x + 2p) = \operatorname{sen}(x)$ para todo x. Se sigue que

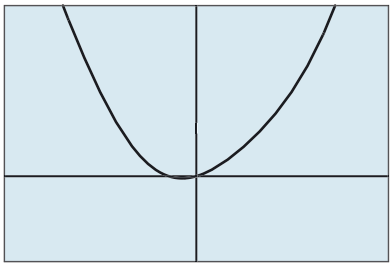
$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= (\operatorname{sen}(x + 2\pi))^2 \\ &= (\operatorname{sen}(x))^2 \quad \text{Por la periodicidad de seno} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Entonces $f(x)$ también es periódica, con algún periodo que divide a 2π. La gráfica en la figura 4.56 c) en la siguiente página muestra que el periodo en realidad es π.

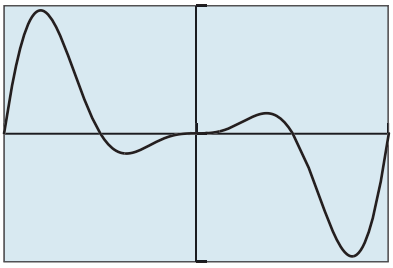
Ahora resuelva el ejercicio 9.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

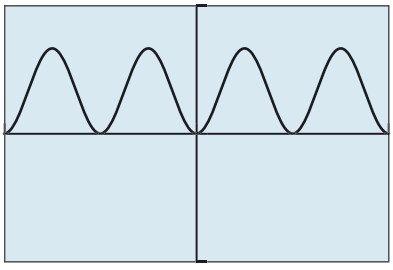
El ejemplo 3 presenta una notación abreviada para las potencias de las funciones trigonométricas: $(\operatorname{sen} \theta)^n$ puede escribirse como $\operatorname{sen}^n \theta$. (Precaución: Su calculadora tal vez no reconozca esta notación abreviada.)



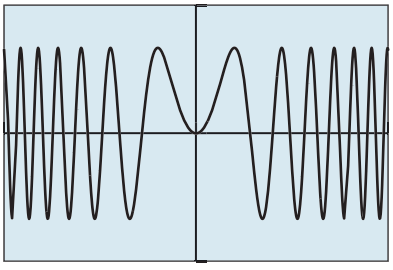
[–2π, 2π] por [–10, 20]
a)



[–2π, 2π] por [–25, 25]
b)



[–2π, 2π] por [–1.5, 1.5]
c)



[–2π, 2π] por [–1.5, 1.5]
d)

FIGURA 4.56 Las gráficas de las cuatro funciones del ejemplo 1. Solamente la gráfica c) presenta un comportamiento periódico en el intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$.

EJEMPLO 3 Composición de $y = \text{sen } x$ con $y = x^3$

Pruebe algebraicamente que $f(x) = \text{sen}^3 x$ es periódica y encuentre el periodo gráficamente. Especifique el dominio y el rango, y esboce una gráfica que muestre dos periodos.

SOLUCIÓN Para probar que $f(x) = \text{sen}^3 x$ es periódico, se muestra que $f(x + 2\pi) = f(x)$ para toda x.

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \text{sen}^3(x + 2\pi) \\ &= (\text{sen}(x + 2\pi))^3 && \text{Cambio de notación.} \\ &= (\text{sen}(x))^3 && \text{Por la periodicidad de seno.} \\ &= \text{sen}^3(x) && \text{Cambio de notación.} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Así que $f(x)$ es periódica con periodo que divide a 2π. Con la gráfica de la función en el intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$ (figura 4.57), observamos que el periodo deber ser 2π.

Ya que ambas funciones que se componen en este ejemplo tienen dominio $(-\infty, \infty)$, el dominio de f es también $(-\infty, \infty)$. Debido a que elevar al cubo todos los números en el intervalo $[-1, 1]$ da como resultado todos los números en el intervalo $[-1, 1]$, el rango es $[-1, 1]$ (como queda respaldado con la gráfica).

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Comparando las gráficas de $y = \text{sen}^3 x$ y $y = \text{sen } x$ en el mismo rango (figura 4.58), vemos que las dos funciones tiene los mismos ceros y puntos extremos, pero por otro lado, la gráfica de $y = \text{sen}^3 x$ está más cerca del eje de las x que la gráfica de $y = \text{sen } x$. Esto se debe a que $|y^3| < |y|$ siempre que y esté entre -1 y 1. De hecho, las potencias impares más grandes de sen x producen gráficas que se estrechan más y más, pero siempre con los mismos ceros y los puntos extremos.

El valor absoluto de una función periódica es también una función periódica. Consideramos dos de estas funciones en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Análisis de funciones periódicas no negativas

Encuentre el dominio, el rango y el periodo de cada una de las siguientes funciones. Esboce una grafica que muestre cuatro periodos.

a) $f(x) = |\tan x|$

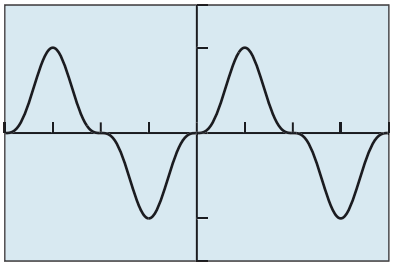
b) $g(x) = |\text{sen } x|$

SOLUCIÓN

a) Siempre que tan x esté definida, también lo estará $|\tan x|$. Por lo tanto, el dominio de f es el mismo que el dominio de la función tangente, esto es, todos los números reales excepto $\pi/2 + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Debido a que $f(x) = |\tan x| \ge 0$ y el rango de tan x es $(-\infty, \infty)$, el rango de f es $[0, \infty)$. El periodo de f, como el de $y = \tan x$, es π. La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 4.59.

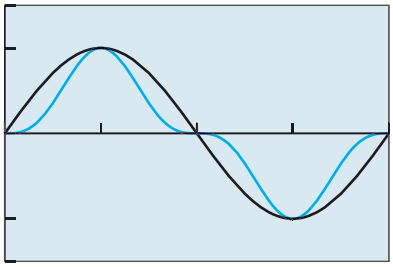
b) Siempre que sen x esté definido, también lo estará $|\text{sen } x|$. Por lo tanto, el dominio de g es el mismo que el dominio de la función seno, esto es, todos los números reales. Debido a que $g(x) = |\text{sen } x| \ge 0$ y el rango de sen x es $[-1, 1]$, el rango de g es $[0, 1]$.

continúa



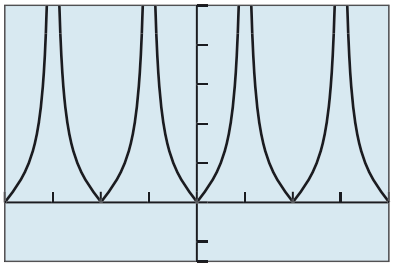
[–2π, 2π] por [–1.5, 1.5]

FIGURA 4.57 La gráfica de $f(x) = \text{sen}^3 x$ (ejemplo 3).



[0, 2π] por [−1.5, 1.5]

FIGURA 4.58 La gráfica sugiere que $|\text{sen}^3 x| \leq |\text{sen } x|$.



[–2π, 2π] por [–1.5, 5]

FIGURA 4.59 $f(x) = |\tan x|$ tiene el mismo periodo de $y = \tan x$ (ejemplo 4 a).

El periodo de g es únicamente la mitad del periodo de $y = \text{sen } x$, como puede apreciarse en la gráfica. Las secciones negativas de la curva seno debajo del eje de las x se reflejan sobre el de las x, en las secciones positivas. La gráfica de $y = g(x)$ se muestra en la figura 4.60, en la siguiente página.

Ahora resuelva el ejercicio 15.

Cuando una sinusoidal se suma a una función lineal (no constante), el resultado *no* es periódico. La gráfica repite su *forma* en intervalos regulares, pero la función tiene diferentes valores en esos intervalos. La gráfica toma forma de una curva oscilante entre dos líneas paralelas, como puede apreciarse en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Suma de una sinusoidal y una función lineal

La gráfica de $f(x) = 0.5x + \text{sen } x$ oscila entre dos líneas paralelas (figura 4.61). ¿Cuáles son las ecuaciones de las dos rectas?

SOLUCIÓN Como sen x oscila entre -1 y 1, $f(x)$ oscila entre $0.5x - 1$ y $0.5x + 1$. Por lo tanto, las dos línea son $y = 0.5x - 1$ y $y = 0.5x + 1$. La gráfica de las dos rectas y de $f(x)$ en la misma ventana proporciona un respaldo gráfico. Por supuesto, la gráfica debe parecerse a la figura 4.61, en la siguiente página, si sus líneas son correctas.

Ahora resuelva el ejercicio 19.

Sumas y diferencias de sinusoidales

La sección 4.4 lo introdujo al tema de las sinusoidales, las cuales pueden presentarse en la forma

$$y = a \text{ sen } (b(x - h)) + k$$

y por eso tiene las misma forma de una curva de la función seno.

Con las sinusoidales pueden modelarse una variedad de fenómenos físicos y sociales como las ondas sonoras, el voltaje de una corriente eléctrica alterna, la velocidad del aire del ciclo respiratorio humano, etcétera. En algunas ocasiones esos fenómenos interactúan en forma aditiva. Por ejemplo, si y_1 modela el sonido de un diapasón y y_2 modela el sonido de un segundo diapasón, entonces $y_1 + y_2$ modela el sonido cuando ambos funcionan simultáneamente. Entonces es necesario saber si las sumas y las diferencias de la sinusoidales son también sinusoidales.

EXPLORACIÓN 1 **Investigación acerca de las sinusoidales**

Grafique estas funciones, una a la vez en la ventana de visualización $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$. ¿Cuáles parecen ser sinusoidales?

$y = 3 \text{ sen } x + 2 \cos x$ $\qquad$ $y = 2 \text{ sen } x - 3 \cos x$

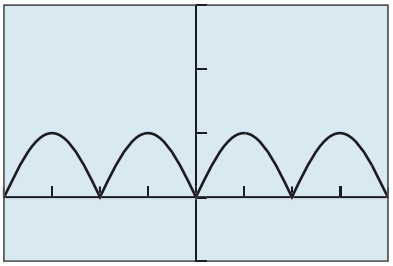
$y = 2 \text{ sen } 3x - 4 \cos 2x$ $\qquad$ $y = 2 \text{ sen } (5x + 1) - 5 \cos 5x$

$y = \cos\left(\dfrac{7x - 2}{5}\right) + \text{sen}\left(\dfrac{7x}{5}\right)$ $\qquad$ $y = 3 \cos 2x + 2 \text{ sen } 7x$

¿Qué relaciones entre las funciones seno y coseno aseguran que su suma o su diferencia sea una sinusoidal? Verifique su respuesta con una calculadora graficadora mediante la construcción de sus propios ejemplos.

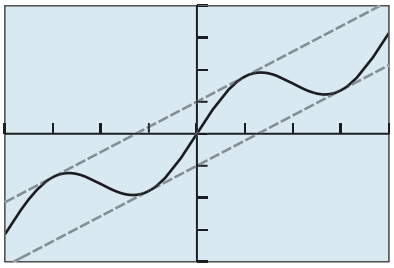
UNA EXCEPCIÓN MENOR

Una sinusoidal y su opuesto exacto tiene el mismo periodo y su suma es la función cero, la cual no se considera una sinusoidal.



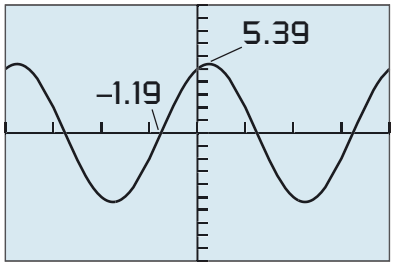
[–2π, 2π] por [–1, 3]

FIGURA 4.60 $g(x) = |\text{sen } x|$ tiene la mitad del periodo de $y = \text{sen } x$ (ejemplo 4 b).



[–2π, 2π] por [–4, 4]

FIGURA 4.61 La gráfica de $f(x) = 0.5x + \text{sen } x$ oscila entre las rectas $y = 0.5x + 1$ y $y = 0.5x - 1$. Aunque las ondas repiten su forma, la función no es periódica (ejemplo 5).



[–2π, 2π] por [–10, 10]

FIGURA 4.62 La suma de dos sinusoidales: $f(x) = 2 \text{ sen } x + 5 \cos x$ (ejemplo 7).

La regla es sencilla: las sumas y las diferencias de sinusoidales con el mismo periodo son también sinusoidales. A continuación se describe esa regla de manera más explicita.

Suma de funciones que da como resultado una función sinusoidal

Si $y_1 = a_1 \text{ sen } (b(x - h_1))$ y $y_2 = a_2 \cos (b(x - h_2))$, entonces

$$y_1 + y_2 = a_1 \text{ sen } (b(x - h_1)) + a_2 \cos (b(x - h_2))$$

es una sinusoidal con periodo $2\pi/|\, b \,|$.

Para que la suma sea una sinusoidal, las dos sinusoidales que se suman deben tener el mismo periodo y, de esta manera, la función resultante también tiene ese periodo. Aunque la regla del recuadro anterior está expresada en términos de una función seno sumada a una función coseno, el hecho de que cada función coseno es una traslación de una función seno (y viceversa) hace que la regla sea igualmente aplicable a la suma de dos funciones seno o la suma de dos funciones coseno. Si tienen el mismo periodo, su suma es una sinusoidal.

EJEMPLO 6 Identificación de una sinusoidal

Determine si cada una de las siguientes funciones es o no una sinusoidal.

a) $f(x) = 5 \cos x + 3 \text{ sen } x$

b) $f(x) = \cos 5x + \text{sen } 3x$

c) $f(x) = 2 \cos 3x - 3 \cos 2x$

d) $f(x) = a \cos\left(\frac{3x}{7}\right) - b \cos\left(\frac{3x}{7}\right) + c \text{ sen}\left(\frac{3x}{7}\right)$

SOLUCIÓN

a) Sí, ya que las dos funciones que se suman tienen periodo 2π.

b) No, puesto que $\cos 5x$ tiene periodo $2\pi/5$ y $\text{sen } 3x$ tiene periodo $2\pi/3$.

c) No, debido a que $2 \cos 3x$ tiene periodo $2\pi/3$ y $3 \cos 2x$ tiene periodo π.

d) Sí, porque las tres funciones que se suman tienen periodo $14\pi/3$. (Las primeras dos funciones que se suman dan como resultado una sinusoidal con el mismo periodo que la tercera por lo que, al añadirse la tercera, se sigue generando una sinusoidal.)

Ahora resuelva el ejercicio 25.

EJEMPLO 7 Expresión de la suma de sinusoidales como una sinusoidal

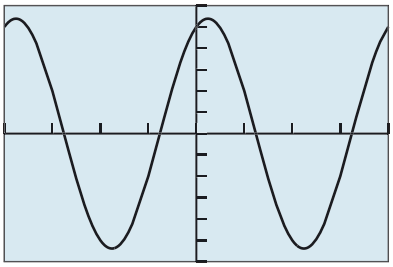
Sea $f(x) = 2 \text{ sen } x + 5 \cos x$. A partir de la explicación anterior, debe concluir que $f(x)$ es una sinusoidal.

a) Encuentre el periodo de f.

b) Estime la amplitud y el corrimiento de fase gráficamente (al centésimo más cercano).

c) Proporcione una sinusoidal $a \text{ sen}(b(x - h))$ que se aproxime a $f(x)$.

continúa



[–2π, 2π] por [–6, 6]

FIGURA 4.63 Las gráficas de $y = 2 \operatorname{sen} x + 5 \cos x$ y $y = 5.39 \operatorname{sen}(x + 1.19)$ parecen ser idénticas (ejemplo 7).

SOLUCIÓN

a) El periodo de f es el mismo que el periodo de sen x y cos x, 2π.

Resuelva gráficamente

b) En el siguiente capítulo aprenderemos un método algebraico para determinar la amplitud y el corrimiento de fase, pero por ahora, encontraremos esta información gráficamente. La figura 4.62 sugiere que f es una sinusoidal. Esto es, para algunos a y b,

$$2 \operatorname{sen} x + 5 \cos x = a \operatorname{sen}(x - h).$$

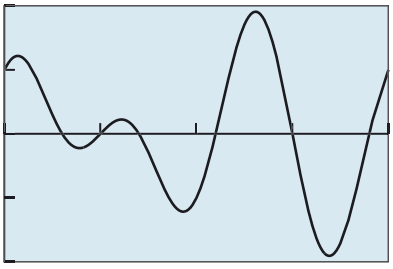
El *valor máximo*, redondeado al centésimo más cercano, es 5.39, entonces la amplitud de f es aproximadamente 5.39. La *intersección* x más cercana a $x = 0$, redondeado al centésimo más cercano, es -1.19, por lo que el corrimiento de fase de la función seno es -1.19. Concluimos que

$$f(x) = a \operatorname{sen}(x + h) \approx 5.39 \operatorname{sen}(x + 1.19).$$

c) Respaldamos gráficamente nuestra respuesta al mostrar que las gráficas de $y = 2 \operatorname{sen} x + 5 \cos x$ y $y = 5.39 \operatorname{sen}(x + 1.19)$ son prácticamente idénticas (figura 4.63).

Ahora resuelva el ejercicio 29.

Aunque la suma de dos sinusoidales con diferentes periodos no da una sinusoidal, a menudo es una función periódica. Hallar el periodo de una suma de funciones periódicas puede ser engañoso. En este caso es útil tener en mente la siguiente propiedad: si f es periódica, y $f(x + s) = f(x)$ para toda x en el dominio de f, entonces el periodo de f es divisible exactamente entre s. En otras palabras, s es el periodo mismo o un múltiplo del periodo.



[0, 2π] por [–2, 2]

FIGURA 4.64 Un periodo de $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$ (ejemplo 8).

EJEMPLO 8 Muestra de una función periódica que no es sinusoidal

Muestre que $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$ es periódica pero no sinusoidal. Grafique un periodo.

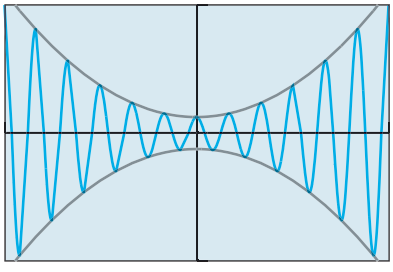
SOLUCIÓN Debido a que sen $2x$ y cos $3x$ tienen periodos diferentes, la suma no es una sinusoidal. A continuación se muestra que 2π es un candidato para ser el periodo de f, esto es $f(x + 2\pi) = f(x)$ para toda x.

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \operatorname{sen}(2(x + 2\pi)) + \cos(3(x + 2\pi)) \\ &= \operatorname{sen}(2x + 4\pi) + \cos(3x + 6\pi) \\ &= \operatorname{sen} 2x + \cos 3x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Esto significa que 2π es el periodo de f o que el periodo es un número exacto que divide a 2π. La figura 4.64 sugiere que el periodo no es más pequeño que 2π, por lo que debe ser 2π.

La gráfica muestra que en verdad f no es una sinusoidal.

Ahora resuelva el ejercicio 35.

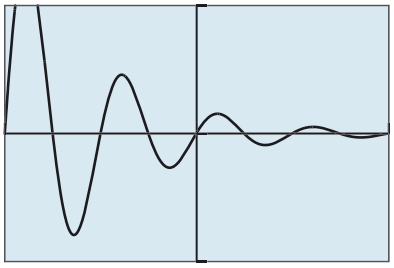


[–2π, 2π] por [–40, 40]

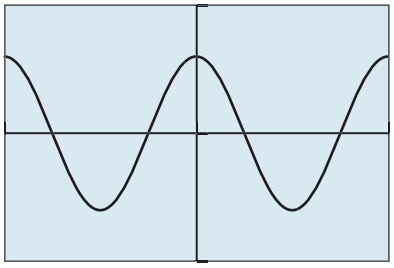
FIGURA 4.65 La gráfica de $y = (x^2 + 5)\cos 6x$ muestra una oscilación **amortiguada**.

Oscilación amortiguada

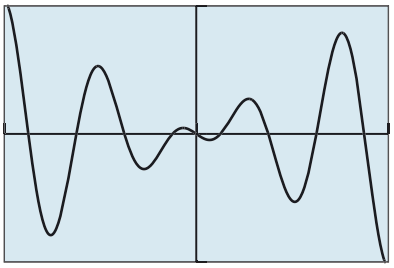
Debido a que los valores de sen bt y cos bt oscilan entre -1 y 1, algo interesante sucede cuando cualquiera de esas funciones se multiplica por otra función. Por ejemplo, considere la función $y = (x^2 + 5)\cos 6x$, graficada en la figura 4.65. La gráfica en azul de la función oscila entre las gráficas en gris de $y = x^2 + 5$ y $y = -(x^2 + 5)$. El efecto de "comprimir" puede ser el origen de lo que se llama **amortiguamiento**.



$[-\pi, \pi]$ por $[-5, 5]$
a)



$[-\pi, \pi]$ por $[-5, 5]$
b)



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-12, 12]$
c)

FIGURA 4.66 Las gráficas de las funciones a), b) y c) del ejemplo 9. La onda de la gráfica b) no presenta oscilación amortiguada.

Oscilación amortiguada

La gráfica de $y = f(x)$ cos bx o $(y = f(x)$ sen $bx)$ oscila entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = -f(x)$. Cuando esto reduce la amplitud de la onda, se le llama **oscilación amortiguada**. Al factor $f(x)$ se le conoce como **factor de amortiguamiento**.

EJEMPLO 9 Identificación de oscilación amortiguada

Para cada una de las siguientes funciones determine si la gráfica muestra una oscilación amortiguada. Si es así, identifique el factor de amortiguamiento y diga dónde ocurre el amortiguamiento.

a) $f(x) = 2^{-x}$ sen $4x$

b) $f(x) = 3$ cos $2x$

c) $f(x) = -2x$ cos $2x$

SOLUCIÓN Las gráficas se muestran en la figura 4.66.

a) Es una oscilación amortiguada. El factor de amortiguamiento es 2^{-x} y el amortiguamiento ocurre cuando $x \to \infty$.

b) Esta onda tiene una amplitud constante de 3. No hay amortiguamiento.

c) Es una oscilación amortiguada. El factor de amortiguamiento es $-2x$ y el amortiguamiento ocurre cuando $x \to 0$.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

EJEMPLO 10 Oscilación amortiguada en un resorte

En la clase de física del Dr. Sánchez se recolectaron datos de un planeador que oscila entre dos resortes. Los alumnos determinaron a partir de los datos que la ecuación

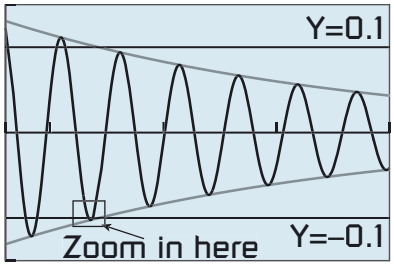
$$y = 0.22e^{-0.065t} \cos 2.4t$$

modela el desplazamiento y de los resortes respecto de su posición original como una función del tiempo t.

a) Identifique el factor de amortiguamiento y mencione dónde ocurre el amortiguamiento.

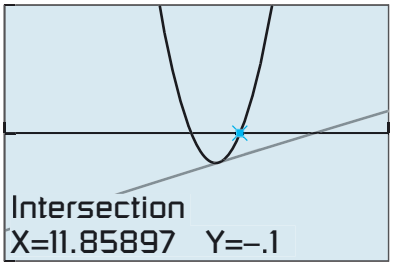
b) Aproximadamente, ¿cuánto tiempo toma para que el resorte se amortigüe, de modo que $-0.1 \leq y \leq 0.1$?

SOLUCIÓN La gráfica se muestra en la figura 4.67.



[8, 25] por [–0.15, 0.15]

a)



[11, 12.4] por [–0.11, –0.09]

b)

FIGURA 4.68 La oscilación amortiguada del ejemplo 10 es, finalmente, menor que 0.1 en cualquier dirección.

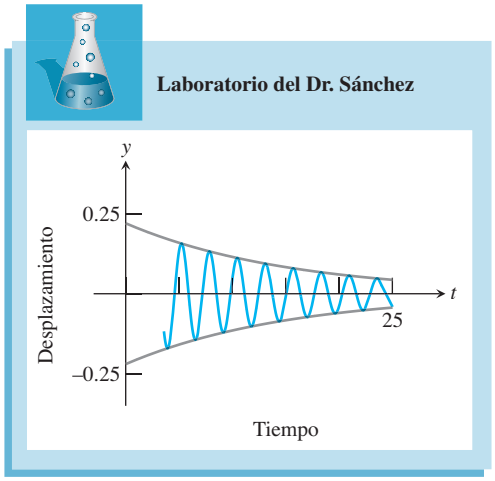


FIGURA 4.67 Oscilación amortiguada en el laboratorio de Física (ejemplo 10).

a) El factor de amortiguamiento es $0.22e^{-0.065t}$. El amortiguamiento ocurre cuando $t \to \infty$.

b) Queremos determinar en qué momento la curva $y = 0.22e^{-0.065t} \cos 2.4t$ queda comprendida completamente entre las líneas $y = -0.1$ y $y = 0.1$. Mediante un acercamiento en la región indicada en la figura 4.68a y usando métodos de la graficadora, encontramos que aproximadamente pasan 11.86 segundos para que la gráfica de $y = 0.22e^{-0.065t} \cos 2.4t$ quede completamente entre $y = -0.1$ y $y = 0.1$ (figura 4.68b).

Ahora resuelva el ejercicio 71.

REPASO RÁPIDO 4.6 *(Para obtener ayuda consulte las secciones 1.2 y 1.4)*

En los ejercicios del 1 al 6 determine el dominio y el rango de la función.

1. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x$

2. $f(x) = -2 \cos 3x$

3. $f(x) = \sqrt{x-1}$

4. $f(x) = \sqrt{x}$

5. $f(x) = |x| - 2$

6. $f(x) = |x+2| + 1$

En los ejercicios 7 y 8 describa el comportamiento final de la función, esto es, el comportamiento cuando $|x| \to \infty$.

7. $f(x) = 5e^{-2x}$

8. $f(x) = -0.2(5^{-0.1x})$

En los ejercicios 9 y 10 forme las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$. Especifique el dominio de cada función.

9. $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \sqrt{x}$

10. $f(x) = x^2$ y $g(x) = \cos x$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.6

En los ejercicios del 1 al 8 grafique la función para $-2\pi \le x \le 2\pi$ ajustando la ventana vertical tanto como sea necesario. Mencione si la función parece ser periódica.

1. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^2$

2. $f(x) = (1.5 \cos x)^2$

3. $f(x) = x^2 + 2 \operatorname{sen} x$

4. $f(x) = x^2 - 2 \cos x$

5. $f(x) = x \cos x$

6. $f(x) = x^2 \cos x$

7. $f(x) = (\operatorname{sen} x + 1)^3$

8. $f(x) = (2 \cos x - 4)^2$

En los ejercicios del 9 al 12 verifique algebraicamente que la función es periódica y determine gráficamente su periodo. Esboce una gráfica en la que se puedan apreciar dos periodos.

9. $f(x) = \cos^2 x$

10. $f(x) = \cos^3 x$

11. $f(x) = \sqrt{\cos^2 x}$

12. $f(x) = |\cos^3 x|$

En los ejercicios del 13 al 18 establezca el dominio y el rango de la función y grafique cuatro periodos.

13. $y = \cos^2 x$ **14.** $y = |\cos x|$

15. $y = |\cot x|$ **16.** $y = \cos|x|$

17. $y = -\tan^2 x$ **18.** $y = -\operatorname{sen}^2 x$

La gráfica de cada función en los ejercicios del 19 al 22 oscila entre dos rectas paralelas, como en el ejemplo 5. Encuentre las ecuaciones de las dos líneas y grafíquelas, así como a la función en la misma ventana de visualización.

19. $y = 2x + \cos x$ **20.** $y = 1 - 0.5x + \cos 2x$

21. $y = 2 - 0.3x + \cos x$ **22.** $y = 1 + x + \cos 3x$

En los ejercicios del 23 al 28 determine si $f(x)$ es una sinusoidal.

23. $f(x) = \operatorname{sen} x - 3\cos x$ **24.** $f(x) = 4\cos x + 2\operatorname{sen} x$

25. $f(x) = 2\cos \pi x + \operatorname{sen} \pi x$ **26.** $f(x) = 2\operatorname{sen} x - \tan x$

27. $f(x) = 3\operatorname{sen} 2x - 5\cos x$ **28.** $f(x) = \pi \operatorname{sen} 3x - 4\pi \operatorname{sen} 2x$

En los ejercicios del 29 al 34 encuentre a, b y h, tal que $f(x) \approx a \operatorname{sen}(b(x - h))$.

29. $f(x) = 2\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x$ **30.** $f(x) = \cos 3x + 2\operatorname{sen} 3x$

31. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x - 2\cos \pi x$ **32.** $f(x) = \cos 2\pi x + 3\operatorname{sen} 2\pi x$

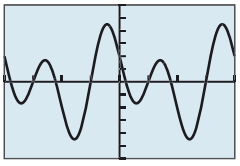
33. $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} x$ **34.** $f(x) = 3\operatorname{sen} 2x - \cos 2x$

En los ejercicios del 35 al 38, la función es periódica pero no es una sinusoidal. Encuentre el periodo gráficamente y esboce una gráfica que muestre un periodo.

35. $y = 2\cos x + \cos 3x$ **36.** $y = 2\operatorname{sen} 2x + \cos 3x$

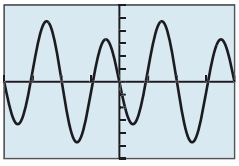
37. $y = \cos 3x - 4\operatorname{sen} 2x$ **38.** $y = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 5x$

En los ejercicios del 39 al 42 relacione cada función con su gráfica correspondiente.



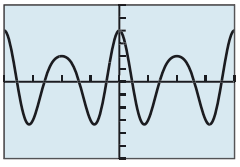
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$

a)



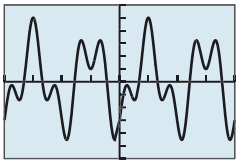
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$

b)



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$

c)



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$

d)

39. $y = 2\cos x - 3\operatorname{sen} 2x$ **40.** $y = 2\operatorname{sen} 5x - 3\cos 2x$

41. $y = 3\cos 2x + \cos 3x$ **42.** $y = \operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen} 2x$

En los ejercicios del 43 al 48 indique si la función exhibe oscilación amortiguada. Si es así, identifique el factor de amortiguamiento y si ocurre en $x \to 0$ o cuando $x \to \infty$.

43. $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} 3x$ **44.** $f(x) = x \operatorname{sen} 4x$

45. $f(x) = \sqrt{5}\cos 1.2x$ **46.** $f(x) = \pi^2 \cos \pi x$

47. $f(x) = x^3 \operatorname{sen} 5x$ **48.** $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{3}\right)$

En los ejercicios del 49 al 52 grafique f y su factor de amortiguamiento en la misma ventana de visualización. Describa el comportamiento de la función f para $x > 0$. ¿Cómo es el comportamiento final de f?

49. $f(x) = 1.2^{-x}\cos 2x$ **50.** $f(x) = 2^{-x}\operatorname{sen} 4x$

51. $f(x) = x^{-1}\operatorname{sen} 3x$ **52.** $f(x) = e^{-x}\cos 3x$

En los ejercicios del 53 al 56 encuentre el periodo y grafique dos periodos de la función.

53. $y = \operatorname{sen} 3x + 2\cos 2x$

54. $y = 4\cos 2x - 2\cos(3x - 1)$

55. $y = 2\operatorname{sen}(3x + 1) - \cos(5x - 1)$

56. $y = 3\cos(2x - 1) - 4\operatorname{sen}(3x - 2)$

En los ejercicios del 57 al 62 grafique la función en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$. Determine si la función es periódica y, si es así, mencione cuál es el periodo.

57. $f(x) = \left|\operatorname{sen} \frac{1}{2}x\right| + 2$ **58.** $f(x) = 3x + 4\operatorname{sen} 2x$

59. $f(x) = x - \cos x$ **60.** $f(x) = x + \operatorname{sen} 2x$

61. $f(x) = \frac{1}{2}x + \cos 2x$ **62.** $f(x) = 3 - x + \operatorname{sen} 3x$

En los ejercicios del 63 al 70 encuentre el dominio y el rango de la función.

63. $f(x) = 2x + \cos x$ **64.** $f(x) = 2 - x + \operatorname{sen} x$

65. $f(x) = |x| + \cos x$ **66.** $f(x) = -2x + |3\operatorname{sen} x|$

67. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ **68.** $f(x) = \operatorname{sen}|x|$

69. $f(x) = \sqrt{|\operatorname{sen} x|}$ **70.** $f(x) = \sqrt{\cos x}$

71. Resorte oscilante Las oscilaciones de un resorte, sujetas a fricción, están modeladas con la ecuación $y = 0.43e^{-0.55t}\cos 1.8t$.

a) Grafique y y sus dos curvas de amortiguamiento en la misma ventana de visualización para $-0 \le t \le 12$.

b) ¿Aproximadamente cuánto tiempo toma para que la oscilación amortiguada esté comprendida en el intervalo $-0.2 \le y \le 0.2$?

72. Predicción del crecimiento económico La gerente de negocios de una pequeña compañía manufacturera encuentra que puede modelar el crecimiento anual de la compañía, a grandes rasgos, como una función exponencial, pero con fluctuaciones cíclicas. Ella utiliza la función $S(t) = 75(1.04)^t + 4\operatorname{sen}(\pi t/3)$ para estimar las ventas (en millones de dólares), t años después de 2005.

a) ¿Cuáles son las ventas de las compañías en 2005?

b) ¿Cuál es la tasa aproximada de crecimiento anual?

c) ¿Qué cifra predice el modelo para las ventas en 2013?

d) ¿Cuántos años hay en cada ciclo económico para esta compañía?

73. Escriba para aprender En el ejemplo 3 se muestra que la función $y = \operatorname{sen}^3 x$ es periódica. Explique si usted considera que $y = \operatorname{sen} x^3$ es periódica y por qué.

74. Escriba para aprender En el ejemplo 4 se muestra que la función $y = |\tan x|$ es periódica. Proporcione un argumento convincente para mostrar que $y = |\tan x|$ no es una función periódica.

En los ejercicios 75 y 76 seleccione la desigualdad correcta, **a)** o **b)**. Proporcione un argumento convincente.

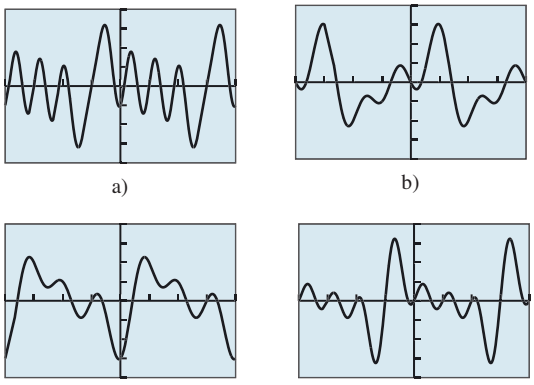
75. a) $x - 1 \le x + \operatorname{sen} x \le x + 1$ para toda x.

b) $x - \operatorname{sen} x \le x + \operatorname{sen} x$ para toda x.

76. a) $-x \le x \operatorname{sen} x \le x$ para toda x.

b) $-|x| \le x \operatorname{sen} x \le |x|$ para toda x.

En los ejercicios del 77 al 80 relacione la función con su gráfica. En cada caso establezca la ventana de visualización.



a) b) c) d)

77. $y = \cos x - \operatorname{sen} 2x - \cos 3x + \operatorname{sen} 4x$.

78. $y = \cos x - \operatorname{sen} 2x - \cos 3x + \operatorname{sen} 4x - \cos 5x$.

79. $y = \operatorname{sen} x + \cos x - \cos 2x - \operatorname{sen} 3x$.

80. $y = \operatorname{sen} x - \cos x - \cos 2x - \cos 3x$.

Preguntas de examen estandarizado

81. Verdadero o falso La función $f(x) = \operatorname{sen} |x|$ es periódica. Justifique su respuesta.

82. Verdadero o falso La suma de dos sinusoidales es una sinusoidal. Justifique su respuesta.

Para responder estas preguntas puede utilizar una calculadora graficadora.

83. Opción múltiple ¿Cuál es el periodo de la función $f(x) = \operatorname{sen} |x|$?

A) $\pi/2$ **B)** π **C)** 2π

D) 3π **E)** Ninguna; la función no es periódica.

84. Opción múltiple La función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ es

A) Discontinua **B)** Acotada **C)** Par

D) Uno a uno **E)** Periódica

85. Opción múltiple La función $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ es

A) Discontinua **B)** Acotada **C)** Par

D) Uno a uno **E)** Periódica

86. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes funciones *no* es una sinusoidal?

A) $2 \cos (2x)$ **B)** $3 \operatorname{sen} (2x)$ **C)** $3 \operatorname{sen} (2x) + 2 \cos (2x)$

D) $3 \operatorname{sen} (3x) + 2 \cos (2x)$ **E)** $\operatorname{sen} (3x + 3) + \cos (3x + 2)$

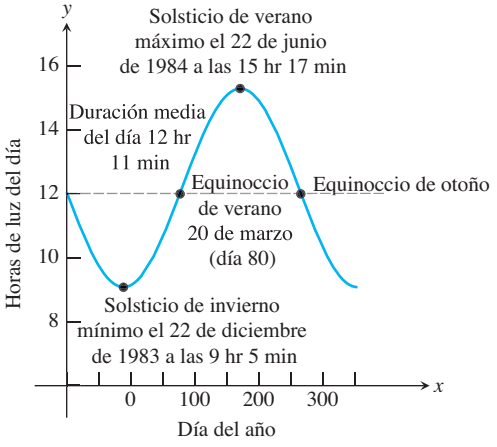
Exploraciones

87. Actividad en equipo Gráficas inexactas o mal elaboradas

a) Haga Xmín $= 0$ y Xmáx $= 2\pi$. Mueva el cursor a lo largo del eje x. ¿Cuál es la distancia entre un píxel y el siguiente (al centésimo más cercano)?

b) ¿Cuál es el periodo de $f(x) = \operatorname{sen} 250x$? Considere que el periodo es la longitud de un ciclo completo de la gráfica. Aproximadamente, ¿cuántos ciclos debe de haber entre dos píxeles adyacentes? ¿Su graficadora puede producir una gráfica precisa de esta función entre 0 y 2π?

88. Actividad en equipo Duración de los días La gráfica muestra el número de horas en que hay luz de día en Boston como una función del día del año, desde el 21 de septiembre de 1983 al 15 de diciembre de 1984. Se especifican los puntos clave, así como otra información importante. Escriba una fórmula para la función sinusoidal y compruébela graficándola.



Ampliación de las ideas

En los ejercicios del 89 al 96 primero trate de predecir cómo se verá la gráfica (sin demasiado esfuerzo, esto es, sólo por diversión). Luego grafique la función en una o más ventanas de visualización para determinar las principales características de la misma y haga un bosquejo. Donde sea pertinente, mencione cuál es el periodo, la amplitud, el dominio, el rango, las asíntotas y los ceros.

89. $f(x) = \cos e^x$

90. $g(x) = e^{\tan x}$

91. $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$

92. $g(x) = \operatorname{sen} \pi x + \sqrt{4 - x^2}$

93. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

94. $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

95. $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

96. $g(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

4.7 Funciones trigonométricas inversas

Aprenderá acerca de...

- La función seno inverso
- Las funciones coseno y tangente inversas
- La composición de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas
- Las aplicaciones de las funciones trigonométricas inversas

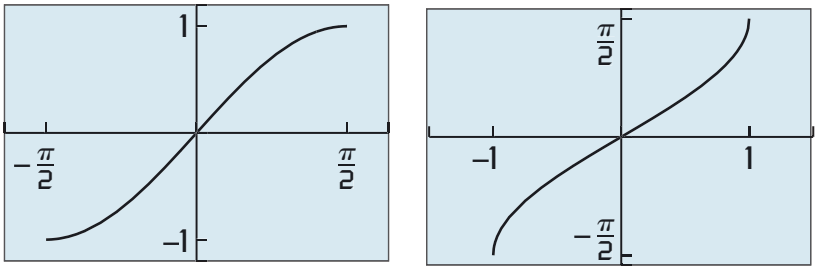
. . . porque

Las funciones trigonométricas inversas pueden utilizarse para resolver ecuaciones trigonométricas.

Función seno inverso

En la sección 1.4 aprendió que cada función tiene una relación inversa, y que esa relación inversa es una función sólo si la función original es uno a uno. Las seis funciones trigonométricas básicas son periódicas, y de forma espectacular, no satisfacen el criterio de la recta horizontal para ser uno a uno. Sin embargo, en la sección 1.4, también aprendió que algunas funciones son tan importantes que se requiere estudiar su comportamiento inverso a pesar de que no son uno a uno. Esto se hace restringiendo el dominio de la función original a un intervalo en el cual es uno a uno. (Se hizo cuando se definió la función raíz cuadrada, la cuál es inversa de la función $y = x^2$ restringida a un dominio no negativo.)

Si restringe el dominio de $y = \operatorname{sen} x$ al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, como se muestra en la figura 4.69a, la función restringida es uno a uno. La **función inversa de seno** $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ es la inversa de esa porción de la función restringida del seno (figura 4.69b).



[–2, 2] por [–1.2, 1.2]
a)

[–1.5, 1.5] por [–1.7, 1.7]
b)

FIGURA 4.69 a) La restricción de $y = \operatorname{sen} x$ es uno a uno y b) tiene una inversa, $y = \operatorname{se}^{-1} x$.

Por la relación inversa usual, los enunciados

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{y} \qquad x = \operatorname{sen} y$$

son equivalentes para los valores de y en el dominio restringido $[-\pi/2, \pi/2]$ y para los valores de x en $[-1, 1]$. Esto significa que puede considerarse que $\operatorname{sen}^{-1} x$ es *el ángulo entre* $-\pi/2$ *y* $\pi/2$ *cuyo seno es* x. Debido a que los ángulos y sus correspondientes arcos en el círculo unitario miden lo mismo, al ángulo $\operatorname{sen}^{-1} x$ también se le llama **arcoseno de** x.

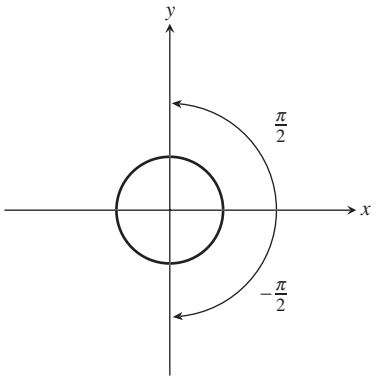


FIGURA 4.70 Los valores de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ siempre se encontrarán en el lado derecho del círculo unitario , entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

Función seno inverso (función arcoseno)

El único ángulo y en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\operatorname{sen} y = x$ es **seno inverso** (o **arcoseno**) de x, que se expresa como $\operatorname{sen}^{-1} x$ o **arcsen** x.

El dominio de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ es $[-1, 1]$ y el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.

Es útil pensar que $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ está colocado a la derecha del círculo unitario, es decir la parte que queda comprendida entre los ángulos cuya medida va de $-\pi/2$ a $\pi/2$ (figura 4.70).

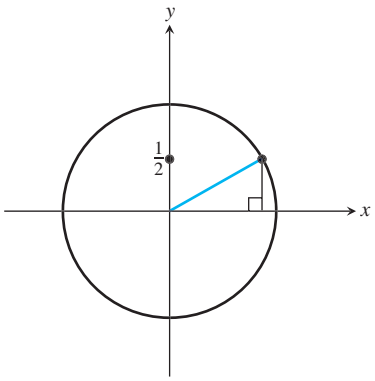


FIGURA 4.71 $\operatorname{sen}^{-1}(1/2) = \pi/6$ (ejemplo 1 a).

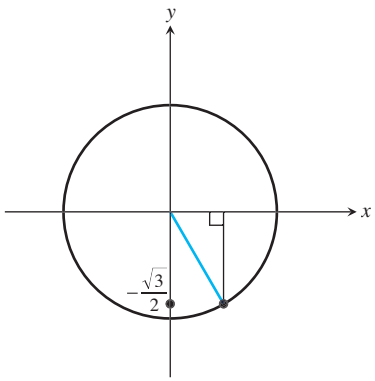


FIGURA 4.72 $\operatorname{sen}^{-1}(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$ (ejemplo 1b).

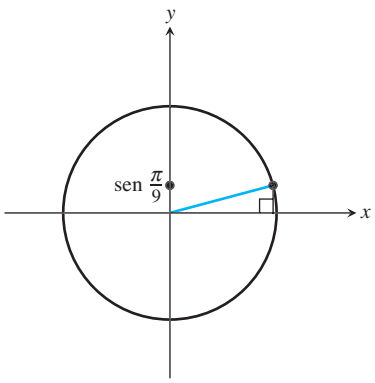


FIGURA 4.73 $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(\pi/9)) = \pi/9$ (ejemplo 1d).

EJEMPLO 1 Evaluación de $\operatorname{sen}^{-1} x$ sin calculadora

Encuentre el valor exacto de cada expresión sin usar calculadora.

a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

d) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)$ **e)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

SOLUCIÓN

a) Encuentre el punto en la mitad que está en el lado derecho del círculo unitario para la cual la coordenada y es 1/2 y dibuje un triángulo de referencia (figura 4.71). Reconocemos que se trata de una nuestras razones especiales, y el ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es 1/2 es $\pi/6$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

b) Encuentre el punto en la mitad derecha del círculo unitario para la cual la coordenada y es $-\sqrt{3}/2$ y dibuje un triángulo de referencia (figura 4.72). Reconocemos que se trata de una de nuestras razones especiales, y el ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $-\sqrt{3}/2$ es $-\pi/3$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

c) $\operatorname{sen}^{-1}(\pi/2)$ no existe, porque el dominio de sen^{-1} es $[-1, 1]$ y $\pi/2 > 1$.

d) Dibuje un ángulo de $\pi/9$ en posición estándar e identifique su coordenada y sobre el eje y (figura 4.73). El ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es este número es $\pi/9$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) = \frac{\pi}{9}.$$

e) Dibuje un ángulo de $5\pi/6$ en posición estándar (note que este ángulo *no* está en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$) e identifique su coordenada y sobre el eje de las y. (Consulte la figura 4.74 en la siguiente página.) El ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es este número es $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 1.

EJEMPLO 2 Evaluación de $\operatorname{sen}^{-1} x$ con calculadora

Use una calculadora en modo radián para evaluar los siguientes valores de seno inverso:

a) $\operatorname{sen}^{-1}(-0.81)$

b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(3.49\pi))$

SOLUCIÓN

a) $\operatorname{sen}^{-1}(-0.81) = -0.9441521\ldots \approx -0.944$

b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(3.49\pi)) = -1.5393804\ldots \approx -1.539$

continúa

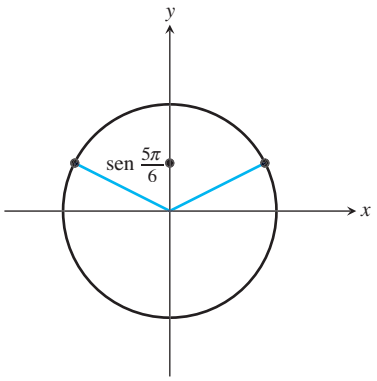


FIGURA 4.74 $\text{sen}^{-1}(\text{sen}(5\pi/6)) = \pi/6$ (ejemplo 1e).

Aunque estas cantidades se obtuvieron con ayuda de la calculadora, se pueden emplear para encontrar la respuesta exacta si se pone suficiente atención para esperar que alguno sea un múltiplo de π. Divida la respuesta entre π:

$$\text{Respuesta}/\pi = -0.49.$$

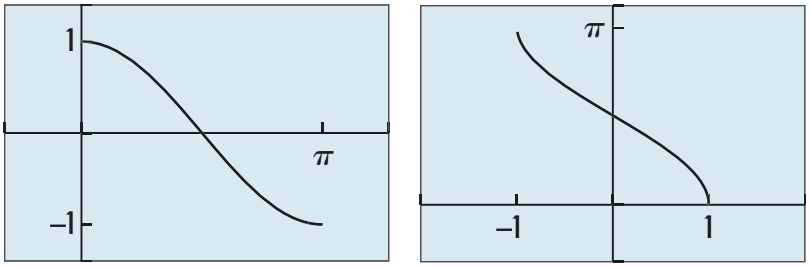
Por lo tanto, se concluye que $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,(3.49\pi)) = -0.49\pi$.

Se sugiere que intente el mismo procedimiento para el ejemplo 2 b) sin utilizar calculadora. ¡Es posible!

Ahora resuelva el ejercicio 19.

Funciones coseno y tangente inversas

Si se restringe el dominio de $y = \cos x$ al intervalo $[0, \pi]$, como se muestra en la figura 4.75a, la función restringida es uno a uno. La **función coseno inverso**, $y = \cos^{-1} x$, es la inversa de esa porción de la función restringida del coseno (figura 4.75b).



[–1, 4] por [–1.4, 1.4] a)

[–2, 2] por [–1, 3.5] b)

FIGURA 4.75 a) La restricción de $y = \cos x$ es uno a uno y b) tiene una inversa, $y = \cos^{-1} x$.

Por la relación inversa usual, los enunciados

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{y} \quad x = \cos y$$

son equivalentes para los valores de y en el dominio restringido $[0, \pi]$ y para los valores de x en $[-1, 1]$. Esto significa que puede considerarse que $\cos^{-1} x$ es *el ángulo entre 0 y π cuyo coseno es x*. El ángulo $\cos^{-1} x$ es también el **arcocoseno de x**.

La función coseno inverso (función arcocoseno)

El único ángulo y en el intervalo $[0, \pi]$ tal que $\cos y = x$ es la **inversa de coseno (o arcocoseno) de x**, que se expresa como $\cos^{-1} x$ o **arccos x**.

El dominio de $y = \cos^{-1} x$ es $[-1, 1]$ y su rango es $[0, \pi]$.

¿QUÉ HAY ACERCA DE LA REGLA DE COMPOSICIÓN CON LA INVERSA?

¿El ejemplo 1 e) viola la Regla de composición con la inversa de la sección 1.4? Esta regla garantiza que $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f. Tenga en mente que, sin embargo, se requiere que el dominio de f se restringa para que f^{-1} exista. Éste es el caso de la función seno. Por ello el ejemplo 1 e) no viola la regla de composición con la inversa, porque la regla no se aplica cuando $x = (5\pi/6)$. Este queda fuera del dominio (restringido) de seno.

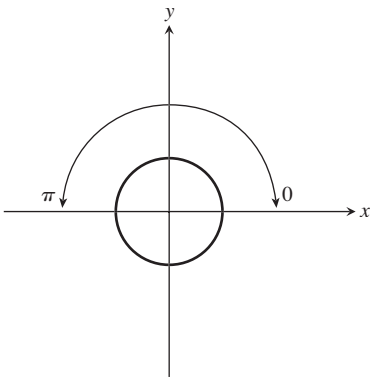
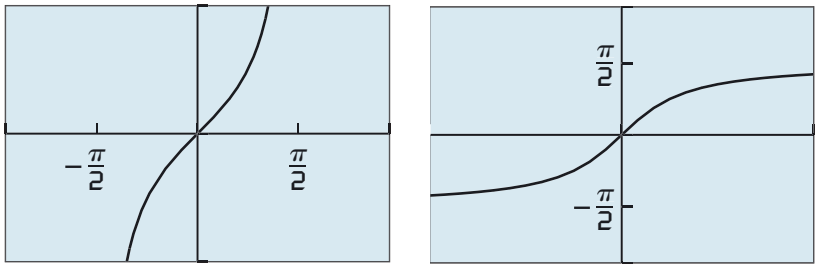


FIGURA 4.76 Los valores de $y = \cos^{-1} x$ siempre se encontrarán en la mitad superior del círculo unitario, entre 0 y π.

Es útil considerar que el rango de $y = \cos^{-1} x$ está colocado en la mitad superior del círculo unitario, es decir, en la parte que queda comprendida entre los ángulos cuya medida va de 0 a π (figura 4.76).

Si restringe el dominio de $y = \tan x$ al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, como se muestra en la figura 4.77a, la función restringida es uno a uno. La **función tangente inversa**

$y = \tan^{-1} x$ es la inversa de esa porción de la función restringida de tangente (figura 4.77b).



[–3, 3] por [–2, 2] a)

[–4, 4] por [–2.8, 2.8] b)

FIGURA 4.77 a) La restricción de $y = \tan x$ es uno a uno y b) tiene una inversa, $y = \tan^{-1} x$.

Por la relación inversa usual, los enunciados

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{y} \quad x = \tan y$$

son equivalentes para los valores de y en el dominio restringido $(-\pi/2, \pi/2)$ y para los valores de x en $(-\infty, \infty)$. Esto significa que puede considerarse que $\tan^{-1} x$ es *el ángulo entre* $-\pi/2, \pi/2$ *cuya tangente es* x. El ángulo $\tan^{-1} x$ es también el **arcotangente de** x.

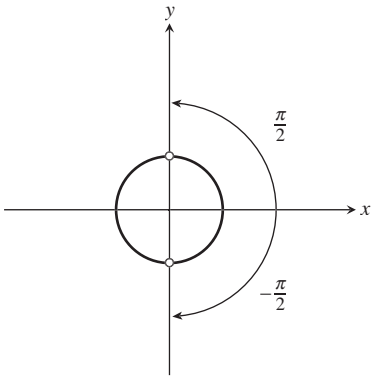


FIGURA 4.78 Los valores de $y = \tan^{-1} x$ siempre se encontrarán en el lado derecho del círculo unitario, entre (pero sin incluir) $-\pi/2$ y $\pi/2$.

La función tangente inversa (función arcotangente)

El único ángulo y en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\tan y = x$ es la **tangente inversa** (o **arcotangente**) de x, que se expresa como $\tan^{-1} x$ o $\arctan x$.

El dominio de $y = \tan^{-1} x$ es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $(-\pi/2, \pi/2)$.

Es útil pensar que $y = \tan^{-1} x$ está colocado en la mitad derecha del círculo unitario (excepto los puntos superior y inferior), es decir, la parte que queda comprendida entre los ángulos cuya medida va de $-\pi/2$ a $\pi/2$ (no incluidos) (figura 4.78).

EJEMPLO 3 Evaluación de las funciones trigonométricas inversas sin calculadora

Encuentre el valor exacto de las expresiones sin usar calculadora.

a) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\tan^{-1}\sqrt{3}$

c) $\cos^{-1}(\cos(-1.1))$

SOLUCIÓN

a) Encuentre el punto en la mitad superior del círculo unitario para el cual la coordenada x es $-\sqrt{2}/2$ y dibuje un triángulo de referencia (figura 4.79). Reconocemos a éste como una de nuestras razones especiales, y el ángulo en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $-\sqrt{2}/2$ es $3\pi/4$. Por lo tanto

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

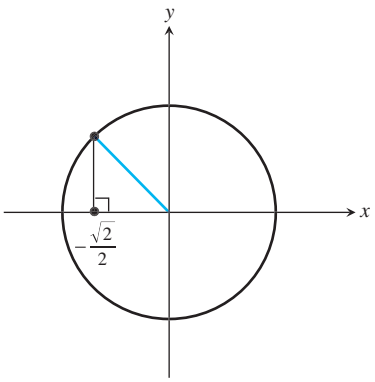


FIGURA 4.79 $\cos^{-1}(-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4$ (ejemplo 3a).

continúa

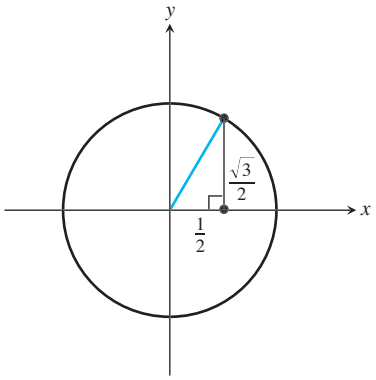


FIGURA 4.80 $\tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$ (ejemplo 3b).

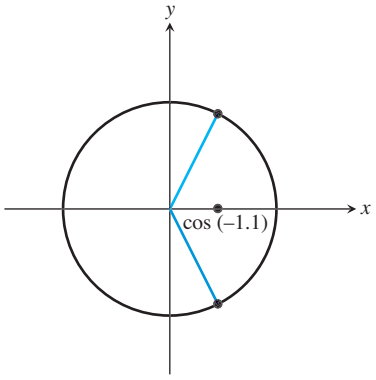


FIGURA 4.81 $\cos^{-1}(\cos(-1.1)) = 1.1$ (ejemplo 3c).

¿QUÉ HAY ACERCA DEL ARCCOT, DEL ARCSEN Y DEL ARCCSC?

Debido a que ya se tienen las funciones inversas para sus recíprocos, realmente no necesitamos las funciones inversas de cot, sec y csc para propósitos de cálculo. Además, la decisión de cómo elegir el rango de arcssec y de arccsc no es tan directa como con las otras funciones. Observe los ejercicios 63, 71 y 72.

b) Determine el punto en el lado derecho del círculo unitario para el cual la coordenada y es $\sqrt{3}$ veces su coordenada x y dibuje un triángulo de referencia (figura 4.80). Reconocemos a ésta como una de nuestras razones especiales, y el ángulo en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ cuya tangente es $\sqrt{3}$ es $\pi/3$. Por lo tanto

$$\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

c) Dibuje un ángulo de -1.1 en posición estándar (observe que este ángulo *no* está en el intervalo $[0, \pi]$) y marque su coordenada x sobre el eje x (figura 4.81). El ángulo en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es ese número es 1.1. Por lo tanto

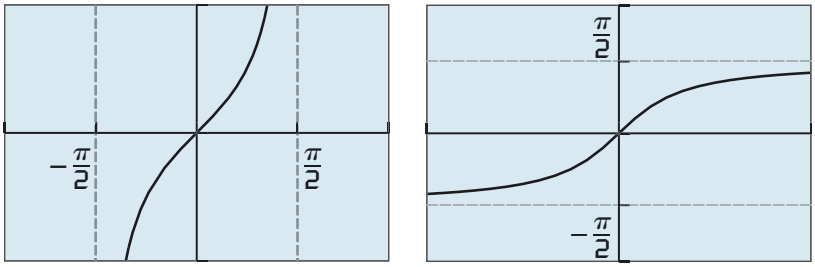
$$\cos^{-1}(\cos(-1.1)) = 1.1.$$

Ahora resuelva los ejercicios 5 y 7.

EJEMPLO 4 Descripción del comportamiento en los extremos

Describa el comportamiento en los extremos de la función $y = \tan^{-1} x$.

SOLUCIÓN Podemos obtener con mayor facilidad esta información observando la gráfica de $y = \tan^{-1} x$. y recordando cómo se relaciona con la gráfica restringida de $y = \tan x$ (consulte la figura 4.82).



[–3, 3] por [–2, 2] a)

[–4, 4] por [–2.8, 2.8] b)

FIGURA 4.82 Las gráficas de a) $y = \tan x$ (restringida) y b) $y = \tan^{-1} x$. Las asíntotas verticales de y = tan x se reflejan y se convierten en las asíntotas horizontales de $y = \tan^{-1} x$ (ejemplo 4).

Cuando reflejamos la gráfica de $y = \tan x$ con respecto a la recta $y = x$ para obtener la gráfica $y = \tan^{-1} x$, las asíntotas verticales $x = \pm\pi/2$ se convierten en las asíntotas horizontales $y = \pm\pi/2$. El comportamiento en los extremos queda establecido de esta manera:

$$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 21.

Composición de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas

Ya hemos observado la necesidad de tener precaución cuando se aplica la Regla de composición con la inversa para las funciones trigonométricas y sus inversas

(ejemplos 1 e) y 3 c). Las ecuaciones siguientes son *siempre* verdaderas si están definidas:

$$\text{sen}\,(\text{sen}^{-1}(x)) = x \qquad \cos(\cos^{-1}(x)) = x \qquad \tan(\tan^{-1}(x)) = x$$

Por otro lado, las siguientes ecuaciones sólo son verdaderas para valores de x en el dominio "restringido" de sen, cos y tan:

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,(x)) = x \qquad \cos^{-1}(\cos(x)) = x \qquad \tan^{-1}(\tan(x)) = x$$

Un fenómeno aun más interesante ocurre cuando componemos una función trigonométrica inversa de un tipo con una función trigonométrica de otro tipo, como sen $(\tan^{-1} x)$. Sorprendentemente, esa composición de funciones trigonométricas se reduce a funciones algebraicas ¡en las que no está involucrada la trigonometría! Esa curiosa situación tiene profundas implicaciones en cálculo, donde algunas veces es útil descomponer funciones no trigonométricas en componentes trigonométricos que parecen venir de la nada. Lleve a cabo la exploración 1.

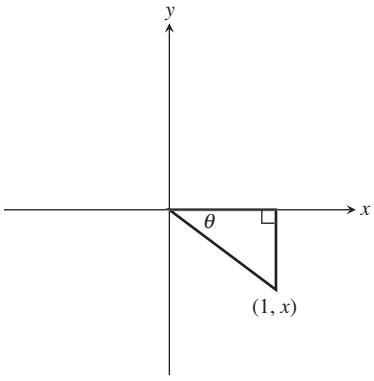
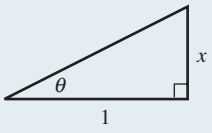


FIGURA 4.83 Si $x < 0$, entonces $\theta = \tan^{-1} x$ es un ángulo que está en el cuarto cuadrante (exploración 1).

EXPLORACIÓN 1 **Obtención de funciones trigonométricas inversas de funciones trigonométricas**

En el triángulo rectángulo que se muestra a la derecha, el ángulo θ está medido en radianes.



1. Encuentre tan θ.
2. Encuentre $\tan^{-1} x$.
3. Encuentre la hipotenusa como una función de x.
4. Encuentre sen $(\tan^{-1} x)$ como una razón que no incluya funciones trigonométricas.
5. Encuentre sec $(\tan^{-1} x)$ como una razón que no incluya funciones trigonométricas.
6. Si $x < 0$, entonces $\tan^{-1} x$ es un ángulo negativo en el cuarto cuadrante (figura 4.83). Verifique que sus respuestas a las partes 4 y 5 continúen siendo válidas en este caso.

EJEMPLO 5 Composición de funciones trigonométricas con arcoseno

Componga cada una de las funciones trigonométricas con $\text{sen}^{-1} x$ y reduzca la función compuesta a una expresión algebraica que no involucre funciones trigonométricas.

SOLUCIÓN En esta ocasión iniciamos con el triángulo que se muestra en la figura 4.84, en el cual $\theta = \text{sen}^{-1} x$. (Este triángulo podría aparecer en el cuarto cuadrante si x fuera negativo, pero las razones trigonométricas serían las mismas.)

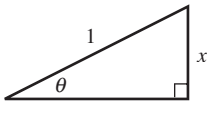


FIGURA 4.84 Un triángulo en el cual $\theta = \text{sen}^{-1} x$ (ejemplo 5).

El lado restante del triángulo (el cual es cos θ) puede encontrarse mediante el teorema de Pitágoras. Si expresamos el lado desconocido como s, se tiene

$$s^2 + x^2 = 1$$
$$s^2 = 1 - x^2$$
$$s = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

continúa

Note la ambigüedad del signo, lo que requiere de especial atención. Ya que $\text{sen}^{-1} x$ está siempre en el cuadrante I o IV, el lado horizontal del triángulo sólo puede ser positivo. Por eso se puede definir a s sin ambigüedad como $\sqrt{1-x^2}$, lo que es posible apreciar en la figura 4.85.

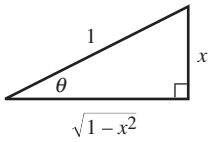


FIGURA 4.85 Si $\theta = \text{sen}^{-1} x$, entonces $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$. Observe que $\cos\theta$ será positivo porque $\text{sen}^{-1} x$ solamente puede estar en el cuadrante I o IV (ejemplo 5).

Ahora pueden obtenerse las razones buscadas a partir del triángulo:

$$\text{sen}\,(\text{sen}^{-1}(x)) = x \qquad \csc\,(\text{sen}^{-1}(x)) = \frac{1}{x}$$

$$\cos\,(\text{sen}^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2} \qquad \sec\,(\text{sen}^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\tan\,(\text{sen}^{-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \cot\,(\text{sen}^{-1}(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Ahora resuelva el ejercicio 47.

Aplicaciones de las funciones trigonométricas inversas

Cuando una aplicación incluye un ángulo que es una variable dependiente, como en $\theta = f(x)$, entonces para encontrar a x, es natural usar una función trigonométrica inversa y encontrar $x = f^{-1}(\theta)$.

EJEMPLO 6 Cálculo de un ángulo de visión

La parte inferior de una pantalla de repetición de 20 pies en el Dodger Stadium está a 45 pies del piso del campo de juego. A medida que una persona se mueve desde la pared, el ángulo formado por la pantalla cambia. Hay una distancia desde la pared en la que el ángulo es el mayor. ¿Cuál es esa distancia?

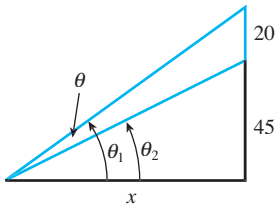


FIGURA 4.86 El diagrama de la pantalla del estadio (ejemplo 6).

SOLUCIÓN

Modele

El ángulo subtendido por la pantalla es θ y se puede apreciar en la figura 4.86, y $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Como $\tan\theta_1 = 65/x$, se deduce que $\theta_1 = \tan^{-1}(65/x)$. De manera similar $\theta_2 = \tan^{-1}(45/x)$. Por lo que,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{65}{x} - \tan^{-1}\frac{45}{x}.$$

Resuelva gráficamente

La figura 4.87 muestra la gráfica de θ medido en grados. La pregunta de cuál es la distancia máxima del ángulo de visión puede responderse encontrado la coordenada x del punto máximo de esa gráfica. Usando métodos gráficos, se puede ver que este máximo ocurre cuando $x \approx 54$ pies.

continúa

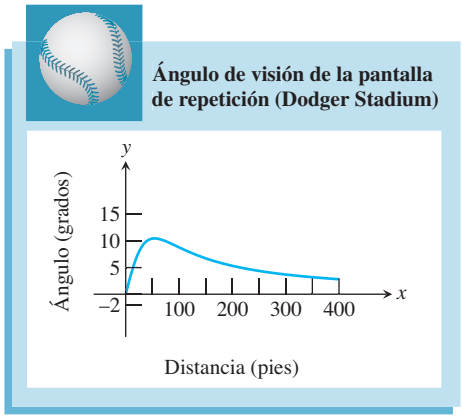


FIGURA 4.87 Ángulo de visión θ como una función de la distancia x desde la pared (ejemplo 6).

Por lo tanto el ángulo máximo subtendido por la pantalla de repetición se encuentra cuando la persona está a 54 pies de la pared.

Ahora resuelva el ejercicio 55.

REPASO RÁPIDO 4.7 *(Para obtener ayuda consulte la sección 4.3)*

En los ejercicios del 1 al 4 mencione el signo que corresponde (positivo o negativo) al seno, coseno y tangente en el cuadrante.

1. Cuadrante I
2. Cuadrante II
3. Cuadrante III
4. Cuadrante IV

En los ejercicios del 5 al 10 encuentre el valor exacto.

5. sen $(\pi/6)$
6. tan $(\pi/4)$
7. cos $(2\pi/3)$
8. sen $(2\pi/3)$
9. sen $(-\pi/6)$
10. cos $(-\pi/3)$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.7

En los ejercicios del 1 al 12 encuentre el valor exacto.

1. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
3. $\tan^{-1} 0$
4. $\cos^{-1} 1$
5. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
6. $\tan^{-1} 1$
7. $\tan^{-1}(-1)$
8. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
9. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
10. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$
11. $\cos^{-1} 0$
12. $\operatorname{sen}^{-1} 1$

En los ejercicios del 13 al 16 utilice una calculadora para encontrar el valor aproximado. Exprese su respuesta en grados.

13. $\operatorname{sen}^{-1}(0.362)$
14. arcsen 0.67
15. $\tan^{-1}(-12.5)$
16. $\cos^{-1}(-0.23)$

En los ejercicios del 17 al 20 use una calculadora para encontrar el valor aproximado. Exprese su respuesta en radianes.

17. $\tan^{-1}(2.37)$
18. $\tan^{-1}(22.8)$
19. $\operatorname{sen}^{-1}(-0.46)$
20. $\cos^{-1}(-0.853)$

En los ejercicios 21 y 22 describa el comportamiento en los extremos de la función.

21. $y = \tan^{-1}(x^2)$
22. $y = (\tan^{-1} x)^2$

En los ejercicios del 23 al 32 encuentre el valor exacto sin emplear calculadora.

23. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}(1/2))$
24. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} 1)$
25. $\operatorname{sen}^{-1}(\cos(\pi/4))$
26. $\cos^{-1}(\cos(7\pi/4))$
27. $\cos(2\operatorname{sen}^{-1}(1/2))$
28. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}(-1))$
29. arcsen $(\cos(\pi/3))$
30. arccos $(\tan(\pi/4))$
31. $\cos(\tan^{-1}\sqrt{3})$
32. $\tan^{-1}(\cos\pi)$

En los del ejercicios 33 al 36 analice el dominio, el rango, la continuidad el comportamiento creciente o decreciente, la simetría, el acotamiento, los máximos y mínimos, las asíntotas y el comportamiento en los extremos.

33. $f(x) = \text{sen}^{-1}x$ **34.** $f(x) = \cos^{-1}x$

35. $f(x) = \tan^{-1}x$

36. $f(x) = \cot^{-1}x$ (consulte la gráfica del ejercicio 67).

En los ejercicios del 37 al 40 use transformaciones para describir cómo se relaciona la gráfica de la función con una gráfica de una función trigonométrica inversa básica. Indique cuál es el dominio y el rango.

37. $f(x) = \text{sen}^{-1}(2x)$ **38.** $g(x) = 3\cos^{-1}(2x)$

39. $h(x) = 5\tan^{-1}(x/2)$ **40.** $g(x) = 3 \arccos(x/2)$

En los ejercicios del 41 al 46 encuentre una solución exacta a la ecuación sin utilizar calculadora.

41. $\text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = 1$ **42.** $\cos^{-1}(\cos x) = 1$

43. $2\,\text{sen}^{-1}x = 1$ **44.** $\tan^{-1}x = -1$

45. $\cos(\cos^{-1}x) = 1/3$ **46.** $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,x) = \pi/10$

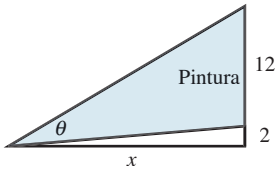
En los ejercicios del 47 al 52 encuentre una expresión algebraica equivalente a la expresión dada. (*Sugerencia:* cree un triángulo rectángulo, como en el ejemplo 5.)

47. $\text{sen}(\tan^{-1}x)$ **48.** $\cos(\tan^{-1}x)$

49. $\tan(\text{arcsen}\,x)$ **50.** $\cot(\arccos x)$

51. $\cos(\arctan 2x)$ **52.** $\text{sen}(\arccos 3x)$

53. Actividad en equipo **Ángulo de visión** Suponga que está parado en un museo apreciando una pintura. El lado superior de la pintura está 2 pies sobre el nivel de su ojo, y la pintura mide 12 pies de alto. El ángulo θ está formado por las líneas de visión hacia el lado inferior y hacia el lado superior de la pintura.

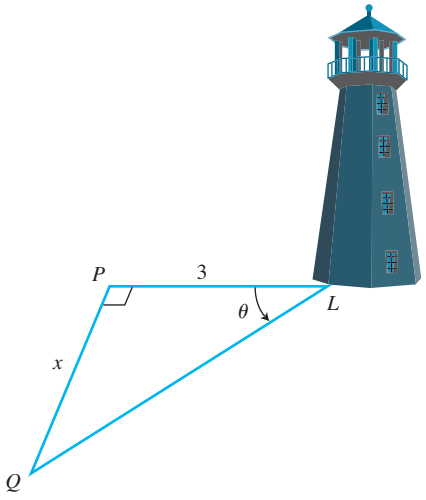


a) Muestre que $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{14}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$.

b) Grafique θ en la ventana de visualización [0, 25] por [0, 55], y en modo de grados. Utilice su graficadora para mostrar que el valor máximo de θ se presenta a 5.3 pies desde la pintura, aproximadamente.

c) ¿Qué tan alejado (al pie más cercano) estaría usted de la pared si $\theta = 35°$?

54. Actividad en equipo **Análisis de un faro** Un faro giratorio, L, está en un puerto a 3 millas del punto P, el cual es el más cercano a la costa de una playa recta. Conforme la luz gira, forma un ángulo θ como se muestra en la figura, e ilumina un punto Q sobre la misma línea de la playa en la que está P.

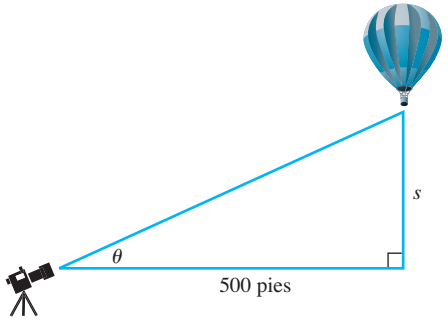


a) Muestre que $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$.

b) Grafique θ en la ventana de visualización $[-20, 20]$ por $[-90, 90]$ utilizando modo grado. En el problema, ¿qué representan los valores negativos de x? ¿Qué representa un ángulo positivo? ¿Un ángulo negativo?

c) Determine θ cuando $x = 15$.

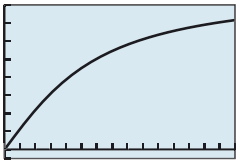
55. Elevación de un globo aerostático El festival del globo aerostático que se organiza cada año en Phoenix, Arizona, es un evento popular entre los fotógrafos. Jo Silver, un fotógrafo galardonado en ese evento, ve que un globo se está elevando desde el piso a 500 pies de él.



a) Escriba θ como una función de la altura s del globo.

b) ¿Cambia θ más que s cuando éste varía de 10 pies a 20, o cuando s varía de 200 pies a 210? Explique.

c) **Escriba para aprender** En la gráfica de esta relación que se muestra aquí, ¿usted piensa que el eje x representa la altura s y el eje y el ángulo θ, o el eje x representa el ángulo θ y el eje y la altura s? Explique.



[0, 1500] por [–5, 80]

56. Encuentre el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \text{sen}\,(\text{sen}^{-1}\,x)$ **b)** $g(x) = \text{sen}^{-1}\,(x) + \cos^{-1}\,(x)$

c) $h(x) = \text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,x)$ **d)** $k(x) = \text{sen}\,(\cos^{-1}\,x)$

e) $q(x) = \cos^{-1}\,(\text{sen}\,x)$

Preguntas de examen estandarizado

57. Verdadero o falso $\text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = x$ para todo número real x. Justifique su respuesta.

58. Verdadero o falso La gráfica de $y = \arctan x$ tiene dos asíntotas horizontales. Justifique su respuesta.

Responda a las siguientes preguntas sin emplear calculadora.

59. Opción múltiple $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

A) $-\dfrac{7\pi}{6}$ **B)** $-\dfrac{\pi}{3}$ **C)** $-\dfrac{\pi}{6}$

D) $\dfrac{2\pi}{3}$ **E)** $\dfrac{5\pi}{6}$

60. Opción múltiple $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\pi) =$

A) -2π **B)** $-\pi$ **C)** 0

D) π **E)** 2π

61. Opción múltiple $\text{sec}(\tan^{-1}\,x) =$

A) x **B)** $\csc x$ **C)** $\sqrt{1+x^2}$

D) $\sqrt{1-x^2}$ **E)** $\dfrac{\text{sen}\,x}{(\cos x)^2}$

62. Opción múltiple El rango de la función $f(x) = \text{arcsen}\,x$ es

A) $(-\infty, \infty)$. **B)** $(-1, 1)$. **C)** $[-1, 1]$.

D) $[0, \pi]$. **E)** $[-\pi/2, \pi/2]$.

Exploraciones

63. Escriba para aprender Empleando el formato demostrado en esta sección para la inversa de la función seno, la función coseno y la función tangente, proporcione una definición cuidadosa de la función inversa de la cotangente. (*Sugerencia*: El rango de $y = \cot^{-1}\,x = (0, \pi)$.)

64. Escriba para aprender Emplee un triángulo marcado de forma adecuada para explicar por qué $\text{sen}^{-1}\,x + \cos^{-1}\,x = \pi/2$. ¿Para qué valores de x está definido el lado izquierdo de esta ecuación?

65. Grafique cada una de las siguientes funciones e interprete la gráfica para encontrar el dominio, el rango y el periodo de cada función. ¿Cuál de las tres funciones tiene puntos de discontinuidad? ¿Son removibles o no las discontinuidades?

a) $y = \text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,x)$

b) $y = \cos^{-1}\,(\cos x)$

c) $y = \tan^{-1}\,(\tan x)$

Ampliación de las ideas

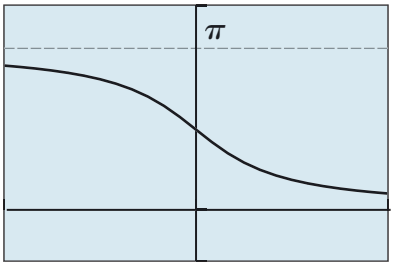
66. Practicando para Cálculo Exprese cada una de las siguientes funciones como una expresión algebraica en la que no se empleen funciones trigonométricas.

a) $\cos\,(\text{sen}^{-1}\,2x)$ **b)** $\sec^2\,(\tan^{-1}\,x)$

c) $\text{sen}\,(\cos^{-1}\,\sqrt{x})$ **d)** $-\csc^2\,(\cot^{-1}\,x)$

e) $\tan\,(\sec^{-1}\,x^2)$

67. Arccotangente con la calculadora La mayoría de las calculadoras no tiene una tecla para obtener la inversa de la cotangente. La gráfica se muestra a continuación. Encuentre una expresión que pueda ingresarse en la calculadora para obtener la gráfica de $y = \cot^{-1}\,x$.



[–3, 3] por [–1, 4]

68. Descomposición avanzada Descomponga cada una de las siguientes funciones algebraicas escribiéndolas como una función trigonométrica inversa.

a) $\sqrt{1-x^2}$ **b)** $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ **c)** $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

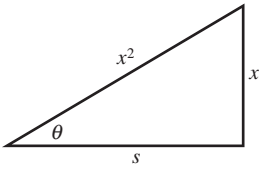
69. Use transformaciones elementales y la función arcotangente para construir una función cuyo dominio sean todos los números reales y que tenga asíntotas horizontales en $y = 24$ y $y = 42$.

70. Evitando ambigüedades Cuando se eligió el triángulo rectángulo del ejemplo 5, se utilizó una hipótesis de medida 1. Lo anterior es necesario en algunas ocasiones para emplear una variable cuantitativa que represente a la hipotenusa, en cuyo caso es una buena idea utilizar x^2 en vez de x, en caso de que x sea negativo. (Todas las definiciones de las funciones trigonométricas que se han presentado en este texto han incluido triángulos en los que se supone que la hipotenusa es positiva.)

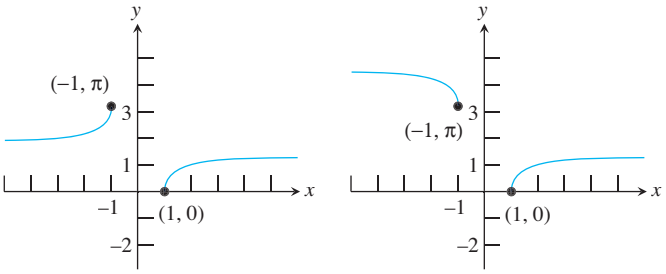
a) Si utilizamos el triángulo siguiente para representar $\theta = \text{sen}^{-1}(1/x)$, explique por qué el lado s debe ser positivo independientemente del signo de x.

b) Utilice el triángulo de la parte a) para hallar $\tan\,(\text{sen}^{-1}\,(1/x))$.

c) Utilice un triángulo apropiado, para encontrar $\text{sen}\,(\cos^{-1}\,(1/x))$.



71. Definición de Arcosecante El rango de la función secante es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, el cual también es el dominio de la función arcosecante. La gráfica de $y = \text{arcsec } x$ debe ser, por lo tanto, la unión de dos curvas que no se intersecan. A continuación se muestran dos posibles gráficas con el dominio correcto.



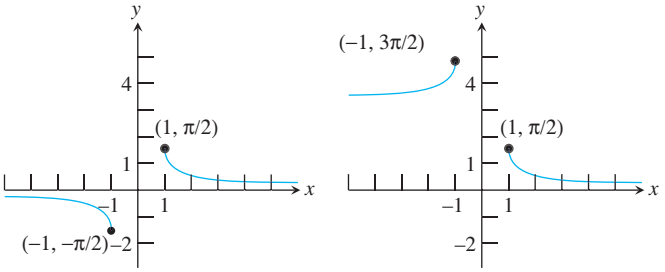
a) La gráfica de la izquierda tiene una asíntota horizontal. ¿Cuál es esa asíntota?

b) La gráfica de la derecha tiene dos asíntotas horizontales. ¿Cuáles son esas asíntotas?

c) ¿Cuál de esas gráficas es también la gráfica de $y = \cos^{-1}(1/x)$?

d) ¿Cuál de esas gráficas se incrementa en ambos intervalos conectados?

72. Definición de arcocosecante El rango de la función cosecante es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, el cual también es el dominio de la función arcocosecante. La gráfica de $y = \text{arccsc } x$ debe ser, por lo tanto, la unión de dos curvas que no se intersecan. A continuación se muestran dos posibles gráficas con el dominio correcto.



a) La gráfica de la izquierda tiene una asíntota horizontal. ¿Cuál es esa asíntota?

b) La gráfica de la derecha tiene dos asíntotas horizontales. ¿Cuáles son esas asíntotas?

c) ¿Cuál de esas gráficas es también la gráfica de $y = \text{sen}^{-1}(1/x)$?

d) ¿Cuál de esas gráficas decrece en ambos intervalos conectados?

4.8 Resolución de problemas con trigonometría

Aprenderá acerca de...

- Más problemas con triángulos rectángulos
- Movimiento armónico simple

. . . porque

Estos problemas ilustran algunas de las aplicaciones más conocidas de trigonometría.

Más problemas con triángulos rectángulos

Terminaremos este primero de dos capítulos de trigonometría revisando algunas de las aplicaciones de la sección 4.2 (trigonometría de triángulos rectángulos) y la sección 4.4 (sinusoidales).

Un **ángulo de elevación** es un ángulo a través del cual el ojo se mueve hacia arriba desde la horizontal para observar algo en lo alto, y un **ángulo de depresión** es el ángulo a través del cual el ojo se mueve hacia abajo desde la horizontal para observar algo que está por abajo. Para dos diferentes observadores en diferentes elevaciones mirándose uno a otro, el ángulo de elevación de uno es igual al ángulo de depresión del otro. Los conceptos se ilustran en la figura 4.88, en la que se pueden apreciar que las personas están observando al Monte Rushmore o al Gran Cañón.



a) b)

FIGURA 4.88 a) Ángulo de elevación en el Monte Rushmore. b) Ángulo de depresión en el Gran Cañón.

EJEMPLO 1 Uso del ángulo de depresión

El ángulo de depresión de una boya desde lo alto del Faro de la bahía Barnegat, es decir a 130 pies de la superficie del agua, es de 6°. Encuentre la distancia x desde la base del faro a la boya.

SOLUCIÓN La figura 4.89 modela la situación.

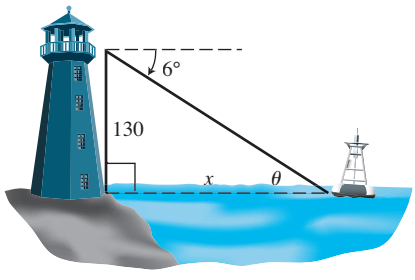


FIGURA 4.89 Un gran faro y una pequeña boya.

En el diagrama, $\theta = 6°$ porque el ángulo de elevación desde la boya es igual al ángulo de depresión desde el faro. Se **resuelve algebraicamente** utilizando la función tangente:

$$\tan\theta = \tan 6° = \frac{130}{x}$$

$$x = \frac{130}{\tan 6°} \approx 1{,}236.9$$

Interprete La boya está a 1,237 pies de la base del faro.

Ahora resuelva el ejercicio 3.

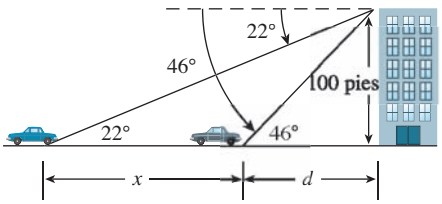


FIGURA 4.90 Un automóvil se aproxima al edificio Altgelt Hall (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Elaboración de mediciones indirectas

Desde la parte superior del edificio Altgelt Hall que mide 100 pies de altura, un hombre observa un automóvil que se desplaza frente al edificio. Si el ángulo de depresión del automóvil cambia de 22 a 46° durante el periodo de observación, ¿cuánto se ha trasladado el automóvil?

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente El problema está modelado en la figura 4.90. Observe que se han señalado los ángulos agudos en las dos posiciones de 22 y 46° (porque el ángulo de elevación desde el automóvil es igual al ángulo de depresión desde el edificio). Exprese como x la distancia que el automóvil recorre y su distancia al edificio en la segunda observación como d.

Del triángulo rectángulo más pequeño se concluye que:

$$\tan 46° = \frac{100}{d}$$

$$d = \frac{100}{\tan 46°}$$

Del triángulo rectángulo más grande se concluye que:

$$\tan 22° = \frac{100}{x + d}$$

$$x + d = \frac{100}{\tan 22°}$$

$$x = \frac{100}{\tan 22°} - d$$

$$x = \frac{100}{\tan 22°} - \frac{100}{\tan 46°}$$

$$x \approx 150.9$$

Interprete El automóvil se desplaza aproximadamente 151 pies.

Ahora resuelva el ejercicio 7.

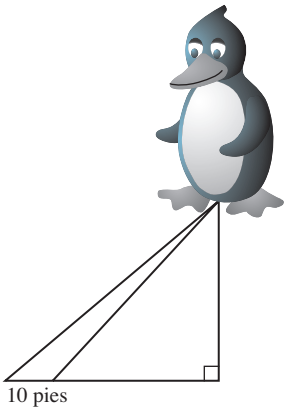


FIGURA 4.91 Un gran pingüino lleno de helio (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Cálculo de la altura desde el piso

Un gran pingüino lleno de helio está amarrado en el inicio de la ruta de un desfile esperando que empiece. Dos cables atados a la parte inferior del pingüino crean ángulos de 48 y 40° con el piso y están en el mismo plano que la línea perpendicular desde el pingüino al piso (consulte la figura 4.91). Si los cables están sujetados al piso separados uno del otro por 10 pies, ¿qué tan alto está el pingüino del piso?

SOLUCIÓN Podemos simplificar el dibujo a los dos triángulos rectángulos de la figura 4.92 que comparten el lado h.

Modele

Por la definición de la función tangente,

$$\frac{h}{x} = \tan 48° \quad \text{y} \quad \frac{h}{x + 10} = \tan 40°.$$

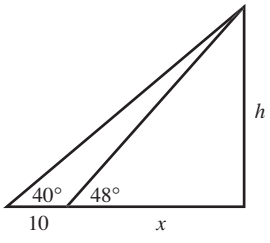


FIGURA 4.92 (Ejemplo 3).

continúa

Resuelva algebraicamente

Resolviendo para h,

$$h = x \tan 48° \quad \text{y} \quad h = (x + 10) \tan 40°.$$

Iguale ambas expresiones y resuelva la ecuación para encontrar x:

$$x \tan 48° = (x + 10) \tan 40° \qquad \text{Ambas son iguales a } h$$

$$x \tan 48° = x \tan 40° + 10 \tan 40°$$

$$x \tan 48° - x \tan 40° = 10 \tan 40° \qquad \text{Aislar los términos}$$

$$x(\tan 48° - \tan 40°) = 10 \tan 40° \qquad \text{Factorizar } x$$

$$x = \frac{10 \tan 40°}{\tan 48° - \tan 40°} \approx 30.90459723$$

Conservamos todo el procedimiento para x, sin embargo, aún no hemos terminado, porque lo que se busca obtener es h:

$$h = x \tan 48° = (30.90459723) \tan 48° \approx 34.32$$

El pingüino está aproximadamente a 34 pies del nivel del piso.

Ahora resuelva el ejercicio 15.

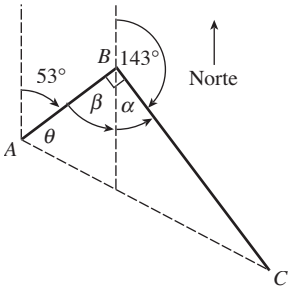


FIGURA 4.93 Ruta de viaje del bote de guardacostas que tiene una velocidad de 35 nudos (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Uso de la trigonometría en navegación

Un bote guardacostas de E.U. abandona Puerto Cleveland y promedia 35 **nudos** (millas náuticas por hora) en un viaje de 2 horas que lleva un rumbo de 53° y 3 horas en un rumbo de 143°. ¿Cuál es el rumbo y la distancia desde el Puerto Cleveland?

SOLUCIÓN En la figura 4.93 se modela la situación.

Resuelva algebraicamente En el diagrama, la línea AB es una transversal que corta un par de líneas paralelas. De esta manera, $\beta = 53°$ porque son ángulos alternos internos. El ángulo α, como es el suplementario de 143°, mide 37°. En consecuencia $\angle ABC = 90°$ y AC es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\triangle ABC$.

Utilice distancia = velocidad × tiempo para determinar las distancias AB y BC.

$$AB = (35 \text{ nudos})(2 \text{ horas}) = 70 \text{ millas náuticas}$$

$$BC = (35 \text{ nudos})(3 \text{ horas}) = 105 \text{ millas náuticas}$$

Resuelva el triángulo rectángulo para AC y θ.

$$AC = \sqrt{70^2 + 105^2} \qquad \text{Teorema de Pitágoras}$$

$$AC \approx 126.2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{105}{70}\right)$$

$$\theta \approx 56.3°$$

Interprete Encontramos que el rumbo del bote desde Puerto Cleveland es $53° + \theta$, o aproximadamente 109.3°. Son aproximadamente 126 millas náuticas.

Ahora resuelva el ejercicio 17.

Movimiento armónico simple

Debido a su naturaleza periódica, las funciones seno y coseno son útiles para describir el movimiento de objetos que oscilan, vibran o rotan. Por ejemplo, el sistema de la figura 4.94 convierte el movimiento de rotación de un motor a un movimiento de vaivén que algunas máquinas requieren.

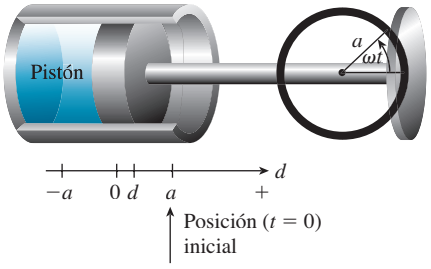


FIGURA 4.94 Un pistón operado con una rueda que gira a una velocidad constante, muestra un movimiento armónico simple.

Si las ruedas giran a una velocidad constante de ω radianes por segundo, el movimiento de vaivén del pistón es un ejemplo de *movimiento armónico simple* y puede modelarse mediante una ecuación de la forma,

$$d = a \cos \omega t, \quad \omega > 0,$$

donde a es el radio de la rueda y d es la distancia directa del pistón desde su centro de oscilación.

En aras de la simplicidad definimos el movimiento armónico simple en términos de un punto que se mueve a lo largo de una recta numérica.

FRECUENCIA Y PERIODO

Note que el movimiento armónico es sinusoidal, con amplitud $|a|$ y periodo $2\pi/\omega$. La frecuencia es el recíproco del periodo.

Movimiento armónico simple

Un punto que se mueve a lo largo de una recta numérica está en **movimiento armónico simple** si su distancia dirigida d desde el origen está dada por

$$d = a \operatorname{sen} \omega t \quad \text{o} \quad d = a \cos \omega t,$$

donde a y ω son número reales y $\omega > 0$. El movimiento tiene **frecuencia** $\omega/2\pi$, el cual es el número de oscilaciones por unidad de tiempo.

EXPLORACIÓN 1 **Observación del movimiento armónico**

Puede observar el movimiento armónico en su calculadora graficadora. Configure su graficadora en modo paramétrico y establezca $X_{1T} = \cos(T)$ y $Y_{1T} = \text{sen}\,(T)$. Seleccione Tmín = 0, Tmáx = 25, Tstep = 0.2, Xmín = −1.5, Xmáx = 1.5, Xscl = 1, Ymín = −100, Ymáx = 100, Yscl = 0.

Si su calculadora tiene la opción de cambiar el estilo para graficar con una punto móvil, elíjalo. Cuando grafique la función, verá que el punto se mueve a lo largo del eje de las x entre −1 y 1 en movimiento armónico. Si su graficadora no tiene esta opción, espere a que la graficadora termine de graficar, entonces presione TRACE y mantenga su dedo oprimiendo la tecla de la flecha derecha para ver al trazador moverse en movimiento armónico simple.

1. Para cada valor de T, la parametrización proporciona el punto (cos (T), sen (T)). ¿Qué curva bien conocida debe de producir esta parametrización?
2. ¿Por qué parece que el punto tiene un movimiento de vaivén sobre el eje x cuando debería seguir la curva identificada en la parte (1)? (*Sugerencia:* ¡Nuevamente compruebe la ventana de visualización!)
3. ¿Por qué el punto disminuye la velocidad en los extremos y aumenta en la mitad? (*Sugerencia:* Recuerde que la graficadora realmente está siguiendo la curva identificada en la parte (1).)
4. ¿Cómo describiría el movimiento armónico simple que sigue ese punto?

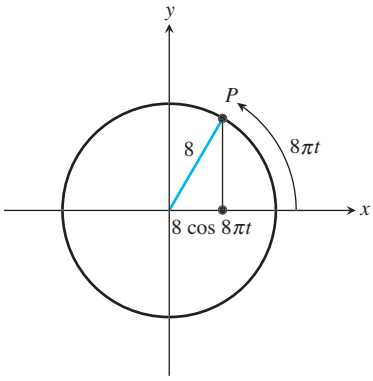
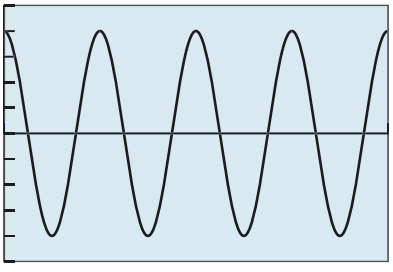


FIGURA 4.95 Modelación de la ruta de un pistón mediante una sinusoidal (ejemplo 5).



[0, 1] por [–10, 10]

FIGURA 4.96 Una sinusoidal de frecuencia 4 modela el movimiento del pistón en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Cálculo del movimiento armónico

En un sistema mecánico como el que se muestra en la figura 4.94, una rueda cuyo radio mide 8 cm gira con una velocidad angular de 8π radianes/s.

a) ¿Cuál es la frecuencia del pistón?

b) ¿Cuál es la distancia desde la posición inicial ($t = 0$) exactamente 3.45 segundos después del inicio?

SOLUCIÓN Imagine que la rueda está centrada en el origen y que $P(x, y)$ es un punto sobre su perímetro (figura 4.95). Conforme la rueda gira y P tiene también un movimiento de rotación, el movimiento del pistón sigue la ruta de la coordenada x del punto P a lo largo del eje x. El ángulo determinado por P en cualquier momento t es $8\pi t$, por lo que su coordenada y es $8\cos 8\pi t$. De lo anterior se desprende que, la sinusoidal $d = 8\cos 8\pi t$ modela el movimiento del pistón.

a) La frecuencia de $d = 8\cos 8\pi t$ es $8\pi/2\pi$, o 4. El pistón realiza 4 golpes con movimiento de vaivén completo en 4 segundos. En la figura 4.96 se muestra la gráfica de d como una función de t. Los cuatro ciclos de la gráfica sinusoidal en el intervalo [0, 1] modelan cuatro ciclos del motor o cuatro golpes del pistón. Note que la sinusoidal tiene un periodo de 1/4, el recíproco de la frecuencia.

continúa

b) Primero debemos encontrar la distancia entre las posiciones cuando $t = 0$ y $t = 3.45$.

La posición inicial cuando $t = 0$ es

$$d(0) = 8.$$

La posición cuando $t = 3.45$ es

$$d(3.45) = 8 \cos (8\pi \cdot 3.45) \approx 2.47.$$

La distancia entre las dos posiciones es aproximadamente $8 - 2.47 = 5.53$.

Interprete Se concluye que el pistón está aproximadamente a 5.53 cm de su posición inicial después de 3.45 s.

Ahora resuelva el ejercicio 27.

EJEMPLO 6 Cálculo del movimiento armónico simple

Una masa que oscila de arriba para abajo desde la parte superior de un resorte (suponga perfecta elasticidad y ausencia de fricción o resistencia del aire) puede modelarse como un movimiento armónico. La distancia máxima que la masa se desplaza es de 5 cm; encuentre la ecuación que modele tal situación si toma 2 segundos completar un ciclo (consulte la figura 4.97).

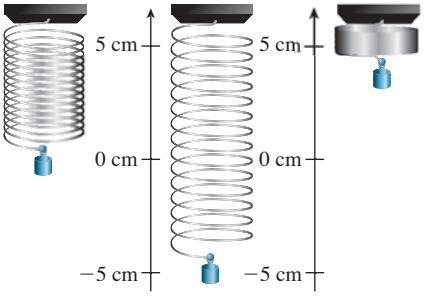


FIGURA 4.97 La masa y el resorte del ejemplo 6.

SOLUCIÓN Tenemos que elegir alguna de las dos ecuaciones $d = a \operatorname{sen} \omega t$ o $d = a \cos \omega t$. Suponga que el resorte está en el origen del sistema coordenado cuando $t = 0$, entonces se elige la ecuación $d = a \operatorname{sen} \omega t$.

Debido a que el desplazamiento máximo es de 5 cm, se concluye que la amplitud es $a = 5$.

Ya que toma 2 segundos completar un ciclo, se concluye que el periodo es 2 y la frecuencia es 1/2. Por lo tanto,

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2},$$
$$\omega = \pi.$$

Escribiendo esas expresiones juntas, la ecuación buscada es $d = 5 \operatorname{sen} \pi t$.

Ahora resuelva el ejercicio 29.

PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO (de la página 349)

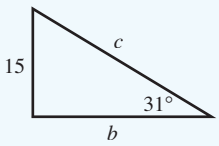
PROBLEMA: Si sabemos que la nota musical LA que está más arriba del DO medio tiene un tono de 440 hertz, ¿cómo podemos modelar el sonido producido por ella a 80 decibeles?

SOLUCIÓN: El sonido se modela a través de un movimiento armónico simple, cuya frecuencia corresponde a una nota que se mide en ciclos por segundo, y su amplitud es la sonoridad (intensidad), que se mide en decibeles. Así, para la nota musical LA con un tono de 440 hertz, se tiene la frecuencia $= \omega/2\pi = 440$ y por lo tanto $\omega = 2\pi 440 = 880\pi$. Si se toca esa nota con una sonoridad que alcance 80 decibeles, tenemos que $|a| = 80$. Usando el modelo del movimiento armónico simple $d = a \operatorname{sen} \omega t$ se tiene que $d = 80 \operatorname{sen} 880\pi t$.

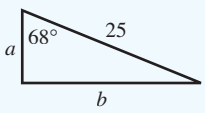
REPASO RÁPIDO 4.8 *(Para obtener ayuda consulte la sección 4.1, 4.2 y 4.3)*

En los ejercicios del 1 al 4 encuentre las longitudes a, b y c.

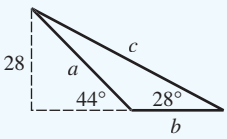
1.



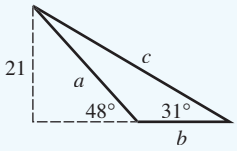
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 y 6 encuentre el complemento y el suplemento del ángulo.

5. 32° **6.** 73°

En los ejercicios 7 y 8 mencione el curso que describe la dirección.

7. NE (noreste) **8.** SSO (sur-suroeste)

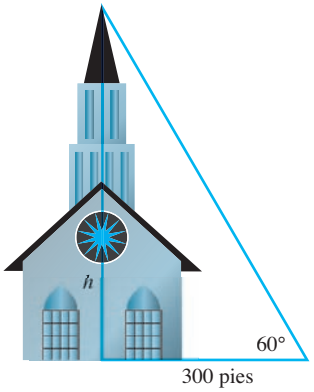
En los ejercicios 9 y 10 señale la amplitud y el periodo de la sinusoidal

9. $-3 \operatorname{sen} 2(x - 1)$ **10.** $4 \cos 4(x + 2)$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.8

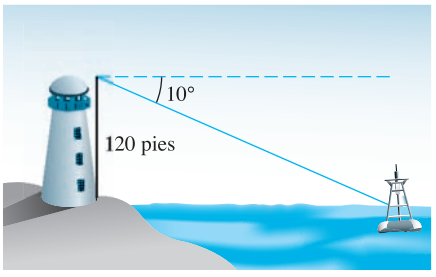
En los ejercicios del 1 al 43 resuelva el problema utilizando su conocimiento de geometría y las técnicas de esta sección. Si no se proporciona, esboce una figura que represente el problema en cuestión.

1. Determinación de la altura de una catedral El ángulo de elevación en lo alto de la Catedral de Ulm desde un punto a 330 pies de la base del inmueble al nivel del suelo es de 60°. Determine la altura de la catedral.



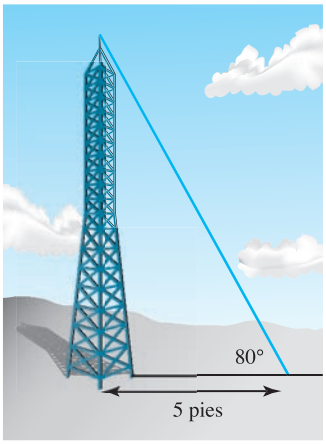
2. Determinación de la altura de un monumento Desde un punto a 100 pies de su base, el ángulo de elevación del punto más alto del Arco de Séptimo Severo, en Roma, Italia es 34°13′12″. ¿Cuánto mide de altura el monumento?

3. Cálculo de una distancia El ángulo de depresión de la parte alta del faro Smoketown (que está a 120 pies sobre la superficie del agua) con respecto a una boya es de 10°. ¿Qué tan lejos está la boya del faro?



4. Cálculo de las dimensiones de un estadio de béisbol La fila superior de los asientos rojos atrás de la base del bateador en el Estadio Riverfront de Cincinnati está 90 pies sobre el nivel del campo de juego. El ángulo de depresión hacia la base de la pared del jardín izquierdo es de 14°. ¿Qué tan lejos está la base de la pared del jardín izquierdo de un punto sobre el nivel del piso que está directamente debajo de la fila superior?

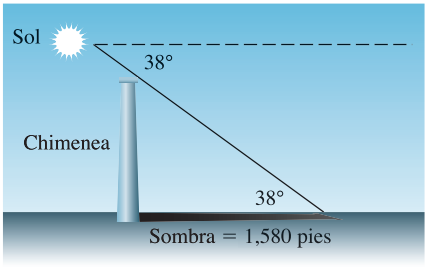
5. Cálculo de la longitud de un cable Un cable conecta la parte superior de una antena a un punto al nivel del piso a 5 pies de la base de la antena. El ángulo de elevación formado por este cable es de 80°. ¿Cuál es la longitud del cable y la altura de la antena?



6. Cálculo de una longitud Un cable está tensado desde la parte superior de un poste a un punto a nivel del piso que se encuentra a 16 pies de la base del poste. Si el cable crea un ángulo de 62° con el piso, encuentre la altura del poste y la longitud del cable.

7. Altura de la Torre Eiffel El ángulo de elevación de la parte superior de la antena de TV que está arriba de la Torre Eiffel en París mide 80°1′12″ en un punto a 185 pies de la base de la torre. ¿Cuánto mide de altura la torre incluyendo la antena de TV?

8. Determinación de la altura de la chimenea más alta La chimenea más grande del mundo, ubicada en el International Nickel Co., Sudbury, Ontario, proyecta una sombra que mide 1,580 pies de largo aproximadamente cuando el ángulo de elevación del Sol (medido desde el horizonte) es 38°. ¿Cuál es la altura de la chimenea?



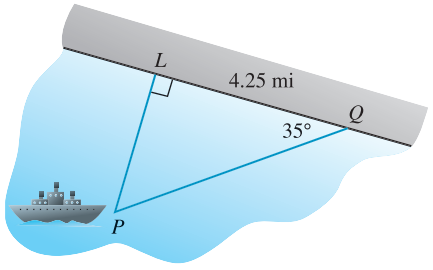
9. Altura de una nube Para medir la altura de una nube coloque un reflector brillante justo debajo de la nube y dirija el rayo hacia arriba. Desde un punto a 100 pies del proyector, el ángulo de elevación mide 83°12′. ¿Cuál es la distancia que hay entre el piso y la nube?

10. Elevación de una rampa Una rampa que está en una autopista mide 470 pies de largo y se eleva 32 pies. ¿Cuál es ángulo promedio de inclinación de la rampa al décimo de grado más cercano?

11. Altura de una antena Un cable atado a la parte superior de la antena de KSAM está anclado en un punto del piso a 10 pies de la base de la antena. Si el cable crea un ángulo de 55° en el nivel del piso, ¿cuánto mide de alto la antena?

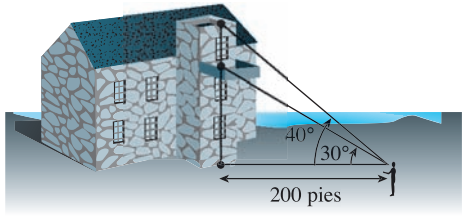
12. Altura de un edificio Para determinar la altura del Louisiana-Pacific (LP) Tower, el edificio más alto en Conroe, Texas, un topógrafo se coloca en un punto en el piso, al mismo nivel que la base del edificio LP. El punto en el que está el topógrafo está a 125 pies de la base del edificio y el ángulo de elevación a la parte superior del edificio es 29°48′. Halle la altura del edificio.

13. Navegación El *Paz Verde*, un bote de observación de ballenas, está localizado en el punto P, y L es el punto más cercano a la playa de Baja California. El punto Q está localizado a 4.25 millas de L que está sobre la costa y $\overline{PL} \perp \overline{LQ}$. Determine la distancia que el *Paz Verde* está de la playa si $\angle PQL = 35°$.

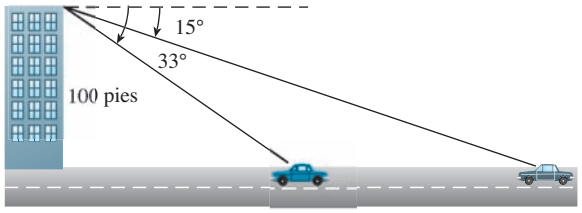


14. Excursionismo recreativo Mientras que Otis Evans está en una excursión en una ruta alrededor de la parte frontal de Colorado, determina que el ángulo de elevación hacia la parte superior de Long's Peak es de 30°. Si se mueve 1,000 pies para acercarse a la montaña, Otis determina que el ángulo de elevación es de 35°. ¿Cuánto sobrepasa la parte superior de Long's Peak de la elevación de Otis?

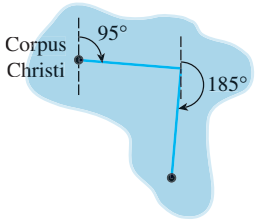
15. Ingeniería civil El ángulo de elevación desde un observador al borde inferior de la zona de observación del puente levadizo del río Delaware, que está ubicado a 200 pies del observador, es de 30°. El ángulo de elevación desde el observador a la parte superior de la zona de observación es de 40°. ¿Qué tan alta es la zona de observación?



16. Desplazamiento de un automóvil Desde la parte superior de un edificio de 100 pies, un hombre observa un automóvil que se mueve delante de él. Si el ángulo de depresión del automóvil cambia de 15 a 33° durante el periodo de observación, ¿cuál es la distancia que recorrió el automóvil?



17. Navegación El bote *Angélica* de la guardia costera viaja a 30 nudos desde el puerto de Corpus Christi en dirección de 95° por 2 horas y posteriormente cambia a la dirección de 185° por 2 horas. Encuentre la distancia y el rumbo desde el puerto Corpus Christi al bote.

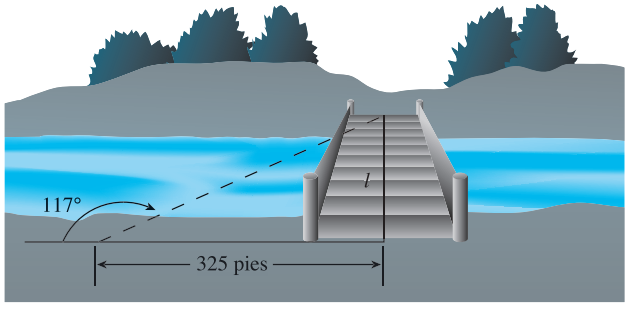


18. Navegación El *Cerrito Lindo* viaja a una velocidad de 40 nudos desde Fort Lauderdale en dirección de 65° por 2 horas y después cambia a la dirección de 155° por 4 horas. Determine la distancia y el rumbo desde Fort Lauderdale al bote.

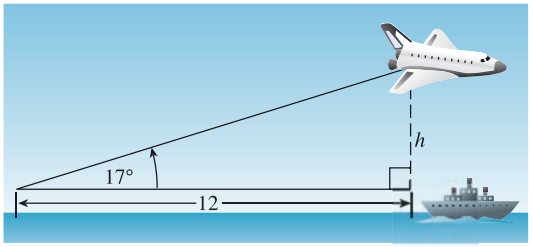
19. Medidas de tierra El ángulo de depresión es de 19° desde un punto que está 7,256 pies sobre el nivel del mar en el borde norte del Gran Cañón a un punto 6,159 pies sobre el nivel del mar en el borde sur. ¿Cuánto mide de ancho el cañón en ese punto?

20. Observación de un incendio por una guardabosques Una guardabosques detecta un incendio desde una torre de 73 pies en el parque nacional de Yellowstone. El ángulo de depresión que ella mide es de 1°20'. ¿A qué distancia está el incendio de la torre?

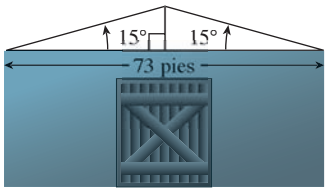
21. Ingeniería civil La localización de la línea de visión hacia el extremo este del puente Royal Gorge desde un punto a 325 pies del norte hacia el oeste del puente a través del Royal Gorge es de 117° ¿Cuál es el largo, l, del puente?



22. Vuelo espacial El ángulo de elevación de un trasbordador espacial desde Cabo Cañaveral es de 17° cuando el trasbordador está directamente sobre un barco que está 12 millas alejado de él. ¿Cuál es la altitud del trasbordador cuando está justo sobre el barco?

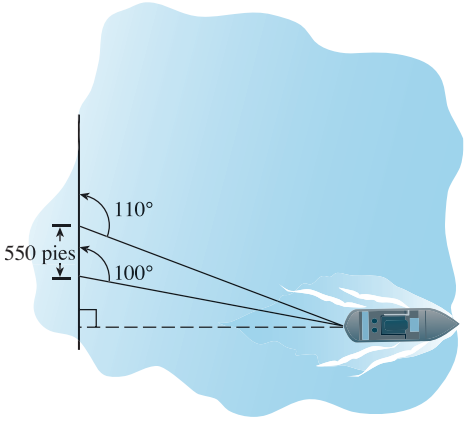


23. Diseño arquitectónico Un granero está construido como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide de alto el tramo central vertical?



24. Vuelo recreativo Un globo aerostático sobre Park City, Utah está a 760 pies sobre el nivel del suelo. El ángulo de depresión del globo a un observador es de de 5.25°. Suponiendo que el piso es relativamente plano, ¿qué tan lejos está el observador del punto en el piso que está directamente bajo el globo?

25. Navegación Una costa está en dirección norte-sur, y un bote está directamente al este de la costa. La dirección del bote a dos puntos sobre la playa es de 110 y de 100°. Suponga que los dos puntos están separados 550 pies. ¿Qué tan lejos está el bote de la costa?



26. Navegación Milwaukee, Wisconsin, está directamente al oeste de Grand Haven, Michigan, sobre lados opuestos del Lago Michigan. Cuando las noches son nubladas, un bote vigía parte de Milwaukee con rumbo de 105° y al mismo tiempo una pequeña embarcación de contrabando es conducida en dirección 195° desde Grand Haven. El bote vigía promedia 23 nudos y colisiona con la nave contrabandista. ¿Cuál era la velocidad promedio de la nave contrabandista?

27. Diseño mecánico *Tome como referencia la figura 4.94.* La rueda del sistema mecánico de un pistón, como la que se muestra en la figura, tiene un radio de 6 pulg. Ésta gira con una velocidad angular de 16π rad/s. La posición inicial es la misma que se puede apreciar en la figura 4.94.

a) ¿Cuál es la frecuencia del pistón?

b) ¿Cuál es la ecuación que modela el movimiento del pistón?

c) ¿Cuál es la distancia desde la posición inicial a 2.85 segundos después del inicio?

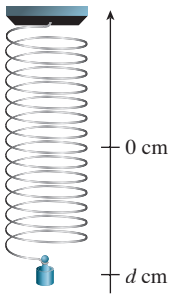
28. Diseño mecánico Suponga que la rueda del sistema mecánico del pistón como el que se puede observar en la figura 4.94 tiene un radio de 18 cm y gira con una velocidad angular de π rad/s.

a) ¿Cuál es la frecuencia del pistón?

b) ¿Cuál es la ecuación que modela el movimiento del pistón?

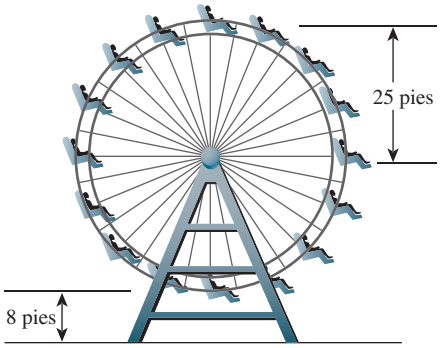
c) ¿Cuántos ciclos completa el pistón en 1 minuto?

29. Vibración de un resorte Una masa sujeta a un resorte oscila de arriba hacia abajo y completa un ciclo en 0.5 s. Su desplazamiento máximo es de 3 cm. Escriba una ecuación que modele ese movimiento.



30. Diapasón Un punto en el extremo de un diapasón vibra en movimiento armónico descrito por la ecuación $d = 14 \text{ sen } \omega t$. Encuentre ω para un diapasón que tiene una frecuencia de 528 vibraciones por segundo.

31. Movimiento de una rueda de la fortuna La rueda de la fortuna que se muestra en la siguiente figura da una vuelta completa cada 20 s. La altura de los pasajeros de la rueda, h, sobre el piso puede modelarse con la ecuación $h = a \text{ sen } \omega t + k$, en donde h y k están expresados en pies y t en segundos.



a) ¿Cuánto vale a?

b) ¿Cuánto vale k?

c) ¿Cuánto vale w?

32. Movimiento de una rueda de la fortuna Jacob y Emily se suben a una rueda de la fortuna en la feria de Billings, Montana. La rueda tiene un diámetro de 16 metros y gira a 3 rpm con su punto más bajo a 1 metro por arriba del piso. Suponga que la altura h a la que están Jacob y Emily sobre el piso es una función sinusoidal del tiempo t (en segundos), en donde $t = 0$ representa el punto más bajo de la rueda.

a) Escriba una ecuación para representar a h.

b) Haga una gráfica de h en el intervalo $0 \leq t \leq 30$.

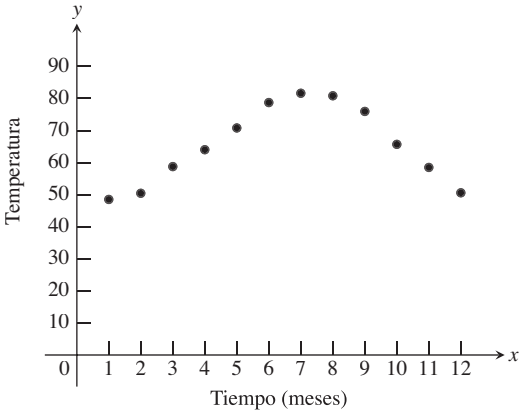
c) Use h para estimar la altura sobre el nivel del piso de Jacob y Emily para $t = 4$ y $t = 10$.

33. Temperaturas mensuales en Charleston La media de la temperatura normal mensual de los últimos 10 años en Charleston, SC se muestran en la tabla 4.3. Un diagrama de dispersión sugiere que la temperatura media mensual puede representarse como una curva sinusoidal. Suponga que la sinusoidal tiene la ecuación $y = a \text{ sen } (b\,(t - h)) + k$.

Tabla 4.3 Datos de la temperatura de Charleston, SC

Mes	Temperatura
1	48
2	51
3	58
4	64
5	72
6	78
7	82
8	81
9	76
10	66
11	58
12	51

Fuente: Centro Nacional de Información Climática, de acuerdo con The Word Almanac and Book of Facts 2005.



a) Dado que el periodo es de 12 meses, encuentre b.

b) Suponiendo que las temperaturas alta y baja que están en la tabla determinan el rango de la sinusoidal, encuentre a y k.

c) Encuentre un valor de h para el que el mínimo esté en $t = 1$ y el máximo en $t = 7$.

d) Sobreponga una gráfica de su sinusoidal al diagrama de dispersión de los datos. ¿Qué tanto ajuste hay entre ambos?

e) Use su modelo sinusoidal para predecir datos en el año en el que la temperatura media en Charleston será 70° (suponga que $t = 0$ representa al 1 de enero).

34. Escriba para aprender Para la rueda de la fortuna del ejercicio 31, ¿cuál ecuación modela correctamente la altura de un pasajero, si se considera que la vuelta inicia en la parte superior de la rueda cuando $t = 0$?

a) $h = 25 \operatorname{sen} \dfrac{\pi t}{10}$

b) $h = 25 \operatorname{sen} \dfrac{\pi t}{10} + 8$

c) $h = 25 \operatorname{sen} \dfrac{\pi t}{10} + 33$

d) $h = 25 \operatorname{sen} \left(\dfrac{\pi t}{10} + \dfrac{3\pi}{2} \right) + 33$

Explique su proceso mental y use una graficadora para elegir la ecuación correcta que modela la altura.

35. Ventas mensuales Debido a los costos iniciales y las variaciones temporales, Gina encontró que la ganancia mensual de su tienda de *bagels* durante el primer año siguió un patrón de altas y bajas que puede modelarse con la ecuación $P = 2t - 7 \sin(\pi t/3)$, en donde P se midió en cientos de dólares y t se midió en meses después del 1 de enero.

a) ¿En qué mes la tienda empezó a generar ganancias?

b) ¿En qué mes la tienda dejó de ganar sus ingresos más abundantes en el primer año?

36. Pérdida de peso Courtney probó muchas dietas distintas en un periodo de dos años con la finalidad de perder peso. Encontró que su peso W siguió una curva fluctuante que podía modelarse con la ecuación $W = 220 - 1.5t + 9.81 \operatorname{sen} (\pi t/4)$, en donde t representa los meses después del 1 de enero del primer año y W es el peso medido en libras.

a) ¿Cuál fue el peso de Courtney al inicio y al final de los dos años?

b) ¿Cuál fue su peso máximo durante el periodo de dos años?

c) ¿Cuál fue su peso mínimo durante el periodo de dos años?

Preguntas de examen estandarizado

37. Verdadero o falso Las ondas sonoras de las frecuencias más altas tienen periodos más cortos. Justifique su respuesta.

38. Verdadero o falso Un automóvil que se desplaza a 30 millas por hora va más rápido que una embarcación que lleva una velocidad de 30 nudos. Justifique su respuesta.

Puede utilizar una calculadora graficadora para responder estas preguntas

39. Opción múltiple Para tener una idea aproximada de la altura de un edificio, John se coloca en un punto a 50 pies de la base del edificio y mide el ángulo de elevación del piso a la parte superior del edificio que, en ese punto, es de 58°. ¿Cuánto mide de altura el edificio?

A) 31 pies **B)** 42 pies **C)** 59 pies
D) 80 pies **E)** 417 pies

40. Opción múltiple Un bote parte de un puerto y viaja a 20 nudos en una dirección de 90°. Después de dos horas, cambia el curso y toma una dirección de 150° y continúa a la misma velocidad por otra hora. Después de tres horas completas de viaje, ¿a qué distancia está del puerto?

A) 50 millas náuticas **B)** 53 millas náuticas
C) 57 millas náuticas **D)** 60 millas náuticas
E) 67 millas náuticas

41. Opción múltiple A las 8:15 P.M. cuando la marea es alta, el nivel del agua sobre el lado de un muelle es de 9 pies desde la parte superior del mismo. Cuando la marea baja, 6 horas y 12 minutos después, el nivel del agua es de 13 pies desde la parte superior. ¿En cuál de los siguientes tiempos en el intervalo el nivel del agua es de de 10 pies desde la parte superior del muelle?

A) 9:15 P.M. **B)** 9:48 P.M. **C)** 9:52 P.M.
D) 10:19 P.M. **E)** 11:21 P.M.

42. Opción múltiple ¿Por cuál característica de su onda sonora está determinada la intensidad de una nota musical?

A) Amplitud **B)** Frecuencia **C)** Periodo
D) Corrimiento de fase **E)** Tono

Exploraciones

43. Actividad en equipo Los datos del desplazamiento contra el tiempo de un diapasón, mostrados en la tabla 4.4, se obtuvieron empleando una CBL y un micrófono.

Tabla 4.4 Datos de un diapasón

Tiempo	Desplazamiento	Tiempo	Desplazamiento
0.00091	−0.080	0.00362	0.217
0.00108	0.200	0.00379	0.480
0.00125	0.480	0.00398	0.681
0.00144	0.693	0.00416	0.810
0.00162	0.816	0.00435	0.827
0.00180	0.844	0.00453	0.749
0.00198	0.771	0.00471	0.581
0.00216	0.603	0.00489	0.346
0.00234	0.368	0.00507	0.077
0.00253	0.099	0.00525	−0.164
0.00271	−0.141	0.00543	−0.320
0.00289	−0.309	0.00562	−0.354
0.00307	−0.348	0.00579	−0.248
0.00325	−0.248	0.00598	−0.035
0.00344	−0.041		

a) Grafique un diagrama de dispersión de los datos en la ventana de visualización [0, 0.0062] por [−0.5, 1].

b) Seleccione la ecuación que parece ajustarse mejor a esos datos.

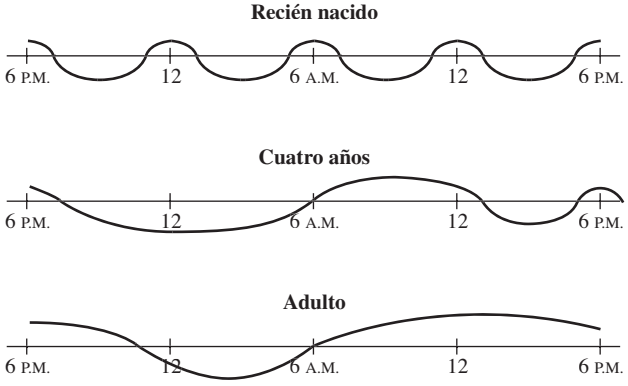
i. $y = 0.6 \operatorname{sen} (2{,}464x - 2.84) + 0.25$

ii. $y = 0.6 \operatorname{sen} (1{,}210x - 2) + 0.25$

iii. $y = 0.6 \operatorname{sen} (2{,}440x - 2.1) + 0.15$

c) ¿Cuál es la frecuencia aproximada del diapasón?

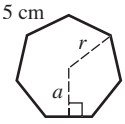
44. Escriba para aprender Los ciclos de vigilia-sueño de los humanos a tres diferentes edades se describen en las siguientes gráficas. Las porciones de las gráficas sobre las líneas horizontales representan los tiempos de vigilia, y las porciones debajo representan las horas de sueño.



a) ¿Cuál es el periodo del ciclo de vigilia-sueño de un recién nacido?, ¿de un niño de cuatro años de edad?, ¿de un adulto?

b) ¿Cuál de los tres ciclos de vigilia-sueño puede modelarse aproximadamente como una función $y = a \operatorname{sen} bx$?

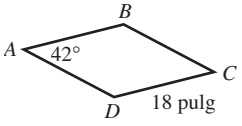
Uso de la trigonometría en geometría En un *polígono regular* todos los lados tiene igual longitud y todos los ángulos miden lo mismo. En los ejercicios 43 y 46 considere un polígono regular de siete lados cuyos lados miden 5 cm.



45. Encuentre la longitud del *apotema*, el segmento del centro del polígono regular de siete lados al punto medio de un lado cualquiera.

46. Encuentre el radio del círculo circunscrito del polígono regular de siete lados.

47. Un *rombo* es un cuadrilátero cuyos lados tiene igual longitud. Recuerde que un rombo también es un paralelogramo. Encuentre la longitud de AC y la de BD del rombo que se muestra aquí.



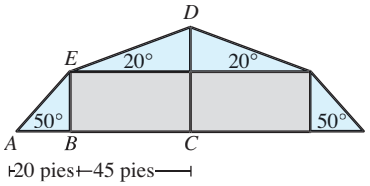
Ampliación de las ideas

48. Un techo tiene dos secciones, una con una elevación de 50° y el otro con una elevación de 20°, como se muestra en la figura.

a) Encuentre la altura BE.

b) Encuentre la altura CD.

c) Encuentre la longitud de $AE + ED$, y duplíquela para encontrar la longitud del borde del techo.



49. Camino empinado El *porcentaje de inclinación* de un camino es su pendiente expresada como porcentaje. Un camión pasa una señal en la que se lee "6% de inclinación en las próximas 7 millas". ¿Cuál es el ángulo promedio de inclinación del camino?

50. Cobertura de televisión Muchos satélites viajan en *órbitas geosincrónicas*, lo cual significa que el satélite se mantiene sobre el mismo punto de la Tierra todo el tiempo. Un satélite que transmite televisión por cable viaja en una órbita geosincrónica 100 millas sobre la Tierra. Suponga que la Tierra es una esfera con radio 4,000 millas, y encuentre la longitud del arco del área de cobertura del satélite de la televisión por cable sobre la superficie de la Tierra.

51. Actividad en equipo Una nota musical como la que se produce con un diapasón o un medidor de tonos es una onda de presión. Típicamente, la frecuencia se mide en hertz (1 Hz = 1 ciclo por segundo). La tabla 4.5 proporciona la frecuencia (en Hz) de varias notas musicales. Los datos del diapasón que corresponde al tiempo contra la presión que están en la tabla 4.6 se compilaron empleando una CBL y un micrófono.

Tabla 4.5 Datos de un diapasón

Nota	Frecuencia (Hz)
C	262
C♯ o D♭	277
D	294
D♯ o E♭	311
E	330
F	349
F♯ o G♭	370
G	392
G♯ o A♭	415
A	440
A♯ o B♭	466
B	494
C (siguiente octava)	524

Tabla 4.6 Datos de un diapasón

Tiempo (s)	Presión	Tiempo (sec)	Presión
0.0002368	1.29021	0.0049024	−1.06632
0.0005664	1.50851	0.0051520	0.09235
0.0008256	1.51971	0.0054112	1.44694
0.0010752	1.51411	0.0056608	1.51411
0.0013344	1.47493	0.0059200	1.51971
0.0015840	0.45619	0.0061696	1.51411
0.0018432	−0.89280	0.0064288	1.43015
0.0020928	−1.51412	0.0066784	0.19871
0.0023520	−1.15588	0.0069408	−1.06072
0.0026016	−0.04758	0.0071904	−1.51412
0.0028640	1.36858	0.0074496	−0.97116
0.0031136	1.50851	0.0076992	0.23229
0.0033728	1.51971	0.0079584	1.46933
0.0036224	1.51411	0.0082080	1.51411
0.0038816	1.45813	0.0084672	1.51971
0.0041312	0.32185	0.0087168	1.50851
0.0043904	−0.97676	0.0089792	1.36298
0.004.6400	−1.51971		

a) Haga un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine a, b y h de tal manera que la ecuación $y = a \operatorname{sen}(b(t - h))$ sea un modelo de los datos.

c) Determine la frecuencia de la sinusoidal de la parte b), y use la tabla 4.5 para identificar la nota musical producida por el diapasón.

d) Identifique la nota musical producida por el diapasón usado en el ejercicio 43.

Ideas Clave DEL CAPÍTULO 4

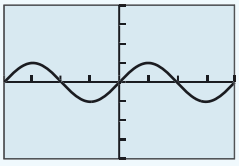
PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

Longitud del Arco 353
Función tangente inversa 417
Razones trigonométricas de triángulos rectángulos 360
Ángulos especiales 380
Funciones trigonométricas de números reales 378
Sinusoidales 389
Función seno inverso 414

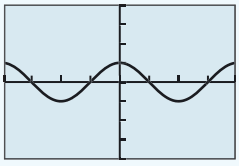
PROCEDIMIENTOS

Función coseno inverso 416
Conversión de las mediciones de los ángulos 353

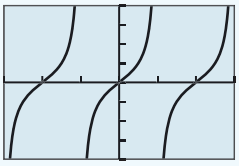
GALERÍA DE FUNCIONES



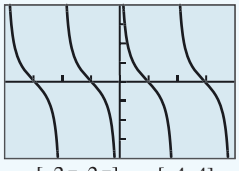
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$
$f(x) = \operatorname{sen} x$



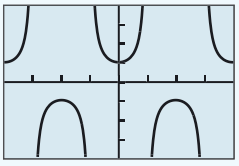
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$
$f(x) = \cos x$



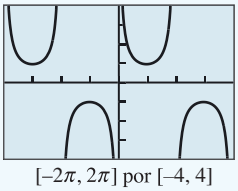
$[-3\pi/2, 3\pi/2]$ por $[-4, 4]$
$f(x) = \tan x$



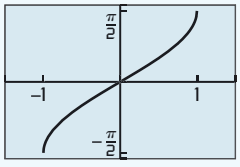
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$
$f(x) = \cot x$



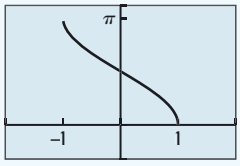
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$
$f(x) = \sec x$



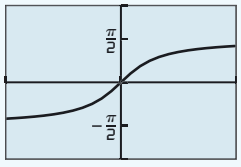
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$
$f(x) = \csc x$



$[-1.5, 1.5]$ por $[-1.7, 1.7]$
$f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$



$[-2, 2]$ por $[-1, 3.5]$
$f(x) = \cos^{-1} x$



$[-4, 4]$ por $[-2.8, 2.8]$
$f(x) = \tan^{-1} x$

CAPÍTULO 4 Ejercicios de repaso

La colección de ejercicios marcados en azul podría utilizarse como un examen del capítulo.

En los ejercicios del 1 al 8 determine el cuadrante del lado terminal del ángulo en posición estándar. Convierta las medidas de grados a radianes y de radianes a grados.

1. $\frac{5\pi}{2}$ **2.** $\frac{3\pi}{4}$

3. $-135°$ **4.** $-45°$

5. $78°$ **6.** $112°$

7. $\frac{\pi}{12}$ **8.** $\frac{7\pi}{10}$

En los ejercicios 9 y 10 determine la medida del radio en grados y en radianes. Dibuje el ángulo en posición estándar si su lado terminal se obtiene como se describe.

9. Una rotación de tres cuartos en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj.

10. Una rotación de dos giros y medio en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj.

En los ejercicios del 11 al 16, el punto está en el lado terminal de un ángulo en posición estándar. Proporcione la medida del ángulo positivo más pequeño en grados y en radianes.

11. $(\sqrt{3}, 1)$ **12.** $(-1, 1)$

13. $(-1, \sqrt{3})$ **14.** $(-3, -3)$

15. $(6, -12)$ **16.** $(2, 4)$

En los ejercicios 17 al 28 evalúe con exactitud la expresión sin utilizar calculadora.

17. sen $30°$ **18.** cos $330°$

19. tan $(-135°)$ **20.** sec $(-135°)$

21. sen $\frac{5\pi}{6}$ **22.** csc $\frac{2\pi}{3}$

23. sec $(-\frac{\pi}{3})$ **24.** tan $(-\frac{2\pi}{3})$

25. csc $270°$ **26.** sec $180°$

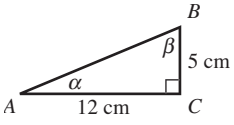
27. cot $(-90°)$ **28.** tan $360°$

En los ejercicios 29 al 32 evalúe con exactitud las seis funciones trigonométricas del ángulo. Emplee triángulos de referencia y no su calculadora.

29. $-\frac{\pi}{6}$ **30.** $\frac{19\pi}{4}$

31. $-135°$ **32.** $420°$

33. Determine las seis funciones trigonométricas de a en DABC.



34. Use un triángulo rectángulo para determinar los valores de todas las funciones trigonométricas de θ, en donde $\cos\theta = 5/7$.

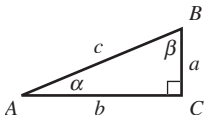
35. Use un triángulo rectángulo para determinar los valores de todas las funciones trigonométricas de θ, en donde $\tan\theta = 15/8$.

36. Use una calculadora en modo grado para resolver $\theta = 3/7$ si $0° \le \theta \le 90°$.

37. Use una calculadora en modo radián para resolver tan $x = 1.35$ si $\pi \le x \le 3\pi/2$.

38. Use una calculadora en modo radián para resolver sen $x = 0.218$ si $0 \le x \le 2\pi$.

En los ejercicios 39 al 44 resuelva el $\triangle ABC$ rectángulo.



39. $\alpha = 35°,\ c = 15$ **40.** $b = 8,\ c = 10$

41. $\beta = 48°,\ a = 7$ **42.** $\alpha = 28°,\ c = 8$

43. $b = 5,\ c = 7$ **44.** $a = 2.5,\ b = 7.3$

En los ejercicios del 45 al 48, x es un ángulo en posición estándar $0 \le x \le 2\pi$. Determine el cuadrante de x.

45. sen $x < 0$ y tan $x > 0$

46. cos $x < 0$ y csc $x > 0$

47. tan $x < 0$ y sen $x > 0$

48. sec $x < 0$ y csc $x > 0$

En los ejercicios del 49 al 52, el punto P está sobre el lado terminal del ángulo θ. Evalúe las seis funciones trigonométricas para θ.

49. $(-3, 6)$ **50.** $(12, 7)$

51. $(-5, -3)$ **52.** $(4, 9)$

En los ejercicios 53 al 60 use transformaciones para describir cómo la gráfica de la función está relacionada con la gráfica de una función trigonométrica básica. Grafique dos periodos.

53. $y = \text{sen}\,(x + \pi)$ **54.** $y = 3 + 2\cos x$

55. $y = -\cos(x + \pi/2) + 4$ **56.** $y = -2 - 3\,\text{sen}\,(x - \pi)$

57. $y = \tan 2x$ **58.** $y = -2\cot 3x$

59. $y = -2\sec\frac{x}{2}$ **60.** $y = \csc \pi x$

En los ejercicios del 61 al 66 establezca la amplitud, el periodo, el corrimiento de fase, el dominio y el rango de la sinusoidal.

61. $f(x) = 2\,\text{sen}\,3x$ **62.** $g(x) = 3\cos 4x$

63. $f(x) = 1.5\,\text{sen}\,(2x - \pi/4)$ **64.** $g(x) = -2\,\text{sen}\,(3x - \pi/3)$

65. $y = 4\cos(2x - 1)$ **66.** $g(x) = -2\cos(3x + 1)$

En los ejercicios 67 y 68 grafique la función. Después estime los valores a, b y h tal que $f(x) \approx a\,\text{sen}\,(b(x - h))$.

67. $f(x) = 2\,\text{sen}\,x - 4\cos x$

68. $f(x) = 3\cos 2x - 2\,\text{sen}\,2x$

En los ejercicios del 69 al 72 use una calculadora para evaluar la expresión. Proporcione su respuesta en grados y en radianes.

69. $\text{sen}^{-1}(0.766)$ **70.** $\cos^{-1}(0.479)$

71. $\tan^{-1}1$ **72.** $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

En los ejercicios del 73 al 76 use transformaciones para describir cómo la gráfica de la función está relacionada con la gráfica de una función trigonométrica básica. Establezca el dominio y el rango.

73. $y = \text{sen}^{-1}\,3x$ **74.** $y = \tan^{-1}\,2x$

75. $y = \text{sen}^{-1}\,(3x - 1) + 2$ **76.** $y = \cos^{-1}\,(2x + 1) - 3$

En los ejercicios del 77 al 82 encuentre el valor exacto de x sin usar calculadora.

77. $\text{sen}\,x = 0.5, \quad \pi/2 \le x \le \pi$

78. $\cos x = \sqrt{3}/2, \quad 0 \le x \le \pi$

79. $\tan x = -1, \quad 0 \le x \le \pi$

80. $\sec x = 2, \quad \pi \le x \le 2\pi$

81. $\csc x = -1, \quad 0 \le x \le 2\pi$

82. $\cot x = -\sqrt{3}, \quad 0 \le x \le \pi$

En los ejercicios 83 y 84 describa el comportamiento en los extremos de la función.

83. $\dfrac{\text{sen}\,x}{x^2}$ **84.** $\dfrac{3}{5}e^{-x/12}\,\text{sen}\,(2x - 3)$

En los ejercicios del 85 al 88 evalúe la expresión sin usar calculadora.

85. $\tan\,(\tan^{-1}\,1)$ **86.** $\cos^{-1}\,(\cos\,\pi/3)$

87. $\tan\,(\sin^{-1}\,3/5)$ **88.** $\cos^{-1}\,(\cos\,-\pi/7)$

En los ejercicios del 89 al 92 determine si la función es periódica. Señale cuál es el periodo (si es pertinente), el dominio y el rango.

89. $f(x) = |\sec x|$ **90.** $g(x) = \text{sen}\,|x|$

91. $f(x) = 2x + \tan x$ **92.** $g(x) = 2\cos 2x + 3\,\text{sen}\,5x$

93. Longitud del arco Encuentre la longitud del arco que es intersecado por un ángulo central de $2\pi/3$ en un círculo con radio 2.

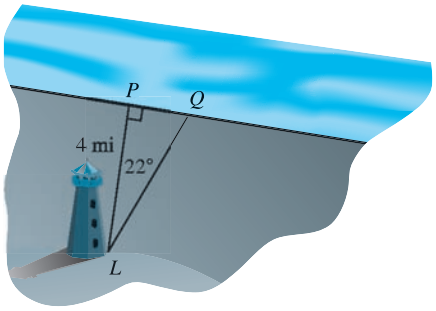
94. Expresión algebraica Obtenga una expresión algebraica equivalente a $\tan(\cos^{-1} x)$.

95. Altura de un edificio El ángulo de elevación de la parte superior de un edificio a un punto separado del edificio por 100 metros sobre el nivel del piso es de 78°. Encuentre la altura del edificio.

96. Altura de un árbol Un árbol proyecta una sombra de 52 pies de largo cuando el ángulo de elevación del Sol (medido con respecto al horizonte) es de 25°. ¿Cuánto mide de alto el árbol?

97. Recorrido de un automóvil Desde la parte superior de un edificio de 150 pies Flora observa a un automóvil delante de ella. Si el ángulo de depresión del automóvil cambia de 18° a 42° durante la observación, ¿qué distancia recorrió el automóvil?

98. Obtención de la distancia Un faro L, está a 4 millas del punto más cercano P a lo largo de una costa recta (consulte la figura). Encuentre la distancia del punto P al punto Q a lo largo de la playa si $\angle PLQ = 22°$.



99. Navegación Un aeroplano está viajando hacia el este entre dos torres de señalización. Una torre está al norte de la otra. El curso del aeroplano con respecto a la torre norte es de 23° y de 128° con respecto a la torre sur. Utilice un dibujo para mostrar la localización exacta del aeroplano.

100. Determinación de la distancia Los cursos de un bote con respecto a dos puntos sobre la playa son de 115 y 123°. Suponga que la distancia entre los dos puntos es de 855 pies. ¿Cuál es la distancia del bote al punto más cercano sobre la playa, si la playa es recta y va de norte a sur?

101. Altura de un árbol El Dr. Tom Lawson está parado en un piso plano a 62 pies de la base de un abeto Douglas y mide el ángulo de elevación a la parte superior de árbol que resulta ser de 72°24' ¿Cuánto mide de alto el árbol?

102. Almacenamiento de heno En la granja Lovelady se utiliza una banda transportadora de 75 pies de largo para empacar heno y almacenarlo para el invierno. La banda transportadora está inclinada en un ángulo de elevación de 22°.

a) ¿A qué altura puede moverse el heno?

b) Si la banda transportadora se reposiciona a un ángulo de 27°, ¿a qué altura puede moverse el heno?

103. Oscilación de un péndulo En el parque de diversiones Hardy Boys, específicamente la zona *Mientras el reloj funcione*, el péndulo del reloj del abuelo mide 44 pulgadas de largo y su movimiento oscilatorio se realiza en un arco de 6°. Encuentre la longitud del arco que traza el péndulo.

104. Cálculo de un área El limpiaparabrisas de un automóvil 1994 Plymouth mide 20 pulgadas de largo y tiene un hoja de 16 pulgadas. Si el limpiaparabrisas barre un ángulo de 110°, ¿cuánto mide de largo el área que cubre la hoja del limpiaparabrisas? (Consulte el ejercicio 71, en la sección 4.1.)

105. Modelación de la temperatura media El promedio diario de la temperatura del aire (en °F) para Fairbanks, Alaska, de 1975 a 2004, puede modelarse mediante la ecuación

$$T(x) = 37.3\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(x - 114)\right] + 26,$$

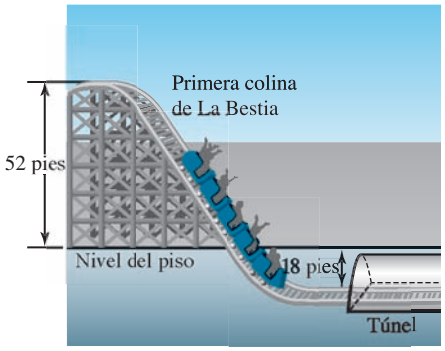
en donde x es el tiempo en días y $x = 1$ representa el 1 de enero. ¿En qué días se puede esperar que la temperatura sea de 32°F?

Fuente: Centro Nacional de Información Climática, de acuerdo con The Word Almanac and Book of Facts 2005.

106. Domando a La Bestia *La Bestia* es una montaña rusa y es la atracción del parque King Island que está justo al norte de Cincinnati. En su primera y más grande colina, La Bestia baja de una altura de 52 pies sobre el piso a lo largo de una ruta sinusoidal a una profundidad de 18 pies bajo el piso y entra a un túnel tenebroso. El modelo matemático de esa parte del recorrido es

$$h(x) = 35 \cos\left(\frac{x}{35}\right) + 17, \ 0 \le x \le 110,$$

donde x es la distancia horizontal de la parte superior de la colina y $h(x)$ es la posición vertical con respecto al nivel del piso (ambos en pies). ¿Cuál es la distancia horizontal de la parte superior de la colina al punto en donde el recorrido llega al nivel del piso?



CAPÍTULO 4 Proyecto

Modelación del movimiento de un péndulo

Cuando un péndulo simple oscila en un movimiento de vaivén, su desplazamiento puede modelarse con una ecuación sinusoidal estándar de la forma:

$$y = a \cos (b(x - h)) + k$$

donde y representa la distancia del péndulo desde un punto fijo y x representa el tiempo transcurrido. En este proyecto, deberá emplear un detector de movimiento para recolectar los datos de la distancia y el tiempo del péndulo oscilante, para entonces obtener un modelo matemático que describa el movimiento del péndulo.

Recolección de datos

Para empezar, construya un péndulo simple sujetando una bola con una cuerda de 1 metro. Configure la CBL (calculadora de laboratorio) con un detector de movimiento o un sistema CBR (calculadora de campo) para recolectar los tiempos y las distancias que hay en un intervalo que va de 2 a 4 segundos (suficiente tiempo para registrar al menos una oscilación completa del péndulo). Vea el instructivo de la CBL/CBR para conocer las especificaciones con respecto a la selección de los comandos. Inicie el movimiento del péndulo frente el detector y active el sistema. Los datos de la tabla siguiente incluyen un conjunto muestra de los datos recolectados.

Tiempo total transcurrido (s)	Distancia a la CBR (m)
0	0.665
0.1	0.756
0.2	0.855
0.3	0.903
0.4	0.927
0.5	0.931
0.6	0.897
0.7	0.837
0.8	0.753
0.9	0.663
1.0	0.582
1.1	0.525
1.2	0.509
1.3	0.495
1.4	0.521
1.5	0.575
1.6	0.653
1.7	0.741
1.8	0.825
1.9	0.888
2.0	0.921

Recolección de datos

1. Si recopila datos del movimiento utilizando una CBL o CBR, podrá apreciar en la pantalla de su computadora o su graficadora un diagrama de la distancia contra el tiempo. Si no tiene acceso a una CBL/CBR, ingrese los datos en la tabla en su calculadora graficadora o su computadora. Elabore un diagrama de dispersión de los datos.
2. Determine los valores de a, b, h y k, tales que la ecuación $y = a \cos (b(x - h)) + k$ se ajuste a la gráfica de la distancia contra el tiempo. Tome como referencia el recuadro de información de la página 390, en este capítulo, para revisar las características gráficas de las sinusoidales.
3. ¿Cuál es el significado físico de las constantes a y k en la ecuación de modelado $y = a \cos (b(x - h)) + k$? (*Sugerencia:* ¿Qué mide la distancia entre a y k?)
4. ¿Cuáles de los valores de a, b, h, y/o k cambiaría, si usted utiliza la ecuación $y = a \text{ sen } (b(x - h)) + k$ para modelar al conjunto de datos?
5. Utilice su calculadora o computadora para encontrar una ecuación de regresión sinusoidal para modelar este conjunto de datos (consulte el instructivo de su graficadora para saber cómo hacer esto). Si su calculadora o computadora usa una forma diferente de la sinusoidal, compárela con la ecuación de modelado que encontró anteriormente, $y = a \cos (b(x - h)) + k$.

CAPÍTULO 5

Trigonometría analítica

5.1 Identidades fundamentales

5.2 Demostración de identidades trigonométricas

5.3 Identidades de suma y diferencia

5.4 Identidades de múltiplos de un ángulo

5.5 Ley de los senos

5.6 Ley de los cosenos



No sorprende que, en su esfuerzo por estimar las poblaciones de la fauna, los naturalistas deban adquirir una buena comprensión de geometría (que literalmente significa "medir la tierra"). En este capítulo aprenderá que la trigonometría, con sus múltiples conexiones con triángulos y círculos, nos permite ampliar de manera significativa el repertorio de herramientas para resolver problemas de geometría. En la página 493 aplicaremos un resultado denominado fórmula de Herón (la cual demostramos con trigonometría) para estimar la densidad local de una población de ciervos.

Panorama general del capítulo 5

Aunque el título de este capítulo sugiere que ahora pasaremos a la fase analítica de nuestro estudio de funciones trigonométricas, lo cierto es que ya hemos visto esa fase en varias secciones. Una vez que se hace la transición de razones de triángulos a funciones y sus gráficas, uno se encuentra en el terreno analítico. Pero hasta ahora nuestras aplicaciones principales de trigonometría han sido computacionales; no hemos utilizado las propiedades de las funciones para estudiar las relaciones entre las funciones trigonométricas. En este capítulo cambiaremos nuestro enfoque hacia la teoría y las demostraciones, explorando hacia dónde nos llevan las propiedades de estas funciones especiales; frecuentemente, esas direcciones no tienen una relación directa con cuestiones del mundo real. Durante el proceso, queremos que aprecie el rico e intrincado mundo de los patrones que pueden tejerse a partir de las seis funciones trigonométricas básicas, patrones que adquirirán una mayor belleza cuando podamos verlas a través de la óptica del cálculo.

5.1 Identidades fundamentales

Aprenderá acerca de...

- Identidades
- Identidades trigonométricas básicas
- Identidades pitagóricas
- Identidades de cofunciones
- Identidades impar-par
- Simplificación de expresiones trigonométricas
- Resolución de ecuaciones trigonométricas

...porque

Las identidades son importantes cuando, en cálculo, se trabaja con funciones trigonométricas.

Identidades

Como quizá ya se haya dado cuenta, el símbolo "=" tiene varios significados en matemáticas.

1. $1 + 1 = 2$ significa *igualdad de números reales*. Es una proposición verdadera.
2. $2(x - 3) = 2x - 6$ significa *expresiones equivalentes*. Es una proposición verdadera.
3. $x^2 + 3 = 7$ es una *proposición abierta*, ya que puede ser verdadera o falsa, dependiendo de si x es una solución para la ecuación.
4. $(x^2 - 1)/(x + 1) = x - 1$ es una *identidad*. Es una proposición verdadera (muy parecida a la del punto 2), pero con un requisito importante: *x debe estar en el dominio de ambas expresiones.* Si alguno de los lados de la igualdad no está definido, la proposición carece de sentido. Al sustituir -1 en ambos lados de la ecuación, en el punto 3, se obtiene una proposición que matemáticamente es falsa (por ejemplo, $4 = 7$), mientras que al sustituir -1 en ambos lados de la identidad, en el punto 4, se obtiene una proposición que carece de significado.

Enunciados como "$\tan \theta = \operatorname{sen} \theta/\cos \theta$" y $\csc \theta = 1/\operatorname{sen} \theta$" son **identidades** trigonométricas, son verdaderas para todos los valores de la variable para los cuales ambos lados de la ecuación están definidas. El conjunto de todos los valores se denomina **dominio de validez** de la identidad. Empleamos gran parte de este capítulo en explorar las identidades trigonométricas, sus demostraciones, sus simplificaciones y sus aplicaciones.

Identidades trigonométricas básicas

Algunas identidades trigonométricas se deducen en forma directa de las definiciones de las seis funciones trigonométricas básicas. Estas *identidades básicas* consisten en las *identidades recíprocas* y las *identidades cocientes*.

Identidades trigonométricas básicas

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

Identidades cocientes

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

EXPLORACIÓN 1 **Argumento acerca del dominio de validez**

1. $\theta = 0$ está en el dominio de validez de exactamente tres de las identidades básicas. ¿Cuáles tres?
2. Para exactamente dos de las identidades básicas, un lado de la ecuación está definido en $\theta = 0$ y el otro lado no. ¿Cuáles dos?
3. Para exactamente tres de las identidades básicas, ambos lados de la ecuación están indefinidos en $\theta = 0$. ¿Cuáles tres?

Identidades pitagóricas

La exploración 2 de la sección 4.3 presentó el hecho de que, para cualquier número real t, los números $(\cos t)^2$ y $(\operatorname{sen} t)^2$ suman 1. Esto es claro para ángulos de cuadrante, que en su lado final incluyen a $(\pm 1, 0)$ o a $(0, \pm 1)$, y es verdadera para cualquier otra t ya que $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ son las longitudes (con signo) de los catetos de un triángulo de referencia con hipotenusa 1 (figura 5.1). No importa en qué cuadrante se encuentre el triángulo, el teorema de Pitágoras garantiza la identidad siguiente: $(\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1$.

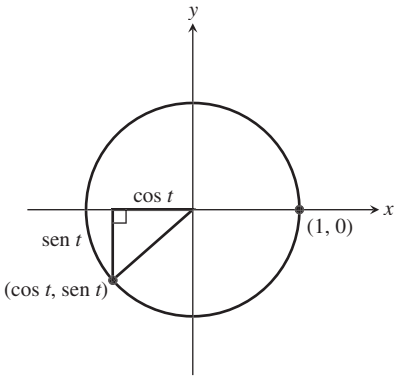


FIGURA 5.1 Por el teorema de Pitágoras, $(\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1$.

Si dividimos cada término de la identidad entre $(\cos t)^2$, obtenemos una identidad que incluye a tangente y secante:

$$\frac{(\cos t)^2}{(\cos t)^2} + \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{(\cos t)^2} = \frac{1}{(\cos t)^2}$$

$$1 + (\tan t)^2 = (\sec t)^2$$

Si dividimos cada término de la identidad entre $(\operatorname{sen} t)^2$, obtenemos una identidad que incluye a cotangente y cosecante:

$$\frac{(\cos t)^2}{(\operatorname{sen} t)^2} + \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{(\operatorname{sen} t)^2} = \frac{1}{(\operatorname{sen} t)^2}$$

$$(\cot t)^2 + 1 = (\csc t)^2$$

Estas tres identidades se denominan *identidades pitagóricas*, que volvemos a enunciar mediante la notación abreviada para potencias de funciones trigonométricas.

Identidades pitagóricas

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

EJEMPLO 1 Uso de las identidades

Determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, si $\tan\theta = 5$ y $\cos\theta > 0$.

SOLUCIÓN Podríamos resolver este problema mediante las técnicas del ángulo de referencia de la sección 4.3 (consulte el ejemplo 7), pero aquí mostraremos una solución alternativa utilizando únicamente identidades.

Primero, observamos que $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + 5^2 = 26$, así que $\sec\theta = \pm\sqrt{26}$. Como $\sec\theta = \pm\sqrt{26}$, tenemos $\cos\theta = 1/\sec\theta = 1/\pm\sqrt{26}$. Pero $\cos\theta > 0$, así que $\cos\theta = 1/\sqrt{26}$.

Por último,

$$\tan\theta = 5$$
$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 5$$
$$\operatorname{sen}\theta = 5\cos\theta = 5\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right) = \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$ y $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$. ***Ahora resuelva el ejercicio 5.***

Si prefiere el método del triángulo de referencia, está bien. Recuerde que combinar las potencias de geometría y álgebra para resolver problemas es uno de los temas de este libro, y la intuición para hacerlo le servirá bastante en cálculo.

Identidades de cofunciones

Si C es el ángulo recto de un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, entonces A y B son complementarios. Observe lo que sucede si utilizamos las razones usuales de los triángulos para definir las seis funciones trigonométricas de los ángulos A y B (figura 5.2).

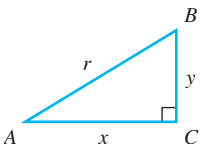


FIGURA 5.2 Los ángulos A y B son complementarios en el triángulo rectángulo $\triangle ABC$.

Ángulo A:	$\operatorname{sen} A = \dfrac{y}{r}$	$\tan A = \dfrac{y}{x}$	$\sec A = \dfrac{r}{x}$
	$\cos A = \dfrac{x}{r}$	$\cot A = \dfrac{x}{y}$	$\csc A = \dfrac{r}{y}$
Ángulo B:	$\operatorname{sen} B = \dfrac{x}{r}$	$\tan B = \dfrac{x}{y}$	$\sec B = \dfrac{r}{y}$
	$\cos B = \dfrac{y}{r}$	$\cot B = \dfrac{y}{x}$	$\csc B = \dfrac{r}{x}$

¿Observa lo que sucede? En cada caso, el valor de una función en A es igual al valor de su cofunción en B. Esto siempre sucede con ángulos complementarios; de hecho, es este fenómeno el que da a su nombre a una "co" función. La sílaba "co" es por "complemento".

Identidades de cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{sen}\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

Aunque nuestro argumento se basó en ángulos agudos de triángulos, estas ecuaciones en realidad son identidades, válidas para todos los números reales para los cuales ambos lados de la ecuación estén definidos. Podríamos extender nuestro argumento de ángulo agudo para producir una demostración general, pero será más sencillo esperar y utilizar las identidades de la sección 5.3. En esa sección volveremos a tratar este conjunto particular de identidades fundamentales.

Identidades impar-par

Hemos visto que toda función trigonométrica básica es impar o par. En cualquier caso, la relación funcional usual lleva a otra identidad fundamental.

Identidades impar-par

$$\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x \qquad \cos(-x)=\cos x \qquad \tan(-x)=-\tan x$$

$$\csc(-x)=-\csc x \qquad \sec(-x)=\sec x \qquad \cot(-x)=-\cot x$$

EJEMPLO 2 Uso de más identidades

Si $\cos\theta = 0.34$, determine $\operatorname{sen}(\theta - \pi/2)$.

SOLUCIÓN Este problema se puede resolver mejor con el uso de identidades.

$$\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \quad \text{Seno es impar.}$$

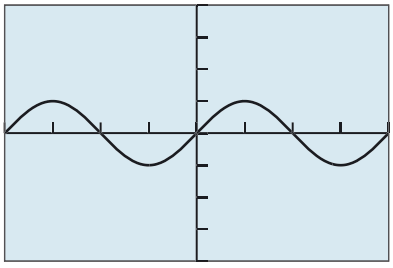
$$=-\cos\theta \quad \text{Identidad de confunción}$$

$$=-0.34$$

Ahora resuelva el ejercicio 7.

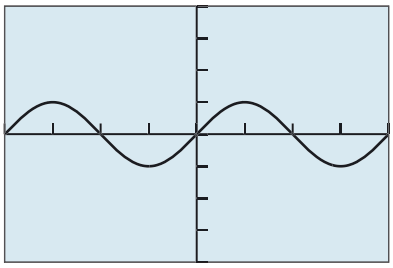
Simplificación de expresiones trigonométricas

Con frecuencia, en cálculo es necesario tratar con expresiones que incluyen funciones trigonométricas. Algunas de esas expresiones lucen muy complicadas al principio, pero en ocasiones es posible utilizar identidades junto con técnicas algebraicas (por ejemplo, factorización o combinación de fracciones a un común denominador) para *simplificar* las expresiones antes de tratarlas. En algunos casos las simplificaciones pueden ser drásticas.



[–2π, 2π] por [–4, 4]

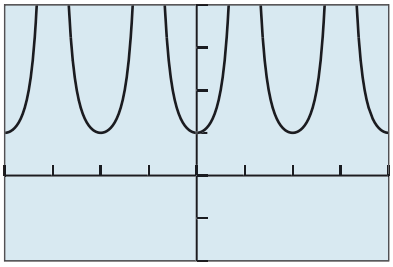
a)



[–2π, 2π] por [–4, 4]

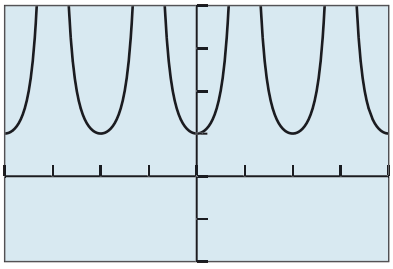
b)

FIGURA 5.3 Respaldo gráfico de la identidad $\text{sen}^3 x + \text{sen } x \cos^2 x = \text{sen } x$ (ejemplo 3).



[–2π, 2π] por [–2, 4]

a)



[–2π, 2π] por [–2, 4]

b)

FIGURA 5.4 El respaldo gráfico de la identidad $(\sec x + 1)(\sec x - 1)/\text{sen}^2 x = \sec^2 x$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 3 Simplificación mediante factorización y uso de identidades

Simplifique la expresión $\text{sen}^3 x + \text{sen } x \cos^2 x$.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

$$\begin{aligned} \text{sen}^3 x + \text{sen } x \cos^2 x &= \text{sen } x (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) \\ &= \text{sen } x (1) && \text{Identidad pitagórica.} \\ &= \text{sen } x \end{aligned}$$

Respalde geométricamente

Reconocemos la gráfica de $y = \text{sen}^3 x + \text{sen } x \cos^2 x$ (figura 5.3a) como la misma gráfica que la de $y = \text{sen } x$ (figura 5.3b).

Ahora resuelva el ejercicio 13.

EJEMPLO 4 Simplificación mediante desarrollo y uso de identidades

Simplifique la expresión $[(\sec x + 1)(\sec x - 1)]/\text{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente

$$\begin{aligned} \frac{(\sec x + 1)(\sec x - 1)}{\text{sen}^2 x} &= \frac{\sec^2 x - 1}{\text{sen}^2 x} && (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \\ &= \frac{\tan^2 x}{\text{sen}^2 x} && \text{Identidad pitagórica.} \\ &= \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\text{sen}^2 x} && \tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

Respalde geométricamente

Las gráficas de $= \dfrac{(\sec x + 1)(\sec x - 1)}{\text{sen}^2 x}$ y $y = \sec^2 x$ parecen ser idénticas, como se esperaba (figura 5.4).

Ahora resuelva el ejercicio 25.

EJEMPLO 5 Simplificación mediante la reducción de fracciones y el uso de identidades

Simplifique la expresión $\dfrac{\cos x}{1 - \text{sen } x} - \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

continúa

SOLUCIÓN

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$=\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$$ Rescriba utilizando denominador común.

$$=\frac{(\cos x)(\cos x)-(\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)}{(1-\operatorname{sen} x)(\cos x)}$$

$$=\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x}{(1-\operatorname{sen} x)(\cos x)}$$

$$=\frac{1-\operatorname{sen} x}{(1-\operatorname{sen} x)(\cos x)}$$ Identidad pitagórica.

$$=\frac{1}{\cos x}$$

$$=\sec x$$

(Elabore usted el respaldo geométrico).

Ahora resuelva el ejercicio 37.

En la sección 5.2 utilizaremos estas mismas técnicas de simplificación para probar identidades trigonométricas.

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Las capacidades de las calculadoras para resolver ecuaciones le han permitido la resolución de ecuaciones trigonométricas sin comprender mucho de trigonometría. Esto está bien en la medida que nuestra meta sea resolver las ecuaciones. Sin embargo, como también es nuestro objetivo la compresión de trigonometría, en ocasiones nos detendremos, en nuestro desarrollo de identidades, para resolver con lápiz y papel algunas ecuaciones trigonométricas, sólo para adquirir un poco de práctica en el uso de identidades.

EJEMPLO 6 Resolución de una ecuación trigonométrica

Determine todos los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi)$ que resuelvan $\cos^3 x/\operatorname{sen} x = \cot x$.

SOLUCIÓN

$$\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}=\cot x$$

$$\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\cos^3 x=\cos x$$ Multiplicar ambos lados por sen x.

$$\cos^3 x-\cos x=0$$

$$(\cos x)(\cos^2 x-1)=0$$

$$(\cos x)(-\operatorname{sen}^2 x)=0$$ Identidad pitagórica.

$$\cos x=0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x=0$$

continúa

Rechazamos la posibilidad de que sen $x = 0$, ya que haríamos indefinidos ambos lados de la ecuación original.

Los valores en el intervalo $[0, 2\pi)$ que resuelven $\cos x = 0$ (y por lo tanto $\cos^3 x/\text{sen } x = \cot x$) son $\pi/2$ y $3\pi/2$.

Ahora resuelva el ejercicio 51.

EJEMPLO 7 Resolución de una ecuación trigonométrica mediante factorización

Determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen } x = 1$.

SOLUCIÓN Sea $y = \text{sen } x$. La ecuación $2y^2 + y = 1$, puede resolverse mediante factorización:

$$\begin{aligned} 2y^2 + y &= 1 \\ 2y^2 + y - 1 &= 0 \\ (2y - 1)(y + 1) &= 0 \\ 2y - 1 = 0 \quad &\text{o} \quad y + 1 = 0 \\ y = \frac{1}{2} \quad &\text{o} \quad y = -1 \end{aligned}$$

Así, en la ecuación original, sen $x = 1/2$ o sen $x = -1$. La figura 5.5 muestra que las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son $\pi/6$, $5\pi/6$ y $3\pi/2$.

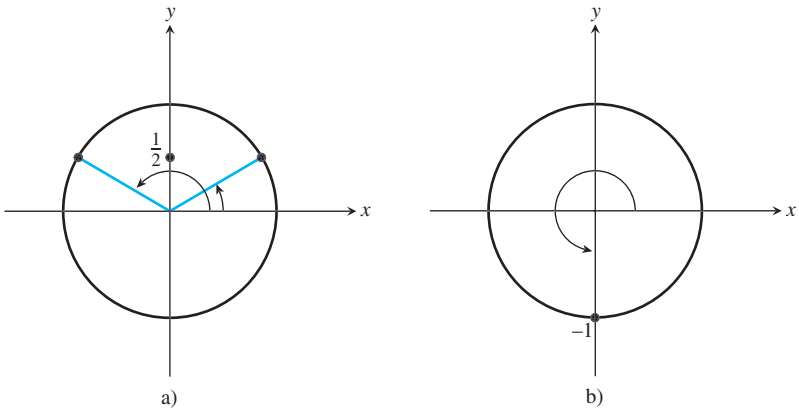


FIGURA 5.5 a) sen $x = 1/2$ tiene dos soluciones en $[0, 2\pi)$: $\pi/6$ y $5\pi/6$. b) sen $x = -1$ tiene una solución en $[0, 2\pi)$: $3\pi/2$ (ejemplo 7).

Para obtener *todas* las soluciones reales, simplemente sumamos múltiplos enteros del periodo, 2π, de la función periódica sen x:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \text{ o } x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \text{ o } x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Ahora resuelva el ejercicio 57.

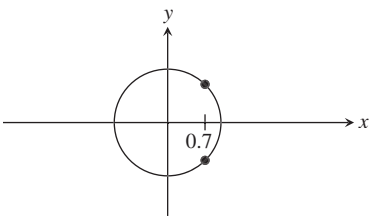


FIGURA 5.6 Hay dos puntos en el círculo unitario con coordenada x igual a 0.7 (ejemplo 8).

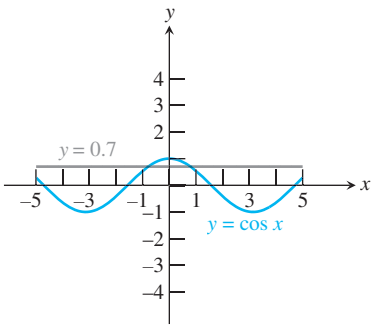


FIGURA 5.7 Al intersecar las gráficas de $y = \cos x$ y $y = 0.7$ se obtienen dos soluciones para la ecuación $\cos t = 0.7$ (ejemplo 8).

Con fines de comparación, usted podría resolver la ecuación del ejemplo 7 en su graficadora. La determinación de *todas* las soluciones reales precisa de la comprensión de periodicidad, y la determinación de soluciones *exactas* requiere del sentido común para dividir las respuestas de la calculadora entre π. ¡Es probable que alguien que sepa toda esa trigonometría en realidad encuentre que la solución algebraica es más sencilla!

EJEMPLO 8 Resolución de una ecuación trigonométrica con una calculadora

Determine todas las soluciones para la ecuación $\cos t = 0.7$ usando una calculadora donde sea necesario.

SOLUCIÓN La figura 5.6 muestra que hay dos puntos en el círculo unitario con una coordenada x (abscisa) de 0.7. No reconocemos este valor como una de nuestras razones de triángulos especiales, pero podemos utilizar una calculadora graficadora para determinar, intersecando las gráficas de $y = \cos x$ y $y = 0.7$ (figura 5.7), los valores positivos y negativos más pequeños para los que $\cos x = 0.7$.

Los dos valores, como era de esperarse, se contraponen: $t \approx \pm 0.7954$. Utilizando el periodo del coseno (que es 2π), obtenemos el conjunto solución completo: $\{\pm 0.7954 + 2n\pi \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

Ahora resuelva el ejercicio 63.

REPASO RÁPIDO 5.1 *(Para obtener ayuda consulte las secciones A.2, A.3 y 4.7)*

En los ejercicios del 1 al 4 evalúe las expresiones.

1. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$

2. $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

3. $\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$

4. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right)$

En los ejercicios del 5 al 8 factorice la expresión en un producto de factores lineales.

5. $a^2 - 2ab + b^2$ **6.** $4u^2 + 4u + 1$

7. $2x^2 - 3xy - 2y^2$ **8.** $2v^2 - 5v - 3$

En los ejercicios del 9 al 12 simplifique la expresión.

9. $\frac{1}{x} - \frac{2}{y}$ **10.** $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$

11. $\frac{x + y}{(1/x) + (1/y)}$ **12.** $\frac{x}{x - y} - \frac{y}{x + y}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.1

En los ejercicios del 1 al 4 evalúe sin utilizar calculadora. Utilice las identidades pitagóricas en lugar de los triángulos de referencia (consulte el ejemplo 1).

1. Determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, si $\tan\theta = 3/4$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$.

2. Determine $\sec\theta$ y $\csc\theta$, si $\tan\theta = 3$ y $\cos\theta > 0$.

3. Determine $\tan\theta$ y $\cot\theta$, si $\sec\theta = 4$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$.

4. Determine $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$, si $\cos\theta = 0.8$ y $\tan\theta < 0$.

En los ejercicios del 5 al 8 utilice identidades para determinar el valor de la expresión.

5. Si $\operatorname{sen}\theta = 0.45$, determine $\cos(\pi/2 - \theta)$.

6. Si $\tan(\pi/2 - \theta) = -5.32$, determine $\cot\theta$.

7. Si $\operatorname{sen}(\theta - \pi/2) = 0.73$, determine $\cos(-\theta)$.

8. Si $\cot(-\theta) = 7.89$, determine $\tan(\theta - \pi/2)$.

En los ejercicios del 9 al 16 utilice las identidades básicas para simplificar la expresión.

9. $\tan x \cos x$ **10.** $\cot x \tan x$

11. $\sec y \operatorname{sen}(\pi/2 - y)$ **12.** $\cot u \operatorname{sen} u$

13. $\frac{1 + \tan^2 x}{\csc^2 x}$ **14.** $\frac{1 - \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

15. $\cos x - \cos^3 x$ **16.** $\frac{\operatorname{sen}^2 u + \tan^2 u + \cos^2 u}{\sec u}$

En los ejercicios del 17 al 22 simplifique la expresión a 1 o -1.

17. $\operatorname{sen} x \csc(-x)$

18. $\sec(-x)\cos(-x)$

19. $\cot(-x)\cot(\pi/2 - x)$

20. $\cot(-x)\tan(-x)$

21. $\operatorname{sen}^2(-x) + \cos^2(-x)$

22 $\sec^2(-x) - \tan^2 x$

En los ejercicios del 23 al 26 simplifique la expresión a una constante o una función trigonométrica básica. Respalde geométricamente su resultado.

23. $\dfrac{\tan(\pi/2 - x)\csc x}{\csc^2 x}$

24. $\dfrac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$

25. $(\sec^2 x + \csc^2 x) - (\tan^2 x + \cot^2 x)$

26. $\dfrac{\sec^2 u - \tan^2 u}{\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v}$

En los ejercicios del 27 al 32 utilice las identidades básicas para cambiar la expresión a una que incluya sólo senos y cosenos. Luego simplifique a una función trigonométrica básica.

27. $(\operatorname{sen} x)(\tan x + \cot x)$

28. $\operatorname{sen}\theta - \tan\theta\cos\theta + \cos(\pi/2 - \theta)$

29. $\operatorname{sen} x \cos x \tan x \sec x \csc x$

30. $\dfrac{(\sec y - \tan y)(\sec y + \tan y)}{\sec y}$

31. $\dfrac{\tan x}{\csc^2 x} + \dfrac{\tan x}{\sec^2 x}$

32. $\dfrac{\sec^2 x \csc x}{\sec^2 x + \csc^2 x}$

En los ejercicios del 33 al 38 combine las fracciones y simplifique a un múltiplo de una potencia de una función trigonométrica básica (por ejemplo, $3\tan^2 x$).

33. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{\sec^2 x}{\tan^2 x}$

34. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$

35. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cot^2 x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

36. $\dfrac{1}{\sec x - 1} - \dfrac{1}{\sec x + 1}$

37. $\dfrac{\sec x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

38. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} + \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

En los ejercicios del 39 al 46 escriba cada expresión en forma factorizada como una expresión algebraica de una sola función trigonométrica (por ejemplo, $(2\operatorname{sen} x + 3)(\operatorname{sen} x - 1)$).

39. $\cos^2 x + 2\cos x + 1$

40. $1 - 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$

41. $1 - 2\operatorname{sen} x + (1 - \cos^2 x)$

42. $\operatorname{sen} x - \cos^2 x - 1$

43. $\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x + 1$

44. $\operatorname{sen}^2 x + \dfrac{2}{\csc x} + 1$

45. $4\tan^2 x - \dfrac{4}{\cot x} + \operatorname{sen} x \csc x$

46. $\sec^2 x - \sec x + \tan^2 x$

En los ejercicios del 47 al 50 escriba cada expresión como una expresión algebraica de una sola función trigonométrica (por ejemplo, $2\operatorname{sen} x + 3$).

47. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}$

48. $\dfrac{\tan^2 \alpha - 1}{1 + \tan \alpha}$

49. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x}$

50. $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1}$

En los ejercicios del 51 al 56 determine todas las soluciones para la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$. No necesita calculadora.

51. $2\cos x \operatorname{sen} x - \cos x = 0$

52. $\sqrt{2}\tan x \cos x - \tan x = 0$

53. $\tan x \operatorname{sen}^2 x = \tan x$

54. $\operatorname{sen} x \tan^2 x = \operatorname{sen} x$

55. $\tan^2 x = 3$

56. $2\operatorname{sen}^2 x = 1$

En los ejercicios del 57 al 62 determine todas las soluciones de la ecuación. No necesita una calculadora.

57. $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

58. $2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x + 1 = 0$

59. $\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta = 0$

60. $3\operatorname{sen} t = 2\cos^2 t$

61. $\cos(\operatorname{sen} x) = 1$

62. $2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x = 2$

En los ejercicios del 63 al 68 determine todas las soluciones para la ecuación trigonométrica; use una calculadora cuando sea necesario.

63. $\cos x = 0.37$

64. $\cos x = 0.75$

65. $\operatorname{sen} x = 0.30$

66. $\tan x = 5$

67. $\cos^2 x = 0.4$

68. $\operatorname{sen}^2 x = 0.4$

En los ejercicios del 69 al 74 realice la sustitución trigonométrica que se sugiere y luego utilice las identidades pitagóricas para escribir la función resultante como un múltiplo de una función trigonométrica básica.

69. $\sqrt{1 - x^2}$, $x = \cos\theta$

70. $\sqrt{x^2 + 1}$, $x = \tan\theta$

71. $\sqrt{x^2 - 9}$, $x = 3\sec\theta$

72. $\sqrt{36 - x^2}$, $x = 6\operatorname{sen}\theta$

73. $\sqrt{x^2 + 81}$, $x = 9\tan\theta$

74. $\sqrt{x^2 - 100}$, $x = 10\sec\theta$

Preguntas de examen estandarizado

75. **Verdadero o falso** Si $\sec(x - \pi/2) = 34$, entonces $\csc x = 34$. Justifique su respuesta.

76. **Verdadero o falso** El dominio de validez para la identidad $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta\cos\theta$ es el conjunto de todos los números reales. Justifique su respuesta.

Debe responder estas preguntas sin utilizar una calculadora.

77. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes *no* es identidad igual a sen x?

A) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **B)** $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

C) $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ **D)** $\tan x \sec x$

E) $-\text{sen}\,(-x)$

78. Opción múltiple Exactamente cuatro de las seis funciones trigonométricas básicas son

A) impares **B)** pares

C) periódicas **D)** continuas

E) acotadas

79. Opción múltiple Una expresión más sencilla para $(\sec\theta + 1)(\sec\theta - 1)$ es

A) $\text{sen}^2\,\theta$ **B)** $\cos^2\theta$

C) $\tan^2\theta$ **D)** $\cot^2\theta$

E) $\sec^2\theta$

80. Opción múltiple ¿Cuántos números entre 0 y 2π, resuelven la ecuación $3\cos^2 x + \cos x = 2$?

A) Ninguno **B)** Uno

C) Dos **D)** Tres

E) Cuatro

Exploraciones

81. Escriba las seis funciones trigonométricas básicas sólo en términos de sen x.

82. Escriba las seis funciones trigonométricas básicas sólo en términos de cos x.

83. Escriba para aprender Grafique las funciones $y = \text{sen}^2 x$ y $y = -\cos^2 x$ en la ventana de visualización trigonométrica estándar. Describa la aparente relación entre estas dos gráficas y verifíquela con una identidad trigonométrica.

84. Escriba para aprender Grafique las funciones $y = \sec^2 x$ y $y = \tan^2 x$ en la ventana de visualización trigonométrica estándar. Describa la relación aparente entre estas dos gráficas y verifíquela con una identidad trigonométrica.

85. Órbita de la luna Ya que su órbita es elíptica, la distancia de la Luna a la Tierra, en millas (medidas desde el centro de la Luna al centro de la Tierra) varía en forma periódica. El lunes 18 de junio de 2002, la Luna estaba en su apogeo (más alejada de la Tierra). La distancia de la Luna a la Tierra cada viernes desde el 23 de enero hasta el 27 de marzo se registró en la tabla 5.1.



Tabla 5.1 Distancia de la Tierra a la Luna

Fecha	Día	Distancia
23 de enero	0	251,966
30 de enero	7	238,344
6 de febrero	14	225,784
13 de febrero	21	240,385
20 de febrero	28	251,807
27 de febrero	35	236,315
6 de marzo	42	226,101
13 de marzo	49	242,390
20 de marzo	56	251,333
27 de marzo	63	234,347

Fuente: World Almanac and Book of Facts 2005.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos, utilizando "día" como x y "distancia" como y.

b) Utilice su calculadora para realizar una regresión del seno y sobreponga su gráfica al diagrama de dispersión.

c) ¿Cuál es el número aproximado de días entre un apogeo y otro? Interprete este número en términos de la órbita de la Luna.

d) En forma aproximada, ¿qué tan lejos está la Luna de la Tierra en el perigeo (distancia más cercana)?

e) Como la distancia inicia en el apogeo, quizá una curva coseno sería un modelo apropiado. Utilice la curva seno de b) y una identidad de cofunción para escribir una curva coseno que se ajuste a los datos.

86. Actividad en equipo Divida clase en seis equipos, cada uno asignado a una de las funciones trigonométricas. En su equipo construya una lista de cinco expresiones diferentes que puedan simplificarse a la función asignada. Cuando haya terminado, intercambie las listas con otro equipo de "cofunción" para comprobar mutuamente la precisión de las expresiones.

Ampliación de las ideas

87. Demuestre que $\text{sen}^4\,\theta - \cos^4\theta = \text{sen}^2\,\theta - \cos^2\theta$.

88. Determine todos los valores de k que hacen que $\text{sen}^2 x + 1 = k\,\text{sen}\,x$ tenga un conjunto de solución infinito.

89. Utilice las identidades de cofunciones y las identidades par-impar para demostrar que $\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,x$.

[*Sugerencia:* $\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,(\pi/2 - (x - \pi/2))$.]

90. Utilice las identidades de cofunciones y las identidades par-impar, para demostrar que $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

[*Sugerencia:* $\cos(\pi - x) = \cos(\pi/2 - (x - \pi/2))$.]

91. Utilice la identidad del ejercicio 89 para probar que en cualquier $\triangle ABC$, $\text{sen}\,(A + B) = \text{sen}\,C$.

92. Utilice la identidad de los ejercicios 89 y 90 para probar una identidad para simplificar $\tan(\pi - x)$.

5.2 Demostración de identidades trigonométricas

Aprenderá acerca de...

- Una estrategia de demostración
- La demostración de identidades
- La refutación de las que no son identidades
- Las identidades en cálculo

...porque

La demostración de identidades le proporciona una excelente comprensión de la forma en que se construyen las demostraciones en matemáticas.

Una estrategia de demostración

Ahora llegamos a la mejor oportunidad, en los cursos de precálculo, para que usted intente construir demostraciones analíticas: identidades trigonométricas. Algunas son fáciles y algunas pueden ser desafiantes, pero en cada caso, la *identidad misma* proporciona a su trabajo un principio y un fin. La demostración consiste en rellenar los pasos entre un lado y otro de una identidad.

La estrategia para demostrar una identidad es muy diferente a la estrategia para resolver una ecuación, especialmente en el paso inicial. Por lo regular, el primer paso al resolver una ecuación es escribir la ecuación. Sin embargo, si hace esto con una identidad tendrá el inicio y el final, ¡sin una demostración entre ellos! En el caso de una identidad se inicia escribiendo *una función* y termina escribiendo *la otra*. El ejemplo siguiente ilustra lo que queremos decir.

EJEMPLO 1 Demostración de una identidad algebraica

Demuestre la identidad algebraica $\dfrac{x^2-1}{x-1}-\dfrac{x^2-1}{x+1}=2$.

SOLUCIÓN Demostramos esta identidad mostrando una sucesión de expresiones; con facilidad se puede ver que cada una es equivalente a la expresión que le precede:

$$\frac{x^2-1}{x-1}-\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}-\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$ Factorizando la diferencia de cuadrados.

$$=(x+1)\left(\frac{x-1}{x-1}\right)-(x-1)\left(\frac{x+1}{x+1}\right)$$ Manipulación algebraica.

$$=(x+1)(1)-(x-1)(1)$$ Reducción de fracciones.

$$=x+1-x+1$$ Manipulación algebraica.

$$=2$$

Observe que lo primero que escribimos fue la expresión del lado izquierdo (ELI) y lo último fue la expresión del lado derecho (ELD). La demostración hubiese sido igual de legítima al ir de la ELD a la ELI, pero es más natural moverse del lado más complicado al menos complicado. Por cierto, las notas al margen a la derecha, denominados "apoyos" o "justificaciones" se incluyen aquí con fines de instrucción, pero en realidad no son parte de la demostración. Una buena demostración debe consistir en pasos para los cuales un lector entendido pueda encontrar las justificaciones fácilmente.

Ahora resuelva el problema 1.

Entonces, las siguientes son nuestras primeras estrategias para la demostración de identidades:

Estrategias generales I

1. La demostración empieza con la expresión en uno de los lados de la identidad.
2. La demostración termina con la expresión del otro lado.
3. La demostración consiste en mostrar una sucesión de expresiones, cada una de las cuales pueda distinguirse fácilmente como equivalente a la que le preceda.

Demostración de identidades

Las demostraciones de identidades trigonométricas siguen las Estrategias generales I. Se nos dice que dos expresiones son iguales, y la intención es comprobar que lo sean. Hacemos esto cambiando una expresión en la otra mediante una serie de pasos intermedios que siguen esta importante regla: *cada paso intermedio produce una expresión que es equivalente a la primera.*

Los cambios en cada paso se realizan mediante manipulaciones algebraicas o identidades, pero las manipulaciones o identidades deben ser suficientemente obvias como para no requerir de justificaciones adicionales. Como frecuentemente qué es "obvio" y qué no lo es depende del observador, por lo regular es más seguro incluir demasiados pasos que muy pocos.

Mediante el uso de varios ejemplos tratamos de darle una noción de lo que es apropiado, al tiempo que ilustramos algunas de las herramientas algebraicas que tiene a su disposición.

EJEMPLO 2 Demostración de una identidad

Demuestre la identidad $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$.

SOLUCIÓN Para empezar hay que decidir si comenzamos con la expresión de la derecha o la de la izquierda. Por lo regular es mejor iniciar con la expresión más complicada, ya que es más sencillo proceder de lo más complejo hacia la otra dirección. En este caso, la expresión de la izquierda es un poco más compleja ya que incluye dos términos.

$$\tan x + \cot x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{Identidades básicas.}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} \qquad \text{Colocar un denominador común.}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}$$

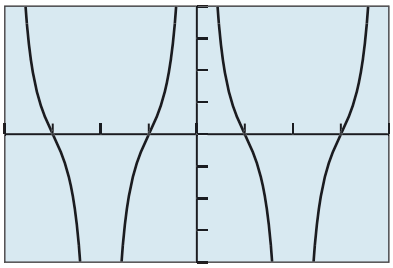
$$= \frac{1}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} \qquad \text{Identidad pitagórica.}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{(Un paso que podría omitirse).}$$

$$= \sec x \csc x \qquad \text{Identidades básicas.}$$

(Recuerde que "las justificaciones" en realidad no son parte de las demostraciones.)

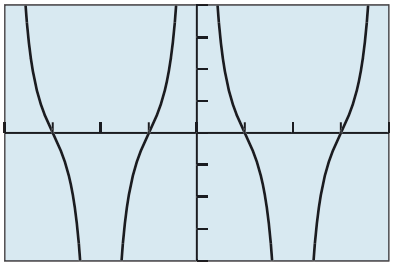
Ahora resuelva el problema 13.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

$f(x) = \dfrac{1}{\sec x - 1} + \dfrac{1}{\sec x + 1}$

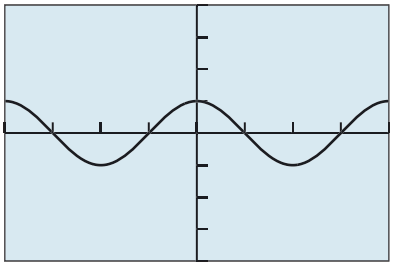
a)



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

$y = 2 \cot x \csc x$

b)



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

$y = \dfrac{1}{\sec x}$

c)

FIGURA 5.8 Una graficadora puede ser útil para la identificación de posibles identidades (ejemplo 3).

El ejemplo anterior ilustra tres estrategias generales que con frecuencia son útiles en la demostración de identidades trigonométricas.

Estrategias generales II

1. Inicie con la expresión más complicada y trabaje hacia la expresión que lo sea menos.
2. Si no hay un paso que sea evidente, convierta toda la expresión a una que incluya senos y cosenos.
3. Combine fracciones mediante un denominador común.

EJEMPLO 3 Identificación y demostración de una identidad

Relacione la función

$$f(x) = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$$

con una de las siguientes. Luego confirme la relación con una demostración.

i) $2 \cot x \csc x$ **ii)** $\dfrac{1}{\sec x}$

SOLUCIÓN Las figuras 5.8 a), b) y c) muestran las gráficas de las funciones $y = f(x)$, $y = 2 \cot x \csc x$, y $y = 1/\sec x$, respectivamente. Las gráficas a) y c) muestran que $f(x)$ no es igual a la expresión en (ii). Con base en las gráficas en a) y b), parece que $f(x)$ es igual a la expresión en (i). Para confirmar, iniciamos con la expresión para $f(x)$.

$$\frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$$

$$= \frac{\sec x + 1}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)} + \frac{\sec x - 1}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)} \qquad \text{Denominador común.}$$

$$= \frac{\sec x + 1 + \sec x - 1}{\sec^2 x - 1}$$

$$= \frac{2 \sec x}{\tan^2 x} \qquad \text{Identidad pitagórica.}$$

$$= \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{Identidades básicas.}$$

$$= \frac{2 \cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$= 2 \cot x \csc x$$

Ahora resuelva el problema 55.

El ejemplo siguiente ilustra cómo la identidad algebraica $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ puede utilizarse para configurar una sustitución pitagórica.

EJEMPLO 4 Configuración de una diferencia de cuadrados

Demuestre que la identidad $\cos t/(1 - \operatorname{sen} t) = (1 + \operatorname{sen} t)/\cos t$.

SOLUCIÓN La expresión del lado izquierdo es ligeramente más compleja, ya que podemos manipular con mayor facilidad términos adicionales en un numerador que en un denominador. Así que iniciamos con el lado izquierdo.

$$\frac{\cos t}{1 - \operatorname{sen} t} = \frac{\cos t}{1 - \operatorname{sen} t} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t}$$

Configurar una diferencia de cuadrados.

$$= \frac{(\cos t)(1 + \operatorname{sen} t)}{1 - \operatorname{sen}^2 t}$$

$$= \frac{(\cos t)(1 + \operatorname{sen} t)}{\cos^2 t}$$

Identidad pitagórica.

$$= \frac{1 + \operatorname{sen} t}{\cos t}$$

Ahora resuelva el problema 39.

Observe que mantuvimos $(\cos t)(1 + \operatorname{sen} t)$ en forma factorizada, con la idea de que en algún momento podríamos eliminar el factor $\cos t$ y dejar el numerador con lo que necesitamos. Siempre es buena idea tener en cuenta la expresión "objetivo" hacia la que su demostración está dirigida.

Estrategias generales III

1. Utilice la identidad algebraica $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ para configurar aplicaciones de las identidades pitagóricas.
2. Siempre esté consciente de la expresión "objetivo", y favorezca las manipulaciones que lo lleven más cerca de su meta.

En identidades más complejas (como en una *escalera de palabras*) algunas veces es útil ver si ambos lados pueden manipularse hacia una expresión intermedia común; entonces la demostración puede reconstruirse en un solo sentido.

EJEMPLO 5 Trabajo con ambos lados

Demuestre la identidad $\cot^2 u/(1 + \csc u) = (\cot u)(\sec u - \tan u)$.

SOLUCIÓN Ambos lados son casi igual de complejos, pero el lado izquierdo parece que necesita de más trabajo. Iniciamos con el lado izquierdo.

$$\frac{\cot^2 u}{1 + \csc u} = \frac{\csc^2 u - 1}{1 + \csc u}$$

Identidad pitagórica.

$$= \frac{(\csc u + 1)(\csc u - 1)}{\csc u + 1}$$

Factorizar.

$$= \csc u - 1$$

En este momento no es claro cómo podemos, a partir de esta expresión, obtener la del lado derecho de nuestra identidad. Sin embargo, ahora tenemos una razón para creer que el lado derecho debe simplificarse a $\csc u - 1$, así que tratamos de simplificar el lado derecho.

continúa

$$(\cot u)(\sec u - \tan u) = \left(\frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}\right)\left(\frac{1}{\cos u} - \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right) \qquad \text{Identidades básicas.}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} u} - 1 \qquad \text{Distribuir el producto.}$$

$$= \csc u - 1$$

Ahora podemos reconstruir la demostración pasando por $\csc u - 1$ como un paso intermedio.

$$\frac{\cot^2 u}{1 + \csc u} = \frac{\csc^2 u - 1}{1 + \csc u}$$

$$= \frac{(\csc u + 1)(\csc u - 1)}{\csc u + 1}$$

$$= \csc u - 1 \qquad \text{Paso intermedio}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} u} - 1$$

$$= \left(\frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}\right)\left(\frac{1}{\cos u} - \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)$$

$$= (\cot u)(\sec u - \tan u)$$

Ahora resuelva el problema 41.

Refutación de las que no son identidades

Obviamente no toda ecuación que incluya expresiones trigonométricas es una identidad. ¿Cómo podemos descubrir una que no sea identidad antes de embarcarnos en estéril intento de demostración? Lleve a cabo la exploración siguiente.

EXPLORACIÓN 1 **Confirmación de una no identidad**

Demuestre o refute que $\cos 2x = 2 \cos x$ es una identidad.

1. Grafique $y = \cos 2x$ y $y = 2 \cos x$ en la misma ventana. Interprete las gráficas para obtener una conclusión acerca de la validez de la ecuación como identidad.
2. Con la ayuda de la gráfica determine un valor de x para el que $\cos 2x \neq 2 \cos x$.
3. ¿La existencia del valor de x en la parte 2 *prueba* que la ecuación *no* es una identidad?
4. Grafique $y = \cos 2x$ y $y = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ en la misma ventana. Interprete las gráficas para obtener una conclusión acerca de si $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ es o no una identidad.
5. ¿Las gráficas de la parte 4 *prueban* que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ es una identidad? Explique su respuesta.

La exploración 1 sugiere que podemos utilizar graficadoras para ayudar a confirmar una *no identidad*, ya que sólo tenemos que producir un valor de x para el que las dos expresiones comparadas estén definidas pero no sean iguales. Por otra parte, no podemos utilizar graficadoras para probar que una ecuación es una identidad ya que, por ejemplo, las graficadoras nunca pueden probar que dos números irracionales son iguales. Además, las graficadoras no pueden mostrar el comportamiento en dominios infinitos.

Identidades en cálculo



En la mayoría de los problemas de cálculo donde las identidades desempeñan un papel importante, el objeto es hacer más sencilla una expresión compleja con el fin de facilitar el cómputo. En ocasiones, en realidad es necesario hacer que una expresión *sencilla* se torne *más complicada* para la búsqueda de sencillez de cómputo. Cada una de las identidades siguientes (sólo una muestra de muchas) representa una sustitución útil en cálculo, donde la expresión de la derecha es más simple de tratar (aunque no lo parezca). Probamos una de estas identidades en el ejemplo 6 y dejamos el resto para los ejercicios o secciones posteriores.

1. $\cos^3 x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x)$
2. $\sec^4 x = (1 + \tan^2 x)(\sec^3 x)$
3. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$
4. $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$
5. $\operatorname{sen}^5 x = (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(\operatorname{sen} x)$
6. $\operatorname{sen}^2 x \cos^5 x = (\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x)(\cos x)$

EJEMPLO 6 Demostración de una identidad útil en cálculo

Demuestre la identidad siguiente:

$\operatorname{sen}^2 x \cos^5 x = (\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x)(\cos x)$.

SOLUCIÓN Iniciamos con la expresión de la izquierda.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \cos^5 x &= \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \cos x \\
&= (\operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x)^2(\cos x) \\
&= (\operatorname{sen}^2 x)(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2(\cos x) \\
&= (\operatorname{sen}^2 x)(1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x)(\cos x) \\
&= (\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x)(\cos x)
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 51.

REPASO RÁPIDO 5.2 *(Para obtener ayuda consulte la sección 5.1)*

En los ejercicios del 1 al 6 escriba la expresión sólo en términos de senos y cosenos. Exprese su respuesta como una sola fracción.

1. $\csc x + \sec x$

2. $\tan x + \cot x$

3. $\cos x \csc x + \operatorname{sen} x \sec x$

4. $\operatorname{sen}\theta \cot\theta - \cos\theta \tan\theta$

5. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$

6. $\dfrac{\sec\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\csc\alpha\cos^2\alpha}$

En los ejercicios del 7 al 12 determine si la ecuación es o no una identidad. Si no lo es, encuentre un solo valor de x para el que las dos expresiones sean diferentes.

7. $\sqrt{x^2} = x$

8. $\sqrt[3]{x^3} = x$

9. $\sqrt{1-\cos^2 x} = \operatorname{sen} x$

10. $\sqrt{\sec^2 x - 1} = \tan x$

11. $\ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$

12. $\ln x^2 = 2\ln x$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.2

En los ejercicios del 1 al 4 pruebe la identidad algebraica iniciando con la ELI y proporcione una sucesión de expresiones equivalentes que termine con la ELD.

1. $\dfrac{x^3 - x^2}{x} - (x-1)(x+1) = 1 - x$

2. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2-x}{2x}$

3. $\dfrac{x^2-4}{x-2} - \dfrac{x^2-9}{x+3} = 5$

4. $(x-1)(x+2) - (x+1)(x-2) = 2x$

En los ejercicios del 5 al 10 indique si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es o no una identidad.

5. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\csc x}$

6. $f(x) = \dfrac{\tan x}{\sec x}$

7. $f(x) = \cos x \cdot \cot x$

8. $f(x) = \cos(x - \pi/2)$

9. $f(x) = (\operatorname{sen}^3 x)(1 + \cot^2 x)$

10. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2}$

En los ejercicios del 11 al 51 demuestre la identidad.

11. $(\cos x)(\tan x + \operatorname{sen} x \cot x) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x$

12. $(\operatorname{sen} x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \operatorname{sen}^2 x$

13. $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$

14. $(\cos x - \operatorname{sen} x)^2 = 1 - 2\operatorname{sen} x \cos x$

15. $\dfrac{(1-\cos u)(1+\cos u)}{\cos^2 u} = \tan^2 u$

16. $\tan x + \sec x = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

17. $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = -\tan x \operatorname{sen} x$

18. $\dfrac{\sec^2\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$

19. $(1 - \operatorname{sen}\beta)(1 + \csc\beta) = 1 - \operatorname{sen}\beta + \csc\beta - \operatorname{sen}\beta\csc\beta$

20. $\dfrac{1}{1-\cos x} + \dfrac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$

21. $(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t + \operatorname{sen} t)^2 = 2$

22. $\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$

23. $\dfrac{1 + \tan^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \sec^2 x$

24. $\dfrac{1}{\tan\beta} + \tan\beta = \sec\beta\csc\beta$

25. $\dfrac{\cos\beta}{1 + \operatorname{sen}\beta} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$

26. $\dfrac{\sec x + 1}{\tan x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

27. $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

28. $\dfrac{\cot v - 1}{\cot v + 1} = \dfrac{1 - \tan v}{1 + \tan v}$

29. $\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$

30. $\tan^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \tan^2\theta \operatorname{sen}^2\theta$

31. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

32. $\tan^4 t + \tan^2 t = \sec^4 t - \sec^2 t$

33. $(x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha)^2 + (x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha)^2 = x^2 + y^2$

34. $\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$

35. $\dfrac{\tan x}{\sec x - 1} = \dfrac{\sec x + 1}{\tan x}$

36. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}+\dfrac{1+\cos t}{\operatorname{sen} t}=2\csc t$

37. $\dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}=\dfrac{2\operatorname{sen}^2 x-1}{1+2\operatorname{sen} x\cos x}$

38. $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\dfrac{\sec x+1}{\sec x-1}$

39. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t}+\dfrac{1+\cos t}{\operatorname{sen} t}=\dfrac{2(1+\cos t)}{\operatorname{sen} t}$

40. $\dfrac{\operatorname{sen} A\cos B+\cos A\operatorname{sen} B}{\cos A\cos B-\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B}=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

41. $\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x=(\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^4 x)(\cos x)$

42. $\operatorname{sen}^5 x\cos^2 x=(\cos^2 x-2\cos^4 x+\cos^6 x)(\operatorname{sen} x)$

43. $\cos^5 x=(1-2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^4 x)(\cos x)$

44. $\operatorname{sen}^3 x\cos^3 x=(\operatorname{sen}^3 x-\operatorname{sen}^5 x)(\cos x)$

45. $\dfrac{\tan x}{1-\cot x}+\dfrac{\cot x}{1-\tan x}=1+\sec x\csc x$

46. $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}+\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=2\sec x$

47. $\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}+\dfrac{1}{2\cos^2 x-1}=\dfrac{\cos x+\operatorname{sen} x}{\cos x-\operatorname{sen} x}$

48. $\dfrac{1-3\cos x-4\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{1-4\cos x}{1-\cos x}$

49. $\cos^3 x=(1-\operatorname{sen}^2 x)(\cos x)$

50. $\sec^4 x=(1+\tan^2 x)(\sec^2 x)$

51. $\operatorname{sen}^5 x=(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)(\operatorname{sen} x)$

En los ejercicios del 52 al 57 relacione la función con una expresión equivalente de la lista siguiente; luego confírmela con una demostración (las relaciones no son uno a uno).

a) $\sec^2 x\csc^2 x$ **b)** $\sec x+\tan x$ **c)** $2\sec^2 x$

d) $\tan x\operatorname{sen} x$ **e)** $\operatorname{sen} x\cos x$

52. $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$

53. $(1+\sec x)(1-\cos x$

54. $\sec^2 x+\csc^2 x$

55. $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}+\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}$

56. $\dfrac{1}{\tan x+\cot x}$

57. $\dfrac{1}{\sec x-\tan x}$

Preguntas de examen estandarizado

58. **Verdadero o falso** La ecuación $\sqrt{x^2}=x$ es una identidad. Justifique su respuesta.

59. **Verdadero o falso** La ecuación $(\sqrt{x})^2=x$ es una identidad. Justifique su respuesta.

Responda las siguientes preguntas sin utilizar calculadora.

60. **Opción múltiple** Si $f(x)=g(x)$ es una identidad con dominio de validez D, ¿cuál de lo siguiente es verdadero?

I. Para cualquier x en D, $f(x)$ está definida.

II. Para cualquier x en D, $g(x)$ está definida.

III. Para cualquier x en D, $f(x)=g(x)$.

A) Ninguna

B) Sólo I y II

C) Sólo I y III

D) Sólo III

E) I, II y III

61. **Opción múltiple** ¿Cuál de los siguientes es un primer paso eficiente en la demostración de la identidad

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}?$$

A) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos x}$

B) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x-\cos x}$

C) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\cdot\dfrac{\csc x}{\csc x}$

D) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{1-\cos x}$

E) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}$

62. **Opción múltiple** ¿Cuál de las siguientes no podría ser una expresión intermedia en una demostración de la identidad

$$\tan\theta+\sec\theta=\frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}?$$

A) $\operatorname{sen}\theta+\cos\theta$

B) $\tan\theta+\csc\theta$

C) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta+1}{\cos\theta}$

D) $\dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$

E) $\cos\theta-\cot\theta$

63. **Opción múltiple** Si $f(x)=g(x)$ es una identidad y $\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$, ¿cuál de las siguientes es *falsa*?

A) $g(x)\neq 0$

B) $f(x)=0$

C) $k=1$

D) $f(x)-g(x)=0$

E) $f(x)g(x)>0$

Exploraciones

En los ejercicios del 64 al 69 identifique una función sencilla que tenga la misma gráfica. Luego confirme su elección con una demostración.

64. $\operatorname{sen} x \cot x$

65. $\cos x \tan x$

66. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$

67. $\dfrac{\csc x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cot x \csc x}{\sec x}$

68. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\tan x}$

69. $(\sec^2 x)(1 - \operatorname{sen}^2 x)$

70. Escriba para aprender Sea θ cualquier número que está en el dominio de las seis funciones trigonométricas. Explique por qué los logaritmos naturales de las seis funciones trigonométricas de θ suman 0.

71. Si A y B son ángulos complementarios, pruebe que $\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B = 1$.

72. Actividad en equipo Si su clase tiene $2n$ estudiantes; en hojas separadas escriba dos expresiones de n identidades diferentes (si su clase tiene un número impar de estudiantes, invite a su maestro a unirse a esta actividad). Puede utilizar identidades de los ejercicios 11 a 51 de esta sección o de otros textos, pero asegúrese de escribir todas con la variable x. Mezcle las hojas y dé una a cada estudiante de su clase. Luego vea cuánto tardan, como grupo, sin ver el libro, en formar parejas con expresiones que formen una identidad (esta actividad aumenta su grado de dificultad si lo intenta sin el uso de calculadoras).

Ampliación de las ideas

En los ejercicios del 73 al 78 confirme la identidad.

73. $\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t}} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} t}{|\cos t|}$

74. $\sqrt{\dfrac{1 + \cos t}{1 - \cos t}} = \dfrac{1 + \cos t}{|\operatorname{sen} t|}$

75. $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$

76. $\cos^6 x - \operatorname{sen}^6 x = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)(1 - \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x)$

77. $\ln|\tan x| = \ln|\operatorname{sen} x| - \ln|\cos x|$

78. $\ln|\sec \theta + \tan \theta| + \ln|\sec \theta - \tan \theta| = 0$

79. Escriba para aprender Sea $y_1 = [\operatorname{sen}(x + 0.001) - \operatorname{sen} x]/0.001$ y $y_2 = \cos x$.

a) Utilice gráficas y tablas para decidir si $y_1 = y_2$.

b) Determine un valor de h de modo que la gráfica de $y_3 = y_1 - y_2$ en $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-h, h]$ parezca ser una sinusoidal. Proporcione un argumento convincente de que y_3 es una sinusoidal.

80. Funciones hiperbólicas Las *funciones trigonométricas hiperbólicas* se definen de la siguiente manera:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x}$$

Confirme la identidad.

a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

b) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

c) $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

81. Escriba para aprender Escriba un párrafo para explicar por qué

$$\cos x = \cos x + \operatorname{sen}(10\pi x)$$

parece ser una identidad cuando ambos lados se grafican en una ventana decimal. Proporcione un argumento convincente de que ésta no es una identidad.

5.3 Identidades de suma y diferencia

Aprenderá acerca de...

- El coseno de una diferencia
- El coseno de una suma
- El seno de una diferencia o de una suma
- La tangente de una diferencia o de una suma
- La verificación algebraica de una sinusoidal

...porque

Estas identidades proporcionan ejemplos claros de qué tan diferentes pueden ser el álgebra de funciones del álgebra de números reales.

Coseno de una diferencia

En todos nosotros existe un poderoso instinto para creer que todas las funciones cumplen la siguiente ley de aditividad:

$$f(u + v) = f(u) + f(v).$$

De hecho muy pocas lo cumplen. Si hubiese un Salón de la Fama para errores algebraicos, quizá los primeros inducidos en él serían:

$$(u + v)^2 = u^2 + v^2$$

$$\sqrt{u + v} = \sqrt{u} + \sqrt{v}$$

Así, antes de deducir las verdaderas fórmulas de suma para seno y coseno, aclararemos el panorama con la exploración siguiente:

EXPLORACIÓN 1 Lo obvio puede ser incorrecto

1. Sea $u = \pi$ y $v = \pi/2$.
   Determine sen $(u + v)$. Calcule sen (u) + sen (v).
   ¿Sen $(u + v)$ = sen (u) + sen (v)?
2. Sea $u = 0$ y $v = 2\pi$.
   Determine cos $(u + v)$. Calcule cos (u) + cos (v).
   ¿cos $(u + v)$ = cos (u) + cos (v)?
3. Encuentre sus propios valores de u y v que confirmen que tan $(u + v) \neq$ tan (u) + tan (v).

Con facilidad, también podríamos mostrar que

$$\cos(u - v) \neq \cos(u) - \cos(v) \text{ y } \operatorname{sen}(u - v) \neq \operatorname{sen}(u) - \operatorname{sen}(v).$$

Como usted podría esperar, *existen* fórmulas para sen $(u \pm v)$, cos $(u \pm v)$ y tan $(u \pm v)$, pero la exploración 1 muestra que no son las que nuestra intuición sugeriría. En cierto sentido, eso las hace más interesantes. Deduciremos todas ellas empezando con la fórmula para cos $(u - v)$.

La figura 5.9a, en la página siguiente, muestra ángulos u y v, en posición estándar sobre el círculo unitario, que determinan puntos A y B con coordenadas (cos u, sen u) y (cos v, sen v) respectivamente. La figura 5.9b muestra el triángulo ABO girado, de modo que el ángulo $\theta = u - v$ esté en posición estándar. El ángulo θ determina el punto C con coordenadas (cos θ, sen θ).

La cuerda, opuesta al ángulo θ, tiene la misma longitud en ambos círculos, aunque las coordenadas sean diferentes. En cada caso, utilice la fórmula de la distancia para determinar la longitud e iguale las fórmulas:

$$AB = CD$$

$$\sqrt{(\cos v - \cos u)^2 + (\operatorname{sen} v - \operatorname{sen} u)^2} = \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + (\operatorname{sen}\theta - 0)^2}$$

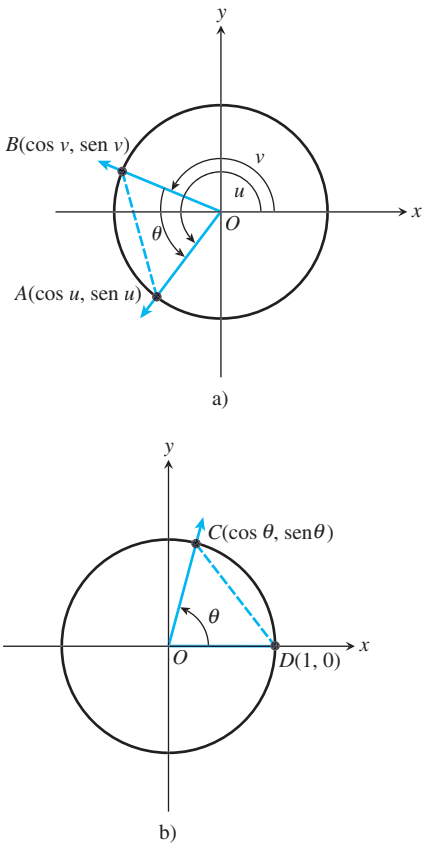


FIGURA 5.9 Los ángulos u y v están en posición estándar en a), mientras que el ángulo $\theta = u - v$ está en posición estándar en b). Las cuerdas que se muestran en ambos círculos son de la misma longitud.

Eleve al cuadrado ambos lados para eliminar el radical y desarrolle el binomio para obtener

$$\cos^2 u - 2\cos u \cos v + \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u - 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v + \operatorname{sen}^2 v = \cos^2 \theta - 2\cos\theta + 1 + \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) + (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) - 2\cos u \cos v - 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + 1 - 2\cos\theta$$

$$2 - 2\cos u \cos v - 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = 2 - 2\cos\theta$$

$$\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \cos\theta$$

Por último, como $\theta = u - v$, podemos escribir

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v.$$

EJEMPLO 1 Uso de la identidad del coseno de una diferencia

Determine el valor exacto de cos 15° sin utilizar calculadora.

SOLUCIÓN El truco es escribir cos 15° como cos (45° − 30°); entonces podemos utilizar nuestro conocimiento de los ángulos especiales.

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \quad \text{Identidad del coseno de una diferencia.}\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 5.

Coseno de una suma

Ahora que tenemos la fórmula para el coseno de una diferencia, podemos obtener, casi por nada, la fórmula para el coseno de una suma usando las identidades par-impar.

$$\begin{aligned}\cos(u + v) &= \cos(u - (-v))\\ &= \cos u \cos(-v) + \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(-v) \quad \text{Identidad del coseno de una diferencia.}\\ &= \cos u \cos v + (\operatorname{sen} v)(-\operatorname{sen} v) \quad \text{Identidades par-impar.}\\ &= \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\end{aligned}$$

Podemos combinar las fórmulas el coseno de la suma y diferencia de la siguiente manera:

Coseno de una suma o diferencia

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v.$$

(Observe que, en cada caso, el signo se intercambia).

En la sección 5.1 señalamos que las identidades de cofunción serían demostradas con mayor facilidad con los resultados de la sección 5.3, que presentamos a continuación.

EJEMPLO 2 **Confirmación de identidades de cofunciones**

Demuestre las identidades **a)** $\cos((\pi/2) - x) = \operatorname{sen} x$ y **b)** $\operatorname{sen}((\pi/2) - x) = \cos x$.

SOLUCIÓN

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} x$ no de una suma.

$= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \operatorname{sen} x$

$= \operatorname{sen} x$

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$ $\operatorname{sen}\theta = \cos((\pi/2) - \theta)$ por la demostración anterior.

$= \cos(0 + x)$

$= \cos x$

Ahora resuelva el problema 41.

Seno de una diferencia o de una suma

Podemos utilizar las identidades de cofunciones del ejemplo 2 para obtener la fórmula para el seno de una suma, con base en la fórmula para el coseno de una diferencia.

$\operatorname{sen}(u + v) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (u + v)\right)$ Identidad de cofunción.

$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right)$ Un poco de álgebra.

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos v + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\operatorname{sen} v$ Identidad del coseno de una diferencia.

$= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$ Identidades de cofunción.

Entonces podemos utilizar las identidades par-impar para obtener la fórmula para el seno de una diferencia, con base en la fórmula para el seno de una suma.

$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen}(u + (-v))$ Un poco de álgebra.

$= \operatorname{sen} u \cos(-v) + \cos y \operatorname{sen}(-v)$ Identidad del seno de una suma.

$= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u(-\operatorname{sen} v)$ Identidades par-impar.

$= \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

Podemos combinar las fórmulas el seno de la suma y la diferencia como de la siguiente manera:

Seno de una suma o una diferencia

$$\operatorname{sen}(u \pm v) = \operatorname{sen} u \cos v \pm \cos u \operatorname{sen} v.$$

(Observe que el signo *no* cambia en ninguno de los casos).

EJEMPLO 3 Uso de las fórmulas para la suma/diferencia

Escriba cada una de las expresiones siguientes como el seno o coseno de un ángulo.

a) $\operatorname{sen} 22^\circ \cos 13^\circ + \cos 22^\circ \operatorname{sen} 13^\circ$

b) $\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$

c) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x - \cos x \cos 2x$

SOLUCIÓN La clave en cada uno de los casos es reconocer cual fórmula se aplica (en realidad, el propósito de los ejercicios es ayudarle a recordar las fórmulas).

a) $\operatorname{sen} 22^\circ \cos 13^\circ + \cos 22^\circ \operatorname{sen} 13^\circ$ Reconocer la fórmula del seno de una suma.

$= \operatorname{sen} (22^\circ + 13^\circ)$

$= \operatorname{sen} (35^\circ)$

b) $\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$ Reconocer la fórmula del coseno de una diferencia.

$= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$

$= \cos \frac{\pi}{12}$

c) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x - \cos x \cos 2x$ Reconocer el opuesto de la fórmula para el coseno de una suma.

$= -(\cos x \cos 2x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x)$

$= -\cos (x + 2x)$ Aplicación de la fórmula.

$= -\cos 3x$

Ahora resuelva el problema 19.

Si uno de los ángulos de una suma o diferencia es un ángulo de cuadrante (esto es, un múltiplo de 90° o de $\pi/2$ radianes), entonces las identidades para la suma-diferencia producen expresiones con un sólo término. Como el efecto es reducir la complejidad, la identidad resultante se denomina **fórmula de reducción**.

EJEMPLO 4 Demostración de fórmulas de reducción

Demuestre las fórmulas de reducción:

a) $\operatorname{sen} (x + \pi) = -\operatorname{sen} x$

b) $\cos \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) = \operatorname{sen} x$

SOLUCIÓN

a) $\operatorname{sen} (x + \pi) = \operatorname{sen} x \cos \pi + \cos x \operatorname{sen} \pi$

$= \operatorname{sen} x \cdot (-1) + \cos x \cdot 0$

$= -\operatorname{sen} x$

b) $\cos \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) = \cos x \cos \frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$

$= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot (-1)$

$= \operatorname{sen} x$

Ahora resuelva el problema 23.

Tangente de una diferencia o de una suma

Podemos deducir una fórmula para tan $(u \pm v)$, de forma directa a partir de las fórmulas correspondientes para seno y coseno, de la siguiente manera:

$$\tan(u \pm v) = \frac{\operatorname{sen}(u \pm v)}{\cos(u \pm v)} = \frac{\operatorname{sen} u \cos v \pm \cos u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v \mp \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}.$$

También existe una fórmula para tan $(u \pm v)$ que se escribe sólo en términos de funciones tangente:

$$\tan(u \pm v) = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v}$$

Dejaremos la demostración de la fórmula con sólo tangentes para los ejercicios.

EJEMPLO 5 Demostración de una fórmula de reducción para tangentes

Demuestre la fórmula de reducción $\tan(\theta - (3\pi/2)) = -\cot\theta$.

SOLUCIÓN No podemos utilizar la fórmula de sólo tangentes (¿se da cuenta por qué no?), así que convertimos a senos y cosenos.

$$\begin{aligned}\tan\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) &= \frac{\operatorname{sen}(\theta - (3\pi/2))}{\cos(\theta - (3\pi/2))} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\theta\cos(3\pi/2) - \cos\theta\operatorname{sen}(3\pi/2)}{\cos\theta\cos(3\pi/2) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(3\pi/2)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\theta \cdot 0 - \cos\theta \cdot (-1)}{\cos\theta \cdot 0 + \operatorname{sen}\theta \cdot (-1)} \\ &= -\cot\theta\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 39.

Verificación algebraica de una sinusoidal

El ejemplo 7 de la sección 4.6 nos pidió verificar que la función $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 5 \cos x$ es una sinusoidal. Resolvimos en forma geométrica, concluyendo que $f(x) \approx 5.39 \operatorname{sen}(x + 1.19)$. Ahora tenemos una forma de resolver algebraicamente esta clase de problemas, con valores exactos para la amplitud y el corrimiento de fase. EL ejemplo 6 ilustra la técnica.

EJEMPLO 6 Cómo expresar una suma de sinusoidales como una sinusoidal

Exprese $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 5 \cos x$ como una sinusoidal en la forma $f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c)$.

SOLUCIÓN Como $a \operatorname{sen}(bx + c) = a(\operatorname{sen} bx \cos c + \cos bx \operatorname{sen} c)$, tenemos

$$\begin{aligned}2 \operatorname{sen} x + 5 \cos x &= a(\operatorname{sen} bx \cos c + \cos bx \operatorname{sen} c) \\ &= (a \cos c) \operatorname{sen} bx + (a \operatorname{sen} c) \cos bx.\end{aligned}$$

Al comparar los coeficientes, vemos que $b = 1$ y que $a \cos c = 2$ y $a \operatorname{sen} c = 5$.

continúa

Podemos despejar a a como sigue:

$$(a \cos c)^2 + (a \operatorname{sen} c)^2 = 2^2 + 5^2$$
$$a^2 \cos^2 c + a^2 \operatorname{sen}^2 c = 29$$
$$a^2(\cos^2 c + \operatorname{sen}^2 c) = 29$$
$$a^2 = 29 \qquad \text{Identidad pitagórica.}$$
$$a = \pm\sqrt{29}$$

Si elegimos que a sea positivo, entonces $\cos c = 2/\sqrt{29}$ y $\operatorname{sen} c = 5/\sqrt{29}$. Podemos identificar un ángulo agudo c con esas especificaciones ya sea con $\cos^{-1}(2/\sqrt{29})$ o con $\operatorname{sen}^{-1}(5/\sqrt{29})$, que son iguales. Así, una sinusoidal exacta para f es

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 5 \cos x$$
$$= a \operatorname{sen}(bx + c)$$
$$= \sqrt{29} \operatorname{sen}(x + \cos^{-1}(2/\sqrt{29})) \text{ o } \sqrt{29} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen}^{-1}(5/\sqrt{29}))$$

Ahora resuelva el problema 43.

REPASO RÁPIDO 5.3 *(Para obtener ayuda consulte las secciones 4.2 y 5.1)*

En los ejercicios del 1 al 6 exprese el ángulo como una suma o diferencia de ángulos especiales (múltiplos de 30°, 45°, $\pi/6$ o $\pi/4$). Las respuestas no son únicas.

1. 15° **2.** 75°
3. 165° **4.** $\pi/12$
5. $5\pi/12$ **6.** $7\pi/12$

En los ejercicios del 7 al 10 indique si la identidad $f(x + y) = f(x) + f(y)$ se cumple o no para la función f.

7. $f(x) = \ln x$ **8.** $f(x) = e^x$
9. $f(x) = 32x$ **10.** $f(x) = x + 10$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.3

En los ejercicios del 1 al 10 utilice una identidad de suma o diferencia para determinar un valor exacto.

1. sen 15° **2.** tan 15°
3. sen 75° **4.** cos 75°
5. $\cos \dfrac{\pi}{12}$ **6.** $\operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{12}$
7. $\tan \dfrac{5\pi}{12}$ **8.** $\tan \dfrac{11\pi}{12}$
9. $\cos \dfrac{7\pi}{12}$ **10.** $\operatorname{sen} \dfrac{-\pi}{12}$

En los ejercicios del 11 al 22 escriba la expresión como el seno, coseno o tangente de un ángulo.

11. sen 42° cos 17° − cos 42° sen 17°
12. cos 94° cos 18° + sen 94° sen 18°
13. $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{5} \cos \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi}{5}$
14. $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3} \cos \dfrac{\pi}{7} - \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{7} \cos \dfrac{\pi}{3}$
15. $\dfrac{\tan 19° + \tan 47°}{1 - \tan 19° \tan 47°}$
16. $\dfrac{\tan(\pi/5) - \tan(\pi/3)}{1 + \tan(\pi/5)\tan(\pi/3)}$
17. $\cos \dfrac{\pi}{7} \cos x + \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{7} \operatorname{sen} x$ **18.** $\cos x \cos \dfrac{\pi}{7} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{7}$
19. sen $3x$ cos x − cos $3x$ sen x
20. cos $7y$ cos $3y$ − sen $7y$ sen $3y$
21. $\dfrac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$
22. $\dfrac{\tan 3\alpha - \tan 2\beta}{1 + \tan 3\alpha \tan 2\beta}$

En los ejercicios del 23 al 30 demuestre la identidad.

23. $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ **24.** $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$

25. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

26. $\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] = \operatorname{sen}(x + y)$

27. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x$

28. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)$

29. $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

30. $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\theta$

En los ejercicios del 31 al 34 relacione cada gráfica con una pareja de las ecuaciones siguientes. Utilice su conocimiento de identidades y transformaciones, no su graficadora.

a) $y = \cos(3 - 2x)$

b) $y = \operatorname{sen} x \cos 1 + \cos x \operatorname{sen} 1$

c) $y = \cos(x - 3)$

d) $y = \operatorname{sen}(2x - 5)$

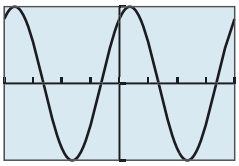
e) $y = \cos x \cos 3 + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3$

f) $y = \operatorname{sen}(x + 1)$

g) $y = \cos 3 \cos 2x + \operatorname{sen} 3 \operatorname{sen} 2x$

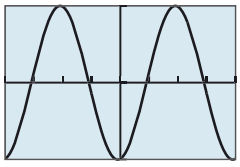
h) $y = \operatorname{sen} 2x \cos 5 - \cos 2x \operatorname{sen} 5$

31.



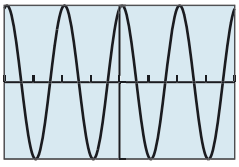
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1, 1]$

32.



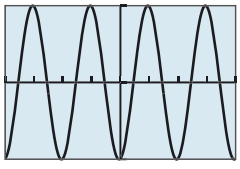
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1, 1]$

33.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1, 1]$

34.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1, 1]$

En los ejercicios 35 y 36 utilice identidades para la suma o diferencia (y no su graficadora) para resolver de forma exacta la ecuación.

35. $\operatorname{sen} 2x \cos x = \cos 2x \operatorname{sen} x$ **36.** $\cos 3x \cos x = \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x$

En los ejercicios del 37 al 42 demuestre la fórmula de reducción.

37. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$ **38.** $\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$

39. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$ **40.** $\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$

41. $\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$ **42.** $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

En los ejercicios del 43 al 46 exprese la función como una sinusoidal en la forma $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$.

43. $y = 3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$ **44.** $y = 5 \operatorname{sen} x - 12 \cos x$

45. $y = \cos 3x + 2 \operatorname{sen} 3x$ **46.** $y = 3 \cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x$

En los ejercicios del 47 al 55 demuestre la identidad.

47. $\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y) = 2 \operatorname{sen} x \cos y$

48. $\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2 \cos x \cos y$

49. $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x$

50. $\operatorname{sen} 3u = 3 \cos^2 u \operatorname{sen} u - \operatorname{sen}^3 u$

51. $\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x$

52. $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} 3x \cos x$

53. $\tan(x + y)\tan(x - y) = \frac{\tan^2 x - \tan^2 y}{1 - \tan^2 x \tan^2 y}$

54. $\tan 5u \tan 3u = \frac{\tan^2 4u - \tan^2 u}{1 - \tan^2 4u \tan^2 u}$

55. $\frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\operatorname{sen}(x - y)} = \frac{(\tan x + \tan y)}{(\tan x - \tan y)}$

Preguntas de examen estandarizado

56. **Verdadero o falso** Si A y B son ángulos suplementarios, entonces $\cos A + \cos B = 0$. Justifique su respuesta.

57. **Verdadero o falso** Si $\cos A + \cos B = 0$, entonces A y B son ángulos suplementarios. Justifique su respuesta.

Debe resolver estas preguntas sin el uso de una calculadora.

58. **Opción múltiple** Si $\cos A \cos B = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$, entonces $\cos(A + B) =$

A) 0 **B)** 1

C) $\cos A + \cos B$ **D)** $\cos B + \cos A$

E) $\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

59. Opción múltiple La función $y = \text{sen } x \cos 2x + \cos x \text{ sen } 2x$ tiene amplitud

A) 1 **B)** 1.5 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 6

60. Opción múltiple $\text{sen } 15° =$

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$ **D)** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

E) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

61. Opción múltiple Una función con la propiedad $f(1+2) = \frac{f(1)+f(2)}{1-f(1)f(2)}$ es

A) $f(x) = \text{sen } x$ **B)** $f(x) = \tan x$

C) $f(x) = \sec x$ **D)** $f(x) = e^x$

E) $f(x) = -1$

Exploraciones

62. Demuestre la identidad $(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$.

63. Demuestre la identidad $(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$.

64. Escriba para aprender Explique por qué la identidad del ejercicio 62 no puede utilizarse para demostrar la fórmula de reducción $\tan(x + \pi/2) = -\cot x$. Después demuestre la fórmula de reducción.

65. Escriba para aprender Explique por qué la identidad del ejercicio 63 no puede utilizarse para demostrar la fórmula de reducción $\tan(x - 3\pi/2) = -\cot x$. Después demuestre la fórmula de reducción.

66. Una identidad para cálculo Demuestre la identidad siguiente, la cual se utiliza en cálculo para demostrar una importante fórmula de diferenciación.

$$\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} = \text{sen } x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \frac{\text{sen } h}{h}.$$

67. Una identidad para cálculo Demuestre la identidad siguiente, la cual se utiliza en cálculo para demostrar otra importante fórmula de diferenciación.

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \text{sen } x\frac{\text{sen } h}{h}.$$

68. Actividad en equipo Coloque 24 puntos igualmente espaciados en el círculo unitario, iniciando con el punto (1, 0). Usando sólo su conocimiento de los ángulos especiales, y las identidades para la suma y la diferencia, trabaje con su equipo para determinar las coordenadas exactas de los 24 puntos.

Ampliación de las ideas

En los ejercicios del 69 al 72 suponga que A, B y C son los tres ángulos de algún $\triangle ABC$ (observe que $A + B + C = \pi$). Demuestre las identidades siguientes.

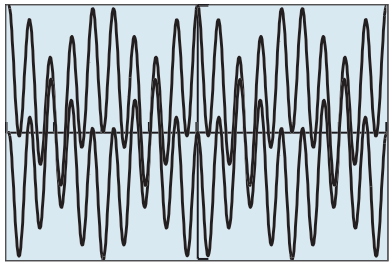
69. $\text{sen}(A+B) = \text{sen } C$

70. $\cos C = \text{sen } A \text{ sen } B - \cos A \cos B$

71. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

72. $\cos A \cos B \cos C - \text{sen } A \text{ sen } B \cos C - \text{sen } A \cos B \text{ sen } C - \cos A \text{ sen } B \text{ sen } C = -1$

73. Escriba para aprender La figura muestra las gráficas de $y_1 = \cos 5x \cos 4x$ y de $y_2 = -\text{sen } 5x \text{ sen } 4x$ en una ventana de visualización. Analice la pregunta: "¿Cuántas soluciones existen para la ecuación $\cos 5x \cos 4x = -\text{sen } 5x \text{ sen } 4x$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$?" Proporcione un argumento algebraico que responda la pregunta de forma más convincente de lo que lo hace la gráfica. Luego apoye su argumento con una gráfica *adecuada*.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1, 1]$

74. Movimiento armónico La corriente eléctrica alterna, un resorte que oscila o cualquier otro oscilador armónico puede modelarse mediante la ecuación

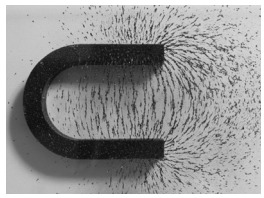
$$x = a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta\right),$$

donde T es el tiempo para un periodo y δ es la constante de fase. Muestre que este movimiento también puede modelarse mediante la siguiente suma de coseno y seno, cada uno con constante de fase igual a cero:

$$a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)t + a_2 \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{T}\right)t,$$

donde $a_1 = a\cos\delta$ y $a_2 = -a \text{ sen } \delta$.

75. Campos magnéticos Un campo magnético B en ocasiones puede modelarse como la suma de un campo incidente y un reflectante como



$$B = B_{\text{in}} + B_{\text{ref}},$$

donde $B_{\text{in}} = \frac{E_0}{c}\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$, y

$$B_{\text{ref}} = \frac{E_0}{c}\cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{c}\right).$$

Muestre que $B = 2\frac{E_0}{c}\cos\omega t \cos\frac{\omega x}{c}$.

5.4 Identidades de múltiplos de un ángulo

Aprenderá acerca de...

- Las identidades de ángulo doble
- Las identidades para reducir potencias
- Las identidades de medio ángulo
- La resolución de ecuaciones trigonométricas

...porque

Estas identidades son útiles en los cursos de cálculo.

Identidades de ángulo doble

Las fórmulas que resultan de hacer $u = v$ en las identidades de la suma de ángulos se denominan *identidades de ángulo doble*. Las estableceremos, y demostremos una, dejando el resto de las demostraciones como ejercicios (consulte los ejercicios 1 al 4).

Identidades de ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\cos 2u = \begin{cases} \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u \\ 2\cos^2 u - 1 \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2 u \end{cases}$$

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

Existen tres identidades para $\cos 2u$. Esto no es raro; en realidad existe una gran cantidad de identidades que también podríamos proporcionar para $\operatorname{sen} 2u$ tales como $2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(\pi/2 - u)$. Listamos las tres identidades para $\cos 2u$ ya que todas son *útiles* en diferentes contextos y, por lo tanto, es bueno memorizarlas.

EJEMPLO 1 Demostración de una identidad del ángulo doble

Demuestre la identidad siguiente: $\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2u &= \operatorname{sen}(u + u) \\ &= \operatorname{sen} u \cos u + \cos u \operatorname{sen} u \qquad \text{Seno de una suma } (v = u). \\ &= 2 \operatorname{sen} u \cos u \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 1.

Identidades para reducir potencias

Un uso inmediato para dos de las tres fórmulas para $\cos 2u$ es deducir las *identidades para la reducción de potencias*. Algunas funciones que parecen sencillas, como $y = \operatorname{sen}^2 u$, son muy difíciles de manipular en ciertos contextos de cálculo si no se emplean estas identidades.

Identidades de reducción de potencias

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

También dejaremos las demostraciones de estas identidades como ejercicios (consulte los ejercicios 37 y 38).

EJEMPLO 2 Demostración de una identidad

Demuestre la siguiente identidad: $\cos^4 \theta - \operatorname{sen}^4 \theta = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\cos^4 \theta - \operatorname{sen}^4 \theta &= (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \\
&= 1 \cdot (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) && \text{Identidad pitagórica.} \\
&= \cos 2\theta && \text{Identidad del ángulo doble.}
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 15.

EJEMPLO 3 Reducción de una potencia de 4

Rescriba $\cos^4 x$ en términos de funciones trigonométricas sin potencias mayores a 1.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 \\
&= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 && \text{Identidad de reducción de potencia.} \\
&= \left(\frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) && \text{Identidad de reducción de potencia.} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x \\
&= \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 39.

Identidades de medio ángulo

Las identidades de reducción de potencia pueden utilizarse para ampliar nuestro surtido de ángulos "especiales", cuyas razones trigonométricas pueden determinarse sin calculadora. Como de costumbre, no estamos sugiriendo que este procedimiento sea más práctico que el uso de una calculadora, sino que este tipo de ejercicios ayuda a comprender cómo se comportan las funciones. Por ejemplo, en la exploración 1 utilizamos una fórmula de reducción de potencia para determinar el valor exacto de $\operatorname{sen}(\pi/8)$ y $\operatorname{sen}(9\pi/8))$ sin una calculadora.

EXPLORACIÓN 1 **Determinación del seno de la mitad de un ángulo**

Recuerde la fórmula de reducción de potencia $\operatorname{sen}^2 u = (1 - \cos 2u)/2$.

1. Utilice la fórmula de reducción de potencia para mostrar que $\operatorname{sen}^2(\pi/8) = (2 - \sqrt{2})/4$.
2. Despeje $\operatorname{sen}(\pi/8)$. ¿Debe tomar la raíz cuadrada positiva o la negativa? ¿Por qué?
3. Utilice la fórmula de reducción de potencia para mostrar que $\operatorname{sen}^2(9\pi/8) = (2 - \sqrt{2})/4$.
4. Despeje $\operatorname{sen}(9\pi/8)$. ¿Debe tomar la raíz cuadrada positiva o negativa? ¿Por qué?

Una pequeña modificación de las identidades de reducción de potencias da como resultado las *identidades de medio ángulo*, que pueden utilizarse de forma directa para determinar funciones trigonométricas de $u/2$ en términos de funciones trigonométricas de u. Como lo sugiere la exploración 1, existe una inevitable ambigüedad de signo implicada en la raíz cuadrada, que debe resolverse en cada caso particular mediante la comprobación del cuadrante en el que se encuentra $u/2$.

Identidades de medio ángulo

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}} \qquad \cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \begin{cases} \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos u}{1+\cos u}} \\ \dfrac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u} \\ \dfrac{\operatorname{sen} u}{1+\cos u} \end{cases}$$

¿OLVIDAMOS EL SIGNO ±?

Podrá haber notado que ninguna de las identidades de la mitad de un ángulo tiene definido el signo + o − que le corresponde, excepto las últimas dos. El hecho que podamos omitirlos en éstas últimas para tan $u/2$ es una consecuencia afortunada de dos hechos: 1) que sen u y tan $(u/2)$ siempre tienen el mismo signo (lo que se observa fácilmente en las gráficas de las dos funciones de la figura 5.10), y 2) que $1 \pm \cos u$ nunca es negativo.

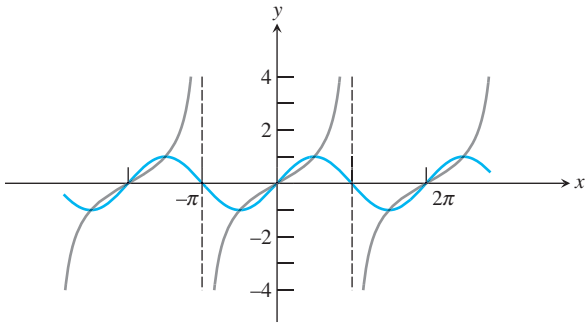
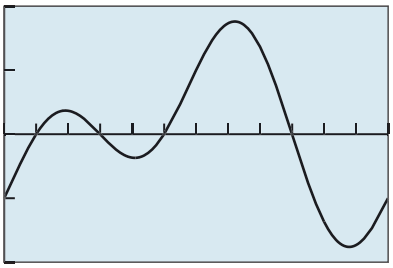
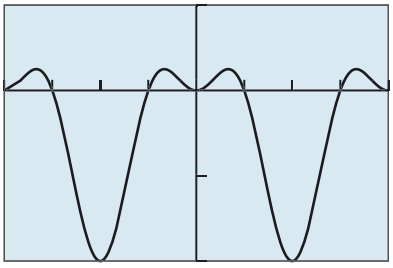


FIGURA 5.10 Las funciones sen u y tan $(u/2)$ siempre tienen el mismo signo.



[0, 2π] por [–2, 2]

FIGURA 5.11 La función $y = \text{sen } 2x - \cos x$, para $0 \le x \le 2\pi$. La escala en el eje x muestra intervalos de longitud $\pi/6$. Esta gráfica respalda la solución que se determinó algebraicamente en el ejemplo 4.



[–2π, 2π] por [–2, 1]

FIGURA 5.12 La gráfica de $y = \text{sen}^2 x - 2 \text{ sen}^2 (x/2)$ sugiere que $\text{sen}^2 x = 2 \text{ sen}^2 (x/2)$ tiene tres soluciones en $0, 2\pi)$ (ejemplo 5).

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Las identidades nuevas siempre proporcionan herramientas nuevas para resolver algebraicamente ecuaciones trigonométricas. Bajo las condiciones correctas, conducen a soluciones exactas. Volvemos a afirmar que no estamos presentando estas soluciones algebraicas por su valor práctico (para las que soluciones de la calculadora, ciertamente, son suficientes en la mayoría de las aplicaciones e indiscutiblemente más rápidas de obtener), sino como formas de observar el comportamiento de las funciones trigonométricas y su trama de identidades.

EJEMPLO 4 Uso de la identidad de ángulo doble

En el intervalo $[0, 2\pi)$, resuelva algebraicamente $\text{sen } 2x = \cos x$.

SOLUCIÓN

$$\text{sen } 2x = \cos x$$
$$2 \text{ sen } x \cos x = \cos x$$
$$2 \text{ sen } x \cos x - \cos x = 0$$
$$\cos x (2 \text{ sen } x - 1) = 0$$
$$\cos x = 0 \quad \text{o} \quad 2 \text{ sen } x - 1 = 0$$
$$\cos x = 0 \quad \text{o} \quad \text{sen } x = \frac{1}{2}$$

Las dos soluciones de $\cos x = 0$ son $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$. Las dos soluciones de $\text{sen } x = 1/2$ son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Por lo tanto, las soluciones de $\text{sen } 2x = \cos x$ son

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{3\pi}{2}.$$

Podemos **respaldar** este resultado **gráficamente** verificando las cuatro intersecciones x de la función $y = \text{sen } 2x - \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi)$ (figura 5.11).

Ahora resuelva el problema 23.

EJEMPLO 5 Uso de las identidades de medio ángulo

Resuelva $\text{sen}^2 x = 2 \text{ sen}^2 (x/2)$.

SOLUCIÓN La gráfica de $y = \text{sen}^2 x - 2 \text{ sen}^2 (x/2)$, en la figura 5.12, sugiere que esta función es periódica con periodo 2π y que la ecuación $\text{sen}^2 x = 2 \text{ sen}^2 (x/2)$ tiene tres soluciones en $[0, 2\pi)$.

Resuelva algebraicamente

$$\text{sen}^2 x = 2 \text{ sen}^2 \frac{x}{2}$$
$$\text{sen}^2 x = 2\left(\frac{1 - \cos x}{2}\right) \qquad \text{Identidad de medio ángulo.}$$
$$1 - \cos^2 x = 1 - \cos x \qquad \text{Convertir todo a cosenos.}$$
$$\cos x - \cos^2 x = 0$$

continúa

$$\cos x\,(1 - \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{o} \quad \cos x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \frac{3\pi}{2} \quad \text{o} \quad 0$$

El resto de las soluciones se obtienen mediante la periodicidad:

$$x = 2n\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

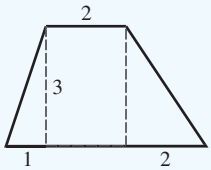
Ahora resuelva el problema 43.

REPASO RÁPIDO 5.4 *(Para obtener ayuda consulte la sección 5.1)*

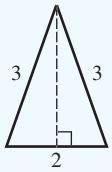
En los ejercicios del 1 al 8 determine la solución general de la ecuación.

1. $\tan x - 1 = 0$
2. $\tan x + 1 = 0$
3. $(\cos x)(1 - \operatorname{sen} x) = 0$
4. $(\operatorname{sen} x)(1 + \cos x) = 0$
5. $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$
6. $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$
7. $(2 \operatorname{sen} x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$
8. $(\operatorname{sen} x + 1)(2 \cos x - \sqrt{2}) = 0$

9. Determine el área del trapecio.



10. Determine la altura del triángulo isósceles.



EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.4

En los ejercicios del 1 al 4 utilice la identidad apropiada de la suma o diferencia para demostrar la identidad del ángulo doble.

1. $\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$
2. $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$
3. $\cos 2u = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$
4. $\tan 2u = \dfrac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$

En los ejercicios del 5 al 10 determine todas las soluciones para la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

5. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x$
6. $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$
7. $\cos 2x = \operatorname{sen} x$
8. $\cos 2x = \cos x$
9. $\operatorname{sen} 2x - \tan x = 0$
10. $\cos^2 x + \cos x = \cos 2x$

En los ejercicios del 11 al 14 escriba la expresión como una que sólo incluya sen θ y cos θ.

11. $\operatorname{sen} 2\theta + \cos \theta$
12. $\operatorname{sen} 2\theta + \cos 2\theta$
13. $\operatorname{sen} 2\theta + \cos 3\theta$
14. $\operatorname{sen} 3\theta + \cos 2\theta$

En los ejercicios del 15 al 22 demuestre la identidad.

15. $\operatorname{sen} 4x = 2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x$
16. $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$
17. $2 \csc 2x = \csc^2 x \tan x$
18. $2 \cot 2x = \cot x - \tan x$
19. $\operatorname{sen} 3x = (\operatorname{sen} x)(4\cos^2 x - 1)$
20. $\operatorname{sen} 3x = (\operatorname{sen} x)(3 - 4\operatorname{sen}^2 x)$
21. $\cos 4x = 1 - 8\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$
22. $\operatorname{sen} 4x = (4 \operatorname{sen} x \cos x)(2\cos^2 x - 1)$

En los ejercicios del 23 al 30 resuelva algebraicamente, para obtener soluciones exactas, en el intervalo $[0, 2\pi)$. Utilice su graficadora sólo para respaldar su trabajo algebraico.

23. $\cos 2x + \cos x = 0$
24. $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 0$
25. $\cos x + \cos 3x = 0$
26. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = 0$
27. $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x = 0$
28. $\cos 2x + \cos 4x = 0$
29. $\operatorname{sen} 2x - \cos 3x = 0$
30. $\operatorname{sen} 3x + \cos 2x = 0$

En los ejercicios del 31 al 36 utilice las identidades del medio ángulo para determinar un valor exacto sin usar una calculadora.

31. sen 15°
32. tan 195°
33. cos 75°
34. sen $(5\pi/12)$
35. tan $(7\pi/12)$
36. cos $(\pi/8)$

37. Demuestre las identidades de reducción de potencias:

a) $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$ **b)** $\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$

38 a) Utilice las identidades del ejercicio 37 para demostrar la identidad de reducción de potencias $\tan^2 u = \dfrac{1-\cos 2u}{1+\cos 2u}$

b) Escriba para aprender Explique por qué la identidad de la parte a) no implica que $\tan u = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}}$.

En los ejercicios del 39 al 42 utilice las identidades de reducción de potencias para demostrar la identidad.

39. $\operatorname{sen}^4 x = \dfrac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$

40. $\cos^3 x = \left(\dfrac{1}{2}\cos x\right)(1 + \cos 2x)$

41. $\operatorname{sen}^3 2x = \left(\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)(1 - \cos 4x)$

42. $\operatorname{sen}^5 x = \left(\dfrac{1}{8}\operatorname{sen} x\right)(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$

En los ejercicios del 43 al 46 utilice las identidades de medio ángulo para determinar todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. Luego determine la solución general.

43. $\cos^2 x = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ **44.** $\operatorname{sen}^2 x = \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

45. $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ **46.** $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2\cos^2 x - 1$

Preguntas de examen estandarizado

47. Verdadero o falso El producto de dos funciones con periodo 2π tiene periodo 2π. Justifique su respuesta.

48. Verdadero o falso La función $f(x) = \cos^2 x$ es una sinusoidal. Justifique su respuesta.

Debe responder estas preguntas sin usar calculadora.

49. Opción múltiple Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$, entonces $f(2x) =$

A) $2 f(x)$ **B)** $f(2) f(x)$ **C)** $f(x)\, g(x)$
D) $2 f(x)\, g(x)$ **E)** $f(2)\, g(x) + g(2)\, f(x)$

50. Opción múltiple $\operatorname{sen} 22.5° =$

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **B)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

D) $\sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}}$ **E)** $\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

51. Opción múltiple ¿Cuántos números entre 0 y 2π satisfacen la ecuación $\operatorname{sen} 2x = \cos x$?

A) ninguno **B)** uno **C)** dos **D)** tres **E)** cuatro

52. Opción múltiple El periodo de la función $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ es

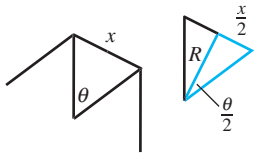
A) $\dfrac{\pi}{4}$ **B)** $\dfrac{\pi}{2}$ **C)** π **D)** 2π **E)** 4π

Exploraciones

53. Conexión entre trigonometría y geometría En un polígono regular todos los lados son de la misma longitud y todos los ángulos tienen la misma medida.

a) Si la distancia perpendicular del centro del polígono con n lados al punto medio de un lado es R, y si la longitud del lado del polígono es x, muestre que

$$x = 2R \tan\frac{\theta}{2}$$

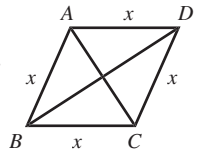


Polígono regular con n lados

donde $\theta = 2\pi/n$ es el ángulo central subtendido por un lado.

b) Si la longitud de un lado de un polígono regular de 11 lados es aproximadamente 5.87 y R es un entero no negativo, ¿cuál es el valor de R?

54. Conexión entre trigonometría y geometría Un rombo es un cuadrilátero con lados iguales. Las diagonales de un rombo bisecan los ángulos del rombo y son bisectores perpendiculares mutuas.

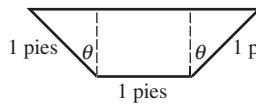


Sea $\angle ABC = \theta$, d_1 = longitud de AC, y d_2 = longitud de BD.

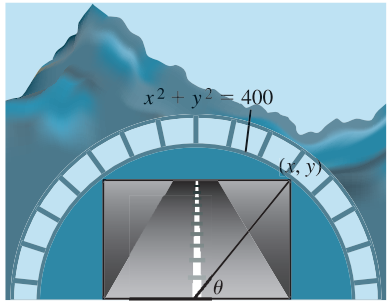
a) Muestre que $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{d_2}{2x}$ y $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{d_1}{2x}$.

b) Muestre que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{d_1 d_2}{2x^2}$.

55. Actividad en equipo Volumen máximo Los extremos de un canalón de agua, de 10 pies de largo, son trapecios isósceles, como se muestra en la figura. Determine el valor de θ que maximiza el volumen del canalón y determine ese volumen máximo.



56. Actividad en equipo Problema del túnel Un túnel rectangular se perfora atravesando una montaña para construir una carretera. Los vértices superiores del rectángulo están en la circunferencia $x^2 + y^2 = 400$, como se ilustra en la figura.



a) Muestre que el área de la sección transversal del extremo del túnel es 400 sen 2θ.

b) Determine las dimensiones del extremo rectangular del túnel que maximiza el área de la sección transversal.

Ampliación de las ideas

En los ejercicios del 57 al 61 demuestre las fórmulas del ángulo doble.

57. $\csc 2u = \frac{1}{2}\csc u \sec u$

58. $\cot 2u = \dfrac{\cot^2 u - 1}{2 \cot u}$

59. $\sec 2u = \dfrac{\csc^2 u}{\csc^2 u - 2}$

60. $\sec 2u = \dfrac{\sec^2 u}{2 - \sec^2 u}$

61. $\sec 2u = \dfrac{\sec^2 u \csc^2 u}{\csc^2 u - \sec^2 u}$

62. Escriba para aprender Explique por qué

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} = |\operatorname{sen} x|$$

es una identidad, pero

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} = \operatorname{sen} x$$

no es una identidad.

63. Puesta de sol en el Sahara La tabla 5.2 proporciona la hora del día en que inició el crepúsculo astronómico en el noreste de Malí el primer día de cada mes de 2005.

Tabla 5.2 Crepúsculo astronómico

Fecha	Día	Hora	18:00 +
1 de enero	1	17:32	−28
1 de febrero	32	17:52	−8
1 de marzo	60	18:05	5
1 de abril	91	18:14	14
1 de mayo	121	18:24	24
1 de junio	152	18:36	36
1 de julio	182	18:43	43
1 de agosto	213	18:37	37
1 de septiembre	244	18:15	15
1 de octubre	274	17:48	−12
1 de noviembre	305	17:25	−35
1 de diciembre	335	17:19	−41

Fuente: The World Almanac 2005.

La segunda columna proporciona la fecha como el día del año, y la cuarta columna da la hora como un número de minutos con respecto a las 18:00.

a) Ingrese el número en la columna 2 (día) en la lista L1, y el número en la columna 4 (minutos con respecto a las 18:00) en la lista L2. Construya un diagrama de dispersión con las coordenadas x de L1 y las coordenadas y de L2.

b) Mediante una regresión para el seno, determine la curva de regresión para los puntos y almacene su ecuación en Y1. Superponga la gráfica de la curva en el diagrama de dispersión. ¿Es un buen ajuste?

c) Construya una nueva columna que muestre los *residuales* (la diferencia entre el valor y real en cada punto y el valor de y predicho mediante la curva de regresión) y almacénelos en la lista L3. Su calculadora podría tener una lista denominada RESID, en cuyo caso, el comando RESID → L3 realizará esta operación. También podría ingresar L2 − Y1(L1) → L3.

d) Construya un diagrama de dispersión con las coordenadas x de L1 y las coordenadas y de L3. Determine la curva seno de regresión para *estos* puntos y superpóngala en el diagrama de dispersión. ¿Es un buen ajuste?

e) Escriba para aprender Interprete lo que parecen indicar las dos regresiones con respecto al comportamiento periódico de los crepúsculos astronómicos como una función del tiempo. Éste no es un fenómeno raro en datos astronómicos y, durante siglos, mantuvo desconcertados a los antiguos astrónomos.



5.5 Ley de los senos

Aprenderá acerca de...

- La deducción de la ley de los senos
- La resolución de triángulos (AAL, ALA)
- El caso ambiguo (LLA)
- Aplicaciones

...porque

La ley de los senos es una poderosa extensión de los teoremas de congruencia de los triángulos de la geometría euclidiana.

Deducción de la ley de los senos

De sus estudios de geometría, recuerde que un triángulo tiene seis partes (tres lados (L), tres ángulos (A)), pero que su tamaño y forma pueden determinarse por completo fijando sólo tres de esas partes, siempre que las tres sean correctas. Estos tres elementos que determinan *congruencia de triángulos* se conocen por sus acrónimos: AAL, ALA, LAL y LLL. Los otros dos acrónimos representan correspondencias que no funcionan bien; AAA sólo determina semejanza, mientras que LLA ni siquiera determina semejanza.

Una vez que se establece la congruencia, mediante trigonometría podemos determinar las otras partes del triángulo. Las herramientas que necesitamos son la ley de los senos y la ley de los cosenos, los temas de nuestras últimas dos secciones de trigonometría.

La **ley de los senos** establece que la razón del seno de un ángulo a la longitud de su lado opuesto es la misma para los tres ángulos de cualquier triángulo.

Ley de los senos

En cualquier $\triangle ABC$, con ángulos A, B y C y lados opuestos a, b y c, respectivamente, la ecuación siguiente es verdadera:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

La deducción de la ley de los senos se refiere a los dos triángulos de la figura 5.13, en cada uno de los cuales hemos dibujado una altura al lado c. La aplicación de la trigonometría del triángulo rectángulo a cualquiera de los triángulos en la figura 5.13 nos dice que

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{b}.$$

En el triángulo acutángulo de arriba,

$$\operatorname{sen} B = \frac{h}{a},$$

mientras que en el triángulo obtusángulo de abajo,

$$\operatorname{sen} (\pi - B) = \frac{h}{a}.$$

Pero $\operatorname{sen} (\pi - B) = \operatorname{sen} B$, así que en cualquier caso

$$\operatorname{sen} B = \frac{h}{a}.$$

Al despejar h de ambas ecuaciones se obtiene $h = b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$. La ecuación $b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$ es equivalente a

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}.$$

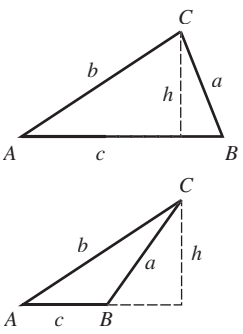


FIGURA 5.13 La ley de los senos.

Si hubiésemos dibujado la altura del lado a y repetido los mismos pasos anteriores, llegaríamos a la conclusión de que

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Colocando juntos los resultados,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Resolución de triángulos (AAL, ALA)

Dos ángulos y un lado de un triángulo, en cualquier orden, determinan por completo el tamaño y forma de un triángulo. Por supuesto, dos ángulos de un triángulo determinan el tercero, así que en realidad obtenemos gratis una de las partes que faltan. Resolvemos para las dos partes restantes (los lados desconocidos) mediante la ley de los senos.

EJEMPLO 1 Resolución de un triángulo dados dos ángulos y un lado

Resuelva el $\triangle ABC$, dado que $\angle A = 36°$, $\angle B = 48°$ y $a = 8$ (consulte la figura 5.14).

SOLUCIÓN Primero, notamos que $\angle C = 180° - 36° - 48° = 96°$.

Luego aplicamos la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 36°}{8} = \frac{\operatorname{sen} 48°}{b} \qquad \frac{\operatorname{sen} 36°}{8} = \frac{\operatorname{sen} 96°}{c}$$

$$b = \frac{8 \operatorname{sen} 48°}{\operatorname{sen} 36°} \qquad c = \frac{8 \operatorname{sen} 96°}{\operatorname{sen} 36°}$$

$$b \approx 10.115 \qquad c \approx 13.536$$

Las seis partes del triángulo son:

$$\angle A = 36° \qquad a = 8$$

$$\angle B = 48° \qquad b \approx 10.115$$

$$\angle C = 96° \qquad c \approx 13.536$$

Ahora resuelva el problema 1.

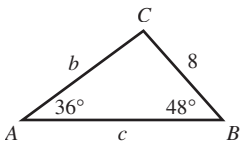


FIGURA 5.14 Un triángulo determinado por AAL (ejemplo 1).

El caso ambiguo (LLA)

Mientras que dos ángulos y un lado de un triángulo siempre bastan para determinar el tamaño y la forma del triángulo, no se puede decir lo mismo para dos lados y un ángulo. Quizá de forma inesperada, depende de cuál ángulo se trate: si el ángulo está incluido entre los dos lados (el caso LAL), entonces el triángulo determina de forma única la congruencia. Si el ángulo es opuesto a uno de los lados (el caso LLA), entonces podría determinarse uno, dos o ningún triángulo.

Resolver un triángulo en el caso LAL implica la ley de los cosenos y trataremos ese asunto en la sección siguiente. La resolución de un triángulo en el caso LLA se lleva a cabo mediante la ley de los senos, pero observando las posibilidades, como se ve en la siguiente exploración:

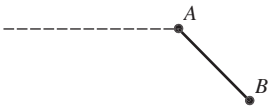


FIGURA 5.15 Diagrama para la parte 1 (exploración 1).

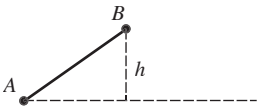


FIGURA 5.16 Diagrama para la parte 2 (exploración 1).

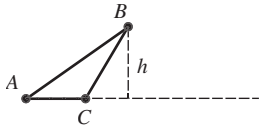


FIGURA 5.17 Diagrama para las partes 3 a 5 (exploración 1).

EXPLORACIÓN 1 **Determinación del número de triángulos**

Queremos construir un $\triangle ABC$ dando el ángulo A, el lado AB y el lado BC.

1. Suponga que el $\angle A$ es obtuso y que el lado AB es como se muestra en la figura 5.15. Para completar el triángulo, el lado BC debe determinar un punto en la recta horizontal punteada (que se extiende hacia la izquierda infinitamente). Con base en la figura, explique por qué está determinado un triángulo *único* $\angle ABC$ si $BC > AB$, pero *ningún* triángulo si $BC \leq AB$.
2. Suponga que $\angle A$ es agudo y que el lado AB es como se muestra en la figura 5.16. Para completar el triángulo, el lado BC debe determinar un punto en la recta horizontal punteada (que se extiende infinitamente hacia la derecha.). Con base en la figura, explique por qué está determinado un *único* $\triangle ABC$ si $BC = h$; pero *ninguno* si $BC < h$.
3. Suponga que $\angle A$ es agudo y que el lado AB es como se muestra en la figura 5.17. Si $AB > BC > h$, entonces podemos formar un triángulo como se muestra. Determine un *segundo* punto C en la recta horizontal punteada que proporcione un lado BC de la misma longitud, pero que determine un triángulo diferente (éste es el "caso ambiguo").
4. Explique por qué, en el caso ambiguo, sen C es el mismo para ambos triángulos (esto es por lo que, en este caso, la ley de los senos también es ambigua).
5. Con base en la figura 5.17, explique por qué se determina un *único* triángulo si $BC \geq AB$.

Ahora que sabemos lo que puede suceder, recurramos al álgebra.

EJEMPLO 2 Resolución de un triángulo dados dos lados y un ángulo

Resuelva el $\triangle ABC$ dado que $a = 7$, $b = 6$, y $\angle A = 26.3°$ (consulte la figura 5.18).

SOLUCIÓN Haciendo un bosquejo razonable (figura 5.18), podemos asegurar que éste no es el caso ambiguo (de hecho, es el caso descrito en el paso 5 de la exploración 1).

Iniciando por resolver para el ángulo *agudo* B y usando la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} \qquad \text{Ley de los senos.}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 26.3°}{7} = \frac{\operatorname{sen} B}{6}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{6 \operatorname{sen} 26.3°}{7}$$

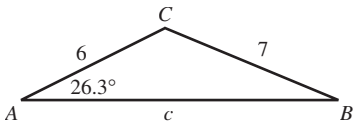


FIGURA 5.18 Un triángulo determinado por LLA (ejemplo 2).

continúa

$$B = \text{sen}^{-1}\left(\frac{6 \text{ sen } 26.3^\circ}{7}\right)$$

$$B = 22.3^\circ$$ Redondear a la precisión del ángulo dado.

Luego, determine el ángulo obtuso C restando:

$$C = 180^\circ - 26.3^\circ - 22.3^\circ$$
$$= 131.4^\circ$$

Por último, determine el lado c:

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c}$$
$$\frac{\text{sen } 26.3^\circ}{7} = \frac{\text{sen } 131.4^\circ}{c}$$
$$c = \frac{7 \text{ sen } 131.4^\circ}{\text{sen } 26.3^\circ}$$
$$c \approx 11.9$$

Las seis partes del triángulo son:

$$\angle A = 26.3^\circ \qquad a = 7$$
$$\angle B = 22.3^\circ \qquad b = 6$$
$$\angle C = 131.4^\circ \qquad c \approx 11.9$$

Ahora resuelva el problema 9.

EJEMPLO 3 Manipulación del caso ambiguo

Resuelva el $\triangle ABC$, dado que $a = 6$, $b = 7$, y $\angle A = 30^\circ$.

SOLUCIÓN Haciendo un bosquejo razonable (figura 5.19), vemos que, con la información dada, son posibles dos triángulos. Conforme avancemos mantenemos esto en mente.

Para determinar el ángulo B, iniciamos utilizando la ley de los senos.

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b}$$ Ley de los senos

$$\frac{\text{sen } 30^\circ}{6} = \frac{\text{sen } B}{7}$$

$$\text{sen } B = \frac{7 \text{ sen } 30^\circ}{6}$$

$$B = \text{sen}^{-1}\left(\frac{7 \text{ sen } 30^\circ}{6}\right)$$

$$B = 35.7^\circ$$ Redondear para hacer coincidir con la precisión del ángulo dado.

Observe que la calculadora no dio un valor para B, no dos. Esto es porque utilizamos la *función* sen^{-1}, que no puede dar dos valores de salida para el mismo valor de entrada. Es más, la función sen^{-1} *nunca dará un ángulo obtuso,* y por eso elegimos iniciar con el ángulo agudo en el ejemplo 2. En este caso, la calculadora ha encontrado el ángulo B que se muestra en la figura 5.19a.

continúa

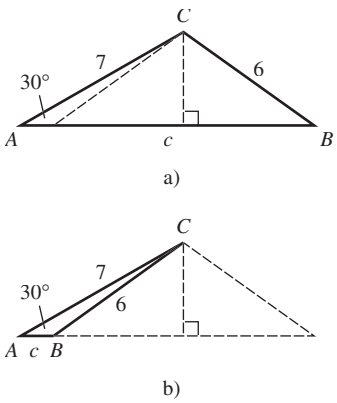


FIGURA 5.19 Dos triángulos determinados por los mismos valores de LLA (ejemplo 3).

Determine el ángulo obtuso C mediante sustracción:

$$C = 180° - 30.0° - 35.7° = 114.3°.$$

Por último, determinamos el lado c:

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

$$\frac{\text{sen } 30.0°}{6} = \frac{\text{sen } 114.3°}{c}$$

$$c = \frac{6 \text{ sen } 114.3°}{\text{sen } 30°}$$

$$c \approx 10.9.$$

Así que, bajo la hipótesis de que el ángulo B es *agudo* (consulte la figura 5.19a), las seis partes del triángulo son:

$$\angle A = 30.0° \qquad a = 6$$

$$\angle B = 35.7° \qquad b = 7$$

$$\angle C = 114.3° \qquad c \approx 10.9.$$

Si el ángulo B es *obtuso* entonces, con base en la figura 5.19b, podemos ver que tiene medida de $180° - 35.7° = 144.3°$.

Por sustracción, el ángulo agudo $C = 180° - 30.0° - 144.3° = 5.7°$. Luego volvemos a calcular c:

$$c = \frac{6 \text{ sen } 5.7°}{\text{sen } 30°} \approx 1.2$$ Sustituir 5.7 por 114.3 en el cálculo anterior.

Así que, bajo la suposición que el ángulo B es *obtuso* (consulte la figura 5.19b), las seis partes del triángulo son:

$$\angle A = 30.0° \qquad a = 6$$

$$\angle B = 144.3° \qquad b = 7$$

$$\angle C = 5.7° \qquad c \approx 1.2$$

Ahora resuelva el problema 19.

Aplicaciones

Muchos problemas que incluyen ángulos y distancias pueden resolverse mediante la superposición de triángulos en la situación y resolviendo el triángulo.

EJEMPLO 4 Localización de un incendio

Chris Johnson, una guardabosque en la estación A, observa un incendio en dirección 32° al este. El guardabosques Rick Thorpe en la estación B, 10 millas al este de A, observa el mismo incendio en una línea de 48° al oeste. Determine la distancia del incendio a cada estación.

continúa

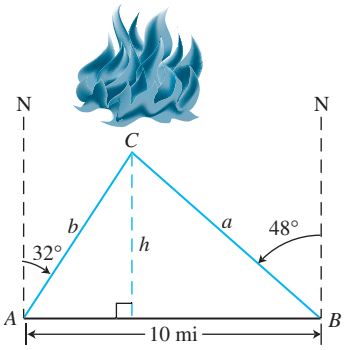


FIGURA 5.20 Determinación de la ubicación de un incendio (ejemplo 4).

SOLUCIÓN Represente con C la ubicación del incendio. Un bosquejo figura 5.20) muestra el triángulo superpuesto, $\triangle ABC$, en el que los ángulos A y B y el ángulo incluido entre ellos (AB) son conocidos. Ésta es una configuración para la ley de los senos.

Observe que $\angle A = 90° - 32° = 58°$ y $\angle B = 90° - 48° = 42°$. Restando, determinamos que $\angle C = 180° - 58° - 42° = 80°$.

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen C}}{c} \quad \text{y} \quad \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen C}}{c} \qquad \text{Ley de los senos.}$$

$$\frac{\text{sen } 58°}{a} = \frac{\text{sen } 80°}{10} \qquad \frac{\text{sen } 42°}{b} = \frac{\text{sen } 80°}{10}$$

$$a = \frac{10 \text{ sen } 58°}{\text{sen } 80°} \qquad b = \frac{10 \text{ sen } 42°}{\text{sen } 80°}$$

$$a \approx 8.6 \qquad b \approx 6.8$$

El fuego está a casi 6.8 millas de la estación A y a alrededor de 8.6 millas de la estación B.

Ahora resuelva el problema 45.

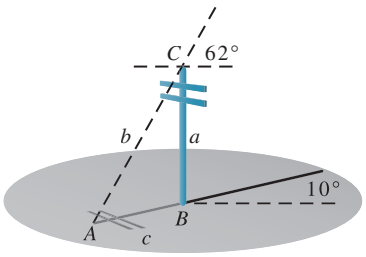


FIGURA 5.21 Un poste telefónico en una pendiente (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Determinación de la altura de un poste

Una carretera tiene una pendiente de 10° hacia arriba de la horizontal; al lado de la carretera hay un poste. El ángulo de elevación del Sol es 62° y el poste proyecta una sombra de 14.5 pies cuesta abajo a lo largo de la carretera. Determine la altura del poste telefónico.

SOLUCIÓN Ésta es una variación interesante de una aplicación común de trigonometría de triángulo rectángulo. La pendiente de la carretera elimina el conveniente ángulo recto, pero aún podemos resolver el problema resolviendo el triángulo.

La figura 5.21 muestra el triángulo superpuesto $\triangle ABC$. Para determinar las medidas de los ángulos A y C, se requiere de un poco de geometría preliminar. Debido a la pendiente de la carretera, el ángulo A es 10° menos que el ángulo de elevación del Sol y el ángulo B es 10° más que un ángulo recto. Esto es,

$$\angle A = 62° - 10° = 52°$$

$$\angle B = 90° + 10° = 100°$$

$$\angle C = 180° - 52° - 100° = 28°$$

Por lo tanto,

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de los senos.}$$

$$\frac{\text{sen } 52°}{a} = \frac{\text{sen } 28°}{14.5}$$

$$a = \frac{14.5 \text{ sen } 52°}{\text{sen } 28°}$$

$$a \approx 24.3 \qquad \text{Redondear a la precisión de la entrada.}$$

El poste tiene aproximadamente 24.3 pies de altura.

Ahora resuelva el problema 39.

REPASO RÁPIDO 5.5 *(Para obtener ayuda consulte las secciones 4.2 y 4.7)*

En los ejercicios del 1 al 4 resuelva el triángulo.

1. a **2.** b **3.** c **4.** d

En los ejercicios 5 y 6 evalúe la expresión.

5. $\dfrac{7 \operatorname{sen} 48^\circ}{\operatorname{sen} 23^\circ}$ **6.** $\dfrac{9 \operatorname{sen} 121^\circ}{\operatorname{sen} 14^\circ}$

En los ejercicios del 7 al 10 resuelva para el ángulo x.

7. $\operatorname{sen} x = 0.3, \quad 0^\circ < x < 90^\circ$

8. $\operatorname{sen} x = 0.3, \quad 90^\circ < x < 180^\circ$

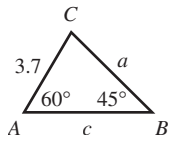
9. $\operatorname{sen} x = -0.7, \quad 180^\circ < x < 270^\circ$

10. $\operatorname{sen} x = -0.7, \quad 270^\circ < x < 360^\circ$

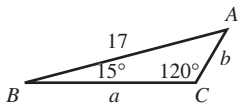
EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.5

En los ejercicios del 1 al 4 resuelva el triángulo.

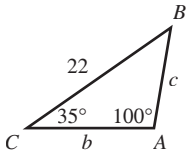
1.



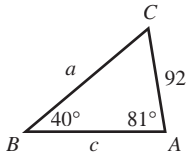
2.



3.



4.



En los ejercicios del 5 al 8 resuelva el triángulo.

5. $A = 40^\circ, \quad B = 30^\circ, \quad b = 10$

6. $A = 50^\circ, \quad B = 62^\circ, \quad a = 4$

7. $A = 33^\circ, \quad B = 70^\circ, \quad b = 7$

8. $B = 16^\circ, \quad C = 103^\circ, \quad c = 12$

En los ejercicios del 9 al 12 resuelva el triángulo.

9. $A = 32^\circ, \quad a = 17, \quad b = 11$

10. $A = 49^\circ, \quad a = 32, \quad b = 28$

11. $B = 70^\circ, \quad b = 14, \quad c = 9$

12. $C = 103^\circ, \quad b = 46, \quad c = 61$

En los ejercicios del 13 al 18 indique si las medidas dadas determinan cero, uno o dos triángulos.

13. $A = 36^\circ, \quad a = 2, \quad b = 7$

14. $B = 82^\circ, \quad b = 17, \quad c = 15$

15. $C = 36^\circ, \quad a = 17, \quad c = 16$

16. $A = 73^\circ, \quad a = 24, \quad b = 28$

17. $C = 30^\circ, \quad a = 18, \quad c = 9$

18. $B = 88^\circ, \quad b = 14, \quad c = 62$

En los ejercicios del 19 al 22 se pueden formar dos triángulos con las medidas dadas. Resuelva ambos triángulos.

19. $A = 64^\circ, \quad a = 16, \quad b = 17$

20. $B = 38^\circ, \quad b = 21, \quad c = 25$

21. $C = 68^\circ, \quad a = 19, \quad c = 18$

22. $B = 57^\circ, \quad a = 11, \quad b = 10$

23. Determine los valores de b que producirán el número dado de triángulos, si $a = 10$ y $B = 42^\circ$.

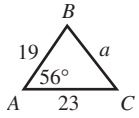
a) Dos triángulos **b)** Un triángulo **c)** Cero triángulos

24. Determine el valor de c que producirán el número dado de triángulos, si $b = 12$ y $C = 53^\circ$.

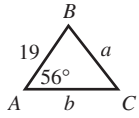
a) Dos triángulos **b)** Un triángulo **c)** Cero triángulos

En los ejercicios 25 y 26 decida si el triángulo puede resolverse usando la ley de los senos. Si es así, resuélvalo. Si no, explique por qué no.

25.

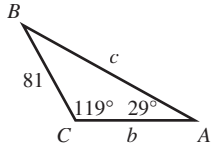


a)

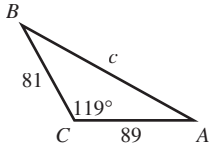


b)

26.



a)



b)

En los ejercicios del 27 al 36 responda en una de las formas siguientes:

a) Indique: "No puede resolverse con la ley de los senos".

b) Indique: "No se puede formar un triángulo".

c) Resuelva el triángulo.

27. $A = 61^\circ, \quad a = 8, \quad b = 21$

28. $B = 47^\circ, \quad a = 8, \quad b = 21$

29. $A = 136°, \quad a = 15, \quad b = 28$

30. $C = 115°, \quad b = 12, \quad c = 7$

31. $B = 42°, \quad c = 18, \quad C = 39°$

32. $A = 19°, \quad b = 22, \quad B = 47°$

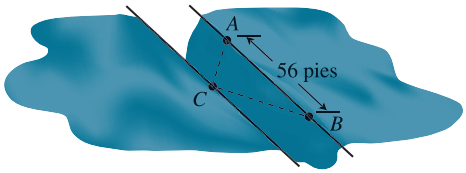
33. $C = 75°, \quad b = 49, \quad c = 48$

34. $A = 54°, \quad a = 13, \quad b = 15$

35. $B = 31°, \quad a = 8, \quad c = 11$

36. $C = 65°, \quad a = 19, \quad b = 22$

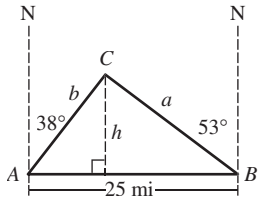
37. Agrimensura de un cañón Dos marcas, A y B, en el mismo lado del borde de un cañón están separados 56 pies. Una tercera marca C, en el otro lado del borde, se coloca de modo que $\angle BAC = 72°$ y $\angle ABC = 53°$.



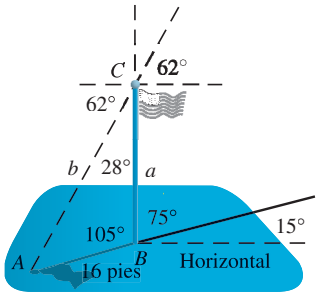
a) Determine la distancia entre C y A.

b) Determine la distancia entre los dos bordes del cañón (suponga que son paralelos).

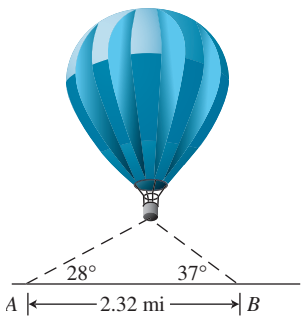
38. Pronóstico del clima Dos meteorólogos están situados a 25 millas uno de otro en una carretera este−oeste. El meteorólogo del punto A observa un tornado en 38° este. El otro, en el punto B, observa el mismo tornado en 53° oeste. Determine la distancia de cada meteorólogo al tornado y la distancia del tornado a la carretera.



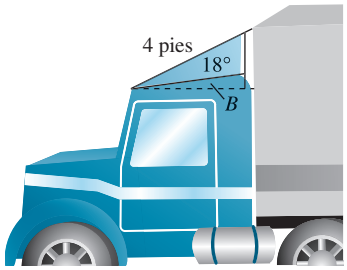
39. Diseño de ingeniería Hay un asta bandera colocada a un lado de una carretera que tiene una pendiente de 15° con respecto a la horizontal. Cuando el ángulo de elevación del sol es 62°, el asta proyecta una sombra de 16 pies de largo cuesta abajo de la carretera. Determine la altura del asta bandera.



40. Altura Dos observadores, separados 2.32 millas, ven un globo aerostático directamente entre ellos, pero con los ángulos de elevación que se muestran en la figura. Determine la altura del globo.



41. Reducción de la resistencia al aire Un plano aerodinámico, de 4 pies, sujeto a la cabina de un camión reduce la resistencia al viento. Si el ángulo entre el plano y la parte superior de la cabina es 18° y el ángulo B es de 10°, determine la longitud del refuerzo vertical colocado como se muestra en la figura.

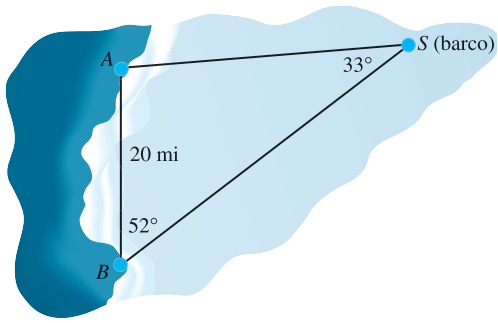


42. Actividad en equipo Diseño de rueda de la fortuna Una rueda de la fortuna tiene 16 carros igualmente espaciados. La distancia entre sillas adyacentes es 15.5 pies. Determine el radio de la rueda (al décimo de pie más cercano).

43. Determinación de altura Dos observadores están separados 600 pies, en lados opuestos de un asta bandera. Los ángulos de elevación de los observadores a la punta del asta son 19° y 21°. Determine la altura del asta bandera.

44. Determinación de altura Dos observadores están separados 400 pies, en lados opuestos de un árbol. Los ángulos de elevación de los observadores a la punta del árbol son 15° y 20°. Determine la altura del árbol.

45. Determinación de una distancia Se sabe que dos faros, A y B, están separados exactamente 20 millas en una línea norte-sur. El capitán de un barco en S, mide $\angle ASB$ como 33°. Un operador de radio en B mide $\angle ABS$ como 52°. Determine la distancia del barco a cada faro.

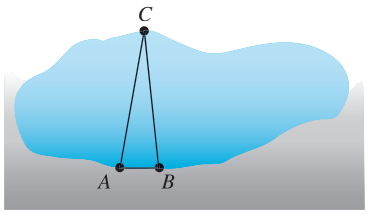


46. Uso de las mediciones Una clase de geometría se dividió en diez equipos y a cada uno se le proporcionó una regla para medir y un transportador para determinar la distancia desde un punto A en un lado de un estanque a un árbol en un punto C en la orilla opuesta. Después de que marcan puntos A y B con estacas, cada equipo utiliza un transportador para medir los ángulos A y B, y una regla para medir la distancia AB. Sus mediciones se dan en la tabla de la página siguiente.

A	*B*	*AB*
79°	84°	26′ 4″
81°	82°	25′ 5″
79°	83°	26′ 0″
80°	87°	26′ 1″
79°	87°	25′ 11″

A	*B*	*AB*
83°	84°	25′ 3″
82°	82°	26′ 5″
78°	85°	25′ 8″
77°	83°	26′ 4″
79°	82°	25′ 7″

Utilice los datos para determinar la mejor estimación de la clase para la distancia *AC*.



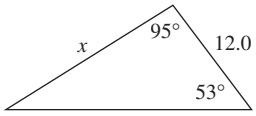
Preguntas de examen estandarizado

47. **Verdadero o falso** La razón de los senos de cualesquiera dos ángulos en un triángulo es igual a la razón de las longitudes de sus lados opuestos. Justifique su respuesta.

48. **Verdadero o falso** El perímetro de un triángulo con dos lados de 10 pulgadas y dos ángulos de 40° es mayor que 36. Justifique su respuesta.

Puede usar su calculadora para responder a las siguientes preguntas.

49. **Opción múltiple** La longitud x en el triángulo que se muestra a la derecha es



A) 8.6 **B)** 15.0 **C)** 18.1
D) 19.2 **E)** 22.6

50. **Opción múltiple** ¿Cuál de las siguientes tres partes de un triángulo no necesariamente determinan las otras tres partes?

A) AAS **B)** ASA **C)** SAS
D) SSA **E)** SSS

51. **Opción múltiple** El lado más pequeño de un triángulo con ángulos de 50, 60 y 70°, tiene longitud 9.0. ¿Cuál es la longitud del lado más largo?

A) 11.0 **B)** 11.5 **C)** 12.0
D) 12.5 **E)** 13.0

52. **Opción múltiple** ¿Cuántos triángulos no congruentes *ABC* pueden construirse si $AB = 5$, $A = 60°$ y $BC = 8$?

A) Ninguno **B)** Uno **C)** Dos
D) Tres **E)** Un número infinito

Exploraciones

53. **Escriba para aprender**

a) Muestre que existe un número infinito de triángulos con AAA dados, si la suma de los tres ángulos positivos es 180°.

b) Proporcione tres ejemplos de triángulos en donde $A = 30°$, $B = 60°$ y $C = 90°$.

c) Proporcione tres ejemplos en donde $A = B = C = 60°$.

54. Utilice la ley de los senos y las identidades de cofunción para deducir las fórmulas siguientes a partir de la trigonometría del triángulo rectángulo.

a) $\operatorname{sen} A = \dfrac{op}{hip}$ **b)** $\cos A = \dfrac{ady}{hip}$ **c)** $\tan A = \dfrac{op}{ady}$

55. **Más de la exploración 1** Consulte las figuras 5.16 y 5.17 de la exploración 1 de esta sección.

a) Exprese h en términos del ángulo A y la longitud AB.

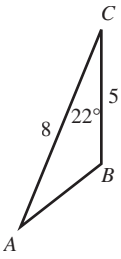
b) En términos del ángulo A y la longitud AB dados, establezca las condiciones sobre la longitud BC que tendrán como resultado que no se forme un triángulo.

c) En términos del ángulo A y la longitud AB dados, indique las condiciones sobre la longitud BC que tendrán como resultado que se forme un único triángulo.

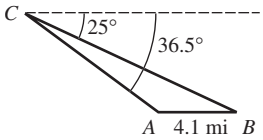
d) En términos del ángulo A y la longitud AB dados, indique las condiciones sobre la longitud BC que tendrán como resultado que se formen dos posibles triángulos.

Ampliación de las ideas

56. Resuelva este triángulo suponiendo que $\angle B$ es obtuso. (*Sugerencia:* Dibuje una perpendicular desde A hasta la recta que pasa por B y C).



57. **Cálculos de un piloto** Se sabe que las torres A y B están a 4.1 millas una de la otra al nivel del suelo. Un piloto mide los ángulos de depresión con respecto a las torres y son 36.5° y 25°, respectivamente, como se muestra en la figura. Determine las distancias AC y BC y la altura del aeroplano.



5.6 Ley de los cosenos

Aprenderá acerca de...

- La deducción de la ley de los cosenos
- La resolución de triángulos (LAL, LLL)
- El área de un triángulo y la fórmula de Herón
- Aplicaciones

...porque

La ley de los cosenos es una extensión importante del teorema de Pitágoras que ofrece muchas aplicaciones.

Deducción de la ley de los cosenos

Habiendo visto la ley de los senos, quizá no le sorprenderá aprender que existe una ley de los cosenos. En matemáticas existen muchos de tales paralelismos. Lo que podría encontrar sorprendente es que la ley de los cosenos no se parece en absoluto a la ley de los senos, sino al teorema de Pitágoras. De hecho, la ley de los cosenos con frecuencia se denomina "teorema de Pitágoras generalizado", ya que tiene como caso especial a ese teorema clásico.

Ley de los cosenos

Sea $\triangle ABC$ cualquier triángulo con lados y ángulos rotulados en la forma usual (figura 5.22).

Entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

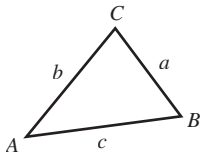


FIGURA 5.22 Un triángulo con la rotulación común (ángulos A, B, C; lados opuestos a, b, c).

Deduciremos sólo la primera de las tres ecuaciones, ya que las otras dos se deducen exactamente de la misma manera. Colocamos el triángulo en un plano coordenado de modo que el ángulo que aparece en la fórmula (en este caso, A) esté en el origen en la posición estándar, con el lado c a lo largo de la parte positiva del eje x. Dependiendo de si el ángulo A es recto (figura 5.23a), agudo (figura 5.23b) u obtuso (figura 5.23c), el punto C estará en el eje y, en el primer cuadrante o en el segundo cuadrante.

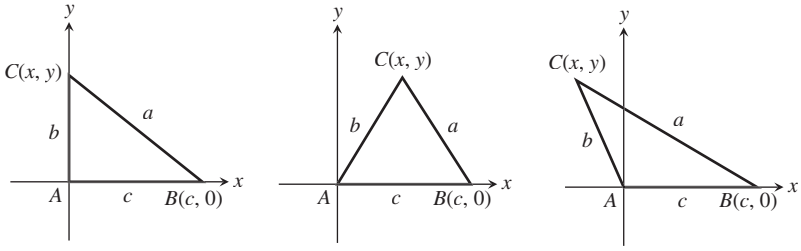


FIGURA 5.23 Tres casos para demostrar la ley de los cosenos.

En cada uno de estos tres casos, C es un punto en el lado terminal del ángulo A en posición estándar, a un distancia b del origen. Exprese las coordenadas de C mediante (x, y). A partir de nuestras definiciones para funciones trigonométricas de cualquier ángulo (sección 4.2), podemos concluir que

$$\frac{x}{b} = \cos A \quad \text{y} \quad \frac{y}{b} = \operatorname{sen} A,$$

y por lo tanto,

$$x = b \cos A \quad \text{y} \quad y = b \operatorname{sen} A.$$

Ahora hacemos a igual a la distancia de C a B mediante la fórmula de la distancia:

$$a = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} \qquad \text{Fórmula de la distancia.}$$

$$a^2 = (x - c)^2 + y^2 \qquad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

$$= (b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A)^2 \qquad \text{Sustitución.}$$

$$= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 A$$

$$= b^2(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad \text{Identidad pitagórica.}$$

Resolución de triángulos (LAL, LLL)

Mientras que la ley de los senos es la herramienta que utilizamos para resolver triángulos en los casos AAL y ALA, la ley de los cosenos es la herramienta necesaria para LAS y LLL (ambos métodos pueden utilizarse en el caso LLA, pero recuerde que podría haber 0, 1 o 2 triángulos).

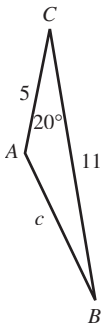


FIGURA 5.24 Un triángulo donde se conocen dos lados y el ángulo entre ellos (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Resolución de un triángulo (LAL)

Resuelva el $\triangle ABC$ dado que $a = 11$, $b = 5$ y $C = 20°$ (consulte la figura 5.24).

SOLUCIÓN

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$= 11^2 + 5^2 - 2(11)(5) \cos 20°$$

$$= 42.6338 \ldots$$

$$c = \sqrt{42.6338 \ldots} \approx 6.5$$

Ahora podríamos utilizar la ley de los cosenos o la ley de los senos para determinar uno de los dos ángulos desconocidos. Como regla general, es mejor utilizar la ley de los cosenos para determinar ángulos, ya que la función arco coseno distingue ángulos obtusos de ángulos agudos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$11^2 = 5^2 + (6.529\ldots)^2 - 2(5)(6.529\ldots) \cos A$$

$$\cos A = \frac{5^2 + (6.529\ldots)^2 - 11^2}{2(5)(6.529\ldots)}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 + (6.529\ldots)^2 - 11^2}{2(5)(6.529\ldots)}\right)$$

$$\approx 144.8°$$

$$B = 180° - 144.8° - 20°$$

$$= 15.2°$$

Así que las seis partes del triángulo son:

$$A = 144.8° \qquad a = 11$$

$$B = 15.2° \qquad b = 5$$

$$C = 20° \qquad c \approx 6.5$$

Ahora resuelva el problema 1.

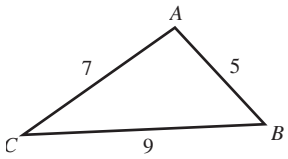


FIGURA 5.25 Un triángulo con tres lados conocidos (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Resolución de un triángulo (LLL)

Resuelva el $\triangle ABC$, si $a = 9$, $b = 7$ y $c = 5$ (consulte la figura 5.25).

SOLUCIÓN Utilizamos la ley de los cosenos para determinar dos de los ángulos. El tercero puede encontrarse mediante la resta de 180°.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$9^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5)\cos A \qquad 7^2 = 9^2 + 5^2 - 2(9)(5)\cos B$$

$$70\cos A = -7 \qquad 90\cos B = 57$$

$$A = \cos^{-1}(-0.1) \qquad B = \cos^{-1}(57/90)$$

$$\approx 95.7° \qquad \approx 50.7°$$

Entonces $C = 180° - 95.7° - 50.7° = 33.6°$.

Ahora resuelva el problema 3.

Área de un triángulo y la fórmula de Herón

Las mismas partes que determinan un triángulo determinan su área. Si las partes son dos lados y el ángulo incluido entre ellos (LAL), obtenemos una fórmula sencilla para el área en términos de esas tres pares que no requieren determinar una altura.

Observe en la figura 5.23 (utilizada en la explicación de la ley de los cosenos) que cada triángulo tiene base c y altura $y = b \operatorname{sen} A$. Aplicando la fórmula estándar para el área tenemos

$$\triangle \text{ Área} = \frac{1}{2}(base)(altura) = \frac{1}{2}(c)(b \operatorname{sen} A) = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A.$$

En realidad son tres fórmulas en una, no importa cuál lado utilicemos como la base.

Área de un triángulo

$$\triangle \text{ Área} = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$$

EJEMPLO 3 Determinación del área de un polígono regular

Determine el área de un octágono regular (8 lados iguales, 8 ángulos iguales) inscrito en un círculo de radio 9 pulg.

SOLUCIÓN La figura 5.26 muestra que podemos dividir el octágono en 8 triángulos congruentes. Cada triángulo tiene dos lados de 9 pulg con un ángulo entre ellos de $\theta = 360°/8 = 45°$. El área de cada triángulo es

$$\triangle \text{ Área} = (1/2)(9)(9) \operatorname{sen} 45° = (81/2) \operatorname{sen} 45° = 81\sqrt{2}/4.$$

Por lo tanto, el área del octágono es

$$\triangle \text{ Área} = 8 \triangle \text{ Área} = 162\sqrt{2} \approx 229 \text{ pulgadas cuadradas.}$$

Ahora resuelva el problema 31.

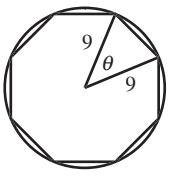


FIGURA 5.26 Un octágono regular inscrito en un círculo de radio de 9 pulg (ejemplo 3).

FÓRMULA DE HERÓN

El nombre de la fórmula es en honor de Herón de Alejandría, cuya demostración de la fórmula es la más antigua que se tiene registrada, aunque los estudiosos de la antigua Arabia aseguran haberla conocido de los trabajos de Arquímedes de Siracusa siglos antes. Arquímedes (aprox. 287-212 a. C.) es considerado como el más importante matemático de toda la antigüedad.

También existe una fórmula para el área que puede utilizarse cuando se conocen los tres lados del triángulo.

Aunque Herón demostró este teorema utilizando sólo métodos de geometría clásica, nosotros lo demostramos, como la mayoría de las personas lo haría actualmente, utilizando las herramientas de trigonometría.

TEOREMA Fórmula de Herón

Sean a, b y c los lados del $\triangle ABC$, y sea s el **semiperímetro**

$$(a + b + c)/2.$$

Entonces el área del $\triangle ABC$ está dada mediante Área $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Demostración

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C \\
4(\text{Área}) &= 2ab \operatorname{sen} C \\
16(\text{Área})^2 &= 4a^2b^2 \operatorname{sen}^2 C \\
&= 4a^2b^2(1 - \cos^2 C) && \text{Identidad pitagórica.} \\
&= 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \cos^2 C \\
&= 4a^2b^2 - (2ab \cos C)^2 \\
&= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 && \text{Ley de los cosenos.} \\
&= (2ab - (a^2 + b^2 - c^2))(2ab + (a^2 + b^2 - c^2)) && \text{Diferencia de cuadrados.} \\
&= (c^2 - (a^2 - 2ab + b^2))((a^2 + 2ab + b^2) - c^2) \\
&= (c^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - c^2) \\
&= (c - (a-b))(c + (a-b))((a+b) - c)((a+b) + c) && \text{Diferencia de cuadrados.} \\
&= (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c) \\
&= (2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s) && 2s = a + b + c \\
16(\text{Área})^2 &= 16s(s-a)(s-b)(s-c) \\
(\text{Área})^2 &= s(s-a)(s-b)(s-c) \\
\text{Área} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Uso de la fórmula de Herón

Determine el área de un triángulo con lados 13, 15, 18.

SOLUCIÓN Primero calculamos el semiperímetro: $s = (13 + 15 + 18)/2 = 23$.

Luego utilizamos la fórmula de Herón

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \sqrt{23\,(23-13)(23-15)(23-18)} \\
&= \sqrt{23 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 5} = \sqrt{9{,}200} = 20\sqrt{23}.
\end{aligned}$$

El área aproximada es 96 unidades cuadradas.

Ahora resuelva el problema 21.

SÓLIDOS PLATÓNICOS

El tetraedro regular, del ejemplo 6, es uno de los únicos 5 sólidos *regulares* (sólidos con caras que son polígonos congruentes, que tienen ángulos iguales y lados iguales). Los otros son el cubo (sus 6 caras son cuadrados), el octaedro (8 caras triangulares), el dodecaedro (12 caras pentagonales) y el icosaedro (20 caras triangulares). Aunque se conocen como sólidos *platónicos*, no fue Platón quien los descubrió; más bien, figuran en su cosmología como la materia de lo que todo se forma. El universo platónico mismo es un dodecaedro, símbolo favorito de los pitagóricos.

Aplicaciones

Finalizamos esta sección con unas cuantas aplicaciones.

EJEMPLO 5 Medición de un diamante de béisbol

Las bases en un diamante de béisbol están separadas 90 pies y el lado frente al montículo del lanzador está a 60.5 pies de la esquina detrás de *home* (punto C). Determine la distancia del centro del montículo del lanzador (punto B) a la esquina más alejada del cojín de primera base (punto A).

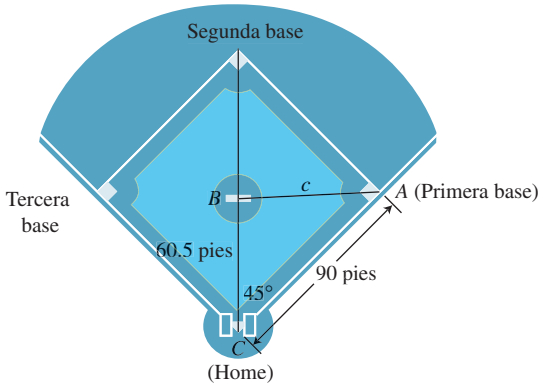


FIGURA 5.27 La parte en forma de diamante de un campo de béisbol (ejemplo 5).

SOLUCIÓN La figura 5.27 muestra la primera base como A, el sitio del lanzador como B y el home como C. La distancia que buscamos es el lado c en el $\triangle ABC$.

Mediante la ley de los cosenos,

$$c^2 = 60.5^2 + 90^2 - 2(60.5)(90)\cos 45°$$

$$c = \sqrt{60.5^2 + 90^2 - 2(60.5)(90)\cos 45°}$$

$$\approx 63.7$$

La distancia de primera base al montículo del lanzador es de alrededor de 63.7 pies.

Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 6 Medición de un ángulo diedro (geometría sólida)

Un tetraedro es un sólido con cuatro caras, cada una de las cuales es un triángulo equilátero. Determine la medida del *ángulo diedro* formado a lo largo de la arista (lado) común de dos caras que se intersecan, en un tetraedro regular con lados de longitud 2.

continúa

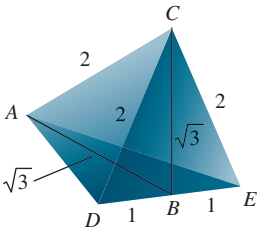


FIGURA 5.28 La medida del $\angle ABC$ es la misma que la medida de cualquier ángulo diedro formado por dos de las caras de un tetraedro (ejemplo 6).

SOLUCIÓN La figura 5.28 muestra el tetraedro. El punto B es el punto medio de la arista DE, y A y C son los vértices del lado opuesto. La medida del $\angle ABC$ es la misma que la medida del ángulo diedro formado a lo largo del lado DE, así que determinaremos la medida del $\angle ABC$.

Como ambos triángulos, $\triangle ADB$ y $\triangle CDB$, son triángulos $30°-60°-90°$, AB y BC tienen longitud $\sqrt{3}$. Si aplicamos la ley de los cosenos al $\triangle ABC$, obtenemos

$$2^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{3}\cos(\angle ABC)$$

$$\cos(\angle ABC) = \frac{1}{3}$$

$$\angle ABC = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.53°$$

El ángulo diedro tiene la misma medida que el $\angle ABC$, aproximadamente $70.53°$ (elegimos los lados de longitud 2 por conveniencia de cálculo, pero en realidad ésta es la medida de un ángulo diedro en un tetraedro de cualquier tamaño).

Ahora resuelva el problema 43.

EXPLORACIÓN 1 **Estimación de la superficie, en acres, de un terreno**

Jim y Bárbara están buscando vivienda y necesitan estimar el tamaño de un terreno irregular que está descrito por el propietario como "un poco más de un acre". Con Bárbara ubicada en una esquina del terreno, Jim inicia en otra esquina y camina en línea recta hacia ella, contando sus pasos. Luego se cambian de esquina y Jim vuelve a contar sus pasos, hasta que han registrado las dimensiones del terreno (en pasos) como en la figura 5.29. Posteriormente, determinan que el paso de Jim mide 2.2 pies. ¿Cuál es la superficie, en acres, aproximada del terreno?

1. Utilice la fórmula de Herón para determinar el área en pasos cuadrados.
2. Convierta el área a pies cuadrados, mediante la medida de los pasos de Jim.
3. En una milla hay 5,280 pies. Convierta el área a millas cuadradas.
4. En una milla cuadrada hay 640 acres. Convierta el área a acres.
5. ¿Hay una buena razón para dudar de la estimación del propietario acerca de la superficie, en acres, del terreno?
6. ¿Jim y Bárbara serían capaces de modificar su sistema para estimar el área de un terreno irregular con cinco lados rectos?

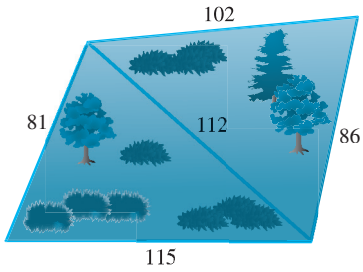


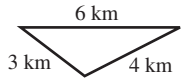
FIGURA 5.29 Las dimensiones (en pasos) de un terreno en forma irregular (exploración 1).



PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO (de la página 443)

PROBLEMA: Puesto que un ciervo necesita alimento, agua, protegerse del clima y de los depredadores, y espacio vital para una supervivencia sana, existen límites naturales para el número de ciervos que un terreno dado puede mantener. Las poblaciones de ciervos en los parques nacionales de Estados Unidos en promedio son de 14 por kilómetro cuadrado. Si una región triangular con lados de 3, 4 y 6 kilómetros tiene una población de 50 ciervos, ¿qué tan cerca está la población de esta área del promedio de la población de un parque nacional?

SOLUCIÓN: Podemos determinar el área de la región



Mediante la fórmula de Herón con

$$s = (3 + 4 + 6)/2 = 13/2$$

y

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{13}{2}\left(\frac{13}{2} - 3\right)\left(\frac{13}{2} - 4\right)\left(\frac{13}{2} - 6\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{13}{2}\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 5.3$$

por lo que el área de la región es 5.3 km^2.

Si este terreno puede mantener a 14 ciervos/km^2, tendría (5.3... km^2)(14 ciervos/km^2) = 74.7 ≈ 75 ciervos. Por lo que el terreno mantiene 25 ciervos menos que el promedio.

REPASO RÁPIDO 5.6 *(Para obtener ayuda consulte las secciones 2.4 y 4.7)*

En los ejercicios del 1 al 4 determine un ángulo entre 0° y 180° que sea la solución de cada una de las ecuación.

1. $\cos A = 3/5$ **2.** $\cos C = -0.23$

3. $\cos A = -0.68$ **4.** $3 \cos C = 1.92$

En los ejercicios 5 y 6 resuelva la ecuación (en términos de x y y) para **a)** $\cos A$ y **b)** A, $0 \le A \le 180°$.

5. $9^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A$ **6.** $y^2 = x^2 + 25 - 10 \cos A$

En los ejercicios del 7 al 10 determine un polinomio cuadrático con coeficientes reales que satisfaga la condición dada.

7. Tiene dos ceros (raíces) reales.

8. tiene un cero (raíz) positivo y uno negativo.

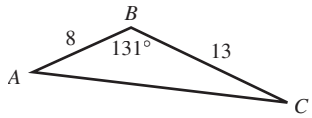
9. No tiene ceros (raíces) reales.

10. Tiene exactamente un cero (raíz) positivo.

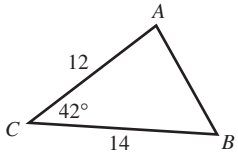
EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.6

En los ejercicios del 1 al 4 resuelva el triángulo.

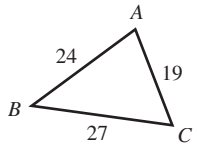
1.



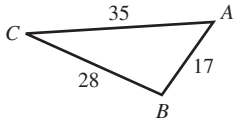
2.



3.



4.



En los ejercicios del 5 al 16 resuelva el triángulo.

5. $A = 55°, \quad b = 12, \quad c = 7$

6. $B = 35°, \quad a = 43, \quad c = 19$

7. $a = 12, \quad b = 21, \quad C = 95°$

8. $b = 22, \quad c = 31, \quad A = 82°$

9. $a = 1, \quad b = 5, \quad c = 4$

10. $a = 1, \quad b = 5, \quad c = 8$

11. $a = 3.2, \quad b = 7.6, \quad c = 6.4$

12. $a = 9.8, \quad b = 12, \quad c = 23$

13. $A = 42°, \quad a = 7, \quad b = 10$

14. $A = 57°, \quad a = 11, \quad b = 10$

15. $A = 63°, \quad a = 8.6, \quad b = 11.1$

16. $A = 71°, \quad a = 9.3, \quad b = 8.5$

En los ejercicios del 17 al 20 determine el área del triángulo.

17. $A = 47°, \quad b = 32$ pies, $\quad c = 19$ pies

18. $A = 52°, \quad b = 14$ m, $\quad c = 21$ m

19. $B = 101°, \quad a = 10$ cm, $\quad c = 22$ cm

20. $C = 112°, \quad a = 1.8$ pulg, $\quad b = 5.1$ pulg.

En los ejercicios del 21 al 28 decida si puede formarse un triángulo con las longitudes dadas. Si es así, utilice la fórmula de Herón para determinar el área del triángulo.

21. $a = 4, \quad b = 5, \quad c = 8$

22. $a = 5, \quad b = 9, \quad c = 7$

23. $a = 3, \quad b = 5, \quad c = 8$

24. $a = 23, \quad b = 19, \quad c = 12$

25. $a = 19.3, \quad b = 22.5, \quad c = 31$

26. $a = 8.2, \quad b = 12.5, \quad c = 28$

27. $a = 33.4, \quad b = 28.5, \quad c = 22.3$

28. $a = 18.2, \quad b = 17.1, \quad c = 12.3$

29. Determine la medida en radianes del mayor ángulo en el triángulo con lados 4, 5 y 6.

30. Un paralelogramo tiene lados de 18 y 26 pies, y un ángulo de 39°. Determine la diagonal más corta.

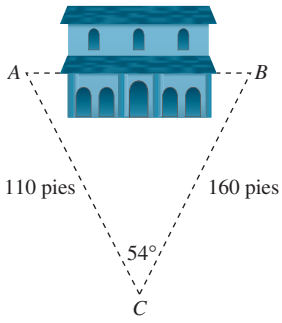
31. Determine el área de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio de 12 pulg.

32. Determine el área de un nonágono regular (9 lados) inscrito en un círculo de radio 10 pulg.

33. Determine el área de un hexágono regular circunscrito alrededor de un círculo de radio 12 pulg. [*Sugerencia:* Comience por determinar la distancia de un vértice del hexágono al centro del círculo].

34. Determine el área de un nonágono regular (9 lados) circunscrito alrededor de un círculo de radio 10 pulgadas.

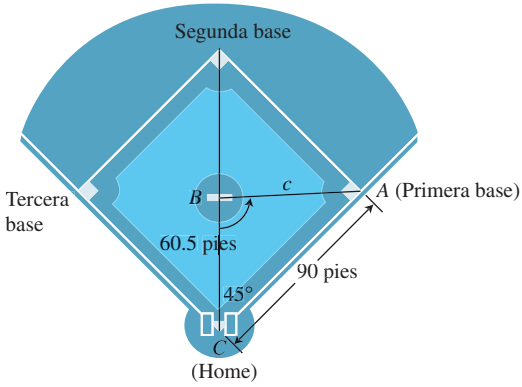
35. **Medición indirecta de distancias** Juan quiere determinar la distancia entre dos puntos, A y B, en lados opuestos de un edificio. Él ubica un punto C, que se encuentra a 110 pies de A y a 160 pies de B, como se ilustra en la figura. Si el ángulo en C es 54°, determine la distancia AB.



36 **Diseño de un campo de béisbol**

a) Determine la distancia del centro de la posición de lanzamiento del lanzador a la esquina más lejana de segunda base. ¿Cómo se compara esta distancia con la distancia de la posición del lanzador a la primera base? (Consulte el ejemplo 5.)

b) Determine $\angle B$ en el $\triangle ABC$.

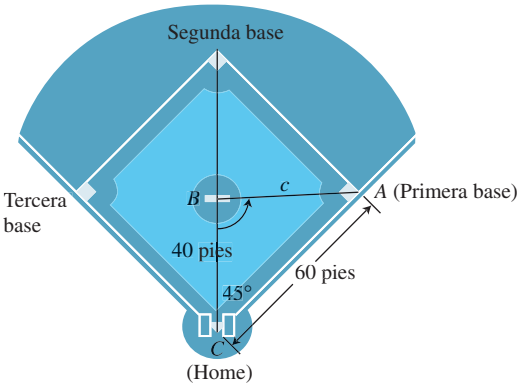


37. Diseño de un campo de softbol En softbol, las bases adyacentes están separadas 60 pies. La distancia del centro de la posición del lanzador a la esquina más lejana del home es 40 pies.

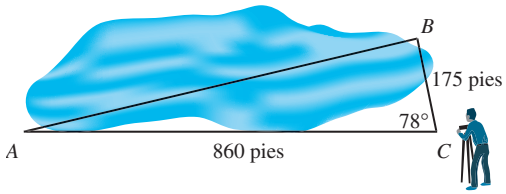
a) Determine la distancia del centro de la posición del lanzador a la esquina más alejada de la primera base.

b) Determine la distancia del centro de la posición del lanzador a la esquina más lejana de la segunda base.

c) Determine $\angle B$ en el $\triangle ABC$.



38. Cálculo de un agrimensor Tony debe determinar la distancia de A a B, puntos situados en lados opuestos de un lago. Ubica un punto C que está a 860 pies de A y a 172 pies de B. Mide el ángulo C como 78°. Determine la distancia AB.

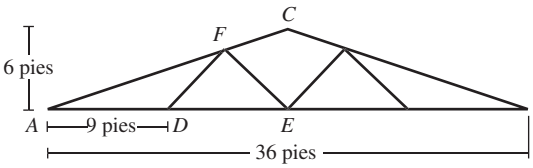


39. Construcción de ingeniería Un fabricante está diseñando la armadura de un tejado que se modela en la figura que se muestra.

a) Determine la medida del $\angle CAE$.

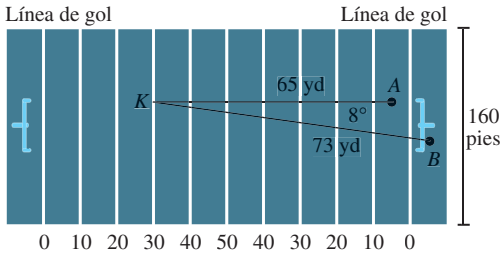
b) Si $AF = 12$ pies, determine la longitud DF.

c) Determine la longitud EF.

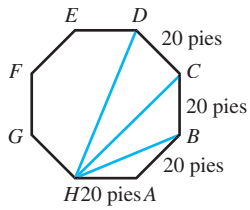


40. Navegación Dos aeroplanos que volaban juntos, en formación, toman direcciones diferentes. Uno vuela hacia el este a 350 mph y el otro vuela en dirección este-noreste a 380 mph. Al cabo de 2 horas, ¿a qué distancia se encontrarán, suponiendo que vuelan a la misma altitud?

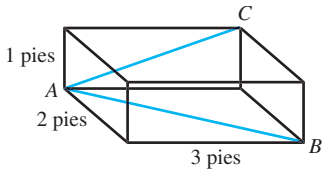
41. Patada inicial en fútbol americano Un jugador en espera de recibir el balón en una patada inicial se encuentra en la yarda 5 (punto A) cuando se patea el balón a 65 yardas, en la yarda 30 del campo del oponente. El balón pateado recorre 73 yardas en un ángulo de 8° a la derecha del receptor, como se muestra en la figura (punto B). Determine la distancia que el receptor corre para atrapar el balón.



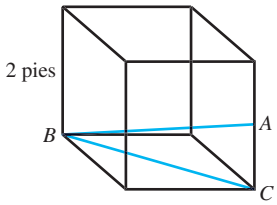
42. Actividad en equipo Diseño arquitectónico La inspectora de obras Julie Wang verifica una construcción en forma de octágono regular con lados de 20 pies de largo. Comprueba que el contratista ha ubicado las esquinas de los cimientos de forma correcta, midiendo varias diagonales. Calcule lo que deben medir las longitudes de las diagonales HB, HC y HD.



43. Conexión entre trigonometría y geometría El $\angle CAB$ está inscrito en una caja rectangular cuyos lados son 1, 2 y 3 pies de largo, como se muestra. Determine la medida del $\angle CAB$.



44. Actividad en equipo Conexión entre trigonometría y geometría Un cubo tiene aristas de longitud 2 pies. El punto A es el punto medio de una arista. Determine la medida de $\angle ABC$.



Preguntas de examen estandarizado

45. Verdadero o falso Si el $\triangle ABC$ es cualquier triángulo con lados y ángulos rotulados de la forma usual, entonces $b^2 + c^2 > 2bc \cos A$. Justifique su respuesta.

46. Verdadero o falso Si a, b y θ son dos lados y el ángulo entre ellos de un paralelogramo, el área del paralelogramo es ab sen θ. Justifique su respuesta.

Puede utilizar una calculadora graficadora al responder estas preguntas.

47 Opción múltiple ¿Cuál es el área de un dodecágono regular (figura con doce lados) inscrito en un círculo de radio 12?

A) 427 **B)** 432 **C)** 437 **D)** 442 **E)** 447

48 Opción múltiple El área de un triángulo con lados 7, 8 y 9 es

A) $6\sqrt{15}$ **B)** $12\sqrt{5}$ **C)** $16\sqrt{3}$ **D)** $17\sqrt{3}$ **E)** $18\sqrt{3}$

49 **Opción múltiple** Dos botes inician en el mismo punto y se alejan rápidamente en direcciones que forman un ángulo de 110°. Si un bote viaja a 24 millas por hora y el otro recorre 32 millas por hora, ¿qué distancia los separará al cabo de 30 minutos?

A) 21 millas **B)** 22 millas **C)** 23 millas
D) 24 millas **E)** 25 millas.

50 **Opción múltiple** ¿Cuál es la medida del ángulo más pequeño en un triángulo con lados 12, 17 y 25?

A) 21° **B)** 22° **C)** 23° **D)** 24° **E)** 25°.

Exploraciones

51 Determine el área de un polígono regular con n lados inscrito dentro de un círculo de radio r (exprese su respuesta en términos de n y r).

52 **a)** Pruebe la identidad: $\dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$.

b) Demuestre la identidad (más fuerte):

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$$

[*Sugerencia:* utilice la identidad de la parte a), junto con sus otras variantes.]

53 **Navegación** Dos barcos salen del mismo puerto a las 8:00 A.M. y viajan con rapidez constante. Cada barco mantiene un registro que muestra su distancia al puerto y su distancia al otro barco. Parte de los registros para ambos barcos se muestran en las tablas siguientes.



Hora	Millas náuticas al puerto	Millas náuticas al otro barco
9:00	15.1	8.7
10:00	30.2	17.3

Hora	Millas náuticas al puerto	Millas náuticas al otro barco
9:00	12.4	8.7
11:00	37.2	26.0

a) ¿Cuál es la velocidad de cada barco? (Exprese su respuesta en nudos, que son millas náuticas por hora.)

b) ¿Cuál es el ángulo de intersección de los cursos de los dos barcos?

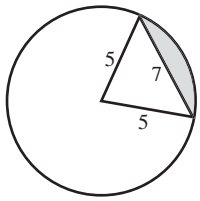
c) Si mantienen los mismos rumbos y velocidades, al mediodía ¿qué tan alejados están?

Ampliación de las ideas

54 Demuestre que el área de un triángulo puede encontrarse con la fórmula

$$\triangle \text{ Área} = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}.$$

55 Un **segmento** de círculo (o sector circular) es la región encerrada entre una cuerda de un círculo y el arco que intercepta esa cuerda. Determine el área del sector circular interceptado por una cuerda de 7 pulg en un círculo de radio 5 pulg.



Matemáticas en el trabajo

Estudié medicina porque siempre me gustaron los retos. La medicina puede parecerse a resolver un rompecabezas, lo cuál disfruto. Elegí anestesiología, pues es más desafiante que otros campos de la medicina. Cualquier especialidad quirúrgica tiende a ofrecer más problemas que, digamos, el tratamiento de resfriados.

Lo que disfruto de mi trabajo es tratar de ganar la confianza de la gente en una entrevista de 5 minutos. Puedo decir que algunas personas aceptarán mi opinión después de nuestra primera entrevista, y otras cuestionarán todo lo que haga.

Un buen ejemplo de cómo utilizamos las matemáticas en medicina es cuando un paciente entra en shock. Por lo común, la presión sanguínea del paciente se desploma y sus mecanismos naturales son incapaces de elevarla.

Al paciente le suministramos dopamina para subir la presión sanguínea, pero necesitamos asegurar que existe un nivel consistente de dopamina que entra al torrente sanguíneo. Por ejemplo, si tenemos 400 mg de dopamina mezclados en 250 c de suero, necesitamos calcular qué tan rápido debe aplicarse el suero de modo que haya 5 mg de dopamina en el torrente sanguíneo por kilogramo del peso del paciente. Puesto que todos los pacientes tienen pesos diferentes, todos los pacientes requieren de diferentes velocidades de aplicación gota a gota.



Ernest Newkirk, M.D.

Ideas Clave DEL CAPÍTULO 5

PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

Identidades recíprocas 445
Identidades cocientes 445
Identidades pitagóricas 446
Identidades de cofunciones 447
Identidades impar-par 447
Identidades de suma/diferencia 464-465
Identidades de ángulo doble 471
Identidades de reducción de potencia 472
Identidades de medio ángulo 473
Ley de los senos 478
Ley de los cosenos 487
Área de un triángulo 489
Fórmula de Herón 490

PROCEDIMIENTOS

Estrategias para demostrar una identidad 455-457

CAPÍTULO 5 Ejercicios de repaso

La colección de ejercicios marcados en azul podría utilizarse como un examen del capítulo.

En los ejercicios 1 y 2 escriba la expresión como el seno, coseno o tangente de un ángulo.

1. $2 \operatorname{sen} 100^\circ \cos 100^\circ$

2. $\dfrac{2 \tan 40^\circ}{1 - \tan^2 40^\circ}$

En los ejercicios 3 y 4 simplifique la expresión a un solo término. Respalde gráficamente su respuesta.

3. $(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta)^2 + 4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta$

4. $1 - 4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$

En los ejercicios del 5 al 22 demuestre la identidad.

5. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

6. $\cos^2 2x - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 2x$

7. $\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x \tan^2 x$

8. $2 \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + 2 \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta = \operatorname{sen} 2\theta$

9. $\csc x - \cos x \cot x = \operatorname{sen} x$

10. $\dfrac{\tan \theta + \operatorname{sen} \theta}{2 \tan \theta} = \cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

11. $\dfrac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} + \dfrac{1 + \cot \theta}{1 - \cot \theta} = 0$

12. $\operatorname{sen} 3\theta = 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta$

13. $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{1 + \sec t}{2 \sec t}$

14. $\dfrac{\tan^3 \gamma - \cot^3 \gamma}{\tan^2 \gamma + \csc^2 \gamma} = \tan \gamma - \cot \gamma$

15. $\dfrac{\cos \phi}{1 - \tan \phi} + \dfrac{\operatorname{sen} \phi}{1 - \cot \phi} = \cos \phi + \operatorname{sen} \phi$

16. $\dfrac{\cos(-z)}{\sec(-z) + \tan(-z)} = 1 + \operatorname{sen} z$

17. $\sqrt{\dfrac{1 - \cos y}{1 + \cos y}} = \dfrac{1 - \cos y}{|\operatorname{sen} y|}$

18. $\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen} \gamma}{1 + \operatorname{sen} \gamma}} = \dfrac{|\cos \gamma|}{1 + \operatorname{sen} \gamma}$

19. $\tan\left(u + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan u - 1}{1 + \tan u}$

20. $\dfrac{1}{4} \operatorname{sen} 4\gamma = \operatorname{sen} \gamma \cos^3 \gamma - \cos \gamma \operatorname{sen}^3 \gamma$

21. $\tan \dfrac{1}{2}\beta = \csc \beta - \cot \beta$

22. $\arctan t = \dfrac{1}{2} \arctan \dfrac{2t}{1 - t^2}, \quad -1 < t < 1$

En los ejercicios 23 y 24 utilice una graficadora para conjeturar si la ecuación probablemente es una identidad. Confirme su conjetura.

23. $\sec x - \operatorname{sen} x \tan x = \cos x$

24. $(\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\tan^2 \alpha + 1) = \tan^2 \alpha - 1$

En los ejercicios del 25 al 28 escriba la expresión en términos sólo de sen x y cos x.

25. $\operatorname{sen} 3x + \cos 3x$

26. $\operatorname{sen} 2x + \cos 3x$

27. $\cos^2 2x - \operatorname{sen} 2x$

28. $\operatorname{sen} 3x - 3 \operatorname{sen} 2x$

En los ejercicios del 29 al 34 determine la solución general sin utilizar una calculadora. Proporcione respuestas exactas.

29. $\operatorname{sen} 2x = 0.5$

30. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

31. $\tan x = -1$

32. $2 \operatorname{sen}^{-1} x = \sqrt{2}$

33. $\tan^{-1} x = 1$

34. $2 \cos 2x = 1$

En los ejercicios del 35 al 38 resuelva gráficamente la ecuación. Determine todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

35. $\operatorname{sen}^2 x - 3 \cos x = -0.5$

36. $\cos^3 x - 2 \operatorname{sen} x - 0.7 = 0$

37. $\operatorname{sen}^4 + x^2 = 2$

38. $\operatorname{sen} 2x = x^3 - 5x^2 + 5x + 1$

En los ejercicios del 39 al 44 determine todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ sin utilizar una calculadora. Proporcione respuestas exactas.

39. $2 \cos x = 1$

40. $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$

41. $\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x - 3 = 0$

42. $\cos 2t = \cos t$

43. $\operatorname{sen}(\cos x) = 1$

44. $\cos 2x + 5 \cos x = 2$

En los ejercicios del 45 al 48 resuelva la desigualdad. Utilice cualquier método, pero proporcione respuestas exactas.

45. $2 \cos 2x > 1$ para $0 \le x < 2\pi$

46. $\operatorname{sen} 2x > 2 \cos x$ para $0 < x \le 2\pi$

47. $2 \cos x < 1$ para $0 \le x < 2\pi$

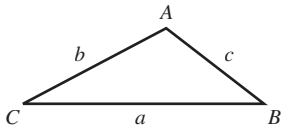
48. $\tan x < \operatorname{sen} x$ para $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

En los ejercicios 49 y 50 determine una ecuación equivalente de la forma $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$. Respalde gráficamente su trabajo.

49. $y = 3 \operatorname{sen} 3x + 4 \cos 3x$

50. $y = 5 \operatorname{sen} 2x - 12 \cos 2x$

En los ejercicios del 51 al 58 resuelva el $\triangle ABC$.



51. $A = 79°, \quad B = 33°, \quad a = 7$

52. $a = 5, \quad b = 8, \quad B = 110°$

53. $a = 8, \quad b = 3, \quad B = 30°$

54. $a = 14.7, \quad A = 29.3°, \quad C = 33°$

55. $A = 34°, \quad B = 74°, \quad c = 5$

56. $c = 41, \quad A = 22.9°, \quad C = 55.1°$

57. $a = 5, \quad b = 7, \quad c = 6$

58. $A = 85°, \quad a = 6, \quad b = 4$

En los ejercicios 59 y 60 determine el área del $\triangle ABC$.

59. $a = 3, \quad b = 5, \quad c = 6$

60. $a = 10, \quad b = 6, \quad C = 50°$

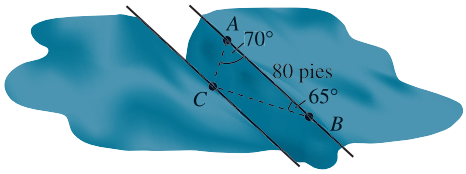
61. Para $a = 12$ y $B = 28°$, determine los valores de b que producirán el número de triángulos que se indica:

a) Dos **b)** Uno **c)** Cero

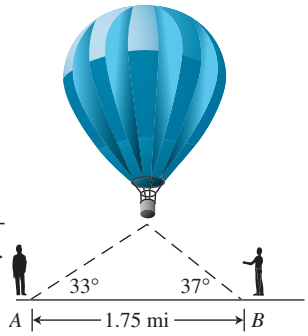
62. Agrimensura de un cañón Dos marcas, A y B, están separadas 80 pies del mismo lado del borde de un cañón, como se muestra en la figura. Un excursionista está ubicado del otro lado del cañón en el punto C. Un agrimensor determina que el $\angle BAC = 70°$ y el $\angle ABC = 65°$.

a) ¿Cuál es la distancia del excursionista al punto A?

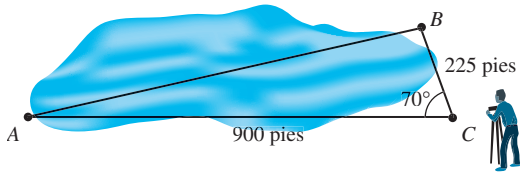
b) ¿Cuál es la distancia entre los dos bordes del cañón? (Suponga que son paralelos).



63. Altitud Un globo aerostático, sobre Tucson, Arizona, es observado de manera simultánea por dos observadores que están a nivel del suelo y en línea con el globo, en los puntos A y B que se encuentran separados 1.75 millas. Los ángulos de elevación se muestran en la figura. ¿A qué altura se encuentra el globo del suelo?



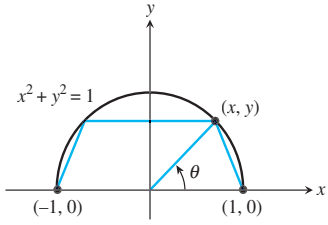
64. Determinación de distancia Para determinar la distancia entre dos puntos, A y B, en lados opuestos de un lago, un agrimensor selecciona un punto C que está a 990 pies del A y 225 pies de B, como se muestra en la figura. Si la medida del ángulo en C es 70°, determine la distancia entre A y B.



65. Determinación de una medida en radianes Determine la medida, en radianes, del ángulo más grande del triángulo cuyos lados tienen longitudes 8, 9 y 10.

66. Determinación de un paralelogramo Un paralelogramo tiene lados de 15 y 24 pies, y un ángulo de 40°. Determine las diagonales.

67. Maximización del área Un trapecio está inscrito en la mitad superior de un círculo unitario, como se muestra en la figura.



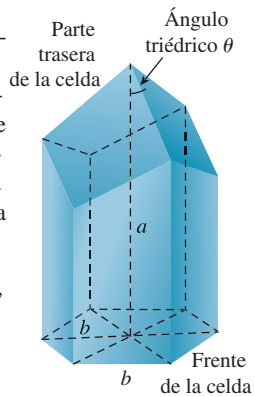
a) Escriba el área del trapecio como una función de θ.

b) Determine el valor de θ que maximiza el área del trapecio y el área máxima.

68. Celdas en una colmena Una celda de una colmena es un prisma regular hexagonal abierto por el frente con un corte triédrico en la parte posterior. Triédrico se refiere a un vértice que se forma con tres caras de un poliedro. Puede demostrarse que el área de la superficie de una celda está dada por

$$S(\theta) = 6ab + \frac{3}{2}b^2\left(-\cot\theta + \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen}\theta}\right),$$

donde θ es el ángulo entre el eje del prisma y una de las caras de atrás, a es la profundidad del prisma, y b es la longitud del frente hexagonal. Suponga que $a = 1.75$ pulg y $b = 0.65$ pulg.

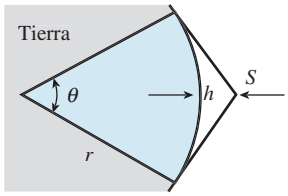


a) Grafique la función $y = S(\theta)$

b) ¿Cuál es el valor de θ que proporciona la mínima área de la superficie? (*Nota:* Esta respuesta es muy cercana al ángulo que se observa en la naturaleza.)

c) ¿Cuál es la mínima área de la superficie?

69. Cobertura de televisión por cable Un satélite transmisor S órbita el planeta a una altura h (en millas) por encima de la superficie terrestre, como se muestra en la figura. Las dos rectas que parten de S son tangentes a la superficie de la Tierra. La parte de la superficie de la Tierra que están en el área de cobertura del satélite está determinada por el ángulo central que se indica, θ, en la figura.



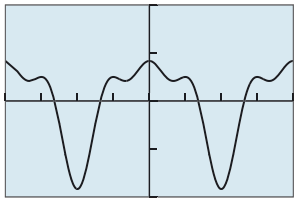
a) Suponiendo que la Tierra es esférica con un radio de 4,000 millas, escriba h como función de θ.

b) Aproxime θ para un satélite 200 millas por arriba de la superficie de la Tierra.

70. Determinación de valores extremos La gráfica de

$$y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$$

se muestra en la figura. Los valores x que corresponden a los puntos máximo y mínimos locales son soluciones de la ecuación sen x – sen $2x$ + sen $3x = 0$. Resuelva algebraicamente esta ecuación y respalde su solución mediante la gráfica de y.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2, 2]$

71. Uso de trigonometría en geometría Un hexágono regular cuyos lados miden 16 cm está inscrito en un círculo. Determine el área dentro del círculo y fuera del hexágono.

72. Uso de trigonometría en geometría Un círculo está inscrito en un pentágono regular cuyos lados son de 12 cm. Determine el área dentro del pentágono y fuera del círculo.

73. Uso de trigonometría en geometría Una rueda de queso tiene la forma de un cilindro circular recto de 18 cm de diámetro y 5 cm de grosor. Si se corta una rebanada de queso con ángulo central de 15°, determine el volumen de queso en la rebanada.

74. Fórmulas producto a suma Muestre las identidades siguientes, que se denominan **fórmulas producto a suma**.

a) $\text{sen } u \text{ sen } v = \frac{1}{2}(\cos(u - v) - \cos(u + v))$

b) $\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u - v) + \cos(u + v))$

c) $\text{sen } u \cos v = \frac{1}{2}(\text{sen}(u + v) + \text{sen}(u - v))$

75. Fórmulas suma a producto Utilice las fórmulas producto a suma del ejercicio 74 para demostrar las identidades siguientes, que se denominan **fórmulas suma a producto**.

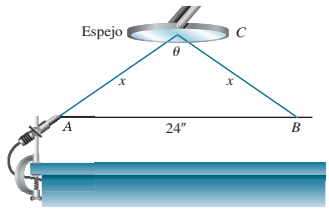
a) $\text{sen } u + \text{sen } v = 2 \text{ sen } \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$

b) $\text{sen } u - \text{sen } v = 2 \text{ sen } \frac{u-v}{2} \cos \frac{u+v}{2}$

c) $\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$

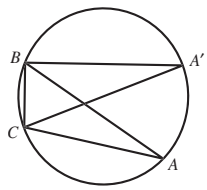
d) $\cos u - \cos v = -2 \text{ sen } \frac{u+v}{2} \text{ sen } \frac{u-v}{2}$

76. Descubriendo a estudiantes que falsifican datos Carmen y Pat necesitan completar un experimento de laboratorio de física que perdieron. Tenían que medir la distancia total ($2x$) recorrida por un rayo de luz desde el punto A al punto B, y registrarla en incrementos de 20° de θ conforme se ajusta el espejo C) verticalmente hacia arriba. Ellos reportan las medidas de la tabla a continuación; sin embargo, en realidad sólo uno de los estudiantes hizo la práctica; el otro no entró y falsificó los datos. ¿Quién falsificó los datos y cómo puede saberlo?



CARMEN		PAT	
θ	$2x$	θ	$2x$
160°	24.4″	160°	24.5″
140°	25.6″	140°	25.2″
120°	28.0″	120°	26.4″
100°	31.2″	100°	30.4″
80°	37.6″	80°	35.2″
60°	48.0″	60°	48.0″
40°	70.4″	40°	84.0″
20°	138.4″	20°	138.4″

77. Un hecho interesante acerca de (sen A)/a La razón (sen A)/a que aparece en la ley de los senos se presenta de otra manera en la geometría del $\triangle ABC$. Es el recíproco del radio de la circunferencia circunscrita.



a) Suponga que el $\triangle ABC$ está circunscrito, como se muestra en el diagrama, y construya el diámetro CA'. Explique por qué el $\angle A'BC$ es un ángulo recto.

b) Explique por qué son congruentes el $\angle A'$ y el $\angle A$.

c) Si a, b y c son los lados opuestos a los ángulos A, B y C, como es usual, explique por qué sen $A' = a/d$, donde d es el diámetro del círculo.

d) Por último, explique por qué (sen A)/$a = 1/d$.

e) ¿(senB)/b y (sen C)/c también son iguales a $1/d$? ¿Por qué?

CAPÍTULO 5 Proyecto

Modelación de la iluminación de la Luna

Desde la Tierra, la Luna parece un disco circular iluminado en diferentes grados mediante la luz directa del Sol. Durante cada órbita lunar, la Luna varía desde un estado de Luna Nueva sin iluminación visible al de Luna Llena, completamente iluminada por la luz directa del sol. El Observatorio Naval de Estados Unidos ha desarrollado un modelo para determinar la fracción visible del disco de la Luna que es iluminada por el Sol. La información en la tabla siguiente (obtenida del sitio web del Observatorio Naval de Estados Unidos, http://aa.usno.navy.mil/, Departamento de Aplicaciones Astronómicas) muestra la fracción de la Luna iluminada a medianoche de cada día de enero de 2005.

Fracción de la Luna iluminada, enero de 2005

Día #	Fracción iluminada	Día #	Fracción iluminada	Día #	Fracción iluminada	Día #	Fracción iluminada
1	0.74	9	0.03	17	0.49	25	1.00
2	0.65	10	0.00	18	0.59	26	0.99
3	0.56	11	0.01	19	0.69	27	0.97
4	0.45	12	0.05	20	0.77	28	0.93
5	0.35	13	0.11	21	0.85	29	0.87
6	0.25	14	0.19	22	0.91	30	0.80
7	0.16	15	0.29	23	0.95	31	0.71
8	0.08	16	0.39	24	0.98		

Exploraciones

1. Ingrese los datos de la tabla anterior en su graficadora o computadora. Cree un diagrama de dispersión de los datos.
2. Determine valores para a, b, h y k de modo que la ecuación $y = a \cos(b(x - h)) + k$ modele los datos.
3. De forma gráfica verifique la identidad de cofunción $\text{sen}(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$, mediante la sustitución de $(\pi/2 - \theta)$ por θ en el modelo anterior y utilizando seno en lugar de coseno (observe que $\theta = b(x - h)$). Observe qué tan bien este nuevo modelo se ajusta a los datos.
4. En forma gráfica verifique la identidad impar-par $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ para el modelo de la parte 2, sustituyendo $-\theta$ por θ, y observe qué tan bien la gráfica se ajusta a los datos.
5. Encuentre valores para a, b, h y k de modo que la ecuación $y = a \,\text{sen}(b(x - h)) + k$ se ajuste a los datos en la tabla.
6. Verifique de forma gráfica la identidad de cofunción $\cos(\pi/2 - \theta) = \text{sen}\,\theta$, mediante la sustitución $(\pi/2 - \theta)$ por θ en el modelo anterior y usando coseno en lugar de seno (note que $\theta = b(x - h)$). Observe el ajuste de este modelo a los datos.
7. En forma gráfica verifique la identidad impar-par, $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$ para el modelo en la parte 5 mediante la sustitución de $-\theta$ por θ y graficando $-a \,\text{sen}(-\theta) + k$. ¿Cómo se compara este modelo con el modelo original?

CAPÍTULO 6

Aplicaciones de trigonometría

6.1 Vectores en el plano

6.2 Producto punto de vectores

6.3 Ecuaciones paramétricas y movimiento

6.4 Coordenadas polares

6.5 Gráficas de ecuaciones polares

6.6 Teorema de Moivre y raíces *n*-ésimas



El salmón joven emigra, de las aguas dulces donde nació, hacia las saladas aguas del océano, donde vivirá varios años. Cuando es tiempo de desovar, regresan del océano a la desembocadura del río, donde siguen los olores orgánicos del arroyo donde nacieron, guiándolos río arriba. Los investigadores creen que utilizan las corrientes, la salinidad, la temperatura y el campo magnético de la Tierra para guiarse. Algunos peces nadan hasta 3,500 millas río arriba para desovar (consulte el problema relacionado en la página 510).

JAMES BERNOULLI (1654–1705)

El primer miembro de la familia Bernoulli (expulsada de Holanda, por la persecución española, y establecida en Suiza) en lograr fama matemática, James definió los números, que ahora se llaman números de Bernoullli. Él determinó, la forma (elástica) que toma una varilla elástica sobre la que actúa una fuerza en un extremo, mientras que el otro extremo permanece fijo.

Panorama general del capítulo 6

En este capítulo presentamos a los vectores en el plano mediante la realización de operaciones vectoriales; también utilizamos vectores para representar cantidades tales como fuerza y velocidad. Los métodos vectoriales se utilizan ampliamente en física, ingeniería y matemáticas aplicadas. Los vectores se utilizan para planear las rutas de vuelo de los aeroplanos. La forma trigonométrica de un número complejo se utiliza en el teorema de De Moivre y se obtienen las raíces n-ésimas de un número complejo.

Las ecuaciones paramétricas se estudian y utilizan para simular movimiento. Una de las aplicaciones principales de las ecuaciones paramétricas es el análisis de movimiento en el espacio. Las coordenadas polares (otra de las invenciones de Newton, aunque por lo regular se le da crédito a James Bernoulli puesto que él las publicó primero) se utilizan para representar puntos en el plano coordenado. El movimiento planetario se describe mejor con coordenadas polares. Convertiremos coordenadas rectangulares a coordenadas polares, coordenadas polares a coordenadas rectangulares y estudiaremos las gráficas de ecuaciones polares.

6.1 Vectores en el plano

Aprenderá acerca de...

- Los vectores en dos dimensiones
- Las operaciones con vectores
- Los vectores unitarios
- Los ángulos de dirección
- Las aplicaciones de vectores

. . . porque

Estos temas son importantes en muchas aplicaciones del mundo real, tales como el cálculo del efecto del viento sobre la ruta de un aeroplano.

Vectores en dos dimensiones

Algunas cantidades como temperatura, distancia, altura, área y volumen, pueden representarse mediante un solo número real que indica *magnitud* y *tamaño*. Otras cantidades, tales como fuerza, velocidad y aceleración, tienen *magnitud* y *dirección*. Como el número de posibles direcciones para un objeto que se mueve en un plano es infinito, podría sorprenderle saber que dos números son todo lo que necesitamos para representar tanto la magnitud de la velocidad de un objeto como su dirección de movimiento. Basta con que veamos a los pares ordenados de números reales de una nueva forma. Si bien el par (a, b) determina un punto en el plano, también determina un **segmento dirigido de recta** (o **flecha**) con su cola (punto inicial) en el origen y su cabeza (punto final) en (a, b) (figura 6.1). La longitud de esta flecha representa la magnitud, mientras que la manera en que está orientada representa la dirección. Ya que en este contexto el par ordenado (a, b) representa un objeto matemático con magnitud y dirección, le llamamos el **vector posición de (a, b)** y lo expresamos como $\langle a, b\rangle$ para distinguirlo del punto (a, b).

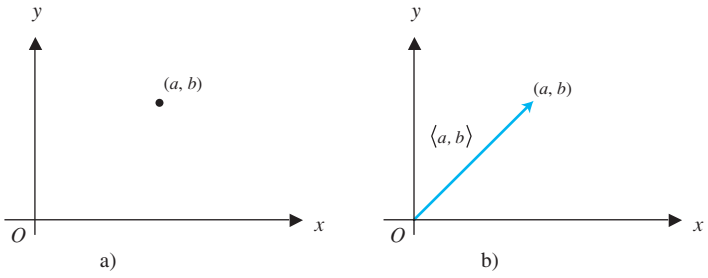


FIGURA 6.1 El punto representa el par ordenado (a, b). La flecha (segmento de recta dirigido) representa el vector $\langle a, b\rangle$.

¿UNA FLECHA ES UN VECTOR?

Aunque una flecha representa a un vector, no es un vector en sí misma, ya que cada vector puede representarse por una infinidad de flechas equivalentes. Aun así, en la práctica, es difícil evitar referirse al "vector $\overrightarrow{PQ}$", y con frecuencia lo haremos. Cuando digamos "el vector $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$", en realidad queremos decir "el vector $\mathbf{u}$ representado por $\overrightarrow{PQ}$".

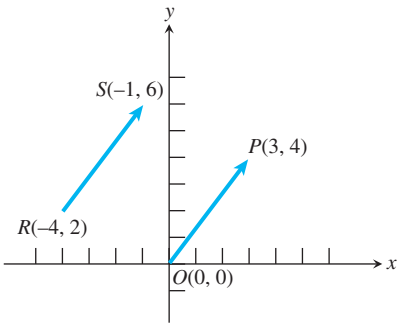


FIGURA 6.2 Las flechas $\overrightarrow{RS}$, y $\overrightarrow{OP}$ representan ambas al vector $\langle 3, 4\rangle$ como cualquier flecha con la misma longitud y la misma dirección. Tales flechas se denominan *equivalentes.*

DEFINICIÓN Vectores bidimensionales

Un **vector bidimensional v** es un par ordenado de números reales, expresados en **forma de componentes** como $\langle a, b\rangle$. Los números a y b son las **componentes** del vector **v**. La **representación estándar** del vector $\langle a, b\rangle$ es la flecha del origen al punto (a, b). La **magnitud** de **v** es la longitud de la flecha y la **dirección** de **v** es la dirección en la que apunta la flecha. El vector $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$, llamado **vector cero**, tiene longitud cero y no tiene dirección.

En aplicaciones, con frecuencia es conveniente representar a los vectores con flechas que inicien en puntos distintos del origen. Algo importante por recordar es que *cualesquier flechas con la misma longitud y apuntando en la misma dirección representan al mismo vector*. Por ejemplo, en la figura 6.2, el vector $\langle 3, 4\rangle$ se muestra representado por $\overrightarrow{RS}$, una flecha con **punto inicial** R y **punto terminal** S, así como mediante su representación estándar $\overrightarrow{OP}$. Dos flechas que representa al mismo vector se denominan **equivalentes**.

La forma rápida para asociar flechas con los vectores que representan es utilizar la siguiente regla:

Regla terminal menos inicial (TMI)

Si una flecha tiene punto inicial (x_1, y_1) y punto terminal (x_2, y_2), representa al vector $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.

EJEMPLO 1 Cómo mostrar qué flechas son equivalentes

Muestre que la flecha de $R = (-4, 2)$ a $S = (-1, 6)$ es equivalente a la flecha de $P = (2, -1)$ a $Q = (5, 3)$ (figura 6.3).

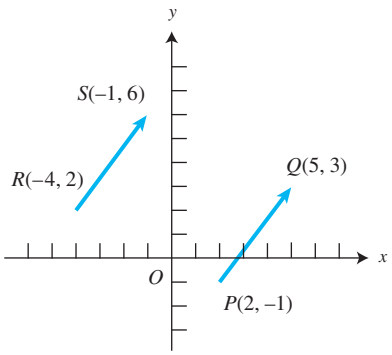


FIGURA 6.3 Las flechas $\overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{PQ}$ parecen tener la misma magnitud y dirección. La regla cabeza menos cola muestra que ellas representan al mismo vector (ejemplo 1).

SOLUCIÓN

Al aplicar la regla TMI resulta que $\overrightarrow{RS}$ representa al vector $\langle -1 - (-4), 6 - 2\rangle = \langle 3, 4\rangle$, mientras que $\overrightarrow{PQ}$ representa al vector $\langle 5 - 2, 3 - (-1)\rangle = \langle 3, 4\rangle$. Aunque tienen diferentes posiciones en el plano, estas flechas representan al mismo vector y, por lo tanto, son equivalentes.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

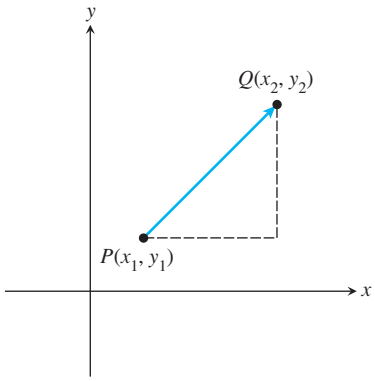


FIGURA 6.4 La magnitud de **v** es la longitud de la flecha $\overrightarrow{PQ}$, que se determina utilizando la fórmula de la distancia $|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

EXPLORACIÓN 1 **Tiro al arco con vectores**

Vea cómo puede dirigir flechas en el plano mediante información de vectores y la regla TMI.

1. Una flecha tiene punto inicial (2, 3) y el punto terminal (7, 5). ¿Qué vector representa?
2. Una flecha tiene punto inicial (3, 5) y representa al vector $\langle -3, 6\rangle$. ¿Cuál es el punto terminal?
3. Si P es el punto $(4, -3)$ y $\overrightarrow{PQ}$ representa a $\langle 2, -4\rangle$, determine Q.
4. Si Q es el punto $(4, -3)$ y $\overrightarrow{PQ}$ representa $\langle 2, -4\rangle$, determine P.

Si manejó con relativa facilidad la exploración 1, entonces comprende cómo los vectores se representan geométricamente mediante flechas. Esto le ayudará a comprender el álgebra de vectores, iniciando con el concepto de magnitud.

La magnitud de un vector **v** también se denomina *valor absoluto de* **v**, y se expresa como $|\mathbf{v}|$ (quizá en algunos libros vea $\|\mathbf{v}\|$). Observe que es un número real no negativo, no un vector. La regla de cálculo siguiente se deduce directamente de la fórmula de la distancia en el plano (figura 6.4).

¿QUÉ HAY ACERCA DE LA DIRECCIÓN?

Podría esperar una regla de cálculo rápido para la *dirección* que acompañase a la regla para la magnitud, pero la dirección es menos fácil de cuantificar. Abordaremos la dirección de vectores, posteriormente en esta sección.

Magnitud

Si **v** se representa mediante la flecha de (x_1, y_1) a (x_2, y_2), entonces

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

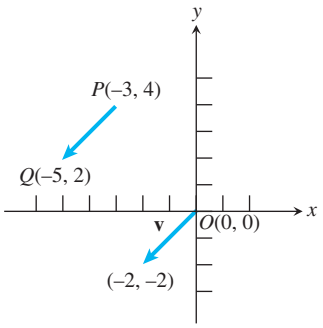


FIGURA 6.5 El vector **v** del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 **Determinación de la magnitud de un vector**

Determine la magnitud del vector **v** representado mediante $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (-3, 4)$ y $Q = (-5, 2)$.

SOLUCIÓN

Al trabajar directamente con la flecha, $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (2 - 4)^2} = 2\sqrt{2}$. O la regla TMI muestra que $\mathbf{v} = \langle -2, -2\rangle$, so $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$. (consulte la figura 6.5).

Ahora resuelva el ejercicio 5.

Operaciones con vectores

En ocasiones, el álgebra de vectores se trabaja con vectores y números al mismo tiempo. En este contexto, nos referimos a los números como **escalares**. Las dos operaciones algebraicas básicas con vectores son *la suma de vectores* (agregar un vector a otro) y la *multiplicación por un escalar* (multiplicación de un vector por un número). Ambas operaciones se representan fácilmente en forma geométrica y las dos tienen aplicaciones inmediatas en muchos problemas del mundo real.

¿QUÉ HAY ACERCA DE LA MULTIPLICACIÓN DE VECTORES?

Existe una forma útil de definir la multiplicación de dos vectores; de hecho, existen dos formas útiles, pero ninguna de ellas sigue el patrón sencillo de la suma de vectores (puede recordar que la multiplicación de matrices tampoco siguió el sencillo patrón de la suma de matrices, por razones semejantes). Veremos el *producto punto* en la sección 6.2. El *producto cruz* requiere una tercera dimensión, así que no lo trataremos en este curso.

DEFINICIÓN Suma de vectores y multiplicación por un escalar

Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vectores y sea k un número real (escalar).
La **suma** (o **resultante**) **de los vectores u y v** es el vector

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle.$$

El **producto del escalar k y el vector u** es

$$k\mathbf{u} = k\langle u_1, u_2 \rangle = \langle ku_1, ku_2 \rangle.$$

La suma de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ puede representarse de manera geométrica mediante flechas, de dos formas.

En la representación **cola-a-cabeza** (regla del triángulo), la representación estándar de $\mathbf{u}$ señala desde el origen a (u_1, u_2). La flecha de (u_1, u_2) a $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ representa a $\mathbf{v}$ (como lo puede verificar mediante la regla TMI). Entonces, la flecha del origen a $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ representa a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (figura 6.6a).

En la representación del **paralelogramo**, las representaciones estándar de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ determinan un paralelogramo cuya diagonal es la representación estándar de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (figura 6.6b).

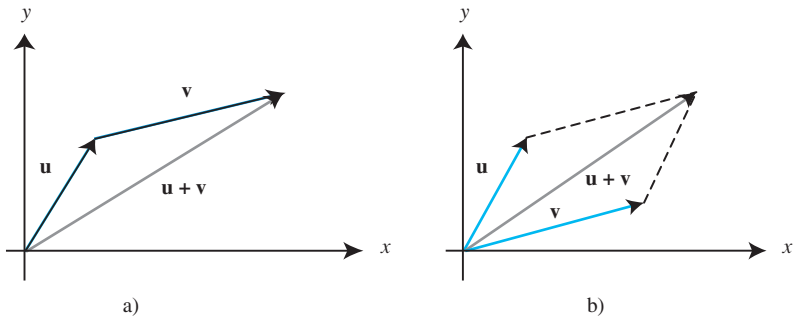


FIGURA 6.6 Dos formas de representar geométricamente la suma vectorial: a) cola a cabeza, (también conocido como método del triángulo) y b) paralelogramo.

El producto $k\mathbf{u}$ del escalar k y el vector $\mathbf{u}$ puede representarse mediante un alargamiento (o compresión) de $\mathbf{u}$ en un factor de k. Si $k > 0$, entonces $k\mathbf{u}$ apunta en la misma dirección que $\mathbf{u}$; si $k < 0$, entonces $k\mathbf{u}$ apunta en dirección opuesta (figura 6.7).

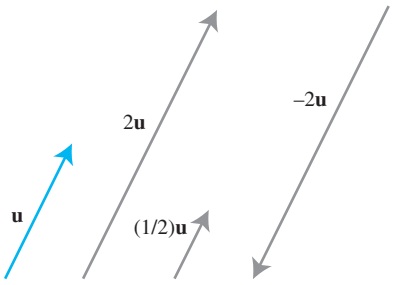


FIGURA 6.7 Representación de $\mathbf{u}$ y varios múltiplos escalares de $\mathbf{u}$.

EJEMPLO 3 Realización de operaciones con vectores

Sean $\mathbf{u} = \langle -1, 3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 7 \rangle$. Determine la forma en componentes de los vectores siguientes:

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ **b)** $3\mathbf{u}$ **c)** $2\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$

SOLUCIÓN Mediante las operaciones vectoriales definidas tenemos:

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle -1, 3 \rangle + \langle 4, 7 \rangle = \langle -1 + 4, 3 + 7 \rangle = \langle 3, 10 \rangle$

b) $3\mathbf{u} = 3\langle -1, 3 \rangle = \langle -3, 9 \rangle$

c) $2\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v} = 2\langle -1, 3 \rangle + (-1)\langle 4, 7 \rangle = \langle -2, 6 \rangle + \langle -4, -7 \rangle = \langle -6, -1 \rangle$

Las representaciones geométricas de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $3\mathbf{u}$ se muestran en la figura 6.8, en la página siguiente.

continúa

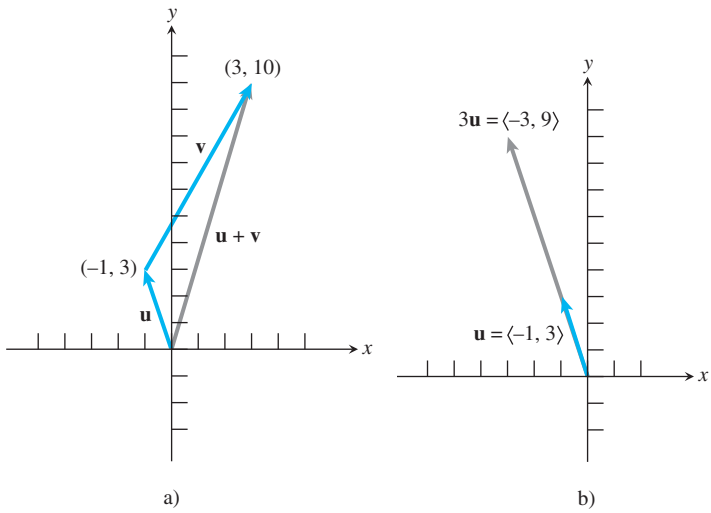


FIGURA 6.8 Dado que $\mathbf{u} = \langle -1, 3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 7\rangle$, podemos a) representar a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ mediante el método de la cola a la cabeza (método del triángulo), y b) representar $3\mathbf{u}$ como un alargamiento de $\mathbf{u}$ en un factor de 3.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Vectores unitarios

Un vector $\mathbf{u}$ con longitud $|\mathbf{u}| = 1$ es un **vector unitario**. Si $\mathbf{v}$ no es el vector cero $\langle 0, 0\rangle$, entonces el vector

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

es un **vector unitario en la dirección de v**. Los vectores unitarios proporcionan una forma de representar la dirección de cualquier vector no nulo. Cualquier vector en la dirección de $\mathbf{v}$, o en dirección opuesta, es un múltiplo escalar de este vector unitario $\mathbf{u}$.

COMENTARIO ACERCA DE LA NOTACIÓN DE VECTORES

Las dos notaciones, $\langle a, b\rangle$ y $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, se conciben para transmitir la idea de que un vector sencillo, $\mathbf{v}$, tiene dos componentes separadas. Esto es lo que hace bidimensional a un vector bidimensional. Verá que tanto $\langle a, b, c\rangle$ como $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ se usan para vectores de tres dimensiones, pero los científicos se apegan a la notación $\langle\ \rangle$ para dimensiones superiores a tres.

EJEMPLO 4 Determinación de un vector unitario

Determine un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$ y verifique que tiene longitud 1.

SOLUCIÓN

$$|\mathbf{v}| = |\langle -3, 2\rangle| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{13}, \text{ así que}$$

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -3, 2\rangle$$

$$= \left\langle \frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

La magnitud de este vector es

$$\left|\left\langle \frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\rangle\right| = \sqrt{\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{13} + \frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{13}{13}} = 1$$

Por tanto, la magnitud de $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es 1. Su dirección es la misma que la de $\mathbf{v}$, ya que es un múltiplo escalar positivo de $\mathbf{v}$.

Ahora resuelva el ejercicio 21.

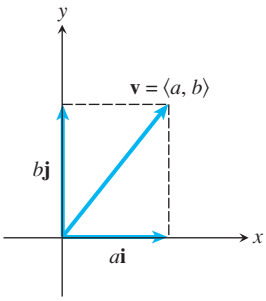


FIGURA 6.9 El vector **v** es igual a $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

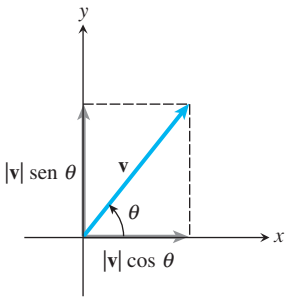


FIGURA 6.10 Las componentes horizontal y vertical de **v**.

Los dos vectores unitarios $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ son los **vectores unitarios estándar (o canónicos)**. Cualquier vector **v** puede escribirse como una expresión en términos de los vectores unitarios estándar:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \langle a, b\rangle \\ &= \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle \\ &= a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle \\ &= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}\end{aligned}$$

Aquí, el vector $\mathbf{v} = \langle a, \text{b}\rangle$ está expresado como la **combinación lineal** $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ de lo vectores **i** y **j**. Los escalares a y b son las **componentes horizontal** y **vertical**, respectivamente, del vector **v** (consulte la figura 6.9).

Ángulos de dirección

De nuestras aplicaciones en la sección 4.8, puede recordar que la dirección se mide de formas diferentes en distintos contextos, en especial en la navegación. Una forma sencilla, pero precisa, para especificar la dirección de un vector **v** es establecer su **ángulo de dirección**, el ángulo θ que forma **v** con la parte positiva del eje x, como lo hicimos en la sección 4.3. Mediante trigonometría (figura 6.10), vemos que la componente horizontal de **v** es $|\mathbf{v}|\cos\theta$ y la componente vertical es $|\mathbf{v}|\,\text{sen}\,\theta$. Escribir el vector en términos de estas componentes se denomina **resolución del vector**.

Resolución del vector

Si **v** tiene ángulo de dirección θ, las componentes de **v** pueden calcularse utilizando la fórmula

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}|\cos\theta, |\mathbf{v}|\,\text{sen}\,\theta\rangle.$$

Con base en la fórmula anterior, se sigue que el vector unitario en la dirección de **v** es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \langle \cos\theta, \text{sen}\,\theta\rangle.$$

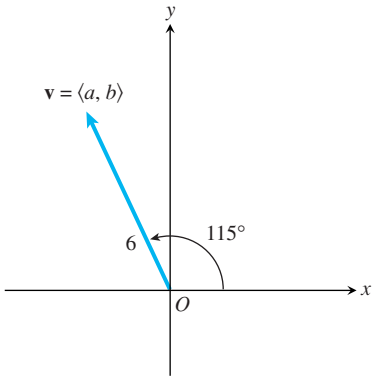


FIGURA 6.11 El ángulo de dirección de **v** es 115° (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Determinación de las componentes de un vector

Determine las componentes del vector **v** con ángulo de dirección 115° y magnitud 6 (figura 6.11).

SOLUCIÓN Si a y b son las componentes horizontal y vertical, respectivamente, de **v**, entonces

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle = \langle 6\cos 115°, 6\,\text{sen}\,115°\rangle.$$

Por lo que, $a = 6\cos 115° \approx -2.54$ y $b = 6\,\text{sen}\,115° \approx 5.44$.

Ahora resuelva el ejercicio 29.

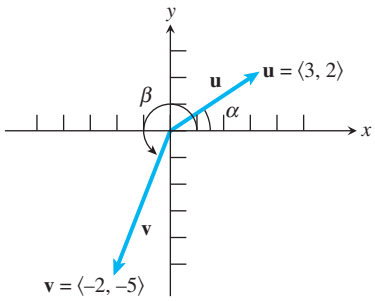


FIGURA 6.12 Los dos vectores del ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Determinación del ángulo de dirección de un vector

Determine la magnitud y el ángulo de dirección de cada vector:

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$ **b)** $\mathbf{v} = \langle -2, -5\rangle$

SOLUCIÓN Consulte la figura 6.12.

a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Si α es el ángulo de dirección de $\mathbf{u}$, entonces $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle = \langle |\mathbf{u}| \cos\alpha, |\mathbf{u}| \operatorname{sen}\alpha\rangle$.

$$3 = |\mathbf{u}| \cos\alpha \qquad \text{Componente horizontal de } \mathbf{u}$$

$$3 = \sqrt{3^2 + 2^2}\cos\alpha \qquad |\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$3 = \sqrt{13}\cos\alpha$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \approx 33.69° \qquad \alpha \text{ es agudo.}$$

b) $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$. Si β es el ángulo de dirección de $\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{v} = \langle -2, -5\rangle = \langle |\mathbf{v}| \cos\beta, |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\beta\rangle$.

$$-2 = |\mathbf{v}| \cos\beta \qquad \text{Componente horizontal de } \mathbf{v}$$

$$-2 = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2}\cos\beta \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2}$$

$$-2 = \sqrt{29}\cos\beta$$

$$\beta = 360° - \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right) \approx 248.2° \qquad 180° < \beta < 270°$$

Ahora resuelva el ejercicio 33.

Aplicaciones de vectores

La **velocidad** de un objeto en movimiento es un vector cuya velocidad tiene magnitud y dirección. La magnitud de la velocidad es la **rapidez**.

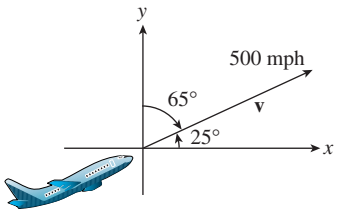


FIGURA 6.13 La trayectoria (rumbo) del aeroplano en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Escritura de la velocidad como un vector

Un avión DC-10 vuela con rumbo 65° a 500 mph. Determine la forma de los componentes de la velocidad del aeroplano. Recuerde que el rumbo es el ángulo que la línea de viaje forma con el rumbo norte, medido en sentido de las manecillas del reloj (consulte la sección 4.1, figura 4.2).

SOLUCIÓN Sea $\mathbf{v}$ la velocidad del aeroplano. Un rumbo de 65° es equivalente a un ángulo de dirección de 25°. La rapidez del avión, 500 mph, es la magnitud del vector $\mathbf{v}$, esto es, $|\mathbf{v}| = 500$ (consulte la figura 6.13).

La componente horizontal de $\mathbf{v}$ es 500 cos 25° y la componente vertical es 500 sen 25°, por lo que

$$\mathbf{v} = (500\cos 25°)\mathbf{i} + (500 \operatorname{sen} 25°)\mathbf{j}$$

$$= \langle 500\cos 25°, 500 \operatorname{sen} 25°\rangle \approx \langle 453.15, 211.31\rangle$$

Las componentes de la velocidad proporcionan la rapidez hacia el este y hacia el norte. Esto es, el avión viaja alrededor de 453.15 mph hacia el este y casi 211.31 mph hacia el norte, cuando viaja a 500 mph con rumbo 65°.

Ahora resuelva el ejercicio 41.

Un problema común para un piloto implica el cálculo del efecto del viento sobre la dirección y rapidez del aeroplano, como se ilustra en el ejemplo 8.

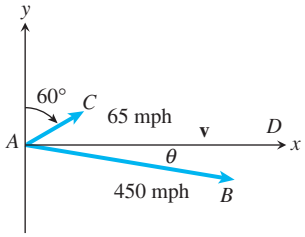


FIGURA 6.14 El eje x representa la ruta de vuelo del avión del ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Cálculo del efecto de la velocidad del viento

El plan de vuelo de la piloto Megan McCarty tiene su salida del aeropuerto internacional de San Francisco y vuela un Boeing 727 rumbo este. Hay un viento de 65 mph con dirección 60°. Determine el rumbo que debe seguir McCarty y la rapidez con respecto a tierra que debe tener el aeroplano (suponga que su velocidad sin viento es de 450 mph).

SOLUCIÓN Consulte la figura 6.14. El vector $\overrightarrow{AB}$ representa la velocidad producida por el aeroplano solo, $\overrightarrow{AC}$ representa la velocidad del viento, y θ es el ángulo DAB. El vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ representa la velocidad resultante, por lo que

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.$$

Debemos encontrar la dirección de $\overrightarrow{AB}$ y $|\mathbf{v}|$.

Al resolver los vectores, obtenemos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \langle 65 \cos 30°, 65 \operatorname{sen} 30° \rangle \\
\overrightarrow{AB} &= \langle 450 \cos \theta, 450 \operatorname{sen} \theta \rangle \\
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \\
&= \langle 65 \cos 30° + 450 \cos \theta, 65 \operatorname{sen} 30° + 450 \operatorname{sen} \theta \rangle
\end{aligned}$$

Como el avión viaja con rumbo este, la segunda componente de $\overrightarrow{AD}$ debe ser cero.

$$\begin{aligned}
65 \operatorname{sen} 30° + 450 \operatorname{sen} \theta &= 0 \\
\theta &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-65 \operatorname{sen} 30°}{450}\right) \\
&\approx -4.14° \qquad \theta < 0
\end{aligned}$$

Por tanto, el rumbo que McCarty debe seguir es

$$90° + |\theta| \approx 94.14°. \qquad \text{Dirección} > 90°$$

La rapidez del avión con respecto a tierra es

$$\begin{aligned}
|\mathbf{v}| = |\overrightarrow{AD}| &= \sqrt{(65 \cos 30° + 450 \cos \theta)^2 + 0^2} \\
&= |65 \cos 30° + 450 \cos \theta| \\
&\approx 505.12
\end{aligned}$$

Usando el valor de θ sin redondear.

McCarty debe utilizar una dirección de aproximadamente 94.14°. El aeroplano viajará con rumbo este a aproximadamente 505.12 mph.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

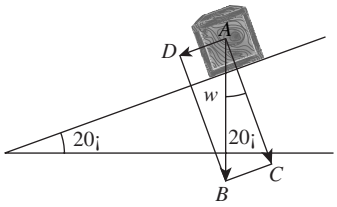


FIGURA 6.15 La fuerza debida a la gravedad $\overrightarrow{AB}$ tiene una componente $\overrightarrow{AC}$ que mantiene la caja contra la superficie de la rampa, y una componente $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ que tiende a jalar a la caja hacia abajo de la rampa (ejemplo 9).

EJEMPLO 9 Determinación del efecto debido a la gravedad

Una fuerza de 30 libras mantiene, en la rampa inclinada de 20°, a la caja de la figura 6.15 sin que se deslice hacia abajo. Determine el peso de la caja.

SOLUCIÓN Nos dan que $|\overrightarrow{AD}| = 30$. Sea $|\overrightarrow{AB}| = w$; entonces

$$\text{sen } 20° = \frac{|\overrightarrow{CB}|}{w} = \frac{30}{w}.$$

Por tanto,

$$w = \frac{30}{\text{sen } 20°} \approx 87.71.$$

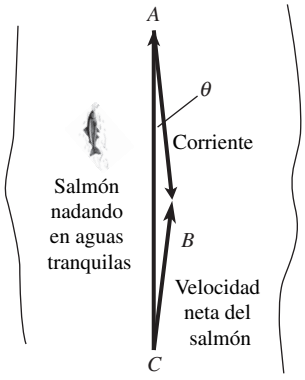
El peso de la caja es de alrededor de 87.71 libras.

Ahora resuelva el ejercicio 47.

PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO (de la página 501)

PROBLEMA: Durante parte de su migración, un salmón está nadando a 6 mph en una corriente que fluye río abajo a 3 mph en un ángulo de 7°. ¿Qué tan rápido está remontando el río el salmón?

SOLUCIÓN: Suponga que el salmón está nadando en un plano paralelo a la superficie del agua.



En la figura, el vector $\overrightarrow{AB}$ representa la corriente de 3 mph, θ es el ángulo CAB, que es de 7°; el vector $\overrightarrow{CA}$ representa la velocidad, de 6 mph, del salmón y el vector $\overrightarrow{CB}$ es la velocidad neta a la que el pez se mueve río arriba.

Así tenemos que

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3 \cos(-83°), 3 \text{ sen } (-83°)\rangle \approx \langle 0.37, -2.98\rangle$$

$$\overrightarrow{CA} = \langle 0, 6\rangle$$

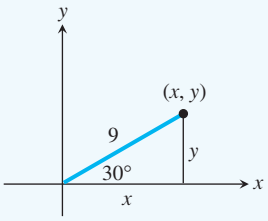
Así, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \langle 3 \cos(-83°), 3 \text{ sen } (-83°) + 6\rangle$
$\approx \langle 0.37, 3.02\rangle$

Entonces, la rapidez del salmón es $|\overrightarrow{CB}| \approx \sqrt{0.37^2 + 3.02^2} \approx 3.04$ mph río arriba.

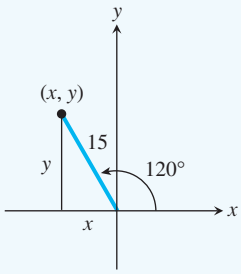
REPASO RÁPIDO 6.1 *(Para obtener ayuda consulte las secciones 4.3 y 4.7)*

En los ejercicios del 1 al 4 determine los valores de x y y.

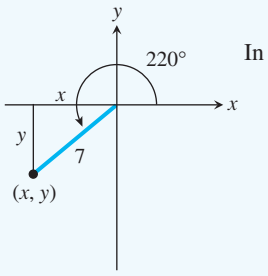
1.



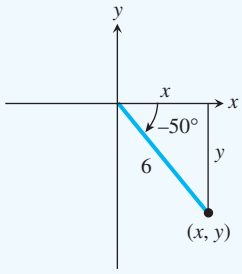
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 y 6 resuelva para θ, en grados.

5. $\theta = \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{29}}\right)$

6. $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{15}}\right)$

En los ejercicios del 7 al 9, el punto P está en el lado terminal del ángulo θ. Determine la medida de θ, si $0° < \theta < 360°$.

7. $P(5, 9)$

8. $P(5, -7)$

9. $P(-2, -5)$

10. Un buque sale del puerto Norfolk y promedia 42 nudos (millas náuticas por hora), viajando durante 3 horas en dirección 40° y luego 5 horas en un curso de 125°. Al cabo de las 8 horas, ¿cuál es la dirección y distancia del buque con respecto al puerto Norfolk?

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.1

En los ejercicios del 1 al 4 demuestre que $\overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son equivalentes, mostrando que representan al mismo vector.

1. $R = (-4, 7)$, $S = (-1, 5)$, $P = (0, 0)$ y $Q = (3, -2)$

2. $R = (7, -3)$, $S = (4, -5)$, $P = (0, 0)$ y $Q = (-3, -2)$

3. $R = (2, 1)$, $S = (0, -1)$, $P = (1, 4)$ y $Q = (-1, 2)$

4. $R = (-2, -1)$, $S = (2, 4)$, $P = (-3, -1)$ y $Q = (1, 4)$

En los ejercicios del 5 al 12 sean $P = (-2, 2)$, $Q = (3, 4)$, $R = (-2, 5)$ y $S = (2, -8)$. Determine las forma en componentes y la magnitud del vector.

5. $\overrightarrow{PQ}$

6. $\overrightarrow{RS}$

7. $\overrightarrow{QR}$

8. $\overrightarrow{PS}$

9. $2\overrightarrow{QS}$

10. $(\sqrt{2})\overrightarrow{PR}$

11. $3\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PS}$

12. $\overrightarrow{PS} - 3\overrightarrow{PQ}$

En los ejercicios del 13 al 20 sean $\mathbf{u} = \langle -1, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 4\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 2, -5\rangle$. Determine la forma en componentes del vector.

13. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

14. $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$

15. $\mathbf{u} - \mathbf{w}$

16. $3\mathbf{v}$

17. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{w}$

18. $2\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$

19. $-2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

20. $-\mathbf{u} - \mathbf{v}$

En los ejercicios del 21 al 24 determine un vector unitario en la dirección del vector dado.

21. $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle$

22. $\mathbf{v} = \langle 1, -1\rangle$

23. $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

24. $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

En los ejercicios del 25 al 28 determine el vector unitario en la dirección del vector dado. Escriba su respuesta **a)** en forma de componentes y **b)** como una combinación lineal de los vectores unitarios estándar $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

25. $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle$

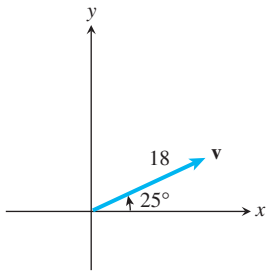
26. $\mathbf{u} = \langle -3, 2\rangle$

27. $\mathbf{u} = \langle -4, -5\rangle$

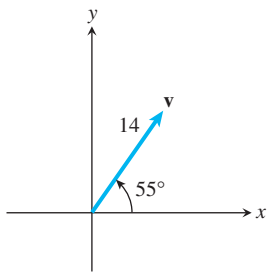
28. $\mathbf{u} = \langle 3, -4\rangle$

En los ejercicios del 29 al 32 determine la forma en componentes del vector $\mathbf{v}$.

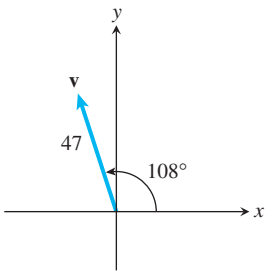
29.



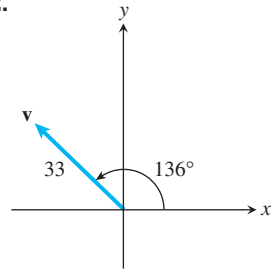
30.



31.



32.



En los ejercicios del 33 al 38 determine la magnitud y el ángulo de dirección del vector.

33. $\langle 3, 4\rangle$

34. $\langle -1, 2\rangle$

35. $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

36. $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

37. $7(\cos 135° \mathbf{i} + \text{sen } 135° \mathbf{j})$

38. $2(\cos 60° \mathbf{i} + \text{sen } 60° \mathbf{j})$

En los ejercicios 39 y 40 determine el vector $\mathbf{v}$ con la magnitud dada y el ángulo de dirección igual al de $\mathbf{u}$.

39. $|\mathbf{v}| = 2$, $\mathbf{u} = \langle 3, -3\rangle$

40. $|\mathbf{v}| = 5$, $\mathbf{u} = \langle -5, 7\rangle$

41. Navegación Un aeroplano vuela con rumbo de 335° a 530 mph. Determine la forma de componentes de la velocidad del aeroplano.

42. Navegación Un aeroplano vuela con rumbo de 170° a 460 mph. Determine la forma de componentes de la velocidad del aeroplano.

43. Ingeniería de vuelo Un aeroplano vuela en dirección (rumbo) de 340° a 325 mph. Un viento sopla en dirección 320° a 40 mph.

a) Determine la forma de componentes de la velocidad del aeroplano.

b) Determine la velocidad real con respecto a tierra y la dirección del aeroplano.

44. Ingeniería de vuelo Un aeroplano vuela en dirección (rumbo) de 170° a 460 mph. Un viento sopla en dirección 200° a 80 mph.

a) Determine la forma de componentes de la velocidad del aeroplano.

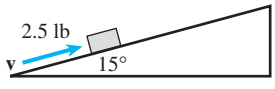
b) Determine la velocidad real con respecto al piso y la dirección del aeroplano.

45. Tiro en baloncesto Un balón de baloncesto se lanza en un ángulo de 70° con respecto a la dirección horizontal, con una velocidad inicial de 10 m/seg.

a) Determine la forma de componentes de la velocidad inicial.

b) Escriba para aprender Proporcione una interpretación de las componentes horizontal y vertical de la velocidad.

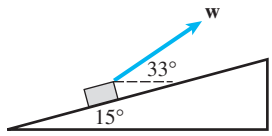
46. Moviendo un objeto pesado En un almacén una caja se empuja hacia arriba en un plano inclinado de 15° con una fuerza de 2.5 libras, como se muestra en la figura



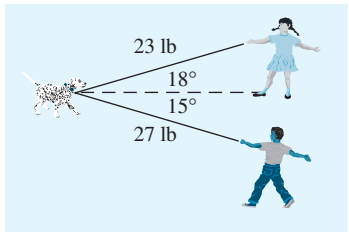
a) Determine la forma de componentes de la fuerza.

b) Escriba para aprender Proporcione una interpretación de las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

47. Moviendo un objeto pesado Suponga que la caja descrita en el ejercicio 46 se mueve hacia arriba del plano inclinado, pero ahora jalando la caja, como se muestra en la figura siguiente. Determine la fuerza $\mathbf{w}$ necesaria para que la componente de la fuerza paralela al plano inclinado sea de 2.5 libras. Proporcione la respuesta en forma de componentes.



48. Fuerzas combinadas Juana y Diego González, de seis y cuatro años respectivamente, tienen una fuerte y testaruda mascota llamada Caporal. Es tan difícil llevar a pasear a Caporal que diseñan un esquema para utilizar dos correas. Juana y Diego jalan con fuerzas de 23 libras y 27 libras en los ángulos que se muestran en la figura, ¿con qué fuerza está jalando Caporal, si impide que los niños lo muevan?



En los ejercicios 49 y 50 determine la dirección y magnitud de las fuerzas resultantes.

49. Combinación de fuerzas Una fuerza de 50 libras actúa sobre un objeto a un ángulo de 45°. Una segunda fuerza de 75 libras actúa sobre el objeto a un ángulo de $-30°$.

50. Combinación de fuerzas Tres fuerzas, con magnitudes de 100, 50 y 80 libras, actúan sobre un objeto en ángulos de 50°, 160° y $-20°$, respectivamente.

51. Navegación Un barco se dirige al norte a 12 mph. La corriente fluye al suroeste a 4 mph. Determine el rumbo y la rapidez real del barco.

52. Navegación Un motor, con capacidad de 20 mph, mantiene a un bote en línea recta cruzando un río con ancho de 1 milla. La corriente fluye de izquierda a derecha a 8 mph. Determine a qué punto de la orilla opuesta llega el bote.

53. Actividad en equipo Un barco se dirige hacia el sur, con el flujo de la corriente hacia el noroeste. Dos horas después, el barco está a 20 millas en la dirección 30° oeste del sur del punto inicial.
Determine la velocidad del barco, en aguas tranquilas, y la rapidez de la corriente.

54. Actividad en equipo Exprese cada vector en forma de componentes y pruebe las propiedades de vectores.

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, donde $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$

d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, donde $-\langle a, b\rangle = \langle -a, -b\rangle$

e) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ **f)** $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

g) $(ab)\mathbf{u} = a(b\mathbf{u})$ **h)** $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

i) $(1)\mathbf{u} = \mathbf{u}$, $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ **j)** $|\, a\mathbf{u}\,| = |\, a\,|\,|\,\mathbf{u}\,|$

Preguntas de examen estandarizado

55. Verdadero o falso Si $\mathbf{u}$ es un vector unitario, entonces $-\mathbf{u}$ también es un vector unitario. Justifique su respuesta.

56. Verdadero o falso Si $\mathbf{u}$ es un vector unitario, entones $1/\mathbf{u}$ también es un vector unitario. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 57 al 60 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver el problema.

57. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la magnitud del vector $\langle 2, -1\rangle$?

A) 1 **B)** $\sqrt{3}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

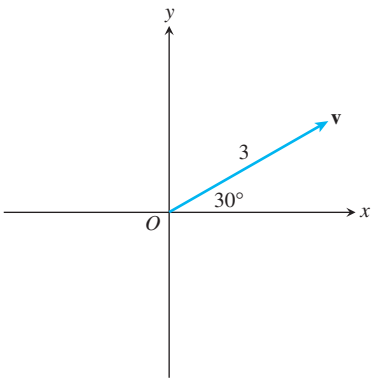
D) $\sqrt{5}$ **E)** 5

58. Opción múltiple Sea $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, -1\rangle$. ¿Cuál de los siguientes es igual a $\mathbf{u} - \mathbf{v}$?

A) $\langle 6, -4\rangle$ **B)** $\langle 2, 2\rangle$ **C)** $\langle -2, 2\rangle$

D) $\langle -6, 2\rangle$ **E)** $\langle -6, 4\rangle$

59. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones representa al vector $\mathbf{v}$ que se muestra en la figura siguiente?



A) $\langle 3\cos 30°, 3\operatorname{sen} 30°\rangle$ **B)** $\langle 3\operatorname{sen} 30°, 3\cos 30°\rangle$

C) $\langle 3\cos 60°, 3\operatorname{sen} 60°\rangle$ **D)** $\langle \sqrt{3}\cos 30°, \sqrt{3}\operatorname{sen} 30°\rangle$

E) $\langle \sqrt{3}\cos 30°, \sqrt{3}\operatorname{sen} 30°\rangle$

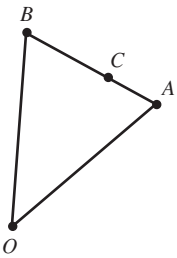
60. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$?

A) $-\dfrac{1}{10}\mathbf{i} + \dfrac{3}{10}\mathbf{j}$ **B)** $\dfrac{1}{10}\mathbf{i} - \dfrac{3}{10}\mathbf{j}$ **C)** $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \dfrac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$

D) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} - \dfrac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$ **E)** $-\dfrac{1}{\sqrt{8}}\mathbf{i} + \dfrac{3}{\sqrt{8}}\mathbf{j}$

Exploraciones

61. División de un segmento en una razón dada Sean A y B dos puntos en el plano, como se muestra en la figura.



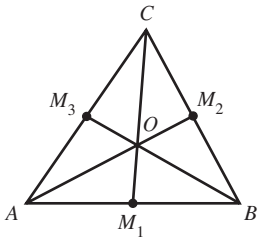
a) Pruebe que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, donde O es el origen.

b) Sea C un punto en segmento de recta BA, que divide al segmento en la razón $x{:}y$, donde $x + y = 1$. Esto es,

$$\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{CA}|} = \frac{x}{y}.$$

Muestre que $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$.

62. Medianas de un triángulo Lleve a cabo los pasos siguientes para utilizar vectores, con la finalidad de probar que las medianas de un triángulo coinciden en un punto O que divide a cada mediana en la razón 1:2. Aquí M_1, M_2 y M_3 son los puntos medios de los lados del triángulo que se muestra en la figura.



a) Utilice el ejercicio 61 para mostrar que

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

b) Pruebe que cada uno de $2\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OC}$, $2\overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OA}$, $2\overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OB}$ es igual a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

c) Escriba para aprender Explique por qué b) establece el resultado deseado.

Ampliación de las ideas

63. Ecuación vectorial de una recta Sea L la recta que pasa por los puntos A y B. Pruebe que $C = (x, y)$ está en la recta L si, y sólo si, $\overrightarrow{OC} = t\,\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{OB}$, donde t es un número real y O es el origen.

64. Relación entre vectores y geometría Pruebe que las rectas que unen un vértice de un paralelogramo con los puntos medios de los lados opuestos trisecan la diagonal.

6.2 Producto punto de vectores

Aprenderá acerca de...

- El producto punto
- Un ángulo entre vectores
- La proyección de un vector sobre otro
- El trabajo

. . . porque

Los vectores se utilizan de forma amplia en matemáticas y aplicaciones de ciencias tales como la determinación del efecto neto de varias fuerzas que actúan sobre un objeto y el cálculo del trabajo realizado por una fuerza que actúa sobre un objeto.

El producto punto

Los vectores pueden multiplicarse de dos formas diferentes, y ambas provienen de su utilidad para resolver problemas en aplicaciones de vectores. El *producto cruz* (o *producto vectorial* o *producto exterior*) tiene como resultado un vector perpendicular al plano de los dos vectores que se están multiplicando, lo cual por requerir de tres dimensiones, sale del alcance de este capítulo. El *producto punto* (o *producto escalar* o *producto interno*) tiene como resultado un escalar. En otras palabras, el producto punto de dos vectores no es un vector, ¡sino un número real! La relevancia de la información transmitida por ese número es lo que hace al producto punto tan importante, como lo verá.

Ahora que tiene un poco de experiencia con vectores y flechas, esperamos que no se confunda si en ocasiones recurrimos a la convención común de utilizar flechas para nombrar a los vectores que representan. Por ejemplo, podríamos escribir "$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$" como una forma abreviada para "$\mathbf{u}$ es el vector representado por $\overrightarrow{PQ}$". Esto simplifica mucho el estudio de conceptos como la proyección de vectores. También continuaremos usando las notaciones de vectores, $\langle a, b\rangle$ y $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, con lo que usted adquirirá un poco de práctica con cada una.

DEFINICIÓN Producto punto

El **producto punto** o **producto interno** o **producto escalar** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

EL PRODUCTO PUNTO Y LOS VECTORES UNITARIOS CANÓNICOS (ESTÁNDAR)

$(u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) = u_1v_1 + u_2v_2$

Los productos punto tienen muchas propiedades importantes que utilizaremos en esta sección. Demostramos las primeras dos y dejamos el resto para los ejercicios.

Propiedades del producto punto

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores, y sea c un escalar.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
3. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
4. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
   $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
5. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

Demostración

Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$.

Propiedad 1

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 && \text{Definición de } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 && \text{Propiedad conmutativa de los números reales.} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} && \text{Definición de } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Propiedad 2

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= u_1^2 + u_2^2 && \text{Definición de } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 && \text{Definición de } |\mathbf{u}| \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Cálculo de productos punto

Determine cada uno de los productos punto.

a) $\langle 3, 4\rangle \cdot \langle 5, 2\rangle$

b) $\langle 1, -2\rangle \cdot \langle -4, 3\rangle$

c) $(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$

SOLUCIÓN

a) $\langle 3, 4\rangle \cdot \langle 5, 2\rangle = (3)(5) + (4)(2) = 23$

b) $\langle 1, -2\rangle \cdot \langle -4, 3\rangle = (1)(-4) + (-2)(3) = -10$

c) $(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) = (2)(3) + (-1)(-5) = 11$

Ahora resuelva el ejercicio 3.

PRODUCTOS PUNTO EN LA CALCULADORA

En realidad es una pérdida de tiempo calcular un sencillo producto punto de dos dimensiones en la calculadora, pero se puede hacer. Algunas calculadoras hacen operaciones vectoriales y otras pueden realizar operaciones vectoriales por medio de matrices. Si ya aprendió con respecto a la multiplicación de matrices, sabrá por qué el producto matricial $[u_1, u_2] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ produce el producto punto $\langle u_1, u_2\rangle \cdot \langle v_1, v_2\rangle$ como una matriz de 1 por 1 (el mismo truco funciona con vectores de dimensiones mayores). Este libro tratará la multiplicación de matrices en el capítulo 7.

La propiedad 2 del producto punto nos proporciona otra forma de encontrar la longitud de un vector, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Uso del producto punto para determinar la longitud

Utilice el producto punto para determinar la longitud del vector $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle$.

SOLUCIÓN De la propiedad 2 resulta que $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. Por tanto,

$$|\langle 4, -3\rangle| = \sqrt{\langle 4, -3\rangle \cdot \langle 4, -3\rangle} = \sqrt{(4)(4) + (-3)(-3)} = \sqrt{25} = 5.$$

Ahora resuelva el ejercicio 9.

Ángulo entre vectores

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores no nulos, en posición estándar, como se muestra en la figura 6.16. El **ángulo entre u y v** es el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$ o $0° \le \theta \le 180°$. El ángulo entre cualesquier dos vectores no nulos es el ángulo correspondiente entre sus representantes en posición estándar.

Podemos utilizar el producto punto para determinar el ángulo entre vectores no nulos, como lo demostramos en el teorema siguiente.

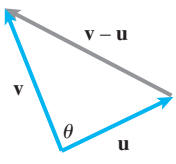


FIGURA 6.16 El ángulo θ entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, diferentes de cero.

TEOREMA Ángulo entre dos vectores

Si θ es el ángulo entre los vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

$$\text{y } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

Demostración

Aplicamos la ley de los cosenos para el triángulo determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ de la figura 6.16 y utilizamos las propiedades del producto punto.

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta \\
(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta \\
\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta \\
|\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2 &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta \\
-2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= -2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta \\
\cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \\
\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 3 Determinación del ángulo entre vectores

Determine el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

a) $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 5\rangle$ **b)** $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, -3\rangle$

SOLUCIÓN

a) Consulte la figura 6.17a. Usando el teorema del ángulo entre dos vectores, tenemos

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{\langle 2, 3\rangle \cdot \langle -2, 5\rangle}{|\langle 2, 3\rangle||\langle -2, 5\rangle|} = \frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{29}}.$$

Por lo que,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{29}}\right) \approx 55.5°.$$

b) Consulte la figura 6.17b. Nuevamente, usando el teorema del ángulo entre dos vectores, tenemos

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{\langle 2, 1\rangle \cdot \langle -1, -3\rangle}{|\langle 2, 1\rangle||\langle -1, -3\rangle|} = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Así que,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 135°.$$

Ahora resuelva el ejercicio 13.

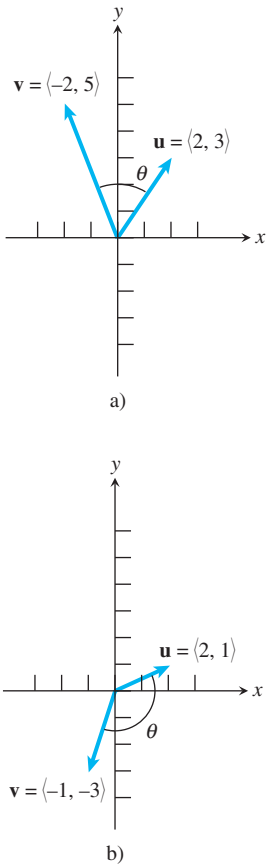


FIGURA 6.17 Los vectores en a) ejemplo 3a, y b) ejemplo 3b.

Si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares, es decir, si el ángulo entre ellos es 90°, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos 90° = 0,$$

ya que $\cos 90° = 0$.

DEFINICIÓN Vectores ortogonales

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son **ortogonales** si, y sólo si, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Los términos "perpendicular" y "ortogonal" significan casi lo mismo. El vector cero no tiene ángulo de dirección, por lo que hablando técnicamente, el vector cero no es perpendicular a ningún vector. Sin embargo, el vector cero es ortogonal a todo vector. Excepto por este caso especial, ortogonal y perpendicular son lo mismo.

EJEMPLO 4 Cómo probar que vectores son ortogonales

Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -6, 4\rangle$ son ortogonales.

SOLUCIÓN Debemos demostrar que su producto punto es cero.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle \cdot \langle -6, 4\rangle = -12 + 12 = 0.$$

Los dos vectores son ortogonales.

Ahora resuelva el ejercicio 23.

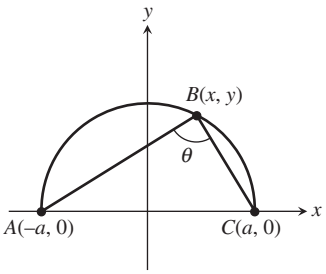


FIGURA 6.18 El ángulo $\angle ABC$ inscrito en la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ (exploración 1).

EXPLORACIÓN 1 Ángulo inscrito en semicircunferencias

La figura 6.18 muestra el $\angle ABC$ inscrito en la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

1. Para $a = 2$, determine la forma de componentes de los vectores $\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$.
2. Determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. ¿Qué puede concluir con respecto al ángulo θ, entre estos dos vectores?
3. Repita las partes 1 y 2 para a arbitraria.

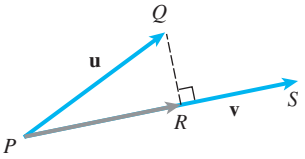


FIGURA 6.19 Los vectores $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$, y el vector proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, $\overrightarrow{PR} = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

Proyección de un vector sobre otro

El **vector proyección** de $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ sobre el vector no nulo $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$ es el vector $\overrightarrow{PR}$, determinado bajando una perpendicular desde Q a la recta PS (figura 6.19). Hemos escrito a $\mathbf{u}$ en componentes $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$.

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$$

con $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ perpendiculares.

La notación estándar para $\overrightarrow{PR}$, el vector proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, es $\overrightarrow{PR} = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$. Con esta notación, $\overrightarrow{RQ} = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$. En los ejercicios (consulte el 58) le pedimos que establezca la siguiente fórmula:

Proyección de u sobre v

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores no nulos, la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}.$$

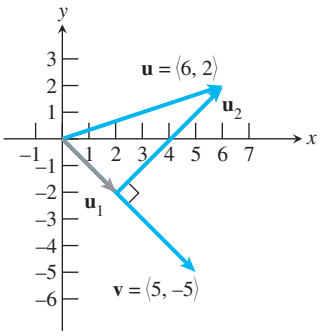


FIGURA 6.20 Los vectores $\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, -5\rangle$, $\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$ (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Descomposición de un vector en componentes perpendiculares

Determine el vector proyección de $\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle$ sobre $\mathbf{v} = \langle 5, -5\rangle$. Luego escriba $\mathbf{u}$ como la suma de dos vectores ortogonales, uno de los cuales es $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

SOLUCIÓN Escribimos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$ (figura 6.20).

$$\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} = \frac{20}{50}\langle 5, -5\rangle = \langle 2, -2\rangle$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \langle 6, 2\rangle - \langle 2, -2\rangle = \langle 4, 4\rangle$$

Por tanto, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \langle 2, -2\rangle + \langle 4, 4\rangle = \langle 6, 2\rangle = \mathbf{u}$.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

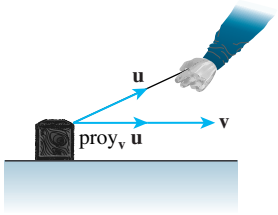


FIGURA 6.21 Si jalamos una caja con una fuerza $\mathbf{u}$, la fuerza efectiva en la dirección de $\mathbf{v}$ es $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, el vector proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.

Si $\mathbf{u}$ es una fuerza, entonces la $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ representa la fuerza efectiva en la dirección de $\mathbf{v}$ (figura 6.21).

Podemos utilizar las proyecciones para determinar la cantidad de fuerza requerida en las situaciones de problemas como la del ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Determinación de una fuerza

Juan está sentado en un trineo en la ladera de una colina inclinada 45°. El peso combinado de Juan y el trineo es de 140 libras. ¿Qué fuerza necesitará Rafaela para no dejar que se deslice el trineo colina abajo? (Consulte la figura 6.22).

SOLUCIÓN Podemos representar la fuerza debida a la gravedad como $\mathbf{F} = -140\mathbf{j}$, ya que la gravedad actúa verticalmente hacia abajo. Podemos representar el lado de la colina con el vector

$$\mathbf{v} = (\cos 45°)\mathbf{i} + (\text{sen } 45°)\mathbf{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}.$$

La fuerza requerida para mantener el trineo sin que se deslice colina abajo es

$$\mathbf{F}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$$

ya que $|\mathbf{v}| = 1$. Así que,

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = (-140)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{v} = -70(\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

La magnitud de la fuerza que Rafaela debe ejercer para mantener el trineo sin que se deslice colina abajo es $70\sqrt{2} \approx 99$ libras.

Ahora resuelva el ejercicio 45.

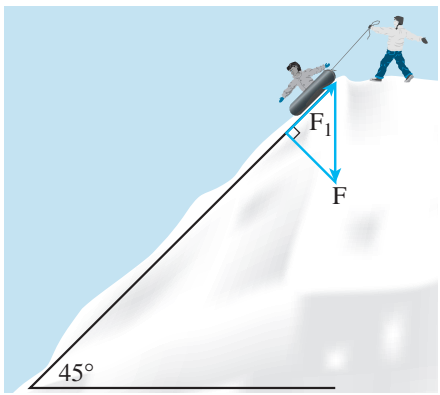


FIGURA 6.22 El trineo del ejemplo 6.

Trabajo

Si $\mathbf{F}$ es una fuerza constante cuya dirección es la misma que la dirección de $\overrightarrow{AB}$, entonces el **trabajo** W hecho por $\mathbf{F}$ al mover un objeto de A a B es

$$W = |\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|.$$

Si **F** es una fuerza constante en cualquier dirección, entonces el **trabajo** W hecho por **F** al mover un objeto de A a B es

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$= |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}| \cos\theta$$

donde q es el ángulo entre **F** y $\overrightarrow{AB}$. Excepto por el signo, el trabajo es la magnitud de la fuerza efectiva en la dirección de $\overrightarrow{AB}$ por $\overrightarrow{AB}$.

UNIDADES PARA EL TRABAJO

Generalmente, el trabajo se mide en libra-pies o Newton-metros. Un N.m se conoce comúnmente como un joule.

EJEMPLO 7 Determinación del trabajo

Determine el trabajo hecho por una fuerza de 10 libras que actúa en la dirección $\langle 1, 2\rangle$ al mover un objeto 3 pies de $\langle 0, 0\rangle$ a $\langle 3, 0\rangle$.

SOLUCIÓN La fuerza **F** tiene magnitud 10 y actúa en la dirección $\langle 1, 2\rangle$, por lo que

$$\mathbf{F} = 10\,\frac{\langle 1, 2\rangle}{|\langle 1, 2\rangle|} = \frac{10}{\sqrt{5}}\langle 1, 2\rangle.$$

La dirección de movimiento es de $A = (0, 0)$ a $B = (3, 0)$, así que $\overrightarrow{AB} = \langle 3, 0\rangle$. Por tanto, el trabajo hecho por la fuerza es

$$\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{10}{\sqrt{5}}\langle 1, 2\rangle \cdot \langle 3, 0\rangle = \frac{30}{\sqrt{5}} \approx 13.42 \text{ libras-pie.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 53.

REPASO RÁPIDO 6.2 *(Para obtener ayuda consulte la sección 6.1)*

En los ejercicios del 1 al 4 determine $|\mathbf{u}|$.

1. $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle$

2. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

3. $\mathbf{u} = \cos 35°\,\mathbf{i} + \text{sen } 35°\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{u} = 2(\cos 75°\,\mathbf{i} + \text{sen } 75°\,\mathbf{j})$

En los ejercicios del 5 al 8, los puntos A y B están en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Determine la forma de componentes del vector $\overrightarrow{AB}$.

5. $A = (-2, 0), B = (1, \sqrt{3})$

6. $A = (2, 0), B = (1, \sqrt{3})$

7. $A = (2, 0), B = (1, -\sqrt{3})$

8. $A = (-2, 0), B = (1, -\sqrt{3})$

En los ejercicios 9 y 10 determine un vector **u** con la magnitud dada en la dirección de **v**.

9. $|\mathbf{u}| = 2, \mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle$

10. $|\mathbf{u}| = 3, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.2

En los ejercicios del 1 al 8 determine el producto punto de **u** y **v**.

1. $\mathbf{u} = \langle 5, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 12, 4\rangle$

2. $\mathbf{u} = \langle -5, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 13\rangle$

3. $\mathbf{u} = \langle 4, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, -7\rangle$

4. $\mathbf{u} = \langle -2, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -8\rangle$

5. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} - 9\mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

6. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = -8\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

7. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

8. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 11\mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{j}$

En los ejercicios del 9 al 12 utilice el producto punto para determinar $|\mathbf{u}|$.

9. $\mathbf{u} = \langle 5, -12\rangle$

10. $\mathbf{u} = \langle -8, 15\rangle$

11. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i}$

12. $\mathbf{u} = 3\mathbf{j}$

En los ejercicios del 13 al 22 determine el ángulo θ entre los vectores.

13. $\mathbf{u} = \langle -4, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 5\rangle$

14. $\mathbf{u} = \langle 2, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, -3\rangle$

15. $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 5\rangle$

16. $\mathbf{u} = \langle 5, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -6, -1\rangle$

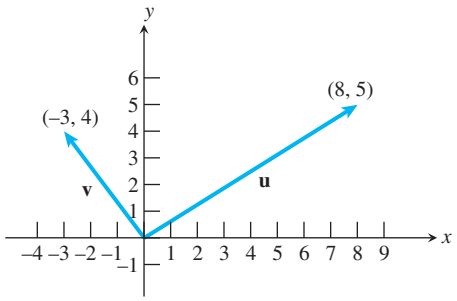
17. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}$

18. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{j}$

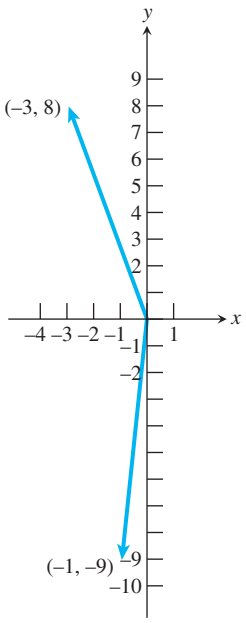
19. $\mathbf{u} = \left(2\cos\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)\mathbf{j}$

20. $\mathbf{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \left(3\cos\frac{5\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \left(3\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)\mathbf{j}$

21.



22.



En los ejercicios 23 y 24 muestre que los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

23. $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3/2, -1\rangle$

24. $\mathbf{u} = \langle -4, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -4\rangle$

En los ejercicios del 25 al 28 determine el vector proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. Luego escriba $\mathbf{u}$ como una suma de dos vectores ortogonales, uno de los cuales sea $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

25. $\mathbf{u} = \langle -8, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -6, -2\rangle$

26. $\mathbf{u} = \langle 3, -7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, -6\rangle$

27. $\mathbf{u} = \langle 8, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -9, -2\rangle$

28. $\mathbf{u} = \langle -2, 8\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 9, -3\rangle$

En los ejercicios 29 y 30 determine los ángulos interiores del triángulo con vértices dados.

29. $(-4, 5)$, $(1, 10)$, $(3, 1)$

30. $(-4, 1)$, $(1, -6)$, $(5, -1)$

En los ejercicios 31 y 32 determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ que satisface las condiciones dadas, en donde θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

31. $\theta = 150°$, $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 8$

32. $\theta = \frac{\pi}{3}$, $|\mathbf{u}| = 12$, $|\mathbf{v}| = 40$

En los ejercicios del 33 al 38 determine si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, ortogonales o no son ni paralelos ni ortogonales.

33. $\mathbf{u} = \langle 5, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \left\langle -\frac{10}{4}, -\frac{3}{2}\right\rangle$

34. $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \left\langle \frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right\rangle$

35. $\mathbf{u} = \langle 15, -12\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 5\rangle$

36. $\mathbf{u} = \langle 5, -6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -12, -10\rangle$

37. $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 20, 15\rangle$

38. $\mathbf{u} = \langle 2, -7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 14\rangle$

En los ejercicios del 39 al 42 determine

a) la intersección A en x y la intersección B en y de la recta,

b) las coordenadas del punto P de modo que $\overrightarrow{AP}$ sea perpendicular a la recta y $|\overrightarrow{AP}| = 1$ (existen dos respuestas).

39. $3x - 4y = 12$

40. $-2x + 5y = 10$

41. $3x - 7y = 21$

42. $x + 2y = 6$

En los ejercicios 43 y 44 determine el vector o vectores $\mathbf{v}$ que satisfacen las condiciones dadas.

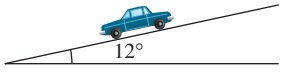
43. $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 10$, $|\mathbf{v}|^2 = 17$

44. $\mathbf{u} = \langle -2, 5\rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -11$, $|\mathbf{v}|^2 = 10$

45. **Deslizándose por una colina** Ojemba está sentada en un trineo en la ladera de una colina inclinada a 60°. El peso combinado de Ojemba y el trineo es 160 libras. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza requerida para que Mandisa mantenga el trineo sin que se deslice colina abajo?

46. **Ejemplo 6 revisado** Suponga que Juan y Rafaela intercambian posiciones. El peso combinado de Rafaela y el trineo es 125 libras. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza requerida para que Juan mantenga el trineo sin que se deslice colina abajo?

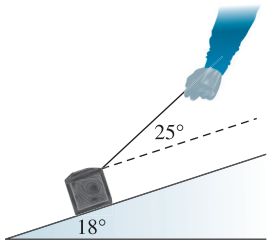
47. **Fuerza de frenado** Un automóvil de 2,000 libras está estacionado en una calle que forma un ángulo de 12° con la horizontal (consulte la figura).



a) Determine la magnitud de la fuerza requerida para mantener al automóvil sin que ruede hacia abajo.

b) Determine la fuerza perpendicular a la calle.

48. Fuerza efectiva Una fuerza de 60 libras **F** que forma un ángulo de 25° con un plano inclinado está jalando una caja hacia arriba. El plano forma un ángulo de 18° con la horizontal (consulte la figura). ¿Cuál es la magnitud de la fuerza efectiva que hace que la caja suba por el plano?



49. Trabajo Determine el trabajo realizado al subir un automóvil de 2,600 libras una altura de 5.5 pies.

50. Trabajo Determine el trabajo realizado al elevar una bolsa de 100 libras de papas a una altura de 3 pies.

51. Trabajo Determine el trabajo realizado por una fuerza **F** de 12 libras que actúa en la dirección $\langle 1, 2\rangle$ para mover un objeto 4 pies desde $\langle 0, 0\rangle$ hasta $\langle 4, 0\rangle$.

52. Trabajo Determine el trabajo realizado por una fuerza **F** de 24 libras que actúa en la dirección $\langle 4, 5\rangle$ para mover un objeto 5 pies desde $\langle 0, 0\rangle$ a $\langle 5, 0\rangle$.

53. Trabajo Determine el trabajo realizado por una fuerza **F** de 30 libras que actúa en la dirección $\langle 2, 2\rangle$ para mover un objeto 3 pies desde $\langle 0, 0\rangle$ a un punto en el primer cuadrante a lo largo de la recta $y = (1/2)x$.

54. Trabajo Determine el trabajo realizado por una fuerza **F** de 50 libras que actúa en la dirección $\langle 2, 3\rangle$ para mover un objeto 5 pies desde $\langle 0, 0\rangle$ a un punto en la recta $y = x$.

55. Trabajo El ángulo entre una fuerza, **F**, de 200 libras y $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ es de 30°. Determine el trabajo realizado por **F** al mover un objeto de A a B.

56. Trabajo Hay un ángulo de 60° entre una fuerza, **F**, de 75 libras y $\overrightarrow{AB}$, donde A $= (-1, 1)$ y B $= (4, 3)$. Determine el trabajo realizado por **F** al mover un objeto de A a B.

57. Propiedades del producto punto Sean **u**, **v** y **w** vectores y sea c un escalar. Utilice la forma de componentes de vectores para demostrar las siguientes propiedades:

a) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$

b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

d) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

58. Actividad en equipo Proyección de un vector Sean **u** y **v** vectores no nulos. Pruebe que

a) $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$

b) $(\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}) \cdot (\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}) = 0$

59. Actividad en equipo Conexión entre geometría y vectores Pruebe que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

60. Si **u** es cualquier vector, pruebe que podemos escribir **u** como

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}.$$

Preguntas de examen estandarizado

61. Verdadero o falso Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces **u** y **v** son perpendiculares. Justifique su respuesta.

62. Verdadero o falso Si **u** es un vector unitario, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 63 al 66 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver el problema.

63. Opción múltiple Sean $\mathbf{u} = \langle 1, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 1\rangle$. ¿Cuál de los siguientes es el ángulo entre **u** y **v**?

A) 0° **B)** 45° **C)** 60° **D)** 90° **E)** 135°

64. Opción múltiple Sean $\mathbf{u} = \langle 4, -5\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -2, -3\rangle$. ¿Cuál de los siguientes es igual a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$?

65. Opción múltiple Sean $\mathbf{u} = \langle 3/2, -3/2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 0\rangle$. ¿Cuál de lo siguientes es igual a la $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$?

A) $\langle 3/2, 0\rangle$ **B)** $\langle 3, 0\rangle$ **C)** $\langle -3/2, 0\rangle$

D) $\langle 3/2, 3/2\rangle$ **E)** $\langle -3/2, -3/2\rangle$

66. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes vectores describe una fuerza de 5 libras que actúa en la dirección de $\mathbf{u} = \langle -1, 1\rangle$?

A) $5\langle -1, 1\rangle$ **B)** $\dfrac{5}{\sqrt{2}}\langle -1, 1\rangle$ **C)** $5\langle 1, -1\rangle$

D) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}\langle 1, -1\rangle$ **E)** $\dfrac{5}{2}\langle -1, 1\rangle$

Exploraciones

67. Distancia de un punto a una recta Considere la recta L con ecuación $2x + 5y = 10$ y el punto $P = (3, 7)$.

a) Verifique que $A = (0, 2)$ y $B = (5, 0)$ son las intersecciones y y x de L.

b) Determine $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}$ y $\mathbf{w}_2 = \overrightarrow{AP} - \text{proy}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}$.

c) Escriba para aprender Explique por qué $|\mathbf{w}_2|$ es la distancia de P a L. ¿Cuál es la distancia?

d) Determine una fórmula para la distancia de cualquier punto $P = (x_0, y_0)$ a L.

e) Determine una fórmula para la distancia de cualquier punto $P = (x_0, y_0)$ a la recta $ax + by = c$.

Ampliación de las ideas

68. Escriba para aprender Sea $\mathbf{w} = (\cos t)\mathbf{u} + (\text{sen } t)\mathbf{v}$, donde **u** y **v** no son paralelos.

a) ¿El vector **w** puede ser paralelo al vector **u**? Explique.

b) ¿El vector **w** puede ser paralelo al vector **v**? Explique.

c) ¿El vector **w** puede ser paralelo al vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$? Explique.

69. Si los vectores **u** y **v** no son paralelos, demuestre que

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = c\mathbf{u} + d\mathbf{v} \Rightarrow a = c, b = d.$$

6.3 Ecuaciones paramétricas y movimiento

Aprenderá acerca de...

- Las ecuaciones paramétricas
- Las curvas paramétricas
- La eliminación del parámetro
- Las rectas y los segmentos de recta
- La simulación de movimiento con una graficadora

. . . porque

Estos temas pueden usarse para modelar la trayectoria de un objeto tal como una bola de béisbol o una pelota de golf.

Ecuaciones paramétricas

Imagine que una piedra se deja caer desde una torre de 420 pies. La altura de la piedra, y en pies, por encima del suelo t segundos después (sin considerar la resistencia del aire) se modela mediante $y = -16t^2 + 420$, como vimos en la sección 2.1. La figura 6.23 muestra un sistema de coordenadas impuesto en la escena de tal forma que la línea de caída de la piedra está en la recta vertical $x = 2.5$.

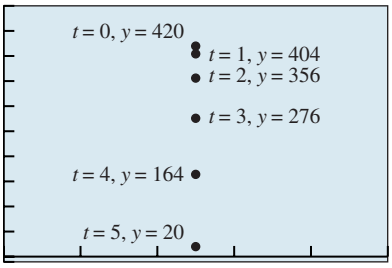
La posición original de la piedra y su posición después de cada uno de los primeros 5 segundos son los puntos

$$(2.5, 420), (2.5, 404), (2.5, 356), (2.5, 276), (2.5, 164), (2.5, 20),$$

lo cuales están descritos mediante el par de ecuaciones

$$x = 2.5, \qquad y = -16t^2 + 420,$$

cuando $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Estas dos ecuaciones son un ejemplo de *ecuaciones paramétricas* con *parámetro* t. Ya que es muy frecuente el caso, el parámetro t representa el tiempo.



[0, 5] por [−10, 500]

FIGURA 6.23 La posición de la piedra a los 0, 1, 2, 3, 4, y 5 segundos.

Curvas paramétricas

En esta sección estudiaremos las gráficas de *ecuaciones paramétricas* e investigaremos el movimiento de objetos que pueden modelarse con este tipo de ecuaciones.

DEFINICIÓN Curva paramétrica, ecuaciones paramétricas

La gráfica del par ordenado (x, y), donde

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

son funciones definidas en un intervalo I de valores t, es una **curva paramétrica**. Las ecuaciones son **ecuaciones paramétricas** para la curva, la variable t es un **parámetro**, e I es el **intervalo del parámetro**.

Cuando proporcionamos ecuaciones paramétricas y un intervalo para el parámetro para una curva, hemos **parametrizado** la curva. Una **parametrización** de una curva consiste en las ecuaciones paramétricas y el intervalo de valores para t. En ocasiones, algunas compañías utilizan ecuaciones paramétricas en sus planes de diseño, y esto les facilita reducir o agrandar los objetos de manera eficiente con sólo cambiar el parámetro t.

Las gráficas de ecuaciones paramétricas pueden obtenerse usando el modo paramétrico de una graficadora.

EJEMPLO 1 Graficación de ecuaciones paramétricas

Para el intervalo dado para el parámetro, grafique las ecuaciones paramétricas

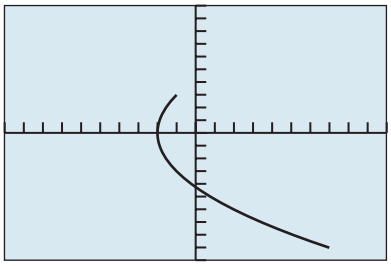
$$x = t^2 - 2, \quad y = 3t.$$

a) $-3 \le t \le 1$ **b)** $-2 \le t \le 3$ **c)** $-3 \le t \le 3$

continúa

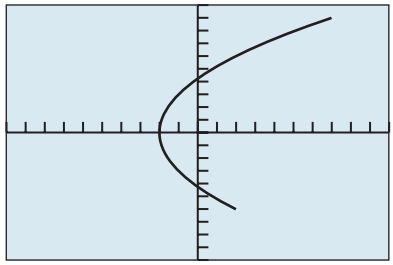
SOLUCIÓN En cada caso, establezca a Tmin igual al extremo izquierdo del intervalo y Tmax igual al extremo derecho del intervalo. La figura 6.24 muestra una gráfica de las ecuaciones paramétricas para cada intervalo del parámetro. Las relaciones correspondientes son diferentes, ya que los intervalos para el parámetro también lo son.

Ahora resuelva el ejercicio 7.



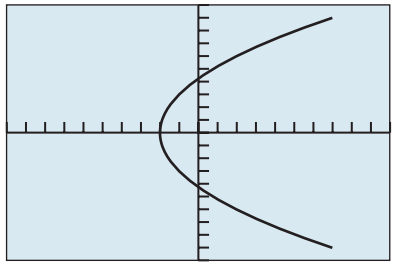
[−10, 10] por [−10, 10]

a)



[−10, 10] por [−10, 10]

b)



[−10, 10] por [−10, 10]

c)

FIGURA 6.24 Tres relaciones diferentes definidas de forma paramétrica (ejemplo 1).

Eliminación del parámetro

Cuando una curva se define en forma paramétrica, en ocasiones es posible *eliminar el parámetro* y obtener una ecuación rectangular en x y y que representa a la curva. Con frecuencia, esto nos ayuda a identificar la gráfica de la curva paramétrica, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Eliminación del parámetro

Elimine el parámetro e identifique la gráfica de la curva paramétrica

$$x = 1 - 2t, \quad y = 2 - t, \quad -\infty < t < \infty.$$

SOLUCIÓN En la primera ecuación despejamos la t:

$$x = 1 - 2t$$

$$2t = 1 - x$$

$$t = \frac{1}{2}(1 - x)$$

Luego sustituimos esta expresión para t en la segunda ecuación:

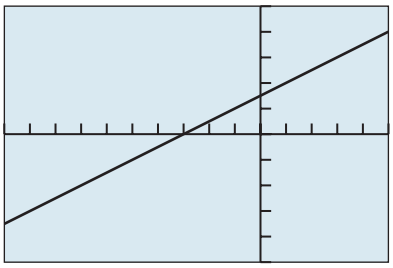
$$y = 2 - t$$

$$y = 2 - \frac{1}{2}(1 - x)$$

$$y = 0.5x + 1.5$$

La gráfica de la ecuación $y = 0.5x + 1.5$ es una recta con pendiente 0.5 e intersección y igual a 1.5 (figura 6.25).

Ahora resuelva el ejercicio 11.



[−10, 5] por [−5, 5]

FIGURA 6.25 La gráfica de $y = 0.5x + 1.5$ (ejemplo 2).

EXPLORACIÓN 1 **Graficación paramétrica de la curva del ejemplo 2**

1. Utilice el modo paramétrico de su graficadora para reproducir la gráfica de la figura 6.25. Utilice -2 para Tmin y 5.5 para Tmax.
2. Muestre que el punto (17, 10) está en la gráfica de $y = 0.5x + 1.5$. Determine el valor correspondiente de t que produce este punto.
3. Repita la parte 2 para el punto $(-23, -10)$.
4. Suponga que (a, b) está en la gráfica de $y = 0.5x + 1.5$. Determine el valor correspondiente de t que produce este punto.
5. ¿Cómo tiene que elegir Tmin y Tmax de modo que la gráfica en la figura 6.25 llene la ventana?

Si no especificamos un intervalo del parámetro para las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$ se entiende que el parámetro t puede tomar todos los valores que produzcan números reales para x y y. Utilizamos esta convención en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Eliminación del parámetro

Elimine el parámetro e identifique la gráfica de la curva paramétrica

$$x = t^2 - 2, \quad y = 3t.$$

SOLUCIÓN Aquí t puede ser cualquier número real. En la segunda ecuación despejamos a t, obteniendo $t = y/3$ y sustituimos este valor para y en la primera ecuación.

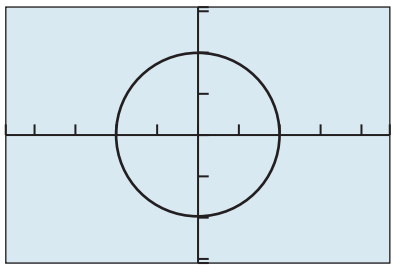
$$x = t^2 - 2$$
$$x = \left(\frac{y}{3}\right)^2 - 2$$
$$x = \frac{y^2}{9} - 2$$
$$y^2 = 9(x + 2)$$

La figura 6.24c muestra la apariencia de la gráfica de estas ecuaciones paramétricas. En el capítulo 8 llamaremos a ésta una parábola que abre hacia la derecha. Al intercambiar x y y podemos identificar esta gráfica como la inversa de la gráfica de la parábola $x^2 = 9(y + 2)$.

Ahora resuelva el ejercicio 15.

PARÁBOLAS

La inversa de una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo es una parábola que abre hacia la izquierda o hacia la derecha. Estudiaremos estas curvas con mayor detalle en el capítulo 8.



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

FIGURA 6.26 La gráfica de la circunferencia del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Eliminación del parámetro

Elimine el parámetro e identifique la gráfica de la curva paramétrica

$$x = 2 \cos t, \; y = 2 \operatorname{sen} t, \; 0 \le t \le 2\pi.$$

SOLUCIÓN La gráfica de las ecuaciones paramétricas, en la ventana de visualización cuadrada de la figura 6.26, sugiere que la gráfica es una circunferencia de radio 2 con centro en el origen. Confirmamos en forma algebraica este resultado.

continúa

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2\, t \\ &= 4(\cos^2 t + \text{sen}^2\, t) \\ &= 4(1) \qquad \cos^2 t + \text{sen}^2\, t = 1. \\ &= 4 \end{aligned}$$

La gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ es una circunferencia de radio 2 con centro en el origen. Aumentar la longitud del intervalo $0 \le t \le 2\pi$ hará que la graficadora trace todo o parte de la circunferencia más de una vez. Disminuir la longitud del intervalo hará que la graficadora dibuje sólo una parte de la circunferencia. ¡Inténtelo!

Ahora resuelva el ejercicio 23.

En el ejercicio 65 determinará ecuaciones paramétricas para cualquier circunferencia en el plano.

Rectas y segmentos de recta

Podemos utilizar vectores para ayudarnos a determinar ecuaciones paramétricas para una recta, como se ilustra en el ejemplo 5.

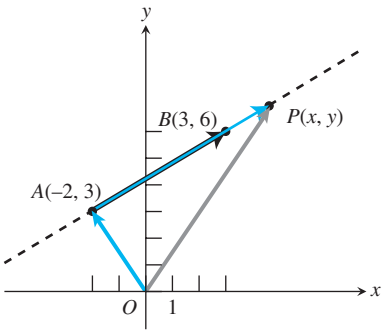


FIGURA 6.27 El ejemplo 5 utiliza vectores para construir la parametrización de la recta que pasa por A y B.

EJEMPLO 5 Determinación de ecuaciones paramétricas de una recta

Determine una parametrización de la recta que pasa por los puntos $A = (-2, 3)$ y $B = (3, 6)$.

SOLUCIÓN Sea $P(x, y)$ un punto arbitrario en la recta que pasa por A y B. Como puede ver en la figura 6.27, el vector $\overrightarrow{OP}$ es el vector suma cola a cabeza (terminal a inicial) de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AP}$. También puede ver que $\overrightarrow{AP}$ es un múltiplo escalar de $\overrightarrow{AB}$.

Si hacemos que el escalar sea t, tenemos

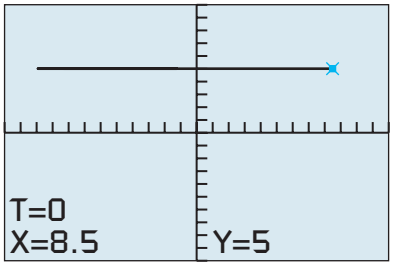
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} \\ \langle x, y\rangle &= \langle -2, 3\rangle + t\,\langle 3-(-2), 6 - 3\rangle \\ \langle x, y\rangle &= \langle -2, 3\rangle + t\,\langle 5, 3\rangle \\ \langle x, y\rangle &= \langle -2 + 5t, 3 + 3t\rangle \end{aligned}$$

Esta ecuación vectorial es equivalente a las ecuaciones paramétricas $x = -2 + 5t$ y $y = 3 + 3t$. Junto con el intervalo del parámetro $(-\infty, \infty)$, estas ecuaciones definen la recta.

Podemos confirmar nuestro trabajo de manera numérica: si $t = 0$, entonces $x = -2$ y $y = 3$, lo cual proporciona el punto A. De forma análoga, si $t = 1$, entonces $x = 3$ y $y = 6$, lo cual da el punto B.

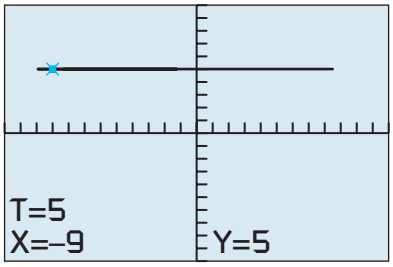
Ahora resuelva el ejercicio 27.

No es accidental el hecho de que, en el ejemplo 5, $t = 0$ proporcione el punto A y $t = 1$ dé el punto B, como sugieren una pequeña reflexión en la figura 6.27 y la ecuación vectorial $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$. Utilizamos este hecho en el ejemplo 6.



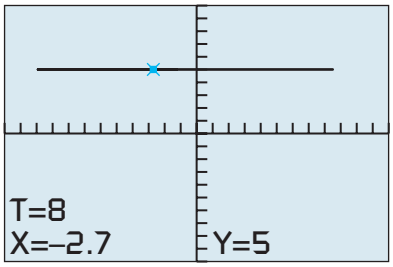
Inicio, $t = 0$

a)



5 más tarde, $t = 5$

b)



3 después, $t = 8$

c)

FIGURA 6.28 Tres vistas de la gráfica C_1:$x_1 = -0.1(t^3 - 20t^2 + 110t - 85)$, $y_1 = 5$, $0 \le t \le 12$, en la ventana de visualización $[-12, 12]$ por $[-10, 10]$ (ejemplo 7).

NOTA SOBRE LA GRAFICADORA

La ecuación $y_2 = t$ se utiliza generalmente en ecuaciones paramétricas para la gráfica de C_2 de la figura 6.29. Hemos elegido $y_2 = -t$ para obtener dos curvas en la figura 6.29 que no se traslapen. También note que las coordenadas y de C_1 son constantes ($y_1 = 5$) y que las coordenadas y de C_2 varían con el tiempo t ($y_2 = -t$).

EJEMPLO 6 Determinación de ecuaciones paramétricas para un segmento de recta

Determine una parametrización del segmento de recta con extremos $A = (-2, 3)$ y $B = (3, 6)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 5 encontramos ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por A y B:

$$x = -2 + 5t, \quad y = 3 + 3t.$$

En el ejemplo 5 vimos también que $t = 0$ produce el punto A y $t = 1$ produce el punto B. Una parametrización del segmento de recta está dada mediante

$$x = -2 + 5t, \quad y = 3 + 3t, \quad 0 \le t \le 1.$$

Conforme t varía entre 0 y 1 generamos cada punto en el segmento de recta entre A y B.

Ahora resuelva el ejercicio 29.

Simulación de movimiento con una graficadora

El ejemplo 7 ilustra varias formas de simular el movimiento a lo largo de una recta horizontal mediante ecuaciones paramétricas. Utilizamos la variable t para el parámetro que representa el tiempo.

EJEMPLO 7 Simulación de movimiento horizontal

Gary camina a lo largo de una línea horizontal (piense en ella como una recta numérica) con la coordenada de su posición (en metros) dada por

$$s = -0.1(t^3 - 20t^2 + 110t - 85)$$

donde $0 \le t \le 12$. Utilice ecuaciones paramétricas y una graficadora para simular su movimiento. Estime los tiempos en que Gary cambia de dirección.

SOLUCIÓN En forma arbitraria elegimos la recta horizontal $y = 5$ para mostrar este movimiento. La gráfica C_1 de las ecuaciones paramétricas,

$$C_1\colon x_1 = -0.1(t^3 - 20t^2 + 110t - 85), \; y_1 = 5, \; 0 \le t \le 12,$$

simula el movimiento. Su posición en cualquier instante t está dado mediante el punto $(x_1(t), 5)$.

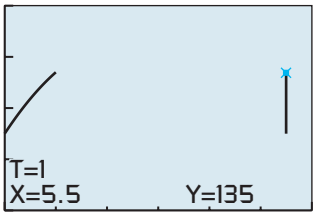
Usando el rastreo en la figura 6.28, vemos que cuando $t = 0$, Gary está 8.5 m a la derecha del eje y en el punto (8.5, 5) y que al principio él se mueve hacia la izquierda. Cinco segundos después él está 9 m a la izquierda del eje y en el punto $(-9, 5)$. Y después de 8 segundos él está a sólo 2.7 m a la izquierda del eje y. Gary debe haber cambiado de dirección durante la caminata. El movimiento del cursor de rastreo simula el movimiento de Gary.

Una variación en $y(t)$,

$$C_2\colon x_2 = -0.1(t^3 - 20t^2 + 110t - 85), \; y_2 = -t, \; 0 \le t \le 12,$$

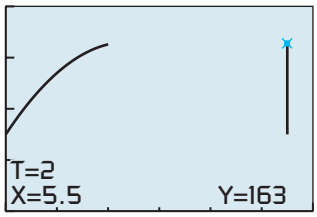
puede usarse para ayudar a visualizar el punto donde Gary cambia de dirección. La gráfica C_2 mostrada en la figura 6.29 sugiere que Gary invierte su dirección a los 3.9 segundos y nuevamente a los 9.5 segundos después de iniciar su caminata.

Ahora resuelva el ejercicio 37.



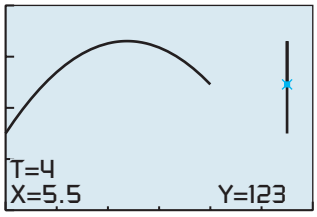
[0, 6] por [0, 200]

a)



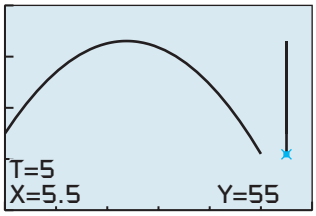
[0, 6] por [0, 200]

b)



[0, 6] por [0, 200]

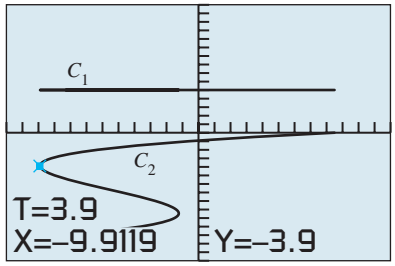
c)



[0, 6] por [0, 200]

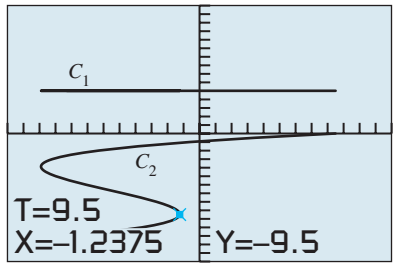
d)

FIGURA 6.30 Graficación simultánea de $x_1 = t$, $y_1 = -16t^2 + 76t + 75$ (altura contra el tiempo) y $x_2 = 5.5$, $y_2 = -16t^2 + 76t + 75$ (la trayectoria real de la bengala) (ejemplo 8).



[−12, 12] por [−15, 15]

a)



[−12, 12] por [−15, 15]

b)

FIGURA 6.29 Dos vistas de la gráfica C_1: $x_1 = -0.1(t^3 - 20t^2 + 110t - 85)$, $y_1 = 5$, $0 \le t \le 12$ y la gráfica C_2: $x_2 = -0.1(t^3 - 20t^2 + 110t - 85)$, $y_2 = -t$, $0 \le t \le 12$, en la ventana de visualización $[-12, 12]$ por $[-15, 15]$ (ejemplo 7).

El ejemplo 8 resuelve un problema de movimiento de un proyectil. Las ecuaciones paramétricas se utilizan de dos maneras: para determinar la gráfica de la ecuación que se modela y para simular el movimiento del proyectil.

EJEMPLO 8 Simulación del movimiento de un proyectil

Una bengala se dispara directamente hacia arriba desde el puente de un barco ubicado a 75 pies por encima del nivel del agua y con una velocidad inicial de 76 pies/s. Grafique la altura de la bengala contra el tiempo, proporcione la altura de la bengala por arriba del nivel del agua en cada instante y simule el movimiento de la bengala para cada longitud de tiempo.

a) 1 s **b)** 2 s **c)** 4 s **d)** 5 s

SOLUCIÓN Una ecuación que modela la altura por encima del nivel del agua de la bengala t segundos después que se dispara es

$$y = -16t^2 + 76t + 75.$$

Una gráfica de la altura de la bengala contra el tiempo puede encontrase usando las ecuaciones paramétricas

$$x_1 = t, \quad y_1 = -16t^2 + 76t + 75.$$

Para simular el vuelo directo de la bengala hacia arriba y su caída al agua, utilizamos las ecuaciones paramétricas

$$x_2 = 5.5, \quad y_2 = -16t^2 + 76t + 75.$$

(Elegimos $x_2 = 5.5$ para que las dos gráficas no se intersequen.)

La figura 6.30 muestra las dos gráficas en modo de graficación simultánea para a) $0 \le t \le 1$, b) $0 \le t \le 2$, c) $0 \le t \le 4$ y d) $0 \le t \le 5$. Podemos leer que la altura de la bengala por arriba del agua después de 1 segundo es de 135 pies, después de 2 seg es de 163 pies, después de 4 ses es de 123 pies y después de 5 seg es 55 de pies.

Ahora resuelva el ejercicio 39.

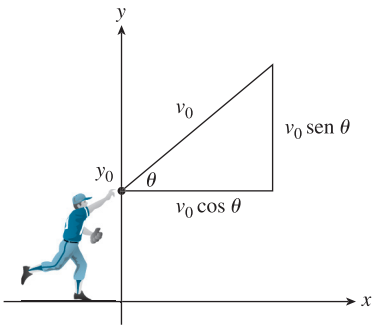
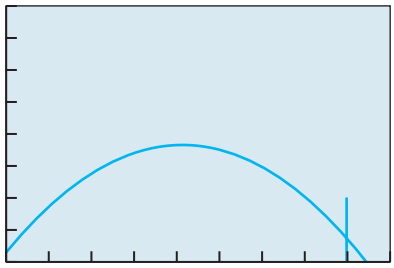


FIGURA 6.31 Lanzamiento de una bola de béisbol.



[0, 450] por [0, 80]

FIGURA 6.32 La cerca y la trayectoria de la bola de béisbol del ejemplo 9. Consulte la exploración 2 para conocer formas de dibujar la pared.

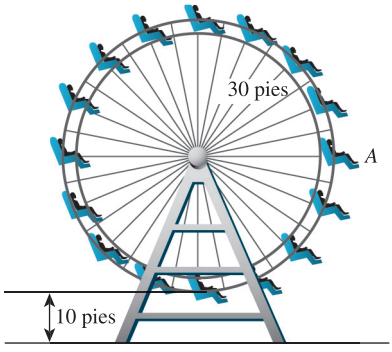


FIGURA 6.33 La rueda de la fortuna del ejemplo 10.

En el ejemplo 8 modelamos el movimiento de un proyectil que se lanzó directamente hacia arriba. Ahora investigaremos el movimiento de objetos, ignorando la fricción del aire, que se lanzan en ángulos con la horizontal distintos de 90°.

Suponga que una pelota de béisbol se lanza desde el punto y_0 pies por encima del suelo con una rapidez inicial de v_0 pies/s en un ángulo θ con la horizontal (figura 6.31). La velocidad inicial puede representarse mediante el vector

$$\mathbf{v} = \langle v_0 \cos \theta, v_0 \operatorname{sen} \theta \rangle.$$

La trayectoria del objeto se modela mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \theta)t, \quad y = -16t^2 + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t + y_0.$$

La componente x es, simplemente,

$$\text{distancia} = (\text{componente } x \text{ de la velocidad inicial}) \times \text{tiempo}.$$

La componente y es la conocida ecuación de movimiento vertical de un proyectil usando la componente y de la velocidad inicial.

EJEMPLO 9 Bateo de una pelota de béisbol

Kevin batea una pelota de béisbol a 3 pies del piso con una rapidez inicial de 150 pies/s en un ángulo de 18° con la horizontal. ¿La pelota pasará por arriba de la barda de 20 pies que está a 400 pies de distancia?

SOLUCIÓN La trayectoria de la pelota se modela mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = (150 \cos 18°)t, \; y = -16t^2 + (150 \operatorname{sen} 18°)t + 3.$$

Un poco de experimentación mostrará que la pelota llegará a la barda en menos de 3 segundos. La figura 6.32 muestra una gráfica de la trayectoria de la pelota, que usa el intervalo para el parámetro $0 \le t \le 3$ y la barda de 20 pies. La pelota no la pasará.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

EXPLORACIÓN 2 Ampliación del ejemplo 9

1. Si su graficadora tiene la capacidad para dibujar segmentos de recta, dibuje la barda del ejemplo 9.
2. Describa la gráfica de las ecuaciones paramétricas
$$x = 400, \; y = 20(t/3), \; 0 \le t \le 3.$$
3. Repita el ejemplo 9 para los ángulos 19°, 20°, 21° y 22°.

En el ejemplo 10 vemos cómo escribir ecuaciones paramétricas para ubicar posiciones en una rueda de la fortuna en movimiento, usando el tiempo t como el parámetro.

EJEMPLO 10 Paseo en una rueda de la fortuna

Jane da un paseo en una rueda de la fortuna con radio de 30 pies. Como vemos en la figura 6.33, la rueda gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con una rapidez de una vuelta cada 10 segundos. Suponga que el punto más bajo de la rueda (las 6 en punto) está 10 pies por arriba del suelo, y que Jane, en el instante $t = 0$, está en el punto marcado con A (las 3 en punto). Determine ecuaciones paramétricas para modelar la trayectoria de Jane y utilícelas para determinar la posición de Jane al cabo de 22 segundos de paseo.

continúa

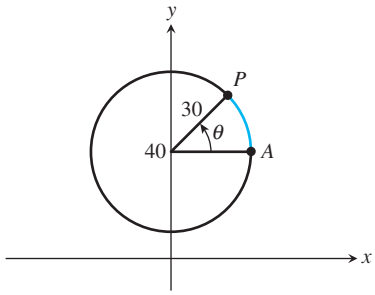


FIGURA 6.34 Un modelo para la rueda de la fortuna del ejemplo 10.

SOLUCIÓN La figura 6.34 muestra una circunferencia con centro en (0, 40) y radio 30 que modela la rueda de la fortuna. Las ecuaciones paramétricas para esta circunferencia, en términos del parámetro θ, el ángulo central de la circunferencia determinado por el arco AP, son

$$x = 30 \cos \theta, \quad y = 40 + 30 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Para tomar en cuenta la rapidez a la cual gira la rueda debemos describir θ como una función del tiempo t en segundos. La rueda gira a razón de 2π radianes cada 10 segundos, o $2\pi/10 = \pi/5$ rad/s. Así que, $\theta = (\pi/5)t$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas que modelan la trayectoria de Jane están dadas por

$$x = 30 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right), \quad y = 40 + 30 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}t\right), \quad t \geq 0.$$

donde sustituimos $t = 22$ para determinar la posición de Jane en ese instante:

$$x = 30 \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot 22\right) \qquad y = 40 + 30 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5} \cdot 22\right)$$

$$x \approx 9.27 \qquad y \approx 68.53$$

Después de pasear durante 22 segundos, Jane está aproximadamente 68.5 pies por arriba del piso y aproximadamente 9.3 pies a la derecha del eje y, usando el sistema de coordenadas de la figura 6.34.

Ahora resuelva el ejercicio 51.

REPASO RÁPIDO 6.3 *(Para obtener ayuda consulte las secciones R.2, R.4, 1.3, 4.1 y 6.1)*

En los ejercicios 1 y 2 determine la forma de componentes de los vectores **a)** $\overrightarrow{OA}$, **b)** $\overrightarrow{OB}$, y **c)** $\overrightarrow{AB}$, donde O es el origen.

1. $A = (-3, -2), B = (4, 6)$ **2.** $A = (-1, 3), B = (4, -3)$

En los ejercicios 3 y 4 escriba una ecuación en la forma punto pendiente para la recta que pasa por los dos puntos.

3. $(-3, -2), (4, 6)$ **4.** $(-1, 3), (4, -3)$

En los ejercicios 5 y 6 determine y grafique las dos funciones definidas de forma implícita por cada una de las relaciones dadas.

5. $y^2 = 8x$ **6.** $y^2 = -5x$

En los ejercicios 7 y 8 escriba una ecuación para la circunferencia con centro y radio dados.

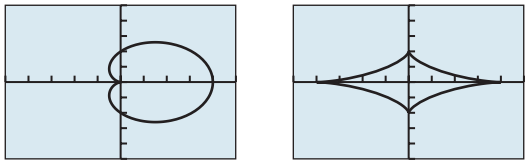
7. $(0, 0), 2$ **8.** $(-2, 5), 3$

En los ejercicios 9 y 10, una rueda de radio r gira con la rapidez dada. Determine la velocidad angular en radianes por segundo.

9. $r = 13$ pulg, 600 rpm **10.** $r = 12$ pulg, 700 rpm

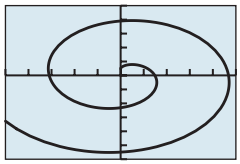
EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.3

En los ejercicios del 1 al 4 relacione las ecuaciones paramétricas con sus gráficas. Identifique la ventana de visualización que parece haber sido utilizada.

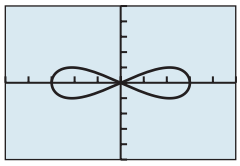


a)

b)



c)



d)

1. $x = 4\cos^3 t,\ y = 2\operatorname{sen}^3 t$ **2.** $x = 3\cos t,\ y = \operatorname{sen} 2t$

3. $x = 2\cos t + 2\cos^2 t,\ y = 2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t$

4. $x = \operatorname{sen} t - t\cos t,\ y = \cos t + t\operatorname{sen} t$

En los ejercicios 5 y 6, **a)** complete la tabla para las ecuaciones paramétricas y **b)** trace los puntos correspondientes.

5. $x = t + 2,\ y = 1 + 3/t$

t	-2	-1	0	1	2
x					
y					

6. $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t$

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x					
y					

En los ejercicios del 7 al 10 grafique las ecuaciones paramétricas $x = 3 - t^2,\ y = 2t$ en el intervalo dado para el parámetro. Utilice una ventana de visualización estándar.

7. $0 \le t \le 10$ **8.** $-10 \le t \le 0$

9. $-3 \le t \le 3$ **10.** $-2 \le t \le 4$

En los ejercicios del 11 al 26 elimine el parámetro e identifique la gráfica de la curva paramétrica.

11. $x = 1 + t,\ y = t$ **12.** $x = 2 - 3t,\ y = 5 + t$

13. $x = 2t - 3,\ y = 9 - 4t,\ 3 \le t \le 5$

14. $x = 5 - 3t,\ y = 2 + t,\ 1 \le t \le 3$

15. $x = t^2,\ y = t + 1$ [*Sugerencia:* Elimine t y despeje a x en términos de y].

16. $x = t,\ y = t^2 - 3$

17. $x = t,\ y = t^3 - 2t + 3$

18. $x = 2t^2 - 1,\ y = t$ [*Sugerencia:* Elimine t y despeje a x en términos de y].

19. $x = 4 - t^2,\ y = t$ [*Sugerencia:* Elimine t y despeje a x en términos de y].

20. $x = 0.5t,\ y = 2t^3 - 3,\ -2 \le t \le 2$

21. $x = t - 3,\ y = 2/t,\ -5 \le t \le 5$

22. $x = t + 2,\ y = 4/t,\ t \ge 2$

23. $x = 5\cos t,\ y = 5\operatorname{sen} t$ **24.** $x = 4\cos t,\ y = 4\operatorname{sen} t$

25. $x = 2\operatorname{sen} t,\ y = 2\cos t,\ 0 \le t \le 3\pi/2$

26. $x = 3\cos t,\ y = 3\operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le \pi$

En los ejercicios del 27 al 32 determine una parametrización para la curva.

27. La recta que pasa por los puntos $(-2, 5)$ y $(4, 2)$.

28. La recta que pasa por los puntos $(-3, -3)$ y $(5, 1)$.

29. El segmento de recta con extremos $(3, 4)$ y $(6, -3)$.

30. El segmento de recta con extremos $(5, 2)$ y $(-2, -4)$.

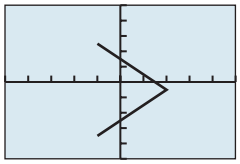
31. La circunferencia con centro $(5, 2)$ y radio 3.

32. La circunferencia con centro $(-2, -4)$ y radio 2.

En los ejercicios del 33 al 36 se refieren a la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 - |t|, \quad y = t - 0.5, \quad -3 \le t \le 3$$

dada a continuación. Determine los valores del parámetro t que producen la gráfica en el cuadrante indicado.



$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

33. Cuadrante I **34.** Cuadrante II

35. Cuadrante III **36.** Cuadrante IV

37. **Simulación de una carrera** Ben puede correr a toda velocidad con una rapidez de 24 pies/s, mientras que Jerry lo hace a 20 pies/s. Ben le da a Jerry una ventaja de 10 pies. Las siguientes ecuaciones paramétricas pueden utilizarse para modelar la carrera:

$$x_1 = 20t, \qquad y_1 = 3$$
$$x_2 = 24t - 10, \quad y_2 = 5$$

a) Determine una ventana de visualización para simular una carrera de 100 yardas planas. Grafique de forma simultánea con t iniciando en $t = 0$ y Tstep $= 0.05$.

b) Después de 3 segundos, ¿quién está adelante y por cuánto?

38. **"Captura de la bandera"** Dos jugadores adversarios en "Captura la bandera" están separados 100 pies. A una señal, corren a capturar una bandera que está en el piso a la mitad del camino entre ellos. Sin embargo, el corredor más rápido duda durante 0.1 seg. Las ecuaciones paramétricas siguientes modelan la carrera a la bandera:

$$x_1 = 10(t - 0.1), \quad y_1 = 3$$
$$x_2 = 100 - 9t, \qquad y_2 = 3$$

a) Simule el juego en una ventana de visualización [0, 100] por [−1, 10] con t iniciando en 0. Grafique simultáneamente.

b) ¿Quién captura la bandera primero y por cuántos pies?



39. Ayuda humanitaria lanzada por aire Una agencia de ayuda humanitaria deja caer contenedores de alimentos desde un aeroplano en un área con hambruna asolada por la guerra. El lanzamiento fue hecho desde una altura de 1,000 pies por encima del suelo.

a) Utilice una ecuación para modelar la altura de los contenedores (durante la caída libre) como una función del tiempo.

b) Utilice el modo paramétrico para simular la caída durante los primeros 6 segundos.

c) Después de 4 s de caída libre se abre un paracaídas. ¿A cuántos pies sobre el suelo se encuentran los paquetes cuando se abre el paracaídas?

40. Altura de un elevado Una bola de béisbol se batea directamente hacia arriba desde una altura de 5 pies y con una velocidad inicial de 80 pies/s.

a) Escriba una ecuación que modele la altura de la bola como una función del tiempo t.

b) Utilice el modo paramétrico para simular el elevado.

c) Utilice el modo paramétrico para graficar la altura contra el tiempo. [*Sugerencia:* Haga $x(t) = t$.]

d) ¿Cuál es la altura de la bola al cabo de 4 segundos?

e) ¿Cuál es la altura máxima de la bola? ¿Cuántos segundos tarda en alcanzar su altura máxima?

41. La gráfica completa de las ecuaciones paramétricas $x = 2 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, es la circunferencia de radio 2 con centro en el origen. Determine un intervalo de valores para t de modo que la gráfica sea la parte dada de la circunferencia.

a) La parte en el primer cuadrante.

b) La parte por arriba del eje x.

c) La parte a la izquierda del eje y.

42. Escriba para aprender Considere los dos pares de ecuaciones paramétricas $x = 3 \cos t$, $y = 3 \operatorname{sen} t$ y $x = 3 \operatorname{sen} t$, $y = 3 \cos t$ para $0 \le t \le 2\pi$.

a) Proporcione un argumento convincente de que las gráficas del par de ecuaciones paramétricas son iguales.

b) Explique en qué difieren las parametrizaciones.

43. Bateo de una bola de béisbol Considere el batazo de Kevin analizado en el ejemplo 9.

a) Aproximadamente, ¿cuántos segundos después de que es bateada la bola pega con la barda?

b) ¿A qué altura choca con la barda?

c) Escriba para aprender Explique por qué el batazo de Kevin podría ser atrapado por un jardinero. Luego explique por qué su batazo quizá no podría se atrapado por un jardinero si la bola hubiese sido bateada en un ángulo de 20° con la horizontal.

44. Bateo de una bola de béisbol Kirby batea una bola cuando ésta se encuentra a 4 pies por encima del suelo, con una velocidad inicial de 120 pies/s. La bola deja el bat en un ángulo de 30° con la horizontal y va hacia una barda de 30 pies que se encuentra a 350 pies del home.

a) ¿La bola saltará la barda?

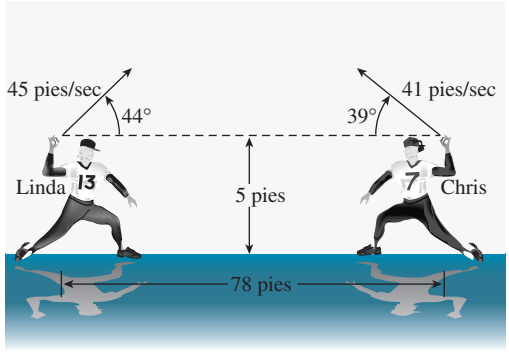
b) Si es así, ¿por cuánto la librará? Si no, ¿la bola podría ser atrapada?

45. Bateo de una bola de béisbol Suponga que en el momento en que Kirby batea la bola, en el ejercicio 44, hay una ráfaga instantánea de 5 pies/s. Suponga que el viento actúa en la dirección horizontal alejándose con la bola.

a) ¿La bola saltará la barda?

b) Si es así, ¿por cuánto la libará? Si no, ¿la bola podría ser atrapada?

46. Lanzamiento de dos bolas de softbol Chris y Linda calientan en el campo lanzándose mutuamente bolas de softbol. Suponga que ambas lanzaron una bola al mismo tiempo y a la misma altura, como se ilustra en la figura. Determine la distancia mínima entre las dos bolas y cuándo ocurre esta distancia mínima.



47. Juego de dardos Tony y Sue lanzan dardos a 20 pies del borde de un blanco circular de 18 pulgadas de radio y que está en el piso. Si Tony lanza el dardo directamente hacia el blanco y lo suelta 3 pies por encima del piso con una velocidad inicial de 30 pies/s y con un ángulo de 70°, ¿el dardo dará en el blanco?

48. Juego de dardos En el juego de dardos descrito en el ejercicio 47, Sue suelta el dardo 4 pies por arriba del suelo con una velocidad inicial de 25 pies/s y con un ángulo de 55°. ¿El dardo dará en el blanco?

49. Bateo de una bola de béisbol Orlando batea una bola cuando ésta está 4 pies por encima del piso y con una velocidad inicial de 160 pies/s. La bola deja el bat en un ángulo de 20° con la horizontal y va hacia una barda de 30 pies a 400 pies del home. ¿Qué tan fuerte debe soplar una ráfaga instantánea (en pies por segundo) que actúe directamente sobre o en contra de la bola para que la bola choque con la barda a pocas pulgadas de la parte superior de la barda? Estime gráficamente la respuesta y resuélvala en forma algebraica.

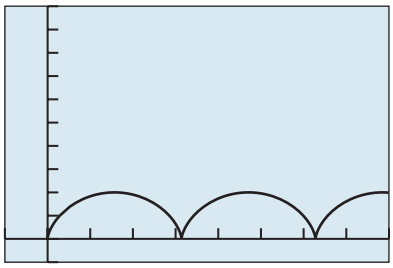
50. Tiros de bolas de golf Nancy practica tiros de salida con pelotas de golf golpeándolas con una velocidad inicial de 180 pies/s con cuatro palos diferentes. ¿Qué tan lejos del punto inicial cae la pelota, si sale del palo formando el ángulo dado con la horizontal?

a) 15° **b)** 20° **c)** 25° **d)** 30°

51. Análisis de una rueda de la fortuna Ron está en una rueda de la fortuna, con radio de 35 pies, que gira en contra de las manecillas del reloj a razón de una vuelta cada 12 segundos. El punto más bajo de la rueda (las 6 en punto) está 15 pies por encima del piso, en el punto (0, 15) de un sistema de coordenadas rectangulares. Determine ecuaciones paramétricas para la posición de Ron como una función del tiempo t (en segundos), si la rueda de la fortuna inicia ($t = 0$) con Ron en el punto (35, 50).

52. Ejemplo 5 revisado Elimine el parámetro t de las ecuaciones paramétricas del ejemplo 5 para determinar una ecuación en x y y para la recta. Verifique que la recta pasa por los puntos A y B del ejemplo.

53. Cicloide La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = t - \text{sen } t$, $y = 1 - \cos t$ es una *cicloide*.

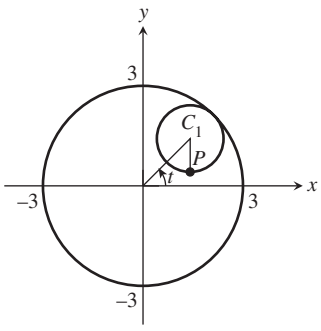


$[-2, 16]$ por $[-1, 10]$

a) ¿Cuál es el valor máximo de $y = 1 - \cos t$? Ese valor, ¿cómo está relacionado con la gráfica?

b) ¿Cuál es la distancia entre intersecciones x colindantes?

54. Hipocicloide La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2 \text{ sen } t - \text{sen } 2t$ es una *hipocicloide*. La gráfica ilustra la trayectoria de un punto P en una circunferencia de radio 1 que rueda por dentro de una circunferencia de radio 3, como se ilustra en la figura.



a) Grafique en forma simultánea esta hipocicloide y la circunferencia de radio 3.

b) Suponga que la circunferencia mayor tiene un radio de 4. ¡Experimente! ¿Cómo cree que deban cambiar las ecuaciones de la parte a) para obtener las ecuaciones que definen la nueva curva? ¿Cómo cree que se ve ahora la hipocicloide? Compruebe sus conjeturas.

Actividad en equipo En los ejercicios del 55 al 58, una partícula se mueve a lo largo de la recta horizontal de modo que su posición en cualquier instante t está dada por $s(t)$. Escriba una descripción del movimiento. [*Sugerencia:* Consulte el ejemplo 7].

55. $s(t) = -t^2 + 3t, \quad -2 \le t \le 4$

56. $s(t) = -t^2 + 4t, \quad -1 \le t \le 5$

57. $s(t) = 0.5(t^3 - 7t^2 + 2t), \quad -1 \le t \le 7$

58. $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t, \quad -1 \le t \le 5$

Preguntas de examen estandarizado

59. Verdadero o falso Los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas $x_1 = t - 1$, $y_1 = 3t + 1$ y $x_2 = (2/3)t - 4/3$, $y_2 = 2t$ corresponden a la misma ecuación rectangular. Justifique su respuesta.

60. Verdadero o falso La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = t - 1$, $y = 2t - 1$, $1 \le t \le 3$ es el segmento de recta con extremos (0, 1) y (2, 5). Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 61 al 64 resuelva el problema sin utilizar una calculadora.

61. Opción múltiple ¿Cuál de los puntos siguientes corresponde a $t = -1$ en la parametrización $x = t^2 - 4$, $y = t + \dfrac{1}{t}$?

A) $(-3, -2)$ **B)** $(-3, 0)$ **C)** $(-5, -2)$

D) $(-5, 0)$ **E)** $(3, 2)$

62. Opción múltiple ¿Cuál de los valores siguientes de t produce el mismo punto que $t = 2\pi/3$ en la parametrización $x = 2\cos t$, $y = 2 \text{ sen } t$?

A) $t = -\dfrac{4\pi}{3}$ **B)** $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ **C)** $t = \dfrac{-\pi}{3}$

D) $t = \dfrac{4\pi}{3}$ **E)** $t = \dfrac{7\pi}{3}$

63. Opción múltiple Una piedra se lanza directamente hacia arriba desde el nivel del piso con su posición con respecto al piso, en cualquier instante $t \ge 0$, dada por $x = 5$, $y = -16t^2 + 80t + 7$. ¿En qué instante la piedra estará 91 pies por encima del piso?

A) 1.5 s **B)** 2.5 s

C) 3.5 s **D)** 1.5 s y 3.5 s

E) La piedra nunca llega a esa altura.

64. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones describe la gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = 1 - t$, $y = 3t + 2$, $t \ge 0$?

A) Una línea recta

B) Un segmento de recta

C) Un rayo

D) Una parábola

E) Una circunferencia

Exploraciones

65. Parametrización de circunferencias Considere las ecuaciones paramétricas

$$x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

a) Grafique las ecuaciones paramétricas para $a = 1, 2, 3, 4$ en la misma ventana cuadrada de visualización.

b) Elimine el parámetro t en las ecuaciones paramétricas para verificar que todas son circunferencias. ¿Cuál es el radio?

Ahora considere las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a \cos t,\ y = k + a \operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

c) Grafique las ecuaciones para $a = 1$, utilizando los pares de valores siguientes para h y k:

h	2	−2	−4	3
k	3	3	−2	−3

d) Elimine el parámetro t en las ecuaciones paramétricas e identifique la gráfica.

e) Escriba una parametrización para la circunferencia con centro en $(-1, 4)$ y radio 3.

66. Actividad en equipo Parametrización de rectas Considere la parametrización

$$x = at + b,\ y = ct + d,$$

donde a y c no son ambos iguales a cero.

a) Grafique la curva para $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$ y $d = 2$.

b) Grafique la curva para $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$ y $d = 3$.

c) Escriba para aprender Elimine el parámetro t y escriba una ecuación en x y y para la curva. Explique por qué su gráfica es una recta.

d) Escriba para aprender Determine la pendiente, intersección y e intersección x de la recta, si es que existen. Si no, explique por qué no existen.

e) ¿Bajo qué condiciones la recta será horizontal? ¿Vertical?

67. Lanzamiento de una pelota a una rueda de la fortuna Una rueda de la fortuna de 20 pies gira en contra de las manecillas del reloj y completa una vuelta cada 12 segundos (consulte la figura). Eric se encuentra en el punto D a 75 pies de la base de la rueda. En el instante en que Jane está en el punto A, Eric lanza una pelota a la rueda de la fortuna, soltándola a la misma altura que la parte inferior de la rueda. Si la rapidez inicial de la pelota es 60 pies/s y se suelta en un ángulo de 120° con la horizontal, ¿tendrá oportunidad Jane de atrapar la pelota? Complete los pasos siguientes para obtener la respuesta.

a) Asigne un sistema de coordenadas de modo que el carro inferior de la rueda esté en (0, 0) y el centro de la rueda esté en (0, 20). Entonces Eric suelta la pelota en el punto (75, 0). Explique por qué las ecuaciones paramétricas para la trayectoria de Jane son

$$x_1 = 20 \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right),\ y_1 = 20 + 20 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} t\right),\ t \ge 0.$$

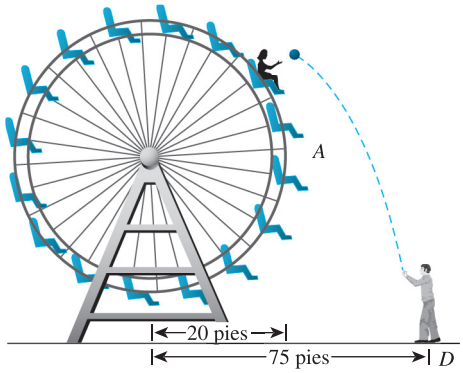
b) Explique por qué las ecuaciones paramétricas para la trayectoria de la pelota son:

$$x_2 = -30t + 75,\ y_2 = -16t^2 + (30\sqrt{3})t,\ t \ge 0.$$

c) Grafique las dos trayectorias de forma simultánea y determine si Jane y la pelota llegan al punto de intersección de las dos trayectorias al mismo tiempo.

d) Determine una fórmula para la distancia $d(t)$ entre Jane y la pelota en cualquier instante t.

e) Escriba para aprender Utilice la gráfica de las ecuaciones paramétricas $x_3 = t$, $y_3 = d(t)$ para estimar la distancia mínima entre Jane y la pelota, y cuándo ocurre esto. ¿Cree que Jane tenga oportunidad de atrapar la pelota?



68. Lanzamiento de una pelota a una rueda de la fortuna Una rueda de la fortuna de 71 pies de radio gira en contra de las manecillas del reloj y completa una vuelta cada 20 segundos. Tony se encuentra en un punto a 90 pies a la derecha de la base de la rueda. En el instante en que Matthew está en el punto A (las 3 en punto), Tony lanza una pelota hacia la rueda de la fortuna con una velocidad inicial de 88 pies/s en un ángulo con la horizontal de 100°. Determine la distancia mínima entre la pelota y Matthew.

Ampliación de las ideas

69. Problema con dos ruedas de la fortuna Chang está en una rueda de la fortuna, con centro en (0, 20) y radio de 20 pies, que gira en contra de las manecillas del reloj a razón de una vuelta cada 12 segundos. Kuan está en una rueda de la fortuna, con centro en (15, 15) y radio 15, que gira en contra de las manecillas del reloj a razón de una vuelta cada 8 segundos. Determine la distancia mínima entre Chung y Kuan, si ambos inician en ($t = 0$) en la posición de las 3 en punto de un reloj.

70. Problema con dos ruedas de la fortuna Chang y Kuan pasean en las ruedas de la fortuna descritas en el ejercicio 69. Determine la distancia mínima entre Chang y Kuan, si Chang inicia ($t = 0$) en la posición de las 3 en punto y Kuan en la posición de las 6 en punto.

Los ejercicios 71 a 73 se refieren a la gráfica C de las ecuaciones paramétricas

$$x = tc + (1 - t)a,\ y = td + (1 - t)b$$

donde $P_1(a, b)$ y $P_2(c, d)$ son dos puntos fijos.

71. Uso de ecuaciones paramétricas en geometría Muestre que el punto $P(x, y)$ en C es igual a

a) $P_1(a, b)$ cuando $t = 0$. **b)** $P_2(c, d)$ cuando $t = 1$.

72. Uso de ecuaciones paramétricas en geometría Muestre que si $t = 0.5$, el punto correspondiente (x, y) en C es el punto medio del segmento de recta con extremos (a, b) y (c, d).

73. ¿Qué valores de t determinarán los puntos que dividan al segmento de recta P_1P_2 en tres partes iguales? ¿Cuatro partes iguales?

6.4 Coordenadas polares

Aprenderá acerca de...

- El sistema de coordenadas polares
- La transformación de coordenadas
- La transformación de ecuaciones
- La determinación de la distancia mediante coordenadas polares

. . . porque

En ocasiones, el uso de coordenadas polares simplifica ecuaciones rectangulares complicadas y son útiles en cálculo.

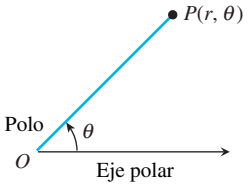


FIGURA 6.35 El sistema de coordenadas polares.

El sistema de coordenadas polares

Un **sistema de coordenadas polares** es un plano con un punto O, el **polo**, y un rayo que parte de O, el **eje polar**, como se muestra en la figura 6.35. Cada punto P en el plano se asigna a **coordenadas polares** de la siguiente forma: r es la **distancia dirigida** desde O a P, y θ es el **ángulo dirigido** cuyo lado inicial está en el eje polar y cuyo lado terminal está en la recta OP.

Como en trigonometría, medimos θ como positivo cuando se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo cuando se mueve como las manecillas del reloj. Si $r > 0$, entonces P está en el lado terminal de θ. Si $r < 0$, entonces P está en el lado terminal de $\theta + \pi$. Podemos utilizar medidas en radianes o grados para el ángulo θ como se ilustra en el ejemplo 1.

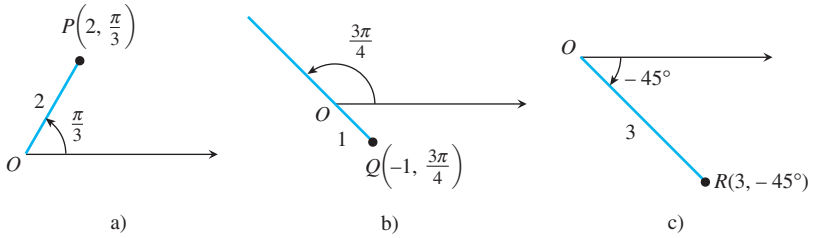
EJEMPLO 1 Trazo de puntos en el sistema de coordenadas polares

Trace los puntos con las coordenadas polares dadas.

a) $P(2, \pi/3)$ **b)** $Q(-1, 3\pi/4)$ **c)** $R(3, -45°)$.

SOLUCIÓN La figura 6.36 muestra los tres puntos.

Ahora resuelva el ejercicio 7.



a) b) c)

FIGURA 6.36 Los tres puntos del ejemplo 1.

Cada par de coordenadas polares determina un punto único. Sin embargo, las coordenadas de un punto P en el plano no son únicas.

EJEMPLO 2 Determinación de todas las coordenadas polares para un punto

Si el punto P tiene coordenadas polares $(3, \pi/3)$, determine todas las coordenadas polares para P.

SOLUCIÓN El punto P se muestra en la figura 6.37. Dos pares adicionales de coordenadas polares para P son

$$\left(3, \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \left(3, \frac{7\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(-3, \frac{\pi}{3} + \pi\right) = \left(-3, \frac{4\pi}{3}\right).$$

continúa

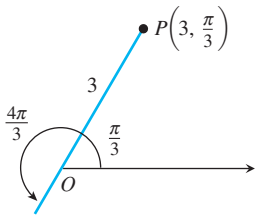


FIGURA 6.37 El punto P del ejemplo 2.

Podemos utilizar estos dos pares de coordenadas polares para P para escribir el resto de las posibilidades:

$$\left(3, \frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) = \left(3, \frac{(6n+1)\,\pi}{3}\right) \text{ o}$$

$$\left(-3, \frac{\pi}{3} + (2n+1)\,\pi\right) = \left(-3, \frac{(6n+4)\,\pi}{3}\right)$$

Cuando n es cualquier entero.

Ahora resuelva el ejercicio 23.

Las coordenadas (r, θ), $(r, \theta + 2\pi)$ y $(-r, \theta + \pi)$ se refieren todas al mismo punto. En general, el punto con coordenadas polares (r, θ) también tiene las siguientes coordenadas polares:

Determinación de todas las coordenadas polares de un punto

Suponga que P tiene las coordenadas polares (r, θ). Cualquier otra coordenada polar de P debe ser de la forma

$$(r, \theta + 2n\pi) \text{ o } (-r, \theta + (2n+1)\pi)$$

donde n es cualquier entero. En particular, el polo tiene coordenadas polares $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

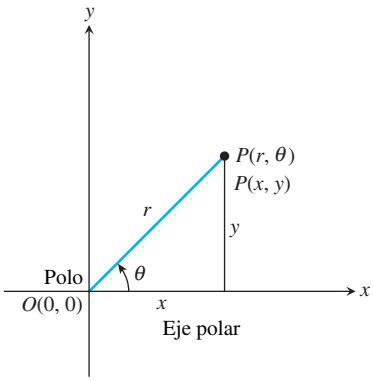


FIGURA 6.38 Coordenadas polares y rectangulares para P.

Transformación de coordenadas

Cuando utilizamos las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas, el polo es el origen y el eje polar es la parte positiva del eje x, como se muestra en la figura 6.38. Aplicando trigonometría podemos determinar ecuaciones que relaciones con coordenadas polares (r, θ) y con las coordenadas rectangulares (x, y) de un punto P.

Ecuaciones para transformación de coordenadas

Tenga el punto P coordenadas polares (r, θ) y coordenadas rectangulares (x, y). Entonces

$$x = r\cos\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2,$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

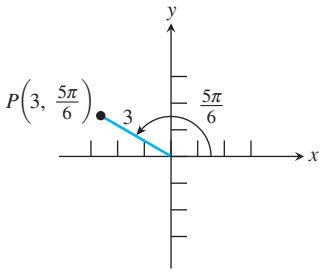
Estas relaciones nos permiten convertir de un sistema de coordenadas al otro.

EJEMPLO 3 Conversión de coordenadas polares a coordenadas rectangulares

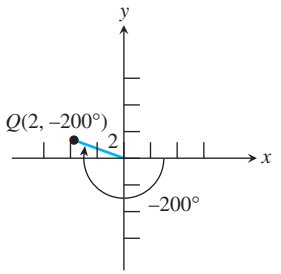
Determine las coordenadas rectangulares de los puntos con las coordenadas polares dadas.

a) $P(3, 5\pi/6)$ **b)** $Q(2, -200°)$

continúa



a)



b)

FIGURA 6.39 Los puntos P y Q del ejemplo 3.

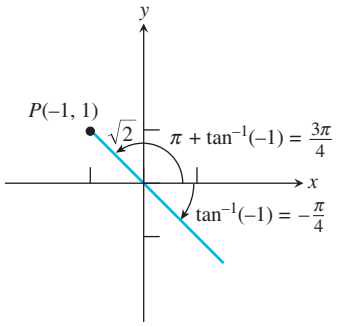


FIGURA 6.40 El punto P en el ejemplo 4a.

SOLUCIÓN

a) Para $P(3, 5\pi/6)$, $r = 3$ y $\theta = 5\pi/6$:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$x = 3\cos\frac{5\pi}{6} \quad \text{y} \quad y = 3\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$$

$$x = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx -2.60 \qquad y = 3\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5$$

Las coordenadas rectangulares de P son $(-3\sqrt{3}/2, 1.5) \approx (-2.60, 1.5)$ (figura 6.39a).

b) Para $Q(2, -200°)$ y $\theta = -200°$:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$x = 2\cos(-200°) \approx -1.88 \quad \text{y} \quad y = 2\operatorname{sen}(-200°) \approx 0.68$$

Las coordenadas rectangulares para Q son aproximadamente $(-1.88, 0.68)$ (figura 6.39b).

Ahora resuelva el ejercicio 15.

Al transformar coordenadas rectangulares a coordenadas polares, debemos recordar que existe una infinidad de posibles parejas de coordenadas polares. En el ejemplo 4, reportamos dos de las posibilidades.

EJEMPLO 4 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Determine dos pares de coordenadas polares para los puntos con coordenadas rectangulares dadas.

a) $P(-1, 1)$ **b)** $Q(-3, 0)$

SOLUCIÓN

a) Para $P(-1, 1)$, $x = -1$ y $y = 1$:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r^2 = (-1)^2 + (1)^2 \qquad \tan\theta = \frac{1}{-1} = -1$$

$$r = \pm\sqrt{2} \qquad \theta = \tan^{-1}(-1) + n\pi = -\frac{\pi}{4} + n\pi$$

Utilizamos los ángulos $-\pi/4$ y $-\pi/4 + \pi = 3\pi/4$. Como P está en el rayo opuesto al lado terminal de $-\pi/4$, el valor correspondiente de r para este ángulo es negativo (figura 6.40). Como P está en el lado terminal de $3\pi/4$, el valor correspondiente de r para este ángulo es positivo. Así que dos pares de coordenadas polares del punto P son

$$\left(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{y} \quad \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

b) Para $Q(-3, 0)$, $x = -3$ y $y = 0$, se tiene que $r = \pm 3$ y $\theta = n\pi$. Si usamos los valores de 0 y π para el ángulo se obtienen dos pares de coordenadas polares para el punto Q son

$$(-3, 0) \text{ y } (3, \pi).$$

Ahora resuelva el ejercicio 27.

EXPLORACIÓN 1 **Uso de una graficadora para convertir coordenadas**

La mayoría de las graficadoras tiene la capacidad de convertir coordenadas polares a coordenadas rectangulares y viceversa. Por lo regular, darán sólo un par, entre los posibles, de coordenadas polares para un par de coordenadas rectangulares dado.

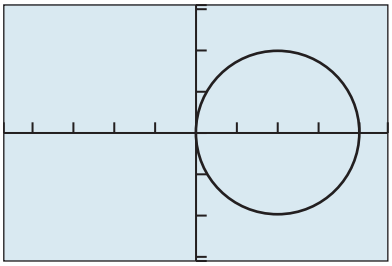
1. Utilice su graficadora para comprobar las conversiones de los ejemplos 3 y 4.
2. Utilice su graficadora para convertir los pares de coordenadas polares $(2, \pi/3)$, $(-1, \pi/2)$, $(2, \pi)$, $(-5, 3\pi/2)$, $(3, 2\pi)$ a pares de coordenadas rectangulares.
3. Utilice su graficadora para convertir los pares de coordenadas rectangulares $(-1, -\sqrt{3})$, $(0, 2)$, $(3, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -4)$ a pares de coordenadas polares.

Transformación de ecuaciones

Podemos utilizar las ecuaciones de transformación de coordenadas para convertir de la forma polar a la forma rectangular y viceversa. Por ejemplo, la ecuación polar $r = 4 \cos \theta$ puede convertirse a la forma rectangular como sigue:

$$\begin{aligned} r &= 4 \cos \theta \\ r^2 &= 4r \cos \theta \\ x^2 + y^2 &= 4x && r^2 = x^2 + y^2,\ r \cos \theta = x \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 4 && \text{Restar } 4x \text{ y sumar 4.} \\ (x - 2)^2 + y^2 &= 4 && \text{Factorizar.} \end{aligned}$$

Así que la gráfica de $r = 4 \cos \theta$ es toda o parte de la circunferencia con centro $(2, 0)$ y radio 2.



$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$

FIGURA 6.41 La gráfica de la ecuación polar $r = 4 \cos \theta$ en $0 \le \theta \le 2\pi$.

La figura 6.41 muestra la gráfica de $r = 4 \cos \theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$ obtenida mediante el modo de graficación polar de su graficadora. Así, la gráfica de $r = 4 \cos \theta$ es toda la circunferencia.

Al igual que en el caso de las ecuaciones paramétricas, se asume que el dominio de una ecuación polar en r y θ estará constituido por todos los valores de θ para los cuales los valores correspondientes de r son números reales. En el modo polar, también debe seleccionar un valor para θmín y θmáx.

Podría sorprenderse de la forma polar para una recta vertical del ejemplo 5.

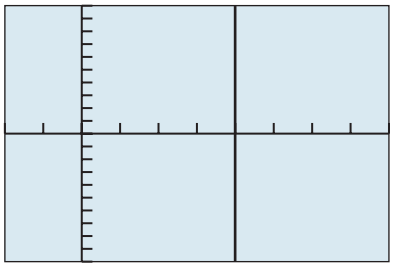
EJEMPLO 5 Transformación de la forma polar a la forma rectangular

Convierta $r = 4 \sec \theta$ a la forma rectangular e identifique la gráfica. Respalde su respuesta con una utilería de graficación polar.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} r &= 4 \sec \theta \\ \frac{r}{\sec \theta} &= 4 && \text{Dividir entre } \sec \theta. \\ r \cos \theta &= 4 && \cos \theta = \tfrac{1}{\sec \theta}. \\ x &= 4 && r \cos \theta = x \end{aligned}$$

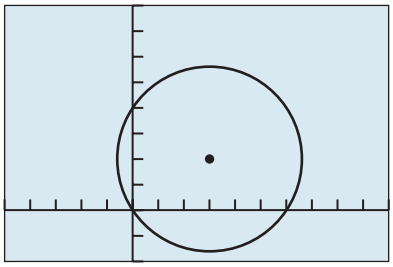
La gráfica es la recta vertical $x = 4$ (figura 6.42).



$[-2, 8]$ por $[-10, 10]$

FIGURA 6.42 La gráfica de la recta vertical $r = 4 \sec \theta$ $(x = 4)$ (ejemplo 5).

Ahora resuelva el ejercicio 35.



[−5, 10] por [−2, 8]

FIGURA 6.43 La gráfica de la circunferencia $r = 6 \cos \theta + 4 \operatorname{sen} \theta$ (ejemplo 6).

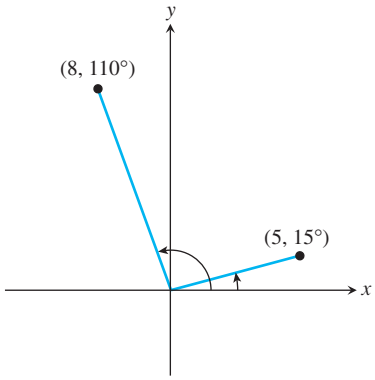


FIGURA 6.44 La distancia y dirección de dos aeroplanos en una fuente de radar (ejemplo 7).



EJEMPLO 6 Conversión de la forma rectangular a la forma polar

Convierta $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$ a la forma polar.

SOLUCIÓN

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 13$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$$

Al sustituir r^2 por $x^2 + y^2$, $r \cos \theta$ por x y $r \operatorname{sen} \theta$ por y, se obtiene lo siguiente:

$$r^2 - 6r \cos \theta - 4r \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$r(r - 6 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta) = 0$$

$$r = 0 \quad \text{o} \quad r - 6 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta = 0$$

La gráfica de $r = 0$ consiste en un solo punto, el origen, que también está en la gráfica de $r - 6 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta = 0$. Así que la forma polar es

$$r = 6 \cos \theta + 4 \operatorname{sen} \theta.$$

La gráfica de $r = 6 \cos \theta + 4 \operatorname{sen} \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ se muestra en la figura 6.43 y parece ser la circunferencia con centro (3, 2) y radio $\sqrt{13}$, como se esperaba.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

Determinación de la distancia mediante coordenadas polares

Un sistema de radar envía ondas de radio de alta frecuencia y las recibe después de que un objeto las refleja. La distancia y dirección del objeto con respecto al radar se expresan generalmente como coordenadas polares.

EJEMPLO 7 Uso de un sistema de radar

El radar detecta dos aeroplanos a la misma altura. Sus coordenadas polares son (8 millas, 110°) y (5 millas, 15°) (consulte la figura 6.44). ¿Qué distancia separa a los aeroplanos?

SOLUCIÓN Por la ley de los cosenos (sección 5.6),

$$d^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos (110° - 15°)$$

$$d = \sqrt{8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos 95°}$$

$$d \approx 9.80$$

Los aeroplanos están aproximadamente a 9.80 millas uno del otro.

Ahora resuelva el ejercicio 51.

También podemos utilizar la ley de los cosenos para deducir una fórmula para la distancia entre puntos en el sistema de coordenadas polares. Consulte el ejercicio 61.

REPASO RÁPIDO 6.4 *(Para obtener ayuda consulte las secciones R.2, 4.3 y 5.6)*

En los ejercicios 1 y 2 determine los cuadrantes que contienen al lado terminal de los ángulos.

1. a) $5\pi/6$ **b)** $-3\pi/4$

2. a) $-300°$ **b)** $210°$

En los ejercicios del 3 al 6 determine un ángulo positivo y uno negativo coterminales con el ángulo dado.

3. $-\pi/4$ **4.** $\pi/3$

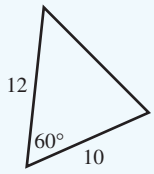
5. $160°$ **6.** $-120°$

En los ejercicios 7 y 8 escriba una ecuación estándar para la circunferencia.

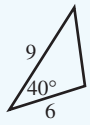
7. Centro $(3, 0)$ y radio 2 **8.** Centro $(0, -4)$ y radio 3

En los ejercicios 9 y 10 utilice la ley de los cosenos para determinar la medida del tercer lado del triángulo dado.

9.



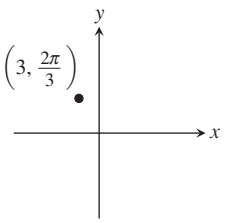
10.



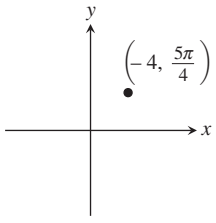
EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.4

En los ejercicios del 1 al 4 se proporcionan las coordenadas polares de un punto. Determine sus coordenadas rectangulares.

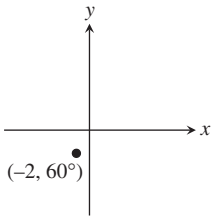
1.



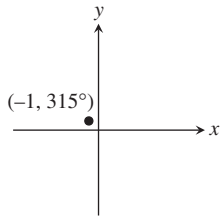
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 y 6 **a)** complete la tabla para la ecuación polar y **b)** trace los puntos correspondientes.

5. $r = 3 \operatorname{sen} \theta$

θ	$\pi/4$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π	$4\pi/3$	2π
r						

6. $r = 2 \csc \theta$

θ	$\pi/4$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π	$4\pi/3$	2π
r						

En los ejercicios del 7 al 14 trace el punto con las coordenadas polares dadas.

7. $(3, 4\pi/3)$ **8.** $(2, 5\pi/6)$ **9.** $(-1, 2\pi/5)$

10. $(-3, 17\pi/10)$ **11.** $(2, 30°)$ **12.** $(3, 210°)$

13. $(-2, 120°)$ **14.** $(-3, 135°)$

En los ejercicios del 15 al 22 determine las coordenadas rectangulares del punto con las coordenadas polares dadas.

15. $(1.5, 7\pi/3)$ **16.** $(2.5, 17\pi/4)$

17. $(-3, -29\pi/7)$ **18.** $(-2, -14\pi/5)$

19. $(-2, \pi)$ **20.** $(1, \pi/2)$

21. $(2, 270°)$ **22.** $(-3, 360°)$

En los ejercicios del 23 al 26 se dan las coordenadas polares de un punto P. Determine todas sus coordenadas polares.

23. $P = (2, \pi/6)$ **24.** $P = (1, -\pi/4)$

25. $P = (1.5, -20°)$ **26.** $P = (-2.5, 50°)$

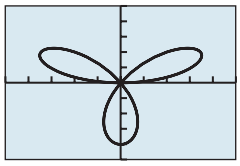
En los ejercicios del 27 al 30 se dan las coordenadas rectangulares del punto P. Determine todas las coordenadas polares de P que satisfagan

a) $0 \le \theta \le 2\pi$ **b)** $-\pi \le \theta \le \pi$ **c)** $0 \le \theta \le 4\pi$

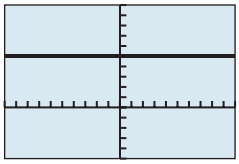
27. $P = (1, 1)$ **28.** $P = (1, 3)$

29. $P = (-2, 5)$ **30.** $P = (-1, -2)$

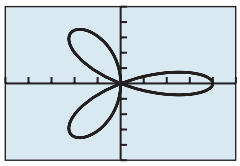
En los ejercicios del 31 al 34 utilice su graficadora para relacionar la ecuación polar con su gráfica.



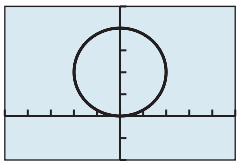
a)



b)



c)



d)

31. $r = 5 \csc \theta$ **32.** $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

33. $r = 4 \cos 3\theta$ **34.** $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$

En los ejercicios del 35 al 42 convierta la ecuación polar a la forma rectangular e identifique la gráfica. Respalde su respuesta mediante la graficación de la ecuación polar.

35. $r = 3 \sec \theta$ **36.** $r = -2 \csc \theta$ **37.** $r = -3 \operatorname{sen} \theta$

38. $r = -4 \cos \theta$ **39.** $r \csc \theta = 1$ **40.** $r \sec \theta = 3$

41. $r = 2 \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta$ **42.** $r = 4 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta$

En los ejercicios del 43 al 50 convierta la ecuación rectangular a la forma polar. Grafique la ecuación polar.

43. $x = 2$ **44.** $x = 5$

45. $2x - 3y = 5$ **46.** $3x + 4y = 2$

47. $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ **48.** $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

49. $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 18$ **50.** $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 17$

51. Rastreo de aeroplanos Las ubicaciones, dadas en coordenadas polares, de dos aviones que se aproximan al aeropuerto de Vicksburg son (4 millas, 12°) y (2 millas, 72°). Determine la distancia entre los aviones.

52. Rastreo de barcos Las ubicaciones de dos barcos con respecto al Faro Mays Landing, dadas en coordenadas polares, son (3 millas, 170°) y (5 millas, 150°). Determine la distancia entre los barcos.

53. Uso de coordenadas polares en geometría Un cuadrado con lados de longitud a y centro en el origen tiene dos lados paralelos al eje x. Determine las coordenadas polares de los vértices.

54. Uso de coordenadas polares en geometría Un pentágono regular cuyo centro está en el origen tiene un vértice en el eje positivo x, a una distancia a del centro. Determine las coordenadas polares de los vértices.

Preguntas de examen estandarizado

55. Verdadero o falso Todo punto en el plano tiene exactamente dos coordenadas polares. Justifique su respuesta.

56. Verdadero o falso Si r_1 y r_2 no son 0, y si (r_1, θ) y $(r_2, \theta + \pi)$ representan al mismo punto en el plano, entonces $r_1 = -r_2$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 57 al 60 resuelva el problema sin utilizar una calculadora.

57. Opción múltiple Si $r \neq 0$, ¿cuál de los pares de coordenadas polares siguientes representan el mismo punto que el punto con coordenadas polares (r, θ)?

A) $(-r, \theta)$ **B)** $(-r, \theta + 2\pi)$ **C)** $(-r, \theta + 3\pi)$

D) $(r, \theta + \pi)$ **E)** $(r, \theta + 3\pi)$

58. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes son las coordenadas rectangulares del punto con coordenadas polares $(-2, -\pi/3)$?

A) $(-\sqrt{3}, 1)$ **B)** $(-1, -\sqrt{3})$ **C)** $(-1, \sqrt{3})$

D) $(1, -\sqrt{3})$ **E)** $(1, \sqrt{3})$

59. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes pares de coordenadas polares representan el mismo punto que el punto con coordenadas polares (2, 110°)?

A) $(-2, -70°)$ **B)** $(-2, 110°)$ **C)** $(-2, -250°)$

D) $(2, -70°)$ **E)** $(2, 290°)$

60. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes pares de coordenadas polares *no* representa el punto con coordenadas rectangulares $(-2, -2)$?

A) $(2\sqrt{2}, -135°)$ **B)** $(2\sqrt{2}, 225°)$ **C)** $(-2\sqrt{2}, -315°)$

D) $(-2\sqrt{2}, 45°)$ **E)** $(-2\sqrt{2}, 135°)$

Exploraciones

61. Fórmula de la distancia en polares Suponga que P_1 y P_2 tienen coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2), respectivamente

a) Si $\theta_1 - \theta_2$ es múltiplo de π, escriba una fórmula para la distancia entre P_1 y P_2.

b) Utilice la ley de los cosenos para demostrar que la distancia entre P_1 y P_2 está dada por

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

c) Escriba para aprender ¿La fórmula de la parte b coincide con la(s) fórmula(s) que encontró en la parte a? Explique.

62. Observación del paso de θ Considere la curva polar $r = 4 \operatorname{sen} \theta$. Describa la gráfica para cada una de las siguientes opciones:

a) $0 \leq \theta \leq \pi/2$ **b)** $0 \leq \theta \leq 3\pi/4$

c) $0 \leq \theta \leq 3\pi/2$ **d)** $0 \leq \theta \leq 4\pi$

En los ejercicios del 63 al 66 utilice los resultados del ejercicio 61 para determinar la distancia entre los puntos con las coordenadas polares dadas.

63. (2, 10°), (5, 130°) **64.** (4, 20°), (6, 65°)

65. (−3, 25°), (−5, 160°) **66.** (6, −35°), (8, −65°)

Ampliación de las ideas

67. Graficación de ecuaciones paramétricas polares Determine las ecuaciones paramétricas para la curva polar $r = f(\theta)$.

Actividad en equipo En los ejercicios del 68 al 71 utilice lo que aprendió en el ejercicio 67 para escribir ecuaciones paramétricas para la ecuación polar dada. Respalde gráficamente su respuesta.

68. $r = 2 \cos \theta$ **69.** $r = 5 \operatorname{sen} \theta$

70. $r = 2 \sec \theta$ **71.** $r = 4 \csc \theta$

6.5 Gráficas de ecuaciones polares

Aprenderá acerca de...

- Las curvas polares y las curvas paramétricas
- La simetría
- El análisis de curvas polares
- Rosas
- Limaçones (Caracoles)
- Otras curvas polares

. . . porque

Las gráficas que tienen simetría circular o cilíndrica con frecuencia tienen ecuaciones polares sencillas, lo cual es muy útil en cálculo.

Curvas polares y curvas paramétricas

Las curvas polares en realidad son casos especiales de curvas paramétricas. Tenga en cuenta que las curvas polares se grafican en el plano (x, y), a pesar del hecho que se dan en términos de r y θ. Eso es por lo que la gráfica polar de $r = 4 \cos \theta$ es una circunferencia (consulte la figura 6.41 en la sección 6.4) en lugar de ser una curva coseno.

En el modo de función, los puntos están determinados mediante una coordenada vertical que cambia cuando la coordenada horizontal se mueve de izquierda a derecha. En modo polar, los puntos están determinados mediante distancias dirigidas desde el polo que cambia cuando el ángulo gira alrededor del polo. La relación está proporcionada por las ecuaciones de transformación de coordenadas de la sección 6.4, que muestran que la gráfica de $r = f(\theta)$ es realmente la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = f(\theta) \cos \theta$$
$$y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

para todos los valores de θ en algún intervalo del parámetro que sea suficiente para producir la gráfica completa(en muchos de nuestro ejemplos, $0 \leq \theta < 2\pi$ funciona).

Puesto que las calculadoras graficadoras modernas producen estas gráficas con mucha facilidad en modo polar, francamente vamos a suponer que usted no tiene que bosquejarlas a mano. En lugar de eso nos concentraremos en analizar las propiedades de las curvas (en cursos posteriores podrá descubrir propiedades adicionales de las curvas utilizando las herramientas de cálculo).

Simetría

En la sección 1.2 aprendió criterios para probar la simetría de ecuaciones en coordenadas rectangulares. Para la forma polar también existen criterios algebraicos.

La figura 6.45 de la página siguiente muestra un sistema de coordenadas rectangulares sobrepuesto a un sistema de coordenadas polares, con el origen coincidiendo con el polo y la parte positiva del eje x coincidiendo con el eje polar.

Los tres tipos de simetrías que se considerarán son:

1. El eje x (eje polar) como una línea de simetría (figura 6.45a).
2. El eje y (la recta $\theta = \pi/2$) como una línea de simetría (figura 6.45b).
3. El origen (el polo) como un punto de simetría (figura 6.45c).

Las tres pruebas algebraicas para la simetría en forma polar requieren reemplazar el par (r, θ), que satisface la ecuación polar, por otro par de coordenadas y determinar si también satisface la ecuación polar.

Criterios de simetría para gráficas polares

La gráfica de una ecuación polar tiene la simetría indicada si cualquiera de las sustituciones produce una ecuación polar equivalente.

Criterio para simetría	Sustituir	Por
1. Con respecto al eje x	(r, θ)	$(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$
2. Con respecto al eje y	(r, θ)	$(-r, -\theta)$ o $(r, \pi - \theta)$
3. Con respecto al origen	(r, θ)	$(-r, \theta)$ o $(r, \theta + \pi)$

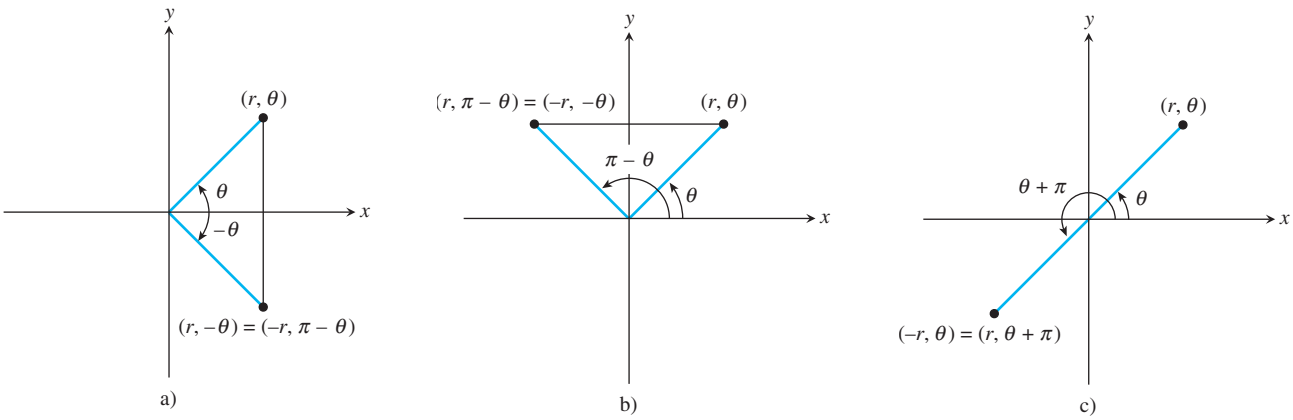
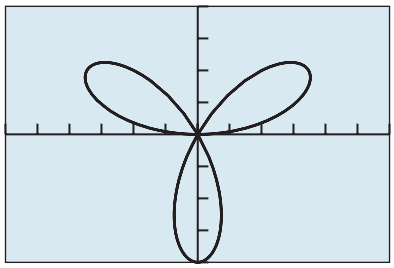


FIGURA 6.45 Simetría con respecto a: a) el eje x (eje polar), b) el eje y (la recta $\theta = \pi/2$) y c) el origen (el polo).



[−6,6] por [−4, 4]

FIGURA 6.46 La gráfica de $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$ es simétrica con respecto al eje y (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Prueba de simetría

Utilice los criterios de simetría para demostrar que la gráfica de $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$ es simétrica con respecto al eje y.

SOLUCIÓN La figura 6.46 sugiere que la gráfica de $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$ es simétrica con respecto al eje y y no lo es con respecto al eje x ni al origen.

$$r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$$

$$-r = 4 \operatorname{sen} 3(-\theta) \qquad \text{Reemplazar } (r, \theta) \text{ por } (-r, -\theta).$$

$$-r = 4 \operatorname{sen} (-3\theta)$$

$$-r = -4 \operatorname{sen} 3\theta \qquad \operatorname{sen} \theta \text{ es una función impar de } \theta.$$

$$r = 4 \operatorname{sen} 3\theta \qquad \text{(Igual que la original).}$$

Como las ecuaciones $-r = 4 \operatorname{sen} 3(-\theta)$ y $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$ son equivalentes, hay simetría con respecto al eje y.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

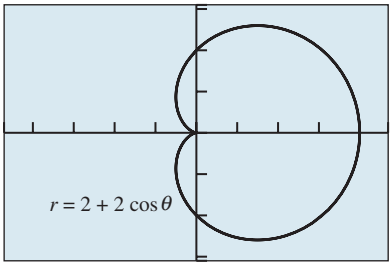
Análisis de curvas polares

Analizamos gráficas de ecuaciones polares de una forma muy parecida a la que analizamos las gráficas de ecuaciones rectangulares. Por ejemplo, la función r del ejemplo 1 es una función continua de θ. También $r = 0$ cuando $\theta = 0$ y cuando θ es cualquier entero múltiplo de $\pi/3$. El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales.

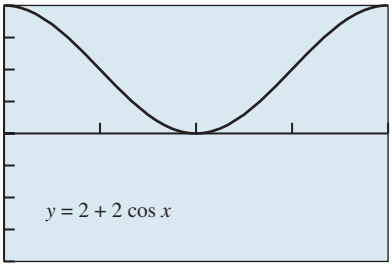
La función Trace (rastreo) puede utilizarse para determinar el rango de esta función polar (figura 6.47). Puede mostrarse que $-4 \leq r \leq 4$.

Generalmente, en el caso de coordenadas polares, estamos más interesados en el valor máximo de $|r|$ que en el rango de r. En este caso, $|r| \leq 4$ de modo que podemos concluir que la gráfica está acotada.

Un valor máximo para $|r|$ es un **valor máximo** r para una ecuación polar. Un valor máximo r ocurre en un punto de la curva que está a la distancia máxima del polo. En la figura 6.47, un valor máximo r ocurre en $(4, \pi/6)$ y $(-4, \pi/2)$. De hecho, obtenemos un valor máximo r en cada (r, θ) que represente la punta de uno de los tres pétalos.



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]
Coordenadas polares
a)



[0, 2π] por [−4, 4]
Coordenadas rectangulares
b)

FIGURA 6.48 Con $\theta = x$, los valores y en b son iguales a la distancia dirigida desde el polo a (r, θ) en a.

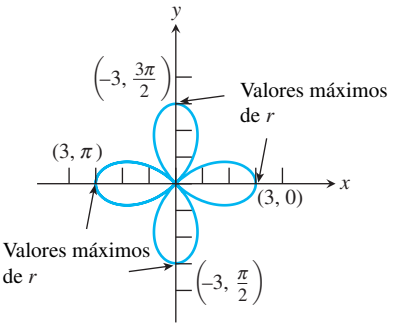
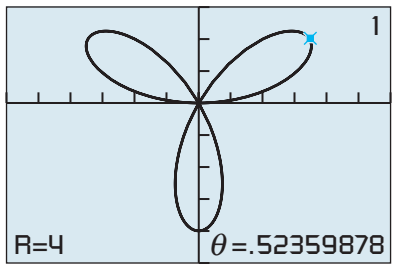
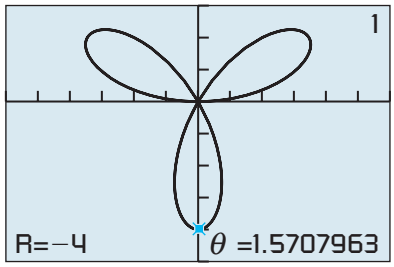


FIGURA 6.49 La gráfica de $r = 3\cos 2\theta$ (ejemplo 3).



[−6,6] por [−5, 3]
a)



[−6,6] por [−5, 3]
b)

FIGURA 6.47 Los valores de r en $r = 4$ sen 3θ, varían desde a 4 hasta b -4.

Para determinar los valores máximos r, debemos encontrar los valores máximos de $|r|$, en contraste con la distancia dirigida r. El ejemplo 2 muestra una forma de determinar, en forma gráfica, los valores máximos r.

EJEMPLO 2 Determinación de los valores máximos *r*

Determinar el valor máximo de r de $r = 2 + 2\cos\theta$.

SOLUCIÓN La figura 6.48a muestra la gráfica de $r = 2 + 2\cos\theta$, para $0 \le \theta \le 2\pi$. Como sólo estamos interesados en los valores de r, utilizamos la gráfica de la ecuación rectangular $y = 2 + 2\cos x$ en modo de graficación de función (figura 6.48b). Con base en esta gráfica podemos ver que el valor máximo de r, o y, es 4. Ocurre cuando θ es cualquier múltiplo de 2π.

Ahora resuelva el ejercicio 21.

EJEMPLO 3 Determinación de valores máximos de *r*

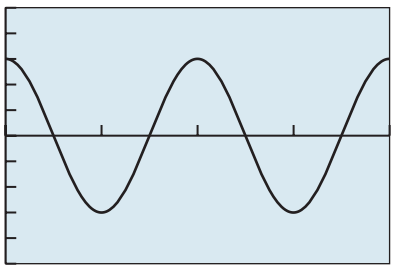
Identifique los puntos en la gráfica de $r = 3\cos 2\theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$ que proporcionan lo valores máximos de r.

SOLUCIÓN Utilizando el trazo de la figura 6.49, podemos mostrar que hay cuatro puntos en la gráfica de $r = 3\cos 2\theta$ en $0 \le \theta < 2\pi$ a la distancia máxima de 3 del polo:

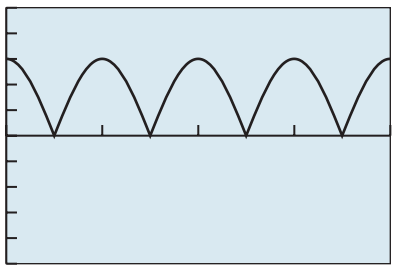
$$(3, 0), \quad (-3, \pi/2), \quad (3, \pi) \quad \text{y} \quad (-3, 3\pi/2).$$

La figura 6.50a muestra las distancias dirigidas r como los valores y de $y_1 = 3\cos 2x$ y la figura 6.50b muestra las distancias $|r|$ como los valores y de $y_2 = |3\cos 2x|$. Hay cuatro valores máximos de y_2 (por ejemplo, $|r|$) en la parte b que corresponden a los cuatro valores extremos de y_1 (por ejemplo, r) de la parte a.

Ahora resuelva el ejercicio 23.



[0, 2π] por [−5, 5]
a)



[0, 2π] por [−5, 5]
b)

FIGURA 6.50 La gráfica de a $y_1 = 3\cos 2x$ y b $y_2 = |3\cos 2x|$, en modo de graficación de función (ejemplo 3).

Rosas

La curva en el ejemplo 1 es una curva en forma de rosa de tres pétalos y la curva del ejemplo 3 es una rosa de 4 pétalos. Las gráficas de ecuaciones polares $r = a \cos n\theta$ y $r = a \operatorname{sen} n\theta$, donde n es un entero mayor que 1, son **curvas en forma de rosa**. Si n es impar, hay n pétalos, y si n es par, hay $2n$ pétalos.

EJEMPLO 4 Análisis de una curva en forma de rosa

Analice la gráfica de la rosa $r = 3 \operatorname{sen} 4\theta$.

SOLUCIÓN La figura 6.51 muestra la gráfica de la rosa de 8 pétalos $r = 3 \operatorname{sen} 4\theta$. El valor máximo de r es 3. La gráfica parece ser simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen. Por ejemplo, para demostrar que la gráfica es simétrica con respecto al eje x, reemplazamos (r, θ) por $(-r, \pi - \theta)$:

$$r = 3 \operatorname{sen} 4\theta$$

$$-r = 3 \operatorname{sen} 4(\pi - \theta)$$

$$-r = 3 \operatorname{sen} (4\pi - 4\theta)$$

$$-r = 3[\operatorname{sen} 4\pi \cos 4\theta - \cos 4\pi \operatorname{sen} 4\theta] \quad \text{Identidad del seno de una diferencia.}$$

$$-r = 3[(0) \cos 4\theta - (1) \operatorname{sen} 4\theta] \quad \operatorname{sen} 4\pi = 0, \cos 4\pi = 1$$

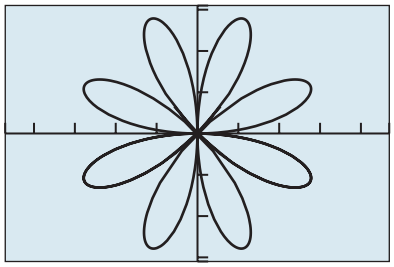
$$-r = -3 \operatorname{sen} 4\theta$$

$$r = 3 \operatorname{sen} 4\theta$$

Como la nueva ecuación polar es la misma que la ecuación original, la gráfica es simétrica con respecto al eje x. De forma análoga, usted puede probar que la gráfica es simétrica con respecto al eje y y al origen (consulte el ejercicio 58).

Dominio: Todos los reales
Rango: $[-3, 3]$
Continua
Simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.
Acotada
Valor máximo de r: 3
No tiene asíntotas.

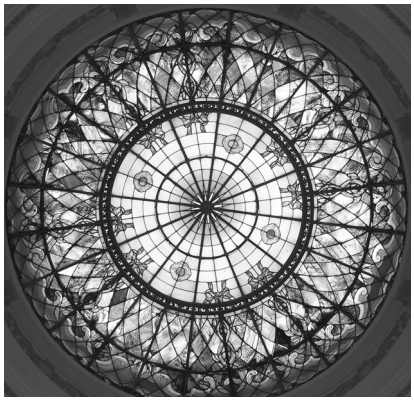
Ahora resuelva el ejercicio 29.



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

FIGURA 6.51 La gráfica de la curva rosa de 8 pétalos, $r = 3 \operatorname{sen} 4\theta$ (ejemplo 4).

A continuación se dan las características de las curvas en forma de rosas. En los ejercicios 67 y 68, usted investigará con mayor detalle estas curvas.



UNA ROSA ES UNA ROSA...

Los botánicos dirían que la curva rosa no se parece mucho a una rosa. Sin embargo, considere el hermoso vitral que se muestra aquí, el cual es característico de muchas catedrales importantes y se denomina "vitral de rosa"

Gráficas de curvas en forma de rosa

Las gráficas de $r = a \cos n\theta$ y $r = a \operatorname{sen} n\theta$, donde $n > 1$ es un entero, tienen las características siguientes:

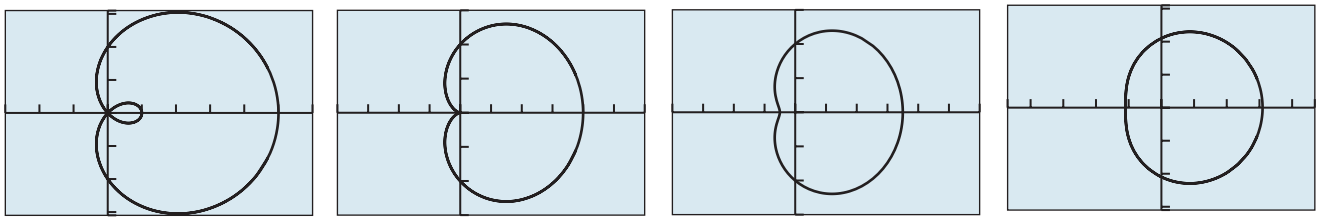
Dominio: Todos los reales
Rango: $[-|a|, |a|]$
Continua
Simetría: n par, simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen
n impar, $r = a \cos n\theta$ simétrica con respecto al eje x
n impar, $r = a \operatorname{sen} n\theta$ simétrica con respecto al eje y
Acotada
Valor máximo de r: $|a|$
No tiene asíntotas
Número de pétalos: n, si n es impar
$2n$, si n es par.

Limaçones (Caracoles)

Las **curvas *limaçones*** (en forma de **caracol**) son gráficas de ecuaciones polares de la forma

$$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta \text{ y } r = a \pm b \cos \theta,$$

donde $a > 0$ y $b > 0$. *Limaçon*, que más o menos se pronuncia "limasón", es una palabra francesa antigua para "caracol". Existen cuatro diferentes formas de *limaçones*, como se ilustra en la figura 6.52.



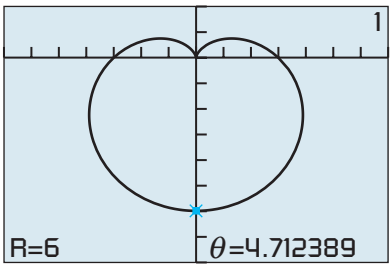
Limaçon con un rizo interno: $\frac{a}{b} < 1$ a)

Cardioide: $\frac{a}{b} = 1$ b)

Limaçon con ondulación: $1 < \frac{a}{b} < 2$ c)

Limaçon convexo: $\frac{a}{b} \geq 2$ d)

FIGURA 6.52 Los cuatro tipos de limaçones.



[−7, 7] por [−8, 2]

FIGURA 6.53 La gráfica de la cardioide del ejemplo 5.

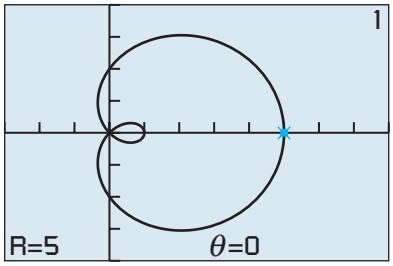
EJEMPLO 5 Análisis de la curva *limaçon*

Analice la gráfica de $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$.

SOLUCIÓN En la figura 6.53, podemos ver la curva es una cardioide con valor máximo de r igual a 6. La gráfica es simétrica sólo con respecto al eje y.

Dominio: Todos los reales
Rango: [0, 6]
Continua
Simetría: con respecto al eje y
Acotada
Valor máximo de r: 6
No tiene asíntotas.

Ahora resuelva el ejercicio 33.



[−3, 8] por [−4, 4]

FIGURA 6.54 La gráfica de un limaçon con un rizo interno (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Análisis de una curva limaçon

Analice la gráfica de $r = 2 + 3 \cos \theta$.

SOLUCIÓN Con base en la figura 6.54, podemos ver que la curva es una *limaçon* con un rizo interno y 5 como valor máximo de r. La gráfica es simétrica sólo con respecto del eje x.

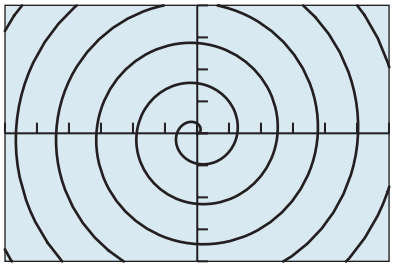
Dominio: Todos los reales
Rango: $[-1, 5]$
Continua
Simétrica sólo con respecto del eje x
Acotada
Valor máximo de r: 5
No tiene asíntotas.

Ahora resuelva el ejercicio 39.

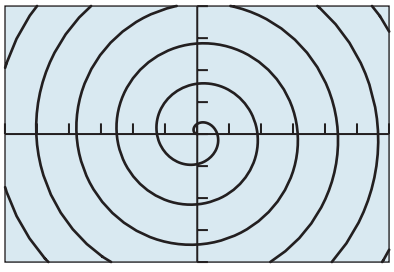
Gráficas de curvas limaçon

Las gráficas de $r = a \pm b \text{ sen } \theta$ y $r = a \pm b \cos \theta$, donde $a > 0$ y $b > 0$, tienen las características siguientes:

Dominio: Todos los reales
Rango: $[a - b, a + b]$
Continua
Simetría: $r = a \pm b \text{ sen } \theta$, es simétrica con respecto del eje y
$r = a \pm b \cos \theta$, es simétrica con respecto del eje x
Acotada
Valor máximo de r: $a + b$
No tiene asíntotas



[−30, 30] por [−20, 20]
a)



[−30, 30] por [−20, 20]
b)

FIGURA 6.55 La gráfica de $r = \theta$ para a $\theta \geq 0$ (configure θmin = 0, θmax = 45, θstep = 0.1) y b $\theta \leq 0$ (configure θmin = −45, θmax = 0, θstep = 0.1) (ejemplo 7).

EXPLORACIÓN 1 Curvas limaçon

Pruebe con varios valores para a y b para que se convenza de las características descritas de estas curvas.

Otras curvas polares

Hasta ahora, todas las curvas polares que hemos graficado han sido acotadas. La espiral del ejemplo 7 es no acotada.

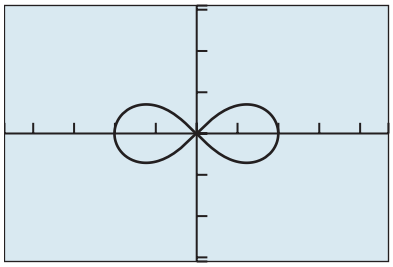
EJEMPLO 7 Análisis de la espiral de Arquímedes

Analice la gráfica de $r = \theta$.

SOLUCIÓN En la figura 6.55, podemos ver que la curva no tiene un valor máximo de r y que es simétrica con respecto al eje y.

Dominio: Todos los reales
Rango: Todos los reales
Continua
Simétrica con respecto al eje y
No acotada
No tiene valor máximo de r
No tiene asíntotas.

Ahora resuelva el ejercicio 41.



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

FIGURA 6.56 La gráfica de la lemniscata $r^2 = 4 \cos 2\theta$ (ejemplo 8).

Las **curvas lemniscatas** son gráficas de ecuaciones polares de la forma

$$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta \text{ y } r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

EJEMPLO 8 Análisis de una curva lemniscata

Analice la gráfica de $r^2 = 4 \cos 2\theta$ para $[0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN Resulta que usted puede obtener la gráfica completa usando $r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$. También necesita elegir un paso muy pequeño para θ (θstep) para producir la gráfica de la figura 6.56.

Dominio: $[0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$
Rango: $[-2, 2]$
Simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen
Continua (en su dominio)
Acotada
Valor máximo de r: 2
No tiene asíntotas.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

EXPLORACIÓN 2 Revisión del ejemplo 8

1. Pruebe que los valores de θ en los intervalos $(\pi/4, 3\pi/4)$ y $(5\pi/4, 7\pi/4)$ no están en el dominio de la ecuación polar $r^2 = 4 \cos 2\theta$.
2. Explique por qué $r = -2\sqrt{\cos 2\theta}$ produce la misma gráfica que $r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.
3. Utilice los criterios de simetría para mostrar que la gráfica de $r^2 = 4 \cos 2\theta$ es simétrica con respecto del eje x.
4. Utilice los criterios de simetría para mostrar que la gráfica de $r^2 = 4 \cos 2\theta$ es simétrica con respecto del eje y.
5. Utilice los criterios de simetría para mostrar que la gráfica de $r^2 = 4 \cos 2\theta$ es simétrica con respecto del origen.

REPASO RÁPIDO 6.5 *(Para obtener ayuda consulte las secciones 1.2 y 5.3)*

En los ejercicios del 1 al 4 determine el valor máximo absoluto y el valor mínimo absoluto en $[0, 2\pi]$ y en dónde ocurren.

1. $y = 3 \cos 2x$ **2.** $y = 2 + 3 \cos x$

3. $y = 2\sqrt{\cos 2x}$ **4.** $y = 3 - 3 \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 5 y 6 determine si la gráfica de la función es simétrica con respecto al **a)** eje x, **b)** eje y y **c)** origen.

5. $y = \operatorname{sen} 2x$ **6.** $y = \cos 4x$

En los ejercicios del 7 al 10 utilice identidades trigonométricas para simplificar la expresión.

7. $\operatorname{sen}(\pi - \theta)$ **8.** $\cos(\pi - \theta)$

9. $\cos 2(\pi + \theta)$ **10.** $\operatorname{sen} 2(\pi + \theta)$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.5

En los ejercicios 1 y 2 **a)** complete la tabla para la ecuación polar y **b)** trace los puntos correspondientes.

1. $r = 3 \cos 2\theta$

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
r								

2. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
r							

En los ejercicios del 3 al 6 dibuje una gráfica de la rosa. Establezca el intervalo más pequeño para θ ($0 \le \theta \le k$) que producirá una gráfica completa.

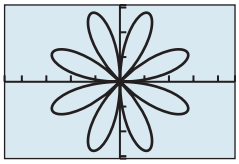
3. $r = 3 \operatorname{sen} 3\theta$

4. $r = -3 \cos 2\theta$

5. $r = 3 \cos 2\theta$

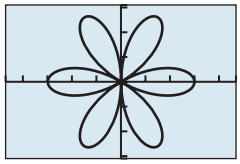
6. $r = 3 \operatorname{sen} 5\theta$

Los ejercicios 7 y 8 se refieren a las curvas de la siguiente figura:



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

a)



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

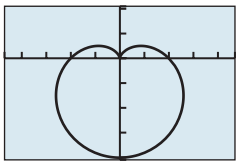
b)

7. ¿De cuáles ecuaciones se muestran las gráficas?

$r_1 = 3 \cos 6\theta \quad r_2 = 3 \operatorname{sen} 8\theta \quad r_3 = 3|\cos 3\theta|$

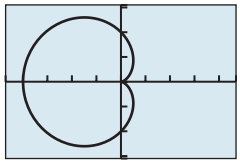
8. Utilice identidades trigonométricas para explicar cuál de estas curvas es la gráfica de $r = 6 \cos 2\theta \operatorname{sen} 2\theta$.

En los ejercicios del 9 al 12 relacione la ecuación con su gráfica, sin usar su calculadora graficadora.



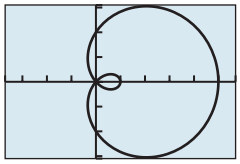
[−4.7, 4.7] por [−4.1, 2.1]

a)



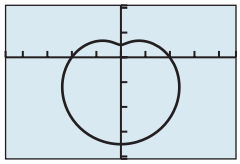
[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

b)



[−3.7, 5.7] por [−3.1, 3.1]

c)



[−4.7, 4.7] por [−4.1, 2.1]

d)

9. ¿La gráfica de $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$ o $r = 2 - 2 \cos \theta$, aparece en la figura? Explique.

10. ¿La gráfica de $r = 2 + 3 \cos \theta$ o $r = 2 - 3 \cos \theta$, aparece en la figura? Explique.

11. ¿La gráfica en a es la gráfica de $r = 2 - 2 \operatorname{sen} \theta$ o de $r = 2 + 2 \cos \theta$? Explique.

12. ¿La gráfica en d es la gráfica de $r = 2 + 1.5 \cos \theta$ o de $r = 2 - 1.5 \operatorname{sen} \theta$? Explique.

En los ejercicios del 13 al 20 utilice los criterios para la simetría polar con el fin de determinar si la gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen.

13. $r = 3 + 3 \operatorname{sen} \theta$

14. $r = 1 + 2 \cos \theta$

15. $r = 4 - 3 \cos \theta$

16. $r = 1 - 3 \operatorname{sen} \theta$

17. $r = 5 \cos 2\theta$

18. $r = 7 \operatorname{sen} 3\theta$

19. $r = \dfrac{3}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

20. $r = \dfrac{2}{1 - \cos \theta}$

En los ejercicios del 21 al 24 identifique los puntos para $0 \le \theta \le 2\pi$ donde ocurren los valores máximos de r, en la gráfica de la ecuación polar.

21. $r = 2 + 3 \cos \theta$

22. $r = -3 + 2 \operatorname{sen} \theta$

23. $r = 3 \cos 3\theta$

24. $r = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

En los ejercicios del 25 al 44 analice la gráfica de la curva polar.

25. $r = 3$

26. $r = -2$

27. $\theta = \pi/3$

28. $\theta = -\pi/4$

29. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$

30. $r = -3 \cos 4\theta$

31. $r = 5 + 4 \operatorname{sen} \theta$

32. $r = 6 - 5 \cos \theta$

33. $r = 4 + 4 \cos \theta$

34. $r = 5 - 5 \operatorname{sen} \theta$

35. $r = 5 + 2 \cos \theta$

36. $r = 3 - \operatorname{sen} \theta$

37. $r = 2 + 5 \cos \theta$

38. $r = 3 - 4 \operatorname{sen} \theta$

39. $r = 1 - \cos \theta$

40. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$

41. $r = 2\theta$

42. $r = \theta/4$

43. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, \ 0 \le \theta \le 2\pi$

44. $r^2 = 9 \cos 2\theta, \ 0 \le \theta \le 2\pi$

En los ejercicios del 45 al 48 determine el largo de cada pétalo de la curva polar.

45. $r = 2 + 4 \operatorname{sen} 2\theta$

46. $r = 3 - 5 \cos 2\theta$

47. $r = 1 - 4 \cos 5\theta$

48. $r = 3 + 4 \operatorname{sen} 5\theta$

En los ejercicios del 49 al 52 seleccione las dos ecuaciones cuyas gráficas sean la misma curva. Luego, aunque las gráficas de las ecuaciones sean idénticas, describa cómo las dos trayectorias son diferentes cuando θ aumenta de 0 a 2π.

49. $r_1 = 1 + 3 \operatorname{sen} \theta, \ r_2 = -1 + 3 \operatorname{sen} \theta, \ r_3 = 1 - 3 \operatorname{sen} \theta$

50. $r_1 = 1 + 2 \cos \theta, \ r_2 = -1 - 2 \cos \theta, \ r_3 = - + 2 \cos \theta$

51. $r_1 = 1 + 2 \cos \theta, \ r_2 = 1 - 2 \cos \theta, \ r_3 = -1 - 2 \cos \theta$

52. $r_1 = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta, \ r_2 = - + 2 \operatorname{sen} \theta, \ r_3 = 2 - 2 \operatorname{sen} \theta$

En los ejercicios del 53 al 56: **a)** describa la gráfica de la ecuación polar, **b)** indique las simetrías que tenga la gráfica y **c)** establezca sus valores máximos de r, si existen.

53. $r = 2 \operatorname{sen}^2 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta$

54. $r = 3 \cos 2\theta - \operatorname{sen} 3\theta$

55. $r = 1 - 3 \cos 3\theta$

56. $r = 1 + 3 \operatorname{sen} 3\theta$

57. Actividad en equipo Analice las gráficas de las ecuaciones polares $r = a \cos n\theta$ y de $r = a \operatorname{sen} n\theta$, cuando n es un entero par.

58. Revisión del ejemplo 4 Utilice los criterios de simetría polar para probar que la gráfica de la curva $r = 3 \operatorname{sen} 4\theta$ es simétrica con respecto del eje y y del origen.

59. Escriba para aprender Revisión del ejemplo 5 Por medio de la graficación de $y = 3 - 3 \operatorname{sen} x$ para $0 \leq x < 2\pi$, confirme que el rango para la función polar $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$ del ejemplo 5 es el establecido. Explique por qué funciona esto.

60. Escriba para aprender Revisión del ejemplo 6 Por medio de la graficación de $y = 2 + 3 \cos x$ para $0 \leq x < 2\pi$, confirme que el rango establecido para la función polar $r = 2 + 3 \cos \theta$ del ejemplo 6. Explique por qué funciona esto.

Preguntas de examen estandarizado

61. Verdadero o falso Una curva polar siempre está acotada. Justifique su respuesta.

62. Verdadero o falso La gráfica de $r = 2 + \cos \theta$ es simétrica con respecto al eje x. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 63 al 66 resuelva sin utilizar una calculadora.

63. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones proporciona el número de pétalos de la rosa $r = 3 \cos 2\theta$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 6

64. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones describe la simetría de la gráfica de la rosa $r = 3 \cos 2\theta$?

A) sólo con el eje x

B) sólo con el eje y

C) sólo con el origen

D) con el eje x, el eje y y el origen

E) No es simétrica con respecto al eje x, ni al eje y ni al origen.

65. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a un valor máximo de r para $r = 2 - 3 \cos \theta$?

A) 6 **B)** 5 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

66. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes es el número de pétalos de la rosa $r = 5 \operatorname{sen} 3\theta$?

A) 1 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 10 **E)** 15

Exploraciones

67. Análisis de las rosas Considere la ecuación polar $r = a \cos n\theta$, para n, un entero impar.

a) Pruebe que la gráfica es simétrica con respecto al eje x.

b) Pruebe que la gráfica no es simétrica con respecto al eje y.

c) Pruebe que la gráfica no es simétrica con respecto al origen.

d) Pruebe que el valor máximo de r es $|a|$.

e) Analice la gráfica de esta curva.

68. Análisis de las rosas Considere la ecuación polar $r = a \operatorname{sen} n\theta$, para n, un entero impar.

a) Pruebe que la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

b) Pruebe que la gráfica no es simétrica con respecto al eje x.

c) Pruebe que la gráfica no es simétrica con respecto al origen.

d) Pruebe que el valor máximo de r es $|a|$.

e) Analice la gráfica de esta curva.

69. Ampliación del tipo de curvas en forma de rosas Las gráficas de $r_1 = 3 \operatorname{sen}((5/2)\theta)$ y $r_2 = 3 \operatorname{sen}((7/2)\theta)$ pueden llamarse curvas en forma de rosas.

a) Determine el intervalo más pequeño para θ que producirá una gráfica completa de r_1; de r_2.

b) ¿Cuántos pétalos tiene cada gráfica?

Ampliación de las ideas

En los ejercicios del 70 al 72 grafique cada ecuación polar. Describa cómo están relacionadas una con cada una de las otras.

70. a) $r_1 = 3 \operatorname{sen} 3\theta$ **b)** $r_2 = 3 \operatorname{sen} 3\left(\theta + \dfrac{\pi}{12}\right)$

c) $r_3 = 3 \operatorname{sen} 3\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

71. a) $r_1 = 2 \sec \theta$ **b)** $r_2 = 2 \sec\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $r_3 = 2 \sec\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

72. a) $r_1 = 2 - 2 \cos \theta$ **b)** $r_2 = r_1\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $r_3 = r_1\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$

73. Escriba para aprender Describa cómo están relacionadas las gráficas de $r = f(\theta)$, $r = f(\theta + \alpha)$ y $r = f(\theta - \alpha)$. Explique por qué usted cree que esta generalización es verdadera.

6.6 Teorema de Moivre y raíces *n*-ésimas

Aprenderá acerca de...

- El plano complejo
- La forma trigonométrica de los números complejos
- La multiplicación y división de números complejos
- Las potencias de números complejos
- Las raíces de números complejos

. . . porque

Este material amplía su técnica de resolución de ecuaciones al incluir ecuaciones de la forma $z^n = c$, con n un entero y c un número complejo.

El plano complejo

Podría intrigarle la razón de que hayamos revisado a los números complejos en la sección R.6 y después los hayamos ignorado durante el resto de los seis capítulos siguientes (de hecho, después de esta sección casi los ignoraremos nuevamente). La razón es sencilla, ya que la clave para la comprensión de cálculo es la graficación de funciones en el plano cartesiano, que consiste de dos rectas reales (no complejas) perpendiculares.

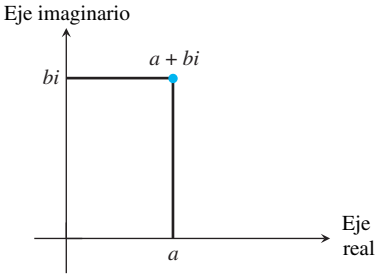
No estamos diciendo que los números complejos sean imposibles de graficar. Sólo que cada real está asociado con un punto en la recta real, y cada número complejo puede asociarse con un punto del **plano complejo**. Esta idea evolucionó con el trabajo de Caspar Wessel (1745-1818), Jean-Robert Argand (1768-1822) y Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Los números reales se colocan a lo largo del eje horizontal (el **eje real**) y los números imaginarios a lo largo del eje vertical (el **eje imaginario**), por lo que se asocia el número complejo $a + bi$ con el punto (a, b). Como un ejemplo, en la figura 6.57, mostramos la gráfica de $2 + 3i$.

EJEMPLO 1 Trazo de números complejos

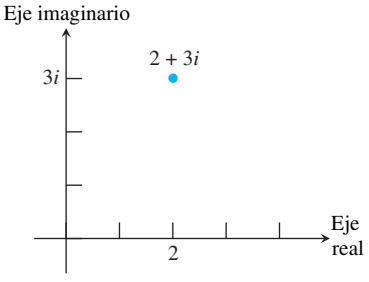
En el plano complejo trace $u = 1 + 3i$, $v = 2 - i$ y $u + v$. Estos tres puntos y el origen determinan un cuadrilátero, ¿es un paralelogramo?

SOLUCIÓN Primero observe que $u + v = (1 + 3i) + (2 - i) = 3 + 2i$. Los números u, v y $u + v$ se trazaron en la figura 6.58a. El cuadrilátero es un paralelogramo, ya que la aritmética es exactamente la misma que en la suma de vectores (figura 6.58b).

Ahora resuelva el ejercicio 1.

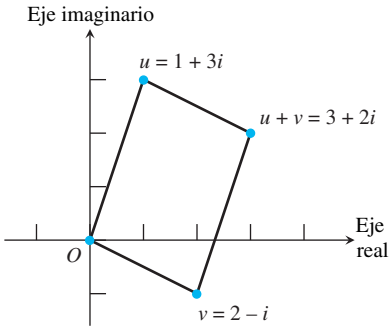


a)

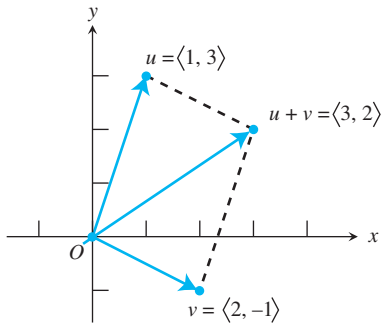


b)

FIGURA 6.57 Graficación de puntos en el plano complejo.



a)



b)

FIGURA 6.58 a) Dos números y su suma se grafican en el plano complejo. b) La aritmética es la misma que la de la suma de vectores (ejemplo 1).

¿EXISTE UN CÁLCULO DE FUNCIONES COMPLEJAS?

Existe un cálculo de funciones complejas. Si algún día usted lo estudia, debe ser sólo después de haber adquirido una sólida comprensión algebraica y geométrica del cálculo de funciones reales.

El ejemplo 1 muestra cómo la representación, en el plano complejo, de la suma de números complejos es prácticamente la misma que la representación en el plano cartesiano de la suma de vectores. Otra semejanza entre los números complejos y los vectores bidimensionales es la definición de valor absoluto.

DEFINICIÓN Valor absoluto (módulo) de un número complejo

El **valor absoluto** o **módulo** de un número complejo $z = a + bi$ es

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

En el plano complejo, $|a + bi|$ es la distancia de $a + bi$ al origen.

Forma trigonométrica de los números complejos

La figura 6.59 muestra la gráfica de $z = a + bi$ en el plano complejo. La distancia, r, al origen es el módulo de z. Si definimos un ángulo de dirección θ para z, igual que lo hicimos para vectores, vemos que $a = r\cos\theta$ y $b = r\,\text{sen}\,\theta$. Sustituir estas expresiones para a y b produce la **forma trigonométrica** (o **forma polar**) del número complejo z.

FORMA POLAR

¿Qué significa cis?
La forma trigonométrica (polar) aparece con suficiente frecuencia en textos científicos para tener una forma abreviada. La expresión "cos $\theta + i$ sen θ" con frecuencia se abrevia "cis θ" (se pronuncia "cis de theta"). Por tanto, $z = r\,\text{cis}\,\theta$.

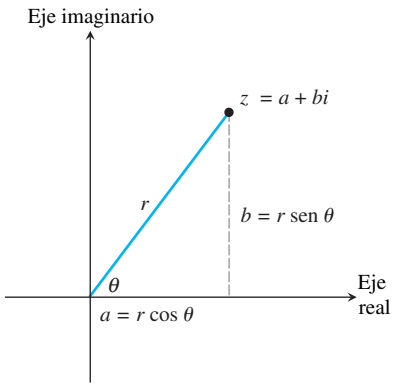


FIGURA 6.59 Si r es la distancia de $z = a + bi$ al origen y θ es el ángulo de dirección que se muestra, entonces $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, que es la forma trigonométrica de z.

DEFINICIÓN Forma trigonométrica de un número complejo

La **forma trigonométrica** del número complejo $z = a + bi$ es

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

donde $a = r\cos\theta$, $b = r\,\text{sen}\,\theta$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, y $\tan\theta = b/a$. El número r es el *valor absoluto* o *módulo* de z y θ es un **argumento** de z.

Un ángulo θ para la forma trigonométrica de z siempre puede elegirse de modo que $0 \le \theta \le 2\pi$, aunque puede utilizarse cualquier ángulo coterminal con θ. En consecuencia, el *ángulo* θ y *argumento* de un número complejo z no son únicos; se deduce entonces que la forma trigonométrica de un número complejo z no es única.

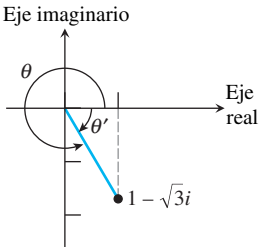


FIGURA 6.60 El número complejo para el ejemplo 2a.

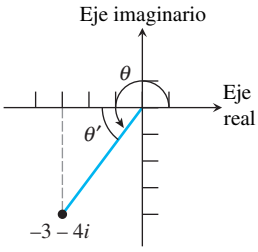


FIGURA 6.61 El número complejo para el ejemplo 2b.

EJEMPLO 2 Determinación de formas trigonométricas

Determine la forma trigonométrica con $0 \le \theta < 2\pi$ para el número complejo.

a) $1 - \sqrt{3}i$ **b)** $-3 - 4i$

SOLUCIÓN

a) Para $1 - \sqrt{3}i$,

$$r = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Como el ángulo de referencia θ' para θ es $-\pi/3$ (figura 6.60),

$$\theta = 2\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3}.$$

Por tanto,

$$1 - \sqrt{3}i = 2\cos\frac{5\pi}{3} + 2i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}.$$

b) Para $-3 - 4i$,

$$|-3 - 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$$

El ángulo de referencia θ' para θ (figura 6.61) satisface la ecuación

$$\tan\theta' = \frac{4}{3}, \quad \text{así que}$$

$$\theta' = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 0.927\ldots.$$

Como el lado terminal de θ está en el tercer cuadrante, concluimos que

$$\theta = \pi + \theta' \approx 4.07.$$

Por lo tanto,

$$-3 - 4i \approx 5(\cos 4.07 + i\,\text{sen}\,4.07).$$

Ahora resuelva el ejercicio 5.

Multiplicación y división de números complejos

Para los números complejos, la forma trigonométrica es particularmente conveniente para su multiplicación y división. El producto implica el producto de los módulos y la suma de los argumentos. El cociente implica el cociente de los módulos y la diferencia de los argumentos.

Producto y cociente de números complejos

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$. Entonces

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$.

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$, $r_2 \neq 0$.

Demostración de la fórmula del producto

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)\langle r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

En el ejercicio 63 se le pedirá demostrar la fórmula del cociente.

EJEMPLO 3 Multiplicación de números complejos

Exprese el producto de z_1 y z_2 en la forma estándar:

$$z_1 = 25\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{-\pi}{4}\right), \quad z_2 = 14\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right).$$

SOLUCIÓN

$$z_1 \cdot z_2 = 25\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{-\pi}{4}\right) \cdot 14\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 25 \cdot 14\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 350\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\approx 478.11 + 128.11i$$

Ahora resuelva el ejercicio 19.

EJEMPLO 4 División de números complejos

Exprese el cociente z_1/z_2 en forma estándar:

$$z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°), \quad z_2 = 6(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°).$$

SOLUCIÓN

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)}{6(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}[\cos(135° - 300°) + i \operatorname{sen}(135° - 300°)]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}[\cos(-165°) + i \operatorname{sen}(-165°)]$$

$$\approx -0.46 - 0.12i$$

Ahora resuelva el ejercicio 23.

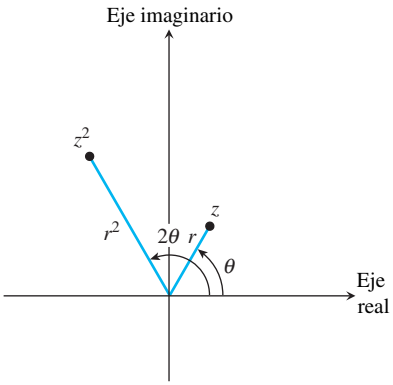


FIGURA 6.62 Una interpretación geométrica de z^2.

Potencias de números complejos

Podemos utilizar la fórmula del producto para elevar un número complejo a una potencia. Por ejemplo, sea $z = r\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Entonces

$$\begin{aligned} z^2 &= z \cdot z \\ &= r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \cdot r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \\ &= r^2[\cos(\theta + \theta) + i\,\text{sen}\,(\theta + \theta)] \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) \end{aligned}$$

La figura 6.62 proporciona una representación geométrica de elevar un número al cuadrado: su argumento se duplica y su distancia al origen se multiplica por un factor r, aumentando si $r > 1$ y disminuyendo si $r < 1$.

Podemos determinar z^3 multiplicando z por z^2:

$$\begin{aligned} z^3 &= z \cdot z^2 \\ &= r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \cdot r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) \\ &= r^3[\cos(\theta + 2\theta) + i\,\text{sen}\,(\theta + 2\theta)] \\ &= r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta) \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} z^4 &= r^4(\cos 4\theta + i\,\text{sen}\,4\theta) \\ z^5 &= r^5(\cos 5\theta + i\,\text{sen}\,5\theta) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Este patrón puede generalizarse como el teorema siguiente, denominado en honor del matemático Abraham De Moivre (1667-1754), quien también hizo contribuciones importantes al campo de la probabilidad.

Teorema de De Moivre

Sea $z = r\,(\cos\theta + \text{i}\,\text{sen}\,\theta)$ y sea n un entero positivo. Entonces

$$z^n = [r\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta).$$

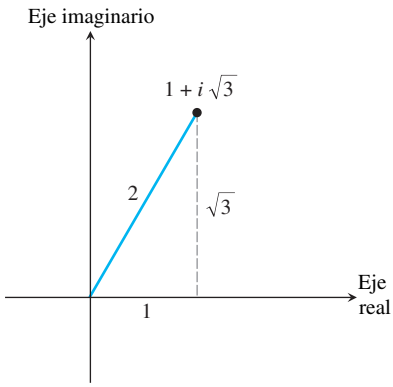


FIGURA 6.63 El número complejo en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Uso del teorema de De Moivre

Determine $(1 + i\sqrt{3})^3$ mediante el teorema de De Moivre.

SOLUCIÓN

Resolver algebraicamente Consulte la figura 6.63. El argumento de $z = 1 + i\sqrt{3}$ es $\theta = \pi/3$ y su módulo es $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$. Por lo tanto,

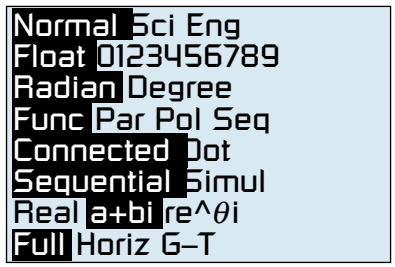
$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} z^3 &= 2^3\left[\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 8(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi) \\ &= 8(-1 + 0i) = -8 \end{aligned}$$

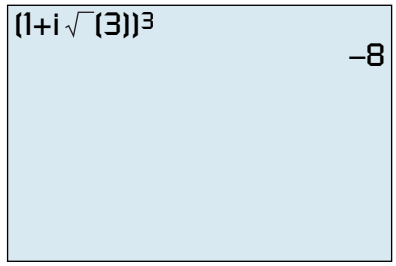
continúa

Respaldo numérico La figura 6.64a configura la calculadora graficadora que utilizamos en modo de números complejos. La figura 6.64b respalda el resultado obtenido de forma algebraica.

Ahora resuelva el ejercicio 31.



a)



b)

FIGURA 6.64 a) Configuración de una calculadora graficadora en el modo de números complejos. b) Cálculo de $(1 + i\sqrt{3})^3$ con una calculadora graficadora.

EJEMPLO 6 Uso del teorema de De Moivre

Determine $[(-\sqrt{2}/2) + i(\sqrt{2}/2)]^8$ mediante el teorema de De Moivre.

SOLUCIÓN El argumento de $z = (-\sqrt{2}/2) + i(\sqrt{2}/2)$ es $\theta = 3\pi/4$ y su módulo es

$$\left|\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Por lo tanto,

$$z = \cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$$

$$z^8 = \cos\left(8 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(8 \cdot \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \cos 6\pi + i \operatorname{sen} 6\pi$$

$$= 1 + i \cdot 0 = 1$$

Ahora resuelva el ejercicio 35.

Raíces de números complejos

El número complejo $1 + i\sqrt{3}$, del ejemplo 5, es una solución de $z^3 = -8$, y el número complejo $(-\sqrt{2}/2) + i(\sqrt{2}/2)$, del ejemplo 6, es una solución de $z^8 = 1$. El número complejo $1 + i\sqrt{3}$ es una raíz tercera de -8 y $(-\sqrt{2}/2) + i(\sqrt{2}/2)$ es una raíz octava de 1.

Raíz *n*-ésima de un número complejo

Un número complejo $v = a + bi$ es una **raíz *n*-ésima de z**, si

$$v^n = z.$$

Si $z = 1$, entonces v es una **raíz *n*-ésima de la unidad**.

Utilizamos el teorema de De Moivre para desarrollar una fórmula general para determinar las raíces n-ésimas de un número complejo distinto de cero. Suponga que $v = s(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ es una raíz n-ésima de $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Entonces

$$v^n = z$$

$$[s(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$s^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \tag{1}$$

Ahora, tomamos el valor absoluto de ambos lados:

$$|s^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)| = |r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)|$$

$$\sqrt{s^{2n}(\cos^2 n\alpha + \operatorname{sen}^2 n\alpha)} = \sqrt{r^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)}$$

$$\sqrt{s^{2n}} = \sqrt{r^2}$$

$$s^n = r \qquad s > 0, r > 0$$

$$s = \sqrt[n]{r}$$

Al sustituir $s^n = r$ en la ecuación (1), obtenemos

$$\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Por lo tanto, $n\alpha$ puede ser cualquier ángulo coterminal con θ. En consecuencia, para cualquier entero k, v es una raíz n-ésima de z si $s = \sqrt[n]{r}$ y

$$n\alpha = \theta + 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{\theta + 2\pi k}{n}.$$

La expresión para v toma n valores diferentes para $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ y los valores se empiezan a repetir para $k = n, n + 1, \ldots$.

Resumimos este resultado

Determinación de las raíces *n*-ésimas de un número complejo

Si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, entonces los n números complejos distintos

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2\pi k}{n}\right),$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ son las n-ésimas raíces del número complejo z.

EJEMPLO 7 Determinación de raíces cuartas

Determine las raíces cuartas de $z = 5(\cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3))$.

SOLUCIÓN Las raíces cuartas de z son los números complejos

$$\sqrt[4]{5}\left(\cos \frac{\pi/3 + 2\pi k}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi/3 + 2\pi k}{4}\right)$$

para $k = 0, 1, 2, 3$.

continúa

Tomando en cuenta que $(\pi/3 + 2\pi k)/4 = \pi/12 + \pi k/2$, la lista es

$$z_1 = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{0}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{0}{2}\right)\right]$$
$$= \sqrt[4]{5}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right]$$
$$z_2 = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \sqrt[4]{5}\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right]$$
$$z_3 = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \sqrt[4]{5}\left[\cos\frac{13\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{13\pi}{12}\right]$$
$$z_4 = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \sqrt[4]{5}\left[\cos\frac{19\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{19\pi}{12}\right]$$

Ahora resuelva el ejercicio 45.

EJEMPLO 8 Determinación de raíces cúbicas

Determine las raíces cúbicas de -1 y grafíquelas.

SOLUCIÓN Primero escribimos el número complejo $z = -1$ en forma trigonométrica

$$z = -1 + 0i = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi.$$

Las raíces terceras de $z = -1 = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi$ son los números complejos

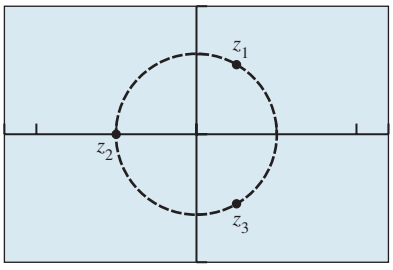
$$\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi + 2\pi k}{3},$$

para $k = 0, 1, 2$. Los tres números complejos son

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$z_2 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi + 2\pi}{3} = -1 + 0i,$$
$$z_3 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

La figura 6.65 muestra la gráfica de las tres raíces cúbicas z_1, z_2 y z_3. Están igualmente espaciadas (con distancia de $2\pi/3$ radianes) alrededor del círculo unitario.

Ahora resuelva el ejercicio 57.



[−2.4, 2.4] por [−1.6, 1.6]

FIGURA 6.65 Las tres raíces cúbicas de z_1, z_2 y z_3 de -1, mostradas en el círculo unitario (en línea discontinua) (ejemplo 8).

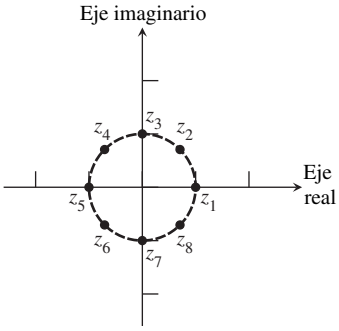


FIGURA 6.66 Las ocho raíces octavas de la unidad están igualmente espaciadas en el círculo unitario (ejemplo 9).

EJEMPLO 9 Determinación de las raíces de la unidad

Determine las raíces octavas de la unidad.

SOLUCIÓN Primero escribimos el número complejo $z = 1$ en forma trigonométrica

$$z = 1 + 0i = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0.$$

Las raíces octavas de $z = 1 + 0i = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$ son los números complejos

$$\cos \frac{0 + 2\pi k}{8} + i \operatorname{sen} \frac{0 + 2\pi k}{8},$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, 7$.

$$z_1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1 + 0i$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_3 = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 0 + i$$

$$z_4 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_5 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + 0i$$

$$z_6 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_7 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 0 - i$$

$$z_8 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

La figura 6.66 muestra los ocho puntos. Están separados uno del otro $2\pi/8 = \pi/4$ radianes.

Ahora resuelva el ejercicio 59.

REPASO RÁPIDO 6.6 *(Para obtener ayuda consulte las secciones R.5, R.6 y 4.3)*

En los ejercicios 1 y 2 escriba las raíces de la ecuación en la forma $a + bi$.

1. $x^2 + 13 = 4x$

2. $5(x^2 + 1) = 6x$

En los ejercicios 3 y 4 escriba el número complejo en la forma estándar $a + bi$.

3. $(1 + i)^5$

4. $(1 - i)^4$

En los ejercicios del 5 al 8 determine un ángulo θ, con $0 \le \theta < 2\pi$, que satisfaga las dos ecuaciones.

5. $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ y $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\operatorname{sen} \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $\operatorname{sen} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

8. $\operatorname{sen} \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

En los ejercicios 9 y 10 determine todas las soluciones reales.

9. $x^3 - 1 = 0$ **10.** $x^4 - 1 = 0$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.6

En los ejercicios 1 y 2 trace los cuatro puntos en el mismo plano complejo.

1. $1 + 2i, 3 - i, -2 + 2i, i$

2. $2 - 3i, 1 + i, 3, -2 - i$

En los ejercicios del 3 al 12 determine la forma trigonométrica del número complejo donde el argumento satisface $0 \leq \theta < 2\pi$.

3. $3i$

4. $-2i$

5. $2 + 2i$

6. $\sqrt{3} + i$

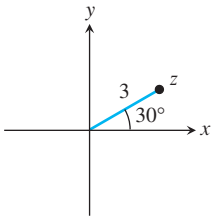
7. $-2 + 2i\sqrt{3}$

8. $3 - 3i$

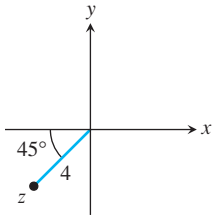
9. $3 + 2i$

10. $4 - 7i$

11.



12.



En los ejercicios del 13 al 18 escriba el número complejo en la forma $a + bi$.

13. $3(\cos 30° - i \operatorname{sen} 30°)$

14. $8(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$

15. $5[\cos(-60°) + i \operatorname{sen}(-60°)]$

16. $5\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

17. $\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}\right)$

18. $\sqrt{7}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}\right)$

En los ejercicios del 19 al 22 determine el producto de z_1 y z_2. Deje la respuesta en forma trigonométrica.

19. $z_1 = 7(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°)$
$z_2 = 2(\cos 130° + i \operatorname{sen} 130°)$

20. $z_1 = \sqrt{2}(\cos 118° + i \operatorname{sen} 118°)$
$z_2 = 0.5[\cos(-19°) + i \operatorname{sen}(-19°)]$

21. $z_1 = 5\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$ $z_2 = 3\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}\right)$

22. $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$ $z_2 = \frac{1}{3}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$

En los ejercicios del 23 al 26 determine la forma trigonométrica del cociente.

23. $\dfrac{2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)}{3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)}$

24. $\dfrac{5(\cos 220° + i \operatorname{sen} 220°)}{2(\cos 115° + i \operatorname{sen} 115°)}$

25. $\dfrac{6(\cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi)}{3(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)}$

26. $\dfrac{\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)}{\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)}$

En los ejercicios del 27 al 30 determine el producto $z_1 \cdot z_2$ y el cociente z_1/z_2 de dos formas: **a)** usando la forma trigonométrica para z_1 y z_2, y **b)** mediante la forma estándar para z_1 y z_2.

27. $z_1 = 3 - 2i$ y $z_2 = 1 + i$

28. $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = \sqrt{3} + i$

29. $z_1 = 3 + i$ y $z_2 = 5 - 3i$

30. $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

En los ejercicios del 31 al 38 utilice el teorema de De Moivre para determinar la potencia indicada del número complejo. Escriba su respuesta en la forma estándar $a + bi$.

31. $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)^3$

32. $\left[3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)\right]^5$

33. $\left[2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)\right]^3$

34. $\left[6\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)\right]^4$

35. $(1 + i)^5$

36. $(3 + 4i)^{20}$

37. $(1 - \sqrt{3}i)^3$

38. $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

En los ejercicios del 39 al 44 determine las raíces cúbicas del número complejo.

39. $2(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)$

40. $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

41. $3\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right)$

42. $27\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6}\right)$

43. $3 - 4i$

44. $-2 + 2i$

En los ejercicios del 45 al 50 determine las raíces quintas del número complejo.

45. $\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$

46. $32\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$

47. $2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$

48. $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

49. $2i$

50. $1 + \sqrt{3}i$

En los ejercicios del 51 al 56 determine las raíces n-ésimas del número complejo, para el valor especificado de n.

51. $1 + i, n = 4$

52. $1 - i, n = 6$

53. $2 + 2i, n = 3$

54. $-2 + 2i, n = 4$

55. $-2i, n = 6$

56. $32, n = 5$

En los ejercicios del 57 al 60 exprese las raíces de la unidad en forma estándar, $a + bi$. Grafique cada raíz en el plano complejo.

57. Raíces cúbicas de la unidad

58. Raíces cuartas de la unidad

59. Raíces sextas de la unidad

60. Raíces cuadradas de la unidad

61. Determine z y las tres raíces cúbicas de z, si una raíz cúbica de z es $1 + \sqrt{3}i$.

62. Determine z y las raíces cuartas de z, si una raíz cuarta de z es $-2 - 2i$.

63. Fórmula del cociente Sea $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$, $r_2 \neq 0$. Verifique que $z_1/z_2 = r_1/r_2\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$.

64. Actividad en equipo Raíces n-ésimas Muestre que las raíces n-ésimas del número complejo $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ están espaciadas $2\pi/n$ radianes en el círculo unitario con radio $\sqrt[n]{r}$.

Preguntas de examen estandarizado

65. Verdadero o falso La forma trigonométrica de un número complejo es única. Justifique su respuesta.

66. Verdadero o falso El número complejo i es una raíz cúbica de $-i$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 67 al 70 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver los problemas.

67. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es una forma trigonométrica del número complejo $-1 + \sqrt{3}i$?

A) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$ **B)** $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$

C) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)$ **D)** $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$

E) $2\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{3}\right)$

68. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes es el número de distintas soluciones complejas de $z^5 = 1 + i$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

69. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la forma estándar para el producto

de $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ y $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$?

A) 2 **B)** -2 **C)** $-2i$ **D)** $-1 + i$ **E)** $1 - i$

70. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes no es una raíz cuarta de 1?

A) i^2 **B)** $-i^2$ **C)** $\sqrt{-1}$ **D)** $-\sqrt{-1}$ **E)** $\sqrt{i}$

Exploraciones

71. Conjugados complejos El conjugado complejo de $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$. Suponga que $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$.

a) Pruebe que $\bar{z} = r[\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)]$.

b) Utilice la forma trigonométrica para determinar $z \cdot \bar{z}$.

c) Utilice la forma trigonométrica para determinar $z/\bar{z}$, si $\bar{z} \neq 0$.

d) Pruebe que $-z = r[\cos(\theta + \pi) + i\,\text{sen}(\theta + \pi)]$.

72. Módulo de números complejos Sea $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$.

a) Pruebe que $|z| = |r|$.

b) Utilice la forma trigonométrica para los números complejos z_1 y z_2 para probar que $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Ampliación de las ideas

73. Uso de la forma polar en una calculadora graficadora El número complejo $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ puede ingresarse en forma polar en algunas calculadoras graficadoras como $re^{i\theta}$.

a) Respalde el resultado del ejemplo 3 ingresando los números complejos z_1 y z_2 en forma polar en su calculadora graficadora para calcular el producto con ella.

b) Respalde el resultado del ejemplo 4 introduciendo los números complejos z_1 y z_2 en forma polar en su calculadora graficadora y calcule con ella el cociente.

c) Respalde el resultado del ejemplo 5 introduciendo el número complejo en forma polar en su calculadora graficadora y calcule con ella la potencia.

74. Visualización de raíces de la unidad Configure su calculadora graficadora en modo paramétrico con $0 \leq T \leq 8$, Tstep $= 1$, Xmin $= -2.4$, Xmax $= 2.4$, Ymin $= -1.6$ y Ymax $= 1.6$.

a) Sean $x = \cos((2\pi/8)t)$ y $y = \text{sen}((2\pi/8)t)$. Utilice el rastreo (*Trace*) para visualizar las ocho raíces octavas de la unidad. Decimos que $2\pi/8$ *genera* las raíces octavas de la unidad. (Pruebe con el modo *dot* (puntos) y con el modo *connected* (conectados)).

b) Reemplace $2\pi/8$, en la parte a con los argumentos de otra de las raíces octavas de la unidad. ¿Cualquier otra *genera* las ocho raíces de la unidad?

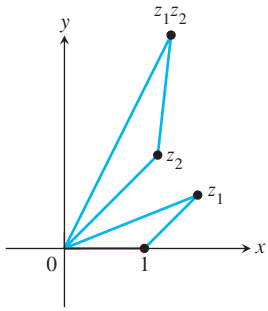
c) Repita las partes a y b para las raíces quintas, sextas y séptimas de la unidad, utilizando funciones apropiadas para x y y.

d) ¿Cuál es su conjetura acerca de una raíz n-ésima de la unidad que genera todas las raíces n-ésimas de la unidad, en el sentido de la parte a?

75. Graficación paramétrica Escriba ecuaciones paramétricas que representen $(\sqrt{2} + i)^n$ para $n = t$. Dibuje y rotule una espiral *precisa* que represente a $(\sqrt{2} + i)^n$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

76. Graficación paramétrica Escriba ecuaciones paramétricas que representen a $(-1 + i)^n$ para $n = t$. Dibuje y rotule una espiral *precisa* que represente a $(-1 + i)^n$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

77. Explique por qué los triángulos formados por 0, 1 y z_1 y por 0, z_2 y z_1z_2, mostrados en la figura, son triángulos semejantes.



78. Construcción con regla y compás Utilizando sólo regla y compás, construya la ubicación de z_1z_2 dadas las ubicaciones de 0, 1, z_1 y z_2.

En los ejercicios del 79 al 84 determine todas las soluciones de la ecuación (reales y complejos).

79. $x^3 - 1 = 0$ **80.** $x^4 - 1 = 0$

81. $x^3 + 1 = 0$ **82.** $x^4 + 1 = 0$

83. $x^5 + 1 = 0$ **84.** $x^5 - 1 = 0$

Ideas Clave DEL CAPÍTULO 6

PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

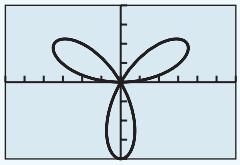
Forma de componentes de un vector 503
Magnitud o longitud de un vector 504
Suma de vectores y multiplicación por escalar 505
Vector unitario en la dirección del vector **v** 506
Producto punto de dos vectores 514
Propiedades del producto punto 514
Teorema del ángulo entre dos vectores 515
Proyección del vector **u** sobre el vector **v** 517
Trabajo 518
Transformación de ecuaciones de coordenadas 535
Criterios de simetría para coordenadas polares 541
El plano complejo 551
Módulo o valor absoluto de un número complejo 551
Forma trigonométrica de un número complejo 551
Teorema de De Moivre 554

PROCEDIMIENTOS

Regla terminal menos inicial (TMI) para vectores 503
Resolución de un vector 507
Producto y cociente de números complejos 551
Raíces n-ésimas de un número complejo 556

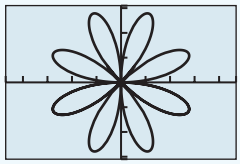
GALERÍA DE FUNCIONES

Curvas en forma de rosas: $r = a \cos n\theta$ y $r = a \operatorname{sen} n\theta$



[−6,6] por [−4, 4]

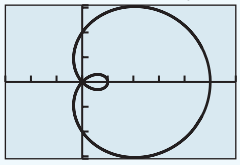
$r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$



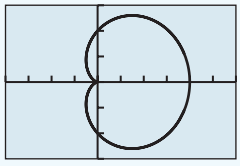
[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

$r = 3 \operatorname{sen} 4\theta$

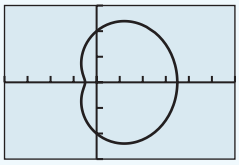
Curvas limaçon: $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$ y $r = a \pm b \cos \theta$ con $a > 0$ y $b > 0$



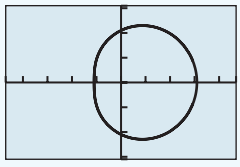
Limaçon con un rizo interno: $\frac{a}{b} < 1$



Cardioide: $\frac{a}{b} = 1$

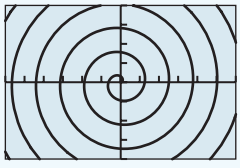


Limaçon con ondulación: $1 < \frac{a}{b} < 2$



Limaçon convexo: $\frac{a}{b} \geq 2$

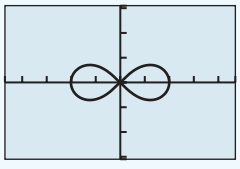
Espiral de Arquímedes:



[−30, 30] por [−20, 20]

$r = \theta$, $0 \leq \theta \leq 45$

Curvas lemniscatas: $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ y $r^2 = a^2 \cos 2\theta$



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

$r^2 = 4 \cos 2\theta$

CAPÍTULO 6 Ejercicios de repaso

La colección de ejercicios marcados en azul podrían utilizarse como un examen del capítulo.

En los ejercicios del 1 al 6 sean $\mathbf{u} = \langle 2, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, -3\rangle$ vectores. Determine las expresiones indicadas.

1. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **2.** $2\mathbf{u} - 3\mathbf{w}$

3. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ **4.** $|\mathbf{w} - 2\mathbf{u}|$

5. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ **6.** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

En los ejercicios del 7 al 10 sean $A = (2, -1)$, $B = (3, 1)$, $C = (-4, 2)$ y $D = (1, -5)$. Determine la forma de componentes y la magnitud del vector.

7. $3\overrightarrow{AB}$ **8.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

9. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ **10.** $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$

En los ejercicios 11 y 12 determine **a)** un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$ y **b)** un vector de magnitud 3 en la dirección opuesta.

11. $A = (4, 0)$, $B = (2, 1)$

12. $A = (3, 1)$, $B = (5, 1)$

En los ejercicios 13 y 14 determine **a)** los ángulos de dirección de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y **b)** el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

13. $\mathbf{u} = \langle 4, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 5\rangle$ **14.** $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 6, 4\rangle$

En los ejercicios del 15 al 18 convierta las coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

15. $(-2.5, 25°)$ **16.** $(-3.1, 135°)$

17. $(2, -\pi/4)$ **18.** $(3.6, 3\pi/4)$

En los ejercicios 19 y 20 se proporcionan las coordenadas polares del punto P. Determine todas sus coordenadas polares.

19. $P = (-1, -2\pi/3)$ **20.** $P = (-2, 5\pi/6)$

En los ejercicios del 21 al 24 se dan las coordenadas rectangulares del punto P. Determine las coordenadas polares de P que satisfacen estas condiciones:

a) $0 \le \theta \le 2\pi$ **b)** $-\pi \le \theta \le \pi$ **c)** $0 \le \theta \le 4\pi$

21. $P = (2, -3)$ **22.** $P = (-10, 0)$

23. $P = (5, 0)$ **24.** $P = (0, -2)$

En los ejercicios del 25 al 30 elimine el parámetro t e identifique la gráfica.

25. $x = 3 - 5t$, $y = 4 + 3t$

26. $x = 4 + t$, $y = -8 - 5t$, $-3 \le t \le 5$

27. $x = 2t^2 + 3$, $y = t - 1$ **28.** $x = 3\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$

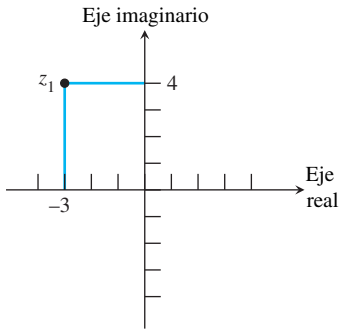
29. $x = e^{2t} - 1$, $y = e^t$ **30.** $x = t^3$, $y = \ln t$, $t > 0$

En los ejercicios 31 y 32 determine una parametrización para la curva.

31. La recta que pasa por los puntos $(-1, -2)$ y $(3, 4)$.

32. El segmento de recta con extremos $(-2, 3)$ y $(5, 1)$.

Los ejercicios 33 y 34 se refieren al número complejo z_1 mostrado en la figura.



33. Si $z_1 = a + bi$, determine a, b y $|z_1|$.

34. Determine la forma trigonométrica de z_1.

En los ejercicios del 35 al 38 escriba el número complejo en forma estándar.

35. $6(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ **36.** $3(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

37. $2.5\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right)$ **38.** $4(\cos 2.5 + i \operatorname{sen} 2.5)$

En los ejercicios del 39 al 42 escriba el número complejo en forma trigonométrica, donde $0 \le \theta \le 2\pi$. Luego escriba otras tres posibles formas trigonométricas para el número.

39. $3 - 3i$ **40.** $-1 + i\sqrt{2}$

41. $3 - 5i$ **42.** $-2 - 2i$

En los ejercicios 43 y 44 escriba los números complejos $z_1 \cdot z_2$ y z_1/z_2 en forma trigonométrica.

43. $z_1 = 3(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ y $z_2 = 4(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

44. $z_1 = 5(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$ y $z_2 = -2(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

En los ejercicios del 45 al 48 utilice el teorema de De Moivre para determinar la potencia indicada del número complejo. Escriba su respuesta en **a)** forma trigonométrica y **b)** forma estándar.

45. $\left[3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^5$ **46.** $\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}\right)\right]^8$

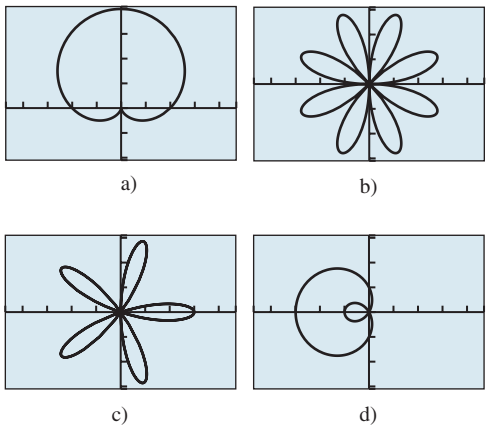
47. $\left[5\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{3}\right)\right]^3$ **48.** $\left[7\left(\cos\dfrac{\pi}{24} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{24}\right)\right]^6$

En los ejercicios del 49 al 52 determine y grafique las raíces n-ésimas del número complejo para el valor especificado de n.

49. $3 + 3i$, $n = 4$ **50.** 8, $n = 3$

51. 1, $n = 5$ **52.** -1, $n = 6$

En los ejercicios del 53 al 60 decida si la gráfica de la ecuación polar aparece entre las cuatro gráficas que se muestran.



a) b) c) d)

53. $r = 3 \operatorname{sen} 4\theta$

54. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$

55. $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$

56. $r = 3|\operatorname{sen} 3\theta|$

57. $r = 2 - 2 \operatorname{sen} \theta$

58. $r = 1 - 2 \cos \theta$

59. $r = 3 \cos 5\theta$

60. $r = 3 - 2 \tan \theta$

En los ejercicios del 61 al 64 convierta la ecuación polar a forma rectangular e identifique la gráfica.

61. $r = -2$

62. $r = -2 \operatorname{sen} \theta$

63. $r = -3 \cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta$

64. $r = 3 \sec \theta$

En los ejercicios del 65 al 68 convierta la ecuación rectangular a forma polar. Grafique la ecuación polar.

65. $y = -4$

66. $x = 5$

67. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$

68. $2x - 3y = 4$

En los ejercicios del 69 al 72 analice la gráfica de la curva polar.

69. $r = 2 - 5 \operatorname{sen} \theta$

70. $r = 4 - 4 \cos \theta$

71. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$

72. $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$

73. Graficación de rectas usando ecuaciones polares

a) Explique por qué $r = a \sec \theta$ es una forma polar para la recta $x = a$.

b) Explique por qué $r = b \csc \theta$ es la ecuación polar para la recta $y = b$.

c) Sea $y = mx + b$. Pruebe que

$$r = \frac{b}{\operatorname{sen} \theta - m \cos \theta}$$

es una forma polar para la recta. ¿Cuál es el dominio de r?

d) Ilustre el resultado de la parte c graficando la recta $y = 2x + 3$, usando la forma polar de la parte c.

74. Ingeniería de vuelo Un aeroplano vuela con rumbo de 80° a 540 mph. Sopla un viento en dirección 100° a 55 mph.

a) Determine la forma de componentes de la velocidad del aeroplano.

b) Determine la rapidez y dirección reales del aeroplano.

75. Ingeniería de vuelo Un aeroplano vuela con rumbo de 285° a 480 mph. Sopla un viento en la dirección 265° a 30 mph.

a) Determine la forma de componentes de la velocidad del aeroplano.

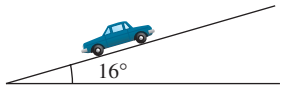
b) Determine la rapidez y dirección reales del aeroplano.

76. Fuerzas combinadas Una fuerza de 120 libras actúa sobre un objeto en un ángulo de 20°. Una segunda fuerza de 300 libras actúa sobre el objeto en un ángulo de −5°. Determine la dirección y magnitud de la fuerza resultante.

77. Fuerza de frenado Un automóvil de 3,000 libras está estacionado en una calle que forma un ángulo de 16° con la horizontal (consulte la figura).

a) Determine la fuerza requerida para mantener el automóvil sin rodar hacia abajo.

b) Determine la componente de la fuerza perpendicular a la calle.



78. Trabajo Determine el trabajo realizado por una fuerza **F** de 36 libras que actúa en la dirección dada por el vector $\langle 3, 5 \rangle$ para mover un objeto 10 pies desde (0, 0) a (10, 0).

79. Altura de una flecha Stewart dispara una flecha hacia arriba desde la parte más alta de un edificio con una velocidad inicial de 245 pies/s. La flecha sale desde un punto a 200 pies por encima del suelo.

a) Escriba una ecuación que modele la altura de la flecha como una función del tiempo t.

b) Utilice ecuaciones paramétricas para simular la altura de la flecha.

c) Utilice ecuaciones paramétricas para graficar la altura contra el tiempo.

d) ¿A qué altura está la flecha después de 4 segundos?

e) ¿Cuál es la altura máxima de la flecha? ¿Cuándo alcanza la altura máxima?

f) ¿En cuánto tiempo la flecha choca con el suelo?

80. Problema de la rueda de la fortuna Lucinda está en una rueda de la fortuna con radio de 35 pies y que gira a razón de una vuelta cada 20 segundos. El punto más bajo de la rueda (las 6 en punto) está 15 pies por arriba del nivel del suelo, en el punto (0, 15) de un sistema de coordenadas rectangulares. Determine ecuaciones paramétricas para la posición de Lucinda como una función del tiempo t, en segundos, si Lucinda inicia ($t = 0$) en el punto (35, 50).

81. Problema de la rueda de la fortuna El punto más bajo de una rueda de la fortuna (las 6 en punto) de radio 40 pies está 10 pies por arriba del nivel del suelo, y el centro está en el eje y. Determine ecuaciones paramétricas para la posición de Henry como una función del tiempo t, en segundos, si su posición inicial ($t = 0$) es el punto (0, 10) y la rueda gira a razón de una revolución cada 15 segundos.

82. Problema de la rueda de la fortuna Sarah pasea en la rueda de la fortuna descrita en el ejercicio 81. Determine ecuaciones paramétricas para la posición de Sarah como una función del tiempo t, en segundos, si su posición inicial ($t = 0$) es el punto (0, 90) y la rueda da una vuelta cada 18 segundos.

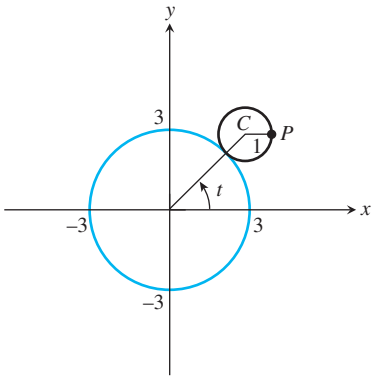
83. Epicicloide La gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 4\cos t - \cos 4t,\ y = 4\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 4t$$

es una *epicicloide*. La gráfica es la trayectoria de un punto P en una circunferencia de radio 1 que rueda a lo largo del la parte exterior de una circunferencia de radio 3, como se sugiere en la figura.

a) Grafique de forma simultánea esta epicicloide y la circunferencia de radio 3.

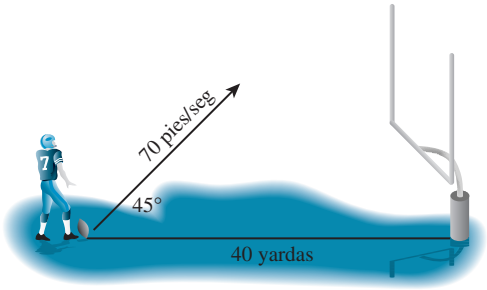
b) Suponga que la circunferencia grande tiene radio de 4. ¡Experimente! ¿Cómo cree que deben cambiarse las ecuaciones de la parte a para obtener las ecuaciones que definen a la curva? En este caso, ¿cómo cree que debe verse la epicicloide? Compruebe sus conjeturas.



84. Lanzamiento de una bola de béisbol Sharon suelta una bola de béisbol 4 pies por encima del suelo, con una velocidad inicial de 66 pies/s en un ángulo de 5° con la horizontal. ¿Cuántos segundos después de que la bola sea lanzada chocará con el piso? ¿Qué tan lejos de Sharon estará la bola cuando ésta choque con el suelo?

85. Lanzamiento de una bola de béisbol Diego suelta una bola de béisbol 3.5 pies por arriba del suelo, con una velocidad inicial de 66 pies/s en un ángulo de 12° con la horizontal. ¿Cuántos segundos después de que la bola sea lanzada chocará con el piso? ¿Qué tan lejos de Diego estará la bola cuando ésta choque con el suelo?

86. Patada de gol de campo Spencer practica patadas de gol de campo a 40 yardas del poste de gol que tiene una barra transversal a 10 pies de altura. Si patea el balón con una velocidad inicial de 70 pies/s en un ángulo de 45° con la horizontal (consulte la figura), ¿acertará el gol de campo?



87. Tiempo en el aire Un pateador de despeje de la NFL (Liga Nacional de Fútbol Americano) patea un balón hacia adelante con una velocidad inicial de 85 pies/s. El balón sale de su pie en la yarda 15 en un ángulo de 56° con la horizontal. Determine lo siguiente:

a) La altura máxima del balón por arriba del nivel del suelo.

b) El tiempo total que el balón permanece en el aire.

88. Bateo de una bola de béisbol Brian batea una pelota de béisbol directamente hacia una barda de 15 pies de altura que está a 400 pies del *home*. La pelota es bateada cuando está a 2.5 pies del suelo y sale del bat en un ángulo de 30° con la horizontal. Determine la velocidad inicial necesaria para que la pelota libre la barda.

89. Lanzamiento de una pelota en una rueda de la fortuna Una rueda de la fortuna de 60 pies de radio gira en contra de las manecillas del reloj y da una vuelta en 12 segundos. Sam está en un punto a 80 pies a la izquierda de la parte inferior (las 6 en punto) de la rueda. En el instante en que Kathy está a las 3 en punto, Sam lanza una pelota con una velocidad inicial de 100 pies/s y un ángulo, con la horizontal, de 70°. Él suelta la pelota a la misma altura que la parte inferior de la rueda de la fortuna. Determine la distancia mínima entre la pelota y Kathy.

90. Tiro con dardos Gretta y Loi están lanzando dardos a 20 pies de un blanco circular de radio 18 pulg. Si Gretta suelta el dardo 5 pies por arriba del nivel del suelo con una velocidad inicial de 20 pies/s y en un ángulo de 50° con la horizontal, ¿el dardo pegará en el blanco?

CAPÍTULO 6 Proyecto

Parametrización de elipses

Como lo descubrió en el proyecto del capítulo 4, es posible modelar el desplazamiento de un péndulo que oscila mediante una ecuación sinusoidal de la forma

$$x = a \text{ sen } (b(t - c)) + d$$

donde x representa la distancia del péndulo a un punto fijo y t representa el tiempo total transcurrido. De hecho, la velocidad del péndulo también se comporta de forma sinusoidal: $y = ab \cos (b(t - c))$, donde y representa la velocidad del péndulo y a, b y c son constantes comunes para las ecuaciones del desplazamiento y la velocidad.

Utilice un dispositivo de detección de movimiento para recopilar distancia, velocidad y tiempo para un péndulo; luego determine cómo una gráfica de velocidad contra desplazamiento (denominada gráfica de fase-espacio) puede modelarse mediante ecuaciones paramétricas.

Recolección de datos

Construya un péndulo simple fijando una bola en el extremo de una cuerda de un metro de longitud. Reúna las lecturas de tiempo, distancia y velocidad entre 2 y 4 segundos (tiempo suficiente para capturar una oscilación completa del péndulo). Inicie la oscilación del péndulo frente al detector y active el sistema. La tabla siguiente muestra un conjunto de datos muestra reunidos conforme el péndulo oscilaba hacia adelante y hacia atrás frente a un CBR, donde t es el tiempo total transcurrido en segundos, d = distancia del CBR en metros, v = velocidad en metros/segundo.

t	d	v	t	d	v	t	d	v
0	1.021	0.325	0.7	0.621	–0.869	1.4	0.687	0.966
0.1	1.038	0.013	0.8	0.544	–0.654	1.5	0.785	1.013
0.2	1.023	–0.309	0.9	0.493	–0.359	1.6	0.880	0.826
0.3	0.977	–0.598	1.0	0.473	–0.044	1.7	0.954	0.678
0.4	0.903	–0.819	1.1	0.484	0.263	1.8	1.008	0.378
0.5	0.815	–0.996	1.2	0.526	0.573	1.9	1.030	0.049
0.6	0.715	–0.979	1.3	0.596	0.822	2.0	1.020	–0.260

Exploraciones

1. Cree un diagrama de dispersión para los datos que reunió o los datos dados.
2. Con su calculadora/computadora en modo de función, determine valores para a, b, c y d de modo que la ecuación $y = a \text{ sen } (b(x - c)) + d$ (donde y es distancia y x es tiempo) se ajuste la distancia contra el tiempo de los datos graficados.
3. Haga un diagrama de dispersión de la velocidad contra el tiempo. Usando los mismos valores a, b y c que encontró en la parte 2, verifique que la ecuación $y = ab \cos (b(x - c))$ (donde y es la velocidad y x es tiempo) se ajusta a la velocidad contra el tiempo de los datos.
4. ¿Cómo piensa que debería verse una gráfica de la velocidad contra la distancia (con velocidad en el eje vertical y distancia en el eje horizontal)? Haga un bosquejo de su predicción y luego cree un diagrama de dispersión de la velocidad contra la distancia. ¿Qué tanto se asemeja la gráfica que predijo a la de los datos reales?
5. Con su calculadora/computadora en modo paramétrico, grafique la curva paramétrica $x = a \text{ sen } (b(t - c)) + d$, $y = ab \cos (b(t - c))$, $0 \le t \le 2$, donde x representa distancia, y representa velocidad y t es el parámetro del tiempo. ¿Qué tanto se asemeja esta curva al diagrama de dispersión de la velocidad contra el tiempo?

CAPÍTULO 7

Sistemas y matrices

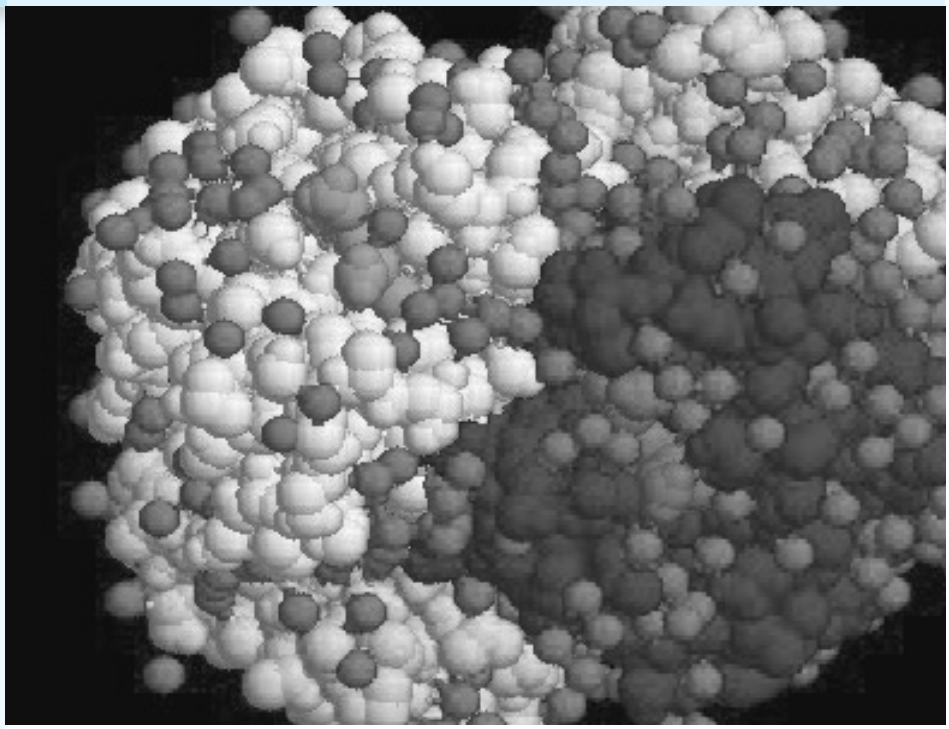
7.1 Resolución de sistemas de dos ecuaciones

7.2 Álgebra de matrices

7.3 Sistemas lineales de varias variables y operaciones por renglones

7.4 Fracciones parciales

7.5 Sistemas de desigualdades con dos variables



Los científicos que estudian las moléculas de hemoglobina, como la que se representa en la fotografía, pueden hacer nuevos descubrimientos visualizando la imagen en una computadora. Para ver todos los detalles, pueden necesitar mover la imagen hacia arriba o hacia abajo (traslación), voltearla (rotación) o cambiar su tamaño (escalamiento). En las gráficas por computadora estas operaciones se realizan mediante operaciones con matrices. En la página 589 consulte un problema relacionado que incluye el escalamiento de un triángulo.

Panorama general del capítulo 7

Muchas aplicaciones de matemáticas en ciencia, ingeniería, administración y otras áreas incluyen el uso de sistemas de ecuaciones o desigualdades con dos o más variables como modelos para los problemas correspondientes. Investigaremos varias técnicas que se utilizan comúnmente para resolver tales sistemas y estudiaremos las matrices que desempeñan un papel central en varias de ellas. La era de la informática ha producido un aumento en el uso de matrices, debido a su utilidad para manipular grandes cantidades de datos.

Descompondremos una fracción racional en una suma de funciones racionales más sencillas mediante el método de fracciones parciales. Esta técnica puede utilizarse para analizar una función racional y se usa en cálculo para integrar analíticamente funciones racionales. Por último, presentaremos la programación lineal, un método empleado para resolver problemas que tienen que ver con la toma de decisiones en ciencias de la administración.

7.1 Resolución de sistemas de dos ecuaciones

Aprenderá acerca de...

- El método de sustitución
- La resolución gráfica de sistemas
- El método de eliminación
- Las aplicaciones

. . . porque

Muchas aplicaciones en negocios y ciencias pueden modelarse mediante sistemas de ecuaciones.

El método de sustitución

A continuación se da un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, x y y:

$$2x - y = 10$$
$$3x + 2y = 1.$$

Una **solución de un sistema** de dos ecuaciones con dos variables es un par ordenado de números reales que constituye la solución para cualquiera de las ecuaciones. Por ejemplo, el par ordenado $(3, -4)$ es una solución del sistema anterior. Podemos verificar esto mostrando que $(3, -4)$ constituye el resultado correcto de cada una de las dos ecuaciones. Al sustituir $x = 3$ y $y = -4$ en cada ecuación, obtenemos

$$2x - y = 2(3) - (-4) = 6 + 4 = 10,$$
$$3x + 2y = 3(3) + 2(-4) = 9 - 8 = 1.$$

Por lo que se satisfacen ambas ecuaciones.

Hemos **resuelto el sistema de ecuaciones** cuando hemos determinado todas sus soluciones. En el ejemplo 1 utilizamos el método de sustitución para ver que $(3, -4)$ es la única solución del sistema.

EJEMPLO 1 Uso del método de sustitución

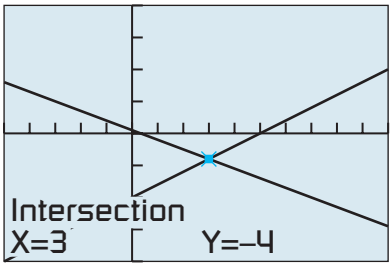
Resuelva el sistema

$$2x - y = 10$$
$$3x + 2y = 1.$$

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente Al despejar y en la primera ecuación se obtiene $y = 2x - 10$. Entonces se sustituye la expresión para y en la segunda ecuación.

continúa



[−5, 10] por [−20, 20]

FIGURA 7.1 Las dos rectas $y = 2x - 10$ y $y = -1.5x + 0.5$ se intersecan en el punto $(3, -4)$ (ejemplo 1).

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 && \text{Segunda ecuación.} \\ 3x + 2(2x - 10) &= 1 && \text{Reemplazar } y \text{ por } 2x - 10. \\ 3x + 4x - 20 &= 1 && \text{Propiedad distributiva.} \\ 7x &= 21 && \text{Reducir términos semejantes.} \\ x &= 3 && \text{Dividir entre 7.} \\ y &= -4 && \text{Utilizar } y = 2x - 10. \end{aligned}$$

Respalde gráficamente

La gráfica de cada ecuación es una recta. La figura 7.1 muestra que las dos rectas se intersecan sólo en el punto $(3, -4)$.

Interprete

La solución del sistema es $x = 3$, $y = -4$, o el par ordenado $(3, -4)$.

Ahora resuelva el ejercicio 5.

En ocasiones, el método de sustitución puede aplicarse cuando las ecuaciones del sistema no son lineales, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Resolución de un sistema no lineal mediante sustitución

Determine las dimensiones de un jardín rectangular que tiene perímetro de 100 pies y área de 300 pies^2.

SOLUCIÓN

Modele

Sean x y y las longitudes de los lados adyacentes del jardín (figura 7.2). Entonces

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 100 && \text{El perímetro es 100.} \\ xy &= 300. && \text{El área es 300.} \end{aligned}$$

Resuelva algebraicamente

Al despejar y en la primera ecuación se obtiene $y = 50 - x$. Luego se sustituye la expresión para y en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} xy &= 300 && \text{Segunda ecuación.} \\ x(50 - x) &= 300 && \text{Reemplazar } y \text{ por } 50 - x. \\ 50x - x^2 &= 300 && \text{Propiedad distributiva.} \\ x^2 - 50x + 300 &= 0 \\ x &= \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(300)}}{2} && \text{Fórmula cuadrática.} \end{aligned}$$

$$x = 6.972 \ldots \quad \text{o} \quad x = 43.027 \ldots \qquad \text{Evaluar.}$$

$$y = 43.027 \ldots \quad \text{o} \quad y = 6.972 \ldots \qquad \text{Utilizar } y = 50 - x.$$

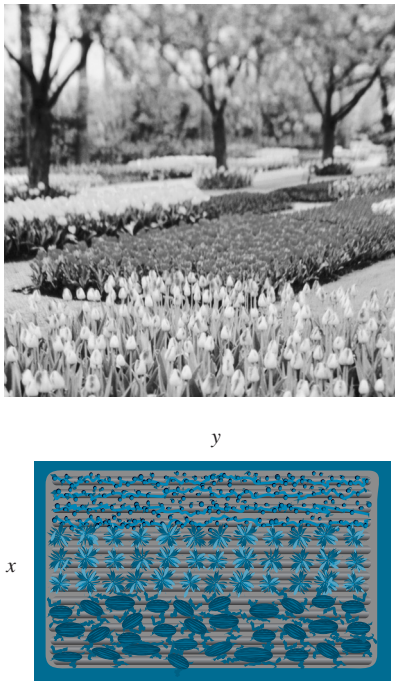
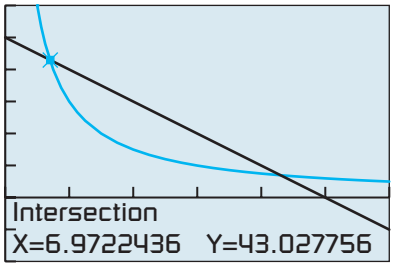


FIGURA 7.2 El jardín rectangular del ejemplo 2.

continúa

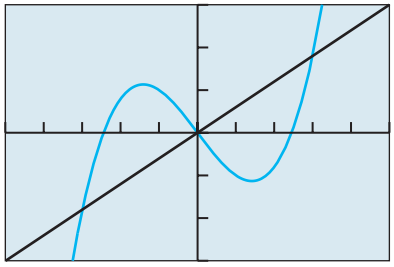


[0, 60] por [−20, 60]

FIGURA 7.3 Podemos suponer que $x \geq 0$ y $y \geq 0$, ya que x y y son longitudes (ejemplo 2).

REDONDEO AL FINAL

En el ejemplo 2 no redondeamos los valores encontrados para x hasta que calculamos los valores para y. En busca de precisión, no redondeamos los resultados intermedios. Utilice todos los decimales en los cálculos de su calculadora y luego redondee las respuestas finales.



[−5, 5] por [−15, 15]

FIGURA 7.4 Las gráficas de $y = x^3 - 6x$ y $y = 3x$ tienen tres puntos de intersección (ejemplo 3).

Respaldar gráficamente La figura 7.3 muestra que las gráficas de $y = 50 - x$ y $y = 300/x$ tienen dos puntos de intersección.

Interprete Los dos pares ordenados (6.972..., 43.027...) y (43.027..., 6.972...) producen el mismo rectángulo cuyas dimensiones son aproximadamente de 7 por 43 pies.

Ahora resuelva el ejercicio 11.

EJEMPLO 3 Resolución algebraica de un sistema no lineal

Resuelva el sistema

$$y = x^3 - 6x$$
$$y = 3x.$$

Respalde gráficamente su solución.

SOLUCIÓN

Al sustituir el valor de y de la primera ecuación en la segunda ecuación da

$$x^3 - 6x = 3x$$
$$x^3 - 9x = 0$$
$$x(x - 3)(x + 3) = 0$$
$$x = 0, x = 3, x = -3 \quad \text{Propiedad del factor cero.}$$
$$y = 0, y = 9, y = -9 \quad \text{Utilice } y = 3x.$$

El sistema de ecuaciones tiene tres soluciones: $(-3, -9)$, $(0, 0)$ y $(3, 9)$.

Respaldar gráficamente Las gráficas de las dos ecuaciones de la figura 7.4 sugieren que las tres soluciones encontradas en forma algebraica son correctas.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Resolución gráfica de sistemas

En ocasiones, el método de sustitución conduce a una ecuación en una variable que no podemos resolver mediante las técnicas algebraicas estándar estudiadas en este texto. En estos casos podemos resolver gráficamente el sistema por medio de la determinación de las intersecciones, como se ilustra en la exploración 1.

EXPLORACIÓN 1 Resolución gráfica de un sistema

Considere el sistema:

$$y = \ln x$$
$$y = x^2 - 4x + 2.$$

1. Dibuje las gráficas de las dos ecuaciones en la ventana de visualización [0, 10] por [−5, 5].
2. Utilice la gráfica de la parte 1 para determinar las coordenadas de los puntos de intersección que se muestran en la ventana de visualización.
3. Utilice su conocimiento acerca de las gráficas de funciones logarítmicas y cuadráticas para explicar por qué este sistema tiene exactamente dos soluciones.

Al sustituir, en la segunda ecuación, la expresión para y de la primera ecuación de la exploración 1, se obtiene

$$\ln x = x^2 - 4x + 2.$$

No tenemos una técnica algebraica estándar para resolver esta ecuación.

El método de eliminación

Considere el sistema de dos ecuaciones lineales en x y y. Para **resolver por eliminación**, reescribimos las dos ecuaciones como dos ecuaciones equivalentes, de modo que una de las variables tenga coeficientes opuestos. Luego sumamos las dos ecuaciones para eliminar esa variable.

EJEMPLO 4 Uso del método de eliminación

Resuelva el sistema

$$2x + 3y = 5$$
$$-3x + 5y = 21.$$

SOLUCIÓN

Resuelva algebraicamente Multiplique la primera ecuación por 3 y la segunda por 2, para obtener

$$6x + 9y = 15$$
$$-6x + 10y = 42.$$

Luego sume las dos ecuaciones para eliminar la variable x.

$$19y = 57.$$

Ahora, divida entre 19 para despejar a y:

$$y = 3.$$

Por último, sustituya $y = 3$ en cualquiera de las dos ecuaciones originales para determinar que $x = -2$. La solución del sistema original es $(-2, 3)$.

Ahora resuelva el ejercicio 19.

EJEMPLO 5 Determinación de que no hay solución

Resuelva el sistema

$$x - 3y = -2$$
$$2x - 6y = 4.$$

SOLUCIÓN Utilizamos el método de eliminación.

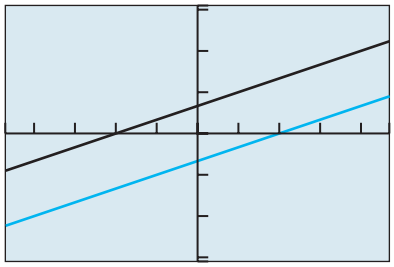
Resuelva algebraicamente

$$-2x + 6y = 4 \quad \text{Multiplicar la primera ecuación por } -2.$$
$$2x - 6y = 4 \quad \text{Segunda ecuación.}$$
$$0 = 8 \quad \text{Sumar.}$$

La última ecuación se cumple para *ningún valor* de x y y. El sistema no tiene solución.*

* En matemáticas, se dice que la solución es el conjunto vacío (N. del T.).

continúa



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

FIGURA 7.5 La gráfica de las dos rectas del ejemplo 5 parecen paralelas en esta ventana cuadrada de visualización.

Respalde gráficamente

La figura 7.5 sugiere que las dos rectas, que son las gráficas de las dos ecuaciones del sistema, son paralelas. Al despejar y en cada ecuación del sistema, se obtiene

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Las dos rectas tienen la misma pendiente de 1/3 y, por lo tanto, son paralelas.

Ahora resuelva el ejercicio 23.

Una forma fácil de determinar el *número de soluciones* de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, es observar las gráficas de las dos rectas. Hay tres posibilidades; a) Las dos rectas pueden intersecarse en un solo punto, produciendo exactamente *una* solución, como en los ejemplos 1 y 4; b) las dos rectas pueden ser paralelas, produciendo *cero* soluciones, como en el ejemplo 5, y c) las dos rectas pueden ser la misma, produciendo un número infinito de soluciones, como se ilustra en el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Determinación de que hay un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$4x - 5y = 2$$

$$-12x + 15y = -6.$$

SOLUCIÓN

$$12x - 15y = 6 \qquad \text{Multiplicar la primera ecuación por 3.}$$

$$-12x + 15y = -6 \qquad \text{Segunda ecuación.}$$

$$0 = 0 \qquad \text{Sumar.}$$

La última ecuación es verdadera para todos los valores de x y y. Así, todo par ordenado que satisfaga una ecuación satisface la otra. El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Otra manera de ver que existe un número infinito de soluciones es despejar y en cada ecuación. Ambas ecuaciones producen

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}.$$

Las dos rectas son la misma.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

Aplicaciones

La tabla 7.1 muestra los gastos personales (en miles de millones de dólares) en dentistas y seguro de salud, durante varios años en Estados Unidos.

Tabla 7.1 Gastos personales en Estados Unidos

Año	Dentista (miles de millones de dólares)	Seguro médico (miles de millones de dólares)
1995	45.4	60.7
1998	54.1	71.6
1999	57.4	76.1
2000	61.8	84.0
2001	66.8	89.4
2002	72.2	96.1
2003	75.0	106.0

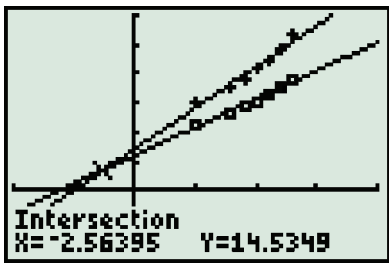
Fuente: Oficina de Análisis Económico, Departamento de Comercio de Estados Unidos, de acuerdo con The World Almanac and Book of Facts 2005.

EJEMPLO 7 Estimación de gastos personales con modelos lineales

a) Con base en la tabla 7.1 determine ecuaciones de regresión lineal para los gastos personales en Estados Unidos en dentista y seguro médico. Superponga sus gráficas a un diagrama de dispersión de los datos.

b) Utilice los modelos de la parte a) para estimar cuándo el gasto personal en dentista, en Estados Unidos, será el mismo que el gasto en seguro médico y el monto correspondiente.





[−10, 20] por [−40, 120]

FIGURA 7.6 El diagrama de dispersión y las ecuaciones de regresión para los datos en la tabla 7.1. Dentista (□), seguro de salud (+) (ejemplo 7).

SOLUCIÓN

a) Haga $x = 0$ para 1990, $x = 1$ para 1991 y así sucesivamente. Utilizamos una calculadora graficadora para determinar las ecuaciones de regresión lineal para el monto de gasto en dentista, y_D, y el monto en gasto para seguro médico, y_{SM}:

$$y_D \approx 3.8507x + 24.4079$$

$$y_{SM} \approx 5.6099x + 28.9184.$$

La figura 7.6 muestra las dos ecuaciones de regresión junto con un diagrama de dispersión de los dos conjuntos de datos.

b) La figura 7.6 muestra que las gráficas de y_D y y_{SM} se intersecan, aproximadamente, en $(-2.56, 14.53)$, $x = -3$ indica 1987, por lo que la figura 7.6 sugiere que los gastos personales para dentista y para seguro médico, fueron en total de alrededor de 14.5 miles de millones de dólares en algún momento durante 1987.

Ahora resuelva el ejercicio 45.

Generalmente, los proveedores aumentan su producción, x, si pueden obtener precios más altos, p, por sus productos. Así que, cuando una variable aumenta, la otra también lo hace. La práctica normal en matemáticas sería utilizar a p como la variable independiente y a x como la variable dependiente. Sin embargo, la mayoría de los economistas colocan a x en el eje horizontal y a p en el eje vertical. Para conservar esta práctica, escribimos $p = f(x)$ para generar una **curva de oferta**. Por una parte, cuando el precio aumenta (eje vertical) hace que los proveedores estén dispuestos a aumentar la producción x (eje horizontal).

Por otra parte, la demanda, x, por un producto de parte de los consumidores disminuirá cuando el precio, p, aumente. Así, cuando una variable aumenta, la otra disminuye. Nuevamente, los economistas colocan a x (demanda) en el eje horizontal y al precio (p) en el eje vertical, aunque parezca como si p fuese la variable dependiente. Para continuar con esta práctica, escribimos $p = g(x)$ para generar una **curva de demanda**.

Por último, un punto donde la curva de la oferta y la curva de la demanda se intersecan es un **punto de equilibrio**. El precio correspondiente es el **precio de equilibrio**.

EJEMPLO 8 Determinación del punto de equilibrio

Nibok Manufacturing ha determinado que la producción y el precio de un nuevo zapato para tenis deben ajustarse al punto de equilibrio para este sistema de ecuaciones.

$$p = 160 - 5x \quad \text{Curva de demanda.}$$

$$p = 35 + 20x \quad \text{Curva de oferta.}$$

El precio, p, está en dólares y el número de zapatos, x, está en millones de pares. Determine el punto de equilibrio.

SOLUCIÓN

Resolvemos el sistema mediante sustitución.

$$160 - 5x = 35 + 20x$$

$$25x = 125$$

$$x = 5.$$

Al sustituir este valor de x en la curva de demanda y despejando p.

$$p = 160 - 5x$$

$$p = 160 - 5(5) = 135.$$

El punto de equilibrio es (5, 135); el precio de equilibrio es \$135, el precio para el cual la oferta y la demanda serán iguales a 5 millones de pares de zapatos para tenis.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

REPASO RÁPIDO 7.1 *(Para obtener ayuda consulte las secciones R.4 y R.5)*

En los ejercicios 1 y 2 despeje y en términos de x.

1. $2x + 3y = 5$ **2.** $xy + x = 4$

En los ejercicios del 3 al 6 resuelva algebraicamente la ecuación.

3. $3x^2 - x - 2 = 0$ **4.** $2x^2 + 5x - 10 = 0$

5. $x^3 = 4x$ **6.** $x^3 + x^2 = 6x$

7. Escriba una ecuación para la recta que pasa por el punto $(-1, 2)$ y es paralela a la recta $4x + 5y = 2$.

8. Escriba una ecuación para la recta que pasa por el punto $(-1, 2)$ y es perpendicular a la recta $4x + 5y = 2$.

9. Escriba una ecuación equivalente a $2x + 3y = 5$ con coeficiente de x igual a -4.

10. Determine, de forma gráfica, los puntos de intersección de las gráficas de $y = 3x$ y $y = x^3 - 6x$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7.1

En los ejercicios 1 y 2 determine si el par ordenado es una solución del sistema.

1.
$5x - 2y = 8$
$2x - 3y = 1$

a) $(0, 4)$ **b)** $(2, 1)$

c) $(-2, -9)$

2.
$y = x^2 - 6x + 5$
$y = 2x - 7$

a) $(2, -3)$ **b)** $(1, -5)$

c) $(6, 5)$

En los ejercicios del 3 al 12 resuelva el sistema mediante sustitución.

3.
$x + 2y = 5$
$y = -2$

4.
$x = 3$
$x - y = 20$

5.
$3x + y = 20$
$x - 2y = 10$

6.
$2x - 3y = -23$
$x + y = 0$

7.
$2x - 3y = -7$
$4x + 5y = 8$

8.
$3x + 2y = -5$
$2x - 5y = -16$

9.
$x - 3y = 6$
$-2x + 6y = 4$

10.
$3x - y = -2$
$-9x + 3y = 6$

11.
$y = x^2$
$y - 9 = 0$

12.
$x = y + 3$
$x - y^2 = 3y$

En los ejercicios del 13 al 18 resuelva algebraicamente el sistema. Respalde su respuesta por medio de una gráfica.

13.
$y = 6x^2$
$7x + y = 3$

14.
$y = 2x^2 + x$
$2x + y = 20$

15.
$y = x^3 - x^2$
$y = 2x^2$

16.
$y = x^3 + x^2$
$y = -x^2$

17.
$x^2 + y^2 = 9$
$x - 3y = -1$

18.
$x^2 + y^2 = 16$
$4x + 7y = 13$

En los ejercicios del 19 al 26 resuelva el sistema mediante eliminación.

19.
$x - y = 10$
$x + y = 6$

20.
$2x + y = 10$
$x - 2y = -5$

21.
$3x - 2y = 8$
$5x + 4y = 28$

22.
$4x - 5y = -23$
$3x + 4y = 6$

23.
$2x - 4y = -10$
$-3x + 6y = -21$

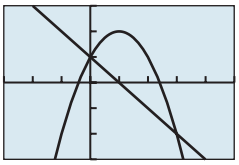
24.
$2x - 4y = 8$
$-x + 2y = -4$

25.
$2x - 3y = 5$
$-6x + 9y = -15$

26.
$2x - y = 3$
$-4x + 2y = 5$

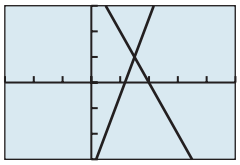
En los ejercicios del 27 al 30 utilice la gráfica para estimar las soluciones del sistema.

27. $y = 1 + 2x - x^2$
$y = 1 - x$



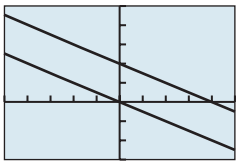
[−3, 5] por [−3, 3]

28. $6x - 2y = 7$
$2x + y = 4$



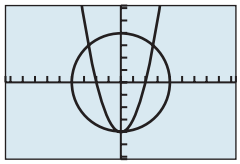
[−3, 5] por [−3, 3]

29. $x + 2y = 0$
$0.5x + y = 2$



[−5, 5] por [−3, 5]

30. $x^2 + y^2 = 16$
$y + 4 = x^2$



[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

En los ejercicios del 31 al 34 utilice gráficas para determinar el número de soluciones que tiene el sistema.

31. $3x + 5y = 7$
$4x - 2y = -3$

32. $3x - 9y = 6$
$2x - 6y = 1$

33. $2x - 4y = 6$
$3x - 6y = 9$

34. $x - 7y = 9$
$3x + 4y = 1$

En los ejercicios del 35 al 42 resuelva gráficamente el sistema. Respalde su respuesta en forma numérica.

35. $y = \ln x$
$1 = 2x + y$

36. $y = 3 \cos x$
$1 = 2x - y$

37. $y = x^3 - 4x$
$4 = x - 2y$

38. $y = x^2 - 3x - 5$
$1 = 2x - y$

39. $x^2 + y^2 = 4$
$x + 2y = 2$

40. $x^2 + y^2 = 4$
$x - 2y = 2$

41. $x^2 + y^2 = 9$
$y = x^2 - 2$

42. $x^2 + y^2 = 9$
$y = 2 - x^2$

En los ejercicios 43 y 44 determine el punto de equilibrio para las curvas de demanda y de oferta dadas.

43. $p = 200 - 15x$
$p = 50 + 25x$

44. $p = 15 - \frac{7}{100}x$
$p = 2 + \frac{3}{100}x$

45. Gasto en cuidados médicos La tabla 7.2 muestra los gastos (en miles de millones de dólares) en subsidios y costos administrativos de hospitales federales y fondos de seguro médico para varios años. Haga $x = 0$ para 1980, $x = 1$ para 1981, y así sucesivamente.

a) Determine una ecuación cuadrática de regresión y superpóngala en un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine una ecuación logística de regresión y superpóngala en un diagrama de dispersión de los datos.

c) ¿Cuándo ambos modelos pronostican gastos de 300 mil millones de dólares?

d) Escriba para aprender Explique las implicaciones a largo plazo del uso de la ecuación cuadrática de regresión para pronosticar gastos futuros.

e) Escriba para aprender Explique las implicaciones a largo plazo del uso de la ecuación logística de regresión para pronosticar gastos futuros.



Tabla 7.2 Gastos nacionales en cuidados médicos

Año	Gastos (en miles de millones)
1990	110.2
1995	183.2
1997	209.5
1998	210.2
1999	213.5
2000	225.1
2001	246.5
2002	267.1

Fuente: Administración Financiera de Seguro Médico de Estados Unidos, Health Care Financing Review, verano 2001, Statistical Abstract of the U.S., 2004-2005.

46. Ingreso personal La tabla 7.3, en la página siguiente, proporciona el ingreso personal total (en miles de millones de dólares) para residentes de los estados de Iowa y de Nevada para varios años. Suponga que $x = 0$ representa a 1990, $x = 1$ a 1991, y así sucesivamente.

a) Determine una ecuación de regresión lineal para los datos de Iowa y superpóngala en un diagrama de dispersión de los datos del mismo estado.

b) Determine una ecuación de regresión lineal para los datos de Nevada y superpóngala en un diagrama de dispersión de los datos del mismo estado.

c) Mediante los modelos de las partes **a** y **b**, ¿cuándo el ingreso de los dos estados será el mismo?

Tabla 7.3 Ingreso personal total

Año	Iowa (miles de millones)	Nevada (miles de millones)
1990	45.4	24.8
2000	77.8	61.4
2001	80.2	63.6
2002	82.5	66.2

Fuente: Oficina de Análisis Económico de Estados Unidos, Encuesta de Negocios Activos, mayo de 1998, en Resumen Estadístico de Estados Unidos, 200422005.

47. Población La tabla 7.4 proporciona la población (en miles) de los estados de Arizona y Massachussetts para varios años. Haga que $x = 0$ represente a 1980, $x = 1$ a 1981, y así sucesivamente.

a) Determine una ecuación de regresión lineal para los datos de Arizona y superpóngala en un diagrama de dispersión de los datos del mismo estado.

b) Determine una ecuación de regresión lineal para los datos de Massachusset*t*s y superpóngala en un diagrama de dispersión de los datos del mismo estado.

c) Mediante los modelos de las partes **a** y **b**, ¿cuándo la población de los dos estados será igual?

Tabla 7.4 Población

Año	Arizona (miles)	Massachussetts (miles)
1980	2718	5737
1990	3665	6016
1995	4432	6141
1998	4883	6272
1999	5024	6317
2000	5131	6349
2001	5298	6400
2002	5441	6422
2003	5581	6433

Fuente: Oficina de Censo de Estados Unidos, en Statistical Abstract of the U.S., 2004-2005.

48. Actividad en equipo Describa todas las posibilidades para el número de soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos variables, si las gráficas de las dos ecuaciones son **a** una recta y una circunferencia, y **b** una circunferencia y una parábola.

49. Problema de jardinería Determine las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 200 m y una área de 500 m^2.

50. Dimensiones de un maizal Determine las dimensiones de un maizal rectangular con un perímetro de 220 yardas y un área de 3,000 $yardas^2$.

51. Rapidez al remar Hank puede remar en un bote 1 milla río arriba (contra corriente) en 24 minutos. Él puede remar la misma distancia río abajo en 13 minutos. Si tanto la rapidez al remar y la rapidez de la corriente son constantes, determine la rapidez de Hank al remar y la rapidez de la corriente.

52. Rapidez de un aeroplano Una aeroplano que vuela de Los Ángeles a Nueva York con el viento a favor tarda 3.75 h. Volando contra el viento, el aeroplano tarda 4.4 horas para el viaje de regreso. La distancia en el aire entre Los Ángeles y Nueva York es de 2,500 millas y la rapidez tanto del aeroplano como del viento son constantes; determine la rapidez del aeroplano y la rapidez del viento.

53. Precios de alimentos En la tienda de Philip el costo total de una gaseosa mediana y una grande es de $1.74. La grande cuesta $0.16 más que la mediana. Determine el costo de cada gaseosa.

54. Mezcla de nueces Una mezcla de 5 libras de nueces tiene un valor de $2.80 por libra. La mezcla contiene cacahuates con valor de $1.70 por libra y anacardos que valen $4.55 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo están en la mezcla?

55. Conexión entre álgebra y funciones Determine a y b de modo que la gráfica de $y = ax + b$ contenga los dos puntos $(-1, 4)$ y $(2, 6)$.

56. Conexión entre álgebra y funciones Determine a y b de modo que la gráfica de $ax + by = 8$ contenga los dos puntos $(2, -1)$ y $(-4, -6)$.

57. Renta de una camioneta Pedro tiene dos planes para elegir en la renta de una camioneta.

Compañía A: un pago de $40 más 10 centavos por milla.

Compañía B: un pago de $25 más 15 centavos por milla.

a) ¿Cuántas millas puede conducir Pedro para que el pago sea el mismo en las dos compañías?

b) Escriba para aprender Proporcione razones por las que Pedro podría elegir un plan sobre del otro. Explique.

58. Paquete salarial Stephanie tiene dos ofertas diferentes de salario por la venta de aparatos electrodomésticos.

Plan A: un salario semanal de $300 más 5% de sus ventas.

Plan B: un salario semanal de $600 más 1% de sus ventas.

a) ¿Cuánto deben totalizar las ventas de Stephanie para que el ingreso sea el mismo en los dos planes?

b) Escriba para aprender Proporcione razones por las que Stephanie podría elegir un plan sobre del otro. Explique.

Preguntas de examen estandarizado

59. Verdadero o falso Sean a y b números reales. El sistema de ecuaciones siguiente puede tener exactamente dos soluciones:

$2x + 5y = a$

$3x - 4y = b$

Justifique su respuesta.

60. Verdadero o falso Si la ecuación resultante después de usar eliminación, en forma correcta, sobre un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es $7 = 0$, entonces el sistema tiene un número infinito de soluciones. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 61 al 64 resuelva el problema sin utilizar calculadora.

61. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes es una solución del sistema $2x - 3y = 12$ $x + 2y = -1$?

A) $(-3, 1)$ **B)** $(-1, 0)$ **C)** $(3, -2)$

D) $(3, 2)$ **E)** $(6, 0)$

62. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes no puede ser el número de soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos variable, cuyas gráficas son una circunferencia y una parábola?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2

D) 3 **E)** 5

63. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes no puede ser el número de soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos variable cuyas gráficas son parábolas?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4

D) 5 **E)** Un número infinito

64. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes es el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, si después de usar de forma correcta eliminación la ecuación resultante es $4 = 4$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2

D) 3 **E)** Un número infinito

Exploraciones

65. Una elipse y una recta Considere el sistema de ecuaciones

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$x + y = 1.$$

a) Despeje, en términos de x, a y en la ecuación $x^2/4 + y^2/9 = 1$ para obtener las dos funciones implícitas determinadas por la ecuación.

b) Resuelva gráficamente el sistema de ecuaciones.

c) Utilice sustitución para confirmar las soluciones encontradas en la parte **b**.

66. Una hipérbola y una recta Considere el sistema de ecuaciones

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$x - y = 0.$$

a) Despeje, en términos de x, a y en la ecuación $x^2/4 - y^2/9 = 1$ para obtener las dos funciones implícitas determinadas por la ecuación.

b) Resuelva gráficamente el sistema de ecuaciones.

c) Utilice sustitución para confirma las soluciones encontradas en la parte **b**.

Ampliación de las ideas

En los ejercicios 67 y 68 utilice el método de eliminación para resolver el sistema de ecuaciones.

67. $x^2 - 2y = -6$

$x^2 + y = 4$

68. $x^2 + y^2 = 1$

$x^2 - y^2 = 1$

En los ejercicios 69 y 70, $p(x)$ es la curva de demanda. El ingreso total, si se venden x unidades, es $R = px$. Determine el número de unidades vendidas que proporciona el ingreso máximo.

69. $p = 100 - 4x$

70. $p = 80 - x^2$

7.2 Álgebra de matrices

Aprenderá acerca de...

- Las matrices
- La suma y resta de matrices
- La multiplicación de matrices
- Las matrices identidad e inversa de una matriz
- Los vectores en dos dimensiones
- Aplicaciones

. . . porque

El álgebra matricial proporciona una técnica útil para manipular conjuntos grandes de datos y resolver problemas relacionados que se modelan mediante las matrices.

Matrices

Una *matriz* es un arreglo rectangular de números. Las matrices proporcionan una forma eficiente de resolver sistemas de ecuaciones lineales y registrar información. Las tablas de datos presentadas en este libro son ejemplos de matrices.

DEFINICIÓN Matriz

Sean m y n enteros positivos. Una **matriz de $m \times n$** (se lee "matriz de m por n") es un arreglo rectangular de m renglones (filas) y n columnas de números reales.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

También utilizamos la notación abreviada $[a_{ij}]$ para esta matriz.

Cada **elemento** o **entrada**, a_{ij}, de la matriz utiliza notación con *dos subíndices*. El **subíndice de la fila (renglón)** es el primer subíndice i, y el **subíndice de la columna** es j. El elemento a_{ij} está en la fila i y la columna j. En general, el **orden de una matriz de $m \times n$** es $m \times n$. Si $m = n$, la matriz es una **matriz cuadrada**. Dos matrices son **matrices iguales** si tienen el mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales.

EJEMPLO 1 Determinación del orden de una matriz

a) La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ tiene orden 2×3.

b) La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ tiene orden 4×2.

c) La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ tiene orden 3×3 y es una matriz cuadrada.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

NOTA HISTÓRICA

Los métodos utilizados por los chinos, entre 200 a. de C. y 100 a. C., para resolver problemas que implicaban varias incógnitas son similares a los métodos modernos que utilizan matrices. Las matrices fueron desarrolladas formalmente en el siglo XVIII por varios matemáticos, incluyendo a Leibniz, Cauchy y Gauss.

Suma y resta de matrices

Sumamos o restamos matrices del mismo orden sumando o restando sus entradas correspondientes. Las matrices de órdenes diferentes *no* pueden sumarse o restarse.

DEFINICIÓN Suma de matrices y diferencia de matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de orden $m \times n$.

1. La **suma** $A + B$ es la matriz de $m \times n$

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

2. La **diferencia** $A - B$ es la matriz de $m \times n$

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}].$$

EJEMPLO 2 Uso de la suma de matrices

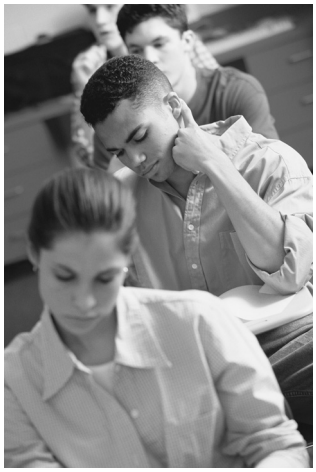
La matriz A proporciona las calificaciones medias de la habilidad verbal del SAT para los seis estados de la región de Nueva Inglaterra durante el periodo de 2001 a 2004. (*Fuente: The College Board, The World Almanac and Books of Facts, 2005*). La matriz B proporciona las calificaciones medias del SAT de matemáticas para el mismo periodo de 4 años. Exprese las calificaciones medias combinadas para los estados de Nueva Inglaterra desde 2001 a 2004 en una sola matriz.

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{CT} \\ \text{ME} \\ \text{MA} \\ \text{NH} \\ \text{RI} \\ \text{VT} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 01 & 02 & 03 & 04 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 509 & 509 & 512 & 515 \\ 506 & 503 & 503 & 505 \\ 511 & 512 & 516 & 518 \\ 520 & 519 & 522 & 522 \\ 501 & 504 & 502 & 503 \\ 511 & 512 & 515 & 516 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{CT} \\ \text{ME} \\ \text{MA} \\ \text{NH} \\ \text{RI} \\ \text{VT} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 01 & 02 & 03 & 04 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 510 & 509 & 514 & 515 \\ 500 & 502 & 501 & 501 \\ 515 & 516 & 522 & 523 \\ 516 & 519 & 521 & 521 \\ 499 & 503 & 504 & 502 \\ 506 & 510 & 512 & 512 \end{bmatrix} \end{array}$$

SOLUCIÓN Las calificaciones combinadas pueden obtenerse sumando las dos matrices.

$$A + B = \begin{array}{c} \\ \text{CT} \\ \text{ME} \\ \text{MA} \\ \text{NH} \\ \text{RI} \\ \text{VT} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 01 & 02 & 03 & 04 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1019 & 1018 & 1026 & 1030 \\ 1006 & 1005 & 1004 & 1006 \\ 1026 & 1028 & 1038 & 1041 \\ 1036 & 1038 & 1043 & 1043 \\ 1000 & 1007 & 1006 & 1005 \\ 1017 & 1022 & 1027 & 1028 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ahora resuelva el ejercicio 11.



POTENCIA DEL ÁLGEBRA MATRICIAL

El resultado del ejemplo 2 es muy sencillo, pero es significativo que encontremos (en esencia) 24 partes de información con una sencilla operación matemática. Ése es el poder del álgebra matricial.

Cuando trabajamos con matrices, los números reales son **escalares**. El producto del número real k y la matriz $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$, es la matriz de $m \times n$

$$kA = [ka_{ij}].$$

La matriz $kA = [ka_{ij}]$ es un **múltiplo escalar de** A.

EJEMPLO 3 Uso de la multiplicación por un escalar

Un grupo en defensa del consumidor ha calculado lo precios medios de venta de productos con marca conocida y productos genéricos en tres tiendas diferentes en una ciudad importante. Los precios se muestran en la matriz de 3×3 de la página siguiente.

continúa

$$\begin{array}{c} \\ \text{Tienda A} \\ \text{Tienda B} \\ \text{Tienda C} \end{array} \begin{array}{c} \text{Marca genérica} \\ \begin{bmatrix} 3.97 & 3.64 \\ 3.78 & 3.69 \\ 3.75 & 3.67 \end{bmatrix} \end{array}$$

La ciudad tiene una tasa combinada de impuestos a la venta de 7.25%. Construya una matriz que muestre los precios comparados con el impuesto a la venta incluido.

SOLUCIÓN Multiplique la matriz original por el escalar 1.0725 para sumar el impuesto a la venta a cada precio.

$$1.0725 \times \begin{bmatrix} 3.97 & 3.64 \\ 3.78 & 3.69 \\ 3.75 & 3.67 \end{bmatrix} \approx \begin{array}{c} \\ \text{Tienda A} \\ \text{Tienda B} \\ \text{Tienda C} \end{array} \begin{array}{c} \text{Marca genérica} \\ \begin{bmatrix} 4.26 & 3.90 \\ 4.05 & 3.96 \\ 4.02 & 3.94 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Las matrices heredan propiedades que poseen los números reales. Sea $A = [a_{ij}]$ cualquier matriz de $m \times n$. La matriz $O = [0]$, de $m \times n$, que consiste únicamente de ceros, es la **matriz cero** ya que $A + O = A$. En otras palabras, O es la **identidad para la suma** para el conjunto de todas las matrices de $m \times n$. La matriz $B = [-a_{ij}]$ de $m \times n$, que consiste en todos los *inversos aditivos* de las entradas de A, es el **inverso aditivo de A**, ya que $A + B = O$. También escribimos $B = -A$. Igual que con los números reales,

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}] = [a_{ij} + (-b_{ij})] = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = A + (-B).$$

Así, restar B de A es lo mismo que sumar el inverso aditivo de B a A.

EXPLORACIÓN 1 **Cálculo con matrices**

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de 2×2, con $a_{ij} = 3i - j$ y $b_{ij} = i^2 + j^2 - 3$, para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$.

1. Determine A y B.
2. Determine el inverso aditivo, $-A$, de A y verifique que $A + (-A) = [0]$. ¿Cuál es el orden de $[0]$?
3. Determine $3A - 2B$.

Multiplicación de matrices

Para formar el producto AB de dos matrices, el número de columnas de la matriz A, la de la izquierda, debe ser igual que el número de renglones de la matriz B, la de la derecha. En este caso, cualquier renglón de A tiene el mismo número de entradas que cualquier columna de B. Cada entrada del producto se puede obtener sumando los productos de las entradas de un renglón de A por las correspondientes entradas de una columna de B.

DEFINICIÓN Multiplicación de matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz de $m \times r$ y $B = [b_{ij}]$ una matriz de $r \times n$.
El **producto** $AB = [c_{ij}]$ es la matriz de $m \times n$, donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}.$$

La clave para entender cómo formar el producto de cualesquiera dos matrices es considerar primero el producto de una matriz $A = [a_{1j}]$ de $1 \times r$, con una matriz $B = [b_{j1}]$ de $r \times 1$. De acuerdo con la definición, $AB = [c_{11}]$ es la matriz de 1×1, donde $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1r}b_{r1}$. Por ejemplo, el producto AB de la matriz de A 1×3 y la matriz B de 3×1, donde

$$A = [1 \quad 2 \quad 3] \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

es

$$A \cdot B = [1 \quad 2 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = [1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6] = [32].$$

Entonces la entrada ij del producto AB de una matriz $m \times r$ con una matriz de $r \times n$ es el producto del renglón i de A, considerado como una matriz de $1 \times r$, con la columna j de B, considerada como una matriz de $r \times 1$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Determinación del producto de dos matrices

Determine el producto AB, si esto es posible, donde

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a) El número de columnas de A es 3 y el número de renglones de B es 3, por lo que el producto AB está definido. El producto $AB = [c_{ij}]$ es una matriz de 2×2, donde

$$c_{11} = [2 \quad 1 \quad -3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = -1,$$

$$c_{12} = [2 \quad 1 \quad -3] \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 = -6,$$

$$c_{21} = [0 \quad 1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2,$$

$$c_{22} = [0 \quad 1 \quad 2] \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 2.$$

continúa

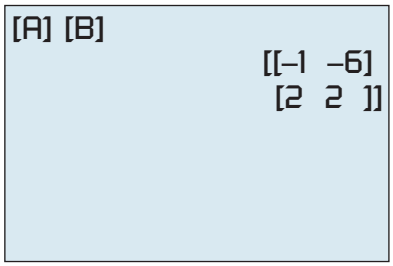


FIGURA 7.7 El producto matricial AB del ejemplo 4. Observe que la graficadora muestra los renglones del producto como matrices de 1×2.

Así que $AB = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. La figura 7.7 apoya este cálculo.

b) El número de columnas de A es 3 y el número de renglones de B es 2, por lo que el producto AB no está definido.

Ahora resuelva el ejercicio 19.

EJEMPLO 5 Uso de la multiplicación de matrices

Para el Día de las Madres, un florista hace tres arreglos florales (I, II y III), cada uno incluye rosas, claveles y lilas. La matriz A muestra el número de cada tipo de flor utilizado en cada arreglo

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{Rosas} \\ \text{Claveles} \\ \text{Lilas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 6 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

El florista puede comprar estas flores de dos diferentes mayoristas (M1 y M2), pero quiere adquirir todo con uno solo. El costo de los tres tipos de flores con los dos mayoristas se muestra en la matriz B.

$$B = \begin{array}{r} \\ \text{Rosas} \\ \text{Claveles} \\ \text{Lilas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{M1} & \text{M2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.50 & 1.35 \\ 0.95 & 1.00 \\ 1.30 & 1.35 \end{bmatrix} \end{array}$$

Construya una matriz para mostrar el costo de hacer cada uno de los arreglos florales con flores proporcionadas por los dos diferentes mayoristas.

SOLUCIÓN

Podemos utilizar los rótulos de las matrices para ayudarnos. Queremos que las columnas de A coincidan con los renglones de B (ya que es así como funciona la multiplicación de matrices). Por lo tanto, intercambiamos los renglones y columnas de A para tener las flores a lo largo de las columnas (la nueva matriz se denomina **transpuesta** de A, y se expresa como A^T). Luego, determinamos el producto A^TB:

$$\begin{array}{r} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Rosas} & \text{Claveles} & \text{Lilas} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{r} \\ \text{Rosas} \\ \text{Clav.} \\ \text{Lilas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{M1} & \text{M2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.50 & 1.35 \\ 0.95 & 1.00 \\ 1.30 & 1.35 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{r} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{M1} & \text{M2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18.40 & 18.15 \\ 21.60 & 20.85 \\ 21.05 & 20.50 \end{bmatrix} \end{array}$$

La figura 7.8 muestra el producto A^TB y respalda nuestro cálculo.

Ahora resuelva el ejercicio 47.

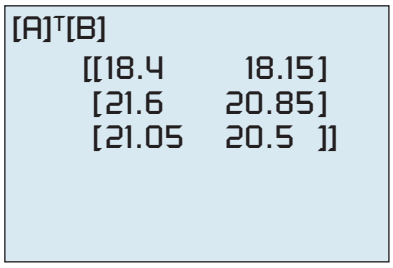


FIGURA 7.8 El producto A^TB para las matrices A y B del ejemplo 5.

Matrices identidad e inversa de una matriz

La matriz I_n de $n \times n$, con unos en la diagonal principal (de arriba a la izquierda a abajo a la derecha) y 0 en el resto de las entradas, es la **matriz identidad de orden $n \times n$**

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si $A = [a_{ij}]$ es cualquier matriz de $n \times n$, podemos probar (consulte el ejercicio 56) que

$$AI_n = I_nA = A,$$

esto es, I_n es la **matriz identidad** para el conjunto de matrices de $n \times n$.

Si a es un número real distinto de cero, entonces $a^{-1} = 1/a$ es el inverso multiplicativo de a, es decir, $aa^{-1} = a(1/a) = 1$. La definición del *inverso multiplicativo* de una matriz cuadrada es similar.

DEFINICIÓN Inversa de una matriz cuadrada

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$. Si existe una matriz B tal que

$$AB = BA = I_n,$$

entonces B es la **inversa** de A. Escribimos $B = A^{-1}$ (se lee "A inversa").

Veremos que no toda matriz cuadrada (ejemplo 7) tiene una inversa. Si una matriz cuadrada A tiene una inversa, entonces A es **no singular**. Si A no tiene inversa, entonces A es **singular**.

EJEMPLO 6 Verificación de una matriz inversa

Pruebe que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

son matrices inversas, una de la otra.

SOLUCIÓN La figura 7.9 muestra que $AB = BA = I_2$. Así que, $B = A^{-1}$ y $A = B^{-1}$.

Ahora resuelva el ejercicio 33.

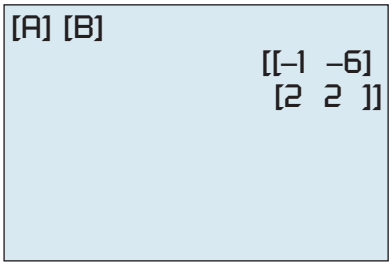


FIGURA 7.9 Demostración de que A y B son matrices inversas (ejemplo 6).

EJEMPLO 7 Cómo mostrar que una matriz no tiene inversa

Pruebe que la matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ es singular, es decir, A no tiene inversa.

SOLUCIÓN Suponga que A tiene una inversa $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Entonces $AB = I_2$.

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6x + 3z & 6y + 3w \\ 2x + z & 2y + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mediante la igualdad de matrices, obtenemos:

$$6x + 3z = 1 \qquad 6y + 3w = 0$$

$$2x + z = 0 \qquad 2y + w = 1$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación $2x + z = 0$ por 3 se obtiene $6x + 3z = 0$. No existen valores para x y z para los cuales el valor de $6x + 3z$ sea al mismo tiempo igual a 0 y a 1. Por tanto, A no tiene una inversa.

Ahora resuelva el ejercicio 37.

Vectores en dos dimensiones

Existe una prueba sencilla que determina si una matriz de 2×2 tiene una inversa.

Inversa de una matriz de 2×2

Si $ad - bc \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

El número $ad - bc$ es el **determinante** de la matriz 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y se expresa

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Para definir el determinante de una matriz cuadrada de orden superior necesitamos introducir los *menores* y *cofactores* asociados con las entradas de una matriz cuadrada. Suponga que $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$. El **menor** (abreviación de "determinante menor") M_{ij} que corresponde al elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de $(n - 1) \times (n - 1)$ obtenido al eliminar el renglón y la columna que contienen a a_{ij}. El **cofactor** correspondiente a a_{ij} es $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

DEFINICIÓN Determinante de una matriz cuadrada

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \times n$ $(n > 2)$. El determinante de A, expresado como det A o $|A|$, es la suma de las entradas de cualquier renglón o cualquier columna multiplicada por sus respectivos cofactores. Por ejemplo, desarrollando por el renglón i se obtiene

$$\det A = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de 3×3, entonces, utilizando la definición de determinante aplicada al segundo renglón, obtenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{21}(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{23}(-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

El determinante de una matriz de 3×3 implica tres determinantes de matrices 2×2, el determinante de una matriz de 4×4 implica cuatro determinantes de matrices 3×3, y así sucesivamente. Es tedioso aplicar esta teoría; en este texto, en la mayoría de las ocasiones, utilizaremos una graficadora para evaluar determinantes.

EXPLORACIÓN 2 **Investigación de la definición de determinante**

1. Complete el desarrollo, iniciado anteriormente, del determinante de la matriz de 3×3 $A = [a_{ij}]$. Explique por qué cada término en el desarrollo contiene un elemento de cada renglón y de cada columna.
2. Utilice el primer renglón de la matriz de 3×3 para desarrollar el determinante y compárelo con la expresión en 1.
3. Pruebe que el determinante de una matriz cuadrada con un renglón o una columna de ceros es cero.

Ahora podemos establecer la condición bajo la cual las matrices cuadradas tienen inversas.

TEOREMA **Inversas de matrices de $n \times n$**

Una matriz A de $n \times n$, tiene una inversa si y sólo si $\det A \neq 0$.

Existen fórmulas complicadas para determinar las inversas de matrices no singulares de orden 3×3 o superiores. En lugar de estas fórmulas, utilizaremos una graficadora para determinar las inversas de matrices cuadradas.

EJEMPLO 8 Determinación de inversas de matrices

Determine si la matriz tiene una inversa. Si es así, encuentre su matriz inversa.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a) Como $\det A = ad - bc = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2 \neq 0$, concluimos que A tiene una inversa. Mediante la fórmula para la inversa de una matriz de 2×2, obtenemos

continúa

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

Puede verificar que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$.

b) La figura 7.10 muestra que $\det B = -10 \neq 0$ y

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Puede utilizar su graficadora para verificar que $B^{-1}B = BB^{-1} = I_3$.

Ahora resuelva el ejercicio 41.

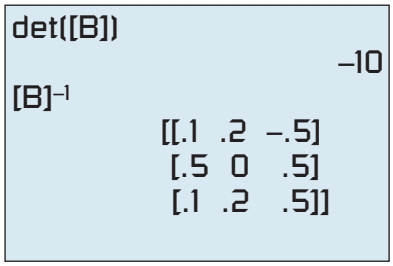


FIGURA 7.10 La matriz B es no singular y por tanto tiene una inversa (ejemplo 8b).

Listamos algunas de las propiedades importantes de las matrices, algunas de las cuales, en los ejercicios, se le pedirá demostrar.

Propiedades de matrices

Sean A, B y C matrices cuyos órdenes son tales que las sumas, diferencias y productos siguientes están definidos:

1. Propiedad conmutativa
Suma:
$A + B = B + A$
Multiplicación:
(En general no se cumple)

2. Propiedad asociativa
Suma:
$(A + B) + C = A + (B + C)$
Multiplicación:
$(AB)C = A(BC)$

3. Propiedad de la identidad
Suma: $A + O = A$
Multiplicación: orden de $A = n \times n$
$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

4. Propiedad del inverso
Suma: $A + (-A) = O$
Multiplicación: orden de $A = n \times n$
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, $|A| \neq 0$

5. Propiedad distributiva
Multiplicación sobre la suma
$A(B + C) = AB + AC$
$(A + B)C = AC + BC$

Multiplicación sobre la resta
$A(B - C) = AB - AC$
$(A - B)C = AC - BC$

Aplicaciones

Los puntos en el plano coordenado cartesiano pueden representarse mediante matrices de 1×2. Por ejemplo, el punto $(2, -3)$ puede representarse mediante la matriz $[2 \ -3]$ de 1×2. Mediante la multiplicación de matrices podemos calcular las imágenes de puntos a los que se les aplican algunas de las transformaciones estudiadas en la sección 1.5, como se ilustra en el ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Reflexión con respecto al eje *x* como una multiplicación matricial

Pruebe que la imagen de un punto bajo una reflexión, con respecto al eje x, puede obtenerse mediante la multiplicación por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN La imagen del punto (x, y) bajo una reflexión, con respecto al eje x, es $(x, -y)$. El producto

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [x \quad -y]$$

muestra que el punto (x, y) (en forma matricial $[x \ \ y]$) se mueve al punto $(x, -y)$ (en forma matricial $[x \ \ -y]$).

Ahora resuelva el ejercicio 57.

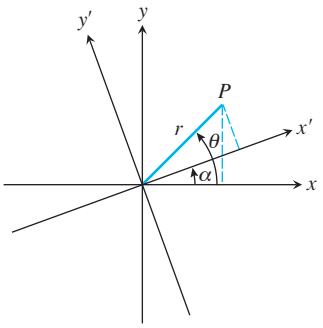


FIGURA 7.11 Rotación del sistema de coordenadas xy en un ángulo a, para obtener el sistema de coordenadas $x'y'$ (ejemplo 10).

La figura 7.11 muestra el sistema de coordenadas xy rotado un ángulo α para obtener el sistema de coordenadas $x'y'$. En el ejemplo 10, vemos que las coordenadas de un punto en el sistema de coordenadas $x'y'$ puede obtenerse mediante la multiplicación de las coordenadas del punto, en el sistema de coordenadas xy, por la matriz de 2×2 adecuada. En el ejercicio 71, verá que el recíproco también es cierto.

EJEMPLO 10 Rotación de un sistema de coordenadas

Pruebe que las coordenadas (x', y') de P en la figura 7.11 están relacionadas con las coordenadas (x, y) de P mediante las ecuaciones

$$x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha$$

$$y' = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha.$$

Luego, demuestre que las coordenadas (x', y') pueden obtenerse a partir de las coordenadas (x, y) mediante multiplicación de matrices. Utilizamos este resultado en la sección 8.4 cuando estudiamos las secciones cónicas.

SOLUCIÓN Mediante el triángulo rectángulo formado por P y el sistema de coordenadas $x'y'$, obtenemos

$$x' = r \cos (\theta - \alpha) \ \text{ y } \ y' = r \operatorname{sen} (\theta - \alpha).$$

Desarrollando las expresiones anteriores para x' y y', mediante identidades trigonométricas para $\cos (\theta - \alpha)$ y $\operatorname{sen} (\theta - \alpha)$ se obtiene

$$x' = r \cos \theta \cos \alpha + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha, \ \text{ y}$$

$$y' = r \operatorname{sen} \theta \cos \alpha - r \cos \theta \operatorname{sen} \alpha.$$

continúa

Con base en el triángulo formado por P y el sistema de coordenadas xy se deduce que $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Al sustituir estos valores para x y y en el par de ecuaciones anteriores se obtiene

$$x' = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha \quad \text{y} \quad y' = y\cos\alpha - x\,\text{sen}\,\alpha$$
$$= -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha,$$

que es lo que le pedimos probar. Por último, la multiplicación matricial muestra que

$$[x' \quad y'] = [x \quad y]\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 71.



PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO (de la página 567)

PROBLEMA: Si tenemos un triángulo con vértices en (0, 0), (1, 1) y (2, 0) y queremos duplicar las longitudes de los lados del triángulo, ¿en dónde quedarán los vértices del triángulo ampliado?

SOLUCIÓN: Dado un triángulo con vértices en (0, 0), (1, 1,) y (2, 0), como en la figura 7.12, podemos determinar los vértices de un nuevo triángulo cuyos lados sean el doble de largos mediante la multiplicación por la matriz de escala.

$$\begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Para el punto (0, 0), tenemos

$$[x' \quad y'] = [0 \quad 0]\begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix} = [0 \quad 0].$$

Para el punto (1, 1), tenemos

$$[x' \quad y'] = [1 \quad 1]\begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix} = [2 \quad 2].$$

Y para el punto (2, 0), tenemos

$$[x' \quad y'] = [2 \quad 0]\begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix} = [4 \quad 0].$$

Así que el nuevo triángulo tiene vértices (0, 0), (2, 2) y (4, 0), como se muestra en la figura 7.13.

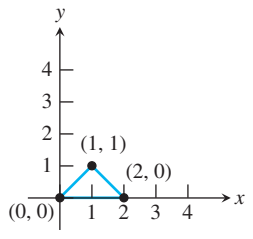


FIGURA 7.12

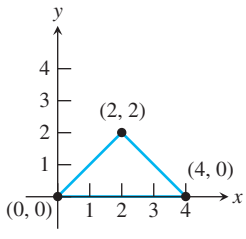


FIGURA 7.13

REPASO RÁPIDO 7.2 *(Para obtener ayuda consulte las secciones 1.5, 5.3 y 6.4)*

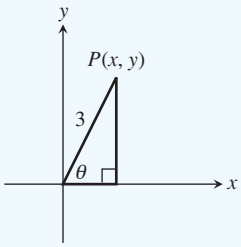
En los ejercicios del 1 al 4 los puntos **a)** $(3, -2)$ y **b)** (x, y) se reflejan con respecto a la recta dada. Determine las coordenadas de los puntos reflejados.

1. El eje x **2.** El eje y

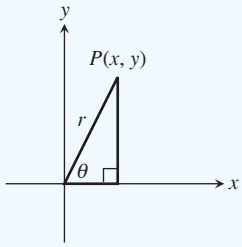
3. La recta $y = x$ **4.** La recta $y = -x$

En los ejercicios 5 y 6 exprese las coordenadas de P en términos de θ.

5.



6.



En los ejercicios del 7 al 10 desarrolle la expresión.

7. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ **8.** $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$

9. $\cos(\alpha + \beta)$ **10.** $\cos(\alpha - \beta)$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7.2

En los ejercicios del 1 al 6 determine el orden de la matriz. Indique si la matriz es cuadrada.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 7 al 10 identifique el elemento que se especifica para la matriz siguiente.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

7. a_{13} **8.** a_{24} **9.** a_{32} **10.** a_{33}

En los ejercicios del 11 al 16 determine **a)** $A + B$, **b)** $A - B$, **c)** $3A$ y **d)** $2A - 3B$.

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 17 al 22 utilice la definición de la multiplicación matricial para determinar **a)** AB y **b)** BA. Respalde su respuesta con la característica de matrices de su graficadora.

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 23 al 28 determine **a)** AB y **b)** BA, o indique que el producto no está definido.

23. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 29 al 32 resuelva para a y b.

29. $\begin{bmatrix} a & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & b \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 2 & a-1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ b+2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} a+3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & b-1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 33 y 34 verifique que las matrices son inversas una de la otra.

33. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

34. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0.25 & 0.5 & -0.25 \\ 0.25 & 0.5 & -1.25 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 35 al 40 determine la inversa de la matriz, si tiene una, o indique que la inversa no existe.

35. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

39. $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = (-1)^{i+j}$, $1 \le i \le 4$, $1 \le j \le 4$.

40. $B = [b_{ij}]$, $b_{ij} = |i - j|$, $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 3$.

En los ejercicios 41 y 42 utilice la definición para evaluar el determinante de la matriz.

41. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 43 y 44 resuelva para X.

43. $3X + A = B$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

44. $2X + A = B$, donde $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

45. Matrices simétricas La matriz siguiente contiene la distancia en millas entre Atlanta (A), Baltimore (B), Cleveland (C) y Denver (D) (*Fuente: AAA Road Atlas).*

a) Escriba para aprender Explique por qué la entrada en el renglón i y la columna j es igual que la entrada en el renglón j y la columna i. Una matriz con esta propiedad es **simétrica**.

b) Escriba para aprender ¿Por qué las entradas a lo largo de la diagonal son cero?

$$\begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 689 & 774 & 1406 \\ 689 & 0 & 371 & 1685 \\ 774 & 371 & 0 & 1340 \\ 1406 & 1685 & 1340 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

46. Producción Jordan Manufacturing tiene dos fábricas; cada una de ellas fabrica tres productos. El número de unidades del producto i producidas en la fábrica j en una semana, está representado en la matriz mediante a_{ij}

$$A = \begin{bmatrix} 120 & 70 \\ 150 & 110 \\ 80 & 160 \end{bmatrix}.$$

Si los niveles de producción se aumentan en 10%, escriba los nuevos niveles de producción como una matriz B. ¿Cómo está relacionada B con A?

47. Producción de huevos Happy Valley Farms producen tres tipos de huevos: 1 (grande), 2 (extra grande), 3 (gigante). El número de docena de huevos tipo i vendidos al almacén j, está representado por a_{ij} en la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 60 \\ 120 & 70 \\ 200 & 120 \end{bmatrix}.$$

El precio por docena que Happy Valley Farms cobra por el huevo de tipo i está representado por b_{i1} en la matriz

$$B = \begin{bmatrix} \$0.80 \\ \$0.85 \\ \$1.00 \end{bmatrix}.$$

a) Determine el producto B^TA.

b) Escriba para aprender ¿Qué representa la matriz B^TA?

48. Inventario Una compañía vende cuatro modelos de una marca de "máquina todo en uno: fax, impresora, copiadora y digitalizador" en tres tiendas al menudeo. El inventario en la tienda i del modelo j está representado por s_{ij} en la matriz

$$S = \begin{bmatrix} 16 & 10 & 8 & 12 \\ 12 & 0 & 10 & 4 \\ 4 & 12 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Los precios al mayoreo y al menudeo del modelo i están representados mediante p_{i1} y p_{i2}, respectivamente, en la matriz

$$P = \begin{bmatrix} \$180 & \$269.99 \\ \$275 & \$399.99 \\ \$355 & \$499.99 \\ \$590 & \$799.99 \end{bmatrix}.$$

a) Determine el producto SP.

b) Escriba para aprender ¿Qué representa la matriz SP?

49. Utilidad Una tienda de muebles vende cuatro tipos recámaras de 5 piezas. El precio que se cobra por un conjunto para recámara del tipo j está representado mediante a_{1j} en la matriz

$$A = [\$398 \quad \$598 \quad \$798 \quad \$998].$$

El número de conjuntos de tipo j vendidos en un periodo está representado mediante b_{1j} en la matriz

$$B = [35 \quad 25 \quad 20 \quad 10].$$

El costo, para la tienda de muebles, por un conjunto de muebles para recámara de tipo j está dado mediante c_{ij} en la matriz

$$C = [\$199 \quad \$268 \quad \$500 \quad \$670].$$

a) Escriba un producto matricial que proporcione el ingreso total obtenido por la venta de los conjuntos para recámara en un periodo.

b) Escriba una expresión que utilice matrices que proporcionen la utilidad producida por la venta de los conjuntos de recámara en un periodo.

50. Construcción Un contratista de obras ha convenido en construir seis casas estilo Campirano, siete casas estilo Techo de Dos Aguas y 14 casas estilo Colonial. El número de unidades de materia prima que se requieren en cada tipo de casa se muestra en la matriz

$$R = \begin{array}{r} \\ \text{Campirano} \\ \text{Dos Aguas} \\ \text{Colonial} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Acero} & \text{Madera} & \text{Vidrio} & \text{Pintura} & \text{Mano de obra} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 22 & 14 & 7 & 17 \\ 7 & 20 & 10 & 9 & 21 \\ 6 & 27 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Suponga que los precios unitarios son: acero \$1,600, la madera \$900, vidrio \$500, pintura \$100 y mano de obra \$1,000.

a) Escriba una matriz B de 1×3 que represente el número de cada tipo de casa que se construirán.

b) Escriba un producto matricial que proporcione el número de unidades de cada materia prima necesaria para construir las casas.

c) Escriba una matriz C de 5×1 que represente los costos unitarios de cada tipo de materia prima.

d) Escriba un producto matricial que proporcione el costo de cada casa.

e) Escriba para aprender Calcule el producto BRC. ¿Qué representa esta matriz?

51. Rotación de sistemas de coordenadas El sistema de coordenadas xy se rota un ángulo de 30° para obtener el sistema de coordenadas $x'y'$.

a) Si las coordenadas de un punto en el sistema de coordenadas xy son (1, 1), ¿cuáles son las coordenadas del punto rotado en el sistema de coordenadas $c'y'$?

b) Si las coordenadas de un punto en el sistema $x'y'$ son (1, 1), ¿cuáles son las coordenadas del punto del sistema de coordenadas xy en que fue rotado él?

52. Actividad en equipo Sean A B y C matrices cuyos órdenes son tales que las expresiones siguientes están definidas. Pruebe que las propiedades siguientes son verdaderas.

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $A(B + C) = AB + AC$

d) $(A - B)C = AC - BC$

53. Actividad en equipo Sean A y B matrices de $m \times n$ y c y d escalares. Pruebe que se cumplen las propiedades siguientes.

a) $c(A + B) = cA + cB$ **b)** $(c + d)A = cA + dA$

c) $c(dA) = (cd)A$ **d)** $1 \cdot A = A$

54. Escriba para aprender Explique por qué la definición dada para el determinante de una matriz cuadrada coincide con la definición dada para el determinante de una matriz de 2×2 (suponga que el determinante de una matriz de 1×1 es la entrada).

55. Inversa de una matriz 2×2 Pruebe que la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

siempre que $ad - bc \neq 0$.

56. Matriz identidad Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$. Pruebe que $AI_n = I_nA = A$.

En los ejercicios del 57 al 61 pruebe que la imagen de un punto bajo la transformación dada del plano puede obtenerse mediante multiplicación matricial.

57. Una reflexión con respecto al eje y.

58. Una reflexión con respecto de la recta $y = x$

59. Una reflexión con respecto de la recta $y = -x$

60. Un alargamiento o compresión vertical en un factor de a

61. Un alargamiento o compresión horizontal en un factor de c

Preguntas de examen estandarizado

62. Verdadero o falso Toda matriz cuadrada tiene una inversa. Justifique su respuesta.

63. Verdadero o falso El determinante $|A|$ de la matriz cuadrada A es mayor o igual a cero. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 64 al 67 resuelva el problema sin utilizar una calculadora.

64. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes es igual al determinante de $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$?

A) 4 **B)** -4 **C)** 10 **D)** -10 **E)** -14

65. Opción múltiple Sean A una matriz de orden 3×2 y B una matriz de orden 2×4. ¿Cuál de los siguientes proporciona el orden del producto AB?

a) 2×2 **b)** 3×4 **c)** 4×3 **d)** 6×8
e) El producto no está definido.

66. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$?

A) $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

67. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes es el valor de a_{13} en la matriz $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$?

A) -7 **B)** 7 **C)** -3 **D)** 3 **E)** 10

Exploraciones

68. Continuación de la exploración 2 Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$.

a) Pruebe que el determinante de A cambia de signo si dos renglones o dos columnas se intercambian. Inicie con una matriz de 3×3 y compare el desarrollo por el mismo renglón (o columna) antes y después del intercambio. [*Sugerencia:* Compare sin desarrollar los menores]. Con base en el caso 3×3, ¿cómo puede generalizar?

b) Pruebe que el determinante de una matriz cuadrada con dos renglones idénticos o dos columnas idénticas es cero.

c) Pruebe que si se suma un múltiplo escalar de un renglón (o columna) a otro renglón (o columna), el valor del determinante de una matriz cuadrada permanece sin cambio. [*Sugerencia:* Desarrolle por el renglón (o columna) que será sumada].

69. Continuación del ejercicio 68 Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$.

a) Pruebe que si todo elemento de un renglón o una columna de una matriz se multiplica por el número real c, entonces el determinante de la matriz se multiplica por c.

b) Pruebe que si son cero todas las entradas por arriba de la diagonal principal (o todas debajo de ella) de una matriz, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

70. Escritura de ecuaciones para rectas mediante el uso de determinantes Considere la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

a) Verifique que la ecuación es lineal en x y en y.

b) Verifique que los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en la recta de la parte **a**.

c) Utilice un determinante para establecer que el punto (x_3, y_3) está en la recta de la parte **a**.

d) Utilice un determinante para establecer que el punto (x_3, y_3) no está en la recta de la parte **a**.

71. Continuación del ejemplo 10 El sistema de coordenadas xy se rota un ángulo α para obtener el sistema de coordenadas $x'y'$ (consulte la figura 7.11).

a) Muestre que la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

del ejemplo 10 es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

b) Pruebe que las coordenadas (x, y) de P en la figura 7.11 están relacionadas con las coordenadas (x', y') de P mediante las ecuaciones

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha$$

$$y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha.$$

c) Pruebe que las coordenadas (x, y) pueden obtenerse con base en las coordenadas (x', y') mediante la multiplicación matricial. ¿Cómo está relacionada esta matriz con A?

Ampliación de las ideas

72. Polinomio característico Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de 2×2 y defina $f(x) = \det(xI_2 - A)$.

a) Desarrolle el determinante para mostrar que $f(x)$ es un polinomio de grado 2 (el **polinomio característico** de A).

b) ¿Cómo está relacionado el término constante de $f(x)$ con el $\det A$?

c) ¿Cómo está relacionado el coeficiente de x con A?

d) Pruebe que $f(A) = 0$.

73. Polinomio característico Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de 3×3 y defina $f(x) = \det(xI_3 - A)$.

a) Desarrolle el determinante para mostrar que $f(x)$ es un polinomio de grado 3 (el polinomio característico de A).

b) ¿Cómo está relacionado el término constante de $f(x)$ con el $\det A$?

c) ¿Cómo está relacionado el coeficiente de x^2 con A?

d) Pruebe que $f(A) = 0$.

7.3 Sistemas lineales de varias variables y operaciones por renglones

Aprenderá acerca de...

- La forma triangular para sistemas lineales
- La eliminación gaussiana
- Las operaciones elementales por renglones y forma escalonada por renglones
- La forma escalonada reducida por renglones
- La resolución de sistemas con matrices inversas
- Aplicaciones

. . . porque

Muchas aplicaciones en negocios y ciencias se modelan mediante sistemas de ecuaciones lineales con tres o más variables.

Forma triangular para sistemas lineales

El método de eliminación utilizado en la sección 7.1 puede ampliarse a sistemas de ecuaciones lineales (de primer grado) con más de dos variables. El objetivo del método de eliminación es rescribir el sistema como un *sistema equivalente* de ecuaciones cuya solución sea obvia. Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

Una *forma triangular* de un sistema es una forma equivalente a partir de la cual es fácil leer la solución. A continuación se da un ejemplo de un sistema en la forma triangular.

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ y - 2z &= -7 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

Esta conveniente forma triangular nos permite resolver el sistema usando sustitución, como se ilustra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Resolución mediante sustitución

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ y - 2z &= -7 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN La tercera ecuación determina z, a saber, $z = 3$. Sustituya el valor de z en la segunda ecuación para determinar y.

$$\begin{aligned} y - 2z &= -7 && \text{Segunda ecuación.} \\ y - 2(3) &= -7 && \text{Sustituir } z = 3. \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Por último, sustituya los valores para y y z en la primera ecuación para determinar x.

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 && \text{Primera ecuación.} \\ x - 2(-1) + 3 &= 7 && \text{Sustituir } y = -1, z = 3. \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$, o la terna ordenada $(2, -1, 3)$.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS

El método de solución utilizado en el ejemplo 1, en ocasiones, se denomina sustitución hacia atrás.

Eliminación gaussiana

La transformación de un sistema a la forma triangular es **eliminación gaussiana**, denominada así en honor del famoso matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777−1855). A continuación se dan las operaciones necesarias para transformar un sistema de ecuaciones lineales a la forma triangular.

Sistemas equivalentes de ecuaciones lineales

Las operaciones siguientes producen un sistema equivalente de ecuaciones lineales.

1. Intercambiar cualesquier dos ecuaciones del sistema.
2. Multiplicar (o dividir) una de las ecuaciones entre cualquier número real distinto de cero.
3. Sumar un múltiplo de una ecuación a cualquier otra ecuación del sistema.

Observe cómo utilizamos la propiedad 3 para convertir el sistema del ejemplo 2 a la forma triangular.

EJEMPLO 2 Uso de la eliminación gaussiana

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ 3x - 5y + z &= 14 \\ 2x - 2y - z &= 3. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Cada paso en el proceso siguiente conduce a un sistema de ecuaciones equivalentes al sistema original.

Multiplique la primera ecuación por -3 y sume el resultado a la segunda ecuación, reemplazando la segunda ecuación (deje la primera y tercera ecuaciones sin cambio).

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ y - 2z &= -7 \\ 2x - 2y - z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -3x + 6y - 3z &= -21 \\ 3x - 5y + z &= 14 \end{aligned}$$

Multiplique la primera ecuación por -2 y sume el resultado a la tercera ecuación, reemplazando la tercera ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ y - 2z &= -7 \\ 2y - 3z &= -11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -2x + 4y - 2z &= -14 \\ 2x - 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

Multiplique la segunda ecuación por -2 y sume el resultado a la tercera ecuación, reemplazando la tercera ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ y - 2z &= -7 \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -2y + 4z &= 14 \\ 2y - 3z &= -11 \end{aligned}$$

Éste es el mismo sistema del ejemplo 1 y es una forma triangular del sistema original. Del ejemplo 1 sabemos que la solución es $(2, -1, 3)$.

Ahora resuelva el ejercicio 3.

Para un sistema de ecuaciones que tiene exactamente una solución, el sistema final del ejemplo 2 está en **forma triangular**. En este caso, el término inicial (el de más a la derecha) de cada ecuación tiene coeficiente 1, la tercera ecuación tiene una variable (z), la segunda tiene a lo más dos variables, incluyendo una que no está en la tercera ecuación (y) y la primera ecuación tiene la variable restante, en este caso x.

EJEMPLO 3 Determinación de que no hay solución

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 4 \\ -x + 2y - 5z &= 3 \\ 5x - 13y + 13z &= 8. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Utilice eliminación gaussiana.

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 4 \\ -y - 4z &= 7 \\ 5x - 13y + 13z &= 8 \end{aligned} \qquad \text{Sumar la 1° ecuación a la 2°.}$$

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 4 \\ -y - 4z &= 7 \\ 2y + 8z &= -12 \end{aligned} \qquad \text{Multiplicar la 1° ecuación por } -5 \text{ y sumar a la 3° ecuación.}$$

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 4 \\ -y - 4z &= 7 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{Multiplicar la 2° ecuación por 2 y sumar a la 3° ecuación.}$$

Como $0 = 2$ nunca es verdadera, concluimos que este sistema no tiene solución.

Ahora resuelva el ejercicio 5.

Operaciones elementales por renglones y forma escalonada por renglones

Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones lineales mediante la eliminación gaussiana, en realidad toda la acción se lleva a cabo sobre los coeficientes de las variables. Las matrices pueden usarse para registrar los coeficientes conforme avanzamos por los pasos del proceso de eliminación gaussiana. Ilustramos con el sistema del ejemplo 2.

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ 3x - 5y + z &= 14 \\ 2x - 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

La **matriz aumentada** de este sistema de ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & 1 & 14 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Las entradas en la última columna son los números del lado derecho de las ecuaciones. Para el registro, la **matriz de coeficientes** del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aquí las entradas son los coeficientes de las variables. Más adelante, en esta sección, utilizaremos esta matriz para resolver ciertos sistemas lineales.

Repetimos el proceso de eliminación gaussiana utilizado en el ejemplo 2 y registramos la acción correspondiente en la matriz aumentada.

Sistema de ecuaciones	**Matriz aumentada**	
$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ y - 2z &= -7 \\ 2x - 2y - z &= 3 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$	Multiplicar la ec. 1 (renglón 1) por -3, sumar el resultado a la ec. 2 (renglón 2) reemplazando la ec. 2 (renglón 2).
$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ y - 2z &= -7 \\ 2y - 3z &= -11 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & -11 \end{bmatrix}$	Multiplicar la ec. 1 (renglón 1) por -2, sumar el resultado a la ec. 3 (renglón 3) reemplazando la ec. 3 (renglón 3).
$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ y - 2z &= -7 \\ z &= 3 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	Multiplicar la ec. 2 (renglón 2) por -2, sumar el resultado a la ec. 3 (renglón 3) reemplazando la ec. 3 (renglón 3).

La matriz aumentada anterior, correspondiente a la forma triangular del sistema de ecuaciones original, es una *forma escalonada por renglones* de la matriz aumentada del sistema de ecuaciones original. En general, los últimos renglones de una forma escalonada por renglones de una matriz *pueden* consistir únicamente en ceros. Veremos ejemplos como éste en un momento.

DEFINICIÓN Forma escalonada por renglones de una matriz

Una matriz está en la **forma escalonada por renglones** si se satisfacen las condiciones siguientes.

1. Los renglones que consisten únicamente en ceros (si los hay) aparecen en la parte inferior de la matriz.
2. En un renglón que no consiste sólo de ceros, la primera entrada diferente de cero es 1.
3. El subíndice de la columna con el 1 de más a la derecha aumenta conforme el subíndice del renglón aumenta.

Otra forma de expresar las partes 2 y 3 de la definición anterior es decir que los 1 de más a la derecha se mueven a la derecha conforme descendemos por los renglones.

Nuestro objetivo es tomar un sistema de ecuaciones, escribir la matriz aumentada correspondiente y transformarla a una forma escalonada por renglones sin acarrear las ecuaciones. De allí podemos leer con bastante facilidad las soluciones del sistema.

Las operaciones que utilizamos para transformar un sistema lineal a la forma triangular equivalente corresponden a las operaciones elementales por renglón de la matriz aumentada correspondiente del sistema lineal.

Operaciones elementales por renglón sobre una matriz

Una combinación de las operaciones siguientes transformará una matriz en la forma escalonada por renglones.

1. Intercambiar cualesquier dos renglones.
2. Multiplicar todos los elementos de un renglón por un número real distinto de cero.
3. Sumar un múltiplo de un renglón a cualquier otro renglón.

El ejemplo 4 ilustra cómo podemos transformar la matriz aumentada en la forma escalonada por renglón para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

NOTACIÓN

1. R_{ij} indica el intercambio de los renglones i y j de una matriz.
2. kR_i indica la multiplicación del renglón i por el número real distinto de cero k.
3. $kR_i + R_j$ indica la suma de k veces el renglón i al renglón j.

FORMA ESCALONADA POR RENGLONES

¡Proceda con precaución! Puede utilizar su graficadora para determinar una forma escalonada por renglones de una matriz; sin embargo, la forma escalonada por renglones no es única. Su graficadora puede producir una forma escalonada por renglones diferente de la que usted obtenga con lápiz y papel. Por fortuna, todas las formas escalonadas por renglones producen la misma solución para el sistema de ecuaciones (correspondientemente, una forma triangular de un sistema lineal tampoco es única).

EJEMPLO 4 Determinación de una forma escalonada por renglones

Resuelva el sistema

$$x - y + 2z = -3$$
$$2x + y - z = 0$$
$$-x + 2y - 3z = 7.$$

SOLUCIÓN Aplicamos operaciones elementales por renglón para determinar una forma escalonada por renglones de la matriz aumentada. Las operaciones elementales por renglón utilizadas se registran arriba de las flechas, utilizando la notación de la nota al margen.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)R_1+R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)R_2+R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/2)R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La última matriz está en la forma escalonada por renglones. Luego convertimos cada renglón en la forma de ecuación y completamos la solución mediante sustitución.

continúa

$$\begin{array}{rrr} & y - z = 4 & x - y + 2z = -3 \\ z = 3 & y - 3 = 4 & x - 7 + 2(3) = -3 \\ & y = 7 & x = -2 \end{array}$$

La solución del sistema original de ecuaciones es $(-2, 7, 3)$.

Ahora resuelva el ejercicio 33.

Forma escalonada reducida por renglones

Si continuamos aplicando las operaciones elementales por renglón a una forma escalonada por renglones de una matriz, podemos obtener una matriz en la que cada columna que tenga un 1 como primer elemento distinto de cero (llamado 1 líder) y 0 en las demás entradas. Ésta es la **forma escalonada reducida por renglones** de la matriz. Generalmente es más sencillo leer la solución de la forma escalonada reducida por renglones.

Aplicamos las operaciones elementales a la forma escalonada por renglones encontrada en el ejemplo 4 hasta que encontremos la forma escalonada reducida por renglones.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_3+R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

A partir de la forma escalonada reducida por renglones, de manera inmediata podemos leer la solución del sistema del ejemplo 4: $x = -2$, $y = 7$, $z = 3$. La figura 7.14 muestra que la matriz final anterior es la forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada del ejemplo 4.

```
rref([A])
        [[1  0  0  -2]
         [0  1  0  7 ]
         [0  0  1  3 ]]
```

FIGURA 7.14 *A* es la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales del ejemplo 4. "rref", por sus siglas en inglés, le indica a la graficadora que produzca la forma escalonada reducida por renglones de *A*.

EJEMPLO 5 Determinación de que existe un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + y + 4z &= 8 \\ x + 2y - z &= 1. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN La figura 7.15 muestra la forma escalonada reducida por renglones para la matriz aumentada del sistema. Así, el sistema de ecuaciones siguiente es equivalente al sistema original

$$\begin{aligned} x + 3z &= 5 \\ y - 2z &= -2 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Despejando, en términos de z, a x y y en las primeras dos ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= -3z + 5 \\ y &= 2z - 2. \end{aligned}$$

continúa

```
rref([A])
        [[1  0  3   5 ]
         [0  1  -2  -2]
         [0  0  0   0 ]]
```

FIGURA 7.15 La forma escalonada reducida por renglones para la matriz aumentada del ejemplo 5.

Este sistema tiene un número infinito de soluciones ya que para cada valor de z podemos utilizar dos ecuaciones para determinar los valores correspondientes para x y y.

Interprete

La solución es el conjunto de todas las ternas ordenadas de la forma $(-3z + 5, 2z - 2, z)$, donde z es cualquier número real.

Ahora resuelva el ejercicio 39.

También podemos resolver sistemas lineales con más de tres variables, o más de tres ecuaciones, o ambos, mediante la determinación de la forma escalonada por renglones (o la reducida por renglones). El conjunto solución puede ser más complicado que el ilustrado en el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Determinación de que hay un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -1 \\ 2x + 3y - 4z + w &= -1 \\ 3x + 5y - 7z + w &= -2. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN La matriz aumentada de 3×5 es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -7 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

La figura 7.16 muestra la forma escalonada reducida por renglones, con base en la cual podemos leer que

$$\begin{aligned} x &= -z - 2w + 1 \\ y &= 2z + w - 1. \end{aligned}$$

Este sistema tiene un número infinito de soluciones, ya que para cada par de valores para z y w podemos utilizar estas dos ecuaciones para determinar los valores correspondientes para x y y.

Interpretar

La solución es el conjunto de todas las 4−adas ordenadas de la forma $(-z - 2w + 1, 2z + w - 1, z, w)$, donde z y w son cualesquier números reales.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

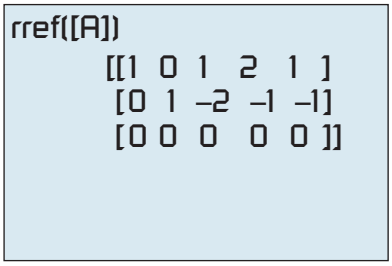


FIGURA 7.16 La forma escalonada reducida por renglones para la matriz aumentada del ejemplo 6.

Resolución de sistemas con matrices inversas

Si un sistema lineal consiste en el mismo número de ecuaciones que variables, entonces la matriz de coeficientes es cuadrada. Si además esta matriz es no singular, entonces podemos resolver el sistema empleando la técnica ilustrada en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Resolución de un sistema mediante el uso de matrices inversas

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ -x + y &= 5. \end{aligned}$$

continúa

ECUACIONES LINEALES

Si a y b son números reales con $a \neq 0$, la ecuación lineal $ax = b$ tiene una solución única, $x = a^{-1}b$. Una proposición análoga se cumple para la ecuación lineal matricial $AX = B$, cuando A es una matriz cuadrada no singular (consulte el teorema de sistemas cuadrados lineales invertibles).

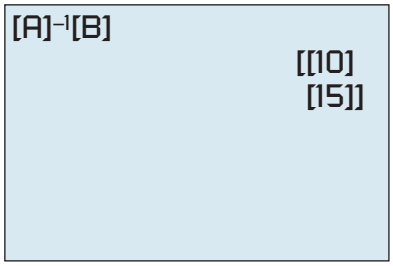


FIGURA 7.17 La solución de la ecuación matricial del ejemplo 7.

SOLUCIÓN Primero escribimos el sistema como una ecuación matricial. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ -x + y \end{bmatrix}$$

por lo que

$$AX = B,$$

donde A es la matriz de coeficientes del sistema. Con facilidad podemos comprobar que $\det A = 1$, así que A^{-1} existe. De la figura 7.17, obtenemos

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema es $x = 10$, $y = 15$, o $(10, 15)$.

Ahora resuelva el ejercicio 49.

Los ejemplos 7 y 8 son dos ejemplos del teorema siguiente.

TEOREMA Sistemas lineales cuadrados invertibles

Sea A la matriz de coeficientes de un sistema de n ecuaciones lineales con n variables, dado por $AX = B$, donde X es una matriz de variables de $n \times 1$ y B es la matriz de $n \times 1$ de números del lado derecho de las ecuaciones. Si A^{-1} existe, entonces el sistema de ecuaciones tiene la solución única

$$X = A^{-1}B.$$

EJEMPLO 8 Resolución de un sistema mediante matrices inversas

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 3y + 6z &= 20 \\ x - 3y + 10z &= 40 \\ -x + 3y - 5z &= 30. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -3 & 10 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones puede escribirse como

$$A \cdot X = B.$$

continúa

```
det([A])
                    -30
[A]^-1[B]
          [[18        ]
          [39.33333333]
          [14        ]]
```

FIGURA 7.18 La solución del sistema del ejemplo 8.

La figura 7.18 muestra que $\det A = -30 \neq 0$, por lo que A^{-1} existe y

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 18 \\ 39.\overline{3} \\ 14 \end{bmatrix}.$$

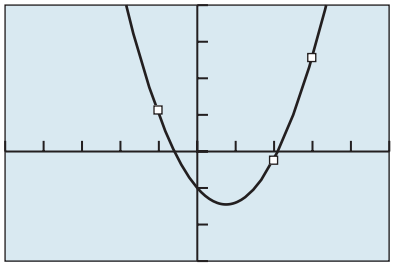
Interprete

La solución del sistema de ecuaciones es $x = 18$, $y = 39\frac{1}{3}$, y $z = 14$, o bien $(18, 39\frac{1}{3}, 14)$.

Ahora resuelva el ejercicio 51.

```
[A]^-1[B]
          [[4 ]
           [-6]
           [-5]]
```

a)



[−5, 5] por [−15, 20]

b)

FIGURA 7.19 a La solución de la ecuación matricial del ejemplo 9. b Una gráfica de $f(x) = 4x^2 - 6x - 5$ superpuesta a un diagrama de dispersión de los tres puntos $(-1, 5)$, $(2, -1)$ y $(3, 13)$.

Aplicaciones

Cualesquier tres puntos no colineales con coordenadas x distintas determinan exactamente un polinomio de segundo grado, como se ilustra en el ejemplo 9. La gráfica de un polinomio de segundo grado es una parábola.

EJEMPLO 9 Ajuste de una parábola a tres puntos

Determine a, b y c de modo que los puntos $(-1, 5)$, $(2, -1)$ y $(3, 13)$ estén en la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

SOLUCIÓN

Modele

Debemos tener $f(-1) = 5$, $f(2) = -1$ y $f(3) = 13$:

$$f(-1) = a - b + c = 5$$
$$f(2) = 4a + 2b + c = -1$$
$$f(3) = 9a + 3b + c = 13.$$

El sistema anterior de tres ecuaciones lineales con tres variables, a, b y c, puede escribirse en forma matricial $AX = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Resuelva numéricamente

La figura 7.19a muestra que

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Así, $a = 4$, $b = -6$ y $c = -5$. El polinomio de segundo grado $f(x) = 4x^2 - 6x - 5$ contiene a los puntos $(-1, 5)$, $(2, -1)$ y $(3, 13)$ (figura 7.19b).

Ahora resuelva el ejercicio 67.

EXPLORACIÓN 1 **Mezcla de soluciones**

La farmacia de Aileen necesita prepara una mezcla de 60 L que tenga 40% de ácido utilizando tres concentraciones de ácido. La primera concentración tiene 15% de ácido, la segunda 35% y la tercera 55%. Debido a las cantidades de soluciones ácidas a la mano, necesitan utilizar el doble de la solución al 35% que la solución al 55%. ¿Cuánto deben utilizar de cada solución?

Sean x = el número de litros utilizados de la solución al 15%, y = el número de litros utilizados de la solución al 35% y z = el número de litros utilizados de solución al 55%.

1. Explique cómo está relacionada la ecuación $x + y + z = 60$ con el problema.
2. Explique cómo está relacionada la ecuación $0.15x + 0.35y + 0.55z = 24$ con el problema.
3. Explique cómo está relacionada la ecuación $y = 2z$ con el problema.
4. Escriba el sistema de tres ecuaciones obtenido en las partes 1 a 3 en la forma $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes del sistema. ¿Cuáles son A, B y X?
5. Resuelva la ecuación matricial de la parte 4.
6. Interprete la solución de la parte 5, en términos del contexto del problema.

REPASO RÁPIDO 7.3 *(Para obtener ayuda consulte las secciones 1.2 y 7.2)*

En los ejercicios 1 y 2 determine la cantidad de ácido puro en la solución.

1. 40 L de una solución ácida al 30%.
2. 60 mL de una solución ácida al 14%.

En los ejercicios 3 y 4 determine la cantidad de agua en la solución.

3. 50 L de una solución ácida al 24%.
4. 80 mL de una solución ácida al 70%.

En los ejercicios 5 y 6 determine que puntos están en la gráfica de la función.

5. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
   a) $(-1, 6)$ **b)** $(2, 1)$
6. $f(x) = x^3 - 4x - 1$
   a) $(0, -1)$ **b)** $(-2, -17)$

En los ejercicios 7 y 8 resuelva para x o y en términos de las otras variables.

7. $y + z - w = 1$
8. $x - 2z + w = 3$

En los ejercicios 9 y 10 determine la inversa de la matriz.

9. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7.3

En los ejercicios 1 y 2 utilice sustitución para resolver el sistema de ecuaciones.

1. $\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ 2y + 3z &= 1 \\ z &= -2 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x - y + 2z &= -2 \\ y + 3z &= 3 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$

En los ejercicios del 3 al 8 utilice eliminación gaussiana para resolver el sistema de ecuaciones.

3. $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x - 3z &= -1 \\ -x - y + 2z &= -1 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x + 3y - z &= -3 \\ 3y + z &= 8 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x + y + z &= -3 \\ 4x - y &= -5 \\ -3x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x + y - 3z &= -1 \\ 2x - 3y + z &= 4 \\ 3x - 7y + 5z &= 4 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x + y - z &= 4 \\ y + w &= -4 \\ x - y &= 1 \\ x + z + w &= 1 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} \frac{1}{2}x - y + z - w &= 1 \\ -x + y + z + 2w &= -3 \\ x - z &= 2 \\ y + w &= 0 \end{aligned}$

En los ejercicios del 9 al 12 realice sobre la matriz la operación elemental por renglones indicada.

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

9. $(3/2)R_1 + R_3$

10. $(1/2)R_1$

11. $(-2)R_2 + R_1$

12. $(1)R_1 + R_2$

En los ejercicios del 13 al 16, ¿qué operación elemental por renglones se aplicó a

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

para obtener la matriz dada?

13. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0.75 & 0.25 & -0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 17 al 20 determine una forma escalonada por renglones para la matriz

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -6 & 10 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 6 & -6 & 2 \\ 3 & 12 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & -6 \\ 2 & 5 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 21 al 24 determine la forma escalonada reducida por renglones para la matriz.

21. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 6 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & -7 & -4 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 25 al 28 escriba la matriz aumentada correspondiente al sistema de ecuaciones.

25. $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 1 \\ -x + y - 4z &= -3 \\ 3x - z &= 2 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 3x - 4y + z - w &= 1 \\ x + z - 2w &= 4 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 2x - 5y + z - w &= -3 \\ x - 2z + w &= 4 \\ 2y - 3z - w &= 5 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ -x + 5y &= 7 \end{aligned}$

En los ejercicios del 29 al 32 escriba el sistema de ecuaciones que corresponda a la matriz aumentada.

29. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 33 y 34 resuelva el sistema de ecuaciones, determinando una forma escalonada por renglones para la matriz aumentada.

33. $\begin{aligned} x - 2y + z &= 8 \\ 2x + y - 3z &= -9 \\ -3x + y + 3z &= 5 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} 3x + 7y - 11z &= 44 \\ x + 2y - 3z &= 12 \\ 4x + 9y - 13z &= 53 \end{aligned}$

En los ejercicios del 35 al 44 resuelva el sistema de ecuaciones determinando la forma escalonada reducida por renglones para la matriz aumentada.

35. $x + 2y - z = 3$
$3x + 7y - 3z = 12$
$-2x - 4y + 3z = -5$

36. $x - 2y + z = -2$
$2x - 3y + 2z = 2$
$4x - 8y + 5z = -5$

37. $x + y + 3z = 2$
$3x + 4y + 10z = 5$
$x + 2y + 4z = 3$

38. $x - z = 2$
$-2x + y + 3z = -5$
$2x + y - z = 3$

39. $x + z = 2$
$2x + y + z = 5$

40. $x + 2y - 3z = 1$
$-3x - 5y + 8z = -29$

41. $x + 2y = 4$
$3x + 4y = 5$
$2x + 3y = 4$

42. $x + y = 3$
$2x + 3y = 8$
$2x + 2y = 6$

43. $x + y - 3z = 1$
$x - z - w = 2$
$2x + y - 4z - w = 3$

44. $x - y - z + 2w = -3$
$2x - y - 2z + 3w = -3$
$x - 2y - z + 3w = -6$

En los ejercicios 45 y 46, escriba el sistema de ecuaciones como una ecuación matricial $AX = B$, con A como la matriz de coeficientes del sistema.

45. $2x + 5y = -3$
$x - 2y = 1$

46. $5x - 7y + z = 2$
$2x - 3y - z = 3$
$x + y + z = -3$

En los ejercicios 47 y 48 escriba la ecuación matricial como un sistema de ecuaciones.

47. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

48. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 49 al 54 resuelva el sistema de ecuaciones utilizando una matriz inversa.

49. $2x - 3y = -13$
$4x + y = -5$

50. $x + 2y = -2$
$3x - 4y = 9$

51. $2x - y + z = -6$
$x + 2y - 3z = 9$
$3x - 2y + z = -3$

52. $x + 4y - 2z = 0$
$2x + y + z = 6$
$-3x + 3y - 5z = -13$

53. $2x - y + z + w = -3$
$x + 2y - 3z + w = 12$
$3x - y - z + 2w = 3$
$-2x + 3y + z - 3w = -3$

54. $2x + y + 2z = 8$
$3x + 2y - z - w = 10$
$-2x + y - 3w = -1$
$4x - 3y + 2z - 5w = 39$

En los ejercicios del 55 al 66 utilice un método de su elección para resolver el sistema de ecuaciones.

55. $2x - y = 10$
$x - z = -1$
$y + z = -9$

56. $1.25x + z = -2$
$y - 5.5z = -2.75$
$3x - 1.5y = -6$

57. $x + 2y + 2z + w = 5$
$2x + y + 2z = 5$
$3x + 3y + 3z + 2w = 12$
$x + z + w = 1$

58. $x - y + w = -4$
$-2x + y + z = 8$
$2x - 2y - z = -10$
$-2x + z + w = 5$

59. $x - y + z = 6$
$x + y + 2z = -2$

60. $x - 2y + z = 3$
$2x + y - z = -4$

61. $2x + y + z + 4w = -1$
$x + 2y + z + w = 1$
$x + y + z + 2w = 0$

62. $2x + 3y + 3z + 7w = 0$
$x + 2y + 2z + 5w = 0$
$x + y + 2z + 3w = -1$

63. $2x + y + z + 2w = -3.5$
$x + y + z + w = -1.5$

64. $2x + y + 4w = 6$
$x + y + z + w = 5$

65. $x + y - z + 2w = 0$
$y - z + 2w = -1$
$x + y + 3w = 3$
$2x + 2y - z + 5w = 4$

66. $x + y + w = 2$
$x + 4y + z - 2w = 3$
$x + 3y + z - 3w = 2$
$x + y + w = 2$

En los ejercicios del 67 al 70 determine f de modo que su gráfica contenga los puntos dados.

67. Ajuste de curva $f(x) = ax^2 + bx + c$.
$(-1, 3), (1, -3), (2, 0)$.

68. Ajuste de curva $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
$(-2, -37), (-1, -11), (0, -5), (2, 19)$

69. Familia de curvas $f(x) = ax^2 + bx + c$.
$(-1, -4), (1, -2)$

70. Familia de curvas $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
$(-1, -6), (0, -1), (1, 2)$.

71. Población La tabla 7.5 proporciona la población (en miles) para Corpus Christi, TX y Garland, TX, para varios años. Utilice $x = 0$ para 1980, $x = 1$ para 1981 y así sucesivamente.

a) Determine la ecuación de regresión lineal para los datos de Corpus Christi y superponga su gráfica a un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine la ecuación de regresión lineal para los datos de Garland y superpóngala sobre un diagrama de dispersión de los datos.

c) Estime cuándo la población de las dos ciudades será la misma.



Tabla 7.5 Población

Año	Corpus Christi (miles)	Garland (miles)
1980	232	139
1990	258	181
2000	277	216
2003	279	218

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2004-2005.

72. Población La tabla 7.6 proporciona la población (en miles) para Anaheim, CA y Anchorage, AK, para varios años. Utilice $x = 0$ para 1970, $x = 1$ para 1971 y así sucesivamente.

a) Determine la ecuación de regresión para los datos de Anaheim y superponga su gráfica a un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine la ecuación de regresión para los datos de Anchorage y superponga su gráfica a un diagrama de dispersión de los datos.

c) Estime cuándo la población de las dos ciudades será la misma.

Tabla 7.6 Población

Año	Anaheim (miles)	Anchorage (miles)
1970	166	48
1980	219	174
1990	267	226
2000	328	260
2003	332	271

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2001, 2004-2005.

73. Boletos de trenes En el zoológico de Pittsburgh, los niños pasean en un tren por 25 centavos, los adultos pagan $1.00 y las personas de la tercera edad 75 centavos. En un día dado, 1,400 pasajeros pagaron un total de $740 por los viajes. Había 250 más niños que todos los otros visitantes. Determine el número de niños, adultos y personas de la tercera edad.

74. Fabricación Metales Stewart tiene disponibles tres aleaciones de plata. Una tiene 22% de plata, otra tiene 30% de plata y la tercera tiene 42% de plata. ¿Cuántos gramos de cada aleación se requieren para producir 80 gramos de una nueva aleación que contenga 34% de plata, si la cantidad utilizada de la aleación al 30% es el doble de la cantidad de aleación al 22% utilizada?

75. Inversión Mónica recibe una herencia de $80,000. Ella invierte parte en CD (certificados de depósito) que genera 6.7% de RPA (rendimiento porcentual anual) parte en bonos, que ganan 9.3% de RPA y el resto en un fondo de valores que gana 15.6% de RPA. Ella invierte el triple en el fondo de valores que en los otros dos combinados. ¿Cuánto debe tener en cada inversión, si recibe $10,843 de intereses el primer año?

76. Inversiones Óscar destina $20,000 a tres inversiones que generan 6%, 8% y 10% de RPA. Invierte $9,000 más en la inversión de 10% que en la inversión del 6%. ¿Cuánto ha invertido a cada tasa, si él recibe $1,780 de interés el primer año?

77. Inversiones Morgan tiene $50,000 para invertir y quiere recibir $5,000 de interés el primer año. Pone parte en certificados de depósito que devengan 5.75% de RPA, parte en bonos que generan 8.7% de RPA y el resto en un fondo de valores que generan 14.6% de RPA. ¿Cuánto debe invertir a cada tasa, si pone la menor cantidad posible en el fondo de valores?

78. Mezcla de soluciones ácidas La farmacia de Simpson necesita preparar una mezcla de 40 L al 32% de ácido, a partir de tres soluciones: una solución ácida al 10%, otra al 25% y una tercera al 50%. ¿Cuánto debe utilizarse de cada solución, si la farmacia de Simpson quiere utilizar lo menos posible de la solución al 50%?

79. Cambio En su caja de monedas, Mathew tiene 74 monedas que consisten en monedas de 5, 10 y 25 centavos. El valor total de las monedas es $8.85. Si el número de monedas de 5 y de 25 centavos es cuatro veces más que el número de monedas de 10 centavos, determine cuántas monedas de cada denominación tiene Mathew en su depósito de monedas.

80. Dinero para vacaciones Con el fin de tomar vacaciones con su familia, Heather ha ahorrado $177 en 51 billetes de $1, $5 y $10. Si el número de billetes de $5 es tres veces el número de billetes de $10, ¿cuántos de cada denominación tiene?

En los ejercicios 81 y 82 utilice matrices inversas para determinar el punto de equilibrio para las curvas de oferta y demanda.

81. $p = 100 - 5x$ Curva de demanda

$p = 20 + 10x$ Curva de oferta

82. $p = 150 - 12x$ Curva de demanda

$p = 30 + 24x$ Curva de oferta

83. Escriba para aprender Explique por qué la suma de un renglón a otro renglón en una matriz es una operación elemental por renglones.

84. Escriba para aprender Explique por qué restar un renglón de otro renglón en una matriz es una operación elemental por renglones.

Preguntas de examen estandarizado

85. Verdadero o falso Toda matriz cuadrada no cero tiene una inversa. Justifique su respuesta.

86. Verdadero o falso La forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada de un sistema de tres ecuaciones con tres variables debe ser de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix},$$

donde a, b y c, son números reales. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 87 al 90 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver el problema.

87. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$?

A) 0 **B)** 4

C) -4 **D)** 8

E) -8

88. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la matriz aumentada del sistema de ecuaciones?

$$x + 2y + z = -1$$
$$2x - y + 3z = -4$$
$$3x + y - z = -2$$

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

89. Opción múltiple La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ se obtuvo a partir de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ mediante una operación elemental de renglones. ¿Cuál de las siguientes describe la operación elemental por renglones?

A) $(-2)R_1$ **B)** $(-2)R_1 + R_2$

C) $(-2)R_2 + R_1$ **D)** $(2)R_1 + R_2$

E) $(2)R_2 + R_1$

90. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes es la forma escalonada reducida por renglones para la siguiente matriz aumentada?

$$x + 2y - z = 8$$
$$-x + 3y + 2z = 3$$
$$2x - y + 3z = -19$$

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

Exploraciones

91. Actividad en equipo **Investigación de la solución de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 variables** Suponga que la gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un plano en el espacio tridimensional (estudiará éstos en el capítulo 8).

a) Explique, desde el punto de vista geométrico, cómo tales sistemas pueden tener solución única.

b) Explique, desde el punto de vista geométrico, cómo tales sistemas no pueden tener solución. Describa varias posibilidades.

c) Explique, geométricamente, cómo tales sistemas pueden tener un número infinito de soluciones. Describa varias posibilidades. Construya modelos físicos si cree que pueden ayudarle.

Ampliación de las ideas

92. Escriba para aprender Explique por qué no es única una forma escalonada por renglones de una matriz. Es decir, muestre que una matriz puede tener dos formas escalonada por renglones. Proporcione un ejemplo.

Las raíces del polinomio característico $C(x) = \det(xI_n - A)$ de la matriz A de $n \times n$ son los **valores propios** (valores característicos, autovalores o **eigenvalores**) de A (consulte los ejercicios 72 y 73 de la sección 7.2). Utilice esta información en los ejercicios 93 y 94.

93. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Determine el polinomio característico $C(x)$ de A.

b) Determine la gráfica de $y = C(x)$.

c) Determine los valores propios de A.

d) Compare $\det A$ con la intersección y de la gráfica de $y = C(x)$.

e) Compare la suma de los elementos de la diagonal principal de A $(a_{11} + a_{22})$ con la suma de los valores propios de A.

94. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine el polinomio característico $C(x)$ de A.

b) Determine la gráfica de $y = C(x)$.

c) Determine los valores propios de A.

d) Compare $\det A$ con la intersección y de la gráfica de $y = C(x)$.

e) Compare la suma de los elementos de la diagonal principal de A $(a_{11} + a_{22})$ con la suma de los valores propios de A.

7.4 Fracciones parciales

Aprenderá acerca de...

- La descomposición en fracciones parciales
- Los denominadores con factores lineales
- Los denominadores con factores cuadráticos irreducibles
- Aplicaciones

. . . porque

Las descomposiciones en fracciones parciales se utilizan en cálculo en integración y pueden usarse para guiar el bosquejo de la gráfica de una función racional.

Descomposición en fracciones parciales

En la sección 2.6 vimos que un polinomio con coeficientes reales podría factorizarse en un producto de factores con coeficientes reales donde cada factor fuera un factor lineal o un factor cuadrático irreducible. En esta sección, mostraremos que una función racional puede expresarse como una suma de fracciones racionales donde cada denominador es una potencia de un factor lineal o una potencia de un factor cuadrático irreducible.

Por ejemplo,

$$\frac{3x-4}{x^2-2x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}.$$

Cada fracción en la suma es una **fracción parcial**, y la suma es una **descomposición en fracciones parciales** de la función racional original.

Descomposición en fracciones parciales de $f(x)/d(x)$

1. Grado de $f \geq$ grado de d: Utilice el algoritmo de la división para dividir f entre d para obtener el cociente q y el residuo r, y escribir
$$\frac{f(x)}{d(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}.$$
2. Factorice $d(x)$ en un producto de factores de la forma $(mx+n)^u$ o $(ax^2+bx+c)^v$, donde ax^2+bx+c es irreducible.
3. Para cada factor $(mx+n)^u$. La descomposición en fracciones parciales de $r(x)/d(x)$ debe incluir la suma
$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\cdots+\frac{A_u}{(mx+n)^u},$$
donde $A_1, A_2, \ldots, A_u$ son números reales.
4. Para cada factor $(ax^2+bx+c)^v$. La descomposición en fracciones parciales de $r(x)/d(x)$ debe incluir la suma
$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_vx+C_v}{(ax^2+bx+c)^v},$$
donde $B_1, B_2, \ldots, B_v$ y $C_1, C_2, \ldots, C_v$ son números reales.

La descomposición en fracciones parciales de la función racional original es la suma de $q(x)$ y las fracciones de las partes 3 y 4.

EJEMPLO 1 Cómo escribir la descomposición en factores

Escriba los términos de la descomposición en fracciones parciales de la función racional

$$\frac{5x-1}{x^3(x+3)(x^2+1)},$$

pero no resuelva para las constantes correspondientes.

continúa

SOLUCIÓN Aplicando la parte 3 al factor x^3 del denominador produce la expresión

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3}.$$

Luego, aplicando la parte 3 al factor $(x + 3)$ del denominador se obtiene la expresión

$$\frac{B_1}{x + 3}.$$

Por último, aplicando la parte 4 al factor $(x^2 + 1)$ del denominador, se obtiene la expresión

$$\frac{C_1x + D_1}{x^2 + 1}.$$

Al sumar estos términos se obtiene la descomposición en fracciones parciales para la función racional

$$\frac{5x - 1}{x^3(x + 3)(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x + 3} + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + 1}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Denominadores con factores lineales

Los ejemplos 2 y 3 ilustran cómo pueden determinarse las constantes A_i de la parte 3 del procedimiento de descomposición en fracciones parciales.

EJEMPLO 2 Descomposición de una fracción con factores lineales distintos

Determine la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{5x - 1}{x^2 - 2x - 15}.$$

SOLUCIÓN El denominador se factoriza en $(x + 3)(x - 5)$. Escribimos

$$\frac{5x - 1}{x^2 - 2x - 15} = \frac{A_1}{x + 3} + \frac{A_2}{x - 5}$$

y luego "quitamos las fracciones" multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $x^2 - 2x - 15$ para obtener

$$5x - 1 = A_1(x - 5) + A_2(x + 3)$$

$$5x - 1 = (A_1 + A_2)x + (-5A_1 + 3A_2).$$

Al comparar los coeficientes de la izquierda con los de la derecha de la ecuación anterior, obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones en las dos variables A_1 y A_2:

$$A_1 + A_2 = 5$$

$$-5A_1 + 3A_2 = -1.$$

continúa

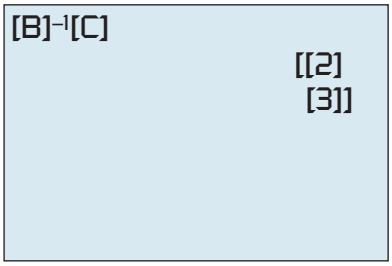
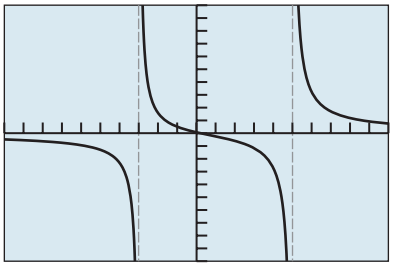


FIGURA 7.20 La solución del sistema de ecuaciones del ejemplo 2.



[−10, 10] por [−10, 10]

FIGURA 7.21 Las gráficas de $y = (5x - 1)/(x2 - 2x - 15)$ y $y = 2/(x + 3) + 3/(x - 5)$ parece que son iguales (ejemplo 2).

Podemos escribir este sistema en forma matricial como $BX = C$, donde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

y leer de la figura 7.20 que

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Así, $A_1 = 2$, $A_2 = 3$ y

$$\frac{5x - 1}{x^2 - 2x - 15} = \frac{2}{x + 3} + \frac{3}{x - 5}.$$

Respalde gráficamente

La figura 7.21 sugiere que las dos funciones siguientes son iguales:

$$y = \frac{5x - 1}{x^2 - 2x - 15} \quad \text{y} \quad y = \frac{2}{x + 3} + \frac{3}{x - 5}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 17.

EJEMPLO 3 Descomposición de una fracción con factores lineales repetidos

Determine la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{-x^2 + 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x}.$$

SOLUCIÓN El denominador se factoriza en $x(x - 2)^2$. Como el factor $x - 2$ está elevado al cuadrado, contribuye con dos términos en la descomposición:

$$\frac{-x^2 + 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 2} + \frac{A_3}{(x - 2)^2}.$$

Quitamos las fracciones multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $x^3 - 4x^2 + 4x$.

$$-x^2 + 2x^2 + 4 = A_1(x - 2)^2 + A_2x(x - 2) + A_3x$$

Después de desarrollar y reducir términos semejantes, en la ecuación anterior, obtenemos:

$$-x^2 + 2x + 4 = (A_1 + A_2)x^2 + (-4A_1 - 2A_2 + A_3)x + 4A_1.$$

Al comparar coeficientes de las potencias de x, en el lado izquierdo y el derecho de la ecuación anterior, obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= -1 \\ -4A_1 - 2A_2 + A_3 &= 2 \\ 4A_1 &= 4. \end{aligned}$$

La forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

continúa

del sistema anterior de ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Así, $A_1 = 1$, $A_2 = -2$, $A_3 = 2$ y

$$\frac{-x^2 + 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{x - 2} + \frac{2}{(x - 2)^2}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 25.

En ocasiones podemos resolver, para las variables introducidas en una descomposición en fracciones parciales, mediante la sustitución de valores estratégicos para x, como se ilustra en la exploración 1.

EXPLORACIÓN 1 **Revisión de los ejemplos 2 y 3**

1. Cuando quitamos fracciones en el ejemplo 2, obtuvimos la ecuación

$$5x - 1 = A_1(x - 5) + A_2(x + 3).$$

a) Sustituya $x = 5$ en esta ecuación y resuelva para A_2.

b) Sustituya $x = -3$ en esta ecuación y resuelva para A_1.

2. Cuando quitamos las fracciones en el ejemplo 3 obtuvimos la ecuación

$$-x^2 + 2x + 4 = A_1(x - 2)^2 + A_2x(x - 2) + A_3x.$$

a) Sustituya $x = 2$ en esta ecuación y resuelva para A_3.

b) Sustituya $x = 0$ en esta ecuación y resuelva para A_1.

c) Sustituya cualquier otro valor para x y utilice los valores obtenidos para A_1 y A_3 para resolver para A_2.

Denominadores con factores cuadráticos irreducibles

El ejemplo 4 muestra cómo determinar la descomposición en fracciones parciales para una función racional cuyo denominador tiene un factor cuadrático irreducible.

EJEMPLO 4 Descomposición de una fracción con un factor cuadrático irreducible

Determine la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

SOLUCIÓN Factorizamos el denominado agrupando términos:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + x - 1 &= x^2(x - 1) + (x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

continúa

Cada factor aparece una vez, así que cada uno lleva a un término en la descomposición:

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Quitamos las fracciones, multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $x^3 - x^2 + x - 1$:

$$x^2 + 4x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

Al desarrollar y reducir términos semejantes, en la ecuación anterior, obtenemos:

$$x^2 + 4x + 1 = (A + B)x^2 + (-B + C)x + (A - C).$$

Comparando los coeficientes de potencias de x en el lado izquierdo y el derecho de la ecuación anterior, obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$A + B = 1$$
$$-B + C = 4$$
$$A - C = 1.$$

Mediante cualquier de las técnicas de la sección 7.3, encontramos que $A = 3$, $B = -2$ y $C = 2$. Por tanto,

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{3}{x - 1} + \frac{-2x + 2}{x2 + 1}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 31.

EJEMPLO 5 Descomposición de una fracción con un factor cuadrático irreducible repetido

Determine la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{2x^3 - x^2 + 5x}{(x^2 + 1)^2}.$$

SOLUCIÓN El factor $(x^2 + 1)^2$ del denominador lleva a dos términos en la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{2x^3 - x^2 + 5x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{B_1x + C_1}{x^2 + 1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Quitamos las fracciones, multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(x^2 + 1)^2$:

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 + 5x &= (B_1x + C_1)(x^2 + 1) + B_2x + C_2 \\ &= B_1x^3 + C_1x^2 + (B_1 + B_2)x + (C_1 + C_2). \end{aligned}$$

Al comparar los coeficientes de potencias de x en el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación anterior, vemos que $B_1 = 2$, $C_1 = -1$, $B_1 + B_2 = 5$ y $C_1 + C_2 = 0$. Se deduce que $B_2 = 3$ y $C_2 = 1$. Por tanto,

$$\frac{2x^3 - x^2 + 5x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x - 1}{x^2 + 1} + \frac{3x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 29.

Aplicaciones

Cada parte de la descomposición en fracciones parciales de una función racional desempeña un papel central en el análisis de su gráfica. Un sumando puede usarse para describir el comportamiento en los extremos de la gráfica. Las otras partes pueden usarse para describir el comportamiento de la gráfica en una de sus asíntotas verticales, como se ilustra en el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Investigación de la gráfica de una función racional

Compare la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 14}{x^2 - 4}$$

con las gráficas de los términos de su descomposición en fracciones parciales.

SOLUCIÓN Utilizamos la división para rescribir $f(x)$ en la forma

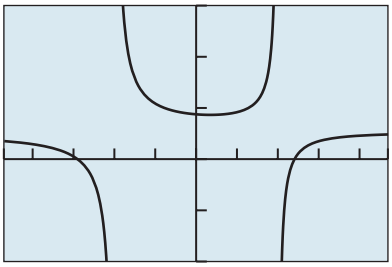
$$f(x) = 2 + \frac{x - 6}{x^2 - 4}.$$

Luego, utilizamos las técnicas de esta sección para determinar la descomposición en fracciones parciales de $(x - 6)/(x^2 - 4)$, y, a su vez, la de f:

$$f(x) = 2 + \frac{x - 6}{x^2 - 4} = 2 + \frac{2}{x + 2} + \frac{-1}{x - 2}.$$

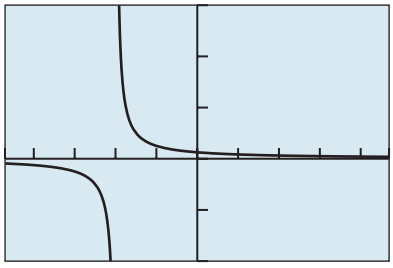
La figura 7.22 muestra la gráfica de f. Puede ver la relación de esta gráfica con la gráfica del comportamiento en los extremos, la asíntota $y = 2$, uno de los términos de f. La gráfica del término $y = 2/(x + 2)$ es muy similar a la gráfica de f cerca de $x = -2$ (figura 7.23a). La gráfica del término $y = -1/(x - 2)$ es muy similar con la gráfica de f cerca de $x = 2$ (figura 7.23b).

Ahora resuelva el ejercicio 33.



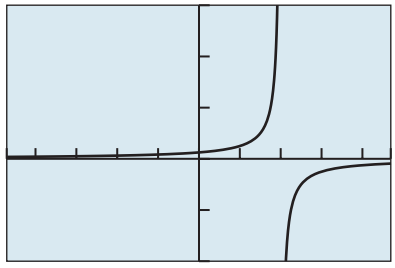
[−4.7, 4.7] por [−8, 12]

FIGURA 7.22 La gráfica de $f(x) = (2x^2 + x - 14)/(x2 - 4)$ (ejemplo 6).



[−4.7, 4.7] por [−8, 12]

a)



[−4.7, 4.7] por [−8, 12]

b)

FIGURA 7.23 Las gráficas de a: $y = 2/(x + 2)$, y b: $y = -1/(x - 2)$ (ejemplo 6).

REPASO RÁPIDO 7.4 *(Para obtener ayuda consulte las secciones A.2, A.3 y 2.4)*

En los ejercicios del 1 al 4 realice las operaciones indicadas y escriba su respuesta como una sola fracción reducida.

1. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-3}$ **2.** $\dfrac{5}{x+4}-\dfrac{2}{x+1}$

3. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ **4.** $\dfrac{3}{x^2+1}-\dfrac{x+1}{(x^2+1)^2}$

En los ejercicios 5 y 6 divida $f(x)$ entre $d(x)$ para obtener un cociente $q(x)$ y un residuo $r(x)$. Escriba un expresión resumen en la forma de fracción: $q(x)+r(x)/d(x)$.

5. $f(x)=3x^3-6x^2-2x+7,\ d(x)=x-2$

6. $f(x)=2x^3+3x^2-14x-8,\ d(x)=x^2+x-6$

En los ejercicios 7 y 8 escriba el polinomio como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

7. $x^4-2x^3+x^2-8x-12$ **8.** $x^4-x^3-15x^2-23x-10$

En los ejercicios 9 y 10 suponga que $f(x)=g(x)$. ¿Qué puede concluir con respecto de A, B, C y D?

9. $f(x)=Ax^2+Bx+C+1$

$g(x)=3x^2-x+2$

10. $f(x)=(A+1)x^3+Bx^2+Cx+D$

$g(x)=-x^3+2x^2-x-5.$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7.4

En los ejercicios del 1 al 4 escriba los términos para la descomposición en fracciones parciales de la función racional. No resuelva para las constantes.

1. $\dfrac{x^2-7}{x(x^2-4)}$ **2.** $\dfrac{x^4+3x^2-1}{(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)}$

3. $\dfrac{x^5-2x^4+x-1}{x^3(x-1)^2(x^2+9)}$ **4.** $\dfrac{x^2+3x+2}{(x^3-1)^3}$

En los ejercicios del 5 al 8 utilice matrices inversas para determinar la descomposición en fracciones parciales.

5. $\dfrac{x+22}{(x+4)(x-2)}=\dfrac{A}{x+4}+\dfrac{B}{x-2}$

6. $\dfrac{x-3}{x(x+3)}=\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x}$

7. $\dfrac{3x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$

8. $\dfrac{4x+4}{x^2(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+2}$

En los ejercicios del 9 al 12 utilice la forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada para determinar la descomposición en fracciones parciales.

9. $\dfrac{x^2-2x+1}{(x-2)^3}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{(x-2)^3}$

10. $\dfrac{5x^3-10x^2+5x-5}{(x^2+4)(x^2+9)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+4}+\dfrac{Cx+D}{x^2+9}$

11. $\dfrac{5x^5+22x^4+36x^3+53x^2+71x+20}{(x+3)^2(x^2+2)^2}$

$=\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{(x+3)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$

12. $\dfrac{-x^3-6x^2-5x+87}{(x-1)^2(x+4)^2}$

$=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+4}+\dfrac{D}{(x+4)^2}$

En los ejercicios del 13 al 16 determine la descomposición en fracciones parciales. Confirme algebraicamente su respuesta combinando las fracciones parciales.

13. $\dfrac{2}{(x-5)(x-3)}$ **14.** $\dfrac{4}{(x+3)(x+7)}$

15. $\dfrac{4}{x^2-1}$ **16.** $\dfrac{6}{x^2-9}$

En los ejercicios del 17 al 20 determine la descomposición en fracciones parciales. Respalde gráficamente su respuesta.

17. $\dfrac{1}{x^2+2x}$ **18.** $\dfrac{-6}{x^2-3x}$

19. $\dfrac{-x+10}{x^2+x-12}$ **20.** $\dfrac{7x-7}{x^2-3x-10}$

En los ejercicios del 21 al 32 determine la descomposición en fracciones parciales.

21. $\dfrac{x+17}{2x^2+5x-3}$ **22.** $\dfrac{4x-11}{2x^2-x-3}$

23. $\dfrac{2x^2+5}{(x^2+1)^2}$ **24.** $\dfrac{3x^2+4}{(x^2+1)^2}$

25. $\dfrac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ **26.** $\dfrac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}$

27. $\dfrac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}$ **28.** $\dfrac{5x^2+7x-4}{x^3+4x^2}$

29. $\dfrac{2x^3 + 4x - 1}{(x^2 + 2)^2}$

30. $\dfrac{3x^3 + 6x - 1}{(x^2 + 2)^2}$

31. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1}$

32. $\dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x^3 + 1}$

En los ejercicios del 33 al 36 utilice división para escribir la función racional en la forma $q(x) + r(x)/d(x)$, donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $d(x)$. Luego determine la descomposición en fracciones parciales de $r(x)/d(x)$. Compare las gráficas de la función racional con las gráficas de sus términos en la descomposición en fracciones parciales.

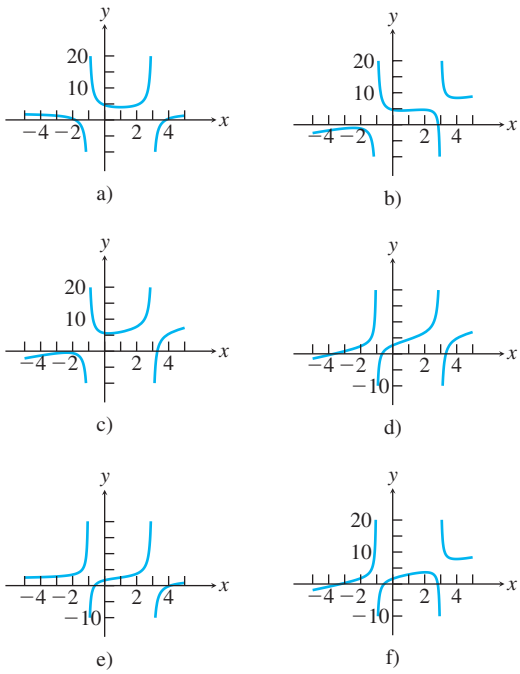
33. $\dfrac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1}$

34. $\dfrac{3x^2 + 2x}{x^2 - 4}$

35. $\dfrac{x^3 - 2}{x^2 + x}$

36. $\dfrac{x^3 + 2}{x^2 - x}$

En los ejercicios del 37 al 42 relacione la función con su gráfica. Hágalo sin usar una graficadora.



37. $y = x + 3 + \dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{2}{x - 3}$

38. $y = x + 3 - \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 3}$

39. $y = x + 3 - \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{2}{x - 3}$

40. $y = x + 3 + \dfrac{2}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 3}$

41. $y = 2 + \dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{2}{x - 3}$

42. $y = 2 - \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{2}{x - 3}$

43. Actividad en equipo Determine la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{1}{x(x - a)}$.

44. Actividad en equipo Determine la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{-1}{(x - 2)(x - b)}$.

45. Actividad en equipo Determine la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{3}{(x - a)(x - b)}$.

46. Actividad en equipo Determine la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{2}{x^2 - a^2}$.

Preguntas de examen estandarizado

47. Verdadero o falso Si $f(x) = \dfrac{1}{x - 3} + \dfrac{1}{x^2 + 1}$, entonces $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$. Justifique su respuesta.

48. Verdadero o falso Si $f(x) = -1 + \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{(x - 3)^2}$, entonces $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -1$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 49 al 52 resuelva el problema sin utilizar una calculadora.

49. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones proporciona la forma de la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{3x - 1}{x^2(x^2 + 2)}$?

A) $\dfrac{A_1}{x} + \dfrac{B_1x + C_1}{x^2 + 2}$

B) $\dfrac{B_1x + C_1}{x^2 + 2}$

C) $\dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{B_1}{x^2 + 2}$

D) $\dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{B_1x}{x^2 + 2}$

E) $\dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{B_1x + C_1}{x^2 + 2}$

50. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes proporciona la forma de la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{2x^2 - x + 1}{(x + 3)^2(x^2 + 4)^2}$?

A) $\dfrac{A_1}{x + 3} + \dfrac{B_1x + C_1}{x^2 + 4}$

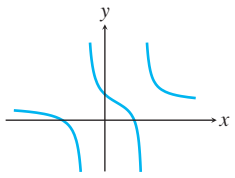
B) $\dfrac{A_1}{x + 3} + \dfrac{B_1x + C_1}{x^2 + 4} + \dfrac{B_2x + C_2}{(x^2 + 4)^2}$

C) $\dfrac{A_1}{x + 3} + \dfrac{A_2}{(x + 3)^2} + \dfrac{B_1x + C_1}{x^2 + 4} + \dfrac{B_2x + C_2}{(x^2 + 4)^2}$

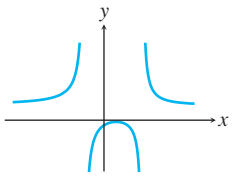
D) $\dfrac{A_1}{x + 3} + \dfrac{A_2}{(x + 3)^2} + \dfrac{B_1x + C_1}{x^2 + 4} + \dfrac{(B_2x + C_2)^2}{x^2 + 4}$

E) $\dfrac{A_1}{x + 3} + \dfrac{A_2}{(x + 3)^2} + \dfrac{B_1}{x^2 + 4} + \dfrac{B_2}{(x^2 + 4)^2}$

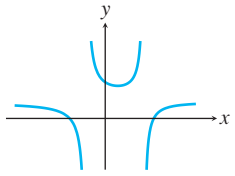
51. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes podría ser la gráfica de $3 + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{x+1}$?



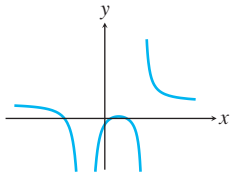
A)



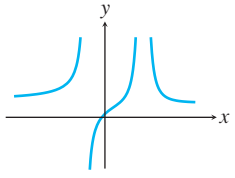
B)



C)

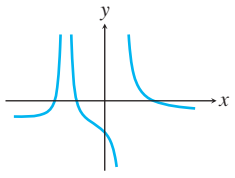


D)

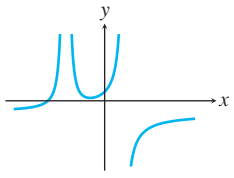


E)

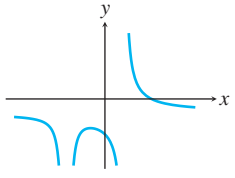
52. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes podría ser la gráfica de $-2 - \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{(x+2)^2}$?



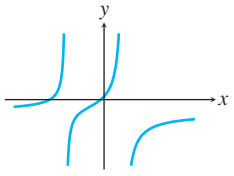
A)



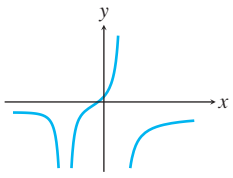
B)



C)



D)



E)

Exploraciones

53. Revisión del ejemplo 3 Cuando quitamos las fracciones en el ejemplo 3, obtuvimos la ecuación

$$x^2 + 4x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

a) Sustituya $x = 1$ en esta ecuación y resuelva para A.

b) Sustituya $x = i$ y $x = -i$ en esta ecuación para determinar un sistema de 2 ecuaciones y resolver para B y C.

54. Escriba para aprender Explique por qué, en esta sección, es válido obtener el sistema de ecuaciones igualando los coeficientes de potencias de x.

Ampliación de las ideas

55. Actividad en equipo Examine la gráfica de

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} \quad \text{para}$$

i) $a = b = 1$ **ii)** $a = 1, b = -1$

iii) $a = -1, b = 1$ **iv)** $a = -1, b = -1$

Con base en este examen, ¿cuáles de las dos funciones $y = a/(x - 1)$ o $y = b/(x - 1)^2$ tiene el mayor efecto sobre la gráfica de $f(x)$ cerca de $x = 1$?

56. Escriba para aprender Utilice la descomposición en fracciones parciales para explicar por qué las gráficas de

$$f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^2}$$

son tan diferentes cerca de $x = 1$.

7.5 Sistemas de desigualdades con dos variables

Aprenderá acerca de...

- La gráfica de una desigualdad
- Los sistemas de desigualdades
- La programación lineal

. . . porque

La programación lineal se utiliza en negocios y en la industria para maximizar utilidades, minimizar costos y ayudar a los administradores en la toma de decisiones.

Gráfica de una desigualdad

Un par ordenado (a, b) de números reales es una **solución de una desigualdad** en x y y, si la sustitución $x = a$ y $y = b$ satisface la desigualdad. Por ejemplo, el par ordenado (2, 5) es una solución de $y < 2x + 3$ ya que

$$5 < 2(2) + 3 = 7.$$

Sin embargo, el par ordenado (2, 8) *no* es una solución puesto que

$$8 \not< 2(2) + 3 = 7.$$

Cuando hemos encontrado todas las soluciones hemos **resuelto la desigualdad**.

La **gráfica de una desigualdad** en x y y consiste en todos los pares (x, y) que son soluciones de la desigualdad. Generalmente, la gráfica de una desigualdad que incluye a dos variables es una región en el plano coordenado.

El punto (2, 7) está en la gráfica de la recta $y = 2x + 3$, pero no es una solución de $y < 2x + 3$. Un punto $(2, y)$ debajo de la recta $y = 2x + 3$ está en la gráfica de $y < 2x + 3$; los situados por arriba de la recta no lo están. La gráfica de $y < 2x + 3$ es el conjunto de todos los puntos debajo de la recta $y = 2x + 3$. La gráfica de la recta $y = 2x + 3$ es la *frontera* de la región (figura 7.24).

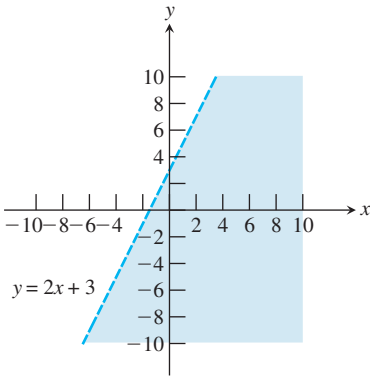
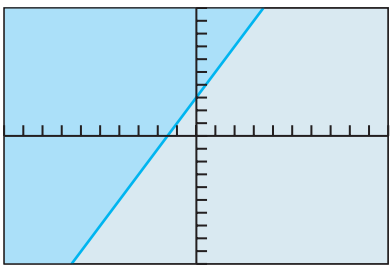


FIGURA 7.24 Una gráfica de $y = 2x + 3$ (línea discontinua) y $y < 2x + 3$ (área sombreada). La recta es discontinua para indicar que no es parte de la solución de $y < 2x + 3$.

Podemos resumir nuestras observaciones acerca de la gráfica de una desigualdad con dos variables con el siguiente procedimiento:

Pasos para dibujar la gráfica de una desigualdad

1. Dibuje la gráfica de la ecuación obtenida reemplazando el signo de desigualdad por un signo de igual. Si la desigualdad es $<$ o $>$, utilice una recta discontinua. Utilice una recta sólida si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$.
2. Compruebe un punto en cada una de las dos regiones del plano determinado por la gráfica de la ecuación. Si el punto satisface la desigualdad, entonces sombree la región que contiene al punto.



[−10, 10] por [−10, 10]

FIGURA 7.25 La gráfica de $y \geq 2x + 3$ (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Graficación de una desigualdad lineal

Dibuje la gráfica de $y \geq 2x + 3$. Indique la frontera de la región.

SOLUCIÓN

Paso 1. Debido al signo "$\geq$", la gráfica de la recta $y = 2x + 3$ es parte de la gráfica de la desigualdad y debe dibujarse con una línea continua.

Paso 2. EL punto (0, 4) está por arriba de la recta y satisface la desigualdad ya que

$$4 \geq 2(0) + 3.$$

Por tanto, la gráfica de $y \geq 2x + 3$ consiste en todos los puntos en o arriba de la recta $y = 2x + 3$. La frontera es la gráfica de $y = 2x + 3$ (figura 7.25).

Ahora resuelva el ejercicio 9.

La gráfica de la desigualdad lineal $y \geq ax + b$, $y > ax + b$, $y \leq ax + b$ o $y < ax + b$ es un **semiplano**. La gráfica de la recta $y = ax + b$ es la **frontera** de la región.

EJEMPLO 2 Graficación de desigualdades lineales

Dibuje la gráfica de la desigualdad. Indique la frontera de la región.

a) $x \geq 2$ **b)** $y < -3$

SOLUCIÓN

a) Paso 1. Al reemplazar "≥" por "=", obtenemos la ecuación $x = 2$, cuya gráfica es una recta vertical.

Paso 2. La gráfica de $x \geq 2$ es el conjunto de todos los puntos en y a la derecha de la recta vertical $x = 2$ (figura 7.26a). La recta $x = 2$ es la frontera de la región.

b) Paso 1. Al reemplazar "<" por "=", obtenemos la ecuación $y = -3$, cuya gráfica es una recta horizontal.

Paso 2. La gráfica de $y < -3$ es el conjunto de todos los puntos debajo de la recta horizontal $y = -3$ (figura 7.26b). La recta $y = -3$ es la frontera de la región.

Ahora resuelva el ejercicio 7.

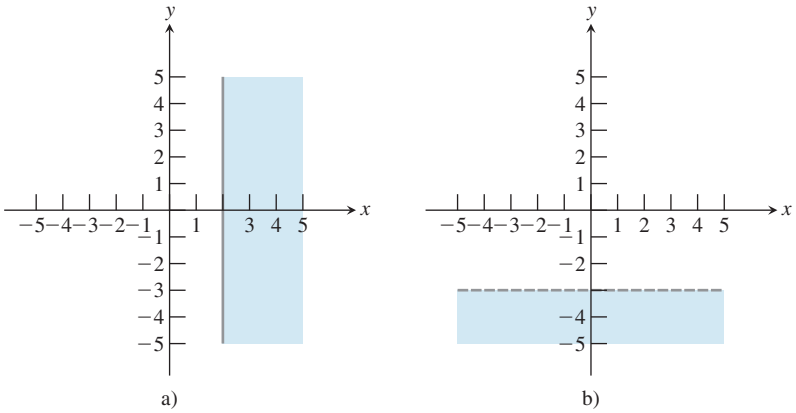


FIGURA 7.26 Las gráficas de a $x \geq 2$ y b $y < -3$. (Ejemplo 2).

EJEMPLO 3 Graficación de una desigualdad cuadrática

Dibuje la gráfica de $y \geq x^2 - 3$. Indique la frontera de la región.

SOLUCIÓN

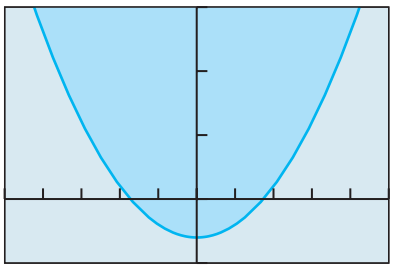
Paso 1. Al reemplazar "≥" por "=", obtenemos la ecuación $y = x^2 - 3$, cuya gráfica es una parábola.

Paso 2. El par (0, 1) es una solución de la desigualdad ya que

$$1 \geq (0)^2 - 3 = -3.$$

Así que la gráfica de $y \geq x^2 - 3$ es la parábola junto con la región dentro de la parábola (figura 7.27). La parábola es la frontera de la región.

Ahora resuelva el ejercicio 11.



[−5, 5] por [−5, 15]

FIGURA 7.27 La gráfica de $y \geq x^2 - 3$ (ejemplo 3).

Sistemas de desigualdades

Una **solución** de un sistema de desigualdades en x y y es un par ordenado (x, y) que satisface cada una de las desigualdades del sistema. Cuando hemos determinado todas las soluciones comunes hemos **resuelto el sistema de desigualdades**.

La técnica para resolver sistemas de desigualdades gráficamente es similar a la que permite resolver gráficamente un sistema de ecuaciones: graficamos cada desigualdad y determinamos los puntos en común a cada una de las gráficas.

EJEMPLO 4 Resolución gráfica de un sistema de desigualdades

Resuelva el sistema

$$y > x^2$$
$$2x + 3y < 4.$$

SOLUCIÓN La gráfica de $y > x^2$ está sombreada en figura 7.28a; no incluye su frontera, $y = x^2$. La gráfica de $2x + 3y < 4$ está sombreada en la figura 7.28b; no incluye su frontera $2x + 3y = 4$. La solución para el sistema es la intersección de estas dos gráficas, como se sombrea en la figura 7.28c.

GRÁFICAS SOMBREADAS

La mayoría de las utilerías gráficas son capaces de sombrear soluciones de desigualdades. Verifique el manual del usuario de su graficadora.

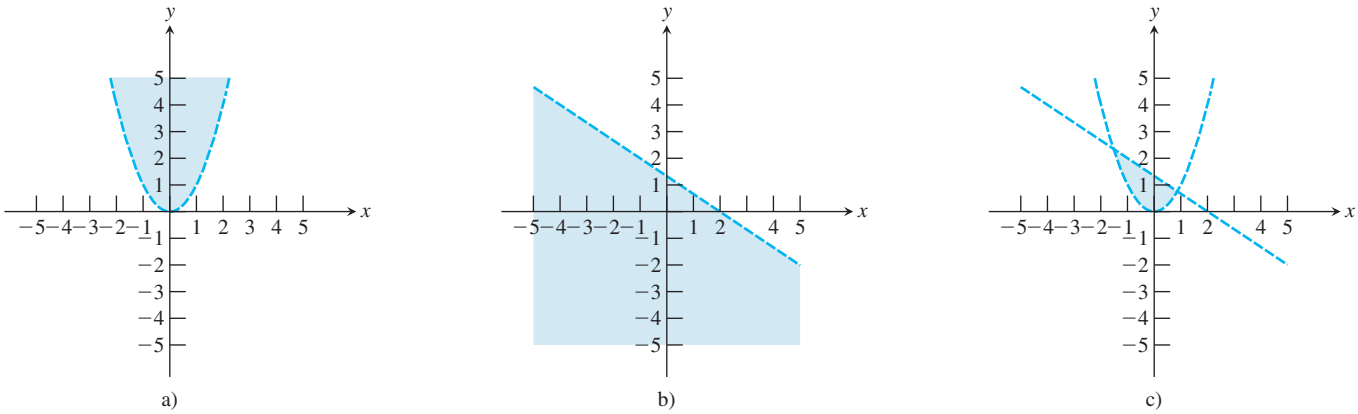
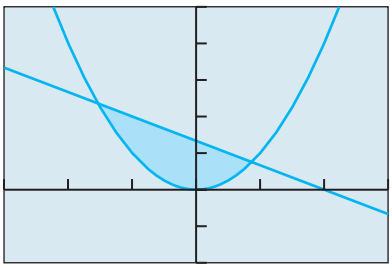


FIGURA 7.28 Las gráficas de a $y > x2$, b $2x + 3y < 4$, y c el sistema del ejemplo 4.



[−3, 3] por [−2, 5]

FIGURA 7.29 La solución del sistema del ejemplo 4. La mayoría de las graficadoras no pueden distinguir entre fronteras discontinuas y fronteras sólidas.

Respaldar con una graficadora

La figura 7.29 muestra lo que nuestra graficadora produce cuando sombreamos arriba de la curva $y = x^2$ y debajo de la curva $2x + 3y = 4$. La parte sombreada parece idéntica a la parte sombreada de la figura 7.28c.

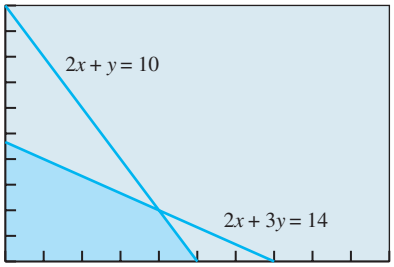
Ahora resuelva el ejercicio 19.

EJEMPLO 5 Resolución de un sistema de desigualdades

Resuelva el sistema

$$2x + y \leq 10$$
$$2x + 3y \leq 14$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0.$$

continúa



[0, 10] por [0, 10]

FIGURA 7.30 La solución (sombreada) del sistema del ejemplo 5. Los puntos frontera están incluidos.

SOLUCIÓN La solución está en el primer cuadrante, ya que $x \geq 0$ y $y \geq 0$ se encuentra debajo de cada una de las dos rectas $2x + y = 10$ y $2x + 3y = 14$, e incluye todos sus puntos frontera (figura 7.30).

Ahora resuelva el ejercicio 23.

Programación lineal

En ocasiones, la toma de decisiones en ciencias administrativas requiere encontrar un mínimo o un máximo de una función lineal

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

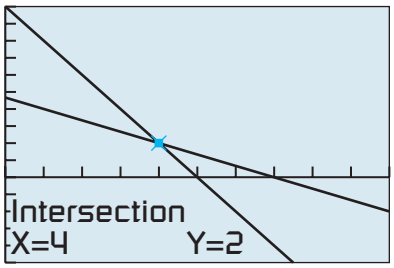
denominada **función objetivo**, sobre un conjunto de puntos. Tal problema es un **problema de programación lineal**. En dos dimensiones, la función f toma la forma $f = ax + by$ y el conjunto de puntos es la solución de un sistema de desigualdades, denominadas **restricciones**, tal como en la figura 7.30. La solución del sistema de desigualdades es el conjunto **factible de puntos *xy*** para el problema de optimización.

Puede demostrarse que si un problema de programación lineal tiene una solución, ésta aparece en uno de los **puntos vértice** o **puntos esquina**, a lo largo de la frontera de la región. Utilizamos esta información en los ejemplo 6 y 7.

EJEMPLO 6 Resolución de un problema de programación lineal

Determine los valores máximo y mínimo de la función objetivo $f = 5x + 8y$, sujeta a las restricciones dadas por el sistema de desigualdades.

$$2x + y \leq 10$$
$$2x + 3y \leq 14$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0.$$



[0, 10] por [−5, 10]

FIGURA 7.31 Las rectas $2x + 3y = 14$ y $2x + y = 10$ se intersecan en (4, 2) (ejemplo 6).

SOLUCIÓN Los puntos factibles *xy* son aquellos que se graficaron en la figura 7.30. La figura 7.31 muestra que las dos rectas $2x + 3y = 14$ y $2x + y = 10$ se intersecan en (4, 2). Los puntos esquina son:

(0, 0),

(0, 14/3), la intersección y de $2x + 3y = 14$,

(5, 0) la intersección x de $2x + y = 10$, y

(4, 2), el punto de intersección de $2x + 3y = 14$ y $2x + y = 10$.

La tabla siguiente evalúa f en los puntos esquina de la región en la figura 7.31.

(x, y)	(0, 0)	(0, 14/3)	(4, 2)	(5, 0)
f	0	112/3	36	25

El valor máximo de f es 112/3 en (0, 14/3). El valor mínimo es 0 en (0, 0).

Ahora resuelva el ejercicio 31.

A continuación se da una forma de analizar el problema de programación lineal del ejemplo 6. Al asignar valores positivos a f en $f = 5x + 8y$, obtenemos una familia de rectas paralelas cuya distancia al origen aumenta conforme f aumenta (consulte el ejercicio 47). Esta familia de rectas barre y cruzan la región de soluciones factibles. De manera geométrica, podemos ver que hay un mínimo y un valor máximo para f si la recta $f = 5x + 8y$ interseca la región de soluciones factibles.

EJEMPLO 7 Compra de fertilizante

Productos del Campo Johnson está por comprar fertilizante con dos nutrientes: N (nitrógeno) y P (fósforo). Necesitan al menos 180 unidades de N y 90 unidades de P. Su proveedor tiene dos marcas de fertilizante para ellos. La marca A cuesta \$10 por bolsa y tiene 4 unidades de N y 1 unidad de P. La marca B cuesta \$5 la bolsa y tiene 1 unidad de cada nutriente. Productos Johnson puede pagar a lo más \$800 por el fertilizante. ¿Cuántas bolsas de cada marca debe comprar para minimizar el costo?

SOLUCIÓN

Modele

Sea x = número de bolsas de la marca A.

Sea y = número de bolsas de la marca B.

Entonces C = costo total = $10x + 5y$ es la función objetivo que se minimizará. Las restricciones son:

$$4x + y \geq 180 \quad \text{La cantidad de N es al menos 180.}$$

$$x + y \geq 90 \quad \text{La cantidad de P es al menos 90.}$$

$$10x + 5y \leq 800 \quad \text{El costo total será a lo más \$800.}$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Resuelva gráficamente

La región de puntos factibles xy es la intersección de las gráficas de $4x + y \geq 180$, $x + y \geq 90$ y $10x + 5y \leq 800$ en el primer cuadrante (figura 7.32).

La región tiene tres puntos esquina en los puntos de intersección de las tres rectas $4x + y = 180$, $x + y = 90$ y $10x + 5y = 800$: (10, 140), (70, 20) y (30, 60).

Los valores de la función objetivo C en los puntos esquina son:

$$C(10, 140) = 10(10) + 5(140) = 800$$

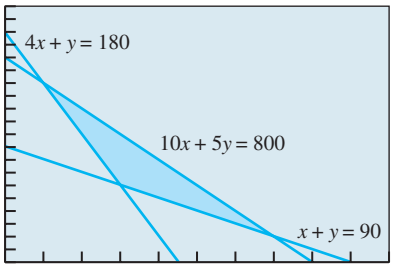
$$C(70, 20) = 10(70) + 5(20) = 800$$

$$C(30, 60) = 10(30) + 5(60) = 600.$$

Interprete

El costo mínimo para el fertilizante es \$600 cuando se compran 30 bolsas de la marca A y 60 bolsas de la marca B. Por esta compra, Productos del Campo Johnson obtiene exactamente 180 unidades de nutriente N y 90 unidades de nutriente P.

Ahora resuelva el ejercicio 37.



[0, 100] por [0, 200]

FIGURA 7.32 La región factible en el ejemplo 7.

La región en el ejemplo 8 es no acotada. Mediante el análisis que sigue al ejemplo 6 podemos ver geométricamente que el problema de programación lineal del ejemplo 8 no tiene un valor máximo, pero afortunadamente tiene un valor mínimo.

EJEMPLO 8 Minimización de costo de operación

Fabricaciones Gonza tiene dos fábricas que producen tres clases de papel: de calidad baja, de calidad media y de calidad alta. Necesita proveer 24 toneladas de papel de calidad baja, 6 de papel de calidad media y 30 de papel de alta calidad. Diariamente, la fábrica A produce 8 toneladas de papel de calidad baja, 1 de papel de calidad media y 2 de papel de calidad alta, y el costo diario de operación es \$2,000. La fábrica B, diariamente, produce 2 toneladas de calidad baja, 1 de papel de calidad media y 8 de papel de calidad alta, y cuesta \$4,000 por día para operarla. ¿Cuántos días debe operar cada fábrica para cumplir con las órdenes al costo mínimo?

SOLUCIÓN

Modele

Sea x = el número de días que la fábrica A opera.

Sea y = el número de días que la fábrica B opera.

Entonces C = costo total de operación = $2{,}000x + 4{,}000y$ es la función objetivo que será minimizada. Las restricciones son:

$$8x + 2y \geq 24 \quad \text{La cantidad de calidad baja es al menos 24.}$$
$$x + y \geq 6 \quad \text{La cantidad de calidad media es al menos 6.}$$
$$2x + 8y \geq 30 \quad \text{La cantidad de calidad balta es al menos 30.}$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Resuelva gráficamente

La región de puntos factibles es la intersección, en el primer cuadrante, de las gráficas de $8x + 2y \geq 24$, $x + y \geq 6$ y $2x + 8y \geq 30$ (figura 7.33).

La región tiene cuatro puntos esquina:

(0, 12), la intersección y de $8x + 2y = 24$,

(2, 4), el punto de intersección de $8x + 2y = 24$ y $x + y = 6$,

(3, 3), el punto de intersección de $x + y = 6$ y $2x + 8y = 30$,

(15, 0), la intersección x de $2x + 8y = 30$.

Los valores de la función objetivo C en los puntos esquina son:

$$C(0, 12) = 2{,}000(0) + 4{,}000(12) = 48{,}000,$$
$$C(2, 4) = 2{,}000(2) + 4{,}000(4) = 20{,}000,$$
$$C(3, 3) = 2{,}000(3) + 4{,}000(3) = 18{,}000,$$
$$C(15, 0) = 2{,}000(15) + 4{,}000(0) = 30{,}000.$$

Interprete

El costo mínimo de operación es \$18,000 cuando las dos fábricas operan durante 3 días cada una. Las dos fábricas producirán 30 toneladas de papel de calidad baja, 6 de papel de calidad media y 30 de papel de calidad alta. Tendrán un exceso de 6 toneladas de papel de calidad baja.

Ahora resuelva el ejercicio 39.

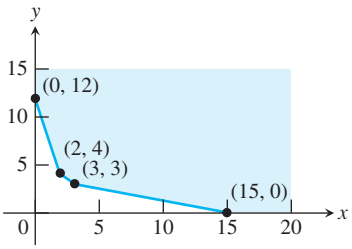


FIGURA 7.33 La gráfica de la región factible del ejemplo 8.

REPASO RÁPIDO 7.5 *(Para obtener ayuda consulte las secciones R.4 y 7.1)*

En los ejercicios del 1 al 4 determine las intersecciones x y y de la recta y dibuje su gráfica.

1. $2x - 3y = 6$

2. $5x + 10y = 30$

3. $\frac{x}{20} + \frac{y}{50} = 1$

4. $\frac{x}{30} - \frac{y}{20} = 1$

En los ejercicios del 5 al 9 determine el punto de intersección de las dos rectas (en los ejemplos 7 y 8 utilizamos estos valores).

5. $4x + y = 180$ y $x + y = 90$

6. $x + y = 90$ y $10x + 5y = 800$

7. $4x + y = 180$ y $10x + 5y = 800$

8. $8x + 2y = 24$ y $x + y = 6$

9. $x + y = 6$ y $2x + 8y = 30$

10. Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$y = x^2$$
$$2x + 3y = 4.$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7.5

En los ejercicios del 1 al 6 relacione la desigualdad con su gráfica. Indique si la frontera está incluida o excluida de la gráfica. Todas las gráficas se dibujaron en $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$.

1. $x \leq 3$

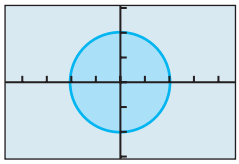
2. $y > 2$

3. $2x - 5y \geq 2$

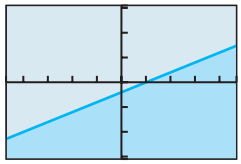
4. $y > (1/2)x^2 - 1$

5. $y \geq 2 - x^2$

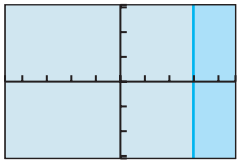
6. $x^2 + y^2 < 4$



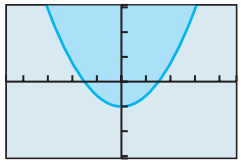
a)



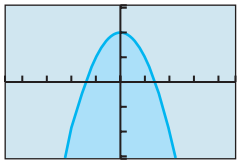
b)



c)



d)



e)



f)

En los ejercicios del 7 al 16 grafique la desigualdad. Indique la frontera de la región.

7. $x \leq 4$

8. $y \geq -3$

9. $2x + 5y \leq 7$

10. $3x - y > 4$

11. $y < x^2 + 1$

12. $y \geq x^2 - 3$

13. $x^2 + y^2 < 9$

14. $x^2 + y^2 \geq 4$

15. $y \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

16. $y < \operatorname{sen} x$

En los ejercicios del 17 al 22 resuelva el sistema de desigualdades.

17. $5x - 3y > 1$
$3x + 4y \leq 18$

18. $4x + 3y \leq -6$
$2x - y \leq -8$

19. $y \leq 2x + 3$
$y \geq x^2 - 2$

20. $x - 3y - 6 < 0$
$y > -x^2 - 2x + 2$

21. $y \geq x^2$
$x^2 + y^2 \leq 4$

22. $x^2 + y^2 \leq 9$
$y \geq |x|$

En los ejercicios del 23 al 26 resuelva el sistema de desigualdades.

23. $2x + y \leq 80$
$x + 2y \leq 80$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

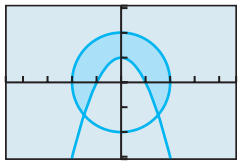
24. $3x + 8y \geq 240$
$9x + 4y \geq 360$
$x \geq 6$
$y \geq 0$

25. $5x + 2y \leq 20$
$2x + 3y \leq 18$
$x + y \geq 2$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

26. $7x + 3y \leq 210$
$3x + 7y \leq 210$
$x + y \geq 30$

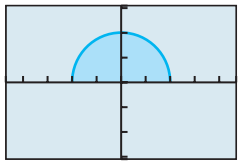
En los ejercicios del 27 al 30 escriba un sistema de desigualdades cuya solución sea la región sombreada en la figura dada. Todas las fronteras están incluidas.

27. Actividad en equipo



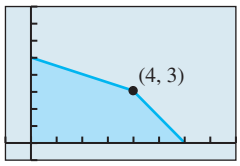
$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$

28. Actividad en equipo



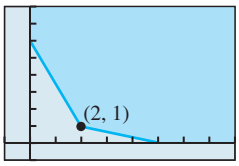
$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$

29. Actividad en equipo



[−1, 8] por [−1, 8]

30. Actividad en equipo



[−1, 8] por [−1, 8]

En los ejercicios del 31 al 36 determine el mínimo y el máximo, si existen, de la función objetivo f, sujeta a las restricciones.

31. Función objetivo: $f = 4x + 3y$

Restricciones:

$$x + y \le 80$$
$$x - 2y \le 0$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

32. Función objetivo: $f = 10x + 11y$

Restricciones:

$$x + y \le 90$$
$$3x - y \ge 0$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

33. Función objetivo: $f = 7x + 4y$

Restricciones:

$$5x + y \ge 60$$
$$x + 6y \ge 60$$
$$4x + 6y \ge 204$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

34. Función objetivo: $f = 15x + 25y$

Restricciones:

$$3x + 4y \ge 60$$
$$x + 8y \ge 40$$
$$11x + 28y \le 380$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

35. Función objetivo: $f = 5x + 2y$

Restricciones:

$$2x + y \ge 12$$
$$4x + 3y \ge 30$$
$$x + 2y \ge 10$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

36. Función objetivo: $f = 3x + 5y$

Restricciones:

$$3x + 2y \ge 20$$
$$5x + 6y \ge 52$$
$$2x + 7y \ge 30$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

37. Explotación de minas Metales Pearson extrae dos tipos de minerales: R y S. La compañía obtiene los productos A y B de cada tipo de mineral. Cuesta $50 por tonelada extraer 80 libras de A y 160 libras de B del mineral R; cuesta $60 por tonelada extraer 140 libras de A y 50 libras de B del mineral S. Metales Pearson debe producir al menos 4,000 libras de A y 3,200 libras de B. ¿Cuánto de cada mineral, R y S, debe procesar para minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?



38. Planeación de una dieta La dieta de Paul debe contener al menos 24 unidades de carbohidratos y 16 unidades de proteínas. El alimento A cuesta $1.40 por unidad y cada unidad contiene 3 unidades de carbohidratos y 4 unidades de proteínas. El alimento B cuesta $0.90 por unidad y cada una contiene 2 unidades de carbohidratos y 1 unidad de proteínas. ¿Cuántas unidades de cada alimento debe comprar para minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?

39. Producción de gasolina Dos refinerías de petróleo producen tres calidades de gasolina: A, B y C. En cada refinería, las tres calidades de gasolina se producen en una sola operación en las proporciones siguientes: la refinería 1 produce 1 unidad de A, 2 unidades de B y 1 unidad de C; la refinería 2 produce 1 unidad de A, 4 unidades de B y 4 unidades de C. Por la producción de una operación, la refinería cobra $300 y la refinería 2 cobra $600. Un cliente necesita 100 unidades de A, 320 unidades de B y 200 unidades de C. Si el cliente quiere minimizar su costo, ¿cómo debe realizar sus pedidos?

40. Maximización de utilidades Un fabricante quiere maximizar la utilidad para dos productos. El producto A proporciona una utilidad de $2.25 por unidad, y el producto B genera una utilidad de $2.00 por unidad. La información de la demanda indica que el número total de unidades producidas no debe exceder las 3,000 unidades, y que el número total de unidades del producto B producidas sea mayor o igual a la mitad del número de unidades producidas del producto A. ¿Cuántas unidades de cada una deben producirse para maximizar la utilidad?

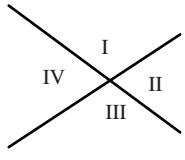
Preguntas de examen estandarizado

41. Verdadero o falso La gráfica de una desigualdad lineal en x y y es una semirrecta. Justifique su respuesta.

42. Verdadero o falso La frontera de la solución de $2x - 3y < 5$ es la gráfica de $3y = 2x - 5$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 43 al 46 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver el problema.

Para los ejercicios 43 y 44 utilice la figura siguiente, que muestra las gráficas de las dos rectas, $3x + 4y = 5$ y $2x - 3y = 4$.



43. **Opción múltiple** ¿Cuál de las siguientes representa la solución del sistema $3x + 4y \geq 5$
$2x - 3y \leq 4$?

A) La región I junto con su frontera.

B) La región I sin su frontera.

C) La región II junto con su frontera.

D) La región II sin su frontera.

E) La región IV junto con su frontera.

44. **Opción múltiple** ¿Cuál de las siguientes representa la solución del sistema $3x + 4y < 5$
$2x - 3y > 4$?

A) La región II junto con su frontera.

B) La región III junto con su frontera.

C) La región III sin su frontera.

D) La región IV junto con su frontera.

E) La región IV sin su frontera.

Los ejercicios 45 y 46 se refieren al siguiente problema de programación lineal:

Función objetivo: $f = 5x + 10y$

Restricciones:

$$2x + y \leq 10$$
$$x + 3y \leq 12$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

45. **Opción múltiple** ¿Cuál de las siguientes opciones no es un punto esquina?

A) (0, 0) **B)** (5, 0)

C) (0, 4) **D)** (3, 4)

E) (3.6, 2.8)

46. **Opción múltiple** ¿Cuál es el valor máximo de f en la región factible del problema?

A) 0 **B)** 25 **C)** 40 **D)** 46 **E)** 55

Exploraciones

47. **Revisión del ejemplo 6** Considere la función objetivo $f = 5x + 8y$ del ejemplo 6.

a) Pruebe que para cualesquier dos valores reales para f, las dos rectas son paralelas.

b) **Escriba para aprender** Para $f > 0$, proporciones razones por las que la recta se aleja del origen cuando el valor de f aumenta.

c) **Escriba para aprender** Dé una explicación geométrica de por qué la región del ejemplo 6 debe contener un valor mínimo y uno máximo para f.

48. **Escriba para aprender** Describa todas las posibles formas de que dos parábolas distintas, de la forma $y = f(x)$, pueden intersecarse. Proporciones ejemplos.

Ampliación de las ideas

49. **Funciones implícitas** La ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

define y como dos funciones implícitas de x. Despeje y para determinar las dos funciones y dibuje la gráfica de la ecuación.

50. **Funciones implícitas** La ecuación

$$x^2 - y^2 = 4$$

define y como dos funciones implícitas de x. Despeje y para determinar las dos funciones y dibuje la gráfica de la ecuación.

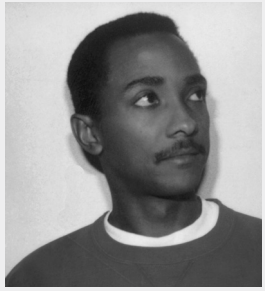
51. Resuelva el sistema de desigualdades:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$$
$$y \geq x^2 - 1$$

[*Sugerencia:* Consulte el ejercicio 49].

52. Grafique la desigualdad $x^2 - y^2 \leq 4$ [*Sugerencia*: Consulte el ejercicio 50].

Matemáticas en el trabajo



Ngao Mayuma

Llegué a ser ingeniero eléctrico debido a que disfrutaba trabajar con computadoras. Además, es una habilidad que uno puede utilizar para obtener un buen empleo.

Una de las formas en que yo utilizo matemáticas en mi área es cuando se envía un dibujo entre computadoras. Un dibujo en una computadora está formado de píxeles, que son pequeños puntos de color. En un dibujo hay muchos píxeles, y por lo tanto, almacenar el dibujo como el total de sus píxeles conforma un archivo muy grande. Enviar, de una computadora a otra, este gran archivo tomaría mucho tiempo. Por consiguiente, para representar el dibujo se utiliza un modelo matemático. Éste puede utilizar un símbolo para representar muchos píxeles, de modo que sólo los símbolos necesarios se envíen (en lugar de muchos píxeles). Luego, en la otra computadora, el dibujo puede ser traducido otra vez a píxeles.

Otra forma en que representamos un dibujo es mediante texturas. Para representar diferentes texturas se pueden utilizar diferentes modelos matemáticos, y luego la computadora puede diferenciar entre las diferentes texturas en un dibujo.

Ideas Clave DEL CAPÍTULO 7

PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

Operaciones con matrices 580, 582
Teorema de la inversa de matrices de $n \times n$ 586
Propiedades de las matrices 587
Teorema de sistemas lineales cuadrados invertibles 601

PROCEDIMIENTOS

Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones 568, 569, 594, 600
Descomposición en fracciones parciales de $\frac{f(x)}{d(x)}$ 608

CAPÍTULO 7 Ejercicios de repaso

La colección de ejercicios marcados en azul podría utilizarse como un examen del capítulo.

En los ejercicios 1 y 2 determine **a)** $A + B$, **b)** $A - B$, **c)** $-2A$ y **d)** $3A - 2B$.

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 3 al 8 determine los productos AB y BA, o indique que no es posible un producto dado.

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

5. $A = [-1 \quad 4]$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 9 y 10 utilice multiplicación para verificar que las matrices son inversas una de la otra.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 1.5 & 0.5 & -4.5 \\ 2 & 0.5 & 0.5 & -1.5 \\ -1 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 & -0.4 \\ -0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 11 y 12 determine la inversa de la matriz, si tiene una. Si es así, utilice multiplicación para respaldar su resultado.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 13 y 14 evalúe el determinante de la matriz.

13. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 15 al 18 determine la forma escalonada reducida por renglones de la matriz.

15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 3 & -6 \\ 2 & -4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 19 al 22 indique si el sistema de ecuaciones tiene una solución; si es así, resuélvalo.

19. $3x - y = 1$
$x + 2y = 5$

20. $x - 2y = -1$
$-2x + y = 5$

21. $x + 2y = 1$
$4y - 4 = -2x$

22. $x - 2y = 9$
$3y - \frac{3}{2}x = -9$

En los ejercicios del 23 al 28 utilice eliminación gaussiana para resolver el sistema de ecuaciones.

23.
$$\begin{aligned} x + z + w &= 2 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z + w &= 8 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} x + w &= -2 \\ x + y + z + 2w &= -2 \\ -x - 2y - 2z - 3w &= 2 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 2 \\ 3x - y + z &= 4 \\ -2x - 2y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 2 \\ 3x - y + z &= 1 \\ -2x - 2y + 4z &= -4 \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} -x - 6y + 4z - 5w &= -13 \\ 2x + y + 3z - w &= 4 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ -x - 3y + z - 2w &= -7 \end{aligned}$$

28.
$$\begin{aligned} -x + 2y + 2z - w &= -4 \\ y + z &= -1 \\ -2x + 2y + 2z - 2w &= -6 \\ -x + 3y + 3z - w &= -5 \end{aligned}$$

En los ejercicios del 29 al 32 resuelva el sistema de ecuaciones mediante el uso de matrices inversas.

29.
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= -1 \\ x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x - 3y + z &= 5 \end{aligned}$$

30.
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= -2 \\ 2x - y + z &= 1 \\ x + y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

31.
$$\begin{aligned} 2x + y + z - w &= 1 \\ 2x - y + z - w &= -2 \\ -x + y - z + w &= -3 \\ x - 2y + z - w &= 1 \end{aligned}$$

32.
$$\begin{aligned} x - 2y + z - w &= 2 \\ 2x + y - z - w &= -1 \\ x - y + 2z - w &= -1 \\ x + 3y - z + w &= 4 \end{aligned}$$

En los ejercicios del 33 al 36 resuelva el sistema de ecuaciones, determinando la forma escalonada reducida por renglones, de la matriz aumentada.

33.
$$\begin{aligned} x + 2y - 2z + w &= 8 \\ 2x + 3y - 3z + 2w &= 13 \end{aligned}$$

34.
$$\begin{aligned} x + 2y - 2z + w &= 8 \\ 2x + 7y - 7z + 2w &= 25 \\ x + 3y - 3z + w &= 11 \end{aligned}$$

35.
$$\begin{aligned} x + 2y + 4z + 6w &= 6 \\ 3x + 4y + 8z + 11w &= 11 \\ 2x + 4y + 7z + 11w &= 10 \\ 3x + 5y + 10z + 14w &= 15 \end{aligned}$$

36.
$$\begin{aligned} x + 2z - 2w &= 5 \\ 2x + y + 4z - 3w &= 7 \\ 4x + y + 7z - 6w &= 15 \\ 2x + y + 5z - 4w &= 9 \end{aligned}$$

En los ejercicios 37 y 38 determine el punto de equilibrio para las curvas de demanda y de oferta.

37. $p = 100 - x^2$
$p = 20 + 3x$

38. $p = 80 - \frac{1}{10}x^2$
$p = 5 + 4x$

En los ejercicios del 39 al 44 resuelva gráficamente el sistema de ecuaciones.

39. $3x - 2y = 5$
$2x + y = -2$

40. $y = x - 1.5$
$y = 0.5x^2 - 3$

41. $y = -0.5x^2 + 3$
$y = 0.5x^2 - 1$

42. $x^2 + y^2 = 4$
$y = 2x^2 - 3$

43. $y = 2 \operatorname{sen} x$
$y = 2x - 3$

44. $y = \ln 2x$
$y = 2x^2 - 12x + 15$

En los ejercicios 45 y 46 determine los coeficientes de la función de modo que su gráfica pase por los puntos dados.

45. Ajuste de curva $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, (2, 8), (4, 5), (6, 3), (9, 4).

46. Ajuste de curva $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, (−2, −4), (1, 2), (3, 6), (4, −2), (7, 8)

En los ejercicios del 47 al 52 determine la descomposición en fracciones parciales de la función racional.

47. $\dfrac{3x - 2}{x^2 - 3x - 4}$

48. $\dfrac{x - 16}{x^2 + x - 2}$

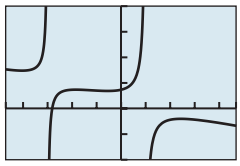
49. $\dfrac{3x + 5}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$

50. $\dfrac{3(3 + 2x + x^2)}{x^3 + 3x^2 - 4}$

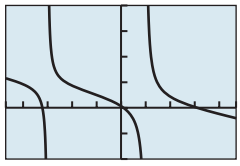
51. $\dfrac{5x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 + x + 1}$

52. $\dfrac{-x^2 - 5x + 2}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$

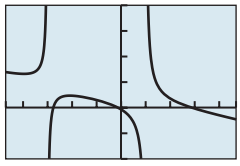
En los ejercicios del 53 al 56 relacione la función con su gráfica. Haga esto sin utilizar su graficadora.



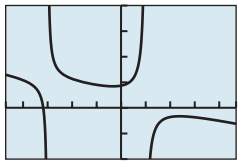
a)



b)



c)



d)

53. $y = -x + 2 - \dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{2}{x - 1}$

54. $y = -x + 2 + \dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{2}{x - 1}$

55. $y = -x + 2 + \dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{2}{x - 1}$

56. $y = -x + 2 - \dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{2}{x - 1}$

En los ejercicios 57 y 58 grafique la desigualdad.

57. $2x - y \leq 1$

58. $x + 3y < 2$

En los ejercicios del 59 al 64 resuelva el sistema de desigualdades. Proporcione las coordenadas de los puntos esquina.

59.
$$4x + 9y \geq 360$$
$$9x + 4y \geq 360$$
$$x + y \leq 90$$

60.
$$7x + 10y \leq 70$$
$$2x + y \leq 10$$
$$x + y \geq 3$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

61.
$$x - 3y + 6 < 0$$
$$y > x^2 - 6x + 7$$

62.
$$x + 2y \geq 4$$
$$y \leq 9 - x^2$$

63.
$$x^2 + y^2 \leq 4$$
$$y \geq x^2$$

64.
$$y \leq x^2 + 4$$
$$x^2 + y^2 \geq 4$$

En los ejercicios del 65 al 68 determine el mínimo y el máximo, si existen, de la función objetivo f sujeta a las restricciones.

65. Función objetivo $f = 7x + 6y$
Restricciones:
$$7x + 5y \geq 100$$
$$2x + 5y \geq 50$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

66. Función objetivo $f = 11x + 5y$
Restricciones:
$$5x + 2y \geq 60$$
$$5x + 8y \geq 120$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

67. Función objetivo $f = 3x + 7y$
Restricciones:
$$5x + 2y \geq 100$$
$$x + 4y \geq 110$$
$$5x + 11y \leq 460$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

68. Función objetivo $f = 9x + 14y$
Restricciones:
$$x + y \leq 120$$
$$9x + 2y \geq 240$$
$$3x + 10y \geq 360$$

69. Rotación de sistemas de coordenadas El sistema de coordenadas xy se rota en un ángulo de 45°, para obtener el sistema de coordenadas $x'y'$.

a) Si las coordenadas de un punto en el sistema de coordenadas xy son (1, 2), ¿cuáles son las coordenadas del punto rotado en el sistema de coordenadas $x'y'$?

b) Si las coordenadas de un punto en el sistema de coordenadas $x'y'$ son (1, 2), ¿cuáles son las coordenadas del punto en el sistema de coordenadas xy que fue rotado a él?

70. Desembolso en seguro médico estatal La tabla 7.7 muestra el desembolso en seguro médico estatal, en miles de millones de dólares, para varios años. Haga que $x = 0$ represente a 1990, $x = 1$ a 1991 y así sucesivamente.

Tabla 7.7 Desembolso total en seguro médico estatal

Año	Desembolso (miles de millones)
1990	109.7
1995	180.1
1997	210.3
1998	213.4
1999	212.0
2000	219.3
2001	241.2
2002	256.9

Fuente: Centros de Ayuda Médica en Estados Unidos, datos no publicados. Resumen Estadístico de Estados Unidos, 2004-2005.

a) Determine un modelo de regresión lineal y superponga su gráfica a un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine un modelo logístico de regresión y superponga su gráfica a un diagrama de dispersión de los datos.

c) Determine cuándo los modelos, de las partes **a** y **b**, pronostican los mismos montos de desembolso.

d) Escriba para aprender ¿Cuál modelo parece ajustarse mejor a los datos? Explique.

¿Cuál modelo elegiría usted para hacer pronósticos posteriores a 2000?

71. Población La tabla 7.8 proporciona la población (en miles) de los estados de Hawai y de Idaho para varios años. Haga que $x = 0$ represente a 1980, $x = 1$ a 1981 y así sucesivamente.

Tabla 7.8 Población

Año	Hawai (miles)	Idaho (miles)
1980	965	944
1990	1108	1007
1995	1197	1177
1998	1215	1252
1999	1210	1276
2000	1212	1294
2001	1225	1321
2002	1241	1343
2003	1258	1366

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen Estadístico de Estados Unidos, 1998, 2004-2005.

a) Determine un modelo de regresión lineal para los datos de Hawai y superponga su gráfica a un diagrama de dispersión de los datos del mismo estado.

b) Determine un modelo de regresión lineal para los datos de Idaho y superponga su gráfica a un diagrama de dispersión de los datos del mismo estado.

c) Con los modelos de las partes **a** y **b**, ¿cuándo la población de los dos estados fue la misma?

72. a) A continuación se listan los datos de la población de 2003. Utilice la información de la primera tabla del proyecto del capítulo 7 para crear una matriz de 3×2 que estime el número de hombres y mujeres en cada estado.

Estado	Población (millones)
California	35.5
Florida	17.0
Rhode Island	1.1

b) Escriba los datos de la tabla siguiente, del censo 2003, en la forma de una matriz de 3×2.

Estado	% Pobl. menor a 18 años	% Pobl. de 65 años o más
California	26.5	10.6
Florida	23.1	17.0
Rhode Island	22.8	14.0

c) Multiplique su matriz de 3×2, de la parte **b**, por el escalar 0.01 para cambiar los valores de porcentajes a decimales.

d) Utilice la multiplicación matricial para multiplicar la transpuesta de la matriz de la parte **c** por la matriz de la parte **a**. ¿Qué información proporciona la matriz resultante?

e) ¿Cuántos hombres menores de 18 años vivían en 2000 en estos tres estados? ¿Cuántas mujeres de 65 años o más vivían en esos tres estados?

73. Uso de matrices Un corredor de bolsa vendió a un cliente 200 acciones de A, 400 acciones de B, 600 acciones de C y 250 acciones de D. Los precios por acción de A, B, C y D son \$80, \$120, \$200 y \$300, respectivamente.

a) Escriba una matriz, N, de 1×4 que represente el número de acciones de cada tipo que compró el cliente.

b) Escriba una matriz, P, de 1×4 que represente el precio por acción de cada tipo.

c) Escriba un producto de matrices que proporcione el costo total de las acciones que compró el cliente.

74. Asistencia a baloncesto En el colegio Whetstone se vendieron 452 boletos para el primer juego de baloncesto. Había dos precios de los boletos: \$0.75 para estudiantes y \$2.00 para los no estudiantes. Si el total de la venta de boletos fue \$429, ¿cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

75. Camiones de entrega TV en Descuento Brock tiene tres tipos de televisiones a la venta: una portátil de 13 pulg, una de 27 pulg con control remoto y una tipo consola de 50 pulg. Tienen tres tipos de vehículos para realizar las entregas: camionetas, camiones pequeños y camiones grandes. Las camionetas pueden transportar 8 TV portátiles, 3 con control remoto y 2 tipo consola; los camiones pequeños 15 TV portátiles, 10 con control remoto y 6 tipo consola; y los camiones grandes, 22 TV portátiles, 20 con control remoto y 5 tipo consola. En un día determinado de ventas, tienen que entregar 115 TV portátiles, 85 con control remoto y 35 tipo consola. ¿Cuántos vehículos de cada tipo son necesarios para hacer la entrega de televisiones?

76. Inversiones Jessica invierte \$38,000, parte al 7.5% de interés simple y el resto al 6% de interés simple. Si su ingreso anual por los intereses es \$2,600, ¿cuánto invirtió a cada tasa?

77. Préstamos en negocios El Almacén de Muebles de Thompson tomó prestados \$650,000 para expandir sus instalaciones y ampliar su línea de productos. Parte del dinero se prestó al 4%, parte al 6.5% y el resto al 9%. ¿Cuánto tomó prestado a cada tasa, si el interés anual fue de \$46,250 y el monto prestado al 9% fue el doble del que se prestó al 4%?

78. Remodelación de una casa Remodelaciones Sánchez tiene tres pintores: Sue, Esther y Murphy. Si trabajan juntos pueden pintar una habitación grande en 4 horas. Sue y Murphy pueden pintar una habitación del mismo tamaño en 6 horas. Esther y Murphy pueden pintar una habitación del mismo tamaño en 7 horas. Si cada uno de ellos trabaja solo, ¿cuánto tardará en pintar la habitación?

79. Piscina Tres llaves, A, B y C, se conectan a una piscina. Cuando las tres llaves están abiertas, la piscina se llena en 3 horas. Cuando sólo están abiertas A y B, la piscina puede llenarse en 4 horas. Cuando sólo están abiertas B y C, la piscina puede llenarse en 3.75 horas. ¿Cuánto tardará cada llave por sí sola en llenar la piscina?

80. Escriba para aprender Si los productos AB y BA están definidos para la matriz A de $n \times n$, ¿qué puede concluir acerca del orden de la matriz B? Explique.

81. Escriba para aprender Si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $p \times q$, y si AB está definida, ¿qué puede concluir acerca de sus órdenes? Explique.

CAPÍTULO 7 Proyecto

Análisis de datos del censo

Los datos siguientes fueron obtenidos de la Oficina de Censos de Estados Unidos (www.census.gov). Examina la información de la población de hombres y mujeres de 1990 a 2004.

Población (millones)	Hombres	Mujeres
1990	121.3	127.5
1995	128.3	134.5
1996	129.5	135.7
1997	130.8	137.0
1998	132.0	138.3
1999	133.3	139.4
2000	138.1	143.4
2001	140.1	145.1
2002	141.5	146.4
2003	143.0	147.8
2004	144.5	149.1

1. Trace los puntos utilizando 1990 como el año cero. Determine un modelo de regresión lineal para cada uno.

2. ¿Qué significan la pendiente y la intersección y en cada ecuación?

3. ¿Qué conclusión puede sacar? De acuerdo con estos modelos, en algún momento, ¿la población de hombres será mayor que la de mujeres? En algún momento, ¿la población de hombres fue mayor que la de mujeres? ¿La información es suficiente para crear un modelo para cien años o más? Explique sus respuestas.

4. Observe que los datos anteriores proporcionan información sólo para un periodo de 15 años. Con frecuencia, ésta no es información suficiente para responder en forma precisa las preguntas hechas anteriormente. Los datos en un periodo pequeño parecen ser lineales y pueden modelarse con una ecuación lineal que funciona bien en ese dominio limitado. La tabla siguiente proporciona más información; utilícela para graficar el número de hombres contra el tiempo y el número de mujeres contra el tiempo, usando 1890 como el año cero.

5. Observe que estos datos no parecen ser lineales. Recordará del capítulo 3, que con frecuencia, un modelo logístico es utilizado para modelar el crecimiento de población. Determine el modelo logístico de regresión para cada conjunto de datos graficados. ¿Cuál es la intersección de las curvas y qué representa? ¿Cambiaría alguna de sus respuestas, en la pregunta número 3?

6. Visite el sitio web de la Oficina de Censos de Estados Unidos (www.census.gov). ¿Cómo pronostica su modelo la población para el año actual?

7. Utilice la información del censo para 2000. ¿Qué porcentaje de la población es masculina y qué porcentaje es femenina?

8. Vaya al sitio web de la Oficina de Censos de Estados Unidos (www.census.gov) y utilice la información más reciente junto con los conceptos de este capítulo para recopilar y analizar otros datos.

Población (millones)	Hombres	Mujeres	Población (millones)	Hombres	Mujeres
1890	32.2	30.7	1950	75.2	76.1
1900	38.8	37.2	1960	88.3	91.0
1910	47.3	44.6	1970	98.9	104.3
1920	53.9	51.8	1980	110.1	116.5
1930	62.1	60.6	1990	121.3	127.5
1940	66.0	65.6	2000	138.1	143.4

CAPÍTULO 8

Geometría analítica en dos y tres dimensiones

8.1 Secciones cónicas y parábolas

8.2 Elipses

8.3 Hipérbolas

8.4 Traslación y rotación de ejes

8.5 Ecuaciones polares de las cónicas

8.6 Sistema coordenado cartesiano tridimensional



El área verde ovalada ubicada detrás de la Casa Blanca en Washington, D. C. es conocida como *La Elipse*, y tiene vista al Monumento a Washington, al Monumento a Jefferson, al Departamento del Comercio y al Edificio de la Antigua Oficina Postal. La Elipse mide 616 pies de largo, 528 pies de ancho y tiene la forma de una sección cónica. Su forma puede modelarse empleando los métodos de este capítulo (consulte la página 652).

HISTORIA DE LAS SECCIONES CÓNICAS

Parábolas, elipses e hipérbolas ya habían sido estudiadas por muchos años cuando Apolonio (cerca de 262 – 190, a. C.) escribió su octavo volumen de *Secciones Cónicas*. Apolonio, nacido en el noroeste de Asia Menor, fue el primero en unificar esas tres curvas como secciones transversales de un cono y definir a la hipérbola con dos ramas. El interés en las secciones cónicas se renovó en el siglo XVII, cuando Galileo probó que los proyectiles siguen trayectorias parabólicas y Johannes Kepler (1571 – 1630) descubrió que los planetas viajan en órbitas elípticas.

Panorama general del capítulo 8

La geometría analítica combina números y formas. Esta relación entre el álgebra y la geometría creció a partir de los trabajos de dos franceses: René Descartes (1596–1650) y Pierre de Fermat (1601–1665). Sus logros permitieron la solución algebraica de problemas geométricos y la solución geométrica de problemas algebraicos, dos de los temas principales de este libro. La geometría analítica abrió la puerta a Newton y a Leibniz para el desarrollo del cálculo.

En las secciones de la 8.1 a la 8.4, aprenderemos que las parábolas, las elipses y las hipérbolas son secciones cónicas y pueden expresarse como ecuaciones de segundo grado. Investigaremos sus usos, incluyendo las propiedades reflectantes de las parábolas y las elipses y cómo las hipérbolas se emplean en navegación de rango amplio. En la sección 8.5, veremos cómo las parábolas, las elipses e hipérbolas se unifican en el sistema de coordenadas polares. En la sección 8.6 pasaremos del plano de dos dimensiones para revisar los conceptos de punto, línea, punto medio, distancia y vector en el espacio tridimensional.

8.1 Secciones cónicas y parábolas

Aprenderá acerca de...

- Las secciones cónicas
- La geometría de una parábola
- la traslación de parábolas
- La propiedad reflectante de una parábola

. . . porque

Las secciones cónicas son las trayectorias de la naturaleza: cualquier objeto que se mueve libremente en un campo gravitacional sigue la trayectoria de una sección cónica.

Secciones cónicas

Imagine dos líneas que no son perpendiculares y que se intersecan en un punto V. Si se fija una de las líneas como un *eje* y la otra (el *generador*) rota alrededor del eje, entonces el generador forma un **cono circular recto** con **vértice** V, como se ilustra en la figura 8.1. Note que V divide al cono en dos partes llamadas **mantos**, cada uno de los cuales se asemeja a un cono de helado.

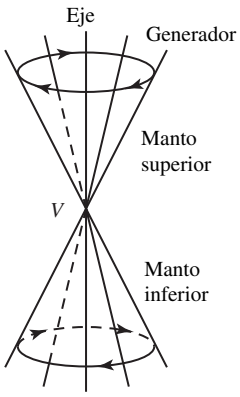


FIGURA 8.1 Un cono circular recto (de dos partes mantos).

Una **sección cónica** (o **cónica**) es un corte transversal de un cono; en otras palabras, la intersección de un plano con un cono circular recto. Las tres secciones cónicas básicas son la *parábola*, la *elipse* y la *hipérbola* (figura 8.2a).

En la figura 8.2b se muestran algunas cónicas atípicas conocidas como **secciones cónicas degeneradas**. Debido a que es atípica y carece de algunas características

que usualmente se asocian con una elipse, una circunferencia se considera una elipse degenerada. Otras secciones cónicas degeneradas pueden obtenerse de un corte transversal de un cono degenerado; tales conos aparecen cuando el generador y el eje del cono son paralelos o perpendiculares (consulte el ejercicio 73).

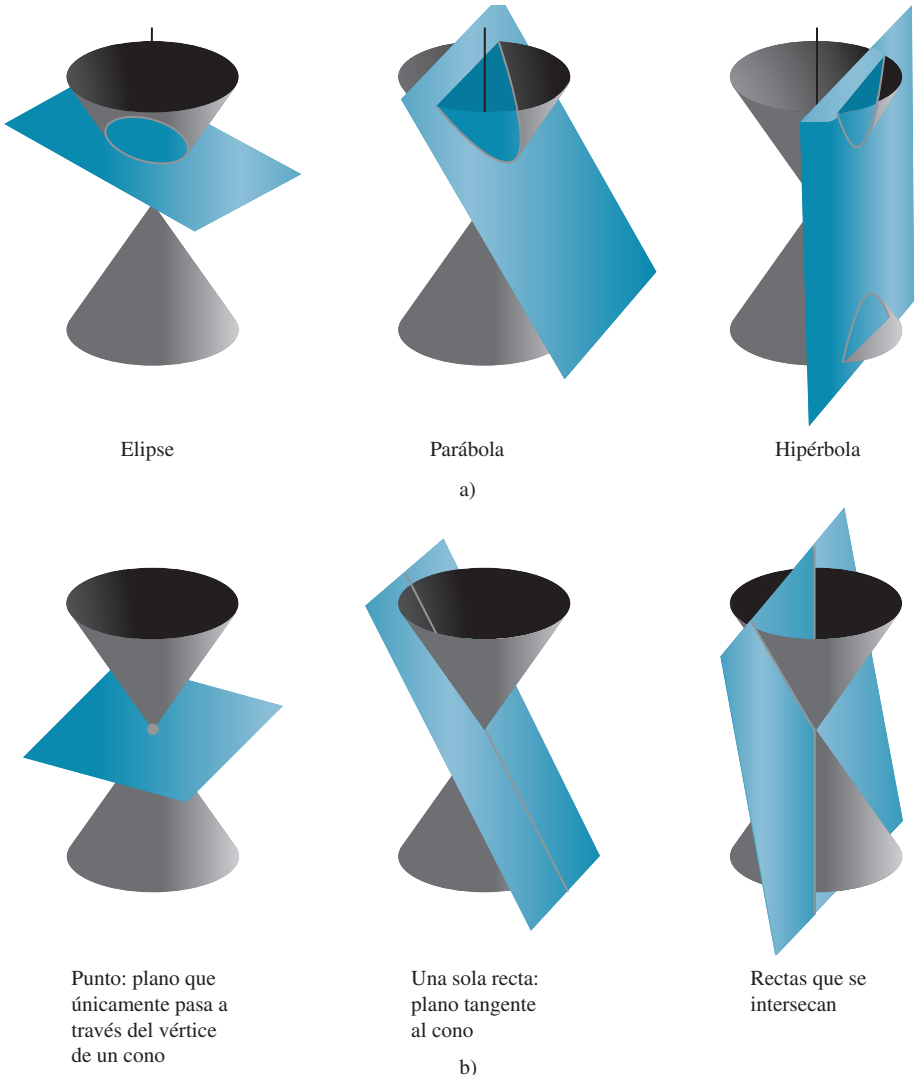


FIGURA 8.2 a Los tres tipos estándar de secciones cónicas y b tres secciones cónicas degeneradas.

Las secciones cónicas pueden definirse algebraicamente como las gráficas de **ecuaciones de segundo grado (cuadráticas) de dos variables**; esto es, como ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde A, B y C no son todas cero.

Geometría de una parábola

En la sección 2.1 aprendimos que la gráfica de una función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo. Hemos visto el papel de la parábola en caída libre y en movimiento de proyectiles. Ahora investigaremos las propiedades geométricas de las parábolas.

DEFINICIÓN Parábola

Una **parábola** es el conjunto de puntos en un plano que equidistan de una línea particular (la **directriz**) y un punto particular (el **foco**) en el plano (consulte la figura 8.3).

UNA PARÁBOLA DEGENERADA

Si el foco F está sobre la directriz l, la parábola se "degenera" y queda con la forma de una línea perpendicular a l que pasa por F. De aquí en adelante, se supondrá que F no está sobre l.

LUGAR GEOMÉTRICO DE UN PUNTO

Antes de que la palabra *conjunto* se utilizara en matemáticas, la palabra en latín *locus*, "lugar", se empleaba a menudo en definiciones geométricas. El lugar geométrico de un punto era el conjunto de lugares posibles en que un punto podría estar ajustándose a las condiciones de la definición. Algunas veces, las cónicas aún se definen en términos de lugares geométricos.

La línea que pasa a través del foco y es perpendicular a la directriz es el **eje** (**focal**) de la parábola. El eje es la línea de simetría de la parábola. El punto donde la parábola interseca a su eje es el **vértice** de la parábola. El vértice está localizado justo en el punto medio entre el foco y la directriz, y es el punto de la parábola que está más cerca del foco y de la directriz (consulte la figura 8.3).

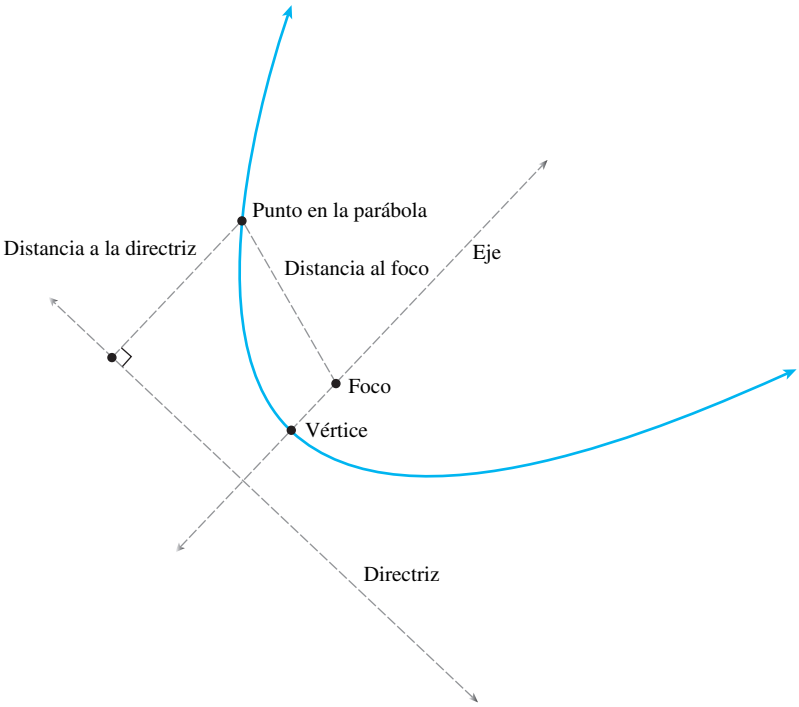


FIGURA 8.3 *Estructura de una parábola*. La distancia de cada punto de la parábola al foco y a la directriz es el mismo.

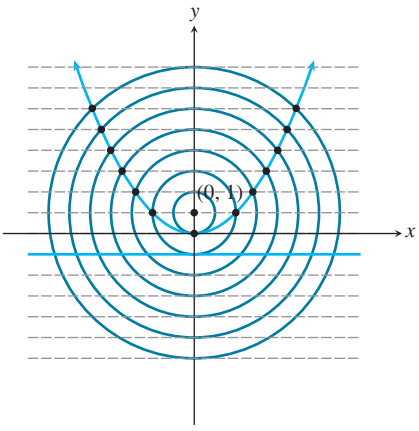


FIGURA 8.4 La geometría de una parábola.

EXPLORACIÓN 1 Comprensión de la definición de parábola

1. Demuestre que el vértice de la parábola con foco (0, 1) y directriz $y = -1$ es (0, 0) (consulte la figura 8.4).
2. Obtenga una ecuación para la parábola que se muestra en la figura 8.4.
3. Determine las coordenadas de los puntos de la parábola que está resaltada en la figura 8.4.

Podemos generalizar la situación de la exploración 1 para mostrar que una ecuación de una parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$ es $x^2 = 4py$ (consulte la figura 8.5).

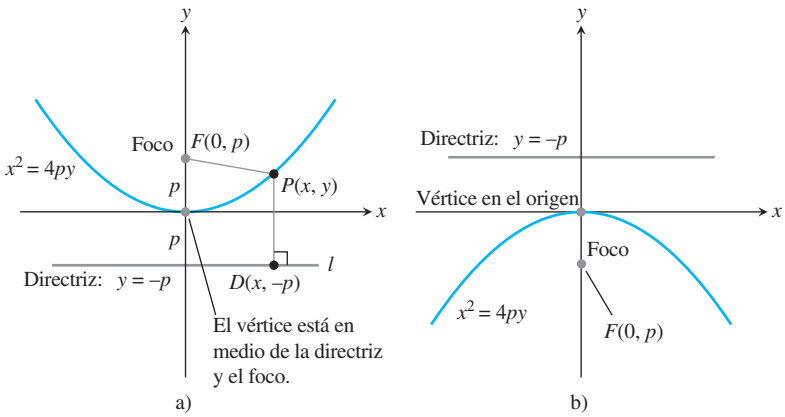


FIGURA 8.5 Las gráficas de $x^2 = 4py$ con a $p > 0$ y b $p < 0$.

Debemos mostrar primero que un punto $P(x, y)$ que es equidistante a $F(0, p)$ y a la línea $y = -p$ satisface la ecuación $x^2 = 4py$, y luego que un punto que satisface la ecuación $x^2 = 4py$ es equidistante a $F(0, p)$ y a la recta $y = -p$:

Sea $P(x, y)$ equidistante a $F(0, p)$ y a la recta $y = -p$. Observe que

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \text{distancia de } P(x, y) \text{ a } F(0, p), \text{ y}$$

$$\sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \text{distancia de } P(x, y) \text{ a } y = -p.$$

Igualando estas distancias y elevando al cuadrado se tiene:

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (x-x)^2 + (y-(-p))^2$$

$$x^2 + (y-p)^2 = 0 + (y+p)^2 \qquad \text{Simplificar.}$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \qquad \text{Desarrollar.}$$

$$x^2 = 4py \qquad \text{Reducir términos semejantes.}$$

Revirtiendo esos pasos, se observa que una solución (x, y) de $x^2 = 4py$ es equidistante a $F(0, p)$ y a la recta $y = -p$.

La ecuación $x^2 = 4py$ es la **forma estándar** de la ecuación de una parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo y con vértice en el origen. Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba; si $p < 0$, abre hacia abajo. Una forma algebraica alternativa para una parábola es $y = ax^2$, donde $a = 1/(4p)$. Así que la gráfica de $x^2 = 4py$ es también la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2$.

Cuando la ecuación de una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo se escribe como $x^2 = 4py$, y el valor de p se interpreta como la **longitud focal** de la parábola, es decir, la distancia *dirigida* del vértice al foco de la parábola. Un segmento de recta con puntos finales sobre una parábola es una **cuerda** de la parábola. El valor $|4p|$ es el **ancho focal** (o lado recto) de la parábola; es decir, la longitud de la cuerda a través del foco y la línea perpendicular al eje.

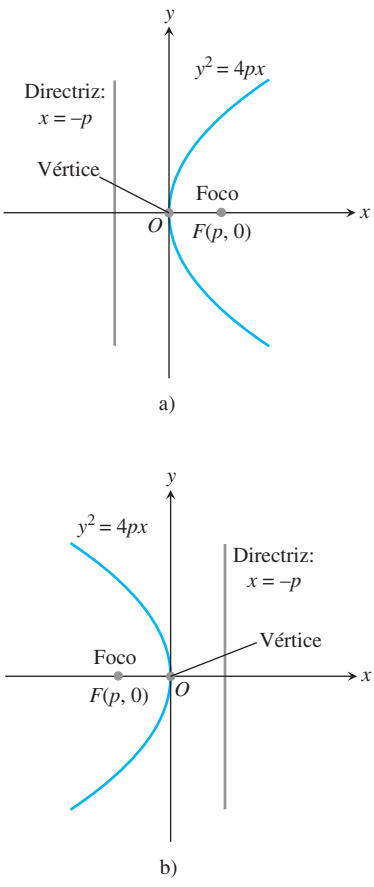


FIGURA 8.6 La gráfica de $y^2 = 4px$ con a $p > 0$ y b $p < 0$.

Las parábolas que abren a la derecha o a la izquierda son *relaciones inversas* de las parábolas que abren hacia arriba o hacia abajo. Así, las ecuaciones de parábolas con vértice (0, 0) que abren a la derecha o a la izquierda tienen la forma estándar $y^2 = 4px$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha, y si $p < 0$, lo hace a la izquierda (consulte la figura 8.6).

Parábolas con Vértice (0, 0)

• **Ecuación estándar**	$x^2 = 4py$	$y^2 = 4px$
• **Abre**	Hacia arriba o hacia abajo	Hacia la derecha o hacia la izquierda
• **Foco**	$(0, p)$	$(p, 0)$
• **Directriz**	$y = -p$	$x = -p$
• **Eje**	eje y	eje x
• **Longitud focal**	p	p
• **Ancho focal**	$\|4p\|$	$\|4p\|$

Consulte las figuras 8.5 y 8.6.

EJEMPLO 1 Obtención del foco, la directriz y el ancho focal

Determine el foco, la directriz y el ancho focal de la parábola $y = -(1/2)x^2$.

SOLUCIÓN Multiplique ambos lados de la ecuación por -2 para obtener la forma estándar $x^2 = -2y$. El coeficiente de y es $4p = -2$ y $p = -1/2$. Entonces, el foco está en $(0, p) = (0, -1/2)$. Ya que $-p = -(-1/2) = 1/2$, la directriz es la recta $y = 1/2$. El ancho focal es $|4p| = |-2| = 2$.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

EJEMPLO 2 Obtención de la ecuación de una parábola

Determine la ecuación en la forma estándar de una parábola cuya directriz es la línea $x = 2$ y cuyo foco es el punto $(-2, 0)$.

SOLUCIÓN Debido a que la directriz es $x = 2$ y el foco es $(-2, 0)$, la longitud focal es $p = -2$ y la parábola abre hacia la izquierda. La ecuación de la parábola en la forma estándar es $y^2 = 4px$, o con más precisión, $y^2 = -8x$.

Ahora resuelva el ejercicio 15.

Traslación de parábolas

Cuando una parábola con la ecuación $x^2 = 4py$ o $y^2 = 4px$ se traslada horizontalmente h unidades y verticalmente k unidades, el vértice de la parábola se mueve de $(0, 0)$ a (h, k) (consulte la figura 8.7). Esa traslación no cambia la longitud focal, el ancho focal o la dirección en que abre la parábola.

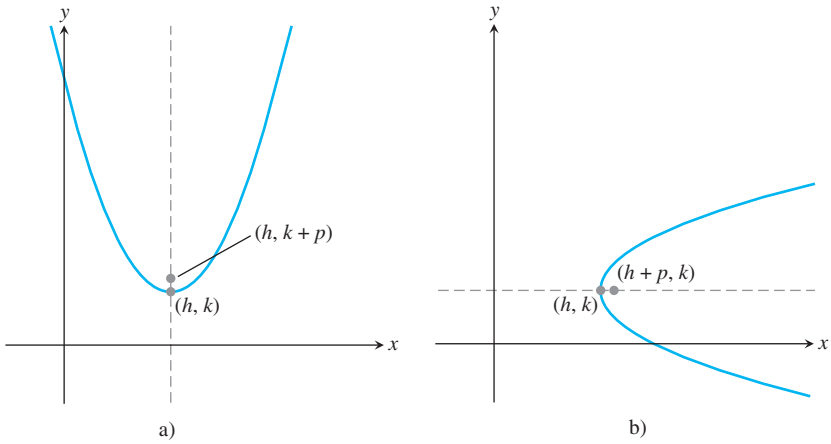


FIGURA 8.7 Parábolas con vértice (h, k) y focos en a $x = h$ y b $y = k$.

Parábolas con vértice (h, k)

• **Ecuación estándar**	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$
• **Abre**	Hacia arriba o hacia abajo	Hacia la derecha o hacia la izquierda
• **Foco**	$(h, k + p)$	$(h + p, k)$
• **Directriz**	$y = k - p$	$x = h - p$
• **Eje**	$x = h$	$y = k$
• **Longitud focal**	p	p
• **Ancho focal**	$\|4p\|$	$\|4p\|$

Consulte las figuras 8.7.

EJEMPLO 3 Determinación de la ecuación de una parábola

Obtenga la forma estándar de una ecuación de la parábola con vértice (3, 4) y foco (5, 4).

SOLUCIÓN El eje de la parábola es la recta que pasa a través del vértice (3, 4) y el foco (5, 4), la recta $y = 4$. Entonces la ecuación tiene la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

Debido a que el vértice $(h, k) = (3, 4)$, $h = 3$ y $k = 4$. La distancia dirigida del vértice (3, 4) al foco (5, 4) es $p = 5 - 3 = 2$, entonces $4p = 8$. Por lo tanto, la ecuación que buscamos es

$$(y - 4)^2 = 8(x - 3).$$

Ahora resuelva el ejercicio 21.

Cuando se resuelve un problema como el del ejemplo 3, es recomendable graficar el vértice, el foco y otras características de la parábola como lo hicimos. Esto facilita determinar si el eje de la parábola es horizontal o vertical, además de la posición relativa de sus características. La exploración 2 nos lleva de la mano en este proceso.

EXPLORACIÓN 2 **Construcción de una parábola**

Siga los pasos descritos a continuación y utilice una hoja de papel rectangular:

1. Sea el foco F de una parábola $(2, -2)$ y su directriz, $y = 4$. Dibuje los ejes x y y en la hoja. Después esboce e identifique el foco y la directriz de la parábola.
2. Localice, esboce e identifique el eje de la parábola. ¿Cuál es la ecuación del eje?
3. Localice y dibuje el vértice V de la parábola. Identifique su nombre y sus coordenadas.
4. ¿Cuánto mide la longitud y el ancho focal de la parábola?
5. Use el ancho focal para localizar, graficar e identificar los puntos finales de una cuerda de la parábola que sea paralela a la directriz.
6. Haga un bosquejo de la parábola.
7. ¿Hacia que dirección se abre?
8. ¿Cuál es la ecuación en la forma estándar?

Algunas veces lo mejor es dibujar la parábola a mano, como en la exploración 2; esto nos ayuda a apreciar la estructura y relaciones de la parábola y sus características. En otras ocasiones, se podría requerir mayor precisión. Si queremos graficar una parábola utilizando una función graficadora, necesitamos despejar y en la ecuación de la parábola, como se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Elaboración de la gráfica de una parábola

Utilice una función graficadora para graficar la parábola $(y - 4)^2 = 8(x - 3)$ del ejemplo 3.

SOLUCIÓN

$$(y - 4)^2 = 8(x - 3)$$

$$y - 4 = \pm\sqrt{8(x - 3)} \qquad \text{Sacar raíz cuadrada.}$$

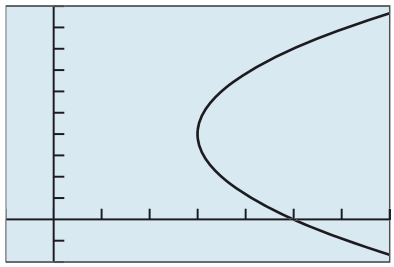
$$y = 4 \pm \sqrt{8(x - 3)} \qquad \text{Sumar 4.}$$

Haga $Y_1 = 4 + \sqrt{8(x - 3)}$ y $Y_2 = 4 - \sqrt{8(x - 3)}$, y grafique las dos ecuaciones en una ventana centrada en el vértice, como se muestra en la figura 8.8.

Ahora resuelva el ejercicio 45.

CERRANDO LOS HUECOS

En la figura 8.8., centramos la ventana de graficación en el vértice (3, 4) de la parábola, para asegurarnos de que ese punto sería trazado. Esto evita el error común de graficación en el que aparece un hueco entre dos partes, una superior y una inferior, de la gráfica de la sección cónica.



[–1, 7] por [–2, 10]

FIGURA 8.8 Las gráficas de $Y1 = 4 + \sqrt{8\,(x-3)}$ y $Y2 = 4 - \sqrt{8\,(x-3)}$ juntas forman la gráfica de $(y-4)^2 = 8(x-3)$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 5 Uso de la forma estándar de la ecuación de una parábola

Pruebe que la gráfica de $y^2 - 6x + 2y + 13 = 0$ es una parábola, y determine su vértice, su foco y la directriz.

SOLUCIÓN Ya que esa ecuación es cuadrática en la variable y, se completa el cuadrado con respecto a y para obtener una forma estándar.

$$y^2 - 6x + 2y + 13 = 0$$

$$y^2 + 2y = 6x - 13 \qquad \text{Aislar los términos } y$$

$$y^2 + 2y + 1 = 6x - 13 + 1 \qquad \text{Completar el cuadrado.}$$

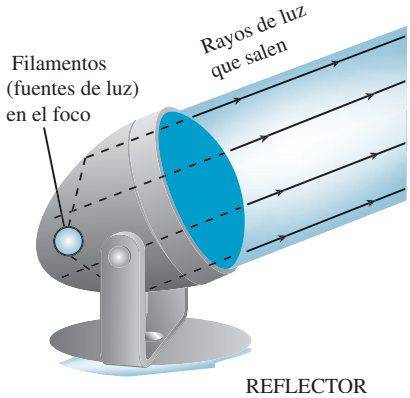
$$(y+1)^2 = 6x - 12$$

$$(y+1)^2 = 6(x-2)$$

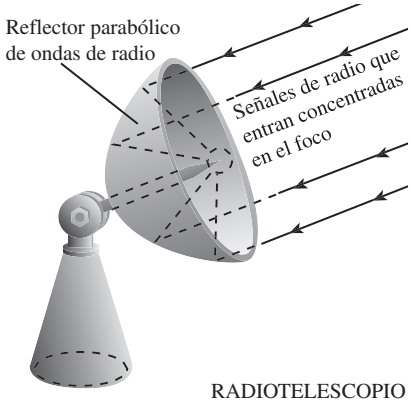
Esta ecuación está en la forma estándar $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, donde $h = 2$, $k = -1$, y $p = 6/4 = 3/2 = 1.5$. Se concluye que

- el vértice (h, k) es $(2, -1)$,
- el foco $(h + p, k)$ es $(3.5, -1)$ o $(7/2, -1)$,
- la directriz $x = h - p$ es $x = 0.5$ o $x = 1/2$.

Ahora resuelva el ejercicio 49.



a)



b)

FIGURA 8.9 Ejemplos de reflectores parabólicos.

Propiedad reflectante de una parábola

Las principales aplicaciones de las parábolas comprenden su uso como reflectores del sonido, la luz, las ondas de radio y otras ondas electromagnéticas. Si se rota una parábola en un espacio tridimensional con respecto a su eje, la parábola genera un **paraboloide de revolución**. Si se coloca una fuente de señales en el foco de una paraboloide reflectora, la señal se refleja fuera de la superficie en forma de líneas paralelas al eje de simetría, como se muestra en la figura 8.9a. Esta propiedad se utiliza en las luces de las linternas, los faros, reflectores, repetidoras de microondas y receptores satelitales.

El principio funciona también para las señales que viajan en sentido contrario; las señales paralelas que llegan al eje del reflector parabólico se dirigen hacia el foco del reflector. Esta propiedad se utiliza para intensificar las señales que se reciben de los radiotelescopios y las antenas de televisión satelital, para concentrar calor en hornos solares y para magnificar el sonido de los micrófonos de la línea de banda de los juegos de fútbol. Consulte la figura 8.9b.

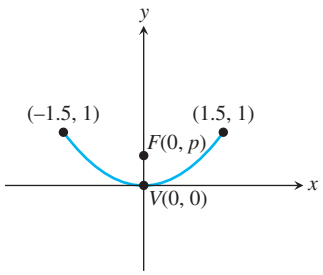


FIGURA 8.10 Sección transversal del reflector parabólico del ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Análisis de un micrófono parabólico

En las líneas laterales de cada juego de fútbol transmitido por televisión, la cadena FBTV utiliza un reflector parabólico con un micrófono en el foco del reflector para captar las conversaciones entre los jugadores en el campo. Si el reflector parabólico es de 3 pies de ancho y 1 pie de profundidad, ¿dónde se debería colocar el micrófono?

SOLUCIÓN

Dibujamos un corte transversal del reflector como una parábola que se abre hacia arriba en el plano cartesiano, colocando su vértice V en el origen (consulte la figura 8.10). Establecemos que el foco F tiene las coordenadas $(0, p)$, para producir la ecuación

$$x^2 = 4py.$$

Ya que el reflector tiene 3 pies de ancho y 1 pie de profundidad, los puntos $(\pm 1.5, 1)$ deben estar en la parábola. El micrófono debe colocarse en el foco, por lo que necesitamos determinar el valor de p. Esto se hace sustituyendo los valores que se obtuvieron en la ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4py \\ (\pm 1.5)^2 &= 4p(1) \\ 2.25 &= 4p \\ p &= 2.25/4 = 0.5625 \end{aligned}$$

Debido a que $p = 0.5625$ pies, o 6.75 pulg, el micrófono debe colocarse dentro del reflector a lo largo de su eje y a 6.75 pulg desde su vértice.

Ahora resuelva el ejercicio 59.

REPASO RÁPIDO 8.1 *(Para obtener ayuda revise las secciones R.2, R.5 y 2.1)*

En los ejercicios 1 y 2 determine la distancia entre los puntos dados

1. $(-1, 3)$ y $(2, 5)$ **2.** $(2, -3)$ y (a, b)

En los ejercicios 3 y 4 despeje y en términos de x.

3. $2y^2 = 8x$ **4.** $3y^2 = 15x$

En los ejercicios 5 y 6 complete el cuadrado para reescribir la ecuación en la forma de vértice.

5. $y = -x^2 + 2x - 7$ **6.** $y = 2x^2 + 6x - 5$

En los ejercicios 7 y 8 determine el vértice y el eje de la gráfica de f. Describa cómo la gráfica de f puede obtenerse de la gráfica de $g(x) = x^2$, y grafique f.

7. $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$ **8.** $f(x) = -2x^2 + 12x + 1$

En los ejercicios 9 y 10 escriba una ecuación para la función cuadrática cuya gráfica contiene el vértice y el punto señalados.

9. Vértice $(-1, 3)$, punto $(0, 1)$

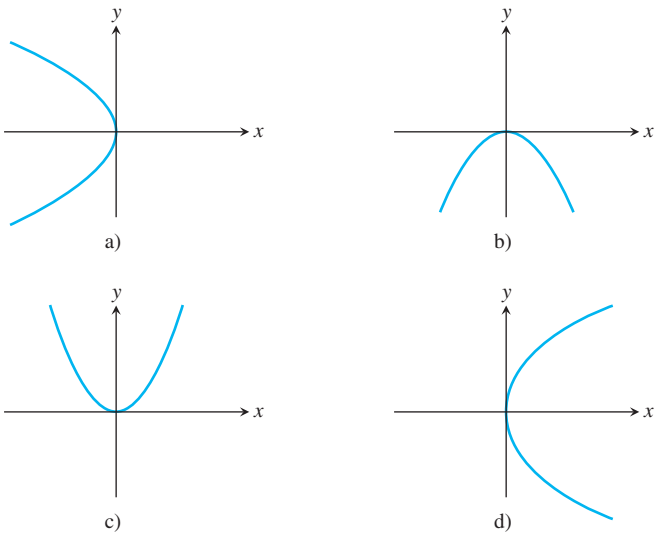
10. Vértice $(2, -5)$, punto $(5, 13)$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.1

En los ejercicios 1 al 6 obtenga el vértice, el foco, la directriz y el ancho focal de la parábola.

1. $x^2 = 6y$
2. $y^2 = -8x$
3. $(y - 2)^2 = 4(x + 3)$
4. $(x + 4)^2 = -6(y + 1)$
5. $3x^2 = -4y$
6. $5y^2 = 16x$

En los ejercicios 7 al 10 relacione la gráfica con su ecuación.



7. $x^2 = 3y$
8. $x^2 = -4y$
9. $y^2 = -5x$
10. $y^2 = 10x$

En los ejercicios 11 al 30 determine la ecuación en forma estándar de la parábola que satisface las condiciones dadas.

11. Vértice (0, 0), foco (−3, 0)
12. Vértice (0, 0), foco (0, 2)
13. Vértice (0, 0), directriz $y = 4$
14. Vértice (0, 0), directriz $x = -2$
15. Foco (0, 5), directriz $y = -5$
16. Foco (−4, 0), directriz $x = 4$
17. Vértice (0, 0), abre hacia la derecha, anchura focal = 8
18. Vértice (0, 0), abre hacia la izquierda, anchura focal = 12
19. Vértice (0, 0), abre hacia abajo, anchura focal = 6
20. Vértice (0, 0), abre hacia arriba, anchura focal = 3
21. Foco (−2, −4), vértice (−4, −4)
22. Foco (−5, 3), vértice (−5, 6)
23. Foco (3, 4), directriz $y = 1$
24. Foco (2, −3), directriz $x = 5$
25. Vértice (4, 3), directriz $x = 6$
26. Vértice (3, 5), directriz $y = 7$
27. Vértice (2, −1), abre hacia arriba, anchura focal = 16
28. Vértice (−3, 3), abre hacia abajo, anchura focal = 20
29. Vértice (−1, −4), abre hacia la izquierda, anchura focal = 10
30. Vértice (2, 3), abre hacia la derecha, anchura focal = 5

En los ejercicios 31 al 36 bosqueje la gráfica de la parábola.

31. $y^2 = -4x$
32. $x^2 = 8y$
33. $(x + 4)^2 = -12(y + 1)$
34. $(y + 2)^2 = -16(x + 3)$
35. $(y - 1)^2 = 8(x + 3)$
36. $(x - 5)^2 = 20(y + 2)$

En los ejercicios 37 al 48 grafique la parábola empleando una graficadora.

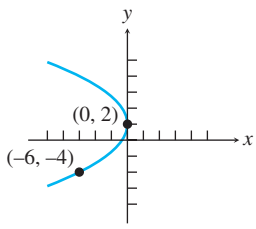
37. $y = 4x^2$
38. $y = -\frac{1}{6}x^2$
39. $x = -8y^2$
40. $x = 2y^2$
41. $12(y + 1) = (x - 3)^2$
42. $6(y - 3) = (x + 1)^2$
43. $2 - y = 16(x - 3)^2$
44. $(x + 4)^2 = -6(y - 1)$
45. $(y + 3)^2 = 12(x - 2)$
46. $(y - 1)^2 = -4(x + 5)$
47. $(y + 2)^2 = -8(x + 1)$
48. $(y - 6)^2 = 16(x - 4)$

En los ejercicios 49 al 52 pruebe que la gráfica de la ecuación es una parábola y obtenga su vértice, foco y directriz.

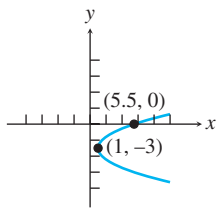
49. $x^2 + 2x - y + 3 = 0$
50. $3x^2 - 6x - 6y + 10 = 0$
51. $y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$
52. $y^2 - 2y + 4x - 12 = 0$

En los ejercicios 53 al 56 escriba una ecuación de la parábola.

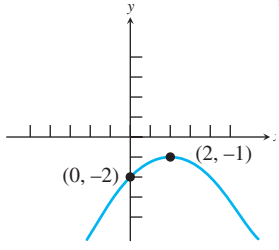
53.



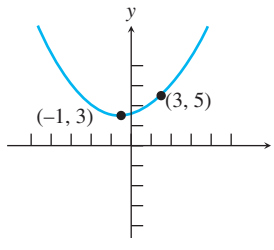
54.



55.



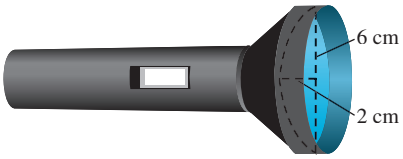
56.



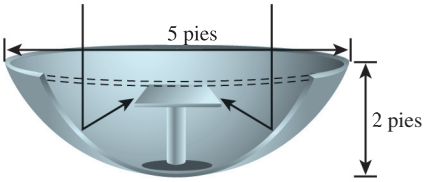
57. Escriba para aprender Explique por qué la deducción de $x^2 = 4py$ es válida sin importar si $p > 0$ o $p < 0$.

58. Escriba para aprender Pruebe que la ecuación de la parábola con foco $(p, 0)$ y directriz $x = -p$ es $y^2 = 4px$.

59. Diseño del espejo de una linterna El espejo de una linterna es un paraboloide de revolución. Su diámetro es de 6 cm y su profundidad es de 2 cm. ¿A qué distancia del vértice debe estar colocado el filamento del bulbo de la linterna para que su luz sea paralela al eje de su espejo?



60. Diseño del plato de un satélite El reflector de una antena de satélite es un paraboloide de revolución con diámetro de 5 pies y profundidad de 2 pies. ¿A qué distancia del vértice debe estar colocada la antena receptora?



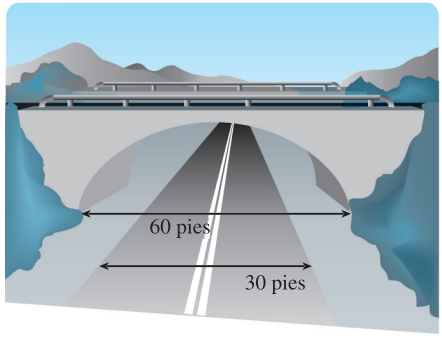
61. Micrófonos parabólicos El Sports Channel utiliza un micrófono para capturar todos los sonidos de los torneos de golf de una temporada. Uno de sus micrófonos tiene una superficie parabólica generada por las parábola $x^2 = 10y$; localice el foco (el receptor eléctrico) de la parábola.

62. Faros parabólicos Stein Glass, Inc. fabrica faros parabólicos para varios automóviles. Si la superficie de uno de los faros es parabólica y está generada por la parábola $x^2 = 12y$, ¿dónde se debe colocar su bulbo?

63. Actividad en equipo Diseño de un puente colgante Los cables principales de un puente colgante, cuando están en forma de parábola, distribuyen de manera uniforme el peso del puente. Los cables principales de un puente en particular están colocados en torres separadas entre sí 600 pies. Los cables están atados a las torres a una altura de 110 pies sobre el piso en su punto más bajo. Si los soportes verticales de los cables están a intervalos de 50 pies a lo largo del nivel del piso, ¿cuáles son las longitudes de estos cables verticales?



64. Actividad en equipo Diseño del arco de un puente Se sabe que los arcos parabólicos son más resistentes que otros arcos. Un puente con un arco parabólico de apoyo tiene una anchura de 60 pies y está sobre una superficie de rodamiento que mide 30 pies de ancho y pasa por abajo del puente. Con la finalidad de tener una altura mínima de 16 pies, ¿cuál es la altura máxima?



Preguntas de examen estandarizado

65. Verdadero o Falso Cada punto de una parábola está a la misma distancia de su foco y su eje. Justifique su respuesta.

66. Verdadero o Falso La directriz de una parábola es paralela al eje de la parábola. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 67 al 70 resuelva los problemas sin utilizar calculadora.

67. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes curvas **no** es una sección cónica?

A) Circunferencia

B) Elipse

C) Hipérbola

D) Óvalo

E) Parábola

68. Opción múltiple ¿Cuál punto tienen en común todas las cónicas de la forma $x^2 = 4py$?

A) (1, 1)

B) (1, 0)

C) (0, 1)

D) (0, 0)

E) (−1, −1)

69. Opción múltiple El foco de $y^2 = 12x$ es

A) (3, 3)

B) (3, 0)

C) (0, 3)

D) (0, 0)

E) (−3, −3)

70. Opción múltiple El vértice de $(y - 3)^2 = -8(x + 2)$ es

A) $(3, -2)$

B) $(-3, -2)$

C) $(-3, 2)$

D) $(-2, 3)$

E) $(-2, -3)$

Exploraciones

71. Construcción dinámica de una parábola Utilice un software como *Cabri Geometry II*™, *The Geometer´s Sketchpad*® o alguna aplicación similar en algún dispositivo manual para construir geométricamente una parábola a partir de su definición (consulte la figura 8.3).

a) En la ventana de construcción, inicie colocando una recta l (directriz) y un punto F (foco) que no esté sobre la recta.

b) Seleccione un punto A sobre la directriz y luego el segmento AF.

c) Seleccione un punto P donde la bisectriz perpendicular de AF se encuentre con la línea perpendicular que va de l a A.

d) ¿Qué curva forma el punto P conforme se mueve A?

e) Pruebe que su respuesta de la parte **d** es correcta.

72. Construcción de los puntos de una parábola Utilice un software como *Cabri Geometry II*™, *The Geometer´s Sketchpad*® o alguna aplicación similar en algún dispositivo manual para construir la figura 8.4, la cual está asociada con la exploración 1.

a) Inicie colocando los ejes coordenados en la ventana de construcción.

b) Dibuje la recta $y = -1$ como la directriz y el punto $(0, 1)$ como el foco.

c) Trace las rectas horizontales y las circunferencias concéntricas mostradas en la figura 8.4.

d) Marque los puntos donde se intersecan esas rectas horizontales y las circunferencias concéntricas.

e) Pruebe que esos puntos están sobre la parábola con directriz $y = -1$ y foco $(0, 1)$.

73. Conos degenerados y cónicas degeneradas Un cono degenerado puede obtenerse cuando el generador y el eje del cono son paralelos o perpendiculares.

a) Bosqueje y describa el "cono" que se obtiene cuando el generador y el eje del cono son paralelos.

b) Bosqueje y nombre los tipos de cónicas degeneradas que se obtienen cuando se interseca el cono degenerado de la parte **a** con un plano.

c) Bosqueje y describa el "cono" que se obtiene cuando el generador y el eje del cono son perpendiculares.

d) Bosqueje y nombre los tipos de cónicas degeneradas que se obtiene cuando se interseca el cono degenerado de la parte **c** con un plano.

Ampliación de las ideas

74. Rectas tangentes Una **recta tangente** de una parábola es una recta que interseca pero no cruza a la parábola. Pruebe que una recta tangente a la parábola $x^2 = 4py$ en el punto (a, b) cruza el eje de las y en el punto $(0, -b)$.

75. Cuerdas focales Una **cuerda focal** de una parábola es una cuerda de la parábola que pasa a través del foco.

a) Pruebe que las coordenadas x de los puntos finales de las cuerdas focales de $x^2 = 4py$ son $x = 2p(m \pm \sqrt{m^2 + 1})$, donde m es la pendiente de la cuerda focal.

b) Utilizando la parte **a** pruebe que la longitud mínima de una cuerda focal es la anchura focal $|4p|$.

76. Lado recto (Latus rectum) La cuerda focal perpendicular al eje de la parábola es el **lado recto (latus rectum)**, el cuál es la expresión en latín de "cuerda recta". Empleando los resultados de los ejercicios 74 y 75 pruebe que:

a) Para una parábola, los dos puntos finales del lado recto y el punto de intersección del eje, y la directriz son los vértices de un triángulo rectángulo isósceles.

b) Los catetos de ese triángulo rectángulo isósceles son tangentes a la parábola.

8.2 Elipses

Aprenderá acerca de...

- La geometría de una elipse
- La traslación de elipses
- Las órbitas y la excentricidad
- La propiedad reflectante de una elipse

. . . porque

Las elipses son la forma de la trayectoria de los planetas y los cometas cuando giran alrededor del Sol, o de los satélites naturales cuando giran alrededor de los planetas.

Geometría de una elipse

Cuando un plano interseca a un cilindro circular y forma una curva cerrada simple, la curva es una elipse.

DEFINICIÓN Elipse

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya distancia a dos puntos fijos en el plano tienen una suma constante. Los puntos fijos son los **focos** de la elipse. La recta que une los focos es el **eje focal**. El punto sobre el eje focal que está en el punto medio entre los dos focos es el **centro**. Los puntos donde la elipse interseca a su eje son los **vértices** de la elipse (consulte la figura 8.11).

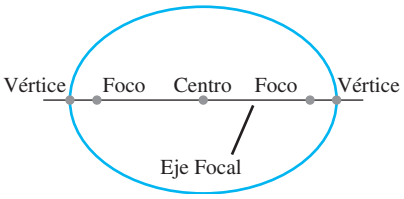


FIGURA 8.11 Elementos clave en el eje focal de una elipse.

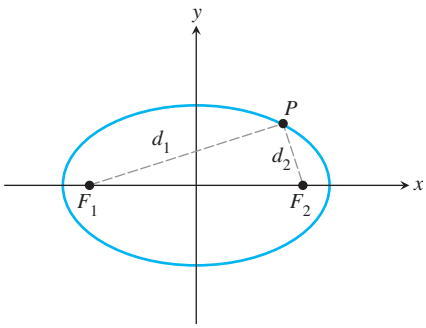


FIGURA 8.12 *Estructura de una elipse.* La suma de las distancias desde los focos a cada punto en la elipse es una constante.

La figura 8.12 muestra un punto $P(x, y)$ de una elipse. Los puntos fijos F_1 y F_2 son los focos de la elipse, y las distancias cuya suma es constante son d_1 y d_2. Podemos construir una elipse utilizando un lápiz, un cordón y dos tachuelas. Coloque el cordón alrededor de las dos tachuelas situadas en F_1 y F_2, jale el cordón tenso hacia un punto P y mueva el lápiz alrededor para trazar la elipse (figura 8.13).

Ahora utilizamos la definición para encontrar una ecuación de una elipse. Para algunas constantes a y c, con $a > c \geq 0$, sean $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ los focos (figura 8.14). Así, una elipse está definida por el conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Utilizando la fórmula de la distancia, se obtiene

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \quad \text{Elevar al cuadrado.}$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \quad \text{Simplificar.}$$

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \text{Elevar al cuadrado.}$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad \text{Simplificar.}$$

Sea $b^2 = a^2 - c^2$, entonces se tiene

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

lo cual usualmente se escribe como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

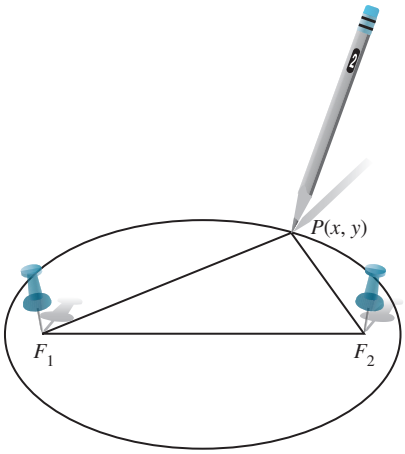


FIGURA 8.13 Cómo dibujar una elipse.

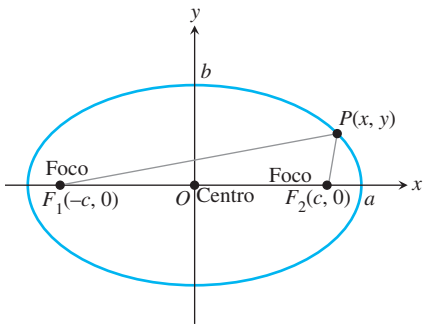


FIGURA 8.14 La elipse definida por $PF_1 + PF_2 = 2a$ es la gráfica de la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $b^2 = a^2 - c^2$.

ALERTA ACERCA DE LOS EJES

Para una elipse, la palabra *ejes* se usa de diversas maneras. El eje focal es una recta. Los ejes menor y mayor son *segmentos de recta*. El semieje mayor y el semieje menor son *números*.

Debido a que estos pasos pueden invertirse, un punto $P(x, y)$ satisface esta última ecuación si, y sólo si, el punto está en la elipse definida por $PF_1 + PF_2 = 2a$, a condición de que $a > c \geq 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$. La *relación pitagórica* $b^2 = a^2 - c^2$ puede escribirse de muchas formas, incluyendo $c^2 = a^2 - b^2$ y $a^2 = b^2 + c^2$.

La ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es la **forma estándar** de la ecuación de una elipse con centro en el origen, con el eje x como su eje focal. Una elipse con centro en el origen con el eje y como su eje focal es la *inversa* de $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, y por eso la ecuación es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Como sucede con los círculos y las parábolas, un segmento de recta con puntos finales sobre una elipse es una **cuerda** de la elipse. La cuerda que está tendida sobre el eje focal es el **eje mayor** de la elipse. La cuerda que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal es el **eje menor** de la elipse. La longitud del eje mayor es $2a$, y la del eje menor es $2b$. El número a es el **semieje mayor** y b es el **semieje menor**.

Elipses con centro (0, 0)

• **Ecuación estándar**	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
• **Eje Focal**	Eje x	Eje y
• **Focos**	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
• **Vértices**	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
• **Semieje mayor**	a	a
• **Semieje menor**	b	b
• **Relación pitagórica**	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$

Consulte la figura 8.15.

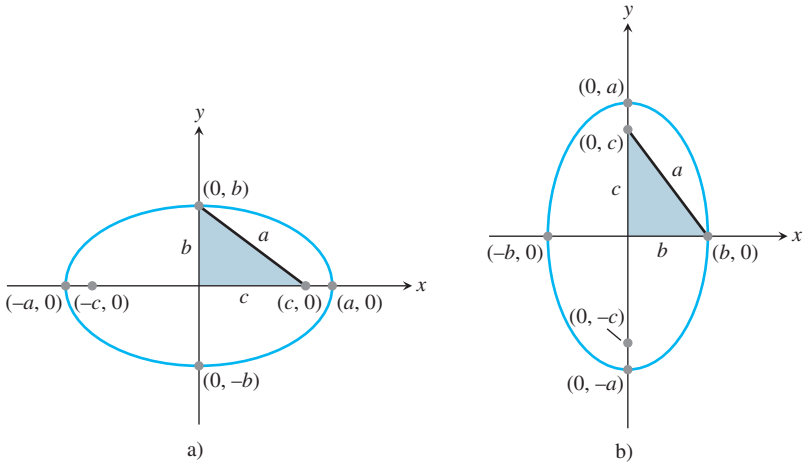


FIGURA 8.15 Elipses centradas en el origen con focos en a el eje x y b el eje y. En cada caso, se muestra un triángulo rectángulo para ilustrar la relación pitagórica.

EJEMPLO 1 Determinación de los vértices y los focos de una elipse

Determine los vértices y los focos de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$

SOLUCIÓN Divida ambos miembros de la ecuación entre 36 para obtener la ecuación estándar $x^2/9 + y^2/4 = 1$. Debido a que el número más grande es el denominador de x^2, el eje focal está en el eje x. Por lo que $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, y $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$. De esta manera, los vértices son $(\pm 3, 0)$, y los focos son $(\pm\sqrt{5}, 0)$.

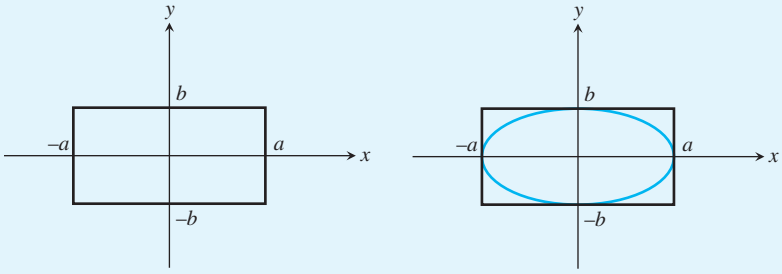
Ahora resuelva el ejercicio 1.

Una elipse centrada en el origen con su eje focal en un eje de coordenadas, es simétrica con respecto al origen y a ambos ejes coordenados. Dicha elipse puede esbozarse dibujando primero un *rectángulo guía* centrado en el origen, cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados; entonces se traza la elipse dentro del rectángulo, como se muestra en la lección de dibujo.

Lección de dibujo

Cómo trazar la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

1. Dibuje los segmentos de recta en $x = \pm a$ y en $y = \pm b$ y complete el rectángulo que queda determinado por esos segmentos.
2. Inscriba una elipse que sea tangente al rectángulo en $(\pm a, 0)$ y en $(0, \pm b)$



Si se desea graficar una elipse utilizando una graficadora, se requiere despejar y en la ecuación de la elipse, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Obtención de una ecuación y elaboración de una gráfica de una elipse

Determine la ecuación de la elipse con focos $(0, -3)$ y $(0, 3)$, cuya longitud del eje menor es 4. Bosqueje la elipse y compruebe el bosquejo con una graficadora.

SOLUCIÓN El centro es $(0, 0)$. Los focos están en el eje y, con $c = 3$. El semieje menor es $b = 4/2 = 2$. Utilizando $a^2 = b^2 + c^2$, se tiene que $a^2 = 2^2 + 3^2 = 13$. Entonces la forma estándar de la ecuación de la elipse es

$$\frac{y^2}{13} + \frac{x^2}{4} = 1.$$

Utilizando $a = \sqrt{13} \approx 3.61$ y $b = 2$, se puede dibujar un rectángulo guía y luego la elipse, como se explicó en la Lección de dibujo (inténtelo). Para graficar la elipse utilizando una graficadora, se despeja y en términos de x.

$$\frac{y^2}{13} = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$y^2 = 13(1 - x^2/4)$$

$$y = \pm\sqrt{13(1 - x^2/4)}$$

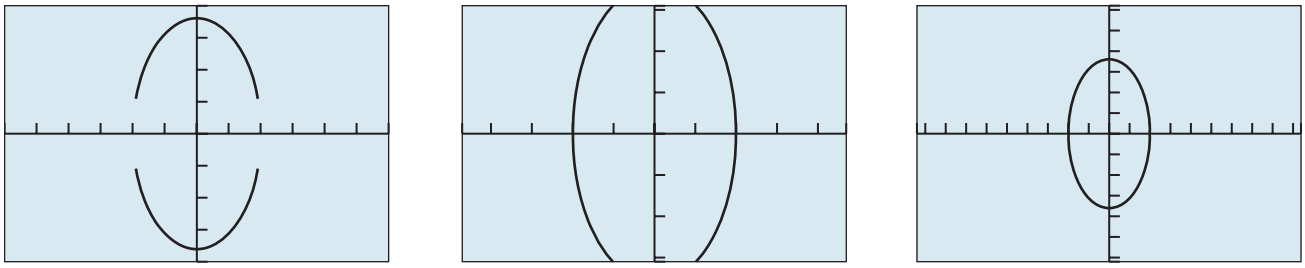
continúa

La figura 8.16 muestra tres vistas de la gráfica de

$$Y1 = \sqrt{13(1 - x^2/4)} \quad \text{y} \quad Y2 = -\sqrt{13(1 - x^2/4)}.$$

Es necesario seleccionar la ventana de visualización cuidadosamente para evitar errores gráficos.

Ahora resuelva el ejercicio 17.

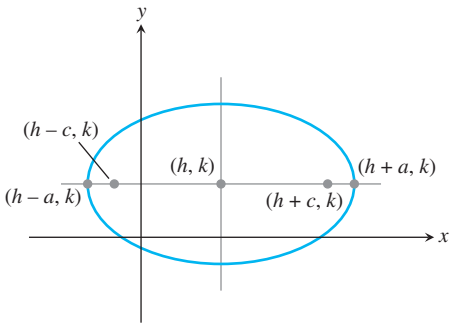


[–6, 6] por [–4, 4]
a)

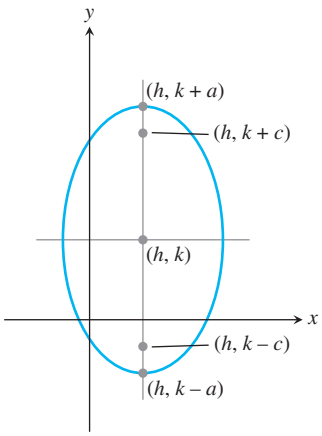
[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
b)

[–9.4, 9.4] por [–6.2, 6.2]
c)

FIGURA 8.16 Tres vistas de la elipse $y^2/13 + x^2/4 = 1$. Todas las ventanas de visualización son cuadradas o aproximadamente cuadradas, por lo que podemos ver la forma verdadera. Note que los huecos entre las ramas superior e inferior no se muestran cuando la graficadora incluye columnas de píxeles en los que las coordenadas x son ± 2, como en b y c (ejemplo 2).



a)



b)

FIGURA 8.17 Elipses con centro (h, k) y focos en a $y = k$ y b $x = h$.

Traslación de elipses

Cuando una elipse con centro (0, 0) se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, el centro de la elipse se mueve de (0, 0) a (h, k), como se muestra en la figura 8.17. Tales traslaciones no cambian la longitud de los ejes menor y mayor ni la relación pitagórica.

Elipses con centro (h, k)

• **Ecuación estándar**	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2} + \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
• **Eje Focal**	$y = k$	$x = h$
• **Focos**	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
• **Vértices**	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
• **Semieje mayor**	a	a
• **Semieje menor**	b	b
• **Relación pitagórica**	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$

Consulte la figura 8.17.

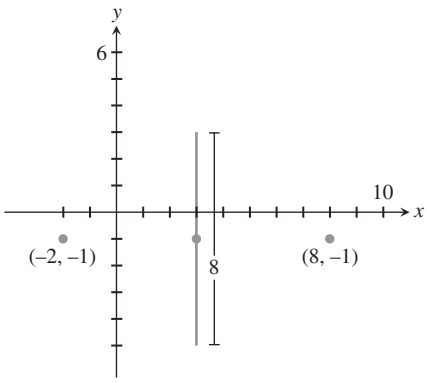


FIGURA 8.18 Información dada para el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Obtención de una ecuación de una elipse

Determine la forma estándar de la ecuación de la elipse cuyo eje mayor tiene sus puntos finales en $(-2, -1)$ y $(8, -1)$, y cuya longitud del eje menor es 8.

SOLUCIÓN La figura 8.18 muestra los puntos finales del eje mayor, el eje menor y el centro de la elipse. La ecuación estándar de esta elipse tiene la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

donde el centro (h, k) es el punto medio $(3, -1)$ del eje mayor. Los semiejes mayor y menor son

$$a = \frac{8-(-2)}{2} = 5 \quad \text{y} \quad b = \frac{8}{2} = 4.$$

Así que la ecuación que buscamos es

$$\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y-(-1))^2}{4^2} = 1,$$

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Ahora resuelva el ejercicio 31.

EJEMPLO 4 Localización de los puntos clave de una elipse

Determine el centro, los vértices y los focos de la elipse

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{49} = 1.$$

SOLUCIÓN La ecuación estándar de esta elipse tiene la forma

$$\frac{(y-5)^2}{49} + \frac{(x+2)^2}{9} = 1.$$

El centro (h, k) es $(-2, 5)$. Debido a que el semieje mayor es $a = \sqrt{49} = 7$, los vértices $(h, k \pm a)$ son

$$(h, k+a) = (-2, 5+7) = (-2, 12) \quad \text{y}$$

$$(h, k-a) = (-2, 5-7) = (-2, -2).$$

Puesto que

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40}.$$

Los focos $(h, k \pm c)$ son $(-2, 5 \pm \sqrt{40})$, o aproximadamente $(-2, 11.32)$ y $(-2, -1.32)$.

Ahora resuelva el ejercicio 37.

Con esa información de la elipse encontrada en el ejemplo 4 y con el conocimiento de que el semieje menor es $b = \sqrt{9} = 3$, fácilmente puede bosquejarse la elipse. Obtener una gráfica exacta de la elipse utilizando una función graficadora es otro problema; por lo general, la mejor forma de graficar una elipse utilizando una graficadora es emplear ecuaciones paramétricas.

EXPLORACIÓN 1 **Elaboración de la gráfica de una elipse utilizando sus ecuaciones paramétricas**

1. Utilice la identidad trigonométrica de Pitágoras $\cos^2 t + \text{sen}^2\, t = 1$ para probar que la parametrización $x = -2 + 3 \cos t$, $y = 5 + 7 \text{ sen } t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ producirá una gráfica de la elipse $(x + 2)^2/9 + (y - 5)^2/49 = 1$.
2. Grafique $x = -2 + 3 \cos t$, $y = 5 + 7 \text{ sen } t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ en un cuadrado en la ventana de visualización para justificar gráficamente la parte 1.
3. Cree parametrizaciones para las elipses de los ejemplos 1, 2 y 3.
4. Grafique cada una de sus parametrizaciones de la parte 3 y compruebe las características de la gráfica obtenida para ver si coinciden con las características geométricas de la elipse. Revise su parametrización y vuelva a graficar hasta que las características coincidan.
5. Pruebe que cada una de sus parametrizaciones es válida.

Órbitas y excentricidad

La primera ley del movimiento planetario de Kepler, publicada en 1609, establece que la trayectoria de la órbita de un planeta es una elipse con el Sol en uno de los focos. Asteroides, cometas y otros cuerpos que giran alrededor del Sol siguen trayectorias elípticas. El punto más cercano al Sol en tal órbita es el *perihelio* y el punto más alejado es el *afelio* (figura 8.19). La forma de una elipse está relacionada con su *excentricidad*.

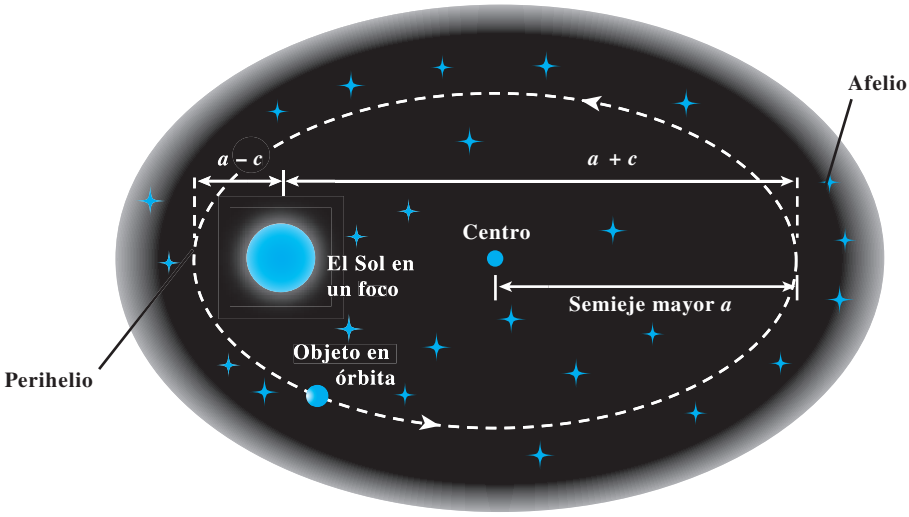


FIGURA 8.19 Muchos objetos celestes tienen órbitas elípticas alrededor del Sol.

UNA NUEVA *e*

Intente no confundir la excentricidad e con la base natural e utilizada en funciones exponenciales y logarítmicas. El contexto debe ser suficiente para dejar en claro cuál de las dos se utiliza.

DEFINICIÓN Excentricidad de una elipse

La **excentricidad** de una elipse es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

en donde a es el semieje mayor, b es el semieje menor y c es la distancia del centro de la elipse a cualquiera de los dos focos.

El sustantivo *excentricidad* viene del adjetivo excéntrico, el cual significa "fuera del centro". Matemáticamente, la excentricidad es la razón de c a a. Entre más grande sea c, comparada con a, los focos están más lejos del centro.

En cualquier elipse, $a > c \geq 0$. Dividiendo esta desigualdad entre a se obtiene que $0 \leq e < 1$. Entonces la excentricidad de una elipse está entre 0 y 1.

Las elipses con focos muy alejados del centro son alargadas y tienen excentricidad cercana a 1; por ejemplo, la órbita del cometa Halley tiene excentricidad $e \approx 0.97$. Las elipses con focos cerca del centro son casi circulares y tiene excentricidad cercana a 0; por ejemplo, la órbita de Venus tiene una excentricidad de 0.0068.

¿Qué sucede cuando la excentricidad $e = 0$? En una elipse, ya que a es positivo, $e = c/a = 0$ implica que $c = 0$ y de esta manera $a = b$. En este caso, la elipse se *degenera* en una circunferencia. Debido a que la elipse es una circunferencia cuando $a = b$, se acostumbra expresar este valor común como r y se le llama radio de la circunferencia.

Cosas sorprendentes pasan cuando la forma de una elipse es casi una circunferencia, pero sin llegar a serlo, como sucede con la órbita de nuestro planeta, la Tierra.

EJEMPLO 5 Análisis de la órbita de la Tierra

La órbita de la Tierra tiene un semeje mayor $a \approx 149.598$ Gm (gigametros) y una excentricidad de $e \approx 0.0167$. Calcule e interprete b y c.

SOLUCIÓN Debido a que $e = c/a$, $c = ea \approx 0.0167 \times 149.598 = 2.4982866$ y

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \approx \sqrt{149.598^2 - 2.4982866^2} \approx 149.577.$$

El semieje menor $b \approx 149.577$ Gm es sólo 0.014% más corto que el semieje mayor $a \approx 149.598$ Gm. La distancia del afelio de la Tierra al Sol es $a + c \approx 149.598 + 2.498 = 152.096$ Gm y la distancia del perihelio es $a - c \approx 149.598 - 2.498 = 147.100$ Gm.

Así, la órbita de la Tierra es casi una circunferencia perfecta, pero la distancia entre el centro del Sol como un foco y el centro de la órbita de la Tierra es $c \approx 2.498$ Gm, más de 2 órdenes de magnitud mayor que $a - b$. La excentricidad, expresada en forma de porcentaje, es 1.67%; éste mide qué tan lejos *está* el Sol del *centro*.

Ahora resuelva el ejercicio 53.

EXPLORACIÓN 2 **Construcción de elipses para entender la excentricidad**

Cada equipo necesitará un lápiz, una regla graduada en centímetros, tijeras, un cordón, varias hojas en blanco, dos tachuelas y un tablero de hule espuma u otro material apropiado.

1. Ate los extremos de un cordón de 20 centímetros y forme una circunferencia.
2. Coloque una hoja en blanco en el tablero y cuidadosamente ponga las dos tachuelas cada una alejada del centro 2 cm. Construya una elipse utilizando el cordón y un lápiz como se muestra en la figura 8.13. Mida y anote los valores resultantes de a, b y c de la elipse y calcule las razones $e = c/a$ y b/a para la misma.
3. Repita el paso 2 tres veces en hojas separadas, colocando las tachuelas a 4, 6 y 8 cm de separación. Anote los valores a, b, c, y las razones e y b/a para cada elipse.
4. Escriba sus observaciones acerca de la razón b/a conforme la razón e (la excentricidad) aumenta. ¿Cuál de estas dos razones mide la forma de la elipse? ¿Cuál de estas dos razones expresa qué tan lejos están los focos del centro?
5. Elabore un diagrama de los pares ordenados $(e, b/a)$, determine una fórmula para la razón b/a como una función de la excentricidad e y sobreponga la gráfica de la función al diagrama de dispersión.

GALERÍAS DE MURMULLOS

En arquitectura, los techos en forma de un elipsoide se utilizan para crear *galerías de murmullos*. Si una persona susurra en un foco puede ser escuchada al otro lado del salón por una persona en el otro foco. Un elipsoide es parte del diseño del capitolio del estado de Texas; un aplauso dado en el centro del vestíbulo principal (en un foco del elipsoide) rebota al domo de forma interna elíptica, pasa a través del otro foco, rebota el domo una segunda ocasión, y regresa a la persona como un eco distinto.

Propiedad reflectante de una elipse

Debido a su forma, las elipses se utilizan para producir reflectores de sonido, luz y otras ondas. Si rotamos una elipse en el espacio tridimensional con respecto a su eje focal, la elipse forma una **elipsoide de revolución**. Si se coloca una señal en uno de los focos en un elipsoide reflectante, la señal se refleja saliendo de la superficie elíptica al otro foco, como se ilustra en la figura 8.20. Esta propiedad se utiliza para producir espejos para equipos ópticos y estudiar el ruido de las naves aéreas en túneles de viento.

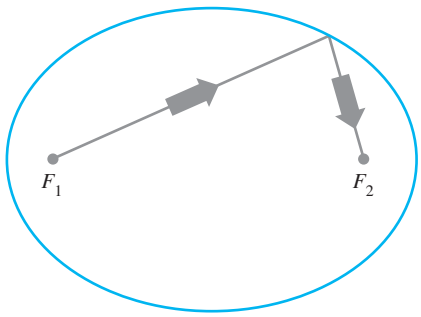


FIGURA 8.20 La propiedad reflectora de una elipse.

Los elipsoides se utilizan en el cuidado de la salud para evitar la cirugía en el tratamiento de piedras en los riñones. Un *litotriptor* elíptico emite ondas de choque bajo del agua de ultra alta frecuencia (UHF, por sus siglas en inglés) desde un foco hacia el riñón del paciente, que cuidadosamente se coloca en el otro foco (figura 8.21).

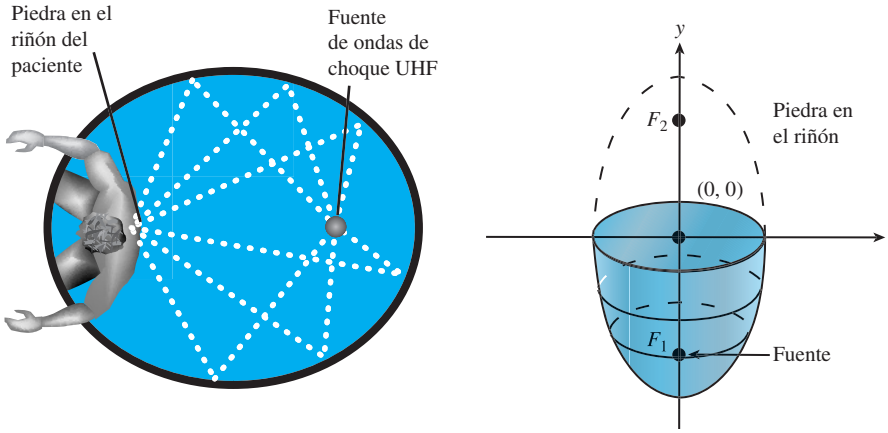


FIGURA 8.21 Cómo un litotriptor rompe piedras en el riñón.

EJEMPLO 6 Colocación de un litotriptor

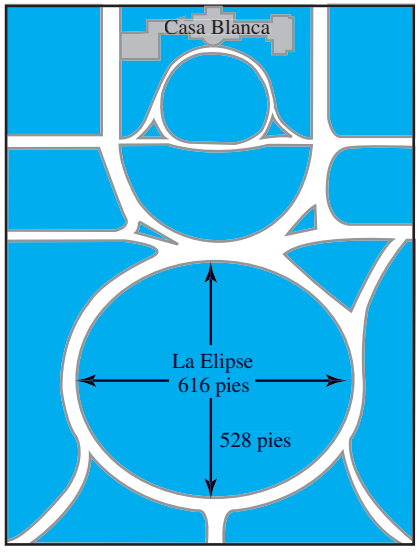
La elipse usada para generar el elipsoide de un litotriptor tiene un eje mayor de 12 pies y un eje menor de 5 pies. ¿Qué tan lejos del centro están los focos?

SOLUCIÓN De la información dada, se sabe que $a = 12/2 = 6$ y $b = 5/2 = 2.5$. Por lo tanto

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx \sqrt{6^2 - 2.5^2} \approx 5.4544.$$

Así que los focos están aproximadamente 5 pies 5.5 pulg alejados del centro del litotriptor.

Ahora resuelva el ejercicio 59.



PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO (de la página 631)

PROBLEMA: Si *La Elipse* en la Casa Blanca mide 616 pies de largo y 528 pies de ancho, ¿cuál es su ecuación?

SOLUCIÓN: En términos de simplicidad, modelamos La Elipse centrada en (0, 0) con el eje x como su eje focal. Debido a que La Elipse mide 616 pies de longitud, $a = 616/2 = 308$, y a que mide 528 pies de ancho, $b = 528/2 = 264$. Utilizando $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, obtenemos

$$\frac{x^2}{308^2} + \frac{y^2}{264^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{94{,}864} + \frac{y^2}{69{,}696} = 1.$$

Es posible crear otros modelos.

REPASO RÁPIDO 8.2 *(Para obtener ayuda revise las secciones R.2 y R.5)*

En los ejercicios del 1 y 2 determine la distancia entre los puntos dados.

1. $(-3, -2)$ y $(2, 4)$

2. $(-3, -4)$ y (a, b)

En los ejercicios 3 y 4 despeje y en términos de x.

3. $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$ **4.** $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

En los ejercicios 5 al 8 resuelva algebraicamente para x.

5. $\sqrt{3x + 12} + \sqrt{3x - 8} = 10$

6. $\sqrt{6x + 12} - \sqrt{4x + 9} = 1$

7. $\sqrt{6x^2 + 12} + \sqrt{6x^2 + 1} = 11$

8. $\sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{3x^2 + 4} = 8$

En los ejercicios 9 y 10 obtenga soluciones exactas completando el cuadrado.

9. $2x^2 - 6x - 3 = 0$ **10.** $2x^2 + 4x - 5 = 0$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.2

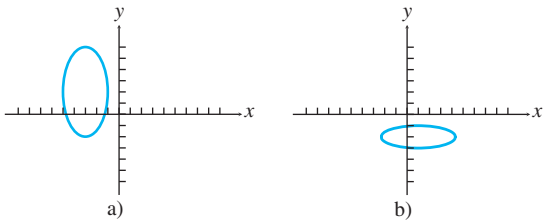
En los ejercicios 1 al 6 obtenga los vértices y los focos de la elipse.

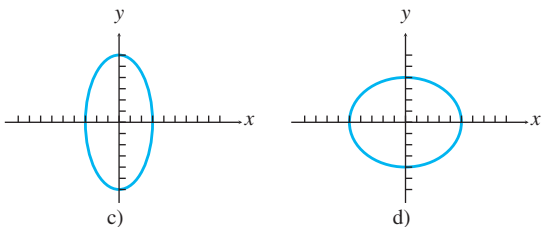
1. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$ **2.** $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{21} = 1$

3. $\dfrac{y^2}{36} + \dfrac{x^2}{27} = 1$ **4.** $\dfrac{x^2}{11} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

5. $3x^2 + 4y^2 = 12$ **6.** $9x^2 + 4y^2 = 36$

En los ejercicios 7 al 10 relacione la gráfica con su ecuación, dado que las marcas de todos los ejes están separados 1 unidad.





7. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ **8.** $\dfrac{y^2}{36} + \dfrac{x^2}{9} = 1$

9. $\dfrac{(y-2)^2}{16} + \dfrac{(x+3)^2}{4} = 1$ **10.** $\dfrac{(x-1)^2}{11} + (y+2)^2 = 1$

En los ejercicios 11 al 16 bosqueje la gráfica de la elipse.

11. $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ **12.** $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

13. $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$ **14.** $\dfrac{y^2}{49} + \dfrac{x^2}{25} = 1$

15. $\dfrac{(x+3)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$ **16.** $\dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$

En los ejercicios 17 al 20 grafique la elipse utilizando una graficadora.

17. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ **18.** $\dfrac{y^2}{64} + \dfrac{x^2}{16} = 1$

19. $\dfrac{(x+2)^2}{5} + 2(y-1)^2 = 1$ **20.** $\dfrac{(x-4)^2}{16} + 16(y+4)^2 = 8$

En los ejercicios del 21 al 36 determine una ecuación, en la forma estándar, para la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

21. Longitud del eje mayor 6, en el eje y, longitud del eje menor 4

22. Longitud del eje mayor 14, en el eje x, longitud del eje menor 10

23. Focos $(\pm 2, 0)$, longitud del eje mayor 10

24. Focos $(0, \pm 3)$, longitud del eje mayor 10

25. Los extremos de los ejes son $(\pm 4, 0)$ y $(0, \pm 5)$

26. Los extremos de los ejes son $(\pm 7, 0)$ y $(0, \pm 4)$

27. Los extremos del eje mayor son $(0, \pm 6)$, longitud del eje menor 8

28. Los extremos del eje mayor son $(\pm 5, 0)$, longitud del eje menor 4

29. Los extremos del eje menor son $(0, \pm 4)$, longitud del eje mayor 10

30. Los extremos del eje menor son $(\pm 12, 0)$, longitud del eje mayor 26

31. Los extremos del eje mayor son $(1, -4)$ y $(1, 8)$, longitud del eje menor 8

32. Los extremos del eje mayor son $(-2, -3)$ y $(-2, 7)$, longitud del eje menor 4

33. Los focos son $(1, -4)$ y $(5, -4)$; los extremos del eje mayor son $(0, -4)$ y $(6, -4)$.

34. Los focos son $(-2, 1)$ y $(-2, 5)$; los extremos del eje mayor son $(-2, -1)$ y $(-2, 7)$.

35. Los extremos del eje mayor son $(3, -7)$ y $(3, 3)$, la longitud del eje menor 6.

36. Los extremos del eje mayor son $(-5, 2)$ y $(3, 2)$, la longitud del eje menor 6.

En los ejercicios 37 al 40 determine el centro, los vértices y los focos de la elipse.

37. $\dfrac{(x+1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$ **38.** $\dfrac{(x-3)^2}{11} + \dfrac{(y-5)^2}{7} = 1$

39. $\dfrac{(y+3)^2}{81} + \dfrac{(x-7)^2}{64} = 1$ **40.** $\dfrac{(y-1)^2}{25} + \dfrac{(x+2)^2}{16} = 1$

En los ejercicios 41 al 44 grafique la elipse utilizando una graficadora en modo paramétrico.

41. $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{4} = 1$ **42.** $\dfrac{x^2}{30} + \dfrac{y^2}{20} = 1$

43. $\dfrac{(x+3)^2}{12} + \dfrac{(y-6)^2}{5} = 1$ **44.** $\dfrac{(y+1)^2}{15} + \dfrac{(x-2)^2}{6} = 1$

En los ejercicios 45 al 48 pruebe que la gráfica de la ecuación es una elipse y determine sus vértices, los focos y la excentricidad.

45. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$

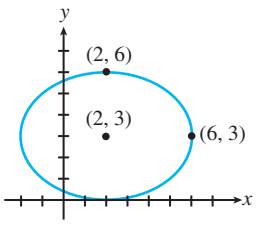
46. $3x^2 + 5y^2 - 12x + 30y + 42 = 0$

47. $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$

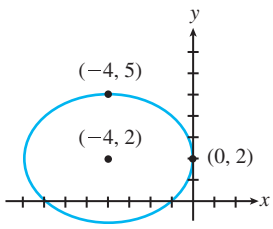
48. $4x^2 + y^2 - 32x + 16y + 124 = 0$

En los ejercicios 49 y 50 escriba la ecuación que corresponda a cada elipse.

49.



50.



51. Escriba para aprender Pruebe que una ecuación de una elipse con centro en $(0, 0)$, focos $(0, \pm c)$ y semieje mayor $a > c \geq 0$ es $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$, donde $b^2 = a^2 - c^2$. [*Sugerencia:* Consulte la deducción al inicio de la sección].

52. Escriba para aprender **Planetas bailarines** Utilizando los datos de la tabla 8.1, pruebe que el planeta con la órbita más excéntrica algunas veces es más cercana al Sol que el planeta con la órbita excéntrica más pequeña.

Tabla 8.1 Semieje mayor y excentricidades de los planetas

Planeta	Semieje mayor (Gm)	Excentricidad
Mercurio	57.9	0.2056
Venus	108.2	0.0068
Tierra	149.6	0.0167
Marte	227.9	0.0934
Júpiter	778.3	0.0485
Saturno	1427	0.0560
Urano	2869	0.0461
Neptuno	4497	0.0050
Plutón	5900	0.2484

Fuente: Shupe, et al., National Geographic Atlas of the World (rev. sexta ed.). Washington, DC: National Geographic Society, 1991, lámina 116, y otras fuentes.

53. La órbita de la Luna El apogeo de la Luna (la distancia más grande hacia la Tierra) es 252,710 millas y el perigeo (la distancia más cercana a la Tierra) es 221,463 millas. Suponiendo que la órbita de la Luna a la Tierra es elíptica con la Tierra como un foco, calcule e interprete a, b, c y e.

54. Mercurio caliente Dado que el diámetro del Sol es aproximadamente 1.392 Gm, ¿qué tan cerca está Mercurio de la superficie del Sol?

55. Saturno Obtenga las distancias del perihelio y el afelio de Saturno.

56. Venus y Marte Escriba las ecuaciones de las órbitas de Venus y de Marte en la forma $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

57. Los Sungrazers Un grupo de cometas, conocidos como los *Sungrazers*, pasa a un diámetro del Sol (1.392 Gm) de la superficie solar. ¿Qué puede concluir acerca de $a - c$ para las órbitas de los *Sungrazers*?

58. Cometa Halley La órbita del cometa Halley es 36.18 UA de largo y 9.12 UA de ancho. ¿Cuánto mide su excentricidad?

59. Litotriptor Para una elipse que genera el elipsoide de un litotriptor, el eje mayor tiene extremos $(-8, 0)$ y $(8, 0)$. Un punto final del eje menor es $(0, 3.5)$. Determine las coordenadas de los focos.

60. Litotriptor (tome como referencia la figura 8.21) La forma de un litotriptor se construye rotando, con respecto a su eje mayor, la porción inferior de una elipse debajo de su eje menor. Si la longitud del eje mayor es de 26 pulg y la longitud del eje menor es de 10 pulg, ¿dónde debe colocarse la fuente de la onda de choque y el paciente para tener efecto máximo?

Actividades en grupo En los ejercicios 61 y 62 resuelva algebraicamente el sistema de ecuaciones y justifique gráficamente su respuesta.

61. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
$x^2 + y^2 = 4$

62. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$
$x - 3y = -3$

63. Actividad en equipo Considere el sistema de ecuaciones

$$x^2 + 4y^2 = 4$$
$$y = 2x^2 - 3.$$

a) Resuelva gráficamente el sistema.

b) Si tiene acceso a una graficadora que realice álgebra simbólica, utilícela para determinar las soluciones exactas del sistema.

64. Escriba para aprender Busque el adjetivo *excéntrico* en el diccionario y lea sus distintas definiciones. Observe que la palabra se deriva de *ex-céntrico*, que significa "fuera del centro". Explique cómo se relaciona esto con la palabra cotidiana y con la palabra con significado matemático para las elipses.

Preguntas de examen estandarizado

65. Verdadero o falso La distancia de un foco de una elipse al vértice más cercano es $a(1+e)$, donde a es el semieje mayor y e es la excentricidad. Justifique su respuesta.

66. Verdadero o falso La distancia de un foco de una elipse a cualquier extremo del eje menor mide la mitad de la longitud del eje mayor. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 67 al 70 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver el problema.

67. Opción múltiple Un foco de $x^2 + 4y^2 = 4$ es

A) $(4, 0)$. **B)** $(2, 0)$.

C) $(\sqrt{3}, 0)$. **D)** $(\sqrt{2}, 0)$.

E) $(1, 0)$.

68. Opción múltiple El eje focal de $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$ es

A) $y = 1$. **B)** $y = 2$.

C) $y = 3$. **D)** $y = 4$.

E) $y = 5$.

69. Opción múltiple El centro de $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$

A) $(4, 2)$. **B)** $(4, 3)$.

C) $(4, 4)$. **D)** $(4, 5)$.

E) $(4, 6)$.

70. Opción múltiple El perímetro de un triángulo con un vértice en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y los otros dos vértices en los focos de la elipse sería

A) $a + b$. **B)** $2a + 2b$.

C) $2a + 2c$. **D)** $2b + 2c$.

E) $a + b + c$.

Exploraciones

71. Área y perímetro El área de una elipse es $A = \pi ab$, pero el perímetro no puede expresarse de manera tan sencilla:

$$P \approx \pi(a + b)\left(3 - \frac{\sqrt{(3a + b)(a + 3b)}}{a + b}\right).$$

a) Pruebe que, cuando $a = b = r$, éstas se convierten en las fórmulas conocidas para el cálculo del área y el perímetro (circunferencia) de un círculo.

b) Encuentre un par de elipses tal que la que tenga el área más grande tenga el perímetro más pequeño.

72. Escriba para aprender Leyes de Kepler Hemos encontrado la Primera y la Tercera Leyes de Kepler (página 193). Consultando en una biblioteca o Internet,

a) Lea acerca de la vida de Kepler y escriba en sus propias palabras como descubrió él sus tres leyes del movimiento planetario.

b) ¿Cuál es la Segunda Ley de Kepler? Explíquela con palabras y dibujos.

73. Velocidad *vs.* posición de un péndulo Conforme un péndulo oscila hacia y desde un detector de movimiento, su distancia (en metros) desde el detector está dada por la función de posición $x(t) = 3 + \cos(2t - 5)$, donde t representa el tiempo (en segundos). La velocidad (en m/s) del péndulo está expresada con la ecuación $y(t) = -2 \operatorname{sen}(2t - 5)$.

a) Utilizando el modo paramétrico de su graficadora haga un diagrama de la relación (x, y) para la velocidad contra la posición para $0 \le t \le 2\pi$.

b) Escriba la ecuación de la cónica resultante en la forma estándar, en términos de x y de y, y elimine el parámetro t.

74. Velocidad *vs.* posición de un péndulo Conforme un péndulo oscila hacia y desde un detector de movimiento, su distancia (en pies) desde el detector está dada por $x(t) = 5 + 3 \operatorname{sen}(\pi t + \pi/2)$ y una velocidad (en pies/s) de $y(t) = 3\pi \cos(\pi t + \pi/2)$, donde t representa el tiempo (en segundos).

a) Pruebe que la gráfica de la velocidad contra la posición (distancia) es una elipse.

b) Escriba para aprender Describa el movimiento del péndulo.

Ampliación de las ideas

75. Pruebe que una gráfica no degenerada de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una elipse si $AC > 0$.

76. Escriba para aprender La gráfica de la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

se considera una elipse degenerada. Describa la gráfica. ¿Qué tan parecida es a una elipse común y en qué difieren?

8.3 Hipérbolas

Aprenderá acerca de...

- La geometría de una hipérbola
- La traslación de hipérbolas
- Las órbitas y la excentricidad
- La propiedad reflectante de una hipérbola
- La navegación de rango amplio

. . . porque

La hipérbola es la sección cónica menos conocida, aunque se utiliza en astronomía, óptica y navegación.

Geometría de una hipérbola

Cuando un plano interseca los dos mantos de un cono circular recto, la intersección es una hipérbola. La definición, características y deducción de una hipérbola se parecen mucho a las de una elipse. Como podrá observar más adelante, encontrará útil lo anterior al comparar la naturaleza de la hipérbola con la naturaleza de la elipse.

DEFINICIÓN Hipérbola

Una hipérbola es el conjunto de puntos en un plano cuya *diferencia* de sus distancias a dos puntos fijos en el plano es constante. Los puntos fijos son los **focos** de la hipérbola. La línea que une los focos es el **eje focal**. El punto medio entre los focos es el **centro**. Los puntos donde la hipérbola se interseca con su eje focal son los **vértices** de la hipérbola (consulte la figura 8.22).

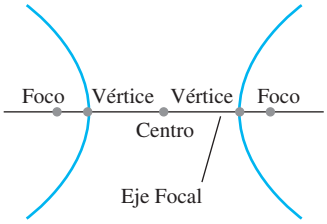


FIGURA 8.22 Puntos clave en el eje focal de una hipérbola.

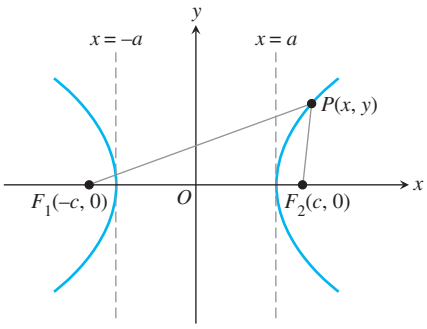


FIGURA 8.23 *Estructura de una hipérbola*. La diferencia de las distancias desde los focos a cualquier punto de la hipérbola es una constante.

La figura 8.23 muestra una hipérbola centrada en el origen con su eje focal sobre el eje x. Los vértices están en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, donde a es alguna constante positiva. Los puntos fijos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ son los focos de la hipérbola, con $c > a$.

Note que la hipérbola tiene dos *ramas*. Para un punto $P(x, y)$ en la rama derecha, $PF_1 - PF_2 = 2a$. Sobre la rama izquierda, $PF_2 - PF_1 = 2a$. Combinando estas dos ecuaciones se obtiene

$$PF_1 - PF_2 = \pm 2a.$$

Utilizando la fórmula de la distancia, la ecuación se transforma en

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a.$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \quad \text{Elevar al cuadrado.}$$

$$\mp a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \quad \text{Simplificar.}$$

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \text{Elevar al cuadrado.}$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad \text{Simplificar.}$$

Sea $b^2 = c^2 - a^2$, entonces se tiene

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

lo cual usualmente se escribe como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Debido a que estos pasos pueden invertirse, un punto $P(x, y)$ satisface esta última ecuación si, y sólo si, el punto que está sobre la hipérbola definida por $PF_1 - PF_2 = \pm 2a$, a condición de que $c > a > 0$ y $b^2 = c^2 - a^2$. La *relación pitagórica* $b^2 = c^2 - a^2$ puede escribirse de varias formas, incluyendo $a^2 = c^2 - b^2$ y $c^2 = a^2 + b^2$.

La ecuación $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ es la **forma estándar** de la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y con el eje x como su eje focal. Una hipérbola centrada en el origen con el eje y como su eje focal es la *relación inversa* de $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, y por eso la ecuación es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Como sucede con otras cónicas, un segmento de recta con puntos finales sobre una hipérbola es una **cuerda** de la hipérbola. La cuerda que está tendida sobre el eje focal y conecta a los vértices es el **eje transversal** de la hipérbola. La longitud del eje transversal es $2a$. El segmento de recta de longitud $2b$, que es perpendicular al eje focal y que tiene el centro de la hipérbola como su punto medio, es el **eje conjugado** de la hipérbola. El número a es el **semieje transversal**, y b es el **semieje conjugado**.

DENOMINACIÓN DE LOS EJES

La palabra "transverso" viene del Latín *trans vertere*: atravesar. El eje transversal "atraviesa" de un vértice al otro. El eje conjugado es el eje transversal de la *hipérbola conjugada*, definida en el ejercicio 73.

La hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tiene dos *asíntotas*. Esas asíntotas son rectas inclinadas que pueden encontrarse remplazando por 0 el 1 del lado derecho de la ecuación de la hipérbola:

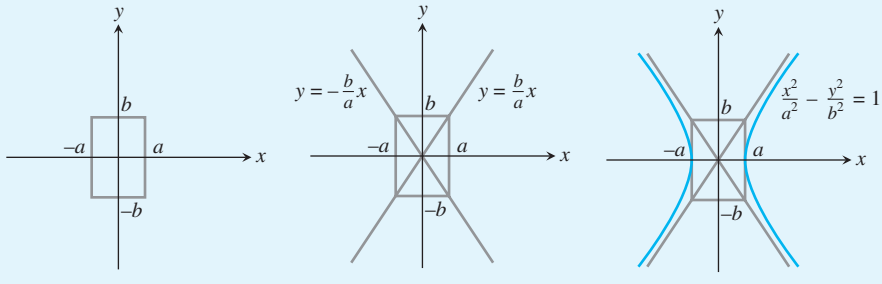
$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{Hipérbola}} \rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{Reemplazar 1 por 0}} \rightarrow \underbrace{y = \pm\frac{b}{a}x}_{\text{Asíntotas}}$$

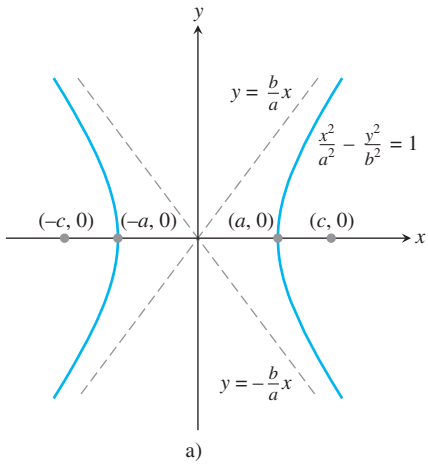
Una hipérbola centrada en el origen, con su eje focal en uno de los ejes coordenados, es simétrica con respecto al origen y a ambos ejes coordenados. Dicha hipérbola puede bosquejarse dibujando un rectángulo centrado en el origen cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados, junto con el dibujo de las asíntotas que pasan por las esquinas opuestas del rectángulo; finalmente se traza la hipérbola utilizando el rectángulo central y las asíntotas como guías, como se muestra en la lección de dibujo.

Lección de dibujo

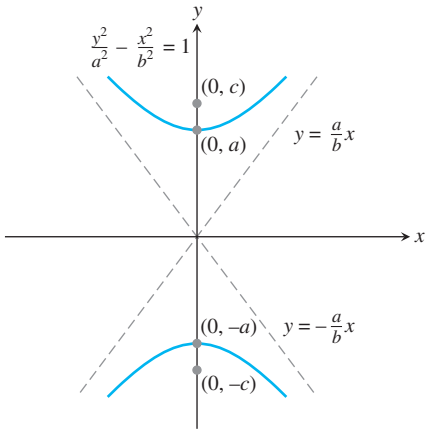
Cómo trazar la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

1. Dibuje los segmentos de recta en $x = \pm a$ y en $y = \pm b$ y complete el rectángulo que queda determinado por esas líneas.
2. Trace las asíntotas extendiendo las diagonales de los rectángulos.
3. Utilice el rectángulo y las asíntotas para guiarse al realizar su dibujo.



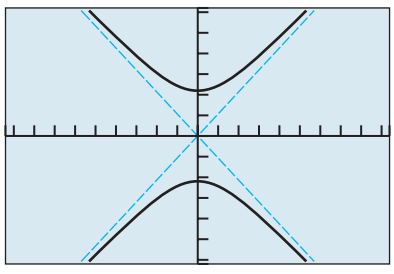


a)



b)

FIGURA 8.24 Hipérbolas centradas en el origen con focos en a el eje x y b el eje y.



[–9.4, 9.4] por [–6.2, 6.2]

FIGURA 8.25 La hipérbola $y^2/5 - x^2/4 = 1$ se muestra aquí junto con sus asíntotas (ejemplo 2).

Hipérbolas con centro (0, 0)

• **Ecuación estándar**	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
• **Eje focal**	Eje x	Eje y
• **Focos**	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
• **Vértices**	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
• **Semieje transversal**	a	a
• **Semieje conjugado**	b	b
• **Relación pitagórica**	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
• **Asíntotas**	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y = \pm\frac{a}{b}x$

Consulte la figura 8.24.

EJEMPLO 1 Determinación de los vértices y los focos de una hipérbola

Determine los vértices y los focos de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$.

SOLUCIÓN Al dividir ambos miembros de la ecuación entre 36 se obtiene la ecuación estándar $x^2/9 - y^2/4 = 1$. Por lo que $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, y $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$. De esta manera los vértices son $(\pm 3, 0)$ y los focos son $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Si deseamos graficar una hipérbola utilizando una graficadora, se necesita despejar y en la ecuación de la hipérbola, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Obtención de una ecuación y elaboración de una gráfica de una hipérbola

Determine la ecuación de la hipérbola con focos (0, -3) y (0, 3) y cuya longitud del eje conjugado es 4. Grafique la hipérbola y sus asíntotas, y justifique su dibujo con una graficadora.

SOLUCIÓN El centro está en (0, 0). Los focos están en el eje y, con $c = 3$. El semieje conjugado es $b = 4/2 = 2$. De esta manera, $a^2 = c^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$. Entonces la forma estándar de la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1.$$

Utilizando $a = \sqrt{5} \approx 2.24$ y $b = 2$, se puede bosquejar el rectángulo central, las asíntotas y la hipérbola. Intente hacerlo. Para graficar la hipérbola utilizando una graficadora, se despeja y en términos de x.

$$\frac{y^2}{5} = 1 + \frac{x^2}{4} \qquad \text{Sumar } \frac{x^2}{4}.$$

$$y^2 = 5(1 + x^2/4) \qquad \text{Multiplicar por 5.}$$

$$y = \pm\sqrt{5(1 + x^2/4)} \qquad \text{Sacar raíz cuadrada.}$$

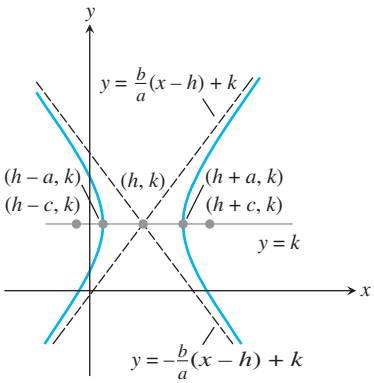
La figura 8.25 muestra las gráficas de

$$y_1 = \sqrt{5(1 + x^2/4)} \quad \text{y} \quad y_2 = -\sqrt{5(1 + x^2/4)},$$

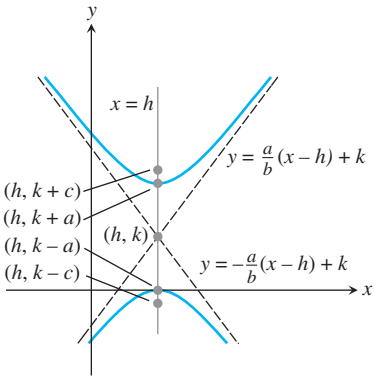
junto con las asíntotas de la hipérbola

$$y_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}x \quad \text{y} \quad y_4 = -\frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

Ahora resuelva el ejercicio 17.



a)



b)

FIGURA 8.26 Hipérbolas con centro en (h, k) y focos en a $y = k$ y b $x = h$.

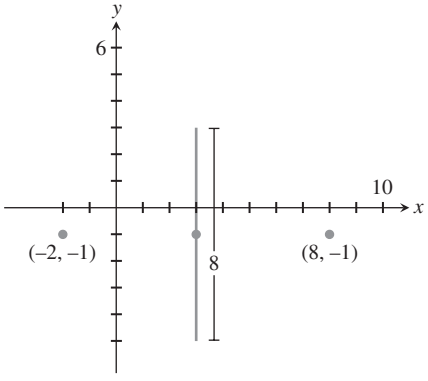


FIGURA 8.27 Información dada para el ejemplo 3.

En el ejemplo 2, debido a que la hipérbola tiene un eje focal vertical, fue fácil la selección del rectángulo de visualización. Cuando una hipérbola tiene un eje focal horizontal, se selecciona una ventana de visualización para incluir los dos vértices de la gráfica y de esta manera se evitan espacios en la gráfica de la hipérbola.

Traslación de hipérbolas

Cuando una hipérbola con centro (0, 0) se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, el centro de la hipérbola se mueve de (0, 0) a (h, k), como se muestra en la figura 8.26. Tal traslación no cambia la longitud del eje transversal ni del conjugado, y tampoco la relación pitagórica.

Hipérbolas con centro (h, k)

• **Ecuación estándar**	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
• **Eje focal**	$y = k$	$x = h$
• **Focos**	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
• **Vértices**	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
• **Semieje transversal**	a	a
• **Semieje conjugado**	b	b
• **Relación pitagórica**	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
• **Asíntotas**	$y = \pm\frac{b}{a}(x-h)+k$	$y = \pm\frac{a}{b}(x-h)+k$

Consulte la figura 8.26.

EJEMPLO 3 Obtención de una ecuación de una hipérbola

Determine la forma estándar de la ecuación de la hipérbola cuyo eje transversal tiene sus puntos finales en $(-2, -1)$ y $(8, -1)$, y cuya longitud del eje conjugado es 8.

SOLUCIÓN La figura 8.27 muestra los puntos finales del eje transversal, el eje conjugado y el centro de la hipérbola. La ecuación estándar de esta hipérbola tiene la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

donde el centro (h, k) es el punto medio $(3, -1)$ del eje transversal. Los semiejes transversal y conjugado son

$$a = \frac{8-(-2)}{2} = 5 \quad \text{y} \quad b = \frac{8}{2} = 4.$$

Así, la ecuación que buscamos es

$$\frac{(x-3)^2}{5^2} - \frac{(y-(-1))^2}{4^2} = 1,$$

$$\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Ahora resuelva el ejercicio 31.

EJEMPLO 4 Localización de los puntos clave de una hipérbola

Determine el centro, los vértices y los focos de la hipérbola

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{49} = 1.$$

SOLUCIÓN El centro (h, k) es $(-2, 5)$. Debido a que el semieje transversal $a = \sqrt{9} = 3$, los vértices son

$$(h + a, k) = (-2 + 3, 5) = (1, 5) \quad \text{y}$$

$$(h - a, k) = (-2 - 3, 5) = (-5, 5).$$

Ya que $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$, los focos $(h \pm c, k)$ son $(-2 \pm \sqrt{58}, 5)$, o aproximadamente $(5.62, 5)$ y $(-9.62, 5)$.

Ahora resuelva el ejercicio 39.

Con esa información encontrada de la hipérbola en el ejemplo 4 y con el conocimiento de que el semieje conjugado $b = \sqrt{49} = 7$, fácilmente podemos hacer un bosquejo de la hipérbola. Obtener una gráfica precisa de la hipérbola utilizando una graficadora es otro problema. Generalmente, la mejor forma de graficar una hipérbola utilizando una graficadora es emplear ecuaciones paramétricas.

EXPLORACIÓN 1 Elaboración de la gráfica de una hipérbola utilizando sus ecuaciones paramétricas

1. Utilice la identidad trigonométrica de Pitágoras $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ para probar que la parametrización $x = -1 + 3/\cos t$, $y = 1 + 2 \tan t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ producirá una gráfica de la hipérbola $(x + 1)^2/9 - (y - 1)^2/4 = 1$.
2. Utilice el modo de graficación Dot (Puntos) y grafique $x = -1 + 3/\cos t$, $y = 1 + 2 \tan t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ en una ventana cuadrada de visualización para justificar gráficamente la parte 1. Cambie el modo de graficación a Connected (Conectado) y vuelva a hacer el dibujo. ¿Qué observa? Explique.
3. Cree parametrizaciones para las hipérbolas de los ejemplos 1, 2, 3 y 4.
4. Grafique cada una de sus parametrizaciones de la parte 3 y compruebe las características de la gráfica obtenida para ver si coinciden con las características geométricas de la hipérbola. Si es necesario, revise su parametrización y vuelva a graficar hasta que las características coincidan.
5. Pruebe que cada una de sus parametrizaciones es válida.

Órbitas y excentricidad

DEFINICIÓN Excentricidad de una hipérbola

La **excentricidad** de una hipérbola es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

donde a es el semieje transversal, b es el semieje conjugado y c es la distancia del centro a cualquiera de los focos.

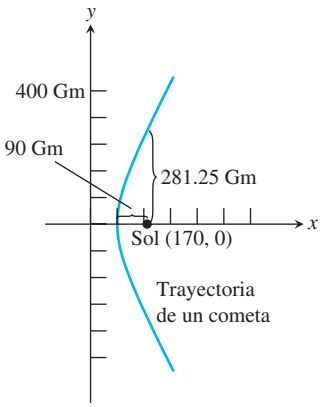


FIGURA 8.28 La gráfica de una rama de $x^2/6{,}400 - y^2/22{,}500 = 1$ (ejemplo 5).

Para una hipérbola, debido a que $c > a$, la excentricidad es $e > 1$. En la sección 8.2 aprendimos que la excentricidad de una elipse satisface la desigualdad $0 \leq e < 1$ y que, para $e = 0$, la elipse es una circunferencia. En la sección 8.5 generalizaremos el concepto de excentricidad para todo tipo de cónicas y se mostrará que la excentricidad de una parábola es $e = 1$.

La primera ley del movimiento planetario de Kepler dice que la órbita de un planeta es elíptica con el Sol en uno de los focos. Desde 1609, los astrónomos han generalizado la ley de Kepler; la actual teoría establece que un cuerpo celeste que viaja en un campo gravitacional de un cuerpo mucho más grande tiene una trayectoria muy aproximada a una sección cónica donde el cuerpo más grande es el foco. Dos cuerpos que no difieren mucho en masa (como la Tierra y la Luna, o Plutón y su luna Charon) en realidad giran alrededor de su centro de gravedad o *baricentro*. En teoría, un cometa puede aproximarse al Sol desde el espacio interestelar, dar una vuelta al Sol, y entonces dejar el sistema solar regresando al espacio profundo; ese cometa sigue una trayectoria que se representa con una rama de una hipérbola.

EJEMPLO 5 Análisis de la órbita de un cometa

Un cometa que sigue una trayectoria hiperbólica con respecto al Sol, tiene una distancia del perihelio de 90 Gm. Cuando la línea del cometa al Sol es perpendicular al eje focal de la órbita, el cometa está a 281.25 Gm del Sol. Calcule a, b, c y e. ¿Cuáles son las coordenadas del centro del Sol, si colocamos las coordenadas de tal manera que la hipérbola tenga la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1?$$

SOLUCIÓN La distancia del perihelio es $c - a = 90$. Cuando $x = c$, $y = \pm b^2/a$ (consulte el ejercicio 74). Entonces $b^2/a = 281.25$, o $b^2 = 281.25a$. Ya que $b^2 = c^2 - a^2$ tenemos el sistema

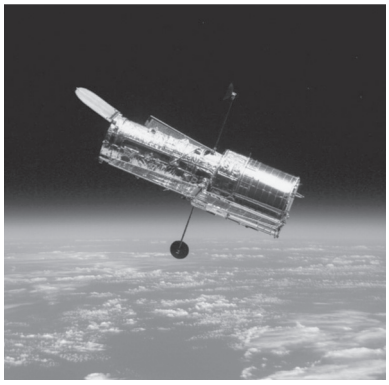
$$c - a = 90 \quad \text{y} \quad c^2 - a^2 = 281.25a,$$

el cual produce la ecuación:

$$\begin{aligned} (a + 90)^2 - a^2 &= 281.25a \\ a^2 + 180a + 8{,}100 - a^2 &= 281.25a \\ 8{,}100 &= 101.25a \\ a &= 80 \end{aligned}$$

Así $a = 80$ Gm, $b = 150$ Gm, $c = 170$ Gm, y $e = 17/8 = 2.125$. Si la trayectoria del cometa es la rama de una hipérbola con abscisas positivas, entonces el Sol está en el foco $(c, 0) = (170, 0)$. Consulte la figura 8.28.

Ahora resuelva el ejercicio 55.



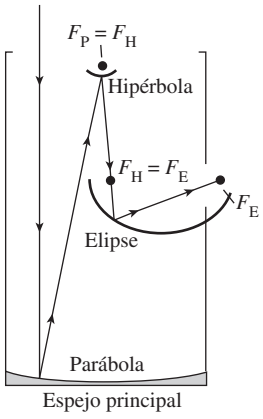


FIGURA 8.29 Sección transversal de un telescopio reflectante.

Propiedad reflectante de una hipérbola

Como otras cónicas, una hipérbola puede utilizarse para reflejar el sonido, la luz y otras ondas. Si hacemos girar una hipérbola en el espacio tridimensional con respecto a su eje focal, la hipérbola forma un **hiperboloide de revolución**. Si se dirige una señal a un foco de un hiperboloide reflector, la señal se refleja en la superficie hiperbólica hacia el otro foco. En la figura 8.29, la luz se refleja saliendo de un espejo parabólico primario hacia el foco del espejo, $F_P = F_H$, que también es el foco de un pequeño espejo hiperbólico. Entonces, la luz se refleja en el espejo hiperbólico hacia el otro foco del hiperboloide $F_H = F_E$, el cual también es el foco de un espejo elíptico. Finalmente la luz se refleja dentro el ojo del observador, el cual es el segundo foco del elipsoide F_E.

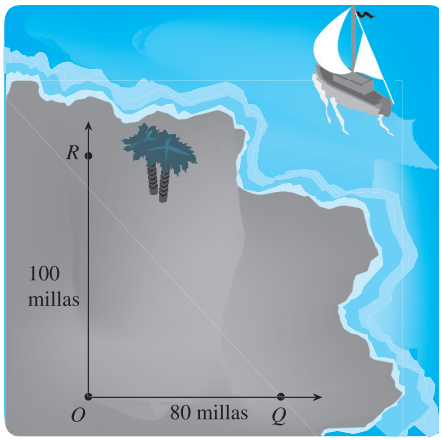
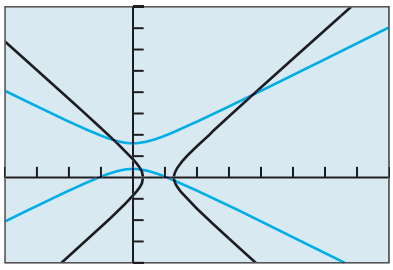


FIGURA 8.30 Transmisores LORAN O, Q y R estratégicamente ubicados (ejemplo 6).



[–200, 400] por [–200, 400]

FIGURA 8.31 Gráficas del ejemplo 6.

Los telescopios reflectantes datan de 1,600, cuando Isaac Newton utilizó un espejo primario en forma parabólica en combinación con un espejo secundario plano inclinado para reflejar la luz hacia el ocular. El óptico francés G. Cassegrain fue el primero en utilizar un espejo secundario hiperbólico, el cual dirige la luz a través de un agujero en el vértice del espejo primario (consulte el ejercicio 70). Hoy en día, los telescopios reflectantes, como el Hubble, han llegado a ser muy sofisticados y usan espejos casi perfectos para enfocar apropiadamente.

Navegación de rango amplio

Las hipérbolas y las señales de radio son la base del sistema LORAN (***Long Range Navigation***, navegación de rango amplio). El ejemplo 6 ilustra este sistema usando la definición de hipérbola y el hecho de que las señales de radio viajan a 980 pies por microsegundo (1 microsegundo = 1 μs = 10^{-6} s).

EJEMPLO 6 Uso del sistema LORAN

Simultáneamente se envían señales de radio desde unos transmisores localizados en los puntos O, Q y R (figura 8.30). R está a 100 millas justo al norte de O y Q está a 80 millas justo al este de O. El receptor LORAN del balandro *Gloria* recibe la señal desde O 323.27 μs después de recibir la señal desde R, y 258.61 ms después de recibirla desde Q. ¿Cuál es la dirección y la distancia del balandro con respecto a O?

SOLUCIÓN El *Gloria* está en un punto de intersección entre dos hipérbolas: una con focos en O y R, y la otra con focos en O y Q.

La hipérbola con focos $O(0, 0)$ y $R(0, 100)$ tiene su centro en $(0, 50)$ y eje transversal

$$2a = (323.27\ \mu s)(980\ \text{pies}/\mu s)(1\ \text{milla}/5{,}280\ \text{pies}) \approx 60\ \text{millas}.$$

Por lo que $a \approx 30$ y $b = \sqrt{c^2 - a^2} \approx \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$, generan la ecuación

$$\frac{(y-50)^2}{30^2} - \frac{x^2}{40^2} = 1.$$

La hipérbola con focos $O(0, 0)$ y $Q(80, 0)$ tiene su centro en $(40, 0)$ y eje transversal

$$2a = (258.61\ \mu s)(980\ \text{pies}/\mu s)(1\ \text{milla}/5{,}280\ \text{pies}) \approx 48\ \text{millas}.$$

Por lo que $a \approx 24$ y $b = \sqrt{c^2 - a^2} \approx \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$, generan la ecuación

$$\frac{(x-40)^2}{24^2} - \frac{y^2}{32^2} = 1.$$

El *Gloria* está en un punto P en donde la parte superior y la rama derecha de las hipérbolas se encuentran (consulte la figura 8.31). Utilizando una graficadora obtenemos $P \approx (187.09, 193.49)$. Entonces la dirección a partir del punto O es

$$\theta \approx 90° - \tan^{-1}\left(\frac{193.49}{187.09}\right) \approx 44.04°,$$

y la distancia al punto O es

$$d \approx \sqrt{187.09^2 + 193.49^2} \approx 269.15.$$

Entonces el *Gloria* está aproximadamente a 187.1 millas al este y 193.5 millas al norte del punto O en una dirección de aproximadamente 44°, y a aproximadamente a 269 millas del punto O.

Ahora resuelva el ejercicio 57.

REPASO RÁPIDO 8.3 *(Para obtener ayuda revise las secciones R.2, R.5 y 7.1)*

En los ejercicios 1 y 2 determine la distancia entre los puntos dados.

1. $(4, -3)$ y $(-7, -8)$

2. $(a, -3)$ y (b, c)

En los ejercicios 3 y 4 despeje a y en términos de x.

3. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$ **4.** $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

En los ejercicios del 5 al 8 resuelva para x algebraicamente.

5. $\sqrt{3x + 12} - \sqrt{3x - 8} = 10$

6. $\sqrt{4x + 12} - \sqrt{x + 8} = 1$

7. $\sqrt{6x^2 + 12} - \sqrt{6x^2 + 1} = 1$

8. $\sqrt{2x^2 + 12} - \sqrt{3x^2 + 4} = -8$

En los ejercicios 9 y 10 resuelva el sistema de ecuaciones.

9. $c - a = 2$ y $c^2 - a^2 = 16a/3$

10. $c - a = 1$ y $c^2 - a^2 = 25a/12$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.3

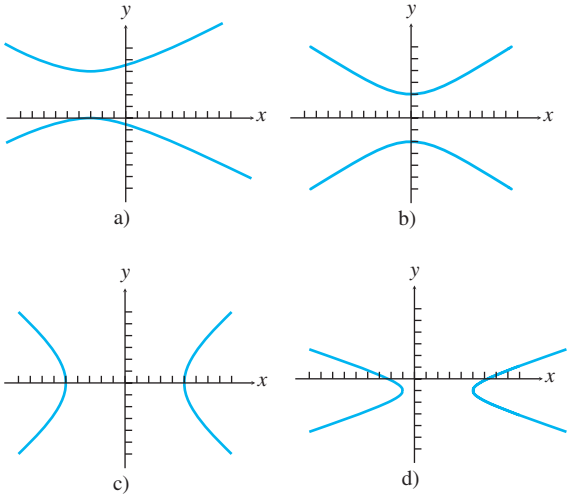
En los ejercicios del 1 al 6 obtenga los vértices y los focos de la hipérbola.

1. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{7} = 1$ **2.** $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{21} = 1$

3. $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{13} = 1$ **4.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

5. $3x^2 - 4y^2 = 12$ **6.** $9x^2 - 4y^2 = 36$

En los ejercicios del 7 al 10 relacione la gráfica con su ecuación.



7. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **8.** $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

9. $\dfrac{(y-2)^2}{4} - \dfrac{(x+3)^2}{16} = 1$ **10.** $\dfrac{(x-2)^2}{9} - (y+1)^2 = 1$

En los ejercicios del 11 al 16 bosqueje la gráfica de la hipérbola.

11. $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ **12.** $\dfrac{y^2}{64} - \dfrac{x^2}{25} = 1$

13. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ **14.** $\dfrac{x^2}{169} - \dfrac{y^2}{144} = 1$

15. $\dfrac{(x+3)^2}{16} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$ **16.** $\dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$

En los ejercicios del 17 al 22 grafique la hipérbola utilizando una graficadora.

17. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **18.** $\dfrac{y^2}{64} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

19. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ **20.** $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

21. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{5} = 1$ **22.** $\dfrac{(y-3)^2}{9} - \dfrac{(x+2)^2}{4} = 1$

En los ejercicios del 23 al 28 determine una ecuación de la forma estándar para la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

23. Focos $(\pm 3, 0)$, longitud del eje transversal 4

24. Focos $(0, \pm 3)$, longitud del eje transversal 4

25. Focos $(0, \pm 15)$, longitud del eje transversal 8

26. Focos $(\pm 5, 0)$, longitud del eje transversal 3

27. Centro en $(0, 0)$, $a = 5$, $e = 2$, eje focal horizontal

28. Centro en $(0, 0)$, $a = 4$, $e = 3/2$, eje focal vertical

29. Centro en $(0, 0)$, $b = 5$, $e = 13/12$, eje focal vertical

30. Centro en $(0, 0)$, $c = 6$, $e = 2$, eje focal horizontal

31. Los puntos finales del eje transversal son $(2, 3)$ y $(2, -1)$, la longitud del eje conjugado es 6

32. Los puntos finales del eje transversal son $(5, 3)$ y $(-7, 3)$, la longitud del eje conjugado es 10

33. Los puntos finales del eje transversal son $(-1, 3)$ y $(5, 3)$, la pendiente de una asíntota es $4/3$

34. Los puntos finales del eje transversal son $(-2, 2)$ y $(-2, 7)$, la pendiente de una asíntota es $4/3$

35. Los focos son $(-4, 2)$ y $(2, 2)$; los puntos finales del eje transversal son $(-3, 2)$ y $(1, 2)$.

36. Los focos son $(-3, -11)$ y $(-3, 0)$; los puntos finales del eje transversal son $(-3, -9)$ y $(-3, -2)$.

37. Centro en $(-3, 6)$, $a = 5$, $e = 2$, eje focal vertical.

38. Centro en $(1, -4)$, $c = 6$, $e = 2$, eje focal horizontal.

En los ejercicios 39 al 42 obtenga el centro, los vértices y los focos de la hipérbola.

39. $\dfrac{(x+1)^2}{144} - \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$

40. $\dfrac{(x+4)^2}{12} - \dfrac{(y+6)^2}{13} = 1$

41. $\dfrac{(y+3)^2}{64} - \dfrac{(x-2)^2}{81} = 1$

42. $\dfrac{(y-1)^2}{25} - \dfrac{(x+5)^2}{11} = 1$

En los ejercicios 43 al 46 grafique la hipérbola utilizando una graficadora en modo paramétrico y en modo de graficación Dot (Puntos).

43. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

44. $\dfrac{x^2}{30} - \dfrac{y^2}{20} = 1$

45. $\dfrac{(x+3)^2}{12} - \dfrac{(y-6)^2}{5} = 1$

46. $\dfrac{(y+1)^2}{15} - \dfrac{(x-2)^2}{6} = 1$

En los ejercicios 47 al 50 grafique la hipérbola, y obtenga sus vértices, focos y excentricidad.

47. $4(y-1)^2 - 9(x-3)^2 = 36$

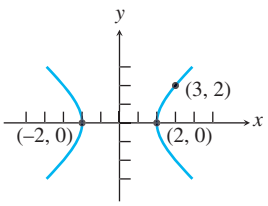
48. $4(x-2)^2 - 9(y+4)^2 = 1$

49. $9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0$

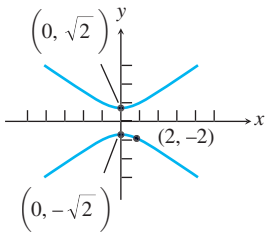
50. $25y^2 - 9x^2 - 50y - 54x - 281 = 0$

En los ejercicios 51 y 52 escriba una ecuación de la hipérbola.

51.



52.



53. Escriba para aprender Pruebe que una ecuación de una hipérbola con centro en (0, 0), focos $(0, \pm c)$ y semieje transversal a es $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$, donde $c > a > 0$ y $b^2 = c^2 - a^2$. [*Sugerencia:* Tome como referencia la deducción al inicio de la sección].

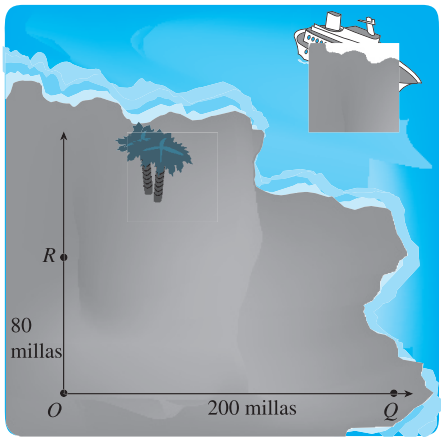
54. Hipérbolas degeneradas Grafique la hipérbola degenerada

a) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 0$ **b)** $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 0$

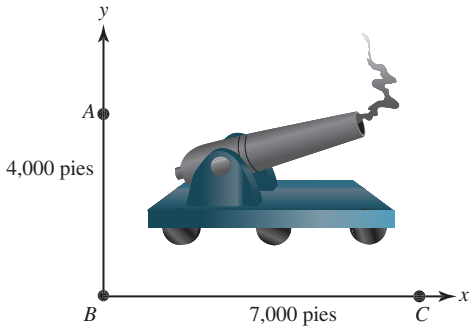
55. Cometa solitario Un cometa que sigue una trayectoria hiperbólica con respecto al Sol tiene un perihelio de 120 Gm. Cuando la línea que va del cometa al Sol es perpendicular al eje focal de la órbita, el cometa está a 250 Gm del Sol. Calcule a, b, c y e. ¿Cuáles son las coordenadas del centro del Sol si el centro de la órbita hiperbólica es (0, 0) y el Sol está sobre el eje positivo de las x?

56. Cometa solitario Un cometa que sigue una trayectoria hiperbólica con respecto al Sol tiene un perihelio de 140 Gm. Cuando la línea que va del cometa al Sol es perpendicular al eje focal de la órbita, el cometa está a 405 Gm del Sol. Calcule a, b, c y e. ¿Cuáles son las coordenadas del centro del Sol si el centro de la órbita hiperbólica es (0, 0) y el Sol está sobre el eje positivo x?

57. Navegación de rango amplio Tres radiotransmisores LORAN están ubicados como se muestra en la figura: R justo al norte de O y Q justo al este de O. El crucero *Princess Ann* recibe simultáneamente señales de los tres transmisores. La señal desde O llega 323.27 ms después de la señal desde R y 646.53 μs después que la señal desde Q. Determine la dirección y la distancia del barco con respecto a O.



58. Localización de un cañón Hay observadores colocados en las posiciones A, B y C, con A justo al norte de B. Un cañón se ubica en algún lugar en el primer cuadrante, como se ilustra en la figura. A escucha el sonido del cañón 2 segundos antes que B, C escucha el sonido 4 segundos antes que B. Determine la dirección y la distancia del cañón al punto B (suponga que el sonido viaja a 1,100 pies/s).



Actividades en grupo En los ejercicios 59 y 60 resuelva algebraicamente el sistema de ecuaciones y justifique gráficamente su respuesta.

59. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

$x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}y = -2$

60. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 9$

61. Actividad en equipo Considere el sistema de ecuaciones

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

a) Resuelva gráficamente el sistema.

b) Si tiene acceso a una graficadora que realice álgebra simbólica, utilícela para determinar las soluciones exactas del sistema.

62. Escriba para aprender **Escape de los límites** Cuando la NASA lanza una sonda espacial, ésta alcanza una velocidad suficiente para llegar a los límites de la atmósfera terrestre y escapar a lo largo de una trayectoria hiperbólica. Busque *velocidad de escape* en un libro de texto o en Internet, y escriba un párrafo en sus propias palabras de lo que encontró.

Preguntas de examen estandarizado

63. Verdadero o falso La distancia de un foco de una hipérbola al vértice más cercano es $a(e - 1)$, en donde a es el semieje transversal y e es la excentricidad. Justifique su respuesta.

64. Verdadero o falso A diferencia de la elipse, la relación de Pitágoras para una hipérbola es la conocida $a^2 + b^2 = c^2$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios 65 al 68 puede utilizar una calculadora graficadora para resolver el problema.

65. Opción múltiple Un foco de $x^2 - 4y^2 = 4$ es

A) $(4, 0)$.
B) $(\sqrt{5}, 0)$.
C) $(2, 0)$.
D) $(\sqrt{3}\ 0)$.
E) $(1, 0)$.

66. Opción múltiple El eje focal de $\dfrac{(x+5)^2}{9} - \dfrac{(y-6)^2}{16} = 1$ es

A) $y = 2$.
B) $y = 3$.
C) $y = 4$.
D) $y = 5$.
E) $y = 6$.

67. Opción múltiple El centro de $4x^2 - 12y^2 - 16x - 72y - 44 = 0$ es

A) $(2, -2)$.
B) $(2, -3)$.
C) $(2, -4)$.
D) $(2, -5)$.
E) $(2, -6)$.

68. Opción múltiple Las pendientes de las asíntotas de la hipérbola $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ son

A) ± 1.
B) $\pm 3/2$.
C) $\pm\sqrt{3}/2$.
D) $\pm 2/3$.
E) $\pm 4/3$.

Exploraciones

69. Construcción de los puntos de una hipérbola Utilice un software como *Cabri Geometry II*™, *The Geometer´s Sketchpad*® o alguna aplicación similar en algún dispositivo manual para obtener la siguiente construcción.

a) Inicie colocando los ejes coordenados sobre la ventana de construcción.

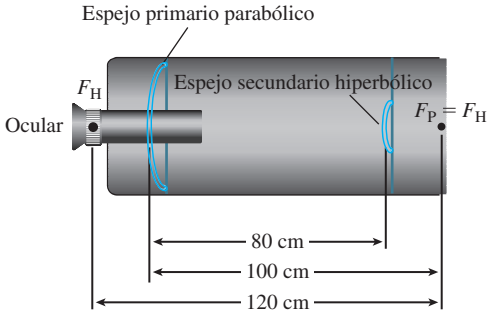
b) Construya dos puntos sobre el eje x en $(\pm 5, 0)$, como los focos.

c) Elabore círculos concéntricos con radios $r = 1, 2, 3, \ldots, 12$ con centros en estos dos focos.

d) Si el software tiene una herramienta para cónicas, construya los puntos donde los círculos concéntricos se encuentran y tienen una diferencia de radios de $2a = 6$, y sobrepóngalos a la cónica que pase a través de esos puntos.

e) Obtenga la ecuación cuya gráfica incluya todos estos puntos.

70. Telescopio Cassegrain Un telescopio Cassegrain, como se describió en la sección, tiene las dimensiones que se muestran en la figura. Determine la forma estándar de la ecuación de la hipérbola centrada en el origen con el eje focal en el eje x.



Ampliación de las ideas

71. Pruebe que una gráfica no degenerada de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una hipérbola si $AC < 0$.

72. Escriba para aprender La gráfica de la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

se considera una hipérbola degenerada. Describa la gráfica. ¿Qué tan parecida es a una hipérbola común, y en qué difieren?

73. Hipérbolas conjugadas Las hipérbolas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

obtenidas mediante el cambio del orden de la diferencia de sus ecuaciones estándar son **hipérbolas conjugadas.** Pruebe que esas hipérbolas tienen las mismas asíntotas y que el eje conjugado de cada una de esas hipérbolas es el eje transversal de la otra hipérbola.

74. Anchura focal de una hipérbola Pruebe que, para la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

si $x = c$, entonces $y = \pm b^2/a$. ¿Por qué es razonable definir la **anchura focal** de tales hipérbolas como $2b^2/a$?

75. Escriba para aprender Explique de qué manera las ecuaciones de forma estándar para las cónicas se relacionan con

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

8.4 Traslación y rotación de ejes

Aprenderá acerca de...

- Las ecuaciones de segundo grado de dos variables
- La traslación de ejes en comparación con traslación de gráficas
- La rotación de los ejes
- El criterio del discriminante

. . . porque

Observará que las elipses, las hipérbolas y las parábolas son miembros de la familia de las secciones cónicas, en lugar de curvas separadas.

Ecuaciones de segundo grado de dos variables

En la sección 8.1 empezamos un acercamiento a la unificación de las secciones cónicas, cuando aprendió que las parábolas, las elipses y las hipérbolas son secciones cónicas de un cono circular recto. En las secciones 8.1 a la 8.3, proporcionamos definiciones separadas de la geometría en el plano para las parábolas, las elipses y las hipérbolas que conducen a clases separadas de ecuaciones para cada tipo de curva. En esta sección y la siguiente, una vez más consideramos a las parábolas, las elipses y a las hipérbolas como una familia unificada de curvas interrelacionadas.

En la sección 8.1 afirmamos que las secciones cónicas pueden definirse algebraicamente en el plano cartesiano como las gráficas de ecuaciones de segundo grado de dos variables, esto es, ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde A, B y C no son todas cero. En esta sección, analizamos ecuaciones de este tipo, las cuales son realmente *ecuaciones cuadráticas de* x *y de* y. Debido a que son ecuaciones cuadráticas podemos adaptar métodos familiares a este conjunto poco familiar. Esto es exactamente lo que haremos en los ejemplos 1 al 3.

EJEMPLO 1 Graficación de una ecuación de segundo grado

Resuelva para y y utilice la graficadora para graficar

$$9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y - 71 = 0.$$

SOLUCIÓN Reacomodando los términos se obtiene la ecuación

$$16y^2 + 64y + (9x^2 - 18x - 71) = 0.$$

La fórmula cuadrática nos da

$$y = \frac{-64 \pm \sqrt{64^2 - 4(16)(9x^2 - 18x - 71)}}{2(16)}$$

$$= \frac{-8 \pm 3\sqrt{-x^2 + 2x + 15}}{4}$$

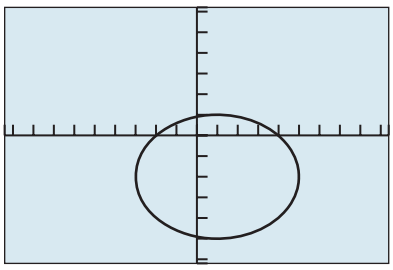
$$= -2 \pm \frac{3}{4}\sqrt{-x^2 + 2x + 15}$$

Haga

$$\text{Y1} = -2 + 0.75\sqrt{-x^2 + 2x + 15} \text{ y } \text{Y2} = -2 - 0.75\sqrt{-x^2 + 2x + 15},$$

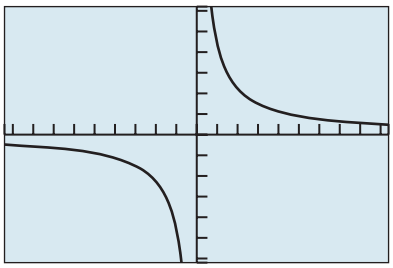
y grafique las dos ecuaciones en la misma ventana de visualización como se muestra en la figura 8.32. La figura combinada tiene la apariencia de una elipse.

Ahora resuelva el ejercicio 1.



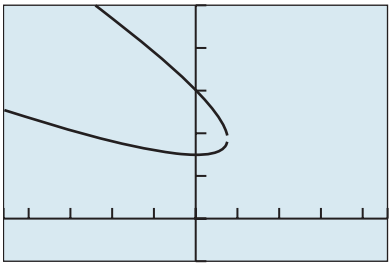
[–9.4, 9.4] por [–6.2, 6.2]

FIGURA 8.32 La gráfica de $9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y - 71 = 0$ (ejemplo 1).

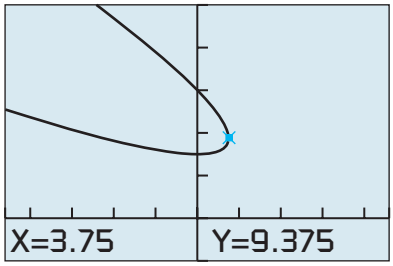


[–9.4, 9.4] por [–6.2, 6.2]

FIGURA 8.33 La gráfica de $2xy - 9 = 0$ (ejemplo 2).



[–23, 23] por [–5, 25]
a)



[–23, 23] por [–5, 25]
b)

FIGURA 8.34 La gráfica de $x^2 + 4xy + 4y^2 - 30x - 90y + 450 = 0$ a con un hueco y b con la opción de trazado activado en el punto de conexión (ejemplo 3).

En la ecuación del ejemplo 1 no hay término Bxy. Ninguno de los ejemplos de las secciones 8.1 a la 8.3 incluye ese término de *producto cruzado* (o simplemente término cruzado). Un término cruzado en la ecuación provoca que la gráfica se incline con respecto a los ejes coordenados, como puede apreciarse en los ejemplos 2 y 3.

EJEMPLO 2 Graficación de una ecuación de segundo grado

Resuelva para y y utilice la graficadora para graficar

$$2xy - 9 = 0.$$

SOLUCIÓN Esta ecuación puede rescribirse como $2xy - 9 = 0$ o como $y = 9/(2x)$. La gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 8.33. Tiene la apariencia de una hipérbola con su eje focal inclinado.

Ahora resuelva el ejercicio 5.

EJEMPLO 3 Graficación de una ecuación de segundo grado

Resuelva para y y utilice la graficadora para graficar

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 30x - 90y + 450 = 0.$$

SOLUCIÓN Reacomodando los términos como una ecuación cuadrática en y

$$4y^2 + (4x - 90)y + (x^2 - 30x + 450) = 0.$$

La fórmula cuadrática nos da

$$y = \frac{-(4x - 90) \pm \sqrt{(4x - 90)^2 - 4(4)(x^2 - 30x + 450)}}{2(4)}$$

$$= \frac{45 - 2x \pm \sqrt{225 - 60x}}{4}$$

Haga

$$y_1 = \frac{45 - 2x + \sqrt{225 - 60x}}{4} \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{45 - 2x - \sqrt{225 - 60x}}{4},$$

y grafique las dos ecuaciones en la misma ventana de visualización, como se muestra en la figura 8.34a. La figura combinada tiene la apariencia de una parábola, con un hueco pequeño debido a que la graficadora así lo interpreta. La gráfica combinada debe conectarse en un punto para el cual el radicando (también llamado subradical) $225 - 60x = 0$, esto es, cuando $x = 225/60 = 15/4 = 3.75$. La figura 8.34b justifica este análisis.

Ahora resuelva el ejercicio 9.

Las gráficas obtenidas en los ejemplos 1 al 3 *parecen* ser secciones cónicas, pero ¿cómo podríamos estar seguros? Si son cónicas, entonces probablemente hemos clasificado los ejemplos 1 y 2 correctamente, pero ¿la gráfica del ejemplo 3 (figura 8.34) no podría ser parte de una elipse o de una rama de una hipérbola? Ahora presentaremos la respuesta a esas preguntas y desarrollamos métodos para simplificar las ecuaciones de segundo grado de dos variables.

Traslación de ejes en comparación con la traslación de gráficas

Los ejes coordenados a menudo se ven como algo permanentemente fijo en el plano, pero no es así. Se puede cambiar la posición de los ejes como hemos cambiado la posición de las gráficas desde el capítulo 1. Una **traslación de ejes** produce un nuevo conjunto de ejes paralelos a los originales, como se muestra en la figura 8.35 de la siguiente página.

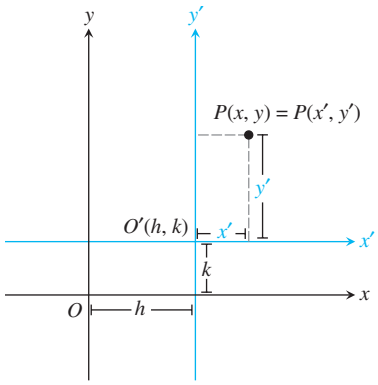


FIGURA 8.35 Una traslación de los ejes en el plano cartesiano.

La figura 8.35 muestra un plano que contiene un punto P definido de dos formas: utilizando las coordenadas (x, y) y las coordenadas (x', y'). Las coordenadas (x, y) se basan en los ejes x y y originales y el origen 0, mientras que las coordenadas (x', y') se basan en los ejes x' y y' trasladados y el correspondiente origen O'.

Fórmulas de traslación de los ejes

Las coordenadas (x, y) y (x', y') son conjuntos de ejes paralelos y su relación está definida por algunas de las siguientes **fórmulas de traslación**:

$$x = x' + h \quad \text{y} \quad y = y' + k$$

o

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k.$$

Se utiliza el segundo par de fórmulas de traslación en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Revisión del ejemplo 1

Pruebe que $9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y - 71 = 0$ es la ecuación de una elipse. Traslade los ejes coordenados de tal manera que el origen sea el centro de esta elipse.

SOLUCIÓN Completamos el cuadrado de x y de y:

$$9x^2 - 18x + 16y^2 + 64y = 71$$
$$9(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 + 4y + 4) = 71 + 9(1) + 16(4)$$
$$9(x - 1)^2 + 16(y + 2)^2 = 144$$
$$\frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

Ésta es una ecuación estándar de una elipse. Si definimos $x' = x - 1$ y $y' = y + 2$, entonces la ecuación de la elipse se convierte en:

$$\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{9} = 1.$$

La figura 8.36 muestra la gráfica de esta ecuación final en el nuevo sistema de coordenadas $x'y'$, con los ejes xy originales sobrepuestos. Compare las figuras 8.32 y 8.36.

Ahora resuelva el ejercicio 21.

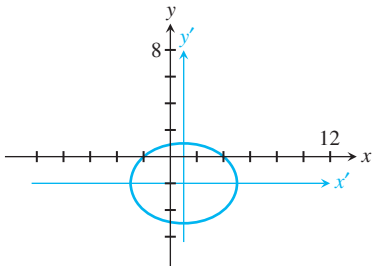


FIGURA 8.36 La gráfica de $(x')^2/16 + (y')^2/9 = 1$ (ejemplo 4).

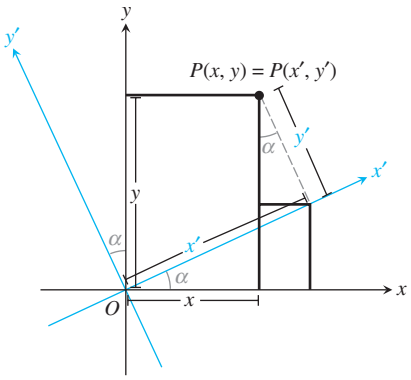


FIGURA 8.37 Una rotación de los ejes en el plano cartesiano.

Rotación de los ejes

Para mostrar que la ecuación del ejemplo 2 o 3 es la ecuación de una sección cónica, necesitamos rotar los ejes coordenados de tal manera que uno de los ejes quede alineado con el eje (focal) de la cónica. A esto se le llama **rotación de ejes**, el origen permanece fijo, y rotamos los ejes x y y un ángulo a para obtener los ejes x' y y' (consulte la figura 8.37).

La figura 8.37 muestra un plano que contiene un punto P definido de dos formas: como (x, y) y como (x', y'). Las coordenadas (x, y) se basan en los ejes x y y originales, mientras que (x', y') se basan en los ejes x' y y' rotados.

Fórmulas de rotación de los ejes

Las coordenadas (x, y) y (x', y') con base en conjuntos de ejes rotados están relacionadas por alguna de las siguientes **fórmulas de rotación**:

$$x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \quad \text{y} \quad y' = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha,$$

o

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha \quad \text{y} \quad y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha.$$

donde α, $0 < \alpha < \pi/2$, es el *ángulo de rotación*.

El primer par de ecuaciones se estableció en el ejemplo 10 de la sección 7.2. El segundo par puede deducirse directamente de la geometría de la figura 8.37 (consulte el ejercicio 55) y se utiliza en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Revisión del ejemplo 2

Pruebe que $2xy - 9 = 0$ es la ecuación de una hipérbola que se obtiene rotando los ejes en un ángulo $\alpha = \pi/4$.

SOLUCIÓN Debido a que $\cos(\pi/4) = \operatorname{sen}(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, las ecuaciones de rotación son

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Entonces si se rotan los ejes, la ecuación $2xy - 9 = 0$ se convierte en

$$2\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) - 9 = 0$$

$$(x')^2 - (y')^2 - 9 = 0$$

Para ver que ésta es la ecuación de una hipérbola, se expresa en la forma estándar:

$$(x')^2 - (y')^2 = 9$$

$$\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{9} = 1$$

La figura 8.38 muestra la gráfica de la ecuación original en el sistema xy original con los ejes $x'y'$ sobrepuestos.

Ahora resuelva el ejercicio 37.

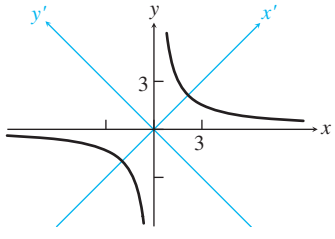


FIGURA 8.38 La gráfica de $2xy - 9 = 0$ (ejemplo 5).

En el ejemplo 5 convertimos una ecuación de segundo grado de x y y en una ecuación de segundo grado de x' y y' utilizando las fórmulas de rotación. Mediante la elección apropiada del ángulo de rotación, no hay término cruzado $x'y'$en la ecuación final, lo que permite expresarlo en la forma estándar. A continuación generalizaremos este proceso.

Coeficientes de una cónica en un sistema rotado

Si aplicamos las fórmulas de rotación a la ecuación general de segundo grado de x y y, se obtiene una ecuación de segundo grado de x' y y' de la forma

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

donde los coeficientes son

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\,\operatorname{sen}\alpha + C\operatorname{sen}^2\alpha \\ B' &= B\cos 2\alpha + (C - A)\operatorname{sen} 2\alpha \\ C' &= C\cos^2\alpha - B\cos\alpha\,\operatorname{sen}\alpha + A\operatorname{sen}^2\alpha \\ D' &= D\cos\alpha + E\operatorname{sen}\alpha \\ E' &= E\cos\alpha - D\operatorname{sen}\alpha \\ F' &= F \end{aligned}$$

Con el fin de eliminar el término cruzado y, consecuentemente, alinear los ejes coordenados con el eje focal de la cónica, rotamos los ejes coordenados en un ángulo α que haga que el valor de B' sea 0. Haciendo $B' = B\cos 2\alpha + (C - A)\operatorname{sen} 2\alpha = 0$ se llega al siguiente resultado útil.

Ángulo de rotación para eliminar el término cruzado

Si $B \neq 0$, un ángulo de rotación a tal que

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} \text{ y } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

eliminará el término $B'x'y'$ de la ecuación de segundo grado en el sistema coordenado $x'y'$.

EJEMPLO 6 Revisión del ejemplo 3

Pruebe que $x^2 + 4xy + 4y^2 - 30x - 90y + 450 = 0$ es la ecuación de una parábola mediante la rotación de los ejes coordenados en un ángulo a apropiado.

SOLUCIÓN El ángulo de rotación α debe satisfacer la ecuación

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - 4}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Entonces

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{5},$$

continúa

y así

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+(-3/5)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-(-3/5)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Por lo tanto, los coeficientes de las ecuaciones transformadas son

$$A' = 1\cdot\frac{1}{5} + 4\cdot\frac{2}{5} + 4\cdot\frac{4}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$B' = 0$$

$$C' = 4\cdot\frac{1}{5} - 4\cdot\frac{2}{5} + 1\cdot\frac{4}{5} = 0$$

$$D' = -30\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - 90\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{210}{\sqrt{5}} = -42\sqrt{5}$$

$$E' = -90\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 30\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{30}{\sqrt{5}} = -6\sqrt{5}$$

$$F' = 450$$

Entonces la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 - 30x - 90y + 450 = 0$ se transforma en

$$5x'^2 - 42\sqrt{5}x' - 6\sqrt{5}y' + 450 = 0.$$

Después de completar el cuadrado de los términos x, la ecuación es

$$\left(x' - \frac{21}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}\left(y' - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right).$$

Si se traslada utilizando $h = 21/\sqrt{5}$ y $k = 3\sqrt{5}/10$, entonces la ecuación se puede expresar

$$(x'')^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}(y''),$$

una ecuación estándar de una parábola.

La figura 8.39 muestra la gráfica de la ecuación original en el sistema coordenado xy, con los ejes $x''y''$ sobrepuestos.

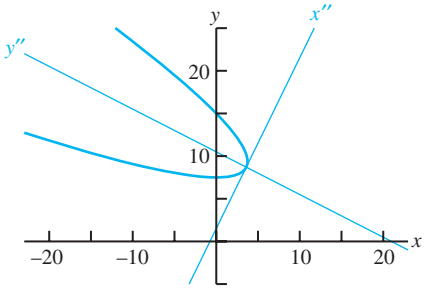


FIGURA 8.39 La gráfica de $x^2 + 4xy + 4y^2 - 30x - 90y + 450 = 0$ (ejemplo 6).

Ahora resuelva el ejercicio 39.

Criterio del discriminante

En el ejemplo 6 se demuestra que el álgebra de rotación puede ser engorrosa. Afortunadamente, se puede determinar cuál tipo de canónica está representada por una ecuación de segundo grado observando el signo del **discriminante** $B^2 - 4AC$.

Criterio del discriminante

La ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa a

- una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$,
- una parábola si $B^2 - 4AC = 0$,
- una elipse si $B^2 - 4AC < 0$,

excepto para los casos degenerados.

Este criterio se apoya en el hecho de que el discriminante $B^2 - 4AC$ es **invariante bajo una rotación de ejes**; en otras palabras, aun cuando A, B y C cambian al rotarse los ejes coordenados, la combinación $B^2 - 4AC$ mantiene su valor.

EJEMPLO 7 Revisión de los ejemplos 5 y 6

a) En el ejemplo 5, antes de la rotación, $B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(0)(0) = 4$ y después de la rotación, $B'^2 - 4A'C' = (0)^2 - 4(1)(-1) = 4$. Como el discriminante es positivo, se trata de una hipérbola.

b) En el ejemplo 6, antes de la rotación, $B^2 - 4AC = (4)^2 - 4(1)(4) = 0$ y después de la rotación, $B'^2 - 4A'C' = (0)^2 - 4(5)(0) = 0$. Como el discriminante es cero, se trata de una parábola.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

No sólo el discriminante $B^2 - 4AC$ queda sin variación después de una rotación, sino que tampoco su *signo* varía después de una traslación ni después de manipulaciones algebraicas para preservar la equivalencia de la ecuación, como por ejemplo multiplicar ambos lados de la ecuación por una constante distinta de cero.

El criterio del discriminante puede aplicarse a las cónicas degeneradas. La tabla 8.2 muestra los tres tipos básicos de secciones cónicas agrupadas con sus cónicas degeneradas asociadas. Cada cónica o cónica degenerada se muestra con una ecuación muestra y el signo de su discriminante.

Tabla 8.2 Cónicas y la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Cónica	Ecuación muestra	A	B	C	D	E	F	Signo del Discriminante
Hipérbola	$x^2 - 2y^2 = 1$	1		-2			-1	Positivo
Rectas que se intersecan	$x^2 + xy = 0$	1	1					Positivo
Parábola	$x^2 = 2y$	1				-2		Cero
Rectas paralelas	$x^2 = 4$	1					-4	Cero
Una recta	$y^2 = 0$			1				Cero
Sin gráfica	$x^2 = -1$	1					1	Cero
Elipse	$x^2 + 2y^2 = 1$	1		2			-1	Negativo
Circunferencia	$x^2 + y^2 = 9$	1		1			-9	Negativo
Punto	$x^2 + y^2 = 0$	1		1				Negativo
Sin gráfica	$x^2 + y^2 = -1$	1		1			1	Negativo

REPASO RÁPIDO 8.4 *(Para obtener ayuda revise las secciones 4.7 y 5.4)*

En los ejercicios del 1 al 10 suponga que $0 \leq \alpha < \pi/2$.

1. Dado que $\cot 2\alpha = 5/12$, determine $\cos 2\alpha$.
2. Dado que $\cot 2\alpha = 8/15$, determine $\cos 2\alpha$.
3. Dado que $\cot 2\alpha = 1/\sqrt{3}$, determine $\cos 2\alpha$.
4. Dado que $\cot 2\alpha = 2/\sqrt{5}$, determine $\cos 2\alpha$.
5. Dado que $\cot 2\alpha = 0$, determine α.
6. Dado que $\cot 2\alpha = \sqrt{3}$, determine α.
7. Dado que $\cot 2\alpha = 3/4$, determine $\cos \alpha$.
8. Dado que $\cot 2\alpha = 3/\sqrt{7}$, determine $\cos \alpha$.
9. Dado que $\cot 2\alpha = 5/\sqrt{11}$, determine $\operatorname{sen} \alpha$.
10. Dado que cot 2a = 45/28, determine sen α.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.4

En los ejercicios del 1 al 12 resuelva para y y utilice una graficadora para graficar la cónica.

1. $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$

2. $4x^2 + y^2 + 24x - 2y + 21 = 0$

3. $y^2 - 8x - 8y + 8 = 0$

4. $x^2 - 4y^2 + 6x - 40y + 91 = 0$

5. $-4xy + 16 = 0$

6. $2xy + 6 = 0$

7. $xy - y - 8 = 0$

8. $2x^2 - 5xy + y = 0$

9. $2x^2 - xy + 3y^2 - 3x + 4y - 6 = 0$

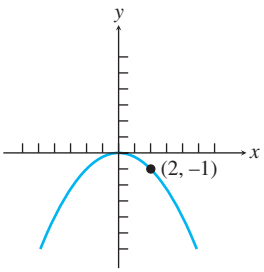
10. $-x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x - 10y - 20 = 0$

11. $2x^2 - 4xy + 8y^2 - 10x + 4y - 13 = 0$

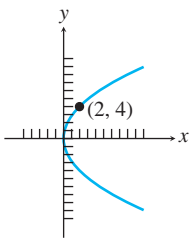
12. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x + 6y - 15 = 0$

En los ejercicios del 13 al 16 escriba la ecuación en la forma estándar de la cónica mostrada.

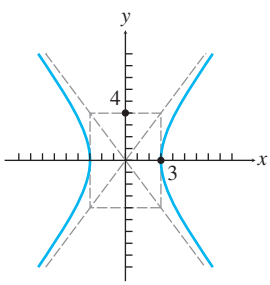
13.



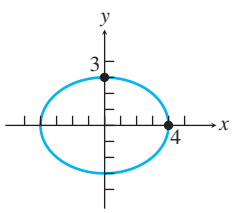
14.



15.



16.



En los ejercicios 17 al 20, utilizando el punto $P(x, y)$ y la información de traslación, obtenga las coordenadas de P en el sistema coordenado trasladado $x'y'$.

17. $P(x, y) = (2, 3), h = -2, k = 4$

18. $P(x, y) = (-2, 5), h = -4, k = -7$

19. $P(x, y) = (6, -3), h = 1, k = \sqrt{5}$

20. $P(x, y) = (-5, -4), h = \sqrt{2}, k = -3$

En los ejercicios 21 al 30 identifique el tipo de cónica, escriba la ecuación en la forma estándar, traslade la cónica al origen y esbócela en el sistema coordenado trasladado.

21. $4y^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 41 = 0$

22. $2x^2 + 3y^2 + 12x - 24y + 60 = 0$

23. $x^2 + 2x - y + 3 = 0$

24. $3x^2 - 6x - 6y + 10 = 0$

25. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

26. $16x^2 - y^2 - 32x - 6y - 57 = 0$

27. $y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$

28. $2x^2 - 4x + y^2 - 6y = 9$

29. $2x^2 - y^2 + 4x + 6 = 0$

30. $y^2 - 2y + 4x - 12 = 0$

31. Escriba para aprender **Fórmulas de traslación** Emplee las relaciones geométricas ilustradas en la figura 8.35 para explicar las fórmulas de traslación $x = x' + h$ y $y = y' + k$.

32. Fórmulas de traslación Pruebe que si $x = x' + h$ y $y = y' + k$, entonces $x' = x - h$ y $y' = y - k$.

En los ejercicios del 33 al 36, utilizando el punto $P(x, y)$ y la información de rotación, determine las coordenadas de P en el sistema coordenado rotado $x'y'$.

33. $P(x, y) = (-2, 5), \alpha = \pi/4$

34. $P(x, y) = (6, -3), \alpha = \pi/3$

35. $P(x, y) = (-5, -4), \cot 2\alpha = -3/5$

36. $P(x, y) = (2, 3), \cot 2\alpha = 0$

En los ejercicios del 37 al 40 identifique el tipo de cónica y rote los ejes coordenados para eliminar el término xy. Escriba y grafique la ecuación transformada.

37. $xy = 8$

38. $3xy + 15 = 0$

39. $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 10 = 0$

40. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 14 = 0$

En los ejercicios 41 y 42 identifique el tipo de cónica, resuelva para y y grafique la cónica. Aproxime el ángulo de rotación que se necesita para eliminar el término xy.

41. $16x^2 - 20xy + 9y^2 - 40 = 0$

42. $4x^2 - 6xy + 2y^2 - 3x + 10y - 6 = 0$

En los ejercicios del 43 al 52 use el discriminante $B^2 - 4AC$ para decidir si la ecuación representa una parábola, una elipse o una hipérbola.

43. $x^2 - 4xy + 10y^2 + 2y - 5 = 0$

44. $x^2 - 4xy + 3x + 25y - 6 = 0$

45. $9x^2 - 6xy + y^2 - 7x + 5y = 0$

46. $-xy + 3y^2 - 4x + 2y + 8 = 0$

47. $8x^2 - 4xy + 2y^2 + 6 = 0$

48. $3x^2 - 12xy + 4y^2 + x - 5y - 4 = 0$

49. $x^2 - 3y^2 - y - 22 = 0$

50. $5x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + y = 0$

51. $4x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 18 = 0$

52. $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 40x + 20y - 56 = 0$

53. Revisión del ejemplo 5 Utilizando los resultados del ejemplo 5, determine el centro, los vértices y los focos de la hipérbola $2xy - 9 = 0$ en el sistema coordenado original.

54. Revisión de los ejemplos 3 y 6 Use la información de los ejemplos 3 y 6

a) para probar que el punto $P(x, y) = (3.75, 9.375)$, donde las gráficas de $Y1 = (45 - 2x + \sqrt{225 - 60x})/4$ y $Y2 = (45 - 2x - \sqrt{225 - 60x})/4$ se encuentran, no es el vértice de la parábola.

b) para probar que el punto $V(x, y) = (3.6, 8.7)$ es el vértice de la parábola.

55. Fórmulas de rotación Pruebe que $x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha$ y $y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha$ utilizando las relaciones geométricas ilustradas en la figura 8.37.

56. Fórmulas de rotación Pruebe que si $x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha$ y $y' = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$, entonces $x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha$ y $y = x' \operatorname{sin} \alpha + y' \cos \alpha$.

Preguntas de examen estandarizado

57. Verdadero o falso La gráfica de la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (donde A y C no son ambas iguales a cero) tiene un eje focal alineado con los ejes coordenados. Justifique su respuesta.

58. Verdadero o falso La gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una circunferencia o una circunferencia degenerada. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 59 al 62 resuelva el problema sin usar calculadora.

59. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones **no** es una razón para trasladar los ejes de una cónica?

A) Para simplificar su ecuación.

B) Para eliminar el término (de producto) cruzado.

C) Para colocar su centro o vértice en el origen.

D) Para facilitar la identificación de su tipo.

E) Para facilitar su dibujo a mano.

60. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes opciones **no** es una razón para rotar los ejes de una cónica?

A) Para simplificar su ecuación.

B) Para eliminar el término (de producto) cruzado.

C) Para colocar su centro o vértice en el origen.

D) Para facilitar la identificación de su tipo.

E) Para facilitar su dibujo a mano.

61. Opción múltiple Los vértices de $9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y - 71 = 0$ son

A) $(1 \pm 4, -2)$ **B)** $(1 \pm 3, -2)$

C) $(4 \pm 1, 3)$ **D)** $(4 \pm 2, 3)$

E) $(1, -2 \pm 3)$

62. Opción múltiple Las asíntotas de la hipérbola $xy = 4$ son

A) $y = x, y = -x.$ **B)** $y = 2x, y = -\frac{x}{2}.$

C) $y = -2x, y = \frac{x}{2}.$ **D)** $y = 4x, y = -\frac{x}{4}.$

E) Los ejes coordenados.

Exploraciones

63. Ejes oblicuos de las cónicas Los ejes de las cónicas que no están alineados con los ejes coordenados a menudo se incluyen en las gráficas de las cónicas.

a) Vuelva a hacer la gráfica que se muestra en la figura 8.38, incluyendo los ejes x' y y' mediante la utilización de una función graficadora. ¿Cuáles son las ecuaciones de esos ejes rotados?

b) Vuelva a hacer la gráfica que se muestra en la figura 8.38, incluyendo los ejes x'' y y'' mediante la utilización de una función graficadora. ¿Cuáles son las ecuaciones de esos ejes rotados y trasladados?

64. El discriminante Determine qué le sucede al signo de $B^2 - 4AC$ de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

cuando

a) los ejes se trasladan horizontalmente h unidades y verticalmente k unidades.

b) ambos lados de la ecuación se multiplican por la misma constante k distinta de cero.

Ampliación de las ideas

65. Actividad en equipo Prueben que las fórmulas de los coeficientes A', B', C', D', E', y F' en el sistema rotado de la página 670 son correctos.

66. Identificación de una cónica Desarrolle una forma de decidir si $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A y C no son ambos iguales a cero, representan una parábola, una elipse o una hipérbola. Escriba un ejemplo para ilustrar cada uno de los tres casos.

67. Invariante bajo rotación Pruebe que $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ cuando el sistema coordenado xy se rota un ángulo α.

68. Otros invariantes bajo rotación Pruebe que ninguna de las siguientes expresiones sufre variaciones al rotarse:

a) F, **b)** $A + C$, **c)** $D^2 + E^2$.

69. Cónicas degeneradas Grafique todas las cónicas degeneradas enumeradas en la tabla 8.2. Recuerde que los conos degenerados se presentan cuando el generador y el eje del cono son paralelos o perpendiculares (consulte la figura 8.2). Explique la ocurrencia de todas las cónicas degeneradas enumeradas con bases en los cortes transversales de los conos circulares rectos degenerados o típicos.

8.5
Ecuaciones polares de las cónicas

Aprenderá acerca de...

- La excentricidad (revisión)
- Cómo escribir ecuaciones polares para las cónicas
- El análisis de las ecuaciones polares para las cónicas
- Las órbitas (revisión)

. . . porque

Es relevante conocer el enfoque de las cónicas utilizado por los astrónomos.

Excentricidad (revisión)

La excentricidad y las coordenadas polares proporcionan medios para observar una vez más que las parábolas, las elipses y las hipérbolas son una familia unificada de curvas interrelacionadas. Se pueden definir esas tres curvas simultáneamente generalizando la definición foco-directriz de la parábola dada en la sección 8.1.

Definición foco-directriz de una sección cónica

Una **sección cónica** es el conjunto de todos los puntos en el plano cuyas distancias de un punto particular (el **foco**) y una línea particular (la **directriz**) en el plano tiene una razón constante (se asume que el foco no está en la directriz).

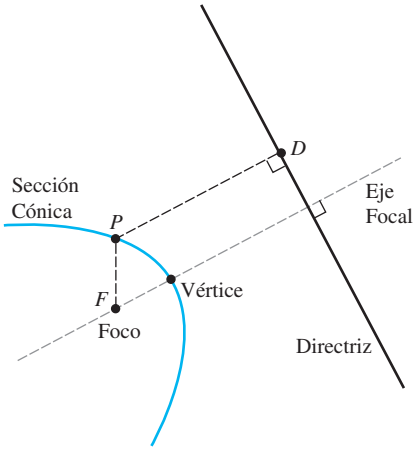


FIGURA 8.40 La estructura geométrica de una sección cónica.

La línea que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz es el **eje (focal)** de las secciones cónicas. El eje es una línea de simetría de la cónica. El punto donde la cónica interseca con su eje es un **vértice** de la cónica. Si P es un punto de la cónica, F es el foco y D es el punto de la directriz más cercano a P, entonces la razón constante PF/PD es la **excentricidad** e de la cónica (consulte la figura 8.40). Una parábola tiene un foco y una directriz. Las elipses y las hipérbolas tiene dos pares de foco-directriz, y cada par de foco-directriz puede utilizarse junto con la excentricidad para generar la sección cónica completa.

Relación foco-directriz-excentricidad

Si P es un punto de una sección cónica, F es el foco de la cónica y D es el punto de la directriz más cercano a P, entonces

$$e = \frac{PF}{PD} \quad \text{y} \quad PF = e \cdot PD,$$

donde e es una constante y la excentricidad de la cónica. Además, la cónica es

- una hipérbola si $e > 1$,
- una parábola si $e = 1$,
- una elipse si $e < 1$.

En este enfoque de las secciones cónicas, la excentricidad es una constante estrictamente positiva y no hay circunferencias ni otras cónicas degeneradas.

OBSERVACIONES

- Para ser consistentes con el trabajo realizado con las parábolas, se podría utilizar $2p$ para denominar a la distancia del foco a la directriz, pero siguiendo la notación de George B. Thomas, Jr, utilizamos k para denominar a esa distancia. Esto simplifica las ecuaciones polares de las cónicas.
- Para ser consistentes con el trabajo en vez del uso dogmático de las coordenadas polares y las ecuaciones correspondientes, se emplea una mezcla de los sistemas polar y cartesiano. Entonces, por ejemplo, se utiliza $x = k$ para la directriz en lugar de $r \cos \theta = k$ o $r = k \sec \theta$.

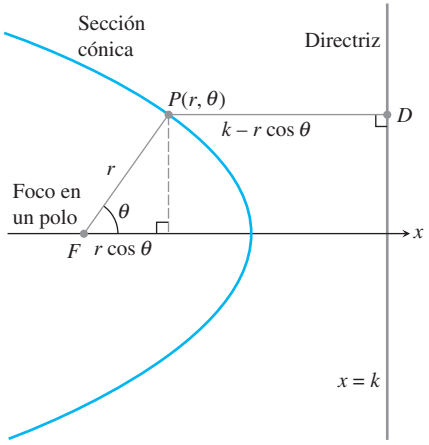


FIGURA 8.41 Una sección cónica en el plano polar.

Cómo escribir ecuaciones polares para las cónicas

Nuestra definición foco-directriz de las cónicas funciona mejor en combinación con las coordenadas polares. Recuerde que, en coordenadas polares, el origen es el *polo* y el eje de las x es el *eje polar*. Para obtener una ecuación polar de una sección cónica se coloca al polo en el foco de la cónica y el eje polar a lo largo del eje focal con la directriz hacia la derecha del polo (consulte la figura 8.41). Si la distancia del foco a la directriz es k, la ecuación artesiana de la directriz es $x = k$. En la figura 8.41, se observa que

$$PF = r \quad \text{y} \quad PD = k - r \cos \theta.$$

Entonces la ecuación $PF = e \cdot PD$ es

$$r = e(k - r \cos \theta),$$

la cual, despejando a r es

$$r = \frac{ke}{1 + e \cos \theta}.$$

En el ejercicio 53 se le pedirá mostrar que esta ecuación es también válida si $r < 0$ o $r \cos q > k$. Esta única ecuación puede producirse para todas las dimensiones y formas de las secciones cónicas no degeneradas. La figura 8.42 muestra tres gráficas típicas para esa ecuación. En la exploración 1, usted investigará cómo el cambio del valor de e afecta la gráfica de $r = ke/(1 + e \cos \theta)$.

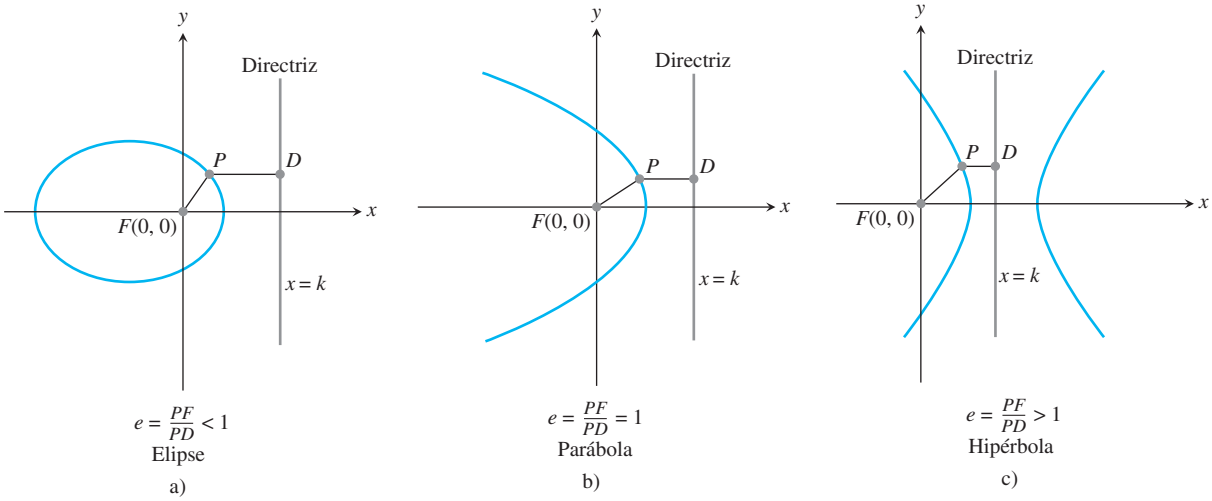


FIGURA 8.42 Los tres tipos de posibles cónicas para $r = ke/(1 + e \cos \theta)$.

EXPLORACIÓN 1 **Graficación de ecuaciones polares de las cónicas**

Configure su graficadora en las opciones graficas Polar y Punto, y en modo Radián. Utilice $k = 3$ y la ventana xy de $[-12, 24]$ por $[-12, 12]$, $\theta\text{min} = 0$, $\theta\text{max} = 2\pi$, y $\theta\text{step} = \pi/48$, grafique

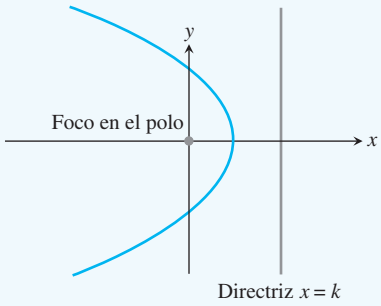
$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}$$

para $e = 0.7, 0.8, 1, 1.5, 3$. Identifique el tipo de sección cónica que se obtuvo para cada valor de e. Coloque las cinco gráficas, una encima de la otra, y explique cómo el cambio del valor de e afecta la gráfica de $r = ke/(1 + e\cos\theta)$. Explique en qué las cinco gráficas son similares y en qué difieren.

Ecuaciones polares de las cónicas

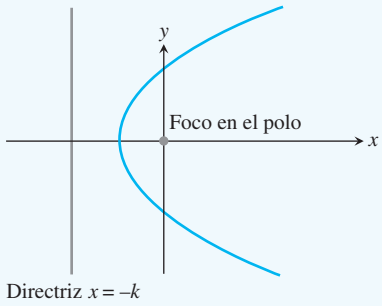
Las cuatro orientaciones estándar de una cónica en el plano polar son las siguientes.

a) $r = \dfrac{ke}{1 + e\cos\theta}$



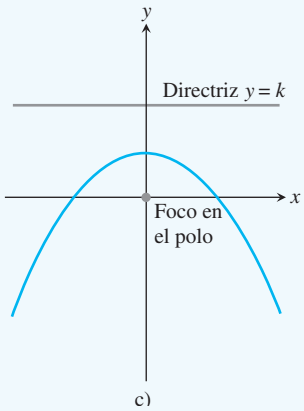
a)

b) $r = \dfrac{ke}{1 - e\cos\theta}$



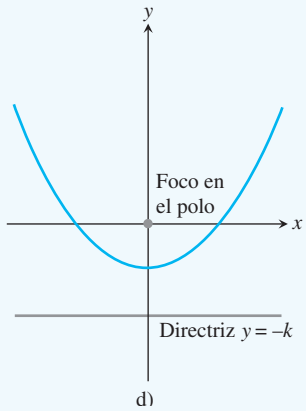
b)

c) $r = \dfrac{ke}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$



c)

d) $r = \dfrac{ke}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$



d)

EJEMPLO 1 Cómo escribir y graficar ecuaciones polares de las cónicas

Dado que el foco es el polo, escriba una ecuación polar para la cónica especificada y grafíquela.

a) Excentricidad $e = 3/5$, directriz $x = 2$.

b) Excentricidad $e = 1$, directriz $x = -2$.

c) Excentricidad $e = 3/2$, directriz $y = 4$.

SOLUCIÓN

a) Haciendo $e = 3/5$ y $k = 2$ en $r = \dfrac{ke}{1 + e\cos\theta}$ se obtiene

$$r = \frac{2(3/5)}{1 + (3/5)\cos\theta}$$

$$= \frac{6}{5 + 3\cos\theta}.$$

La figura 8.43a muestra esta elipse y la directriz dada.

b) Haciendo $e = 1$ y $k = 2$ en $r = \dfrac{ke}{1 - e\cos\theta}$ se obtiene

$$r = \frac{2}{1 - \cos\theta}.$$

La figura 8.43b muestra esta parábola y su directriz.

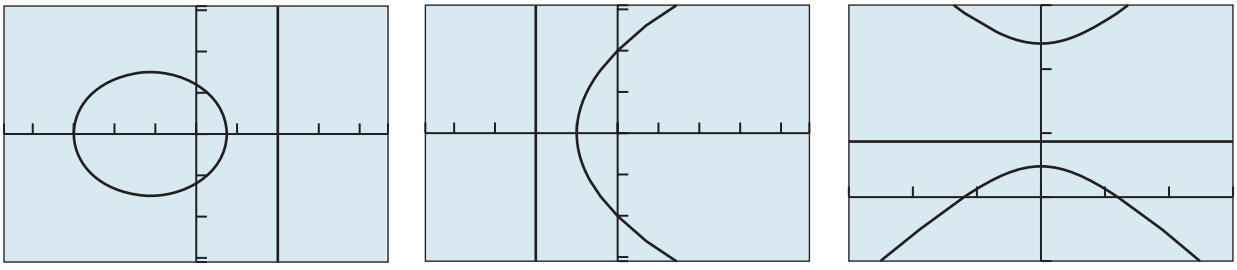
c) Haciendo $e = 3/2$ y $k = 4$ en $r = \dfrac{ke}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$ se obtiene

$$r = \frac{4(3/2)}{1 + (3/2)\,\text{sen}\,\theta}$$

$$= \frac{12}{2 + 3\,\text{sen}\,\theta}.$$

La figura 8.43c muestra esta hipérbola y la directriz dada.

Ahora resuelva el ejercicio 1.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
a)

[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
b)

[–15,15] por [–5, 15]
c)

FIGURA 8.43 Las gráficas del ejemplo 1.

Análisis de las ecuaciones polares de las cónicas

El primer paso para analizar las ecuaciones polares de una sección cónica es utilizar la excentricidad para identificar cuál tipo de cónica representa la ecuación. Luego se determina la ecuación de la directriz.

EJEMPLO 2 Identificación de las cónicas a partir de sus ecuaciones polares

Determine la excentricidad, el tipo de cónica y la directriz.

a) $r = \dfrac{6}{2 + 3\cos\theta}$ **b)** $r = \dfrac{6}{4 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

SOLUCIÓN

a) La división del numerador y el denominador entre 2 produce $r = 3/(1 + 1.5\cos\theta)$. Entonces la excentricidad $e = 1.5$ y, por lo tanto, la cónica es una hipérbola. El numerador es $ke = 3$, entonces $k = 2$, y de esa manera la ecuación de la directriz es $x = 2$.

b) La división del numerador y el denominador entre 4 produce $r = 1.5/(1 - 0.75\,\text{sen}\,\theta)$. Entonces la excentricidad es $e = 0.75$ y, por lo tanto, la cónica es una elipse. El numerador es $ke = 1.5$, entonces $k = 2$, y de esa manera la ecuación de la directriz es $y = -2$.

Ahora resuelva el ejercicio 7.

Todas las propiedades geométricas y las características de las parábolas, las elipses y las hipérbolas desarrolladas en las secciones 8.1 a la 8.3 siguen aplicándose en el conjunto de coordenadas polares. En el ejemplo 3 utilizamos este conocimiento previo.

EJEMPLO 3 Análisis de una cónica

Analice la sección cónica dada por la ecuación $r = 16/(5 - 3\cos\theta)$. En el análisis incluya los valores de e, a, b y c.

SOLUCIÓN La división del numerador y el denominador entre 5 produce

$$r = \frac{3.2}{1 - 0.6\cos\theta}.$$

Así que la excentricidad $e = 0.6$ y, por lo tanto, la cónica es una elipse (la figura 8.44 la muestra). Los vértices (los puntos finales del eje mayor) tienen coordenadas polares $(8, 0)$ y $(2, \pi)$. Entonces $2a = 8 + 2 = 10$, de esta manera $a = 5$.

El vértice $(2, \pi)$ está 2 unidades a la izquierda del polo, y el polo es un foco de la elipse. Entonces $a - c = 2$, y así $c = 3$. Una forma alternativa de obtener c es utilizar el hecho de que la excentricidad de una elipse es $e = c/a$, y por ello $c = ae = 5 \cdot 0.6 = 3$.

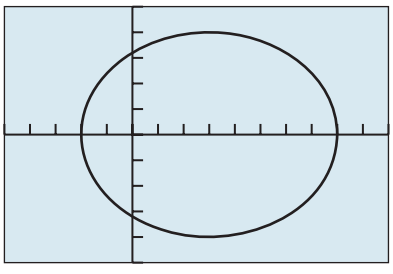
Para determinar a b utilizamos la relación pitagórica de una elipse:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

Con toda esa información, podemos expresar la ecuación cartesiana de la elipse:

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Ahora resuelva el ejercicio 31.



[–5, 10] por [–5, 5]

FIGURA 8.44 La gráfica de la elipse $r = 16/(5 - 3\cos\theta)$ (ejemplo 3).

Órbitas (revisión)

Las ecuaciones polares de las cónicas se usan extensivamente en la mecánica celeste, la rama de la astronomía que se basa en el trabajo de Kepler y otros que han estudiado el movimiento de los cuerpos celestes. Las ecuaciones polares de las secciones cónicas se ajustan bien a los *problemas de dos cuerpos* de mecánica celeste por varias razones. Primero, las mismas ecuaciones se utilizan para las elipses, las parábolas y las hipérbolas, que constituyen las trayectorias de un cuerpo que viaja con respecto a otro cuerpo. Segundo, un foco de la cónica siempre está en el polo. Esto tiene dos ventajas inmediatas:

- El polo puede considerarse como el centro de un cuerpo más grande, como el Sol, y un cuerpo más pequeño, como la Tierra, que sigue una trayectoria cónica con respecto al cuerpo más grande.
- Las coordenadas dadas por una ecuación polar son la distancia r entre los dos cuerpos y la dirección θ del cuerpo más grande al cuerpo más pequeño con respecto a los ejes de la trayectoria de la cónica en movimiento.

Por esas razones, se prefieren las coordenadas polares a las coordenadas cartesianas en el estudio de movimiento orbital.

Tabla 8.3 Semieje mayor y excentricidades de los planetas

Planeta	Semieje mayor (Gm)	Excentricidad
Mercurio	57.9	0.2056
Venus	108.2	0.0068
Tierra	149.6	0.0167
Marte	227.9	0.0934
Júpiter	778.3	0.0485
Saturno	1,427	0.0560
Urano	2,869	0.0461
Neptuno	4,497	0.0050
Plutón	5,900	0.2484

Fuente: Shupe, et al., National Geographic Atlas of the World (rev. 6a ed.). Washington, DC: National Geographic Society, 1991, lámina 116, y otras fuentes.

Para usar los datos de la tabla 8.3 para crear ecuaciones polares de órbitas elípticas de los planetas, se necesita expresar la ecuación $r = ke/(1 + e\cos\theta)$ en términos de a y e. Aplicamos la fórmula $PF = e \cdot PD$ a la elipse que se muestra en la figura 8.45:

$$e \cdot PD = PF$$

$$e(c + k - a) = a - c \qquad \text{De la figura 8.45.}$$

$$e(ae + k - a) = a - ae \qquad \text{Utilizar } e = c/a.$$

$$ae^2 + ke - ae = a - ae \qquad \text{Distribuir la } e.$$

$$ae^2 + ke = a \qquad \text{Sumar } ae.$$

$$ke = a - ae^2 \qquad \text{Restar } ae^2.$$

$$ke = a(1 - e^2) \qquad \text{Factorizar.}$$

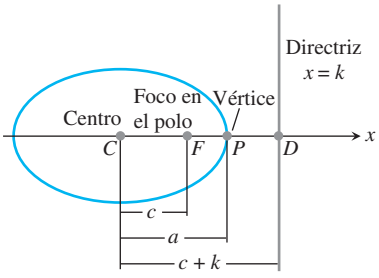


FIGURA 8.45 Relaciones geométricas de una elipse.

Por lo que la ecuación $r = ke/(1 + e \cos \theta)$ puede reescribirse de la siguiente forma:

Elipse con excentricidad e y semieje mayor a

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

En esta forma de la ecuación, cuando $e = 0$, la ecuación se reduce a $r = a$, es decir, la ecuación de una circunferencia con radio a.

EJEMPLO 4 Análisis de la órbita planetaria

Determine una ecuación polar de la órbita de Mercurio y utilícela para aproximar su afelio (la distancia más lejana del Sol) y el perihelio (la distancia más corta al Sol).

SOLUCIÓN Haciendo $e = 0.2056$ y $a = 57.9$ en

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad \text{produce} \quad r = \frac{57.9(1 - 0.2056^2)}{1 + 0.2056 \cos \theta}.$$

El afelio de Mercurio es

$$r = \frac{57.9(1 - 0.2056^2)}{1 - 0.2056} \approx 69.8 \text{ Gm}.$$

El perihelio de Mercurio es

$$r = \frac{57.9(1 - 0.2056^2)}{1 + 0.2056} \approx 46.0 \text{ Gm}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 41.

REPASO RÁPIDO 8.5 *(Para obtener ayuda revise la sección 6.4)*

En los ejercicios del 1 y 2 resuelva para r.

1. $(3, \theta) = (r, \theta + \pi)$

2. $(-2, \theta) = (r, \theta + \pi)$

En los ejercicios 3 y 4 resuelva para θ.

3. $(1.5, \pi/6) = (-1.5, \theta)$, $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

4. $(-3, 4\pi/3) = (3, \theta)$, $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

En los ejercicios 5 y 6 determine el foco y la directriz de la parábola.

5. $x^2 = 16y$

6. $y^2 = -12x$

En los ejercicios del 7 al 10 obtenga los focos y vértices de la cónica.

7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

8. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$

9. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

10. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.5

En los ejercicios del 1 al 6 obtenga una ecuación polar para la cónica, con un foco en el polo, y la excentricidad y la directriz dadas. Identifique la cónica y grafíquela.

1. $e = 1, x = -2$ **2.** $e = 5/4, x = 4$

3. $e = 3/5, y = 4$ **4.** $e = 1, y = 2$

5. $e = 7/3, y = -1$ **6.** $e = 2/3, x = -5$

En los ejercicios del 7 al 14 determine la excentricidad, el tipo de cónica y la directriz.

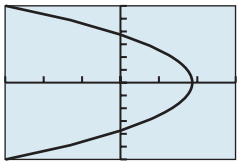
7. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$ **8.** $r = \dfrac{6}{1 + 2\cos\theta}$

9. $r = \dfrac{5}{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ **10.** $r = \dfrac{2}{4 - \cos\theta}$

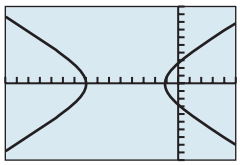
11. $r = \dfrac{20}{6 + 5\,\text{sen}\,\theta}$ **12.** $r = \dfrac{42}{2 - 7\,\text{sen}\,\theta}$

13. $r = \dfrac{6}{5 + 2\cos\theta}$ **14.** $r = \dfrac{20}{2 + 5\,\text{sen}\,\theta}$

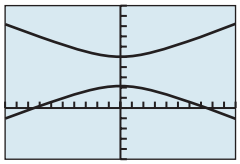
En los ejercicios del 15 al 20 relacione la ecuación polar con la gráfica correspondiente e identifique la ventana de visualización.



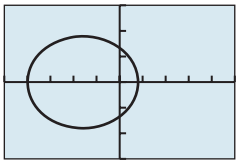
a)



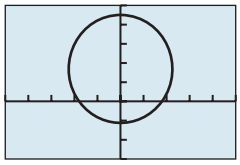
b)



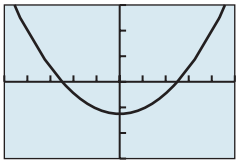
c)



d)



e)



f)

15. $r = \dfrac{8}{3 - 4\cos\theta}$ **16.** $r = \dfrac{4}{3 + 2\cos\theta}$

17. $r = \dfrac{5}{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ **18.** $r = \dfrac{9}{5 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

19. $r = \dfrac{15}{2 + 5\,\text{sen}\,\theta}$ **20.** $r = \dfrac{15}{4 + 4\cos\theta}$

En los ejercicios del 21 al 24 obtenga la ecuación polar para la elipse, con un foco en el polo y cuyas coordenadas polares dadas correspondan a los puntos finales de su eje mayor.

21. $(1.5, 0)$ y $(6, \pi)$ **22.** $(1.5, 0)$ y $(1, \pi)$

23. $(1, \pi/2)$ y $(3, 3\pi/2)$ **24.** $(3, \pi/2)$ y $(0.75, -\pi/2)$

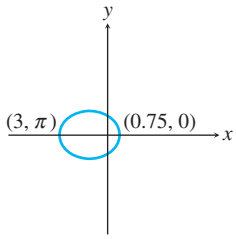
En los ejercicios del 25 al 28 determine las ecuaciones polares de la hipérbola con un foco en el polo y cuyas coordenadas polares dadas correspondan a los puntos finales de su eje transversal.

25. $(3, 0)$ y $(-15, \pi)$ **26.** $(-3, 0)$ y $(1.5, \pi)$

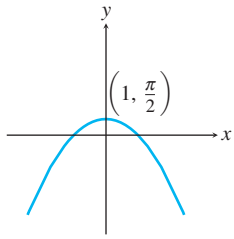
27. $\left(2.4, \dfrac{\pi}{2}\right)$ y $\left(-12, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ **28.** $\left(-6, \dfrac{\pi}{2}\right)$ y $\left(2, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

En los ejercicios 29 y 30 obtenga una ecuación polar para la cónica con un foco en el polo.

29.



30.



En los ejercicios del 31 al 36 grafique la cónica y determine los valores de e, a, b y c

31. $r = \dfrac{21}{5 - 2\cos\theta}$ **32.** $r = \dfrac{11}{6 - 5\,\text{sen}\,\theta}$

33. $r = \dfrac{24}{4 + 2\,\text{sen}\,\theta}$ **34.** $r = \dfrac{16}{5 + 3\cos\theta}$

35. $r = \dfrac{16}{3 + 5\cos\theta}$ **36.** $r = \dfrac{12}{1 - 5\,\text{sen}\,\theta}$

En los ejercicios 37 y 38 determine la ecuación cartesiana de la ecuación polar dada.

37. $r = \dfrac{4}{2 - \text{sen}\,\theta}$ **38.** $r = \dfrac{6}{1 + 2\cos\theta}$

En los ejercicios 39 y 40 use el hecho de que $k = 2p$ es el doble de la longitud focal y la mitad de la anchura focal, para determinar la ecuación cartesiana de las parábolas cuyas ecuaciones polares se muestran.

39. $r = \dfrac{4}{2 - 2\cos\theta}$ **40.** $r = \dfrac{12}{3 + 3\cos\theta}$

41. Cometa Halley La órbita del cometa Halley tiene un semieje mayor de 18.09 UA y una excentricidad orbital de 0.97. Calcule su perihelio y su afelio.

42. Urano La órbita de Urano tiene un semieje mayor de 19.18 UA y una excentricidad orbital de 0.0461. Calcule su perihelio y su afelio.

En los ejercicios 43 y 44. la velocidad de un objeto que viaja en una órbita circular de radio r (distancia del centro del planeta en metros) alrededor de un planeta está dada por

$$v = \sqrt{\frac{3.99 \times 10^{14}\, k}{r}} \text{ m/s},$$

donde k es una constante referente a la masa del planeta y el objeto en órbita.

43. Actividad en equipo Módulo Lunar Un módulo de excursión lunar está en una órbita circular 250 km sobre la superficie de la Luna. Suponga que el radio de la luna es de 1,740 km y que $k = 0.012$. Determine lo siguiente:

a) La velocidad del módulo lunar.

b) El lapso requerido para que el módulo lunar le de una vuelta a la luna.

44. Actividad en equipo Satélite de Marte Un satélite está en una órbita a 1,000 millas sobre Marte. Suponga que el radio de Marte es de 2,100 millas y que $k = 0.11$. Obtenga la velocidad del satélite.

Preguntas de examen estandarizado

45. Verdadero o falso La ecuación $r = ke/(1 + e \cos \theta)$ no representa circunferencias. Justifique su respuesta.

46. Verdadero o falso La ecuación $r = a(1 - e^2)/(1 + e \cos \theta)$ no representa parábolas. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 47 al 50 resuelva los problemas sin usar calculadora.

47. Opción múltiple ¿Cuál razón de las distancias, de un punto sobre una cónica no degenerada, es constante?

A) Distancia al centro: distancia a la directriz.

B) Distancia al foco: distancia al vértice.

C) Distancia al vértice: distancia a la directriz.

D) Distancia al foco: distancia a la directriz.

E) Distancia al centro: distancia al vértice.

48. Opción múltiple ¿Cuál tipo de sección cónica tiene una excentricidad más grande que 1?

A) Una elipse

B) Una parábola

C) Una hipérbola

D) Dos líneas paralelas

E) Una circunferencia

49. Opción múltiple Para una cónica expresada por $r = ke/(1 + e \sin \theta)$, ¿cuál punto está localizado en el polo?

A) El centro

B) Un foco

C) Un vértice

D) Un punto final del eje menor

E) Un punto final del eje conjugado

50. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes **no** es una ecuación polar de una cónica?

A) $r = 1 + 2 \cos \theta$

B) $r = 1/(1 + \text{sen } \theta)$

C) $r = 3$

D) $r = 1/(2 - \cos \theta)$

E) $r = 1/(1+2 \cos \theta)$

Exploraciones

51. Órbitas planetarias Utilice la ecuación polar $r = a(1 - e^2)/(1 + e \cos \theta)$ para completar las siguientes actividades:

a) Use el hecho de que $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ para probar que el perihelio de cualquier planeta es $a(1 - e)$ y el afelio es $a(1 + e)$.

b) Use $e = c/a$ para confirmar que $a(1 - e) = a - c$ y $a(1 + e) = a + c$.

c) Use las fórmulas $a(1 - e)$ y $a(1 + e)$ para calcular el perihelio y el afelio de cada planeta enumerado en la tabla 8.4.

d) ¿Para cuál de estos planetas es más grande la diferencia entre el perihelio y el afelio?



Tabla 8.4 Semieje mayor y excentricidades de los planetas internos

Planeta	Semieje mayor (UA)	Excentricidad
Mercurio	0.3871	0.206
Venus	0.7233	0.007
Tierra	1.0000	0.017
Marte	1.5237	0.093
Júpiter	5.2026	0.048
Saturno	9.5547	0.056

Fuente: Encrenaz & Bibring, El Sistema Solar (seg. ed.). Nueva York: Springer, p.5.

52. Uso de la ecuación del astrónomo para las cónicas Utilice el modo Punto, $a = 2$, y la ventana xy de $[-13, 5]$ por $[-6, 6]$, $\theta\text{min} = 0$, $\theta\text{max} = 2\pi$, y $\theta\text{step} = \pi/48$, grafique $r = a\,(1 - e^2)/(1 + e \cos \theta)$ para $e = 0, 0.3, 0.7, 1.5, 3$. Identifique el tipo de sección cónica obtenida para cada valor e. ¿Qué pasa cuando $e = 1$?

Ampliación de las Ideas

53. Revisión de la figura 8.41 En la figura 8.41, si $r < 0$ o $r\cos\theta > k$, entonces se debe usar $PD = |k - r\cos\theta|$ y $PF = |r|$. Pruebe que, aun en estos casos, la ecuación resultante es todavía $r = ke/(1 + e\cos\theta)$.

54. Deducción de otras formas polares para las cónicas Usando a la figura 8.41 como guía, dibuje un diagrama apropiado y deduzca la ecuación.

a) $r = \dfrac{ke}{1 - e\cos\theta}$

b) $r = \dfrac{ke}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$

c) $r = \dfrac{ke}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$

55. Revisión del ejemplo 3 Use las fórmulas $x = r\cos\theta$ y $x^2 + y^2 = r^2$ para transformar la ecuación polar $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos\theta}$ en la ecuación cartesiana $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

56. Anchura focal Utilizando ecuaciones polares deduzca las fórmulas para la anchura focal de una elipse y de una hipérbola. Inicie definiendo la anchura focal para esas cónicas en una manera análoga a la definición de la anchura focal de una parábola dada en la sección 8.1.

57. Pruebe que para una hipérbola, la fórmula $r = ke/(1 - e\cos\theta)$ es equivalente a $r = a(e^2 - 1)/(1 - e\cos\theta)$, donde a es el semieje transversal de la hipérbola.

58. Conexión polar a rectangular Considere la elipse

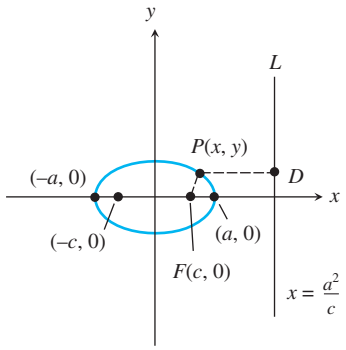
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde la mitad de la longitud del eje mayor es a, y los focos son $(\pm c, 0)$ tal que $c^2 = a^2 - b^2$. Sea L la recta vertical $x = a^2/c$.

a) Pruebe que L es la directriz de la elipse. [*Sugerencia:* pruebe que PF/PD es la constante c/a, donde P es un punto en la elipse y D es el punto sobre L tal que PD es perpendicular a L].

b) Pruebe que la excentricidad es $e = c/a$.

c) Pruebe que la distancia de F a L es $a/e - ea$.



59. Conexión polar a rectangular Considere la hipérbola

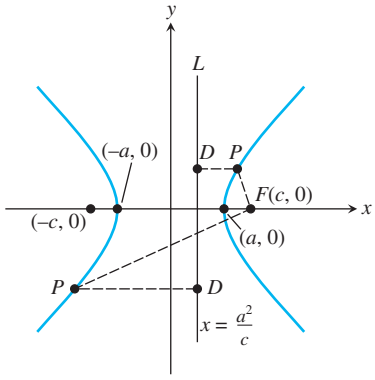
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde la mitad de la longitud del eje transversal es a y los focos son $(\pm c, 0)$ tal que $c^2 = a^2 + b^2$. Sea L la recta vertical $x = a^2/c$.

a) Pruebe que L es la directriz de la hipérbola. [*Sugerencia:* pruebe que PF/PD es la constante c/a, donde P es un punto en la hipérbola y D es el punto en L tal que PD es perpendicular a L].

b) Pruebe que la excentricidad es $e = c/a$.

c) Pruebe que la distancia de F a L es $ea - a/e$.



8.6 Sistema coordenado cartesiano tridimensional

Aprenderá acerca de...

- Las coordenadas cartesianas tridimensionales
- Las fórmulas de la distancia y del punto medio
- La ecuación de una esfera
- Los planos y otras superficies
- Los vectores en el espacio
- Las rectas en el espacio

. . . porque

Ésta es la geometría analítica de nuestro mundo físico.

Coordenadas cartesianas tridimensionales

En las secciones R.2 y R.4 estudiamos las coordenadas cartesianas, las fórmulas básicas asociadas y las ecuaciones para el plano bidimensional; ahora extendemos esas ideas al *espacio tridimensional*. En el plano se utilizan dos ejes y un par ordenado para nombrar a los puntos; en el espacio se utilizan tres ejes mutuamente perpendiculares y ternas ordenadas de números para nombrar a los puntos. Consulte la figura 8.46.

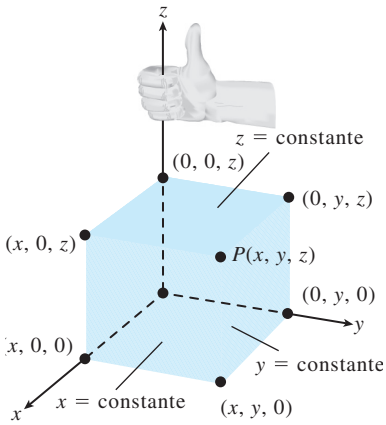


FIGURA 8.46 El punto $P(x, y, z)$ en el espacio cartesiano

Note que la figura 8.46 exhibe varias características importantes del *sistema coordenado cartesiano tridimensional*:

- Los ejes se llaman x, y y z, y estos tres **ejes coordenados** forman un **sistema coordenado de mano derecha**: cuando sostiene su mano derecha con los dedos doblados hacia dentro del eje positivo x hacia el eje positivo y, su pulgar apunta en dirección de eje positivo z.
- Un punto P en el espacio corresponde de forma única a una terna ordenada (x, y, z) de números reales. Los números x, y y z son las **coordenadas cartesianas de P**.
- Los puntos de los ejes tiene la forma $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ o $(0, 0, z)$ con $(x, 0, 0)$ en el eje x, $(0, y, 0)$ en el eje y y $(0, 0, z)$ en el eje z.

En la figura 8.47, los ejes se analizan en pares para determinar los **planos coordenados**:

- Los planos coordenados son el **plano xy**, el **plano xz** y el **plano yz** y tienen las ecuaciones $z = 0$, $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente.
- Los puntos sobre los planos coordenados tiene la forma $(x, y, 0)$, $(x, 0, z)$ o $(0, y, z)$ con $(x, y, 0)$ en el plano xy, $(x, 0, z)$ en el plano xz y $(0, y, z)$ en el plano yz.
- Los planos coordenados se intersecan en el **origen**, $(0, 0, 0)$.
- Los planos coordenados dividen al espacio en ocho regiones llamadas **octantes**; el **primer octante** contiene todos los puntos en el espacio con las tres coordenadas positivas.

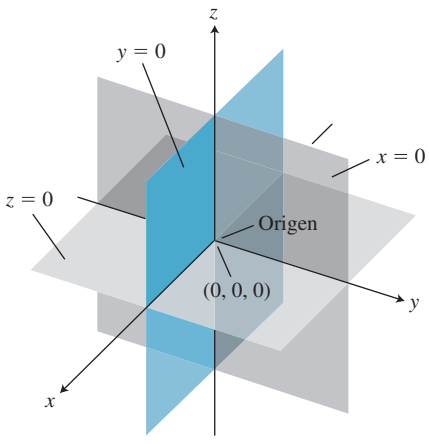


FIGURA 8.47 Los planos coordenados dividen al espacio en ocho octantes.

EJEMPLO 1 Localización de un punto en el espacio cartesiano

Haga un dibujo en el que se muestre el punto (2, 3, 5).

SOLUCIÓN Para localizar el punto (2, 3, 5), primero se hace un esbozo de un sistema coordenado tridimensional de mano derecha. Entonces se dibujan los planos $x = 2$, $y = 3$, y $z = 5$, que son paralelos a los planos coordenados, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, respectivamente. El punto (2, 3, 5) está en la intersección de los planos $x = 2$, $y = 3$ y $z = 5$, como se muestra en la figura 8.48.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

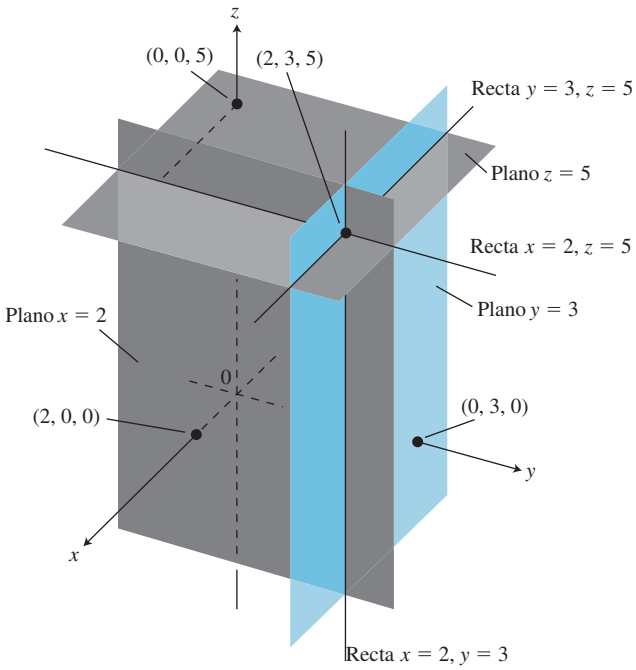


FIGURA 8.48 Los planos $x = 2$, $y = 3$ y $z = 5$ determinan al punto (2, 3, 5) (ejemplo 1).

Fórmulas de la distancia y del punto medio

Las fórmulas de la distancia y del punto medio par el espacio son generalizaciones de las fórmulas correspondientes del plano.

Fórmula de la distancia (espacio cartesiano)

La distancia $d(P, Q)$ entre los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ en el espacio es

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Justo como en el plano, las coordenadas del punto medio de un segmento de recta son los promedios de las coordenadas de los puntos finales del segmento.

Fórmula del punto medio (espacio cartesiano)

El punto medio M del segmento de recta PQ con puntos finales $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ en el espacio es

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

EJEMPLO 2 Cálculo de una distancia y obtención de un punto medio

Determine la distancia entre los puntos $P(-2, 3, 1)$ y $Q(4, -1, 5)$ y determine el punto medio del segmento de línea PQ.

SOLUCIÓN La distancia está dada por

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(-2 - 4)^2 + (3 + 1)^2 + (1 - 5)^2} \\ &= \sqrt{36 + 16 + 16} \\ &= \sqrt{68} \approx 8.25 \end{aligned}$$

El punto medio es

$$M = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 - 1}{2}, \frac{1 + 5}{2}\right) = (1, 1, 3).$$

Ahora resuelva el ejercicio 5 y 9.

Ecuación de la esfera

Una *esfera* es el análogo tridimensional de una circunferencia. En el espacio, el conjunto de puntos que están a un distancia fija de un punto fijo es una **esfera**. La distancia fija es el **radio** y el punto fijo es el **centro** de la esfera. El punto $P(x, y, z)$ es un punto de la esfera con centro (h, k, l) y radio r si y sólo si

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2} = r.$$

Se elevan al cuadrado ambos lados de la ecuación estándar mostrada a continuación.

Ecuación estándar de la esfera

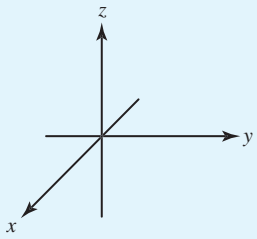
Un punto $P(x, y, z)$ está sobre la esfera con centro (h, k, l) y radio r si, y sólo si,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2.$$

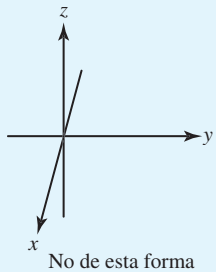
Lección de dibujo

Cómo dibujar objetos tridimensionales de forma que tengan un aspecto tridimensional

1. Haga el ángulo entre el eje positivo de las x y el eje positivo de las y lo suficientemente grande.

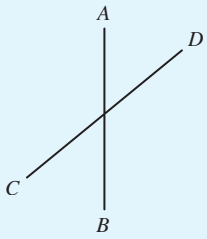


Así

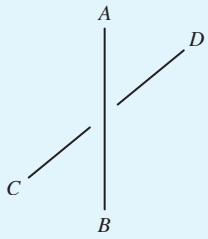


No de esta forma

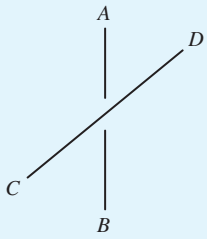
2. Interrumpa las líneas. Cuando una de las líneas pasa detrás de otra, interrúmpala para mostrar que no la toca y que parte de ésta se encuentra escondida.



Intersección

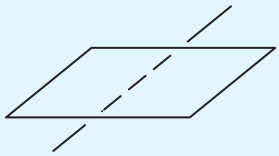


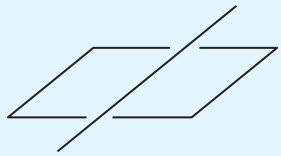
CD atrás de *A*

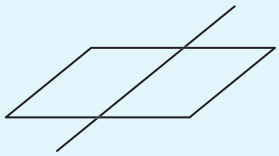


AB atrás de *CD*

3. Dibuje con línea discontinua u omita porciones ocultas de rectas. No deje que la línea toque la frontera del paralelogramo que representa al plano, a menos que la recta esté en el plano.


Línea debajo del plano

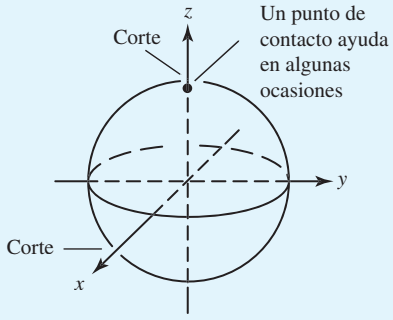

Línea sobre el plano


Línea en el plano

4. Esferas: Dibuje primero la esfera (contorno y ecuador); dibuje los ejes, y en su caso, el eje posterior. Use líneas punteadas y líneas con guiones.



Primero la esfera



Eje posterior

EJEMPLO 3 Determine la ecuación estándar de una esfera

La ecuación estándar de la esfera con centro $(2, 0, -3)$ y radio 7 es

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 49.$$

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Planos y otras superficies

En la sección R.4 aprendimos que cada recta en el plano cartesiano puede escribirse como una ecuación (lineal) de primer grado de dos variables; esto es, cada recta puede escribirse como

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A y B no son ambos iguales a cero. A la inversa, cada ecuación de primer grado de dos variables representa una recta en el plano cartesiano.

En forma análoga, cada **plano** en espacio cartesiano puede escribirse como una **ecuación de primer grado de tres variables**:

Ecuación de un plano en el espacio cartesiano

Todo plano puede escribirse como

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

donde A, B y C no son todos iguales a cero. A la inversa, cada ecuación de primer grado de tres variables representa un plano en el espacio cartesiano.

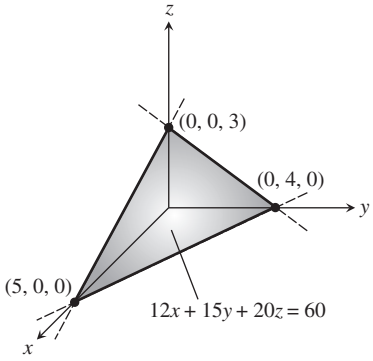


FIGURA 8.49 Las intersecciones (5, 0, 0), (0, 4, 0) y (0, 0, 3) determinan al plano $12x + 15y + 20z = 60$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Dibujo de un plano en el espacio

Elabore la gráfica de $12x + 15y + 20z = 60$.

SOLUCIÓN Debido a que es una ecuación de primer grado, su gráfica es un plano. Tres puntos determinan un plano. Para obtener tres puntos, primero dividimos ambos lados de $12x + 15y + 20z = 60$ entre 60:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1.$$

De esta manera es fácil observar que los puntos (5, 0, 0), (0, 4, 0) y (0, 0, 3) satisfacen la ecuación. Éstos son los puntos donde la gráfica cruza los ejes coordenados. La figura 8.49 muestra el dibujo completo.

Ahora resuelva el ejercicio 17.

Las ecuaciones de tres variables x, y y z generalmente se grafican como superficies en el espacio tridimensional. Justo como en el plano, las ecuaciones de segundo grado son de particular interés. Recuerde que las ecuaciones de segundo grado de dos variables producen secciones cónicas en el plano cartesiano. En el espacio, las ecuaciones de segundo grado de tres variables producen **superficies cuadráticas**: Los paraboloides, los elipsoides y los hiperboloides de revolución que tiene propiedades reflectoras especiales, son superficies cuadráticas con nombres que suenan exóticos, como paraboloides hiperbólicos e hiperboloides elípticos.

Otras superficies de interés incluyen gráficas de **funciones de dos variables**, cuyas ecuaciones tienen la forma $z = f(x, y)$. Algunos ejemplos son $z = x \ln y$, $z = \operatorname{sen}(xy)$ y $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. La gráfica de la última ecuación es un hemisferio (consulte el ejercicio 63). Las ecuaciones de la forma $z = f(x, y)$ pueden graficarse utilizando algunas calculadoras graficadoras y la mayoría del software de álgebra computacional. Las superficies cuadráticas y las funciones de dos variables se estudian en la mayoría de las series de cursos de cálculo a nivel universitario.

Vectores en el espacio

En el espacio, al igual que en el plano, el conjunto de segmentos dirigidos de rectas (o flechas) son *vectores*. Se utilizan para representar fuerzas, desplazamientos y velocidades en tres dimensiones. En el espacio, se usan ternas ordenadas para expresar vectores:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

El **vector cero** es $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ y los **vectores unitarios estándar** (o canónicos) son $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$. Como se muestra en la figura 8.50, el vector $\mathbf{v}$ puede expresarse en términos de esos vectores unitarios estándar:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

El vector $\mathbf{v}$ que está representado por la flecha que va de $P(a, b, c)$ a $Q(x, y, z)$ es

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle x - a, y - b, z - c \rangle = (x - a)\mathbf{i} + (y - b)\mathbf{j} + (z - c)\mathbf{k}.$$

Un vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ puede multiplicarse por un escalar (número real) c de la siguiente manera:

$$c\mathbf{v} = c\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle.$$

Muchas otras propiedades de los vectores pueden generalizarse de manera natural cuando nos movemos de dos a tres dimensiones:

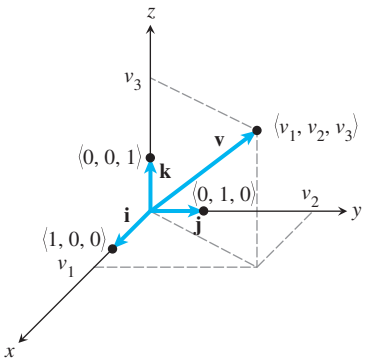


FIGURA 8.50 El vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Relaciones de vectores en el espacio

Para los vectores $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$,

- **Igualdad:** $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ si y sólo si $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$, y $v_3 = w_3$
- **Adición:** $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3 \rangle$
- **Sustracción:** $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3 \rangle$
- **Magnitud:** $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
- **Producto punto:** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$
- **Vector unitario:** $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$.

EJEMPLO 5 Cálculo con vectores

a) $3\langle -2, 1, 4\rangle = \langle 3 \cdot -2, 3 \cdot 1, 3 \cdot 4\rangle = \langle -6, 3, 12\rangle$

b) $\langle 0, 6, -7\rangle + \langle -5, 5, 8\rangle = \langle 0 - 5, 6 + 5, -7 + 8\rangle = \langle -5, 11, 1\rangle$

c) $\langle 1, -3, 4\rangle - \langle -2, -4, 5\rangle = \langle 1 + 2, -3 + 4, 4 - 5\rangle = \langle 3, 1, -1\rangle$

d) $|\langle 2, 0, -6\rangle| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6.32$

e) $\langle 5, 3, -1\rangle \cdot \langle -6, 2, 3\rangle = 5 \cdot (-6) + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3$

$= -30 + 6 - 3 = -27.$

Ahora resuelva los ejercicios del 23 al 26.

EJEMPLO 6 Uso de vectores en el espacio

Un aeroplano que acaba de despegar se dirige al este. Su vector velocidad del aire hace un ángulo de 30° con el piso, con una rapidez en el aire de 250 mph. El viento sopla del sureste a 32 mph; calcule un vector que represente la velocidad del aeroplano con respecto al punto de despegue.

SOLUCIÓN Suponga que **i** apunta al este, **j** al norte y **k** apunta hacia arriba. La velocidad en el aire del aeroplano es

$$\mathbf{a} = \langle 250 \cos 30°, 0, 250 \operatorname{sen} 30°\rangle \approx \langle 216.506, 0, 125\rangle,$$

y la velocidad del viento, dirigido hacia el noroeste, es

$$\mathbf{w} = \langle 32 \cos 135°, 32 \operatorname{sen} 135°, 0\rangle \approx \langle -22.627, 22.627, 0\rangle.$$

La velocidad con respecto al piso es $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{w}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &\approx \langle 216.506, 0, 125\rangle + \langle -22.627, 22.627, 0\rangle \\ &\approx \langle 193.88, 22.63, 125\rangle \\ &= 193.88\mathbf{i} + 22.63\mathbf{j} + 125\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 33.

En el ejercicio 64 se le pedirá que interprete el significado del vector velocidad que se obtuvo en el ejemplo 6.

Rectas en el espacio

Hemos vistos que las ecuaciones de primer grado con tres variables se grafican como planos en el espacio. Entonces, ¿cómo obtenemos las rectas? Existen varias formas. Primero note que para especificar el eje x, el cual es una recta, podríamos utilizar el par de ecuaciones de primer grado $y = 0$ y $z = 0$. Como alternativas para el uso de un par de ecuaciones cartesianas, podemos definir cualquier recta en el espacio utilizando

- una ecuación vectorial, o
- un conjunto de tres ecuaciones paramétricas.

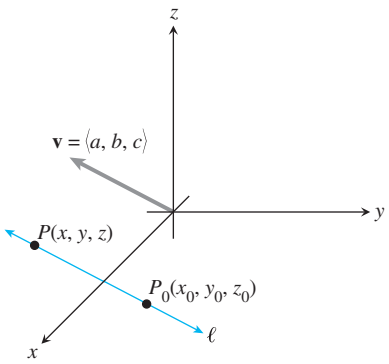


FIGURA 8.51 La recta ℓ es paralela al vector dirección $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$.

Suponga que ℓ es una recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y en la dirección del vector, distinto a cero, $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ (figura 8.51). Entonces para cualquier punto $P(x, y, z)$ en ℓ,

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$$

para cualquier número real t. El vector $\mathbf{v}$ es un **vector dirección** para la recta ℓ. Si $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \langle x, y, z \rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$. Entonces la ecuación de la recta ℓ es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$.

Ecuaciones de una recta en el espacio

Si ℓ es una recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y en la dirección del vector no cero $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, entonces un punto $P(x, y, z)$ está en ℓ si, y sólo si,

- **Forma vectorial**: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, donde $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$; o
- **Forma paramétrica**: $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, y $z = z_0 + ct$,

donde t es un número real.

EJEMPLO 7 Determinación de ecuaciones para una recta

La recta que pasa por $P_0(4, 3, -1)$ con el vector dirección $\mathbf{v} = \langle -2, 2, 7 \rangle$ puede escribirse

- en la forma vectorial $\mathbf{r} = \langle 4, 3, -1 \rangle + t\langle -2, 2, 7 \rangle$; o
- en la forma paramétrica como $x = 4 - 2t$, $y = 3 + 2t$, y $z = -1 + 7t$.

Ahora resuelva el ejercicio 35.

EJEMPLO 8 Determinación de ecuaciones para una recta

Utilizando los vectores unitarios estándar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, escriba una ecuación vectorial para la recta que contenga a los puntos $A(3, 0, -2)$ y $B(-1, 2, -5)$ y compárelo con las ecuaciones paramétricas de la recta.

SOLUCIÓN La recta está en la dirección de

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \langle -1 - 3, 2 - 0, -5 + 2 \rangle = \langle -4, 2, -3 \rangle.$$

Así que, utilizando $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OA}$, la ecuación vectorial de la recta es:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$
$$\langle x, y, z \rangle = \langle 3, 0, -2 \rangle + t\langle -4, 2, -3 \rangle$$
$$\langle x, y, z \rangle = \langle 3 - 4t, 2t, -2 - 3t \rangle$$
$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (3 - 4t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (-2 - 3t)\mathbf{k}.$$

Las ecuaciones paramétricas son las tres ecuaciones

$$x = 3 - 4t, \; y = 2t, \text{ y } z = -2 - 3t.$$

Ahora resuelva el ejercicio 41.

REPASO RÁPIDO 8.6 *(Para obtener ayuda revise las secciones 6.1 y 6.3)*

En los ejercicios del 1 al 3 sean $P(x, y)$ y $Q(2, -3)$ los puntos en el plano xy.

1. Calcule la distancia que hay entre P y Q.

2. Determine el punto medio del segmento de recta PQ.

3. Si P está a 5 unidades de Q, describa la posición de P.

En los ejercicios 4 al 6 sea $\mathbf{v} = \langle -4, 5\rangle = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ un vector en el plano xy.

4. Obtenga la magnitud de $\mathbf{v}$.

5. Determine un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$.

6. Obtenga un vector de 7 unidades de largo en la dirección de $-\mathbf{v}$.

7. Proporcione una descripción geométrica de la gráfica $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$ en el plano xy.

8. Proporcione una descripción geométrica de la gráfica $x = 2 - t$, $y = -4 + 2t$ en el plano xy.

9. Determine el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ en plano xy.

10. Obtenga un vector que vaya de $P(2, 5)$ a $Q(-1, -4)$ en el plano xy.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8.6

En los ejercicios del 1 al 4 elabore gráficas que muestren los puntos.

1. $(3, 4, 2)$

2. $(2, -3, 6)$

3. $(1, -2, -4)$

4. $(-2, 3, -5)$

En los ejercicios del 5 al 8 calcule la distancia entre los puntos.

5. $(-1, 2, 5), (3, -4, 6)$

6. $(2, -1, -8), (6, -3, 4)$

7. $(a, b, c), (1, -3, 2)$

8. $(x, y, z), (p, q, r)$

En los ejercicios del 9 al 12 determine el punto medio del segmento PQ.

9. $P(-1, 2, 5)$, $Q(3, -4, 6)$

10. $P(2, -1, -8)$, $Q(6, -3, 4)$

11. $P(2x, 2y, 2z)$, $Q(-2, 8, 6)$

12. $P(-a, -b, -c)$, $Q(3a, 3b, 3c)$

En los ejercicios del 13 al 16 escriba ecuaciones para las esferas cuyos puntos dados son sus centros y los números dados son sus radios.

13. $(5, -1, -2)$, 8

14. $(-1, 5, 8)$, $\sqrt{5}$

15. $(1, -3, 2)$, $\sqrt{a}$, $a > 0$

16. (p, q, r), 6

En los ejercicios del 17 al 22 esboce gráficas para las ecuaciones. Marque todas las intersecciones.

17. $x + y + 3z = 9$

18. $x + y - 2z = 8$

19. $x + z = 3$

20. $2y + z = 6$

21. $x - 3y = 6$

22. $x = 3$

En los ejercicios del 23 al 32 evalúe las expresiones utilizando $\mathbf{r} = \langle 1, 0, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 4, -5\rangle$, y $\mathbf{w} = \langle 4, -3, 12\rangle$.

23. $\mathbf{r} + \mathbf{v}$

24. $\mathbf{r} - \mathbf{w}$

25. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

26. $|\mathbf{w}|$

27. $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

28. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})$

29. $\mathbf{w}/|\mathbf{w}|$

30. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}$

31. $\langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}\rangle$

32. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

En los ejercicios 33 y 34 suponga que $\mathbf{i}$ apunta hacia el este, $\mathbf{j}$ apunta hacia el norte y $\mathbf{k}$ apunta hacia arriba.

33. Velocidad tridimensional Justo después de despegar, un aeroplano se dirige hacia el oeste y sube en un ángulo de 20° con respecto al piso, con una rapidez en el aire de 200 mph. Si el viento va en dirección noreste a 10 mph, calcule un vector $\mathbf{v}$ que represente la velocidad del aeroplano respecto al punto en el que despegó.

34. Velocidad tridimensional Justo después de su despegue, un cohete se dirige hacia el este y sube en un ángulo de 80° con respecto al piso, con una rapidez de 12,000 mph. Si el viento va en dirección suroeste a 8 mph, calcule un vector $\mathbf{v}$ que represente la velocidad del cohete respecto al punto en el que despegó.

En los ejercicios del 35 al 38 escriba las formas vectorial y paramétrica de la recta que pasa por el punto P_0 en la dirección de $\mathbf{v}$.

35. $P_0(2, -1, 5)$, $\mathbf{v} = \langle 3, 2, -7\rangle$

36. $P_0(-3, 8, -1)$, $\mathbf{v} = \langle -3, 5, 2\rangle$

37. $P_0(6, -9, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 1, 0, -4\rangle$

38. $P_0(0, -1, 4)$, $\mathbf{v} = \langle 0, 0, 1\rangle$

En los ejercicios de 39 al 48 utilice los puntos $A(-1, 2, 4)$, $B(0, 6, -3)$ y $C(2, -4, 1)$.

39. Determine la distancia de A al punto medio de BC.

40. Determine un vector que vaya de A al punto medio de BC.

41. Encuentre una ecuación vectorial de la recta que pasa por A y B.

42. Encuentre una ecuación vectorial de la recta que pasa por A y por el punto medio de BC.

43. Escriba las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por A y C.

44. Escriba las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por B y C.

45. Escriba las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por B y el punto medio de AC.

46. Escriba las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por C y el punto medio de AB.

47. ¿El ΔABC es equilátero, isósceles o escaleno?

48. Si M es el punto medio de BC, ¿cuál es el punto medio de AM?

En los ejercicios del 49 al 52 **a)** haga un esbozo de la recta definida por el par de ecuaciones y **b) Escriba para aprender** proporcione una descripción de la recta, que incluya su dirección y su posición con respecto al sistema coordenado.

49. $x = 0, y = 0$

50. $x = 0, z = 2$

51. $x = -3, y = 0$

52. $y = 1, z = 3$

53. Escriba una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos distintos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$.

54. Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos distintos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$.

55. Generalización de la fórmula de la distancia Pruebe que la distancia $d(P, Q)$ entre los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ en el espacio es $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ utilizando el punto $R(x_2, y_2, z_1)$, la fórmula de la distancia bidimensional en el plano $z = z_1$, la fórmula de la distancia unidimensional en la recta $\mathbf{r} = \langle x_2, y_2, t \rangle$, y el teorema de Pitágoras. [*Sugerencia:* un dibujo puede ayudarle a visualizar la situación].

56. Generalización de una propiedad del producto punto Pruebe que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$ en donde $\mathbf{u}$ es un vector en el espacio tridimensional.

Preguntas de examen estandarizado

57. Verdadero o falso $x^2 + 4y^2 = 1$ representa una superficie en el espacio. Justifique su respuesta.

58. Verdadero o falso La ecuación paramétrica $x = 1 + 0t$, $y = 2 - 0t$, $z = -5 + 0t$ representa una recta en el espacio. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 59 al 62 resuelva el problema sin utilizar calculadora.

59. Opción múltiple Una ecuación de primer grado de tres variables puede representarse con una gráfica de

A) Una recta

B) Un plano

C) Una esfera

D) Un paraboloide

E) Un elipsoide

60. Opción múltiple ¿Cuál de las siguientes **no** es una superficie cuadrática?

A) Un plano

B) Una esfera

C) Un elipsoide

D) Un paraboloide elíptico

E) Un paraboloide hiperbólico

61. Opción múltiple Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores y c es un escalar, ¿cuál de estas expresiones es **un escalar**?

A) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$

B) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$

C) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

D) $c\mathbf{v}$

E) $|\mathbf{v}|\mathbf{w}$

62. Opción múltiple La forma paramétrica de la recta $\mathbf{r} = \langle 2, -3, 0 \rangle + t \langle 1, 0, -1 \rangle$ es

A) $x = 2 - 3t, y = 0 + 1t, z = 0 - 1t$

B) $x = 2t, y = -3 + 0t, z = 0 - 1t$

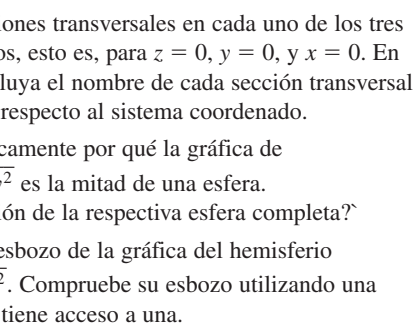
C) $x = 1 + 2t, y = 0 - 3t, z = -1 + 0t$

D) $x = 1 + 2t, y = -3, z = -1t$

E) $x = 2 + t, y = -3, z = -t$

Exploraciones

63. Actividad en equipo Escriba para aprender La figura muestra una gráfica del elipsoide $x^2/9 + y^2/4 + z^2/16 = 1$ dibujado en una *caja* utilizando el software *Matemática*.

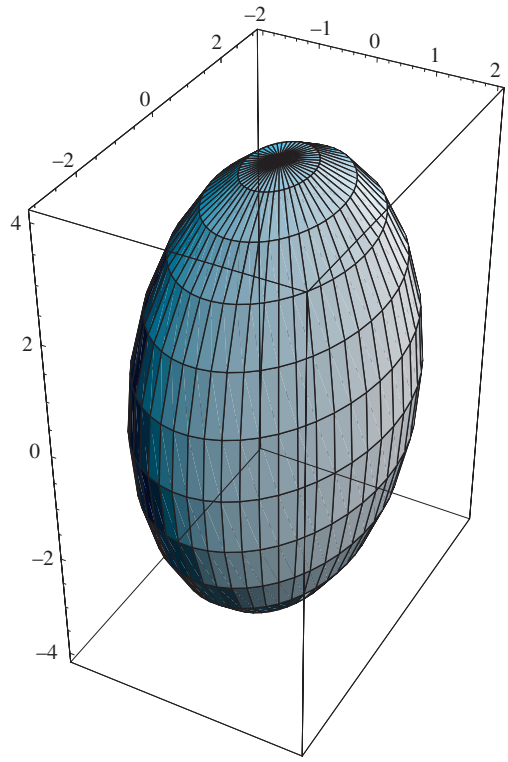


a) Describa sus secciones transversales en cada uno de los tres planos coordenados, esto es, para $z = 0$, $y = 0$, y $x = 0$. En su descripción incluya el nombre de cada sección transversal y su posición con respecto al sistema coordenado.

b) Explique algebraicamente por qué la gráfica de $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ es la mitad de una esfera. ¿Cuál es la ecuación de la respectiva esfera completa?

c) A mano, haga un esbozo de la gráfica del hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Compruebe su esbozo utilizando una graficadora 3D si tiene acceso a una.

d) Explique cómo la gráfica de un elipsoide está relacionada con la gráfica de una esfera y por qué una esfera es un elipsoide degenerado.



64. **Revisión del ejemplo 6** Lea el ejemplo 6. Después utilice $\mathbf{v} = 193.88\mathbf{i} + 22.63\mathbf{j} + 125\mathbf{k}$ para establecer lo siguiente:

a) La brújula del plano marcando la dirección 83.34°.

b) Su rapidez plana u horizontal (esto es, ignorando su componente vertical) es de 195.2 mph.

c) El aeroplano sube en un ángulo de 32.63°.

d) La rapidez global del aeroplano es de 231.8 mph.

Ampliación de las ideas

El **producto cruz** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de los vectores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ es

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Utilice esa definición en los ejercicios del 65 al 68.

65. $\langle 1, -2, 3\rangle \times \langle -2, 1, -1\rangle$

66. $\langle 4, -1, 2\rangle \times \langle 1, -3, 2\rangle$

67. Pruebe que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

68. Suponga que el teorema de los ángulos entre vectores (sección 6.2) es válido para los vectores tridimensionales; pruebe que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$, si no son cero.

Ideas Clave DEL CAPÍTULO 8

PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

Parábolas con vértice (h, k) 637
Elipses con centro (h, k) 647
Hipérbolas con centro (h, k) 659
Fórmulas de traslación de los ejes 668
Fórmulas de rotación de los ejes 669
Criterio del discriminante 671
Relación foco-directriz-excentricidad 675
Fórmula de la distancia (espacio cartesiano) 686
Fórmula del punto medio (espacio cartesiano) 687
Ecuación estándar de la esfera 687
Ecuación de un plano en el espacio cartesiano 689
Relaciones de vectores en el espacio 690
Ecuación de una recta en el espacio 692

PROCEDIMIENTOS

Cómo trazar la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 646
Cómo trazar una hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 657
Traslación de los ejes 667 – 668
Rotación de los ejes 669 – 671
Cómo dibujar objetos tridimensionales de forma que tengan un aspecto tridimensional 688

CAPÍTULO 8 Ejercicios de repaso

La colección de ejercicios marcados en azul podría utilizarse como un examen del capítulo.

En los ejercicios del 1 al 4 determine el vértice, el foco, la directriz y la anchura focal de la parábola y haga un esbozo de la gráfica.

1. $y^2 = 12x$

2. $x^2 = -8y$

3. $(x + 2)^2 = -4(y - 1)$

4. $(y + 2)^2 = 16x$

En los ejercicios del 5 al 12 identifique el tipo de cónica. Obtenga el centro, los vértices y los focos de la cónica y haga un esbozo de la gráfica.

5. $\dfrac{y^2}{8} + \dfrac{x^2}{5} = 1$

6. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{49} = 1$

7. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

8. $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

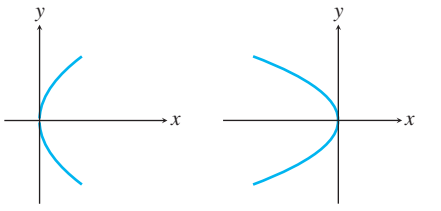
9. $\dfrac{(x + 3)^2}{18} - \dfrac{(y - 5)^2}{28} = 1$

10. $\dfrac{(y - 3)^2}{9} - \dfrac{(x - 7)^2}{12} = 1$

11. $\dfrac{(x - 2)^2}{16} + \dfrac{(y + 1)^2}{7} = 1$

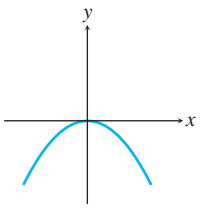
12. $\dfrac{y^2}{36} + \dfrac{(x + 6)^2}{20} = 1$

En los ejercicios del 13 al 20 relacione la ecuación con su gráfica.

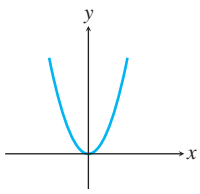


a)

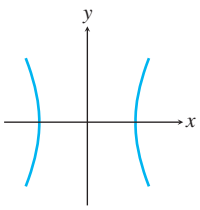
b)



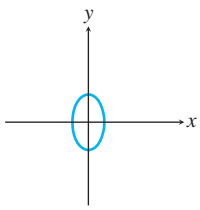
c)



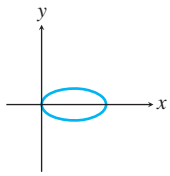
d)



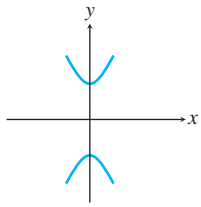
e)



f)



g)



h)

13. $y^2 = -3x$

14. $\dfrac{(x - 2)^2}{4} + y^2 = 1$

15. $\dfrac{y^2}{5} - x^2 = 1$

16. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

17. $\dfrac{y^2}{3} + x^2 = 1$

18. $x^2 = y$

19. $x^2 = -4y$

20. $y^2 = 6x$

En los ejercicios del 21 al 28 identifique la cónica. Después complete el cuadrado para expresar la cónica en la forma estándar y haga un esbozo de la gráfica.

21. $x^2 - 6x - y - 3 = 0$

22. $x^2 + 4x + 3y^2 - 5 = 0$

23. $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$

24. $x^2 + 2x + 4y - 7 = 0$

25. $y^2 - 6x - 4y - 13 = 0$

26. $3x^2 - 6x - 4y - 9 = 0$

27. $2x^2 - 3y^2 - 12x - 24y + 60 = 0$

28. $12x^2 - 4y^2 - 72x - 16y + 44 = 0$

29. Pruebe que la parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$ tiene la ecuación $x^2 = 4py$.

30. Pruebe que la ecuación $y^2 = 4px$ representa una parábola con foco $(p, 0)$ y directriz $x = -p$.

En los ejercicios del 31 al 36 identifique la cónica. Resuelva la ecuación para y y grafíquela.

31. $3x^2 - 8xy + 6y^2 - 5x - 5y + 20 = 0$

32. $10x^2 - 8xy + 6y^2 + 8x - 5y - 30 = 0$

33. $3x^2 - 2xy - 5x + 6y - 10 = 0$

34. $5xy - 6y^2 + 10x - 17y + 20 = 0$

35. $-3x^2 + 7xy - 2y^2 - x + 20y - 15 = 0$

36. $-3x^2 + 7xy - 2y^2 - 2x + 3y - 10 = 0$

En los ejercicios del 37 al 48 obtenga la ecuación de la cónica en la forma estándar.

37. Parábola: vértice $(0, 0)$, foco $(2, 0)$

38. Parábola: vértice $(0, 0)$, abre hacia abajo, anchura focal $= 12$

39. Parábola: vértice $(-3, 3)$, directriz $y = 0$

40. Parábola: vértice $(1, -2)$, abre hacia la izquierda, longitud focal $= 2$

41. Elipse: centro $(0, 0)$, focos $(\pm 12, 0)$, vértices $(\pm 13, 0)$

42. Elipse: centro $(0, 0)$, focos $(0, \pm 2)$, vértices $(0, \pm 6)$

43. Elipse: centro $(0, 2)$, semieje mayor $= 3$, uno de los focos es $(2, 2)$.

44. Elipse: centro $(-3, -4)$, semieje mayor $= 4$, uno de los focos es $(0, -4)$.

45. Hipérbola: centro $(0, 0)$, focos $(0, \pm 6)$, vértices $(0, \pm 5)$.

46. Hipérbola: centro $(0, 0)$, vértices $(\pm 2, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$.

47. Hipérbola: centro $(2, 1)$, vértices $(2 \pm 3, 1)$, una asíntota es $y = (4/3)(x - 2) + 1$.

48. Hipérbola: centro $(-5, 0)$, un foco es $(-5, 3)$, un vértice es $(-5, 2)$.

En los ejercicios del 49 al 54 determine la ecuación de la cónica en su forma estándar.

49. $x = 5 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$

50. $x = 4 \operatorname{sen} t$, $y = 6 \cos t$, $0 \le t \le 4\pi$

51. $x = -2 + \cos t$, $y = 4 + \operatorname{sen} t$, $2\pi \le t \le 4\pi$

52. $x = 5 + 3 \cos t$, $y = -3 + 3 \operatorname{sen} t$, $-2\pi \le t \le 0$

53. $x = 3 \sec t$, $y = 5 \tan t$, $0 \le t \le 2\pi$

54. $x = 4 \sec t$, $y = 3 \tan t$, $0 \le t \le 2\pi$

En los ejercicios del 55 al 62 identifique y grafique la cónica, y vuelva a expresar la ecuación en coordenadas cartesianas.

55. $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$

56. $r = \dfrac{5}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

57. $r = \dfrac{4}{3 - \cos\theta}$

58. $r = \dfrac{3}{4 + \operatorname{sen}\theta}$

59. $r = \dfrac{35}{2 - 7 \operatorname{sen}\theta}$

60. $r = \dfrac{15}{2 + 5 \cos\theta}$

61. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$

62. $r = \dfrac{4}{4 - 4 \cos\theta}$

En los ejercicios del 63 al 74 utilice los puntos $P(-1, 0, 3)$ y $Q(3, -2, -4)$ y los vectores $\mathbf{v} = \langle -3, 1, -2 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 3, -4, 0 \rangle$.

63. Calcule la distancia de P a Q.

64. Determine el punto medio del segmento PQ.

65. Calcule $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

66. Calcule $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

67. Calcule $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

68. Calcule la magnitud de $\mathbf{v}$.

69. Escriba el vector unitario en la dirección de $\mathbf{w}$.

70. Calcule $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

71. Escriba una ecuación para la esfera con centro en P y con radio 4.

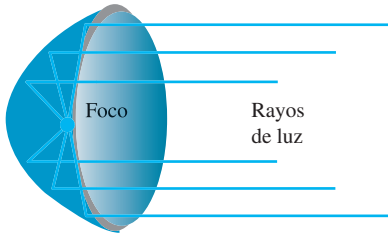
72. Escriba ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y Q.

73. Escriba una ecuación vectorial de la recta que pasa por P en la dirección de $\mathbf{v}$.

74. Escriba ecuaciones paramétricas de la recta en la dirección de $\mathbf{w}$ que pasa por el punto medio de PQ.

75. Micrófonos parabólicos B-Ball Network utiliza un micrófono parabólico para captar todos los sonidos de los jugadores de básquetbol y los entrenadores durante cada juego de la temporada regular. Si uno de sus micrófonos tiene una superficie parabólica generada por la parábola $18y = x^2$, localice el foco (el receptor electrónico) de la parábola.

76. Faros parabólicos Specific Electric elabora faros parabólicos para varios automóviles. Si uno de sus faros tiene una superficie parabólica generada por la parábola $y^2 = 15x$ (consulte la figura), ¿dónde debe estar colocado el foco?



77. Escriba para aprender Mesa elíptica de billar Se construyen mesas elípticas de billar y se les ponen marcas que señalan los focos. Suponga que una de esas mesas tiene un eje mayor de 6 pies y un eje menor de 4 pies.

a) Explique la estrategia que un "as del billar", con conocimientos de geometría cónica, usaría para darle un golpe a una bola que está en una de esas marcas.

b) Si a la superficie de la mesa se le ha colocado un sistema coordenado, de tal manera que $(0, 0)$ representa el centro de la mesa y el eje x está a lo largo del eje focal de la elipse, ¿hacia qué punto(s) debe apuntar la bola?

78. Satélite climático El satélite climático Nimbus viaja en una órbita circular norte-sur, 500 metros sobre la Tierra. Determine lo siguiente (suponga que el radio de la Tierra es de 6,380 km).

a) La velocidad del satélite utilizando la fórmula de la velocidad v dada en los ejercicios 43 y 44 de la sección 8.5 con $k = 1$.

b) El tiempo que Nimbus requiere para darle una vuelta a la Tierra.

79. Órbitas elípticas La velocidad de un cuerpo en una órbita terrestre elíptica a una distancia r (en metros) desde el foco (el centro de la Tierra) es:

$$v = \sqrt{3.99 \times 10^{14}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}\ \text{m/seg},$$

donde a es el semieje mayor de la elipse. Un satélite de la Tierra tiene una altitud máxima (en el *apogeo*) de 18,000 km y una altitud mínima (en el *perigeo*) de 170 km. Suponga que el radio de la Tierra es de 6,380 km, y determine la velocidad, el apogeo y el perigeo del satélite.

80. Ícaro El asteroide Ícaro mide aproximadamente 1 milla de ancho. Gira alrededor del Sol una vez cada 409 días terrestres y tiene una excentricidad orbital de 0.83. Utilice la primera y la tercera ley de Kepler para determinar el semieje mayor, el perihelio y el afelio de Ícaro.

CAPÍTULO 8 Proyecto

Elipses como modelos del movimiento de un péndulo

Conforme un péndulo simple oscila en un movimiento de vaivén, el diagrama de su velocidad contra su posición es de naturaleza elíptica y puede modelarse utilizando la forma estándar de la ecuación de la elipse,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,$$

donde x representa la posición del péndulo con respecto a punto fijo y y representa la velocidad del péndulo. En este proyecto, usted deberá emplear un detector de movimiento para recopilar los datos de la posición (distancia) y el tiempo del péndulo oscilante, para entonces obtener un modelo matemático que describa la velocidad del péndulo con respecto a su posición.

RECOLECCIÓN DE DATOS

Construya un péndulo simple sujetando una bola con una cuerda de 0.5 metros. Configure la CBR (calculadora de campo) para recolectar las distancias y las velocidades que hay en un intervalo de 4 segundos (suficiente tiempo para registrar al menos una oscilación completa del péndulo). Vea el instructivo de la CBR para conocer las especificaciones en la selección de los comandos. Inicie el movimiento del péndulo de modo que oscile hacia y contra el detector, y active el sistema. Los datos de la tabla siguiente son un conjunto muestra de los datos recopilados con el procedimiento que se acaba de describir.

EXPLORACIONES

1. Si recopila datos del movimiento utilizando una CBR, podrá apreciar en la pantalla de su graficadora un diagrama de la distancia contra el tiempo. Cree un diagrama de dispersión de la velocidad contra la distancia. Si no tiene acceso a una CBR, utilice los datos de la distancia y la velocidad de tabla para elaborar un diagrama de dispersión.

2. Determine los valores de a, b, h y k, tales que la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

se ajuste a la gráfica de la velocidad contra la posición. Para graficar este modelo tendrá que resolver la ecuación apropiada para y e ingresarla a su calculadora en Y1 y Y2.

3. Con respecto a la elipse que se modeló, ¿qué representan las variables a, b, h y k?

4. ¿Cuál es el significado físico de a, b, h y k con respecto al movimiento del péndulo?

5. Haga diagramas de la distancia contra el tiempo y de la velocidad contra el tiempo. Encuentre modelos para ambos casos y utilícelos para hacer el diagrama de la elipse utilizando ecuaciones paramétricas.

Tiempo total transcurrido (s)	Distancia a la CBR (m)	Velocidad (m/s)	Tiempo total transcurrido (s)	Distancia a la CBR (m)	Velocidad (m/s)
0	0.682	−0.3	0.647	0.454	0.279
0.059	0.659	−0.445	0.706	0.476	0.429
0.118	0.629	−0.555	0.765	0.505	0.544
0.176	0.594	−0.621	0.824	0.54	0.616
0.235	0.557	−0.638	0.882	0.576	0.639
0.294	0.521	−0.605	0.941	0.612	0.612
0.353	0.489	−0.523	1	0.645	0.536
0.412	0.463	−0.4	1.059	0.672	0.418
0.471	0.446	−0.246	1.118	0.69	0.266
0.529	0.438	−0.071	1.176	0.699	0.094
0.588	0.442	0.106	1.235	0.698	−0.086

CAPÍTULO 9

Matemáticas discretas

9.1 Combinatoria básica

9.2 El teorema del binomio

9.3 Probabilidad

9.4 Sucesiones

9.5 Series

9.6 Inducción matemática

9.7 Estadística y datos (enfoque gráfico)

9.8 Estadística y datos (enfoque algebraico)



Así como el uso de los teléfonos celulares, los módems, los bípers y los faxes ha crecido en años recientes, el incremento en la demanda de números telefónicos únicos ha requerido la creación de códigos de área en muchas regiones de Estados Unidos. El conteo de los posibles números telefónicos de un código de área dado es un problema *combinatorio*, y tales problemas se resuelven utilizando las técnicas de matemáticas *discretas*. Consulte la página 707 para obtener más información del tema de los códigos de área de teléfonos.

Panorama general del capítulo 9

Las ramas de las matemáticas ampliamente conocidas —como el álgebra, el análisis y la geometría— se unen tan armoniosamente en el cálculo que durante muchos años ha sido difícil introducir al mapa curricular otras materias. Consecuentemente, muchos temas que valen la pena —la probabilidad y la estadística, la combinatoria, la teoría de gráficas y el análisis numérico, por ejemplo— y que podrían estudiarse fácilmente en el nivel medio superior, en muchos casos se ven por primera vez en la universidad (o nunca). Esta situación está cambiando gradualmente a medida que se ha incrementado la importancia de las aplicaciones de las matemáticas distintas del cálculo en el manejo computarizado y moderno de los datos en el trabajo. Por ello, además de presentar temas importantes como las sucesiones, las series y el teorema del binomio, este capítulo tratará algunos temas de las matemáticas discretas que podrían serle útiles en el futuro cercano.

9.1 Combinatoria básica

Aprenderá acerca de...

- Lo Discreto en comparación con lo continuo
- La importancia del conteo
- El principio de multiplicación del conteo
- Las permutaciones
- Las combinaciones
- Los subconjuntos de un conjunto de n elementos

. . . porque

El conteo de grandes conjuntos es fácil si se conoce la fórmula correcta.

Discreto en comparación con lo continuo

Un punto no tiene longitud ni anchura; sin embargo, los intervalos en la línea real —que están compuestos por esos puntos sin dimensiones— ¡sí tienen longitud! Este pequeño misterio ilustra la diferencia entre las matemáticas *continuas* y las *discretas*. Cualquier intervalo (a, b) contiene un **continuo** de números reales, por eso podría hacerse un acercamiento tras otro y en ese intervalo seguiría existiendo un intervalo. Los conceptos del cálculo como límites y continuidad dependen de las matemáticas del continuo. En las matemáticas *discretas*, nos interesan las propiedades de los números y los sistemas algebraicos que no dependen de ese tipo de análisis. Muchas de esas propiedades están relacionadas con el primer tipo de matemáticas que muchos de nosotros alguna vez hemos empleado, el llamado conteo, al que dedicaremos el resto de esta sección.

La importancia del conteo

Comenzaremos con un problema de conteo relativamente sencillo.

EJEMPLO 1 Arreglo en orden de tres objetos

¿De cuántas maneras diferentes puede acomodar en orden tres objetos distintos?

SOLUCIÓN No es difícil hacer la lista de todas las posibilidades. Si denominamos A, B y C a los objetos, las ordenaciones posibles son ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA. Una buena forma de visualizar las seis ordenaciones es con un *diagrama de árbol*, como el de la figura 9.1. Observe que tenemos tres opciones para la primera letra. Si extendemos una rama de cada una de esas tres opciones surgen dos opciones para la segunda letra. Por último, si se extiende una rama de cada una de las $3 \times 2 = 6$ ramas formadas hasta ese momento, queda sólo una opción para la tercera letra. A partir del inicio de la "raíz" del árbol, se puede proceder a la derecha a lo largo de cualquiera de las $3 \times 2 \times 1 = 6$ ramas y obtener una ordenación distinta cada vez. Concluimos que hay seis maneras de acomodar los tres objetos distinguibles en orden. ***Ahora resuelva el ejercicio 3.***

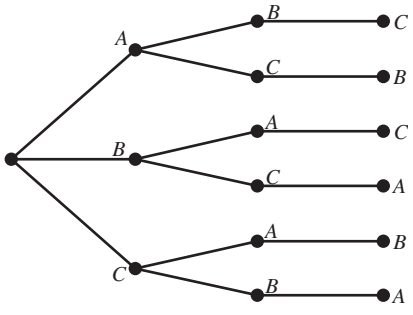


FIGURA 9.1 Un diagrama de árbol para ordenar las letras ABC (ejemplo 1).

Generalmente, en los estudios científicos se manipulan una o más variables **explicativas** y se observa el efecto de esa manipulación en una o más variables de **respuesta**. La clave para entender el significado del efecto es conocer lo que probablemente ocurra por *pura casualidad* y, con frecuencia, eso depende del conteo. Por ejemplo, la exploración 1 muestra una aplicación del mundo real del ejemplo 1.

EXPLORACIÓN 1 **Reclamación dudosa de productos**

Un vendedor de una compañía de máquinas fotocopiadoras está tratando de convencer a un cliente para que compre su máquina que cuesta $2,000, en lugar de la máquina de su competidor, que cuesta $5,000. Para ello, pone en una mesa un documento original, una copia hecha en su máquina y una copia hecha en la máquina más cara y le pide a 60 oficinistas que identifiquen cuál es cuál. Para sorpresa de todos, ninguno de ellos identifica correctamente las copias. El vendedor asevera triunfalmente que eso prueba que todos los documentos lucen igual a simple vista y, por ello, el cliente debería comprar la máquina más barata, que él vende. ¿Usted qué piensa?

1. En esencia, a cada trabajador se le pide que coloque los tres documentos en orden correcto. ¿De cuántas formas pueden ordenarse los tres documentos?
2. Suponga que los tres documentos realmente *son* parecidos. ¿Qué fracción de los oficinistas esperaría que los pusiera en orden si nada más tuviera una sola oportunidad?
3. Si ninguna de las 60 personas pusiera los documentos en orden correcto, ¿debería de concluir que "los tres documentos lucen igual a simple vista"?
4. ¿Puede sugerir una conclusión más probable a la que se podría llegar con el experimento del vendedor?

El principio de multiplicación del conteo

No sería práctico elaborar un diagrama de árbol para ordenar cinco objetos (*ABCDE*); sin embargo, debe ser capaz de visualizar en su mente que habría $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ramas. Un diagrama de árbol es una visualización geométrica de un principio fundamental de conteo conocido como el *principio de multiplicación*.

Principio de multiplicación del conteo

Si un procedimiento P tiene una sucesión de etapas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ y si

S_1 puede presentarse de r_1 formas,

S_2 puede presentarse de r_2 formas,

$\vdots$

S_n puede presentarse de r_n formas,

entonces el número de formas en que puede presentarse el procedimiento P es el producto

$$r_1 r_2 \cdots r_n.$$

Es importante considerar cuidadosamente la forma en que las elecciones de cada etapa son afectadas por las precedentes. Por ejemplo, cuando se elige una ordenación de las letras *ABC* se tienen tres opciones para la primera letra, pero solamente dos para la segunda y una para la tercera.



EJEMPLO 2 Utilización del principio de multiplicación

Las placas de los automóviles de Tennessee, como la que se muestra, consisten en tres letras seguidas por tres dígitos (del 0 al 9). Obtenga el número de distintas placas que pueden formarse

a) si no hay restricciones en las letras o dígitos que puedan utilizarse;

b) si no se pueden repetir las letras ni los dígitos.

SOLUCIÓN Considere que cada placa tiene seis espacios que deben llenarse: tres letras seguidas de tres dígitos.

a) Si no hay restricciones para las letras ni los dígitos, entonces hay 26 opciones para el primer espacio, 26 para el segundo, 26 para el tercero, 10 para el cuarto, 10 para el quinto y 10 para el sexto. Por el principio de multiplicación, se pueden llenar los seis espacios en $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 17{,}576{,}000$ formas. Hay 17,576,000 posibles placas sin restricciones de letras ni dígitos.

b) Si no se pueden repetir las letras ni los dígitos, entonces podemos llenar en 26 formas el primer espacio, en 25 el segundo, en 24 el tercero, en 10 el cuarto, en 9 el quinto y en 8 el sexto. Por el principio de multiplicación, se pueden llenar los seis espacios de $26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 = 11{,}232{,}000$ formas. Hay 11, 232,000 posibles placas sin repetir letras ni dígitos.

Ahora resuelva el ejercicio 5.

RESTRICCIONES DE LAS PLACAS

Aunque la prohibición de repetir las letras y los dígitos, como en el ejemplo 2, no tendría sentido práctico (¿para qué descartar, sin una buena razón, más de 6 millones de placas posibles?) en algunas ciudades de Estados Unidos se imponen ciertas restricciones en las placas de los automóviles. En esos casos se descartan progresiones de letras que pudieran considerarse obscenas u ofensivas.

Permutaciones

Una aplicación importante del principio de multiplicación del conteo es contar el número de formas en que un conjunto de n objetos (denominado un n conjunto) puede acomodarse en orden. A cada una de esas formas se le llama **permutación** del conjunto. El ejemplo 1 mostró que hay $3! = 6$ permutaciones de un conjunto de 3 objetos. De hecho, si usted comprendió el diagrama de árbol, probablemente adivine cuántas permutaciones hay en un conjunto de n objetos.

FACTORIALES

Si n es un entero positivo, el símbolo $n!$ (se lee "n factorial") representa el producto $n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2 \cdot 1$. También definimos $0! = 1$.

Permutaciones de un conjunto de n elementos

Hay $n!$ permutaciones en un conjunto de n elementos.

Generalmente, los elementos de un conjunto son distinguibles entre ellos, pero el conteo puede cambiar cuando no lo son, como se ve en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Permutaciones distinguibles

Cuente el número de "palabras" de 9 letras (no se preocupe si están o no en el diccionario) que pueden formarse utilizando las letras de cada palabra.

a) DRAGONFLY **b)** BUTTERFLY **c)** BUMBLEBEE

continúa

SOLUCIÓN

a) Cada permutación de las 9 letras forman una palabra diferente. Hay $9! = 362{,}880$ permutaciones.

b) Hay también 9! permutaciones de esas letras, pero la simple permutación de dos T no produce una nueva palabra. Se corrige ese conteo excesivo dividiendo entre 2!. Hay $\frac{9!}{2!} = 181{,}440$ permutaciones *distinguibles* de la letras de BUTTERFLY.

c) Nuevamente hay 9! permutaciones, pero las tres B son indistinguibles, así como las tres E, entonces, se divide entre 3! dos veces para corregir ese exceso. Hay $\frac{9!}{3!3!} = 10{,}080$ permutaciones distinguibles de las letras de BUMBLEBEE.

Ahora resuelva el ejercicio 9.

Permutaciones distinguibles

Hay $n!$ permutaciones distinguibles de un conjunto de n objetos distinguibles.

Si un conjunto de n elementos contiene n_1 objetos de un primer tipo, n_2 objetos de un segundo tipo y así sucesivamente, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, entonces el número de permutaciones distinguibles de un conjunto de n objetos es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3! \cdots n_k!}.$$

En muchos problemas de conteo, estamos interesados en utilizar n objetos para llenar r espacios en orden donde $r < n$. A eso se le llama **permutaciones de n objetos tomados de r en r**. El procedimiento para contarlos es el mismo, solamente que en este caso primero se llenan los espacios en blanco antes de agotarse los objetos.

El primer espacio en blanco se puede llenar de n formas, el segundo de $n - 1$ formas y así sucesivamente hasta llegar al espacio r-ésimo, que puede llenarse de $n - (r - 1)$ formas. Por el principio de multiplicación, se pueden llenar los r espacios en blanco de $n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1)$ formas. Esta expresión puede escribirse en una forma más compacta (pero menos fácil de calcular) $n!/(n - r)!$

PERMUTACIONES CON UNA CALCULADORA

Muchas calculadoras tienen integrada la función ${}_nP_r$. También pueden calcular los factoriales, pero recuerde que éstos podrían ser muy grandes. Si usted quisiera contar el número de permutaciones de 90 objetos tomados de 5 en 5, asegúrese de utilizar la función ${}_nP_r$. Tal vez la calculadora marcaría como un error la expresión 90!/85!

Fórmula de conteo de permutaciones

El número de permutaciones de n objetos tomados de r en r se expresa como ${}_nP_r$ y su fórmula es

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n - r)!} \quad \text{para } 0 \leq r \leq n.$$

Si $r > n$, entonces ${}_nP_r = 0$.

Note que ${}_nP_n = n!/(n - n)! = n!/0! = n!/1 = n!$, lo cual ya hemos visto que es el número de permutaciones de un conjunto completo de n objetos. Esto es así porque se define $0! = 1$.

EJEMPLO 4 Conteo de permutaciones

Sin utilizar una calculadora, evalúe cada expresión.

a) ${}_6P_4$ **b)** ${}_{11}P_3$ **c)** ${}_nP_3$

SOLUCIÓN

a) Utilizando la fórmula, ${}_6P_4 = 6!/(6 - 4)! = 6!/2! = (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!)/2! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

b) Aunque en este caso también podría utilizar la fórmula, tal vez prefiera aplicar el principio de multiplicación directamente. Se tienen 11 objetos y 3 espacios en blanco:

$$ {}_{11}P_3 = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990. $$

c) En este caso definitivamente es más fácil utilizar el principio de multiplicación. Se tienen n objetos y 3 espacios en blanco; se supone que $n \geq 3$,

$$ {}_nP_3 = n(n-1)(n-2). $$

Ahora resuelva el ejercicio 15.

EJEMPLO 5 Aplicación de las permutaciones

Dieciséis actores acuden a una prueba de reparto para los papeles de enanos en la producción de *Blanca Nieves y los siete enanos*. ¿De cuántas maneras distintas el director puede hacer la prueba para los siete papeles?

SOLUCIÓN Los siete papeles distintos puede considerarse como siete espacios en blanco y se tienen 16 actores con qué llenarlos. El director puede hacer la prueba de los papeles en ${}_{16}P_7 = 57{,}657{,}600$ formas.

Ahora resuelva el ejercicio 12.

Combinaciones

Cuando contamos las permutaciones de n objetos tomados de r en r, consideramos diferentes ordenaciones de los mismos r objetos seleccionados como permutaciones distintas. En muchas aplicaciones solamente estaríamos interesados en la forma en que se *seleccionan* los r objetos, sin importar el orden en el cual quedan acomodados. A esa selección sin orden se le llama **combinación de n objetos tomados de r en r**.

Fórmula de conteo de las combinaciones

El número de combinaciones de n objetos tomados de r a la vez se expresa como ${}_nC_r$ y su fórmula es

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{para} \quad 0 \leq r \leq n. $$

Si $r > n$, entonces ${}_nC_r = 0$.

Se puede verificar la fórmula ${}_nC_r$ con el principio de multiplicación. Debido a que puede considerarse que cada permutación es una selección *sin orden* de r objetos *seguida* por una *ordenación* particular de los objetos seleccionados, el principio de multiplicación da ${}_nP_r = {}_nC_r \cdot r!$.

Por eso

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{1}{r!} \cdot \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. $$

COMENTARIO ACERCA DE LA NOTACIÓN

Algunos libros de texto utilizan la expresión $P(n, r)$ el lugar de ${}_nP_r$ y $C(n, r)$ el lugar de ${}_nC_r$. Es mucho más común la expresión $\binom{n}{r}$ para ${}_nC_r$. Ambos, $\binom{n}{r}$ y ${}_nC_r$, a menudo se leen "r en n".

COMBINACIONES CON LA CALCULADORA

Muchas calculadoras tienen integrada la función ${}_nC_r$. Como en el caso de las permutaciones, es mejor utilizar la función ${}_nC_r$ que la fórmula $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, debido a que los factoriales individuales podrían ser demasiado grandes para la calculadora.

EJEMPLO 6 Distinción entre combinaciones y permutaciones

En cada uno de los siguientes escenarios, indique si se describen permutaciones (ordenadas) o combinaciones (sin orden).

a) Se eligen un presidente, un vicepresidente y un secretario de un club de 25 miembros.

b) Un cocinero elige 5 papas de un saco de 12 papas para hacer una ensalada.

c) Un profesor hace un esquema de los pupitres que utilizan 22 alumnos en un salón que tiene 30 pupitres.

SOLUCIONES

a) Permutaciones. El orden sí importa porque interesa quien tiene cada puesto.

b) Combinaciones. La ensalada es la misma sin importar en qué orden se elijan las papas.

c) Permutaciones. Un orden diferente de estudiantes en el mismo asiento genera un esquema distinto.

Observe que una vez que usted sabe qué es lo que se quiere contar, obtener el número correcto es fácil con la calculadora. El número de opciones posibles en los escenarios anteriormente señalados son a) ${}_{25}P_3 = 13{,}800$, b) ${}_{12}C_5 = 792$ y c) ${}_{30}P_{22} \approx 6.5787 \times 10^{27}$.

Ahora resuelva el ejercicio 19.

EJEMPLO 7 Conteo de combinaciones

En el desfile Miss Estados Unidos, 51 concursantes deben reducirse a 10 finalistas, quienes competirán en televisión nacional. ¿De cuántas maneras posibles pueden seleccionarse a las 10 finalistas?

SOLUCIÓN Note que el *orden* de las finalistas no importa en esta fase; todo lo que importa es cuáles concursantes son seleccionadas. Entonces se cuentan las combinaciones en lugar de las permutaciones.

$$ {}_{51}C_{10} = \frac{51!}{10!\,41!} = 12{,}777{,}711{,}870. $$

Las 10 finalistas pueden elegirse de 12,777,711,870 formas.

Ahora resuelva el ejercicio 27.

EJEMPLO 8 Selección de los números de la lotería

La lotería de Georgia se gana con 6 números enteros elegidos entre 1 y 46. El orden en el que se hace la selección no importa; en realidad, los boletos de la lotería siempre se imprimen con los números en orden ascendente. ¿Cuántos diferentes boletos de lotería puede haber?

SOLUCIÓN Hay ${}_{46}C_6 = 9{,}366{,}829$ posibles boletos de lotería de este tipo. (¡Lo cuál es más que suficiente para todas las personas en el estado de Georgia!)

Ahora resuelva el ejercicio 29.

Subconjuntos de un conjunto con *n* elementos

Como una aplicación final del problema del conteo, considere el problema de los ingredientes de una pizza.



EJEMPLO 9 Selección de los ingredientes de una pizza

La pizzería Armando ofrece a sus clientes combinaciones de hasta 10 ingredientes: pepperoni, champiñones, salchichas, cebolla, pimiento verde, tocino, *prosciutto*, aceitunas negra, aceitunas verde y anchoas. ¿Cuántas pizzas diferentes pueden ordenarse

a) si se eligen tres ingredientes?

b) si es posible elegir cualquier número de ingredientes (0 al 10)?

SOLUCIÓN

a) El orden no importa (por ejemplo la pizza de salchicha, pepperoni y champiñones es la misma que la pizza de pepperoni, champiñones y salchicha), entonces el número de pizzas posibles es ${}_{10}C_3 = 120$.

b) Se pueden obtener todas las combinaciones de la forma ${}_{10}C_r =$ para $r = 0, 1, \ldots, 10$ pero hay una forma más fácil de contar todas la posibilidades. Considere las 10 opciones del problema. En cada caso hay dos opciones: sí o no (por ejemplo, la pizza de pepperoni, champiñones, salchichas correspondería a la sucesión SSSNNNNNNN). Por el principio de multiplicación, el número de esas sucesiones es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1{,}024$, el cuál es el número de pizzas posibles.

Ahora resuelva el ejercicio 37.

La solución del ejemplo 9b sugiere una regla general que será la última fórmula de esta sección.

Fórmula de conteo de un subconjunto de un conjunto con *n* elementos

Hay 2^n subconjuntos de un conjunto con n elementos (incluyendo el conjunto vacío y el conjunto completo).

EJEMPLO 10 Análisis de la publicidad

Una cadena nacional de hamburguesas promueve que puede preparar hamburguesas de "256 formas", ya que los clientes podrían ordenar cualquier ingrediente que quisieran. ¿Cuántos ingredientes debe haber disponibles?

continúa

SOLUCIÓN Necesitamos resolver la ecuación $2^n = 256$ para n. Se podría resolver esto fácilmente mediante prueba y error, pero lo resolveremos utilizando logaritmos para mantener fresco el método en nuestras mentes.

$$2^n = 256$$
$$\log 2^n = \log 256$$
$$n \log 2 = \log 256$$
$$n = \frac{\log 256}{\log 2}$$
$$n = 8.$$

Debe haber 8 ingredientes para elegir.

Ahora resuelva el ejercicio 39.

¿POR QUÉ NO HAY 1,000 POSIBLES CÓDIGOS DE ÁREA?

Aunque existen 1,000 números de tres dígitos entre 000 y 999, no todos ellos pueden utilizarse como códigos de área. Por ejemplo, los códigos de área no pueden empezar con 0 ni con 1, y los números de la forma *abb* se han reservado para otros propósitos.



PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO (de la página 699)

PROBLEMA: Hay 680 números de tres dígitos que están disponibles para utilizarse como códigos de área en Norteamérica. En abril de 2002, 305 de ellos ya se estaban utilizando (*fuente: www.nanpa.com*). ¿Cuántos códigos de área de tres dígitos están disponibles? Dado un código de área, ¿cuántos números telefónicos únicos son teóricamente posibles?

SOLUCIÓN: Hay $680 - 305 = 375$ códigos de área adicionales disponibles. Dado un código de área, cada número telefónico tiene siete dígitos elegidos de los diez dígitos del 0 al 9. Debido a que cada dígito puede ser teóricamente cualquiera de los 10 números, hay

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7 = 10{,}000{,}000$$

de diferentes números telefónicos posibles dado un código de área.

Juntando esos dos resultados se puede concluir que los códigos de área que no se usaban en abril de 2002 representaban ¡3.75 mil millones de números telefónicos adicionales posibles!

REPASO RÁPIDO 9.1

En los ejercicios del 1 al 10 proporcione el número de objetos descritos. En algunos casos tal vez tenga que hacer una pequeña investigación o preguntarle a un amigo.

1. El número de cartas de una baraja estándar.
2. El número de cartas de cada palo de una baraja estándar.
3. El número de lados de un dado.
4. El número de posibles totales cuando se tiran dos dados.
5. El número de vértices de un decágono.
6. El número de músicos de un cuarteto de cuerdas.
7. El número de jugadores de un equipo de fútbol soccer.
8. El número de números primos entre 1 y 10, inclusive.
9. El número de cuadrados de un tablero de ajedrez.
10. El número de cartas en una mano de *bridge*.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.1

En los ejercicios del 1 al 4 cuente el número de formas en que puede hacerse cada procedimiento.

1. Alinear a tres personas para una fotografía.
2. Priorizar cuatro trabajos pendientes desde el más importante hasta el menos importante.
3. Acomodar cinco libros de izquierda a derecha en un librero.
4. Acomodar cinco medallas del 1° al 5° lugar para los cinco mejores perros en un concurso de perros.
5. **El rey y la reina** Hay cuatro candidatas para ser reina y tres para ser rey. ¿Cuántos pares de rey-reina son posibles?
6. **Rutas posibles** Hay tres caminos de la ciudad A a la ciudad B y cuatro caminos de la ciudad B a la ciudad C. ¿Cuántas diferentes rutas hay de a A a C pasando por B?
7. **Permutación de letras** ¿Cuántas "palabras" de 9 letras (no es necesario que estén en el diccionario) pueden formarse con las letras de la palabra LOGARITHM? (Curiosamente, una de esas "palabras" está relacionada con las matemáticas. ¿Puede nombrarla?)
8. **Palabras de un crucigrama de tres letras** Excluyendo J, Q, X y Z, ¿cuántas palabras de crucigramas de tres letras pueden formarse que no contengan letras repetidas? (Se ha conjeturado que todas ellas aparecen en los crucigramas a través de los años, algunas veces con definiciones artificiales).
9. **Permutación de letras** ¿Cuántas "palabras" distinguibles de 11 letras pueden formarse utilizando las letras de MISSISSIPPI?
10. **Permutación de letras** ¿Cuántas "palabras" distinguibles de 11 letras pueden formarse utilizando las letras de CHATTANOOGA?
11. **Elección de representantes** Los 13 miembros del club East Brainerd están eligiendo al presidente, al vicepresidente y al secretario de entre sus trece miembros. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerse esto?
12. **Gobierno de la ciudad** De entre doce proyectos que están bajo consideración, el alcalde debe priorizar (esto es, ordenar) en listas de seis proyectos para enviarlos al ayuntamiento con el fin de solicitar fondos. ¿Cuántas de esas listas pueden formarse?

En los ejercicios del 13 al 18 primero evalúe cada expresión sin calculadora. Después verifique con la calculadora que los resultados a los que llegó sean correctos.

13. $4!$
14. $(3!)(0!)$
15. ${}_6P_2$
16. ${}_9P_2$
17. ${}_{10}C_7$
18. ${}_{10}C_3$

En los ejercicios del 19 al 22 indique si se están describiendo permutaciones (ordenadas) o combinaciones (sin orden).

19. Se seleccionan 13 cartas de una baraja de 52 para formar una mano de bridge.
20. Se seleccionan siete dígitos (sin repetición) para formar un número telefónico.
21. Se seleccionan cuatro estudiantes de una clase para formar un comité que proporcione información a la administración de la cafetería acerca de la comida.
22. Se seleccionan cuatro actores para representar a los Beatles en una película biográfica.
23. **Placas de automóviles** ¿Cuántas placas de automóviles existen que empiecen con dos dígitos, seguidos de dos letras y después de tres dígitos, si no se repiten las letras ni los dígitos?
24. **Placas de automóviles** ¿Cuántas placas de automóviles hay que consistan de cinco símbolos, ya sean dígitos o letras?
25. **Tiro de dados** Suponga que dos dados, uno rojo y el otro verde, se arrojan. ¿Cuántos resultados podría haber?
26. **Lanzamiento de una moneda** ¿Cuántas sucesiones diferentes de cara o cruz hay si se lanza una moneda diez veces?
27. **Formación de comités** Se va a elegir un comité de tres mujeres de una asociación femenina de quince integrantes. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir?
28. **Póquer en línea** En la versión original de póquer conocida como póquer "en línea", se reparte una mano de cinco cartas de una baraja de 52. ¿Cuántas manos distintas de póquer en línea puede haber?
29. **Compra de discos** Juan tiene dinero para comprar solamente tres de 48 discos disponibles. ¿Cuántos conjuntos distintos de discos puede comprar?
30. **Lanzamiento de moneda** Una moneda se lanza veinte veces y se registra el número de caras y cruces que se obtienen. De todas las posibles sucesiones de caras y cruz, ¿cuántas tiene exactamente siete caras?
31. **Repartición de cartas** ¿Cuántas manos diferentes de 13 cartas incluyen el as y el rey de espadas?
32. **Entrevistas de trabajo** El director del departamento de personal entrevista a ocho personas para ocupar tres vacantes idénticas. ¿Cuántos grupos diferentes de tres pueden contratarse?
33. **Nominaciones para una beca** Seis estudiantes de los semestres avanzados del Rydell High School reúnen las calificaciones para competir por una beca de honor en una universidad. La universidad permite que la Ryder High School nomine hasta a tres alumnos y ésta nomina por lo menos a uno. ¿Cuántas elecciones podría hacer el comité?
34. **Plato Pu–pu** Un restaurante chino elaborará un plato Pu–pu "a la medida" que puede contener una, dos o tres selecciones de su menú de entradas. Si en el menú hay cinco entradas, ¿cuántos platos distintos pueden elaborarse?



35. Yahtzee En el juego de Yahtzee se arrojan cinco dados simultáneamente. ¿Cuántos resultados distintos pueden distinguirse si los dados son de colores distintos?

36. Indiana Jones y el examen final El profesor Indiana Jones le da a su grupo veinte preguntas para estudiar; de ellas va a seleccionar ocho para el examen final. ¿De cuántas formas puede seleccionar las preguntas?

37. Barra de ensaladas El almuerzo de Mary siempre consiste en un plato completo de ensalada de la barra del restaurante Ernestine. Ella siempre toma iguales cantidades de cada ensalada que elige, pero le gusta variar su elección. Si puede elegir de entre nueve ensaladas, ¿cuántos diferentes almuerzos puede crear?

38. Compra de un automóvil nuevo Un comprador de un automóvil nuevo tiene que elegir entre tres modelos, cada uno de los cuales viene con cuatro colores exteriores, tres colores interiores y con una combinación de hasta seis accesorios. ¿De cuántas formas distintas el cliente puede ordenar su automóvil?

39. Posibles pizzas Luigi vende un tamaño de pizza, pero anuncia que con su selección de ingredientes pueden hacerse "mas de 4,000 pizzas distintas" ¿Cuál es el número más pequeño de ingredientes que Luigi puede ofrecer?

40. Subconjunto propio A un subconjunto de A se le llama *propio* si no es ni el conjunto vacío ni el conjunto A. ¿Cuántos subconjuntos propios tiene un conjunto que tiene n elementos?

41. Exámenes Falso–Verdadero ¿Cuántas respuestas distintas puede haber en un examen de Falso–Verdadero de diez preguntas?

42. Examen de opción múltiple ¿Cuántas respuestas distintas puede haber en un examen de opción múltiple de diez preguntas en la cual las respuestas pueden ser a, b, c, d o e?

Preguntas de examen estandarizado

43. Verdadero o falso Si a y b son enteros positivos tales que $a + b = n$, entonces $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$. Justifique su respuesta.

44. Verdadero o falso Si a, b y n son enteros tales que $a < b < n$, entonces $\binom{n}{a} < \binom{n}{b}$. Justifique su respuesta.

Se recomienda que utilice su calculadora graficadora cuando evalúe los ejercicios del 45 al 48.

45. Opción múltiple La comida del Gritsy Palace consiste en un plato fuerte, una guarnición con dos tipos de vegetales y un postre. Si hay cuatro platos fuertes, seis tipos de vegetales y seis postres para elegir, ¿cuántas posibles comidas hay?

A) 16

B) 25

C) 144

D) 360

E) 720

46. Opción múltiple ¿De cuántas formas distintas los jueces pueden elegir del 5o al 1er lugar de diez finalistas de Miss Estados Unidos?

A) 50

B) 120

C) 252

D) 30,240

E) 3,628,800

47. Opción múltiple Suponga que r y n son enteros positivos y además que $r <$ n. ¿Cuál de los siguientes números *no* es igual a 1?

A) $(n - n)!$

B) ${}_nP_n$

C) ${}_nC_n$

D) $\binom{n}{n}$

E) $\binom{n}{r} \div \binom{n}{n-r}$

48. Opción múltiple Una organización va a elegir mediante votación a tres nuevos miembros de su consejo de administración. A los miembros se les dan papeletas con los nombres de los cinco candidatos y se les pide que marquen los nombres de los candidatos que elijan (que podría ser ninguno, o incluso los cinco). Los tres candidatos con el mayor número de votos son los elegidos. ¿De cuántas maneras distintas puede un miembro llenar su papeleta?

A) 10

B) 20

C) 32

D) 125

E) 243

Exploraciones

49. Actividad en equipo Para cada uno de los siguientes números complete el problema de conteo proporcionado la respuesta correcta.

A) ${}_{52}C_3$

B) ${}_{12}C_3$

C) ${}_{25}P_{11}$

D) 2^5

E) $3 \cdot 2^{10}$

50. Escriba para aprender Usted tiene una huevera con una docena de huevos y necesita elegir dos para el desayuno. Proporcione un argumento basado en ese escenario para explicar porque

${}_{12}C_2 = {}_{12}C_{10}$.

51. Acertijo acerca de los factoriales El número 50! termina en una cadena consecutiva de ceros.

a) ¿Cuántos 0 hay en esa cadena final?

b) ¿Cómo lo sabe?

52. Actividad en equipo **Diagonales de un polígono regular** En la exploración 1 de la sección 1.7 llegó a la conclusión, a partir de los datos de los puntos y de la regresión cuadrática, que el número de diagonales de un polígono regular con n vértices es $(n^2 - 3n)/2$.

a) Explique por qué el número de segmentos que conectan todos los pares de vértices es ${}_nC_2$.

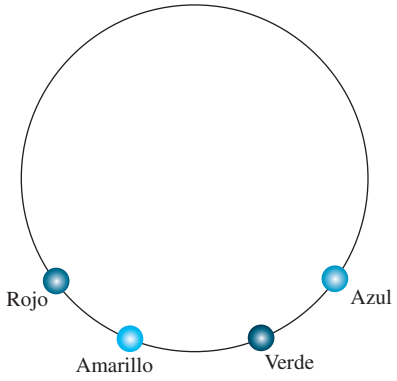
b) Utilice el resultado de la parte a para probar que el número de diagonales es $(n^2 - 3n)/2$.

Ampliación de las ideas

53. Escriba para aprender Suponga que una cadena de cartas (lo cual es ilegal en Estados Unidos si hay dinero de por medio) se envía a cinco personas la primera semana del año y cada una de ellas envía una copia a otras cinco personas en la segunda semana del año. Suponga que toda persona que recibe una carta a su vez envía otras cinco. Explique cómo sabría con certeza que alguien recibirá una segunda copia de esa carta en el transcurso del año.

54. Una mesa redonda ¿Cuántos formas distintas de acomodarse son posibles para cuatro personas que se sienten alrededor de una mesa redonda?

55. Cuentas de colores Cuatro cuentas —roja, azul, amarilla y verde— se acomodan en un cordel para elaborar un collar simple, como se muestra en la figura. ¿Cuántos acomodos son posibles?



56. Prueba de reparto Un director está haciendo una prueba de reparto para dos papeles protagónicos femeninos y quiere que las actrices hagan la audición de dos en dos para ver que tan bien lucen trabajando juntas. Su director de reparto y su asistente preparan cuadros para mostrar la cantidad de tiempo que se requeriría, dependiendo del número de actrices que vayan a la audición. ¿Cuál tabla es más razonable y por qué?

Número de personas que hacen audición	Tiempo requerido (minutos)
3	10
6	45
9	110
12	200
15	320

Número de personas que hacen audición	Tiempo requerido (minutos)
3	10
6	30
9	60
12	100
15	150

57. Bridge alrededor del mundo Suponga que se reparte una mano de *bridge* en alguna parte del mundo cada segundo. ¿Cuál es el menor número de años que se requiere para que se reparta cada posible mano de *bridge*? (Consulte el ejercicio 10 del repaso rápido).

58. Alineación de un equipo de baloncesto Cada equipo de baloncesto de la NBA tiene doce jugadores. Si cada entrenador elige a cinco jugadores iniciales sin importar su posición, ¿cuántos diferentes conjuntos de diez jugadores pueden empezar cuando dos equipos dados jueguen un partido?

9.2 El teorema del binomio

Aprenderá acerca de...

- Las potencias de binomios
- El triángulo de Pascal
- El teorema del binomio
- Las identidades factoriales

. . . porque

El teorema del binomio es un estudio maravilloso de los patrones combinatorios.

Potencias de binomios

Muchos descubrimientos matemáticos importantes han empezado con el estudio de patrones. En este capítulo queremos introducir un importante teorema de polinomios llamado el teorema del Binomio, que estableceremos paso por paso observando algunos patrones.

Si usted desarrolla $(a + b)^n$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5, lo que obtiene es:

$$\begin{aligned}
(a + b)^0 &= 1 \\
(a + b)^1 &= 1a^1b^0 + 1a^0b^1 \\
(a + b)^2 &= 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2 \\
(a + b)^3 &= 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 \\
(a + b)^4 &= 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 \\
(a + b)^5 &= 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5
\end{aligned}$$

¿Puede observar el patrón y predecir cómo sería el desarrollo de $(a + b)^6$? Tal vez usted llegue a lo siguiente:

1. La potencia de a disminuirá de 6 a 0 de uno en uno.
2. La potencia de b se incrementará de 0 a 6 de uno en uno.
3. Los primeros dos coeficientes serán 1 y 6.
4. Los últimos dos coeficientes serán 6 y 1.

A primera vista podría no apreciar el patrón que permite determinar los llamados *coeficientes binomiales*; pero después de efectuar la siguiente exploración seguramente podrá verlo.

EXPLORACIÓN 1 **Exploración de los coeficientes binomiales**

1. Calcule ${}_3C_0$, ${}_3C_1$, ${}_3C_2$ y ${}_3C_3$. ¿Dónde puede encontrar esos números en los desarrollos binomiales anteriores?
2. La expresión $4\ {}_nC_r\ \{0, 1, 2, 3, 4\}$ le indica a la calculadora que calcule ${}_4C_r$ para cada uno de los números $r = 0, 1, 2, 3, 4$ y los muestre como una lista. ¿Dónde puede encontrar esos números en los desarrollos binomiales anteriores?
3. Calcule $5\ {}_nC_r\ \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. ¿Dónde puede encontrar esos números en los desarrollos binomiales anteriores?

Probablemente ya esté listo para concluir que los coeficientes binomiales en el desarrollo de $(a + b)^n$, son los valores de ${}_nC_r$ para $r = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$. Esperamos que se esté preguntando *por qué* es verdad esto.

La expansión de

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}_{n \text{ factores}}$$

consiste en todos los productos posibles que pueden formarse tomando una letra (a o b) para cada factor ($a + b$). El número de formas para crear el producto $a^r b^{n-r}$ es exactamente el mismo que el número de formas para elegir r factores para aportar una a, ya que el resto de los factores obviamente aportan una b. El número de formas para elegir los r factores a partir de n factores es ${}_nC_r$.

DEFINICIÓN Coeficiente binomial

Los coeficientes binomiales que aparecen en el desarrollo de $(a + b)^n$ son ${}_nC_r$ para $r = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

Una notación clásica de ${}_nC_r$, especialmente en el contexto de los coeficientes binomiales, es $\binom{n}{r}$. Ambas notaciones se leen "r en n" o "elegir r de n".

EL TRUCO DE LA TABLA

También puede utilizar la función Tabla para mostrar los coeficientes binomiales. Por ejemplo, haga Y1 = 5 ${}_nC_rX$ y configure TblStart = 0 y △Tbl = 1 para mostrar los coeficiente binomiales de $(a + b)^5$.

EJEMPLO 1 Uso de ${}_nC_r$ para desarrollar un binomio

Desarrolle $(a + b)^5$ utilizando una calculadora para obtener los coeficientes binomiales.

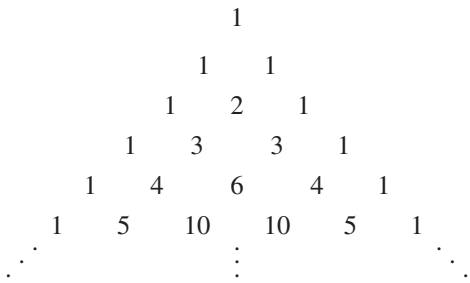
SOLUCIÓN Ingrese a su calculadora la expresión 5 ${}_nC_r$ {0, 1, 2, 3, 4, 5} para determinar los coeficientes binomiales para $n = 5$. La calculadora muestra la lista {1, 5, 10, 10, 5, 1}. Utilizando esos coeficientes, construimos la expansión:

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5.$$

Ahora resuelva el ejercicio 3.

Triángulo de Pascal

Si eliminamos los signos más (+) y las potencias de las variables a y b en el conjunto "triangular" de los coeficientes binomiales con los que se empezó está sección, obtenemos:



EL JUEGO DEL NOMBRE

El hecho de que el triángulo de Pascal no haya sido descubierto por Pascal es irónico, aunque no raro, en los anales de las matemáticas. Mencionamos en el capítulo 5 que Herón no descubrió la fórmula de Herón y que Pitágoras tampoco descubrió el teorema de Pitágoras. La historia del cálculo está llena de injusticias similares.

A esto se le llama **triángulo de Pascal** en honor a Blas Pascal (1623–1662), quien lo utilizó en su trabajo, aunque no fue él quien en realidad lo descubrió. El triángulo apareció en 1303 en un texto chino, el *Espejo Valioso*, de Chu Shih-chieh, que se refiere a él como un "diagrama del viejo método para determinar potencias octavas y menores".

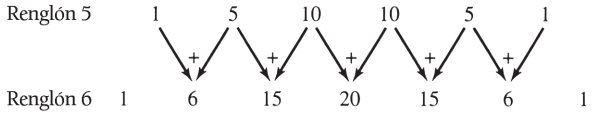
Por comodidad nos referimos a la parte superior del triángulo de Pascal en el que hay un 1 como el renglón 0. Esto nos permite asociar los números del renglón n con el desarrollo de $(a + b)^n$.

El triángulo de Pascal es un patrón tan valioso que actualmente se sigue escribiendo acerca de él. Uno de los modelos más sencillos es el que utilizamos para obtener desde un renglón al que le sigue, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Extensión del triángulo de Pascal

Muestre cómo el quinto renglón del triángulo de Pascal se utiliza para obtener el sexto renglón y emplee esta información para escribir el desarrollo de $(x + y)^6$.

SOLUCIÓN Los dos números que están en los extremos del renglón son 1. Cada número entre ellos es la suma de los dos números inmediatamente arriba de ellos. Así, el sexto renglón puede encontrarse a partir del quinto de la siguiente forma:



Ésos son los coeficientes binomiales de $(x + y)^6$, entonces

$$(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

Ahora resuelva el ejercicio 7.

La técnica utilizada en el ejemplo 1 para extender el triángulo de Pascal depende de la siguiente fórmula recursiva.

Fórmula recursiva para el triángulo de Pascal

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$ o, equivalentemente, ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$.

El siguiente es un argumento que explica por qué la fórmula funciona. Suponga que se eligen r objetos de un conjunto de n objetos. Como hemos visto, esto puede ser de ${}_nC_r$ formas. Ahora ponga una marca que identifique uno de los n objetos. ¿De cuántas maneras podemos elegir r objetos si el que se identificó está entre ellos? Pues bien, tenemos $r - 1$ objetos que se pueden elegir de entre los $n - 1$ que no fueron identificados, entonces ${}_{n-1}C_{r-1}$. ¿De cuántas formas podemos elegir r objetos si el objeto identificado *no* está entre ellos? En este caso podemos elegir los r objetos de entre los $n - 1$ objetos no identificados, así que ${}_{n-1}C_r$. Debido a que nuestra selección de r objetos puede contener el objeto identificado o no, ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ cuenta todas la posibilidades sin repetición. Por lo anterior, ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$.

No es necesario construir el triángulo de Pascal para determinar los coeficientes binomiales, debido a que ya tenemos una fórmula para calcularlos: ${}_nC_r = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$. Se puede utilizar esta fórmula para proporcionar una fórmula algebraica de la fórmula recursiva anterior, pero dejaremos esto como un ejercicio para el final de esta sección.

EJEMPLO 3 Cálculo de los coeficientes binomiales

Determine el coeficiente de x^{10} en el desarrollo de $(x + 2)^{15}$.

SOLUCIÓN El único término en la expansión que necesitamos encontrar es ${}_{15}C_{10}x^{10}2^5$. Esto es

$$\frac{15!}{10!5!} \cdot 2^5 \cdot x^{10} = 3{,}003 \cdot 32 \cdot x^{10} = 96{,}096\, x^{10}.$$

El coeficiente de x^{10} es 96,096.

Ahora resuelva el ejercicio 15.

EL TEOREMA DEL BINOMIO CON NOTACIÓN Σ

Para aquellos que ya están familiarizados con la notación de la suma, ésta es la forma como se expresaría el teorema del binomio con esa notación:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}b^r$$

Para aquellos que no están familiarizados con esa notación, aprenderán sobre ella en la sección 9.4.

El teorema del binomio

Ahora estableceremos formalmente el teorema referente al desarrollo de las potencias de los binomios, conocido como el teorema del binomio. Por simplicidad, utilizaremos el símbolo $\binom{n}{r}$, en lugar de ${}_nC_r$.

El teorema del binomio

Para cualquier entero positivo n,

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n} b^n.$$

donde

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

EJEMPLO 4 Desarrollo de un binomio

Desarrolle el binomio $(2x - y^2)^4$.

SOLUCIÓN Utilizamos el teorema del binomio para desarrollar $(a + b)^4$ en donde $a = 2x$ y $b = -y^2$.

$$\begin{aligned}(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\\ (2x - y^2)^4 &= (2x)^4 + 4(2x)^3(-y^2) + 6(2x)^2(-y^2)^2\\ &\quad + 4(2x)(-y^2)^3 + (-y^2)^4\\ &= 16x^4 - 32x^3y^2 + 24x^2y^4 - 8xy^6 + y^8\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 17.

Identidades factoriales

Las expresiones que incluyen factoriales se combinan para proporcionar algunas identidades interesantes, muchas de las cuales dependen de las identidades básicas que se muestran a continuación (en realidad son dos versiones de la misma identidad).

Identidades factoriales básicas

Para cualquier entero $n \geq 1$, $n! = n(n - 1)!$,

Para cualquier entero $n \geq 0$, $(n + 1)! = (n + 1)n!$,

EJEMPLO 5 Demostración de una identidad con factoriales

Pruebe que $\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} = n$ para todos los enteros $n \geq 2$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} &= \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} \\ &= \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{2(n-1)!} - \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} \\ &= \frac{n^2+n}{2} - \frac{n^2-n}{2} \\ &= \frac{2n}{2} \\ &= n\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 33.

REPASO RÁPIDO 9.2 *(Son necesarias las habilidades de la sección A.2)*

En los ejercicios del 1 al 10 use la propiedad distributiva para desarrollar el binomio.

1. $(x + y)^2$ **2.** $(a + b)^2$

3. $(5x - y)^2$ **4.** $(a - 3b)^2$

5. $(3s + 2t)^2$ **6.** $(3p - 4q)^2$

7. $(u + v)^3$ **8.** $(b - c)^3$

9. $(2x - 3y)^3$ **10.** $(4m + 3n)^3$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.2

En los ejercicios del 1 al 4 desarrolle el binomio utilizando una calculadora para determinar los coeficientes binomiales.

1. $(a + b)^4$ **2.** $(a + b)^6$

3. $(x + y)^7$ **4.** $(x + y)^{10}$

En los ejercicios del 5 al 8 desarrolle el binomio utilizando el triángulo de Pascal para determinar los coeficientes.

5. $(x + y)^3$ **6.** $(x + y)^5$

7. $(p + q)^8$ **8.** $(p + q)^9$

En los ejercicios del 9 al 12 evalúe la expresión a mano (utilizando la fórmula) antes de comprobar su respuesta con una graficadora.

9. $\binom{9}{2}$ **10.** $\binom{15}{11}$

11. $\binom{166}{166}$ **12.** $\binom{166}{0}$

En los ejercicios del 13 al 16 obtenga el coeficiente del término dado en el desarrollo binomial.

13. término $x^{11}y^3$, $(x + y)^{14}$ **14.** término x^5y^8, $(x + y)^{13}$

15. término x^4, $(x - 2)^{12}$ **16.** término x^7, $(x - 3)^{11}$

En los ejercicios del 17 al 20 utilice el teorema del binomio para determinar el desarrollo binomial de la función.

17. $f(x) = (x - 2)^5$ **18.** $g(x) = (x + 3)^6$

19. $h(x) = (2x - 1)^7$ **20.** $f(x) = (3x + 4)^5$

En los ejercicios del 21 al 26 use el teorema del binomio para desarrollar cada expresión.

21. $(2x + y)^4$ **22.** $(2y - 3x)^5$

23. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^6$ **24.** $(\sqrt{x} + \sqrt{3})^4$

25. $(x^{-2} + 3)^5$ **26.** $(a - b^{-3})^7$

27. Determine el entero n más grande para el cual su calculadora puede calcular $n!$.

28. Determine el entero n más grande para el cual su calculadora calculará $\binom{n}{100}$.

29. Pruebe que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ para todos los enteros $n \geq 1$.

30. Pruebe que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ para todos los enteros $n \geq r \geq 0$.

31. Use la fórmula $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ para probar que $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ (éste es el patrón del triángulo de Pascal que aparece en el ejemplo 2).

32. Obtenga un contraejemplo para mostrar que cada afirmación es *falsa*.

a) $(n + m)! = n! + m!$

b) $(nm)! = n!m!$

33. Pruebe que $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$ para todos los enteros $n \geq 2$.

34. Pruebe que $\binom{n}{n-2} + \binom{n+1}{n-1} = n^2$ para todos los enteros $n \geq 2$.

Preguntas de examen estandarizado

35. **Verdadero o falso** Los coeficientes del desarrollo polinomial de $(x - y)^{50}$ alternan el signo. Justifique su respuesta.

36. **Verdadero o falso** La suma de cualquier renglón del triángulo de Pascal es un entero. Justifique su respuesta.

Puede usar una calculadora graficadora para resolver los ejercicios del 37 al 40.

37. **Opción múltiple** ¿Cuál es el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(2x + 1)^8$?

A) 16

B) 256

C) 1120

D) 1680

E) 26,680

38. **Opción múltiple** ¿Cuál de los siguientes números *no* aparece en el décimo renglón del triángulo de Pascal?

A) 1

B) 5

C) 10

D) 120

E) 252

39. **Opción múltiple** La *suma* de los coeficientes de $(3x - 2y)^{10}$ es

A) 1

B) 1024

C) 58,025

D) 59,049

E) 9,765,625

40. **Opción múltiple** $(x + y)^3 + (x - y)^3 =$

A) 0

B) $2x^3$

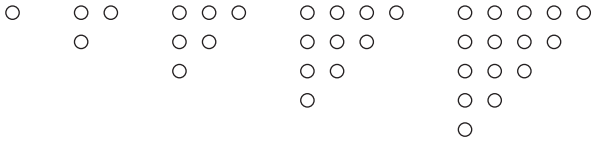
C) $2x^3 - 2y^3$

D) $2x^3 + 6xy^2$

E) $6xy^2 + 2y^3$

Exploraciones

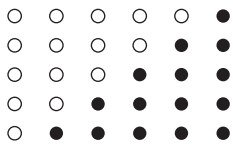
41. **Números triangulares** A los números de la forma $1 + 2 + \cdots + n$ se les llama **números triangulares** porque son el resultado del conteo de números de conjuntos triangulares, como se muestra a continuación:



a) Calcule los primeros 10 números triangulares.

b) ¿En qué parte del triángulo de Pascal aparecen los números triangulares?

c) **Escriba para aprender** Explique por qué el diagrama siguiente muestra que el número triangular n–ésimo puede escribirse como $n(n + 1)/2$.



d) Escriba la fórmula de la parte **c** como un coeficiente binomial (por eso los números triangulares aparecen como lo hacen en el triángulo de Pascal).

42. Actividad en equipo **Exploración del triángulo de Pascal** Haga equipos de dos o tres personas. Solamente mediante la inspección de los patrones del triángulo de Pascal, adivine las respuestas de las preguntas siguientes, (¡Es más fácil hacer conjeturas a partir de un patrón que construir una demostración!)

a) ¿Qué número positivo entero aparece el menor número de veces?

b) ¿Qué número entero aparece el mayor número de veces?

c) ¿Hay algún entero positivo que *no* aparezca en el triángulo de Pascal?

d) Si a lo largo de los renglones de manera alterna se suman y se restan los números, ¿cuál es el resultado?

e) Si p es un número primo, ¿qué tiene en común los números interiores a lo largo del renglón p-ésimo?

f) ¿De cuál renglón todos los números interiores son pares?

g) ¿De cuál renglón todos los números interiores son impares?

h) ¿Qué otros patrones puede encontrar? Comparta sus descubrimientos con los otros equipos.

Ampliación de las ideas

43. Use el teorema del binomio para probar que la suma de las entradas a lo largo del renglón n-ésimo del triángulo de Pascal es 2^n. Esto es,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

[*Sugerencia:* Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(1 + 1)^n$.]

44. Utilice el teorema del binomio para probar que la suma alterna a lo largo de los renglones del triángulo de Pascal es cero. Esto es,

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

45. Use el teorema del binomio para probar que

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n.$$

9.3 Probabilidad

Aprenderá acerca de...

- Los espacios muestrales y las funciones de probabilidad
- El cálculo de las probabilidades
- Los diagramas de Venn y diagramas de árbol
- La probabilidad condicional
- Las distribuciones binomiales

. . . porque

Todos deben saber lo que realmente son "las leyes matemáticas del azar".

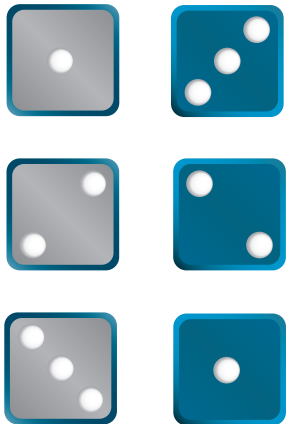


FIGURA 9.2 Una suma de 4 al lanzar una ocasión dos dados (ejemplo 1d).

Espacios muestrales y funciones de probabilidad

Muchas personas saben intuitivamente lo que es la probabilidad. Desafortunadamente, esa intuición a menudo no se basa en principios matemáticos fundamentados, por lo que pueden ser víctimas de engaños, estadística irreal y publicidad falsa. En esta lección se proporciona un fundamento matemático a ese conocimiento intuitivo.

EJEMPLO 1 Examen de su intuición acerca de la probabilidad

Determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

a) Obtener cara en el lanzamiento de una moneda legal.

b) Obtener dos caras en dos lanzamientos de una moneda legal.

c) Sacar una reina de una baraja estándar de 52 cartas.

d) Obtener una suma de cuatro en un lanzamiento de dos dados equilibrados.

e) Atinarle a seis números de la lotería estatal que requiere que el participante elija los seis números de entre el 1 y el 46, inclusive.

SOLUCIÓN

a) Hay dos resultados igualmente probables: {T, H} [de aquí en adelante usaremos H para referirnos a cara y T para cruz]. La probabilidad es 1/2.

b) Hay cuatro resultados igualmente probables: {TT, TH, HT, HH}. La probabilidad es 1/4.

c) Hay 52 resultados igualmente probables, cuatro de los cuales son reinas. La probabilidad es 4/52 o 1/13.

d) Por el principio de multiplicación del conteo (sección 9.1), hay $6 \times 6 = 36$ resultados igualmente probables. De esos, tres {(1, 3), (3, 1), (2, 2)} suman 4 (figura 9.2). La probabilidad es 3/36 o 1/12.

e) Hay ${}_{46}C_6 = 9{,}366{,}819$ igualmente probables de que seis números se elijan de 46 números sin importar el orden. Solamente una de esas elecciones es la que sale premiada en la lotería. La probabilidad es $1/9{,}366{,}819 \approx 0.00000010676$.

Ahora resuelva el ejercicio 5.

Observe que en cada uno de esos casos, primero contamos los números de los resultados posibles del experimento en cuestión; el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento es el **espacio muestral** del experimento. Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral. Cada uno de los espacios maestrales consiste en un número finito de **resultados igualmente probables**, los cual nos permiten obtener la probabilidad de un evento mediante conteo.

Probabilidad de un evento (resultados igualmente probables)

Si E es un evento en espacio muestral S finito, no vacío, de resultados igualmente probables, entonces la probabilidad del evento E es

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados en } E}{\text{número de resultados en } S}.$$

¿LA PROBABILIDAD SÓLO ES PARA JUEGOS?

La teoría de probabilidad empezó con las cartas entre Blas Pascal (1623–1662) y Pierre de Fermat (1601–1665) que se referían a los juegos de azar, pero de eso ya hace tiempo. Los matemáticos modernos como David Blackwell (1919), el primer afroamericano que recibió una membresía para el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, amplió extensamente la teoría y las aplicaciones de la probabilidad, especialmente en las áreas de estadística, física cuántica y teoría de la información. Además, el trabajo de John Von Neumann (1903–1957) ha conducido a separar una rama de las matemáticas discretas modernas, que en realidad es acerca de juegos, denominada Teoría de Juegos.

La hipótesis de resultados igualmente probables es crítica. Muchas personas conjeturan erróneamente el ejemplo 1d porque consideran que hay 11 posibles resultados de la suma de los dados: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} y que cuatro es uno de ellos (este razonamiento es correcto hasta este punto). La razón 1/11 no es la probabilidad de lanzar dos dados cuya suma sea 4, debido a que esas sumas *no son igualmente probables*.

Por otro lado, podemos *asignar* probabilidades a los 11 resultados de este pequeño espacio muestral de manera que sea consistente con el número de veces que cada total puede ocurrir. En la tabla que a continuación se muestra puede apreciarse una **distribución de probabilidad**, en la que, a cada resultado se le asigna una probabilidad única mediante una *función de probabilidad*.

Resultado	Probabilidad
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Vemos que los resultados no son igualmente probables, pero podemos determinar las probabilidades de eventos sumando las probabilidades de los resultados en esos eventos, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Tiro de dados

Determine la probabilidad de que la suma del resultado del tiro de dos dados equilibrados sea divisible entre 3.

SOLUCIÓN El evento E consiste de los resultados {3, 6, 9, 12}. Para obtener la probabilidad de E sumamos las probabilidades de los resultados en E (consulte la tabla de la distribución de probabilidad):

$$P(E) = \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 7.

Observe que este método también funcionaría con un espacio muestral de 36 elementos, en el que cada resultado tendría probabilidad de 1/36. En general es más fácil trabajar con espacios maestrales de eventos igualmente probables, porque no es necesario escribir la distribución de probabilidad. Cuando los resultados tienen probabilidades diferentes, necesitamos saber qué probabilidades se les asigna a los resultados.

No toda función que asigna números a los resultados es una función de probabilidad.

CONJUNTO VACÍO

Un conjunto que no tiene elementos es el *conjunto vacío*, expresado por $\varnothing$.

DEFINICIÓN Función de probabilidad

Una **función de probabilidad** es una función P que asigna un número real a cada resultado en el espacio muestral S sujeto a las siguientes condiciones:

1. $0 \leq P(O) \leq 1$ para cada resultado O;
2. La suma de las probabilidades de todos los resultados en S es 1;
3. $P(\varnothing) = 0$.

Entonces, la probabilidad de cualquier evento puede definirse en términos de la función de probabilidad.

Probabilidad de un evento (resultados que nos son igualmente probables)

Sea S un espacio muestral finito, no vacío, en el cual cada resultado tiene una probabilidad asignada por una función de probabilidad P. Si E es un evento en S, la **probabilidad** del evento E es la suma de las probabilidad de todos los resultados contenidos en E.

EJEMPLO 3 Prueba de la función de probabilidad

¿Es posible que al lanzar un dado estándar de seis lados, pero que no esté equilibrado, se obtenga un número n cuya probabilidad sea exactamente $1/(n^2 + 1)$?

SOLUCIÓN La distribución de probabilidad se vería de esta forma:

Resultado	Probabilidad
1	1/2
2	1/5
3	1/10
4	1/17
5	1/26
6	1/37

Ésta no es una función de probabilidad válida, porque $1/2 + 1/5 + 1/10 + 1/17 + 1/26 + 1/37 \neq 1$.

Ahora resuelva el ejercicio 9a.

Cálculo de las probabilidades

No siempre es fácil calcular las probabilidades, pero la aritmética que se utiliza para ello es bastante sencilla. Usualmente se limita a la multiplicación, la suma y (de forma más importante) el conteo. Ésta es la estrategia que utilizaremos:

Estrategia para obtener probabilidades

1. Determine el espacio muestral de todos los posibles resultados. Cuando sea posible, elija resultados que sean igualmente probables.
2. Si el espacio muestral tiene resultados igualmente probables, la probabilidad de un evento E está determinada por:

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados en } E}{\text{número de resultados en } S}$$

3. Si el espacio muestral no tiene resultados igualmente probables, determine la función de probabilidad (no siempre es fácil). Asegúrese de que se satisfagan las condiciones de una función de probabilidad; entonces, la probabilidad de un evento E queda determinada por la suma de las probabilidades de todo los resultados contenidos en E.

EJEMPLO 4 Elección de chocolates, espacio muestral I

Sal abre una caja con una docena de chocolates rellenos y generosamente le ofrece dos a Val. A Val le gustan más los chocolates con relleno de vainilla, pero los rellenos de chocolate lucen igual. Si cuatro de los doce chocolates son de vainilla, ¿cuál es el la probabilidad de que Val tome únicamente chocolates rellenos de vainilla?

SOLUCIÓN El experimento en cuestión es la selección de dos chocolates, sin importar el orden, de una caja de doce. Hay ${}_{12}C_2 = 66$ resultados de este experimento, y todos ellos son igualmente probables. Por lo tanto, podemos determinar la probabilidad mediante conteo.

El evento E consiste en todos los posibles pares de chocolates de vainilla que pueden escogerse, sin importar el orden, de los cuatro disponibles. Hay ${}_4C_2 = 6$ maneras de formar esos pares.

Por lo tanto, PE) $= 6/66 = 1/11$.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

Muchos problemas de probabilidad requieren que consideremos que los eventos pasan en una sucesión donde, a menudo, la ocurrencia de un evento afecta la probabilidad de la ocurrencia de otro. En esos casos, utilizamos una ley de probabilidad llamada *principio de multiplicación de probabilidades*.

Principio de multiplicación de probabilidades

Suponga un evento A que tiene probabilidad p_1 y un evento B *que tiene probabilidad* p_2 bajo el supuesto de que ocurre A. Entonces la probabilidad de que A y B ocurran es p_1p_2.

Si los eventos A y B son **independientes**, podemos omitir la frase "suponiendo que ocurre A", ya que esa afirmación no importaría.

Como un ejemplo de este principio, resolveremos el *mismo problema* del ejemplo 4, utilizando, en esta ocasión, un espacio muestral que parece sencillo a primera vista pero que consiste en eventos que no son igualmente probables.

EJEMPLO 5 Elección de chocolates, espacio muestral II

Sal abre una caja con una docena de chocolates y generosamente le ofrece dos a Val. A Val le gustan más los chocolates rellenos de vainilla, pero los rellenos de chocolate lucen igual. Si cuatro de los doce chocolates están rellenos de vainilla, ¿cuál es el la probabilidad de que Val tome únicamente chocolates rellenos de vainilla?

SOLUCIÓN Lo que a Val le interesa es que hay dos tipos de rellenos: de vainilla (V) y no de vainilla (U). Cuando se eligen dos chocolates, hay cuatro posibles resultados: VV, VU, UV y UU. Necesitamos determinar la probabilidad de que el resultado sea VV.

Observe que esos cuatro posibles resultados ¡*no son igualmente probables*! Hay dos veces más chocolates V que chocolates U. Entonces se necesita considerar la distribución de probabilidades y es necesario empezar con $P(VV)$ ya que es la probabilidad que estamos buscando.

La probabilidad de tomar un chocolates relleno de vainilla en la primera oportunidad es 4/12. La probabilidad de tomar un chocolate relleno de vainilla en la segunda oportunidad, *suponiendo que en la primera oportunidad se tomó uno relleno de vainilla*, es 3/11. Por el principio de multiplicación, la probabilidad de tomar chocolates rellenos de vainilla en ambas oportunidades es

$$\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}.$$

Ya que ésta es la probabilidad que estamos buscando, no necesitamos calcular las probabilidades de los otros resultados. Sin embargo, se recomienda que verifique las otras probabilidades que serían:

$$P(VU) = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{8}{33}$$

$$P(UV) = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{8}{33}$$

$$P(UU) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$$

Note que $P(VV) + P(VU) + P(UV) + P(UU) = (1/11) + (8/33) + (8/33) + (14/33) = 1$, entonces la función de probabilidad cumple con las condiciones.

Ahora resuelva el ejercicio 33.

¿CON ORDEN O SIN ORDEN?

Note que en el ejemplo 4 teníamos un espacio muestral en el cual el orden no importaba, mientras que en el ejemplo 5 tenemos un espacio muestral en el que el orden si importa (por ejemplo, UV y VU son resultados distintos). El orden importa en el ejemplo 5, porque estamos considerando las probabilidades de dos eventos (la primera elección, la segunda elección), una de las cuales afecta a la otra. En el ejemplo 4 simplemente contamos combinaciones sin orden.

JOHN VENN

John Venn (1834–1923) fue un inglés estudioso de la lógica y clérigo como su contemporáneo, Charles L. Dodgson. Aunque ambos utilizaron círculos sobrepuestos para ilustrar sus silogismos lógicos, es Venn cuyo nombre trascendió con esos diagramas. El nombre de Dodgson apenas ha sobrevivido, pero es el más famoso de los dos: bajo el seudónimo de Lewis Carroll, escribió *Alicia en el país de las maravillas* y *A través del espejo.*

Diagramas de Venn y diagramas de árbol

Hemos visto muchos casos en los que los modelos geométricos nos ayudan a entender con más facilidad a los modelos algebraicos; la teoría de probabilidad es otro caso en el que eso ocurre. Los **diagramas de Venn**, principalmente asociados con el mundo de la teoría de conjuntos, son de gran ayuda para visualizar las relaciones entre los eventos con los espacios maestrales. Los **diagramas de árbol**, que mencionamos por primera vez en la sección 9.1 como una manera de visualizar el principio de multiplicación del conteo, son buenos para visualizar el principio de multiplicación de probabilidades.

EJEMPLO 6 Uso de un diagrama de Venn

En una preparatoria grande, el 54% de la población estudiantil está constituida por mujeres y el 62% practica algún deporte. La mitad de las mujeres de la escuela practica algún deporte.

a) ¿Qué porcentaje de los estudiantes que practican algún deporte son hombres?

b) Si se elige a algún estudiante aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que sea un hombre que no practica algún deporte?

SOLUCIÓN Para organizar las categorías, dibujamos un rectángulo grande para representar al espacio muestral (la población estudiantil de la escuela) y dos regiones sobrepuestas: "mujeres" y "deportes" (figura 9.3). Se ponen los porcentajes (figura 9.4) utilizando la siguiente lógica:

- La región sobrepuesta contiene a la mitad de las mujeres, o $(0.5)(54\%) = 27\%$ de los estudiantes.
- La región en gris (el resto de las mujeres) contiene $(54 - 27)\% = 27\%$ de los estudiantes.
- Entonces, la región azul (el resto de las personas que practican algún deporte) contiene $(62 - 27)\% = 35\%$ de los estudiantes,
- Entonces, la región blanca (el resto de los estudiantes) contiene $(100 - 89)\% = 11\%$ de los estudiantes. Ésos son los hombres que no practican algún deporte.

Ahora podemos responder ambas preguntas observando el diagrama de Venn.

a) La razón de *hombres* que practican algún deporte a *todos los estudiantes* que practican algún deporte es $\dfrac{0.35}{0.62}$, el cual es aproximadamente 56.45%.

b) Vemos que el 11% de los estudiantes son muchachos que no practican algún deporte, entonces la probabilidad es 0.11.

Ahora resuelva los ejercicios del 27a al d.

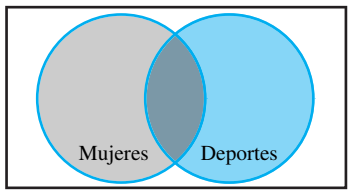


FIGURA 9.3 Un diagrama de Venn para el ejemplo 6. La región sobrepuesta común de ambos círculos representa "las mujeres que practican algún deporte". La región fuera de ambos círculos (pero dentro del rectángulo) representa "hombres que no practican algún deporte".

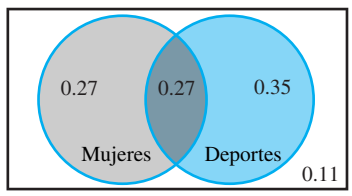


FIGURA 9.4 Un diagrama de Venn para el ejemplo 6 con sus probabilidades correspondientes.

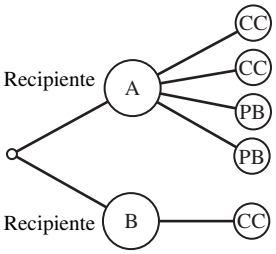


FIGURA 9.5 Un diagrama de árbol para el ejemplo 7.

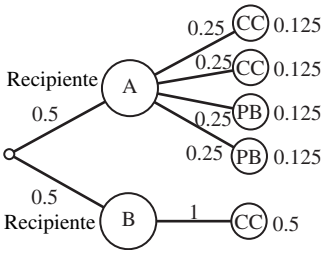


FIGURA 9.6 Un diagrama de árbol para el ejemplo 7 con las probabilidades correspondientes. Note que la selección de las galletas no es igualmente probable. Note también que las probabilidades de las cinco galletas suman 1.



EJEMPLO 7 Uso del diagrama de árbol

Se cuenta el contenido de dos recipientes idénticos con galletas. El recipiente *A* contiene dos galletas de chispas de chocolate (CC) y dos galletas de crema de cacahuate (PB), mientras que el recipiente *B* contiene una galleta de chispas de chocolate. Seleccionamos una galleta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la galleta seleccionada sea de chocolate?

SOLUCIÓN Es tentador decir que 3/5, debido a que hay 5 galletas en total, 3 de las cuales son de chispas de chocolate. En realidad, esa sería la respuesta si todas las galletas estuvieran en el mismo recipiente. Sin embargo, el hecho de que estén en recipientes distintos implica que las cinco galletas no son resultados igualmente probables. La única galleta de chispas de chocolate en el recipiente B tiene una mucho mejor oportunidad de ser elegida que cualquiera de las galletas del recipiente A. Necesitamos pensar eso como un experimento de dos pasos: primero seleccionar un recipiente, después tomar una galleta de ese recipiente.

La figura 9.5 proporciona una visualización del proceso de dos pasos. En la figura 9.6 hemos colocado las probabilidades a lo largo de cada rama: primero se elige el recipiente, después se toma la galleta. La probabilidad al *final* de cada rama se obtiene multiplicando las probabilidades desde la raíz de la rama (principio de multiplicación). Observe que las probabilidades de las cinco galletas (como se predijo) no son iguales.

El evento "chispas de chocolate" (CC) es un conjunto que contiene tres resultados. Sumamos sus probabilidades para obtener la probabilidad correcta:

$$P(\text{chispas de chocolate}) = 0.125 + 0.125 + 0.5 = 0.75.$$

Ahora resuelva el ejercicio 29.

Probabilidad condicional

La probabilidad de tomar una galleta de chispas de chocolate en el ejemplo 7 es un caso de **probabilidad condicional**, debido a que la probabilidad "galleta" **depende** de resultado "recipiente". Un símbolo conveniente para utilizar con la probabilidad condicional es $P(A|B)$, que se lee "P de A dado B",y significa "la probabilidad del evento A, dado que el evento B ocurre". En los recipientes del ejemplo 7,

$$P(\text{chispas de chocolate}|\text{recipiente A}) = \frac{2}{4} \text{ y } P(\text{chispas de chocolate}|\text{recipiente B}) = 1.$$

(En el diagrama de árbol, éstas son las probabilidades a lo largo de las *ramas* que parten de los dos recipientes, no las probabilidades al *final* de las ramas).

El principio de multiplicación de probabilidades puede establecerse de manera breve con la siguiente notación:

$$P(A \text{ y } B) = P(\text{A}) \cdot P(B|A).$$

Ésta es la forma en la que encontramos los números al final de las ramas de la figura 9.6.

Como un ejemplo final de problema de probabilidad, mostraremos cómo utilizar esta fórmula de manera diferente pero equivalente, algunas veces llamada **fórmula de la probabilidad condicional**:

Fórmula de la probabilidad condicional

Si el evento B depende del evento A, entonces $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$.

EJEMPLO 8 Uso de la fórmula de la probabilidad condicional

Suponga que hemos elegido una galleta de manera aleatoria de uno de los recipientes descritos en el ejemplo 6. Dado que es una galleta de chispas de chocolate, ¿cuál es la probabilidad de que se haya tomado del recipiente A?

SOLUCIÓN Por la fórmula,

$$P(\text{recipiente } A \,|\, \text{chispas de chocolate}) = \frac{P(\text{recipiente } A \text{ y chispas de chocolate})}{P(\text{chispas de chocolate})}$$

$$= \frac{(1/2)(2/4)}{0.75} = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 31.



EXPLORACIÓN 1 **Prueba positiva de VIH**

En el año 2003, la probabilidad de que un adulto en Estados Unidos tuviese VIH/SIDA fue 0.006 (Fuente: *2004 CIA World Factbook*). La prueba ELISA se utiliza para detectar el anticuerpo de ese virus en la sangre. Si el anticuerpo está presente, la prueba es positiva con probabilidad 0.997 y negativa con probabilidad 0.003. Si el anticuerpo no está presente, la prueba es positiva con probabilidad 0.015 y negativa con probabilidad 0.985.

1. Dibuje el diagrama de árbol con ramas "anticuerpo presente" y "anticuerpo ausente" partiendo desde la raíz. Ponga las probabilidades para los adultos de Norteamérica (de 15 a 49 años de edad) a lo largo de las ramas (observe que esas dos probabilidades deben sumar 1).
2. Del nodo al final de cada una de las dos ramas, dibuje ramas para "positivo" y "negativo". Llénelas con las probabilidades en las ramas.
3. Use el principio de multiplicación para determinar las probabilidades al final de las cuatro ramas. Compruebe que suman 1.
4. Determine la probabilidad de un resultado positivo de la prueba (observe que este evento consiste en dos resultados).
5. Use la fórmula de la probabilidad condicional para determinar la probabilidad de que una persona con prueba positiva realmente *tenga* el anticuerpo, por ejemplo $P(\text{anticuerpo presente} \,|\, \text{positiva})$.

Tal vez le sorprenda que la respuesta de la parte 5 sea tan baja, pero debe compararse con la probabilidad de que el anticuerpo esté presente *antes* de ver el resultado positivo, el cual era 0.006. No obstante, ésa es la razón de que, para dar un diagnóstico positivo de VIH/SIDA, sea necesaria una prueba confirmatoria después de una prueba ELISA positiva. Éste es el caso de muchas pruebas para diagnosticar.

Distribuciones binomiales

En nuestra "Estrategia para obtener probabilidades" se mencionó que no siempre es fácil determinar una distribución de probabilidad de un espacio muestral con probabilidades distintas. Una excepción interesante para quienes han estudiado el teorema del binomio (sección 9.2) es la distribución binomial.

EJEMPLO 9 Repetición de un experimento simple

Se lanza un dado equilibrado cuatro veces. Determine la probabilidad de que se obtenga:

a) Siempre 3. **b)** Ninguna de las veces un 3. **c)** Exactamente dos veces 3.

SOLUCIÓN

a) Tenemos una probabilidad de 1/6 de obtener un 3 cada vez. Por el principio de multiplicación la probabilidades, la probabilidad de obtener 3 las cuatro veces es $(1/6)^4 \approx 0.00077$.

b) Hay una probabilidad de 5/6 de obtener un número distinto a 3 cada vez. Por el principio de multiplicación, la probabilidad de obtener un número distinto a 3 las cuatro ocasiones es $(5/6)^4 \approx 0.48225$.

c) La probabilidad de obtener 3 dos veces seguidas de dos números distintos (otra vez por el principio de multiplicación) es $(1/6)^2(5/6)^2 \approx 0.01929$. Sin embargo, éste no es el único resultado que debemos considerar. De hecho, los dos 3 pueden ocurrir en *cualquier parte* de los cuatro lanzamientos, en exactamente $\binom{4}{2}$ = seis formas. Esto nos da seis resultados, cada uno con probabilidad $(1/6)^2(5/6)^2$. La probabilidad del evento "exactamente dos 3" es, por lo tanto, $\binom{4}{2}(1/6)^2(5/6)^2 \approx 0.11574$.

Ahora resuelva el ejercicio 47.

¿La forma en la que se ven esas respuestas le es un poco familiar? Observe cómo se ven cuando $p = 1/6$ y $q = 5/6$:

$$P(\text{cuatro 3}) = p^4$$
$$P(\text{ningún 3}) = q^4$$
$$P(\text{dos 3}) = \binom{4}{2} p^2 q^2.$$

Probablemente reconozca esas expresiones como tres de los términos del desarrollo $(p + q)^4$. Esto no es coincidencia. De hecho, ¡los términos del desarrollo

$$(p + q)^4 = p^4 + 4p^3q^1 + 6p^2q^2 + 4p^1q^3 + q^4$$

proporcionan las probabilidades exactas de 4, 3, 2, 1 y 0 tres (respectivamente) cuando se lanza un dado equilibrado cuatro veces! Ésa es la razón por la que se le llama *distribución binomial de probabilidad*. A continuación se presenta el teorema general.

PROBABILIDADES BINOMIALES CON CALCULADORA

Su calculadora puede programarse para determinar los valores de la función de distribución de probabilidad binomial (binompdf). Las soluciones del ejemplo 10, con la sintaxis de una calculadora, por ejemplo, podrían obtenerse con:

a) binompdf(20, .9, 20) (20 repeticiones, 0.9 probabilidad, 20 éxitos)

b) binompdf(20, .9, 18) (20 repeticiones, 0.9 probabilidad, 18 éxitos)

c) 1 − binomcdf(20, .9, 17) (1 menos la probabilidad *acumulada* de 17 o menos éxitos).

Lea el manual del usuario para más información.

TEOREMA Distribución binomial

Suponga que un experimento consiste de n repeticiones independientes de un experimento con dos resultados, llamados "éxito" y "fracaso". Sea $P(\text{éxito}) = p$ y $P(\text{fracaso}) = q$ (observe que $q = 1 - p$).

Entonces los términos del desarrollo binomial de $(p + q)^n$ proporcionan las probabilidades respectivas de exactamente $n, n - 1, \ldots, 2, 1, 0$ éxitos. La distribución se muestra en la tabla siguiente:

Número de éxitos de n repeticiones independientes	Probabilidad
n	p^n
$n - 1$	$\binom{n}{n-1}p^{n-1}q$
$\vdots$	$\vdots$
r	$\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$
$\vdots$	$\vdots$
1	$\binom{n}{1}pq^{n-1}$
0	q^n

EJEMPLO 10 Tiros libres

Suponga que Michael acierta en el 90% de sus tiros libres (en baloncesto). Si hace diez tiros libres, y su oportunidad de hacer cada uno es independiente de los otros tiros (un suposición que podría cuestionarse en una situación de juego), ¿cuál es la probabilidad de que acierte

a) los 20?

b) exactamente 18?

c) al menos 18?

SOLUCIÓN Se podrían obtener las probabilidades de todos los posibles resultados desarrollando $(0.9 + 0.1)^{20}$, pero no es necesario a fin de obtener la respuesta de estas tres preguntas. Basta con calcular tres términos específicos.

a) $P(20 \text{ éxitos}) = (0.9)^{20} \approx 0.12158$

b) $P(18 \text{ éxitos}) = \binom{20}{18}(0.9)^{18}(0.1)^2 \approx 0.28518$

c) $P(\text{al menos } 18 \text{ éxitos}) = P(18) + P(19) + P(20)$

$$= \binom{20}{18}(0.9)^{18}(0.1)^2 + \binom{20}{19}(0.9)^{19}(0.1) + (0.9)^{20}$$

$$\approx 0.6769$$

Ahora resuelva el ejercicio 49.

REPASO RÁPIDO 9.3 *(Son necesarias las habilidades de la sección 9.1)*

En los ejercicios del 1 al 8 señale cuántos posibles resultados hay para el experimento.

1. Lanzamiento de una moneda simple.

2. Lanzamiento de un dado de 6 lados.

3. Lanzamiento de tres monedas distintas.

4. Lanzamiento de tres dados distintos de seis lados.

5. Cinco cartas distintas se reparten de una baraja estándar de 52 cartas.

6. Dos fichas se toman simultáneamente, sin reemplazo, de una jarra que contiene diez fichas.

7. Cinco personas están alineadas para tomarse una fotografía.

8. Se forman números de tres dígitos con los números {1, 2, 3, 4, 5}, sin repetición.

En los ejercicios 9 y 10 evalúe la expresión con lápiz y papel. Verifique sus respuestas con una calculadora.

9. $\dfrac{{}_5C_3}{{}_{10}C_3}$ **10.** $\dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.3

En los ejercicios del 1 al 8 se lanzan un dado rojo y un dado verde. Cuál es la probabilidad de que:

1. La suma sea 9. **2.** La suma sea par.

3. El número del dado rojo sea más grande que el número del dado verde.

4. La suma sea menor a 10. **5.** Ambos números sean impares.

6. Ambos números sean pares. **7.** La suma sea un número primo.

8. La suma sea 7 u 11.

9. **Escriba para aprender** La jaula del gerbo de Alrik tiene cuatro compartimientos: A, B, C y D. Después de cuidadosas observaciones, estima la proporción de tiempo que el gerbo pasa en cada compartimiento y elabora la tabla siguiente:

Compartimiento	A	B	C	D
Proporción	0.25	0.20	0.35	0.30

a) ¿Es una función de probabilidad válida? Explique por qué.

b) ¿Hay algún problema con el razonamiento de Alrik? Explique por qué.

10. (Continuación del ejercicio 9) Suponga que Alrik determina que su gerbo pasa tiempo en los cuatro compartimientos, A, B, C y D, en la razón 4:3:2:1. ¿Qué proporciones debería llenar en la tabla? ¿Es una función de probabilidad válida?

El fabricante de una popular gragea de chocolate confitada en distintos colores ha publicado información acerca de las proporciones en que se producen grageas de cada color. La información se resume en la siguiente tabla:

Color	Café	Rojo	Amarillo	Verde	Anaranjado	Tostado
Proporción	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

En los ejercicios del 11 al 16 se selecciona aleatoriamente sólo una gragea de este tipo de una bolsa nueva. ¿Cuál es la probabilidad de que el dulce sea del o los colores dados?

11. Café o tostado **12.** Rojo, verde o anaranjado

13. Rojo **14.** No rojo

15. Ni anaranjado ni amarillo **16.** Ni café ni tostado

Una versión de cacahuate del mismo dulce tiene los mismos colores excepto tostado. Las proporciones de la versión de cacahuate están dadas en la siguiente tabla:

Color	Café	Rojo	Amarillo	Verde	Anaranjado
Proporción	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1

En los ejercicios del 17 al 22 se selecciona al azar un dulce de este tipo de cada una de dos bolsas nuevas recién abiertas. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos dulces tengan el o los colores dados?

17. Ambos son cafés. **18.** Ambos son anaranjados.

19. Uno es rojo y el otro es verde.

20. El primero es café y el segundo es amarillo.

21. Ninguno es amarillo.

22. El primero no es rojo y el segundo no es anaranjado.

Los ejercicios del 23 al 32 se refieren a un juego de cartas "bid Euchre" que utiliza un paquete de 24 cartas, consistentes en as, rey, reina, jota, 10 y 9 en cada uno de los cuatro palos (espadas, corazones, diamantes y trébol). En bid Euchre, una mano consiste de 6 cartas. Determine la probabilidad de cada evento.

23. **Euchre** Una mano es de seis espadas.

24. **Euchre** Las seis cartas son del mismo palo.

25. **Euchre** Una mano incluye los cuatro ases.

26. Euchre Una mano incluye dos jotas del mismo color (llamado el *arco* derecho e izquierdo).

27. Utilización de los diagramas de Venn A y B son eventos en un espacio muestral S tal que $P(\text{A}) = 0.6$, $P(\text{B}) = 0.5$ y $P(A \text{ y } B) = 0.3$.

a) Dibuje un diagrama de Venn que muestre los conjuntos sobrepuestos A y B, y coloque las probabilidades de las cuatro regiones que se formaron.

b) Determine la probabilidad de que A ocurra pero no B.

c) Determine la probabilidad de que B ocurra pero no A.

d) Determine la probabilidad de que no ocurra A ni B.

e) ¿Son A y B eventos independientes? (Esto es ¿$P(A|B) = P(\text{A})$?)

28. Uso de los diagramas de Venn A y B son eventos en un espacio muestral S tal que $P(\text{A}) = 0.7$, $P(\text{B}) = 0.4$ y $P(A \text{ y } B) = 0.2$.

a) Dibuje un diagrama de Venn que muestre los conjuntos sobrepuestos A y B y coloque las probabilidades de las cuatro regiones que se formaron.

b) Determine la probabilidad de que A ocurra pero no B.

c) Determine la probabilidad de que B ocurra pero no A.

d) Determine la probabilidad de que no ocurra A ni B.

e) ¿Son eventos independientes A y B? (Esto es ¿$P(A|B) = P(\text{A})$?)

En los ejercicios 29 y 30 le será de ayuda dibujar un diagrama de árbol.

29. Lecciones de piano Si llueve mañana, la probabilidad es 0.8 de que John practique sus lecciones de piano. Si no llueve mañana, hay únicamente 0.4 de posibilidad de que John practique. Suponga que la posibilidad de que llueva mañana es 60%. ¿Cuál es la probabilidad que John practique su lección de piano?

30. Predicción de la comida de la cafetería Si en la escuela de la cafetería se sirve carne, hay 70% de posibilidades de que haya guisantes. Si no se sirve carne, hay 30% de posibilidades de que de todas formas se sirvan guisantes. Los estudiantes saben que se sirve carne exactamente un día de los cinco hábiles de la semana, pero no saben cuál. Si mañana es lunes, ¿cuál es la probabilidad de que

a) en la cafetería se sirva carne?

b) en la cafetería haya carne y guisantes?

c) en la cafetería se sirvan guisantes?

31. Probabilidad condicional Hay dos secciones de precálculo en West High School: el grupo del profesor Abel consta de 12 mujeres y 8 hombres, mientras que el del profesor Bonitz consta de 10 mujeres y 15 hombres. Si se elige aleatoriamente a una estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase del profesor Abel? [Sugerencia: La respuesta no es 12/22].

32. Actividad en equipo Probabilidad condicional Hay dos cajas sobre una mesa. Una caja contiene una moneda normal y una con dos caras (en vez de una cara y una cruz); la otra caja contiene tres monedas normales. Un amigo toma una moneda de una de las cajas y le muestra un lado: una cara. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda haya salido de la caja que contiene la moneda de dos caras?

33. Renta de automóviles La empresa Floppy Jalpoy renta automóviles y tiene 25 unidades disponibles: 20 grandes y 5 medianas. Si se seleccionan aleatoriamente dos automóviles, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean grandes?

34. Defecto de calculadoras Dull Calculators, Inc., sabe que una calculadora que sale de su línea de ensamblado tiene una probabilidad de 0.037 de ser defectuosa. Si seleccionan al azar cuatro unidades durante el curso de un día de trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas tenga defectos?

35. Causas de muerte El gobierno designa una sola causa para cada muerte en los Estados Unidos. Los datos resultantes indican que el 45% de las muertes se deben al corazón o a alguna enfermedad cardiovascular, y 22% se deben a cáncer.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la muerte de una persona seleccionada aleatoriamente se deba a una enfermedad cardiovascular o a cáncer?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la muerte se deba a otra causa?

36. Yahtzee En el juego de *Yahtzee* se arrojan cinco dados simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que los resultados sean los mismo (¡lo cual es Yahtzee!) en el primer lanzamiento?

37. Escriba para aprender Explique por qué la siguiente afirmación no puede ser verdadera: La probabilidad de que un vendedor de computadoras venda ninguna, una, dos o tres computadoras algún día es de 0.12, 0.45, 0.38 y 0.15, respectivamente.

38. Prueba de VIH Un prueba particular para detectar el VIH, el virus que causa el SIDA, tiene 0.7% de probabilidad de producir un falso positivo, es decir, un resultado que indica que la persona tiene VIH cuando en realidad no lo tiene. Si se aplica la prueba a 60 individuos que no tienen el virus, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos un resultado falso?

39. Encuesta a graduados La oficina de alumnos del Earmuff Junction College hace una encuesta a unos miembros seleccionados de la clase del 2000. De los 254 graduados de ese año, 172 fueron mujeres, 124 de las cuales estudiaron un posgrado. De los hombres que se graduaron, 58 estudiaron un posgrado. ¿Cuál es la probabilidad del evento dado?

a) El graduado sea una mujer.

b) El graduado estudió un posgrado.

c) El graduado sea una mujer que estudió un posgrado.

40. Indiana Jones y el examen final El profesor Indiana Jones le da a sus alumnos una lista de 20 preguntas, de las cuales seleccionará 8 para el examen final. Si un estudiante sabe cómo responder 14 de las preguntas, ¿cuál es la probabilidad de que pueda responder correctamente los siguientes números de preguntas?

a) Las 8 preguntas

b) Exactamente 5 preguntas

c) Al menos 6 preguntas

41. Requisitos de graduación Para completar los requisitos de kinesiología en Palpitation Tech debe aprobar dos clases que haya elegido de entre aeróbic, acuáticos, defensa, gimnasia, deportes de raqueta, actividades recreativas, actividades rítmicas, fútbol soccer y voleibol. Si usted decide elegir dos clases aleatoriamente tomando dos papeles de una caja que contiene papeles para cada una de las clases, ¿cuál es la probabilidad de que tome deportes de raqueta y actividades rítmicas?

42. Escriba para aprender Durante julio, en Gunnison, Colorado, la probabilidad de que haya al menos 1 hora de luz del sol es de 0.78, la probabilidad de al menos 30 minutos de lluvia es de 0.44 y la probabilidad de que sea un día nublado es de 0.22. Escriba un párrafo que explique si esa afirmación es correcta.

En los ejercicios del 43 al 50 se lanzan 10 monedas de 10 centavos que se produjeron de 1990 a 1999. Determine la probabilidad de cada evento.

43. Lanzamiento de 10 monedas de 10 centavos Cara en la moneda de 1990 únicamente.

44. Lanzamiento de 10 monedas de 10 centavos Cara en la moneda de 1991 y en la de 1996 únicamente.

45. Lanzamiento de 10 monedas de 10 centavos Cara en las diez monedas.

46. Lanzamiento de 10 monedas de 10 centavos Cara en todas las monedas menos en una.

47. Lanzamiento de 10 monedas de 10 centavos Exactamente dos caras.

48. Lanzamiento de 10 monedas de 10 centavos Exactamente tres caras.

49. Lanzamiento de 10 monedas de 10 centavos Al menos una cara.

50. Lanzamiento de 10 monedas de 10 centavos Al menos dos caras.

Preguntas de examen estandarizado

51. Verdadero o falso Un espacio muestral consiste en eventos igualmente probables. Justifique su respuesta.

52. Verdadero o falso La probabilidad de un evento puede ser más grande que 1. Justifique su respuesta.

Evalúe los ejercicios 53 al 56 sin utilizar calculadora.

53. Opción múltiple La probabilidad de obtener un total de 5 en un par de dados equilibrados es

A) $\frac{1}{4}$. **B)** $\frac{1}{5}$.

C) $\frac{1}{6}$. **D)** $\frac{1}{9}$.

E) $\frac{1}{11}$.

54. Opción múltiple ¿Cuál de los siguientes números no puede ser la probabilidad de un evento?

A) 0 **B)** 0.95

C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **D)** $\frac{3}{\pi}$

E) $\frac{\pi}{2}$

55. Opción múltiple Si A y B son eventos independientes, entonces $P(A|B) =$

A) $P(A)$. **B)** $P(B)$.

C) $P(B|A)$. **D)** $P(A) \cdot P(B)$.

E) $P(A) + P(B)$.

56. Opción múltiple Se lanza tres veces una moneda equilibrada. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente en una ocasión se obtenga cara?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{3}$

C) $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{2}$

E) $\frac{2}{3}$

Exploraciones

57. Probabilidad empírica En las aplicaciones reales, a menudo es necesario aproximar las probabilidades de varios resultados de un experimento mediante la realización del experimento un gran número de veces y registrando los resultados. Barney's Bread Baket ofrece cinco distintos tipos de bagels. Barney registra las ventas de los primeros 500 bagels en una semana determinada en la tabla que se muestra a continuación:

Tipo de bagel	Número de bagels vendidos
Sencillo	185
Cebolla	60
Centeno	55
Canela y pasas	125
Pasta fermentada	75

a) Use el número observado de ventas para aproximar la probabilidad de que un cliente seleccionado aleatoriamente elija un bagel sencillo. Haga lo mismo para cada uno de los otros tipos de bagel y elabore una tabla que muestre una distribución de probabilidad aproximada.

b) Suponga que los eventos son independientes, determine la probabilidad de que tres clientes que están en la fila ordenen bagels sencillos.

c) Escriba para aprender ¿Considera razonable suponer que las órdenes de tres clientes consecutivos en realidad son independientes? Explique.

58. Póquer en línea En la versión original del póquer, conocido como póquer "en línea", se reparte una mano de 5 cartas de una baraja estándar de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los siguientes eventos?

a) Una mano que contenga al menos un rey.

b) Una mano que sea "full house" (cualesquiera tres (tercia) de un tipo y un par de otro tipo).

59. Estudiantes casados Suponga que el 23% de los estudiantes de una universidad son casados. Responda las siguientes preguntas para una muestra aleatoria de 8 estudiantes del colegio.

a) ¿Cuántos se esperarían que fueran casados?

b) ¿Encontraría que la muestra es inusual si en ella hay 5 estudiantes casados?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que 5 o más de los 8 estudiantes sean casados?

60. Actividad en equipo Investigación de un programa atlético Una universidad ampliamente conocida por su pista y su programa de entrenamiento afirma que 75% de sus atletas tiene algún grado universitario. Un periodista investiga lo que sucede con 32 atletas que inician el programa durante un periodo de 6 años que terminó hace 7 años. De esos atletas, 17 se han graduado y los 15 restantes ya no fueron a la universidad. Si la afirmación de la universidad fuera cierta, el número de estudiantes que se gradúan entre los 32 examinados se determinaría con una probabilidad binomial con $p = 0.75$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 17 atletas se hubieran graduado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 17 atletas o menos se hubieran graduado?

c) Si usted fuera el periodista, ¿qué escribiría con respecto a su investigación?

Ampliación de las ideas

61. Valor esperado Si los resultados de un experimento son valores numéricos dados (como el total de un lanzamiento de dos dados o el boleto triunfador de una lotería), definimos al **valor esperado** como la suma de todos los valores numéricos por sus respectivas probabilidades.

Por ejemplo, suponga que lanzamos un dado equilibrado. Si obtenemos un múltiplo de 3, ganamos \$3; de otra forma perdemos \$1. Las probabilidades de los dos posibles resultados se muestran en la siguiente tabla:

Valor	Probabilidad
+3	2/6
−1	4/6

El valor esperado es
$3 \times (2/6) + (-1) \times (4/6) = (6/6) - (4/6) = 1/3$.

Interpretamos esto como que, a la larga, ganaríamos un promedio de 1/3 de dólar por juego.

a) A un juego se le llama *justo* (o legal) si el valor esperado de la ganancia es cero. Suponga que seguimos ganando \$3 al obtener un múltiplo de 3, ¿cuánto debería pagarse por cualquier otro resultado para que sea un juego justo?

b) Suponga que lanzamos *dos* dados equilibrados y seguimos con las condiciones iniciales. Es decir, si obtenemos un múltiplo de 3, ganamos \$3; de otra forma perdemos \$1. ¿Cuál es el valor esperado de este juego?

62. Valor esperado (Continuación del ejercicio 61) Gladys tiene una regla personal: nunca comprar boletos de una lotería (de 6 números elegidos del 1 al 46) sino hasta que se acumulan 4 millones de dólares. Cuando esto sucede, compra 10 boletos de \$1 dólar.

a) Suponga que el premio para el boleto ganador es de 4 millones de dólares. ¿Cuál es la probabilidad de que Gladys tenga el boleto ganador? (Consulte el ejemplo 1 de esta sección para obtener la probabilidad de tener un boleto ganador).

b) Llene la tabla de distribución de probabilidad para las posibilidades de Gladys (note que restamos \$10 de los \$4 millones, debido a que Gladys tiene que pagar sus boletos aunque ganase).

Valor	Probabilidad
−10	
+3,999,990	

c) Determine el valor esperado del juego de Gladys.

d) Escriba para aprender En términos de la respuesta de la parte b), explique a Gladys las implicaciones a largo plazo de su estrategia.

9.4 Sucesiones

Aprenderá acerca de...

- Las sucesiones infinitas
- Los límites de sucesiones infinitas
- Las sucesiones aritméticas y geométricas
- Las sucesiones y las calculadoras graficadoras

. . . porque

Las sucesiones infinitas, en especial aquellas con límites finitos, están implicadas en algunos conceptos clave del cálculo.

Sucesiones infinitas

En matemáticas, una de las formas más naturales para estudiar patrones es observar una progresión ordenada de números, denominada **sucesión**. A continuación se dan algunos ejemplos de sucesiones:

1. 5, 10, 15, 20, 25

2. $2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^k, \ldots$

3. $\left\{\frac{1}{k}: k = 1, 2, 3, \ldots\right\}$

4. $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots\}$ que en ocasiones se abrevia $\{a_k\}$.

La primera de éstas es una **sucesión finita**, mientras que las otras tres son **sucesiones infinitas**. Observe que en 2 y 3 fuimos capaces de definir una regla que proporciona el k-ésimo número en la sucesión (denominado **término k-ésimo**) como una función de k. En 4 no tenemos una regla, pero notamos cómo podemos utilizar la notación de subíndice (a_k) para identificar al k-ésimo término de una sucesión infinita "general". En este sentido, una sucesión infinita puede considerarse como una *función* que asigna un número único (a_k) a cada número natural k.

EJEMPLO 1 Definición explícita de una sucesión

Determine los primeros 6 términos y el término centésimo de la sucesión $\{a_k\}$, en la que $a_k = k^2 - 1$.

SOLUCIÓN Como conocemos explícitamente el término k-ésimo como una función de k, sólo necesitamos evaluar la función para determinar los términos que se piden:

$$a_1 = 1^2 - 1 = 0,\ a_2 = 3,\ a_3 = 8,\ a_4 = 15,\ a_5 = 24,\ a_6 = 35 \quad \text{y}$$

$$a_{100} = 100^2 - 1 = 9999.$$

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Las fórmulas explícitas son las más fáciles de trabajar, pero hay otras formas de definir sucesiones. Por ejemplo, podemos especificar valores para el primer término (o primeros términos) de una sucesión, y luego definir de **forma recursiva** los términos siguientes mediante una fórmula que los relacione con los términos anteriores. El ejemplo 2 muestra cómo hacer esto.

CONVENCIÓN SOBRE SUCESIONES

Ya que en este libro trataremos principalmente con sucesiones infinitas, la palabra "sucesión" significará una sucesión infinita, a menos que se especifique lo contrario.

EJEMPLO 2 Definición recursiva de una sucesión

Determine los primeros 6 términos y el término centésimo de la sucesión definida de forma recursiva mediante las condiciones

$$b_1 = 3$$

$$b_n = b_{n-1} + 2, \text{ para toda } n > 1.$$

continúa

SOLUCIÓN Procedemos con un término a la vez, iniciando con $b_1 = 3$ y obteniendo cada término sucesivo sumando 2 al término que le precede:

$$b_1 = 3$$
$$b_2 = b_1 + 2 = 5$$
$$b_3 = b_2 + 2 = 7$$
etcétera.

En algún momento se intuye que estamos construyendo la sucesión de números naturales impares, iniciando con 3:

$$\{3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

El término centésimo es 99 términos después del primero, lo que significa que, con rapidez, podemos llegar a él sumando 99 números 2 al 3:

$$b_{100} = 3 + 99 \times 2 = 201.$$

Ahora resuelva el ejercicio 5.

Límites de sucesiones infinitas

Al igual que estábamos interesados en el comportamiento en los extremos de las funciones, también estaremos interesados en el comportamiento a la larga de las sucesiones.

DEFINICIÓN Límite de una sucesión

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y considere $\lim_{n\to\infty} a_n$. Si el límite es un número finito L, la sucesión **converge** y L es el **límite de la sucesión**; si el límite es infinito o no existe, la sucesión **diverge**.

EJEMPLO 3 Determinación de los límites de sucesiones

Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, proporcione el límite.

a) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

b) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

c) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

d) $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

SOLUCIÓN

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, por lo que la sucesión converge y el límite es 0.

b) Aunque el término n-ésimo no se da de forma explícita, podemos ver que $a_n = \frac{n+1}{n}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$. La sucesión converge y el límite es 1.

c) Esta vez vemos que $a_n = 2n$. Como $\lim_{n\to\infty} 2n = \infty$, la sucesión diverge.

d) Esta sucesión siempre oscila entre dos valores y, por tanto, no tiene límite. La sucesión diverge.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Podría ser útil revisar las reglas para la determinación de las *asíntotas en los extremos* de funciones racionales (página 240 de la sección 2.6), ya que las mismas se aplican a sucesiones que son funciones racionales de n, como en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Determinación de límites de sucesiones

Determine si la sucesión converge o diverge; si converge, proporcione el límite.

a) $\left\{\dfrac{3n}{n+1}\right\}$ **b)** $\left\{\dfrac{5n^2}{n^3+1}\right\}$ **c)** $\left\{\dfrac{n^3+2}{n^2+n}\right\}$

SOLUCIÓN

a) Como el grado del numerador es el mismo que el del denominador, el límite es la razón de los coeficientes principales.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n+1} = \dfrac{3}{1} = 3$. La sucesión converge y tiene como límite 3.

b) Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el límite es cero. Así, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n^2}{n^3+1} = 0$. La sucesión converge a 0.

c) Ya que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el límite es infinito. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2}{n^2+n}$ es infinito. La sucesión diverge.

Ahora resuelva el ejercicio 15.

Sucesiones aritméticas y geométricas

Hay toda clase de reglas mediante las cuales podemos construir sucesiones, pero en aplicaciones de matemáticas dominan dos tipos particulares de sucesiones: aquellas en las que pares de términos sucesivos tienen una *diferencia* común (sucesiones **aritméticas**) y aquellas en las que pares de términos sucesivos tienen un cociente o *razón* común (sucesiones **geométricas**). En esta sección estudiaremos ambos tipos de sucesiones con detenimiento.

DEFINICIÓN Sucesiones aritméticas

Una sucesión $\{a_n\}$ es una **sucesión aritmética** si puede escribirse en la forma

$$\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d, \ldots\} \text{ para alguna constante } d.$$

El número d se denomina la **diferencia común**.

Cada término en una sucesión aritmética puede obtenerse de forma recursiva a partir del término que le precede sumándole d.

$$a_n = a_{n-1} + d \text{ (para toda } n \geq 2).$$

EJEMPLO 5 Definición de sucesiones aritméticas

Para cada una de las sucesiones aritméticas determine **a)** la diferencia común, **b)** el décimo término, **c)** una regla recursiva para el n-ésimo término y **d)** una regla explícita para el n-ésimo término.

1) $-6, -2, 2, 6, 10, \ldots$

2) $\ln 3, \ln 6, \ln 12, \ln 24, \ldots$

continúa

SOLUCIÓN

1) a) La diferencia entre términos sucesivos es 4.

b) $a_{10} = -6 + (10 - 1)(4) = 30$.

c) La sucesión está definida de forma recursiva mediante $a_1 = -6$ y $a_n = a_{n-1} + 4$, para toda $n \geq 2$.

d) La sucesión está definida explícitamente por $a_n = -6 + (n - 1)(4) = 4n - 10$.

2) a) Al principio, la sucesión parece no ser aritmética, pero $\ln 6 - \ln 3 = \ln \frac{6}{3} = \ln 2$ (por una ley de los logaritmos) y la diferencia entre términos sucesivos continúa siendo $\ln 2$.

b) $a_{10} = \ln 3 + (10 - 1)(\ln 2) = \ln 3 + 9 \ln 2 = \ln(3 \cdot 2^9) = \ln (1536)$.

c) La sucesión está definida de forma recursiva mediante $a_1 = \ln 3$ y $a_n = a_{n-1} + \ln 2$, para toda $n \geq 2$.

d) La sucesión está definida explícitamente por $a_n = \ln 3 + (n - 1)\ln 2 = \ln (3 \cdot 2^{n-1})$.

Ahora resuelva el ejercicio 21.

DEFINICIÓN Sucesión geométrica

Una sucesión $\{a_n\}$ es una **sucesión geométrica** si puede escribirse en la forma

$\{a, a \cdot r, a \cdot r^2, \ldots, a \cdot r^{n-1}, \ldots\}$ para alguna constante r distinta de cero.

El número r se denomina **razón común**.

Cada término en una sucesión geométrica puede obtenerse de forma recursiva a partir del término que le precede multiplicándolo por r:

$$a_n = a_{n-1} \cdot r \text{ (para toda } n \geq 2).$$

EJEMPLO 6 Definición de sucesiones geométricas

Para cada una de las sucesiones geométricas siguientes determine **a)** la razón, **b)** el décimo término, **c)** una regla recursiva para el n-ésimo término y **d)** una regla explícita para el n-ésimo término.

1) 3, 6, 12, 24, 48, . . .

2) $10^{-3}, 10^{-1}, 10^{1}, 10^{3}, 10^{5}, \ldots$

SOLUCIÓN

1) a) La razón entre términos sucesivos es 2.

b) $a_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 3 \cdot 2^9 = 1536$.

c) La sucesión se define de forma recursiva mediante $a_1 = 3$ y $a_n = 2a_{n-1}$ para $n \geq 2$.

d) La sucesión está definida de forma explícita mediante $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

continúa

2) a) Aplicando una ley de los exponentes, $\frac{10^{-1}}{10^{-3}} = 10^{-1-(-3)} = 10^2$ y la razón entre términos sucesivos es 10^2.

b) $a_{10} = 10^{-3} \cdot (10^2)^{10-1} = 10^{-3+18} = 10^{15}$.

c) La sucesión se define recursivamente mediante $a_1 = 10^{-3}$ y $a_n = 10^2 a_{n-1}$ para $n \geq 2$.

d) La sucesión se define explícitamente mediante $a_n = 10^{-3}(10^2)^{n-1} = 10^{-3+2n-2} = 10^{2n-5}$.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

EJEMPLO 7 Construcción de sucesiones

Los términos segundo y quinto de una sucesión son 3 y 24, respectivamente. Determine las fórmulas explícita y recursiva para la sucesión, si ésta es **a)** aritmética y **b)** geométrica.

SOLUCIÓN

a) Si la sucesión es aritmética, entonces $a_2 = a_1 + d = 3$ y $a_5 = a_1 + 4d = 24$. Restando, tenemos

$$(a_1 + 4d) - (a_1 + d) = 24 - 3$$
$$3d = 21$$
$$d = 7$$

Entonces $a_1 + d = 3$ implica $a_1 = -4$.

La sucesión está definida explícitamente por $a_n = -4 + (n - 1) \cdot 7$, o $a_n = 7n - 11$.

La sucesión está definida de forma recursiva por $a_1 = -4$ y $a_n = a_{n-1} + 7$ para $n \geq 2$.

b) Si la sucesión es geométrica, entonces $a_2 = a_1 \cdot r^1 = 3$ y $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 24$. Al dividir, tenemos

$$\frac{a_1 \cdot r^4}{a_1 \cdot r^1} = \frac{24}{3}$$
$$r^3 = 8$$
$$r = 2$$

Entonces $a_1 \cdot r^1 = 3$ implica $a_1 = 1.5$.

La sucesión está definida de forma explícita mediante $a_n = 1.5(2)^{n-1}$ o $a_n = 3(2)^{n-2}$.

La sucesión está definida de forma recursiva por $a_1 = 1.5$ y $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$.

Ahora resuelva el ejercicio 29.

GRAFICACIÓN DE UNA SUCESIÓN

La mayoría de las graficadoras le permiten graficar en "modo sequence (de sucesión)". Revise el manual del propietario para ver cómo utilizar este modo.

Sucesiones y calculadoras graficadoras

Como sucede en el caso de otras clases de funciones, es de gran ayuda representar geométricamente una sucesión con una gráfica. Existen por lo menos dos formas de obtener la gráfica de una sucesión en una calculadora graficadora. Para graficar sucesiones definidas explícitamente se emplean diagramas de dispersión de los puntos de la forma (k, a_k); otra manera es utilizar el modo de graficación de sucesiones de una calculadora graficadora.

EJEMPLO 8 Graficación de una sucesión definida explícitamente

En una calculadora graficadora genere una gráfica de la sucesión $\{a_k\}$ en la que $a_k = k^2 - 1$.

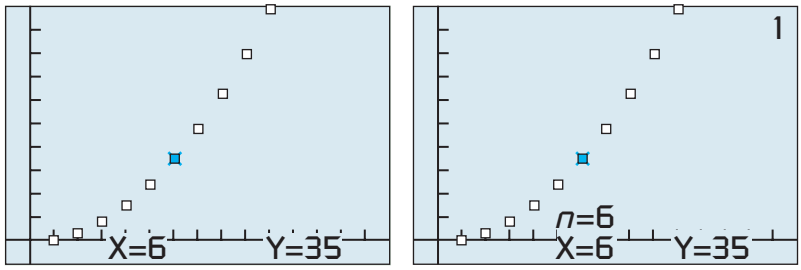
Método 1 (Diagrama de dispersión)

El comando seq(K, K, 1, 10) $\rightarrow$ L_1 coloca los primeros 10 números naturales en la lista L_1 (puede cambiar el 10 si necesita graficar más o menos puntos).

El comando $L_1^2 - 1 \rightarrow L_2$ coloca los términos correspondientes de la sucesión en la lista L_2. Un diagrama de dispersión de L_1, L_2 produce la gráfica de la figura 9.7a.

Método 2 (Modo de sucesión)

Con su calculadora en modo Sequence (sucesión) ingrese la sucesión $a_k = k^2 - 1$ en la lista Y = como u(n) = $n^2 - 1$ con nMin = 1, nMax = 10 y u(nMin) = 0 (podría cambiar el 10, si necesita graficar más o menos puntos). La figura 9.7b muestra la gráfica en la misma ventana como la figura 9.7a.



[−1, 15] por [−10, 100] a)

[−1, 15] por [−10, 100] b)

FIGURA 9.7 La sucesión $a_k = k^2 - 1$ graficada *a* como un diagrama de dispersión y *b* mediante el modo de graficación de sucesiones. Seguimiento de los valores de a_k para $k = 1, 2, 3, \ldots$ (ejemplo 8).

Ahora resuelva el ejercicio 33.

EJEMPLO 9 Generación de una sucesión con una calculadora

Mediante una calculadora graficadora genere los términos específicos de las siguientes sucesiones:

a) (Explícita) $a_k = 3k - 5$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$

b) (Recursiva) $a_1 = -2$ y $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$

continúa

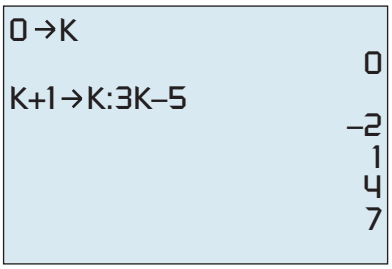


FIGURA 9.8 Al ingresar estos dos comandos (a la izquierda de la pantalla de visualización) se generarán los términos de la sucesión definida de manera explícita $a_k = 3k - 5$ (ejemplo 9a).

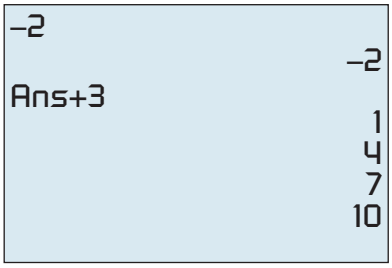


FIGURA 9.9 Al ingresar estos dos comandos (a la izquierda de la pantalla de visualización) se generarán los términos de la sucesión definida de manera recursiva con $a_1 = -2$ y $a_n = a_{n-1} + 3$ (ejemplo 9b).

NÚMEROS DE FIBONACCI

Los números de la sucesión de Fibonacci han fascinado por igual a profesionales y aficionados a las matemáticas desde el siglo XIII. No sólo constituye, como el triángulo de Pascal, una fuente rica de curiosos patrones, sino que los números de Fibonacci parecen producirse por todas partes en la naturaleza. Si usted cuenta los foliolos en una hoja, las hojas en un tallo, las filas en una espiga de trigo, las espirales en un girasol o las ramas de un tronco de un árbol, tienden a ser números de Fibonacci (revise *filotaxia* en un libro de biología).

SOLUCIÓN

a) En la pantalla principal (home), teclee los dos comandos que se muestran en la figura 9.8. Entonces la calculadora generará los términos de la sucesión cada vez que usted presione la tecla ENTER.

b) En la pantalla principal, teclee los dos comandos que se muestran en la figura 9.9. El primer comando proporciona el valor de a_1. La calculadora generará los términos restantes de la sucesión a medida que presione la tecla ENTER repetidamente.

Observe que estas dos definiciones ¡generan la misma sucesión!

Ahora, con su calculadora, resuelva los ejercicios 1 y 5.

Una definición recursiva de a_n puede hacerse en términos de cualquier combinación de los términos que le precedan, siempre que los términos precedentes ya hayan sido determinados. Un ejemplo famoso es la **sucesión de Fibonacci**, denominada así en honor de Leonardo de Pisa (alrededor de 1170-1250), quien escribió bajo el nombre de Fibonacci. Puede generar esta sucesión con los dos comandos que se muestran en la figura 9.10.

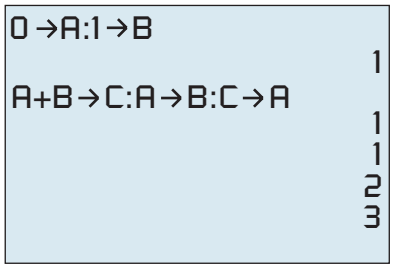


FIGURA 9.10 Los dos comandos de la izquierda generarán la sucesión de Fibonacci conforme presiona de manera repetida la tecla ENTER.

La sucesión de Fibonacci puede definirse de forma recursiva mediante tres proposiciones.

La sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci puede definirse recursivamente mediante

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

para todos los enteros positivos $n \geq 3$.

REPASO RÁPIDO 9.4 *(Para obtener ayuda consulte la sección R.1)*

En los ejercicios 1 y 2 evalúe cada expresión cuando $a = 3$, $d = 4$ y $n = 5$.

1. $a + (n - 1)d$

2. $\frac{n}{2}(2a + (n - 1)d)$

En los ejercicios 3 y 4 evalúe cada expresión cuando $a = 5$, $r = 4$ y $n = 3$.

3. $a \cdot r^{n-1}$

4. $\frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

En los ejercicios del 5 al 10 determine a_{10}.

5. $a_k = \frac{k}{k + 1}$

6. $a_k = 5 + (k - 1)3$

7. $a_k = 5 \cdot 2^{k-1}$

8. $a_k = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

9. $a_k = 32 - a_{k-1}$ y $a_9 = 17$

10. $a_k = \frac{k^2}{2^k}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.4

En los ejercicios del 1 al 4 determine los primeros 6 términos y el término centésimo de la sucesión definida explícitamente.

1. $u_n = \frac{n + 1}{n}$

2. $v_n = \frac{4}{n + 2}$

3. $c_n = n^3 - n$

4. $d_n = n^2 - 5n$

En los ejercicios del 5 al 10 determine los primeros 4 términos y el octavo término de la sucesión definida de forma recursiva.

5. $a_1 = 8$ y $a_n = a_{n-1} - 4$, para $n \geq 2$

6. $u_1 = -3$ y $u_{k+1} = u_k + 10$, para $k \geq 1$

7. $b_1 = 2$ y $b_{k+1} = 3b_k$, para $k \geq 1$

8. $v_1 = 0.75$ y $v_n = (-2)v_{n-1}$, para $n \geq 2$

9. $c_1 = 2$, $c_2 = -1$ y $c_{k+2} = c_k + c_{k+1}$, para $k \geq 1$

10. $c_1 = -2$, $c_2 = 3$ y $c_k = c_{k-2} + c_{k-1}$, para $k \geq 3$

En los ejercicios del 11 al 20 determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, proporcione el límite.

11. $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$

12. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

13. $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

14. $\{3n - 1\}$

15. $\left\{\frac{3n - 1}{2 - 3n}\right\}$

16. $\left\{\frac{2n - 1}{n + 1}\right\}$

17. $\{(0.5)^n\}$

18. $\{(1.5)^n\}$

19. $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + 3$, para $n \geq 1$

20. $u_1 = 1$ y $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$, para $n \geq 1$

En los ejercicios del 21 al 24 las sucesiones son aritméticas. Determine

a) la diferencia común,

b) el décimo término,

c) una regla recursiva para el n-ésimo término y

d) una regla explícita para el n-ésimo término.

21. $6, 10, 14, 18, \ldots$

22. $-4, 1, 6, 11, \ldots$

23. $-5, -2, 1, 4, \ldots$

24. $-7, 4, 15, 26, \ldots$

En los ejercicios del 25 al 28, las sucesiones son geométricas. Determine

a) la razón común,

b) el octavo término,

c) una regla recursiva para el n-ésimo término, y

d) una regla explícita para el n-ésimo término.

25. $2, 6, 18, 54, \ldots$

26. $3, 6, 12, 24, \ldots$

27. $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$

28. $-2, 2, -2, 2, \ldots$

29. El cuarto y el séptimo términos de una sucesión aritmética son -8 y 4, respectivamente. Determine el primer término y una regla recursiva para el n-ésimo término.

30. El quinto y el noveno términos de una sucesión aritmética son -5 y -17, respectivamente. Determine el primer término y una regla recursiva para el n-ésimo término.

31. EL segundo y el sexto términos de una sucesión geométrica son 3 y 192, respectivamente. Determine el primer término, la razón común y una regla explícita para el n-ésimo término.

32. El tercero y el sexto términos de una sucesión geométrica son -75 y -9375, respectivamente. Determine el primer término, la razón común y una regla explícita para el n-ésimo término.

En los ejercicios del 33 al 36 grafique la sucesión.

33. $a_n = 2 - \frac{1}{n}$

34. $b_n = \sqrt{n} - 3$

35. $c_n = n^2 - 5$

36. $d_n = 3 + 2n$

37. Crecimiento de la selva tropical El árbol bungy-bungy en la selva tropical del Amazonas crece 2.3 cm en promedio cada semana. Escriba una sucesión que represente la altura semanal de un bungy-bungy durante un año, si ahora tiene 7 m de altura. Muestre los primeros cuatro y los últimos dos términos.



38. Vida media (consulte la sección 3.2) El Torio-232 tiene una vida media de 14 mil millones de años. Construya una tabla que muestre el decaimiento de la vida media de una muestra de torio-232 de 16 gramos a 1 gramo; liste el tiempo (en años, iniciando con $t = 0$) en la primera columna y la masa (en gramos) en la segunda columna. ¿Qué tipo de sucesión hay en cada columna de la tabla?

39. Asientos en un estadio La primera fila de la sección J del estadio Athena tiene 7 asientos. En total hay 25 filas de asientos en la sección J; cada fila tiene dos asientos más que la fila que le precede. ¿Cuántos asientos hay en la sección J?

40. Construcción de un patio Pat diseña un patio con una terraza en forma de trapecio, que consiste en 16 filas de baldosas congruentes. El número de baldosas en las filas forma una sucesión aritmética: la primera fila tiene 15 baldosas y la última 30. ¿Cuántas baldosas se utilizaron en la terraza?

41. Actividad en equipo Junto con un compañero construya una sucesión de forma recursiva. Cada uno de ustedes elija cinco números del 1 a 9 al azar (pueden repetirlos). Mezcle sus dígitos para formar una lista de diez. Ahora cada uno de ustedes construya un número de diez dígitos usando exactamente los números de su lista.

Sea a_1 = la diferencia (positiva) entre sus dos números.

Sea a_{n+1} = la suma de los dígitos de a_n, para $n \geq 1$.

Esta sucesión converge, ya que en algún momento es constante. ¿Cuál es el límite? (Recuerde, puede verificar su respuesta al final del libro).

42. Actividad en equipo A continuación se da una interesante sucesión de palabras definidas en forma recursiva. Reúnase con tres o cuatro compañeros y, sin hablar, seleccione una palabra de esta oración. Luego, con cuidado, cuente las letras de su palabra. Muévase *hacia adelante* tantas palabras, como letras contó para llegar a una nueva palabra. Cuente las letras en la nueva palabra y repita la operación. Cuando llegue a un punto en que su siguiente movimiento salga del texto de este problema, deténgase. Comparta su última palabra con sus amigos. ¿Son iguales todas?

Preguntas de examen estandarizado

43. Verdadero o falso Si los primeros dos términos de una sucesión geométrica son negativos, entonces también lo será el tercero. Justifique su respuesta.

44. Verdadero o falso Si los primeros dos términos de una sucesión aritmética son positivos, entonces también lo será el tercero. Justifique su respuesta.

Puede usar una calculadora graficadora para resolver los ejercicios del 45 al 48.

45. Opción múltiple Los primeros dos términos de una sucesión aritmética son 2 y 8. El cuarto término es

A) 20 **B)** 26 **C)** 64 **D)** 128 **E)** 256

46. Opción múltiple ¿Cuál de las sucesiones siguientes es divergente?

A) $\left\{\dfrac{n+100}{n}\right\}$ **B)** $\{\sqrt{n}\}$ **C)** $\{\pi^{-n}\}$ **D)** $\left\{\dfrac{2n+2}{n+1}\right\}$ **E)** $\{n^{-2}\}$

47. Opción múltiple Una sucesión geométrica $\{a_n\}$ inicia $2, 6, \ldots$. ¿Cuánto es $\dfrac{a_6}{a_2}$?

A) 3 **B)** 4 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 81

48. Opción múltiple ¿Cuál de las reglas siguientes, para $n \geq 1$, definirá una sucesión geométrica, si $a_1 \neq 0$?

A) $a_{n+1} = a_n + 3$ **B)** $a_{n+1} = a_n - 3$ **C)** $a_{n+1} = a_n \div 3$

D) $a_{n+1} = a_n^3$ **E)** $a_{n+1} = a_n \cdot 3^{n-1}$

Exploraciones

49. Poblaciones de conejos Suponga que a los dos meses de su nacimiento, una pareja macho-hembra de conejos inicia a procrear, cada mes, una nueva pareja macho-hembra de conejos. Además, suponga que la colonia de conejos inicia con una pareja macho-hembra de conejos recién nacidos y ningún conejo muere durante 12 meses. Suponga que a_n representa el número de *parejas* de conejos en la colonia al cabo de $n - 1$ meses.

a) Escriba para aprender Explique por qué $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_3 = 2$.

b) Determine $a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{13}$.

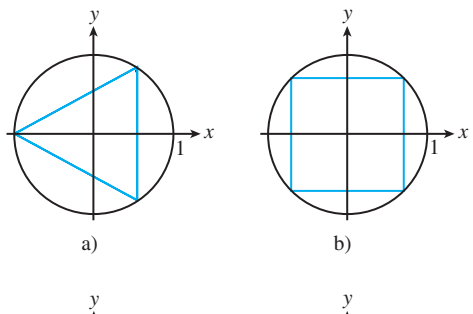
c) Escriba para aprender Explique por qué la sucesión $\{a_n\}$, $1 \leq n \leq 13$, es un modelo para el tamaño de la colonia de conejos durante un periodo de un año.

50. Sucesión de Fibonacci Calcule los primeros siete términos de la sucesión cuyo término n-ésimo es

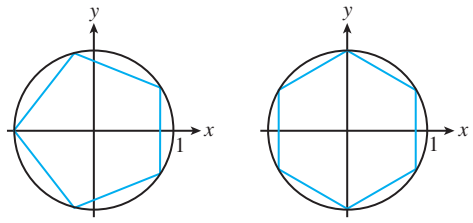
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

¿Cómo se comparan estos siete términos con los primeros siete términos de la sucesión de Fibonacci?

51. Conexión entre geometría y sucesiones En la sucesión de diagramas siguientes, en un círculo unitario están inscritos polígonos regulares que tienen al menos un lado perpendicular al eje x positivo.



a) b)



c) d)

a) Pruebe que el perímetro de cada polígono de la sucesión está dado por $a_n = 2n \operatorname{sen}(\pi/n)$, donde n es el número de lados en el polígono.

b) Investigue el valor de a_n para $n = 10$, 100, 1,000 y 10,000. ¿Qué conclusión puede sacar?

52. Sucesión recursiva La población de Centerville en 1992 fue de 525,000 y está creciendo a una tasa anual de 1.75%. Escriba una sucesión recursiva $\{P_n\}$ para la población. Indique el primer término P_1 para su sucesión.

53. Escriba para aprender Si $\{a_n\}$ es una sucesión geométrica con todos los términos positivos, explique por qué $\{\log a_n\}$ debe ser aritmética.

54. Escriba para aprender Si $\{b_n\}$ es una sucesión aritmética, explique por qué $\{10^{b_n}\}$ debe ser geométrica.

Ampliación de las ideas

55. Una sucesión de matrices Escriba los primeros siete términos de la "sucesión geométrica" cuyo primer término es la matriz $[1 \;\; 1]$ y cuya razón común es la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Cómo está relacionada esta sucesión de matrices con la sucesión de Fibonacci?

56. Otra sucesión de matrices Escriba los primeros siete términos de la "sucesión geométrica" cuyo primer término es la matriz $[1 \;\; a]$ y cuya razón común es la matriz $\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Cómo se relaciona esta sucesión de matrices con la sucesión aritmética?

9.5 Series

Aprenderá acerca de...

- La notación de suma
- Las sumas de sucesiones aritméticas y geométricas
- Las series infinitas
- La convergencia de series geométricas

. . . porque

Las series infinitas son el corazón del cálculo integral.

Notación de suma

Queremos examinar las fórmulas de la suma de términos de sucesiones aritméticas y geométricas, pero primero necesitamos una notación para escribir la suma de un número indefinido de términos. La letra griega sigma mayúscula (Σ) proporciona nuestra notación abreviada para una "suma".

DEFINICIÓN Notación de suma (sumatoria)

En la **notación de suma**, la suma de los términos de la sucesión $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se expresa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

que se lee "la suma de a_k desde $k = 1$ hasta n".

La variable k se denomina **índice de la suma**.

SUMAS EN UNA CALCULADORA

Si considera las sumas como los valores de la suma de una sucesión, no es difícil traducir la notación sigma a la sintaxis de la calculadora. A continuación, en sintaxis de calculadora, se muestran las primeras tres sumas de la exploración 1 (no pruebe éstas en su calculadora hasta que primero haya calculado sus respuestas con lápiz y papel).

1. sum (seq (3K, K, 1, 5)).

2. sum (seq (K^2, K, 5, 8)).

3. sum (seq (cos(Nπ), N, 0, 12)).

EXPLORACIÓN 1 Suma con sigma

La notación sigma en realidad es más versátil de lo que sugiere la notación anterior. Vea si puede determinar el número representado por cada una de las expresiones siguientes.

1. $\sum_{k=1}^{5} 3k$ **2.** $\sum_{k=5}^{8} k^2$ **3.** $\sum_{n=0}^{12} \cos(n\pi)$ **4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\pi)$ **5.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$

(Si tiene problemas con el número 5, aquí está una sugerencia: ¡Escriba la suma como un decimal!)

Aunque quizá los calculó correctamente, los números 4 y 5 de la exploración anterior encierran más de lo que aparentan. Al final de esta sección, tendremos más que decir acera de estas sumas "infinitas".

Sumas de sucesiones aritméticas y geométricas

Una de las más famosas leyendas del saber popular de matemáticas concierne al alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), cuyo talento matemático fue evidente a muy temprana edad. Una versión de la historia ubica a Gauss, a la edad de diez años, en una clase en la que su maestro pidió que sumasen todos los números desde 1 hasta 100. Mientras sus compañeros aún estaban escribiendo el problema,

Gauss se dirigió al frente del salón para presentar su pizarra al maestro. Éste, seguro de que Gauss sólo podía haber adivinado, se negó a ver su respuesta; Gauss simplemente dejó la pizarra diciendo "Aquí está" y regresó a su asiento. Posteriormente, después de que todas las pizarras se recogieron, el maestro observó el trabajo de Gauss, que consistía de un solo número, la respuesta correcta. Ningún otro estudiante —dice la leyenda— obtuvo la respuesta correcta.

Para los matemáticos, el hecho importante de esta leyenda es *cómo* el joven Gauss obtuvo la respuesta tan rápido. En la exploración 2 se reproduce su técnica.

EXPLORACIÓN 2 **Idea de Gauss**

Su reto es encontrar la suma de los números naturales desde 1 hasta 100 sin usar una calculadora.

1. En una pedazo ancho de papel, escriba la suma

$$\text{“}1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100\text{”}$$

2. Bajo esta suma, escriba la suma

$$\text{“}100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1\text{”}.$$

3. Sume los números por parejas en columnas *verticales* y observe que obtiene la misma suma 100 veces. ¿Cuál es?
4. ¿Cuál es la suma de los 100 números idénticos de la parte 3?
5. Explique por qué la mitad de la respuesta en la parte 4 es la respuesta del reto. ¿Puede determinarla sin una calculadora?

Si esta historia es verdadera, entonces el joven Gauss había descubierto un hecho que sus mayores sabían acerca de las sucesiones aritméticas. Si usted escribe una sucesión aritmética finita hacia adelante en una línea y hacia atrás en la línea debajo de ella, entonces todas las parejas apiladas verticalmente suman el mismo número. Al multiplicar este número por el número de términos, n, y dividiendo entre 2, obtenemos una forma abreviada de la suma de los n términos. Establecemos este resultado como un teorema.

TEOREMA **Suma de una sucesión aritmética finita**

Sea $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ una sucesión aritmética finita con diferencia común d. Entonces la suma de los términos de la sucesión es

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \\ &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)\end{aligned}$$

Demostración

Podemos construir la sucesión hacia delante iniciando en a_1 y *sumando* d cada vez, o podemos construir la sucesión iniciando en a_n y *restando* d cada vez. Así obtenemos dos expresiones para la suma que estamos buscando:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d)$$

Al sumar de forma vertical, obtenemos

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)$$

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k = n(a_1 + a_n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

Si sustituimos $a_1 + (n-1)d$ para a_n, obtenemos la fórmula alternativa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

EJEMPLO 1 Suma de términos de una sucesión aritmética

Una sección de una esquina de un estadio tiene 8 asientos a lo largo de la fila de enfrente. Cada fila sucesiva tiene dos asientos más que la fila que le precede. Si la fila superior tiene 24 asientos, ¿cuántos asientos hay en toda la sección?

SOLUCIÓN Los números de asientos en las filas forman una sucesión aritmética con

$$a_1 = 8,\ a_n = 24 \quad \text{y} \quad d = 2.$$

Al resolver $a_n = a_1 + (n-1)d$, encontramos que

$$24 = 8 + (n-1)(2)$$

$$16 = (n-1)(2)$$

$$8 = \text{n} - 1$$

$$n = 9.$$

Mediante la aplicación del teorema de la suma de una sucesión aritmética finita, el número total de asientos en la sección es $9(8 + 24)/2 = 144$.

Podemos respaldar numéricamente esta respuesta calculando la suma en una calculadora:

$$\text{sum(seq(8 + (N} - 1)2, \text{N, 1, 9)} = 144.$$

Ahora resuelva el ejercicio 7.

Como podría esperar, también existe una fórmula conveniente para sumar los términos de una sucesión geométrica finita.

TEOREMA Suma de una sucesión geométrica finita

Sea $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ una sucesión geométrica finita con razón común $r \neq 1$. Entonces la suma de los términos de la sucesión es

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

Demostración

Como la sucesión es geométrica, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \cdots + a_1 \cdot r^{n-1}.$$

Por consiguiente,

$$r \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \cdots + a_1 \cdot r^{n-1} + a_1 \cdot r^n.$$

Si ahora *restamos* la suma inferior de la suma que está arriba de ella, tenemos (después de eliminar muchos ceros):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - r \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = a_1 - a_1 \cdot r^n$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)(1 - r) = a_1(1 - r^n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

EJEMPLO 2 Suma de los términos de una sucesión geométrica

Determine la suma de la sucesión geométrica $4, -4/3, 4/9, -4/27, \ldots, 4(-1/3)^{10}$.

SOLUCIÓN Podemos ver que $a_1 = 4$ y $r = -1/3$. El término n-ésimo es $4(-1/3)^{10}$, lo que significa que $n = 11$ (recuerde que el exponente en el término n-ésimo es $n - 1$, no n). Al aplicar el teorema de la suma de una sucesión geométrica finita, encontramos que

$$\sum_{n=1}^{11} 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{4(1 - (-1/3)^{11})}{1 - (-1/3)} \approx 3.000016935.$$

Podemos respaldar esta respuesta haciendo la suma real en la calculadora:

sum(seq(4(−1/3)^(N−1), N, 1, 11) = 3.000016935.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Como una aplicación práctica del teorema de la suma de una sucesión geométrica finita, ataremos un cabo suelto del final de la sección 3.6, donde aprendió que el valor futuro (VF) de una anualidad ordinaria que consiste en n pagos periódicos e iguales de R dólares a una tasa de interés i por periodo de capitalización (intervalo de pago) es

$$VF = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Ahora podemos considerar la matemática que subyace a esta fórmula. Los n pagos permanecen en la cuenta por diferentes intervalos de tiempo y así generan diferentes montos de interés. El valor total de la anualidad al cabo de n periodos de pago (consulte el ejemplo 8 en la sección 3.6) es

$$VF = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + \cdots + R(1 + i)^{n-1}.$$

Los términos de esta suma forman una sucesión geométrica, con primer término R y razón común $(1 + i)$. Al aplicar el teorema de la suma de una sucesión geométrica finita, la suma de los n términos es

$$\begin{aligned} VF &= \frac{R(1 - (1 + i)^n)}{1 - (1 + i)} \\ &= R\frac{1 - (1 + i)^n}{-i} \\ &= R\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \end{aligned}$$

Series infinitas

Si en el ejemplo 2 cambia el "11" en la calculadora por números cada vez mayores, encontrará que la suma se aproxima a un valor de 3. Esto no es coincidencia. En el lenguaje de límites,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4(1 - (-1/3)^n)}{1 - (-1/3)} \\ &= \frac{4(1 - 0)}{4/3} \qquad \text{Como } \lim_{n\to\infty}(-1/3)^n = 0. \\ &= 3 \end{aligned}$$

Esto nos proporciona la oportunidad de ampliar el significado usual de la palabra "suma", que siempre se aplica a un número *finito* de términos que se sumarán. Mediante el uso de límites, podemos darle sentido a expresiones en las que se suman un número *infinito* de términos. Tales expresiones se llaman **series infinitas**.

DEFINICIÓN Series infinitas

Una **serie infinita** es una expresión de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

Lo primero que hay que entender acerca de una serie infinita es que no es, en realidad, una suma. Hay propiedades de la suma de los números reales que nos permiten extender la definición de $a + b$ a sumas como $a + b + c + d + e + f$, pero no a "sumas infinitas". Por ejemplo, podemos sumar cualquier número finito de números 2 y obtener un número real, pero si sumamos un número *infinito* de 2, no obtenemos un número real. Las sumas no se comportan de esa manera.

Lo que hace tan interesante a una serie es que, en ocasiones, (como en el ejemplo 2) la sucesión de **sumas parciales**, que si son verdaderas sumas, se aproxima a un límite finito S:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = S.$$

En este caso, decimos que la serie **converge** a S, y tiene sentido definir S como la **suma de la serie infinita**. En notación sigma,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

Si el límite de las sumas parciales no existe, entonces la serie **diverge**, y no tiene suma.

EJEMPLO 3 Examen de límites de sumas parciales

Para cada una de las series siguientes determine los primeros cinco términos de la sucesión de sumas parciales. ¿Cuál de las series parece que converge?

a) $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots$

b) $10 + 20 + 30 + 40 + \cdots$

c) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

SOLUCIÓN

a) Las primeras cinco sumas parciales son $\{0.1, 0.11, 0.111, 0.1111, 0.11111\}$. Éstas parecen aproximarse a un límite de $0.\overline{1} = 1/9$, que sugeriría que la serie converge a una suma de 1/9.

b) Las primeras cinco sumas parciales son $\{10, 30, 60, 100, 150\}$. Estos números aumentan sin cota y no se aproximan a un límite. La serie diverge y no tiene suma.

c) Las primeras cinco sumas parciales son $\{1, 0, 1, 0, 1\}$. Estos números oscilan y no se aproximan a un límite. La serie diverge y no tiene suma.

Ahora resuelva el ejercicio 23.

En el ejemplo 3c podría sentirse tentado a "poner en parejas" los términos para obtener una suma infinita de ceros, (y, por tanto, una suma de 0), pero estaría aplicando una regla (a saber, la *propiedad asociativa de la suma*) que funciona en sumas *finitas* pero, en general, no en series infinitas. La sucesión de sumas parciales no tiene un límite, así que cualquier manipulación de la serie del ejemplo 3c que parezca tener como resultado una suma, en realidad no tiene significado.

Convergencia de series geométricas

Una parte importante de un curso de cálculo es la determinación de la convergencia o divergencia de una serie infinita en la que las series se utilizan para representar funciones. La mayoría de los criterios de convergencia están fuera del alcance de este curso pero, para el caso de las series geométricas, definiremos el tema completamente.

TEOREMA Suma de una serie geométrica infinita

La serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot r^{k-1}$ converge si, y sólo si, $|r| < 1$.

Si converge, la suma es $a/(1 - r)$.

Demostración

Si $r = 1$, la serie es $a + a + a + \cdots$, que no está acotada y, por tanto, diverge. Si $r = -1$, la serie es $a - a + a - a + \cdots$, que diverge (consulte el ejemplo 3c). Si $r \neq 1$ entonces, mediante el teorema de la suma de una sucesión geométrica finita, la n-ésima suma parcial de la serie es $\sum_{k=1}^{n} a \cdot r^{k-1} = a(1 - r^n)/(1 - r)$. El límite de las sumas parciales es $\lim_{n\to\infty}[a(1 - r^n)/(1 - r)]$, que converge si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} r^n$ es un número finito. Pero, $\lim_{n\to\infty} r^n$ es 0 cuando $|r| < 1$ y es no acotado cuando $|r| > 1$. Por tanto, la sucesión de sumas parciales converge si, y sólo si, $|r| < 1$, en cuyo caso la suma de la serie es

$$\lim_{n\to\infty}[a(1 - r^n)/(1 - r)] = a(1 - 0)/(1 - r) = a/(1 - r).$$

EJEMPLO 4 Suma de series geométricas infinitas

Determine si la serie converge; si lo hace, proporcione la suma.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3(0.75)^{k-1}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$ **d)** $\displaystyle 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

SOLUCIÓN

a) Como $|r| = |0.75| < 1$, la serie converge. El primer término es $3(0.75)^0 = 3$, por lo que la suma es $a/(1 - r) = 3/(1 - 0.75) = 12$.

b) Como $|r| = |-4/5| < 1$, la serie converge. El primer término es $(-4/5)^0 = 1$, por lo que la suma es $a/(1 - r) = 1/(1 - (-4/5)) = 5/9$.

c) Como $|r| = |\pi/2| > 1$, la serie diverge.

d) Como $|r| = |1/2| < 1$, la serie converge. El primer término es 1 y así la suma es $a/(1 - r) = 1/(1 - 1/2) = 2$.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

EJEMPLO 5 Conversión de un decimal que se repite a forma de fracción

Exprese $0.\overline{234} = 0.234234234\ldots$ en forma de fracción.

SOLUCIÓN Podemos escribir este número como una suma: $0.234 + 0.000234 + 0.000000234 + \cdots$.

Ésta es una serie geométrica infinita en la que $a = 0.234$ y $r = 0.001$. La suma es

$$\frac{a}{1-r} = \frac{0.234}{1-0.001} = \frac{0.234}{0.999} = \frac{234}{999} = \frac{26}{111}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 31.

REPASO RÁPIDO 9.5 *(Para obtener ayuda consulte la sección 9.4)*

En los ejercicios del 1 al 4 $\{a_n\}$ es aritmética. Utilice la información dada para determinar a_{10}.

1. $a_1 = 4;\ d = 2$

2. $a_1 = 3;\ a_2 = 1$

3. $a_3 = 6;\ a_8 = 21$

4. $a_5 = 3;\ a_{n+1} = a_n + 5$, para $n \geq 1$

En los ejercicios del 5 al 8 $\{a_n\}$ es geométrica. Utilice la información dada para determinar a_{10}.

5. $a_1 = 1;\ a_2 = 2$

6. $a_4 = 1;\ a_6 = 2$

7. $a_7 = 5;\ r = -2$

8. $a_8 = 10;\ a_{12} = 40$

9. Determine la suma de los primeros cinco términos de la sucesión $\{n^2\}$.

10. Determine la suma de los primeros cinco términos de la sucesión $\{2n - 1\}$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.5

En los ejercicios del 1 al 6 escriba cada suma mediante la notación de suma, suponiendo que el patrón sugerido se conserva.

1. $-7 - 1 + 5 + 11 + \cdots + 53$

2. $2 + 5 + 8 + 11 + \cdots + 29$

3. $1 + 4 + 9 + \cdots + (n+1)^2$

4. $1 + 8 + 27 + \cdots + (n+1)^3$

5. $6 - 12 + 24 - 48 + \cdots$

6. $5 - 15 + 45 - 135 + \cdots$

En los ejercicios del 7 al 12 determine las sumas de las sucesiones aritméticas.

7. $-7, -3, 1, 5, 9, 13$

8. $-8, -1, 6, 13, 20, 27$

9. $1, 2, 3, 4, \ldots, 80$

10. $2, 4, 6, 8, \ldots, 70$

11. $117, 110, 103, \ldots, 33$

12. $111, 108, 105, \ldots, 27$

En los ejercicios del 13 al 16 determine las sumas de las sucesiones geométricas.

13. $3, 6, 12, \ldots, 12{,}288$

14. $5, 15, 45, \ldots, 98{,}415$

15. $42, 7, \frac{7}{6}, \ldots, 42\left(\frac{1}{6}\right)^8$

16. $42, -7, \frac{7}{6}, \ldots, 42\left(-\frac{1}{6}\right)^9$

En los ejercicios del 17 al 22 determine las sumas de los primeros n términos de las sucesiones. Las sucesiones son aritméticas o geométricas.

17. $2, 5, 8, \ldots;\ n = 10$

18. $14, 8, 2, \ldots;\ n = 9$

19. $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots;\ n = 12$

20. $6, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \ldots;\ n = 11$

21. $-1, 11, -121, \ldots;\ n = 9$

22. $-2, 24, -288, \ldots;\ n = 8$

23. Determine las primeras seis sumas parciales de las series infinitas siguientes. Si las sumas tienen un límite finito, escriba "convergente"; si no, escriba "divergente".

a) $0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \cdots$

b) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$

24. Determine las primeras seis sumas parciales de las series infinitas siguientes. Si las sumas tienen un límite finito, escriba "convergente"; si no, escriba "divergente".

a) $-2 + 2 - 2 + 2 - 2 + \cdots$

b) $1 - 0.7 - 0.07 - 0.007 - 0.0007 - \cdots$

En los ejercicios del 25 al 30 determine si las series geométricas infinitas convergen. Si es así, determine sus sumas.

25. $6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \cdots$ **26.** $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \cdots$

27. $\frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \cdots$

28. $\frac{1}{48} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{9}{16} + \cdots$

29. $\sum_{j=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^j$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$

En los ejercicios del 31 al 34 exprese los números racionales como cocientes de enteros.

31. 7.14141414 . . . **32.** 5.93939393 . . .

33. −17.268268268 . . . **34.** −12.876876876 . . .

35. Cuenta de ahorros La siguiente tabla muestra el saldo en diciembre, para cada año desde 1996 hasta 2000, en una cuenta de ahorros a una tasa compuesta fija:

Año	1996	1997	1998	1999	2000
Saldo	$20,000	$22,000	$24,200	$26,620	$29,282

a) Los saldos forman una sucesión geométrica. ¿Cuál es el valor de r?

b) Escriba una fórmula para el saldo en la cuenta n años después de diciembre de 1996.

c) Determine la suma de los saldos de diciembre desde 1996 hasta 2006 inclusive.

36. Cuenta de ahorros La tabla siguiente muestra el saldo de diciembre en una cuenta de ahorros con interés simple, para cada año desde 1996 hasta 2000.

Año	1996	1997	1998	1999	2000
Saldo	$18,000	$20,016	$22,032	$24,048	$26,064

a) Los saldos forman una sucesión aritmética. ¿Cuál es d?

b) Escriba una fórmula para el saldo en la cuenta n años después de diciembre de 1996.

c) Determine la suma de los saldos de diciembre desde 1996 hasta 2006 inclusive.

37. Anualidad El señor O'Hara deposita $120 al final de cada mes en una cuenta de ahorros que paga 7% de interés compuesto cada mes. Al cabo de 10 años, el saldo en la cuenta, en dólares, es

$$120\left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^0 + 120\left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^1 + \cdots + 120\left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{119}.$$

a) Ésta es una serie geométrica. ¿Cuál es el primer término? ¿Cuál es r?

b) Utilice la fórmula para la suma de una serie geométrica finita, para determinar el saldo.

38. Anualidad La señora Argentieri deposita $100 al final de cada mes en una cuenta que paga 8% de interés compuesto mensualmente. Después de 10 años, el saldo en la cuenta, en dólares, es

$$100\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^0 + 100\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^1 + \cdots + 100\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{119}.$$

a) Ésta es una serie geométrica. ¿Cuál es el primer término? ¿Cuál es r?

b) Utilice la fórmula para la suma de una sucesión geométrica finita para determinar el saldo.

39. Actividad en equipo Seguimiento del rebote de una pelota Cuando una "superpelota" apareció en escena en la década de 1960, los niños en todo Estados Unidos estaban sorprendidos de que estas pelotas de caucho duro pudieran rebotar al 90% de la altura desde la que eran soltadas. Si una superpelota se suelta desde una altura de 2 m, ¿cuánto recorre en el instante en que pega en el piso la décima vez? [*Sugerencia:* La pelota cae para rebotar por primera vez, y a partir de allí sube y baja].

40. Actividad en equipo Comportamiento en los extremos ¿La gráfica de

$$f(x) = 2\left(\frac{1 - 1.05^x}{1 - 1.05}\right)$$

tiene una asíntota horizontal a la derecha? ¿Cómo está relacionada con la convergencia o divergencia de la serie

$$2 + 2.1 + 2.205 + 2.31525 + \cdots ?$$

Preguntas de examen estandarizado

41. Verdadero o falso Si todos los términos de una serie son positivos, la serie suma un número positivo. Justifique su respuesta.

42. Verdadero o falso Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ambas divergen, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge. Justifique su respuesta.

Resuelva los ejercicios del 43 al 46 sin utilizar calculadora.

43. Opción múltiple La serie $3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + \cdots + 3^{-n} + \cdots$

A) converge a 1/2 **B)** converge a 1/3 **C)** converge a 2/3

D) converge a 3/2 **E)** diverge

44. Opción múltiple Si $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 4$, entonces $x =$

A) 0.2 **B)** 0.25 **C)** 0.4 **D)** 0.8 **E)** 4.0

45. Opción múltiple La suma de una serie geométrica infinita con primer término 3 y segundo término 0.75 es

A) 3.75 **B)** 2.4 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 12

46. Opción múltiple $\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(-\frac{5}{3}\right)^n =$

A) -6 **B)** $-\frac{5}{2}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** 10 **E)** es divergente.

Exploraciones

47. Densidad de población El *National Geographic Picture Atlas of Our Fifty States* (2001) agrupa los estados de la Unión Americana en diez regiones. Las dos agrupaciones mayores son el área Central (tabla 9.1) y el área Sureste (tabla 9.2). En las tablas se da la población e información del área para las dos regiones. Las poblaciones son cifras oficiales del censo de Estados Unidos de 2000.

a) ¿Cuál es la población total de cada región?

b) ¿Cuál es el área total de cada región?

c) ¿Cuál es la densidad de población (en personas por milla cuadrada) de cada región?

d) Escriba para aprender Para las dos regiones, compare la densidad de población de cada estado. ¿Cuál es el promedio de las densidades de población de los siete estados para cada región? Explique por qué estas respuestas difieren de las encontradas en la parte **c**.

Tabla 9.1 Área Central

Estado	Población	Área (millas^2)
Iowa	2,926,324	56,275
Kansas	2,688,418	82,277
Minnesota	4,919,479	84,402
Missouri	5,595,211	69,697
Nebraska	1,711,283	77,355
Dakota del Norte	642,200	70,703
Dakota del Sur	754,844	77,116

Tabla 9.2 El Sureste

Estado	Población	Área (millas^2)
Alabama	4,447,100	51,705
Arkansas	2,673,400	53,187
Florida	15,982,378	58,644
Georgia	8,186,453	58,910
Lousiana	4,468,976	47,751
Mississippi	2,844,658	47,689
S. Carolina	4,012,012	31,113

48. Determinación de un patrón Escriba la serie infinita $-1 + 2 + 7 + 14 + 23 + \cdots + 62$ en notación de suma.

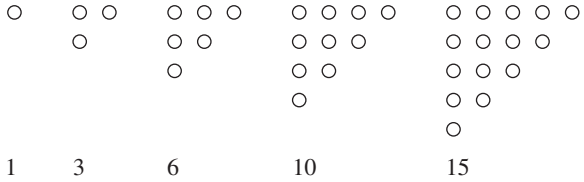
Ampliación de las ideas

49. Sucesión y serie de Fibonacci Complete la tabla siguiente, donde F_n es el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci y S_n es la n-ésima suma parcial de la serie de Fibonacci. Con base en la evidencia numérica de la tabla, formule una conjetura.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F_k$$

n	F_n	S_n	$F_{n+2} - 1$
1	1		
2	1		
3	2		
4			
5			
6			
7			
8			
9			

50. Revisión de números triangulares El ejercicio 41 de la sección 9.2 introdujo los **números triangulares** como números que cuentan objetos acomodados en arreglos triangulares:



1 3 6 10 15

En ese ejercicio, usted proporcionó un argumento geométrico de que el n-ésimo número triangular era $n(n+1)/2$. Pruebe algebraicamente esa fórmula mediante el teorema de la suma de una sucesión aritmética finita.

51. Números cuadrados y números triangulares Pruebe que la suma de dos números triangulares consecutivos es un número cuadrado, esto es, pruebe que

$$T_{n-1} + T_n = n^2$$

para todos los enteros positivos $n \geq 2$. Utilice un enfoque geométrico y un enfoque algebraico.

52. Serie armónica Grafique la sucesión de sumas parciales de la *serie armónica*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Sobreponga la gráfica de $f(x) = \ln x$. La figura resultante debe respaldar la afirmación de que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \ln n,$$

para todos los enteros positivos n. Construya una tabla de valores para dar un mayor respaldo a la afirmación. Explique por qué la afirmación implica que la serie armónica debe divergir.

9.6 Inducción matemática

Aprenderá acerca de...

- El problema de las torres de Hanoi
- El principio de inducción matemática
- Inducción y deducción

. . . porque

El principio de inducción matemática es una valiosa técnica para demostrar fórmulas de combinatoria.

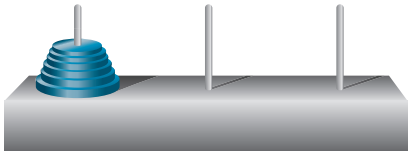


FIGURA 9.11 El juego de las Torres de Hanoi. El objetivo es mover toda la pila de discos a la "torre" del extremo derecho un disco a la vez, nunca colocando un disco más grande encima de uno más pequeño.

HISTORIA DE LAS TORRES DE HANOI

La leyenda de la Torre de Hanoi se remonta a 1883, cuando Édouard Lucas comercializó el juego como "La Tour de Hanoï", traída del Oriente por el "Profesor N. Claus de Siam" (un anagrama de "Profesor Lucas d'Amiens"). A partir de entonces, la leyenda se difundió. El juego ha sido un favorito entre los programadores de computadoras, así que una búsqueda en la Web sobre la "Torre de Hanoi" lo llevará a muchos sitios que le permitirán jugarlo en la computadora de su casa.

El problema de las Torres de Hanoi

Quizá conozca un juego basado en un conjunto de discos de diferentes diámetros y una base con tres clavijas (llamadas torres) (figura 9.11). El juego no es difícil de ganar una vez que se entiende el truco pero, aunque sepa cómo hacerlo, toma un rato mover todos los discos. Un matemático quiere calcular el número *mínimo* de movimientos requeridos para ganar el juego, no por impaciente, sino porque constituye un problema matemático interesante.

En caso de que las matemáticas no constituyan motivación suficiente para examinar el problema, existe una leyenda relacionada que introduce cierto sentido de urgencia. Ésta dice que, al inicio del tiempo, fue creado un juego similar pero con 64 discos de oro, y que una orden especial de monjes del Lejano Oriente ha estado moviendo los discos, un movimiento por segundo desde entonces, utilizando siempre el número mínimo de movimientos requeridos para ganar el juego. Cuando se haya movido el último disco, será el fin de los tiempos. El problema de las Torres de Hanoi es, simplemente, calcular cuánto tiempo nos queda.

Resolveremos el problema demostrando un teorema general que proporciona el número mínimo de movimientos para cualquier número de discos. La técnica de demostración que utilizamos se denomina principio de inducción matemática, el tema de esta sección.

DEFINICIÓN La solución de las Torres de Hanoi

El número mínimo de movimientos requeridos para mover una pila de n discos en un juego de las Torres de Hanoi es $2^n - 1$.

Demostración

(Paso base) Primero, notamos que la afirmación es verdadera cuando $n = 1$. Ciertamente, podemos mover un disco a la torre de la derecha en (al menos) un movimiento, y $2^1 - 1 = 1$.

(Hipótesis de inducción) Ahora, suponemos que la afirmación se cumple para $n = k$; esto es, el número mínimo de movimientos requerido para mover k discos es $2^k - 1$ (hasta ahora, la única k de la que estamos seguros es 1, pero siga leyendo).

(Paso inductivo) Ahora consideramos el caso cuando $n = k + 1$ discos. Para llegar al disco inferior, primero debemos mover la pila completa de k discos que están encima de él. *Por la hipótesis de inducción, que acabamos de hacer*, esto tomará un mínimo de $2^k - 1$ movimientos. Entonces podemos mover el disco de abajo a la torre libre (un movimiento). Por último, debemos mover la pila de k discos de regreso sobre el disco inferior; otra vez, *por nuestra hipótesis*, un mínimo de $2^k - 1$ movimientos. En total, mover $k + 1$ discos requiere

$$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

movimientos. Como esto coincide con la fórmula del enunciado de la demostración, hemos demostrado que la afirmación es verdadera para $n = k + 1$ discos, bajo la suposición de que es verdadera para $n = k$. Sorprendentemente, hemos terminado. Recuerde que *demostramos* que el teorema es verdadero para $n = 1$. Por tanto, por el paso inductivo, también debe ser cierto para $n = 1$. Otra vez, por el paso inductivo, debe ser verdadero par $n = 3$. Y así sucesivamente, para todos los enteros positivos n.

Si aplicamos la solución de las Torres de Hanoi al legendario problema de las Torres de Hanoi, los monjes necesitarán $2^{64} - 1$ segundos para mover los 64 discos de oro. La conjetura más grande acerca de la edad del universo es algunas veces del orden de 20 mil millones de años. Si usted convierte $2^{64} - 1$ segundos a años, encontrará que el final de los tiempos (al menos de acuerdo con esta leyenda particular) no es inminente. De hecho, podría sorprenderse de ¡cuánto tiempo queda!

EXPLORACIÓN 1 **Cómo ganar el juego**

Una cosa que la solución de las Torres de Hanoi no establece es cómo obtener la pila para terminar en la torre del extremo derecho, en lugar de la torre de en medio. Previsiblemente, depende de hacia dónde mueva el primer disco, pero también depende de la altura de la pila. Usando un juego de algún sitio Web, o con monedas de tamaños diferentes, o incluso el juego real, si tiene uno, intente con un disco, luego con dos, después con tres, posteriormente con 4 y así sucesivamente, conservando un registro de cuál debe ser su primer movimiento para tener la pila terminada en la torre del extremo derecho en $2^n - 1$ movimientos. ¿Cuál es la regla general para una pila de n discos?

El principio de inducción matemática

La demostración de la solución de las Torres de Hanoi utilizó una técnica general conocida como el principio de inducción matemática. La Inducción Matemática es una poderosa herramienta para demostrar toda clase de teoremas acerca de enteros positivos. Establecemos *el paso base* de la demostración mediante la determinación de la validez del teorema para 1, luego mostramos la *hipótesis de inducción* que "la validez para k" implica "la validez para $k + 1$".

Principio de inducción matemática

Sea P_n una proposición acerca del entero n. Entonces P_n es verdadera para todos los enteros positivos n siempre que se satisfagan las condiciones siguientes:

1. (el paso base) P_1 es verdadera,

2. (paso inductivo) si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.



FIGURA 9.12 El principio de inducción matemática visualizado mediante fichas de dominó. La caída de la ficha # 1 garantiza la caída del dominó n, para todos los enteros positivos n.

Puede visualizar el funcionamiento de este principio mediante una sucesión infinita de fichas de dominó colocadas en forma vertical, cada una suficientemente cerca de su vecina de modo que si cae cualquier k-ésima ficha derribará a la ficha $(k + 1)$ ésima (figura 9.12). Dado ese hecho (paso inductivo), derribar la ficha 1 garantiza que se derribe la sucesión infinita de fichas.

Utilizaremos el principio para probar un hecho que ya conocemos.

EJEMPLO 1 Uso de inducción matemática

Pruebe que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ es cierto para todos los enteros positivos n.

SOLUCIÓN Llamemos P_n a la proposición. Podríamos verificar P_n mediante la fórmula para la suma de una sucesión aritmética, pero a continuación se describe la demostración mediante inducción matemática.

continúa

(Paso base) Para $n = 1$, la ecuación se reduce a P_1: $1 = 1^2$, que es verdadera.

(Hipótesis de inducción) Suponga que la ecuación es verdadera para $n = k$. Esto es, suponga que

$$P_k\text{: } 1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \text{ es verdadera.}$$

(Paso inductivo) El siguiente término en el lado izquierdo sería $2(k + 1) - 1$. Sumamos éste a ambos lados de P_k y obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) &= k^2 + (2(k + 1) - 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Ésta es exactamente la proposición P_{k+1}, por lo que la ecuación es verdadera para $n = k + 1$. Por lo tanto, por inducción matemática, P_n es verdadera para todos los enteros positivos.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Observe que *no* colocamos $k + 1$ en ambos lados de la ecuación P_n para verificar el paso inductivo; si hubiésemos hecho eso, no habría nada que verificar. Si se encuentra verificando el paso inductivo sin utilizar la hipótesis de inducción, entonces está perdido.

EJEMPLO 2 Uso de inducción matemática

Demuestre que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = [n(n + 1)(2n + 1)]/6$ es verdadera para todos los enteros positivos n.

SOLUCIÓN Sea P_n el enunciado $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = [n(n + 1)(2n + 1)]/6$.

(Paso base) P_1 es verdadera ya que $1^2 = [1(2)(3)/6]$.

(Hipótesis de inducción) Suponga que P_k es verdadera, de modo que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}.$$

(Paso inductivo) El siguiente término del lado izquierdo sería $(k + 1)^2$. Lo sumamos a ambos lados de P_k y obtenemos

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k + 1)^2 &= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 \\ &= \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} \\ &= \frac{(k + 1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6} \\ &= \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)(2(k + 1) + 1)}{6} \end{aligned}$$

Ésta es exactamente la proposición P_{k+1}, por lo que la ecuación es verdadera para $n = k + 1$. Por lo tanto, por inducción matemática, P_n es verdadera para todos los enteros positivos.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

Las aplicaciones de la inducción matemática pueden ser muy diferentes a las de los primeros dos ejemplos. A continuación se presenta una que incluye divisibilidad.

EJEMPLO 3 Prueba de divisibilidad

Demuestre que $4^n - 1$ siempre es divisible entre 3 para todo entero positivo n.

SOLUCIÓN Sea P_n la proposición: $4^n - 1$ es divisible entre 3 para todo entero positivo n.

(Paso base) P_1 es verdadera ya que $4^1 - 1 = 3$ es divisible entre 3.

(Hipótesis de inducción) Suponga que P_k es verdadera, así que $4^k - 1$ es divisible entre 3.

(Paso inductivo) Necesitamos probar que $4^{k+1} - 1$ es divisible entre 3.

Utilizando un poco de álgebra, vemos que $4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 4(4^k - 1) + 3$.

Por la hipótesis de inducción, $4^k - 1$ es divisible entre 3. Por supuesto, también lo es 3. Así que $4(4^k - 1) + 3$ es una suma de múltiplos de 3, y por consiguiente es divisible entre 3. Ésta es exactamente la proposición P_{k+1}, por lo que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, por inducción matemática, P_n es verdadera para todo entero positivo. ***Ahora resuelva el ejercicio 19.***

Inducción y deducción

Las palabras *inducción* y *deducción* se utilizan comúnmente para contrastar dos patrones de pensamiento lógico. Razonamos mediante **inducción** cuando utilizamos evidencia que se deduce de ejemplos particulares para sacar conclusiones acerca de principios generales. Razonamos mediante **deducción** cuando razonamos de principios generales para sacar conclusiones acerca de casos específicos.

Cuando los matemáticos demuestran teoremas, utilizan deducción. De hecho, incluso una "demostración por inducción matemática" es una demostración deductiva, ya que consiste en aplicar el principio general a una fórmula particular. En esta sección, hemos sido cuidadosos de utilizar el término **inducción matemática** para distinguirla de razonamiento inductivo, que con frecuencia sirve para inspirar conjeturas, pero no para demostrar principios generales.

La exploración 2 ilustra por qué los matemáticos no dependen del razonamiento inductivo.

EXPLORACIÓN 2 **¿Es $n^2 + n + 41$ primo para toda n?**

1. Coloque los números del 1 al 10. ¿Los resultados son números primos?
2. Repita para los números del 11 al 20.
3. Repita para los números del 21 al 30. (¿Preparado para establecer una conjetura?)
4. ¿Cuál es el valor más pequeño de n para el que $n^2 + n + 41$ no es primo?

Existe una situación en la que la inducción (no matemática) puede constituir una prueba. En la **inducción enumerativa**, uno razona a partir de casos específicos hacia al principio general, considerando *todos los casos posibles*. Éste razonamiento es suficientemente sencillo cuando se demuestra un teorema como "Todos los números primos de un dígito son factores de 210", pero puede incluir alguna matemática muy elegante cuando el número de casos es aparentemente infinito. Tal es el caso de la demostración del teorema del Mapa de Cuatro Colores, en el que todos los casos posibles fueron resueltos con la ayuda de un programa de computadora muy ingenioso.

EL TEOREMA DEL MAPA DE CUATRO COLORES

En 1852, Francis Guthrie conjeturó que cualquier mapa en una superficie plana podría colorearse con a lo más cuatro colores, de modo que dos regiones que tengan frontera no tengan el mismo color. Los matemáticos intentaron, sin éxito, durante casi 150 años demostrar (o refutar) la conjetura, hasta que Kenneth Appel y Wolfang Haken finalmente la demostraron en 1976.

REPASO RÁPIDO 9.6 *(Son necesarias las habilidades de las secciones A.2 y 1.2)*

En los ejercicios del 1 al 3 desarrolle los productos.

1. $n(n + 5)$ **2.** $(n + 2)(n - 3)$

3. $k(k + 1)(k + 2)$

En los ejercicios del 4 al 6 factorice los polinomios.

4. $n^2 + 2n - 3$

5. $k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

6. $n^3 - 3n^2 + 3n - 1$

En los ejercicios del 7 al 10 evalúe la función en el dominio de valores o en las expresiones variables dados.

7. $f(x) = x + 4;\ f(1), f(t), f(t + 1)$

8. $f(n) = \dfrac{n}{n + 1};\ f(1), f(k), f(k + 1)$

9. $P(n) = \dfrac{2n}{3n + 1};\ P(1), P(k), P(k + 1)$

10. $P(n) = 2n^2 - n - 3;\ P(1), P(k), P(k + 1)$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.6

En los ejercicios del 1 al 4 utilice inducción matemática para probar que la proposición se cumple para todos los enteros positivos.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$

2. $8 + 10 + 12 + \cdots + (2n + 6) = n^2 + 7n$

3. $6 + 10 + 14 + \cdots + (4n + 2) = n(2n + 4)$

4. $14 + 18 + 22 + \cdots + (4n + 10) = 2n(n + 6)$

En los ejercicios del 5 al 8 establezca una regla explícita para el término n-ésimo de la sucesión definida en forma recursiva. Luego utilice inducción matemática para probar la regla.

5. $a_n = a_{n-1} + 5,\ a_1 = 3$ **6.** $a_n = a_{n-1} + 2,\ a_1 = 7$

7. $a_n = 3a_{n-1},\ a_1 = 2$ **8.** $a_n = 5a_{n-1},\ a_1 = 3$

En los ejercicios del 9 al 12 escriba las proposiciones P_1, P_k y P_{k+1} (no escriba una demostración).

9. P_n: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

10. P_n: $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$

11. P_n: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$

12. P_n: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$

En los ejercicios del 13 al 20 utilice inducción matemática para probar que la proposición se cumple para todos los enteros positivos.

13. $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

14. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

15. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$

16. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \dfrac{n}{2n + 1}$

17. $2^n \geq 2n$ **18.** $3^n \geq 3n$

19. 3 es un factor de $n^3 + 2n$ **20.** 6 es un factor de $7^n - 1$

En los ejercicios 21 y 22 utilice *inducción matemática* para demostrar que las proposiciones se cumplen para todos los enteros positivos (ya hemos visto cada una de ellas, aunque demostrada de otra manera).

21. La suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica con primer término a_1 y razón común $r \neq 1$ es $a_1(1 - r^n)/(1 - r)$.

22. La suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética con primer término a_1 y diferencia común d es

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d].$$

En los ejercicios 23 y 24 utilice inducción matemática para demostrar que la fórmula se cumple para todos los enteros positivos.

23. Números triangulares $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2}$

24. Suma de los primeros *n* cubos $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$

[Observe que si coloca juntos los resultados de los ejercicios 23 y 24, obtiene la sorprendente ecuación

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2].$$

En los ejercicios del 25 al 30 utilice los resultados de los ejercicios del 21 al 24 y el ejemplo 2 para determinar las sumas.

25. $1 + 2 + 3 + \cdots + 500$ **26.** $1^2 + 2^2 + \cdots + 250^2$

27. $4 + 5 + 6 + \cdots + n$ **28.** $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 75^3$

29. $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{34}$

30. $1 + 8 + 27 + \cdots + 3375$

En los ejercicios del 31 al 34 utilice los resultados de los ejercicios 21 al 24 y el ejemplo 2 para determinar la suma en términos de n.

31. $\sum_{k=1}^{n} (k^2 - 3k + 4)$

32. $\sum_{k=1}^{n} (2k^2 + 5k - 2)$

33. $\sum_{k=1}^{n} (k^3 - 1)$

34. $\sum_{k=1}^{n} (k^3 + 4k - 5)$

35. Actividad en equipo A continuación se presenta una demostración mediante inducción matemática de que todas las personas en cualquier grupo de n personas deben tener el mismo tipo de sangre.

(Paso base) Si hay un grupo de 1 persona, obviamente todas las personas en ese grupo tienen el mismo tipo de sangre.

(Hipótesis de inducción) Suponga que en cualquier grupo de k personas, todas deben tener el mismo tipo de sangre.

(Paso inductivo) Suponga que se reúnen $k + 1$ personas. Saque a una de la habitación. Las restantes k personas deben tener todas el mismo tipo de sangre (por la hipótesis de inducción). Ahora traemos de regreso a la primera persona expulsada y sacamos a otra de la habitación. Otra vez tiene un grupo de k personas y todas deben tener el mismo tipo de sangre. Por lo tanto, las $k + 1$ personas deben tener el mismo tipo de sangre, y lo hemos demostrado por inducción.

Es obvio que este resultado es falso, así que debe haber algo erróneo en esta demostración. Explique dónde está equivocada la demostración.

36. Escriba para aprender Kitty tiene problemas para entender la demostración mediante inducción matemática, ya que ella no entiende la hipótesis de inducción. Ella dice: "Si podemos suponer que es verdadera para k, ¿por qué no podemos suponer que es verdadera para n y ya está? Después de todo, ¡una variable es una variable!". Escriba una respuesta para Kitty para aclarar su confusión.

Preguntas de examen estandarizado

37. Verdadero o falso El objetivo de la inducción matemática es demostrar que una proposición P_n es verdadera para todos los números reales. Justifique su respuesta.

38. Verdadero o falso Si P_n es la proposición "$(n + 1)^2 = 4n$", entonces P_1 es verdadera. Justifique su respuesta.

Puede utilizar una calculadora graficadora para resolver los ejercicios del 39 al 42.

39. Opción múltiple En una demostración por inducción matemática que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ para todos los enteros positivos n, la hipótesis de inducción sería suponer que

A) $n = 1$

B) $k = 1$

C) $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

D) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ para todos los enteros positivos n.

E) $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$ para algún entero positivo k.

40. Opción múltiple El primer paso en una demostración mediante inducción matemática es demostrar

A) el paso base.

B) la hipótesis de inducción.

C) el paso inductivo.

D) el principio inductivo.

E) el fundamento inductivo.

41. Opción múltiple ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) alternativa(s) podría utilizarse para demostrar que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ para todos los enteros positivos?

I. Inducción matemática.

II. La fórmula para la suma de una sucesión aritmética finita.

III. La fórmula para la suma de una sucesión geométrica finita.

A) Sólo I

B) Sólo I y II

C) Sólo I y III

D) Sólo II y III

E) I, II y III

42. Opción múltiple La inducción matemática puede utilizarse para demostrar que, para cualquier entero positivo n, $\sum_{k=1}^{n} k^3 =$

A) $\frac{n(n + 1)}{2}$

B) $\frac{n^2(n + 1)^2}{2}$

C) $\frac{n^2(n + 1)^2}{4}$

D) $\frac{n^3(n + 1)^3}{2}$

E) $\frac{n^3(n + 1)^3}{8}$

Exploraciones

43. Utilice inducción matemática para demostrar que 2 es un factor de $(n + 1)(n + 2)$ para todos los enteros positivos n.

44. Utilice inducción matemática para demostrar que 6 es un factor de $n(n + 1)(n + 2)$ para todos los enteros positivos n (puede suponer que la afirmación del ejercicio 43 es verdadera).

45. Proporcione una demostración alternativa a la afirmación del ejercicio 43, con base en el hecho de que $(n + 1)(n + 2)$ es un producto de dos enteros consecutivos.

46. Proporcione una demostración alternativa a la afirmación del ejercicio 44, con base en el hecho de que $n(n + 1)(n + 2)$ es un producto de tres enteros consecutivos.

Ampliación de las ideas

En los ejercicios 47 y 48 utilice inducción matemática para demostrar que la proposición se cumple para todos los enteros positivos.

47. **Serie y sucesión de Fibonacci** $F_{n+2} - 1 = \sum_{k=1}^{n} F_k$, donde $\{F_n\}$ es la sucesión de Fibonacci.

48. Si $\{a_n\}$ es la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, . . . , entonces $a_n < 2$.

49. Suponga que a es cualquier entero mayor que 1. Utilice inducción matemática para demostrar que $a - 1$ divide exactamente a $a^n - 1$ para todos los enteros positivos n.

50. Proporcione una demostración alternativa a la afirmación del ejercicio 49, con base en el teorema del factor de la sección 2.4.

No es necesario que en una demostración por inducción matemática el paso base sea con $n = 1$; sólo nos interesamos en los enteros mayores o iguales a algún entero c. En este caso, sólo modificamos el paso base y el paso inductivo como sigue:

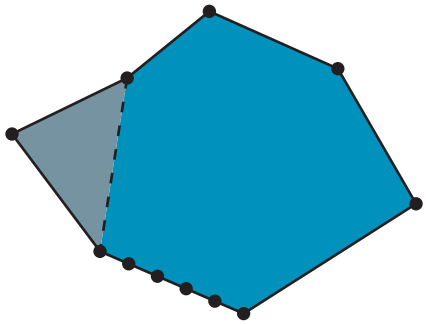
Paso base: P_c es verdadero.

Paso inductivo: Si P_k es verdadero para algún $k \geq c$, entonces P_{k+1} es verdadero.

(Este enunciado se denomina **principio extendido de inducción matemática**). Utilícelo para demostrar las proposiciones de los ejercicios 51 y 52.

51. $3n - 4 \geq n$, para toda $n \geq 2$ **52.** $2^n \geq n^2$, para toda $n \geq 4$

53. **Demostración de la fórmula de los ángulos interiores** Utilice inducción matemática extendida para probar P_n para $n \geq 3$.
P_n: La suma de los ángulos interiores de un polígono con n lados es $180°(n - 2)$.



9.7 Estadística y datos (enfoque gráfico)

Aprenderá acerca de...

- La estadística
- La visualización de datos categóricos
- Las gráficas de tallos
- Las tablas de frecuencia
- Los histogramas
- Los diagramas de tiempo

. . . porque

La presentación gráfica de datos es cada vez más frecuente en los medios profesionales y no profesionales y, por tanto, necesitamos entenderla.

Estadística

La estadística es una rama de la ciencia que emerge tanto de las matemáticas discretas como de las matemáticas continuas. El objetivo de la estadística es darle sentido a los datos y comunicarlo a otros.

Los objetos descritos mediante un conjunto de datos son **individuos**, que pueden ser personas, animales o cosas. La característica de los individuos que los identifica o mide es una **variable**. Las variables son *categóricas* o *cuantitativas*. Si la variable identifica a cada individuo como perteneciente a una clase distinta, tal como masculino o femenino, entonces la variable es **categórica**; si la variable toma valores numéricos para la característica que se mide, entonces la variable es **cuantitativa**.

Ejemplos de variables cuantitativas son las estaturas de las personas y los pesos de las langostas. En este libro ya ha visto muchas tablas de datos cuantitativos; en realidad, la mayoría de los ejercicios con base en datos se han resuelto mediante técnicas que son herramientas básicas para los estadísticos. Sin embargo, hasta ahora nuestra atención se ha restringido principalmente a determinar modelos que relacionan cantidades variables. En las últimas dos secciones de este capítulo veremos algunas de las otras herramientas algebraicas y gráficas que pueden utilizarse para dar significado a los datos y comunicarlo a otros.

Visualización de datos categóricos

El Centro Nacional para Estadísticas de Salud reportó que las causas principales de muerte en 2001 fueron enfermedades cardiacas, cáncer y derrame cerebral. La tabla 9.3 proporciona información más detallada.



Tabla 9.3 Causas principales de muerte en Estados Unidos en 2001

Causa de muerte	Número de muertes	Porcentaje
Enfermedades cardiacas	700,142	29.0
Cáncer	553,768	22.9
Derrame cerebral	163,538	6.8
Otras	1,018,977	41.3

Fuente: Centro Nacional para Estadísticas de Salud, de acuerdo con The World Almanac and Book of Facts 2005.

Puesto que las causas de muerte son categorías, no números, "causa de muerte" es una variable categórica. Los números de muertes y los porcentajes, aunque ciertamente son numéricos, no son valores de una *variable*, ya que no describe a los *individuos*. No obstante, los números pueden comunicar información acerca de las variables categóricas indicándonos el tamaño relativo de las categorías en la población de 2001.

Podemos obtener esa información directamente de los números, pero es muy útil desplegar visualmente los tamaños comparativos. Ésta es la razón de qué, con frecuencia, los datos categóricos se muestren gráficamente, como en una **gráfica de barras** (figura 9.13a), una **gráfica de pastel** (figura 9.13b) o una **gráfica circular** (figura 9.13c). Para variar, la prensa también hace uso de **gráficas de dibujos** adecuadas a las categorías que muestra. Por ejemplo, las barras de la figura 9.13a podrían figurar lápidas de diferentes tamaños para enfatizar que éstas son causas de muerte. En cada caso, las gráficas proporcionan visualizaciones de los tamaños relativos de las categorías, y las de pastel y circular agregan cómo las categorías forman parte de una población total.

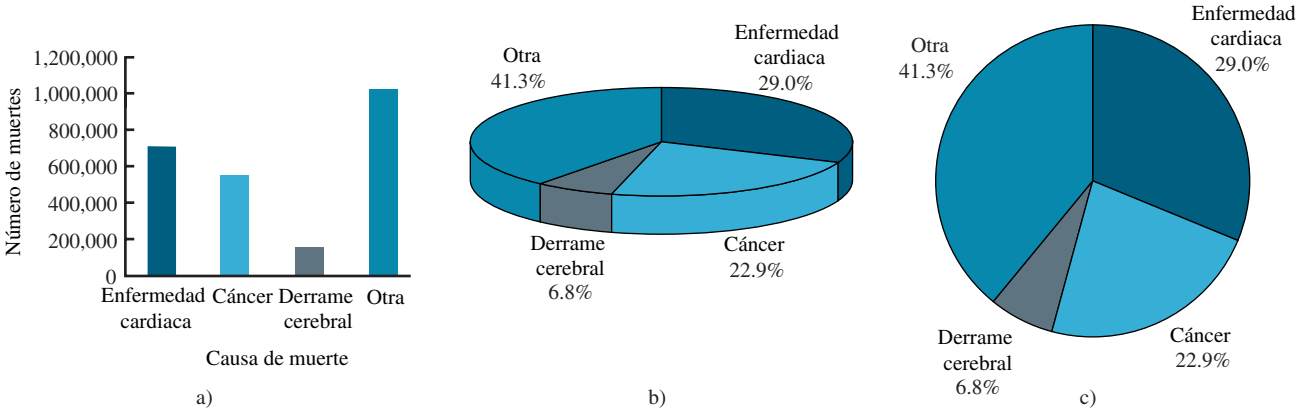


FIGURA 9.13 Causas de muerte en Estados Unidos en 2001 mostradas en a) una gráfica de barras, b) un diagrama de pastel de tres dimensiones y c) una gráfica circular.

En las gráficas de barras de datos categóricos, el eje *y* tiene una escala numérica y el eje *x* está etiquetado con las categorías. Las barras rectangulares están separadas por espacios para mostrar que no está incluida una escala numérica continua (en este sentido, una gráfica de barras difiere de un *histograma*, que se describirá posteriormente en esta sección). Tanto la gráfica circular como la de pastel consisten en secciones coloreadas de un círculo o un "pastel". Los ángulos centrales para los sectores se determinan multiplicando los porcentajes por 360°. Por ejemplo, el ángulo para el sector que representa las víctimas de cáncer en la figura 9.13c es

$$22.9\% \cdot 360^\circ = 82.4^\circ.$$

Antiguamente se requería tiempo, habilidad y conocimiento matemático para dibujar gráficas de datos que fuesen tanto atractivas visualmente como geométricamente precisas. Los modernos programas de hoja de cálculo han hecho posible que cualquiera, con la ayuda de una computadora, pueda producir gráficas de alta calidad a partir de datos tabulados.

Gráficas de tallos

Una forma rápida de organizar y mostrar un pequeño conjunto de datos cuantitativos es con una **gráfica de tallo**, también llamada **gráfica de tallo y hojas**. Cada número en el conjunto de datos se divide en un **tallo**, que consiste en su dígito o dígitos iniciales, y una **hoja**, que es su dígito final.

EJEMPLO 1 Construcción de una gráfica de tallos

La tabla 9.4 proporciona el porcentaje de población, de 65 años o mayor, en cada estado de Estados Unidos en el último censo oficial (2000). Construya una gráfica de tallo y hojas para los datos.



Tabla 9.4 Porcentajes de residentes en 2000 que tenían 65 años o más

AL	13.0	HI	13.3	MA	13.5	NM	11.7	SD	14.3
AK	5.7	ID	11.3	MI	12.3	NY	12.9	TN	12.4
AZ	13.0	IL	12.1	MN	12.1	NC	12.0	TX	9.9
AR	14.0	IN	12.4	MS	12.1	ND	14.7	UT	8.5
CA	10.6	IO	14.9	MO	13.5	OH	13.3	VT	12.7
CO	9.7	KS	13.3	MT	13.4	OK	13.2	VA	11.2
CT	13.8	KY	12.5	NE	13.6	OR	12.8	WA	11.2
DE	13.0	LA	11.6	NV	11.0	PA	15.6	WV	15.3
FL	17.6	ME	14.4	NH	12.0	RI	14.5	WI	13.1
GA	9.6	MD	11.3	NJ	13.2	SC	12.1	WY	11.7

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, 2001.

SOLUCIÓN Para formar un diagrama de tallo y hojas utilizamos la parte entera de cada número como el tallo y el dígito de los décimos como la hoja. Escribimos los tallos en orden, en la primera columna y, para cada número, escribimos la hoja en el renglón del tallo apropiado. Luego acomodamos las hojas de cada tallo en orden ascendente. La gráfica final se ve como ésta:

Tallo	Hoja
5	7
6	
7	
8	5
9	6 7 9
10	6
11	0 2 2 3 3 6 7 7
12	0 0 1 1 1 1 3 4 4 5 7 8 9
13	0 0 0 1 2 2 3 3 3 4 5 5 6 8
14	0 3 4 5 7 9
15	3 6
16	
17	6

Observe que incluimos los tallos "sin hojas" (6, 7, 16) en nuestra gráfica, cuando esos huecos tienen características importantes de la visualización. Por la misma razón, nos aseguramos de que cada "hoja" ocupe el mismo espacio en el tallo. Una rama con el doble de hojas debe aparecer como el doble de largo.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

EXPLORACIÓN 1 **Uso de la información de un diagrama de tallos**

Observando tanto el diagrama de tallos como la tabla, responda las preguntas siguientes acerca de la distribución de ciudadanos mayores en los 50 estados de Estados Unidos.

1. A juzgar por la gráfica de tallos, ¿cuál fue el porcentaje *promedio* nacional aproximado de residentes que tenían 65 o más años?
2. ¿En cuántos estados había más de 15% de residentes de 65 o más años?
3. En esta estadística, ¿cuáles estados estaban en el décimo inferior entre todos los estados?
4. Los números 5.7 y 17.6 están tan alejados, por arriba o por debajo, de los demás números en esta gráfica de tallos, que los estadísticos le llaman *outliers* (*datos extremos*). Con mucha frecuencia existe una circunstancia especial que hace separarse a los *outliers* de los otros datos bajo estudio, y explica la información no usual. ¿Podría explicar los dos *outliers* de esta gráfica de tallos?

En ocasiones, los datos están tan juntos que una gráfica de tallos tendría pocos tallos para proporcionar una visualización significativa de los datos. En tales casos, podemos dispersar los datos dividiendo los tallos, como en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Realización de una división de tallos en un diagrama de tallos

La ayuda federal *per cápita* a gobiernos locales y estatales para los 15 estados mayores (en esta categoría) en 2003 se muestra en la tabla 9.5. Elabore una gráfica de tallos que proporcione una buena visualización de los datos. ¿Cuál es el promedio de los 15 números? ¿Por qué la gráfica de tallos es un mejor resumen de los datos que el promedio?



Tabla 9.5 Ayuda federal per cápita a gobiernos estatales y locales (2003) en dólares

AL	3713	ND	1900	MI	1709
WY	2829	ME	1836	MT	1563
NY	2262	WV	1823	MA	1533
NM	2005	SD	1799	KY	1449
VT	1913	R1	1724	LA	1443

Fuente: Oficina de Información Pública del Departamento de Censo de Estados Unidos.

SOLUCIÓN Primero redondeamos la información al ciento de dólar más cercano, lo que no afecta la visualización. Luego, para separar un poco los datos, *dividimos* cada tallo poniendo hojas 0-4 en el tallo inferior y hojas 5-9 en el tallo superior.

Tallo	Hoja
1	4 4
1	5 6 7 7 8 8 8 9 9
2	0 3
2	8
3	
3	7

continúa

El promedio de los 15 números es $1,967, pero es engañoso. La tabla muestra que once de los números son inferiores a ése, y sólo cuatro son mayores. Es mejor observar que la distribución está agrupada alrededor de $1,800 y que el número de Alabama constituye un valor extremo (*outlier*) situado en el extremo de los valores grandes.

Ahora resuelva el ejercicio 3.

En ocasiones es más fácil comparar dos conjuntos de datos si tenemos una visualización que nos permita ver a ambos diagramas de tallos de forma simultánea. Las **gráficas adosadas de tallos** utilizan los mismos tallos, pero las hojas de un conjunto de datos se insertan a la izquierda, mientras que las hojas del otro conjunto se agregan a la derecha.

EJEMPLO 3 Construcción de gráficas adosadas de tallos

Mark McGwire y Barry Bonds ingresaron a las ligas mayores en 1986, y tuvieron carreras coincidentes hasta 2001, el año en que McGwire se retiró. Durante ese periodo promediaron 36.44 y 35.44 cuadrangulares por año, respectivamente. Compare el total de cuadrangulares de cada año con gráficas adosadas de tallos. ¿Puede decir cuál jugador fue más consistente como productor de cuadrangulares?

SOLUCIÓN Formamos un diagrama de tallos adosados con los totales de McGwire creciendo hacia el lado izquierdo y los de Bonds hacia la derecha.

Mark McGwire		Barry Bonds
9 9 3	0	
	1	6 9
9 2	2	4 5 5
9 9 3 2 2	3	3 3 4 4 7 7
9 2	4	0 2 6 9
8 2	5	
5	6	
0	7	3

Los años con menos de diez cuadrangulares para McGwire pueden explicarse por el menor número de veces al bat (su ingreso tardío a la liga en 1986, y lesiones en 1993 y 1994). Si esos años se ignoran como anormales, los números de McGwire parecen indicar más consistencia. El récord de 73 que estableció Bonds en 2001 fue (y aún lo es) un dato extremo de tal magnitud que en realidad provoca más escepticismo que admiración entre los aficionados al béisbol.

Ahora resuelva el ejercicio 5.

Tabla 9.6 Totales de cuadrangulares en las ligas mayores de Mark McGwire y de Barry Bonds hasta 2001

Año	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01
McGwire	3	49	32	33	39	22	42	9	9	39	52	58	70	65	32	29
Bonds	16	25	24	19	33	25	34	46	37	33	42	40	37	34	49	73

Source: Major League Baseball Enterprises, 2002.

Tablas de frecuencia

El impacto visual de un diagrama de tallos proviene de las longitudes de los diferentes renglones de hojas, que son sólo una forma de visualizar *cuántas hojas* salen de cada tallo. El número de hojas de un tallo particular constituye la **frecuencia** de observaciones en cada intervalo del tallo. A menudo, las frecuencias se registran en una **tabla de frecuencias**. La tabla 9.7 muestra una tabla de frecuencias para los totales de cuadrangulares anuales, de 1986 a 2001, de Mark McGwire (consulte el ejemplo 3). La tabla presenta la **distribución de frecuencia;** literalmente, la forma que las 16 frecuencias totales se "distribuyen" entre los diferentes intervalos de cuadrangulares. Ésta es la misma información que se despliega visualmente en un diagrama de tallos, pero éste tiene la ventaja de mostrar qué números, en realidad, están en cada intervalo.

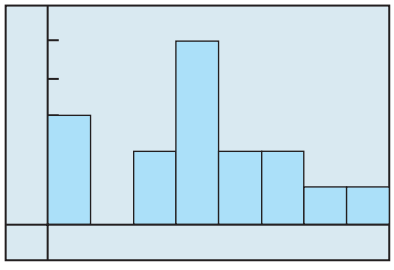
Tabla 9.7 Tabla de frecuencia para el total de cuadrangulares anuales de Mark McGwire, 1986-2001 (Frecuencias altas en una tabla corresponden a fila de hojas más larga en un diagrama de tallo. A diferencia de un diagrama de tallo, una tabla de frecuencia no muestra, en realidad, qué números se encuentran en cada intervalo).

Cuadrangulares	Frecuencia	Cuadrangulares	Frecuencia
0–9	3	40–49	2
10–19	0	50–59	2
20–29	2	60–69	1
30–39	5	70–79	1
		Total	16

Histogramas

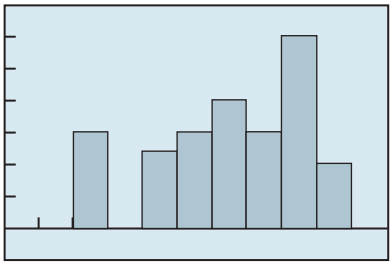
Un **histograma**, muy parecido a un diagrama de tallos, muestra la información de una tabla de frecuencias. Prácticamente, un histograma es a los datos cuantitativos lo que la gráfica de barras es a los categóricos. Sin embargo, a diferencia de la gráfica de barras, ambos ejes de un histograma tienen escalas numéricas, y las barras verticales en intervalos adyacentes no tienen espacios intencionales entre ellos.

La figura 9.14 muestra un histograma de la información en la tabla 9.7, en donde cada barra corresponde a un intervalo en la tabla y la altura de cada barra representa la frecuencia de observaciones en el intervalo.



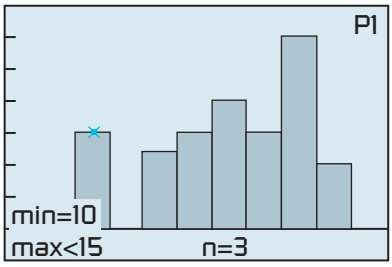
[−10, 80] por [−1, 6]

FIGURA 9.14 Un histograma que muestra la distribución de los totales anuales de cuadrangulares de Mark McGwire de 1986 a 2001. Ésta es una visualización de los datos de la tabla 9.7.



[0, 55] por [−1, 7]

a)



[0, 55] por [−1, 7]

b)

FIGURA 9.15 Histograma con calculadora de los totales de cuadrangulares anuales de Hank Aaron (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Graficación de un histograma en una calculadora

Construya un histograma de los totales de cuadrangulares de Hank Aaron dados en la tabla 9.8; utilice intervalos de ancho 5.

Tabla 9.8 Estadística de cuadrangulares en temporada regular para Hank Aaron

Año	Cuadrangulares	Año	Cuadrangulares	Año	Cuadrangulares
1954	13	1962	45	1970	38
1955	27	1963	44	1971	47
1956	26	1964	24	1972	34
1957	44	1965	32	1973	40
1958	30	1966	44	1974	20
1959	39	1967	39	1975	12
1960	40	1968	29	1976	10
1961	34	1969	44		

Fuente: The Baseball Encyclopedia (séptima edición, 1988, Nueva York: MacMillan) p. 695.

SOLUCIÓN Primero construimos una tabla de frecuencias para los datos, usando intervalos con un ancho de 5 (no es necesario para que la calculadora produzca el histograma, pero compararemos ésta con el resultado).

Cuadrangulares	Frecuencia	Cuadrangulares	Frecuencia
10–14	3	30–34	4
15–19	0	35–39	3
20–24	2	40–44	6
25–29	3	45–49	2
		Total	23

Para colocar en el eje x una escala que sea consistente con los intervalos de la tabla, sea Xmin = 0, Xmax = 55 y Xscl = 5. Observe que la frecuencia máxima es 6 años (40–44 cuadrangulares), por lo que el eje y podría llegar al menos a 7. Ingrese los datos de la tabla 9.8 en la lista L1 y trace un histograma en la ventana [0, 55] por [−1, 7] (consulte la figura 9.15a). El trazo del histograma debe mostrar las mismas frecuencias que la tabla de frecuencias elaborada (consulte la figura 9.15b).

Ahora resuelva el ejercicio 11.

Diagramas de tiempo

En este libro hemos visto muchos ejemplos de funciones en las que la variable de entrada es el tiempo; también es muy común considerar datos cuantitativos como una función del tiempo. Si construimos un diagrama de dispersión de datos (y) contra el tiempo (x) medido podemos analizar los patrones a medida que la variable cambia a lo largo del tiempo. Para ayudar con la visualización, los puntos discretos se conectan de izquierda a derecha mediante segmentos de recta, al igual que lo haría una graficadora en el modo Connect (conectados). La **gráfica de líneas** resultante se denomina **diagrama de tiempo**.

Los diagramas de tiempo muestran tendencias cronológicas. Con frecuencia, estos diagramas aparecen en revistas, periódicos e Internet; un ejemplo típico sería la gráfica del alza histórica en 1999 del índice industrial Dow Jones (figura 9.16).

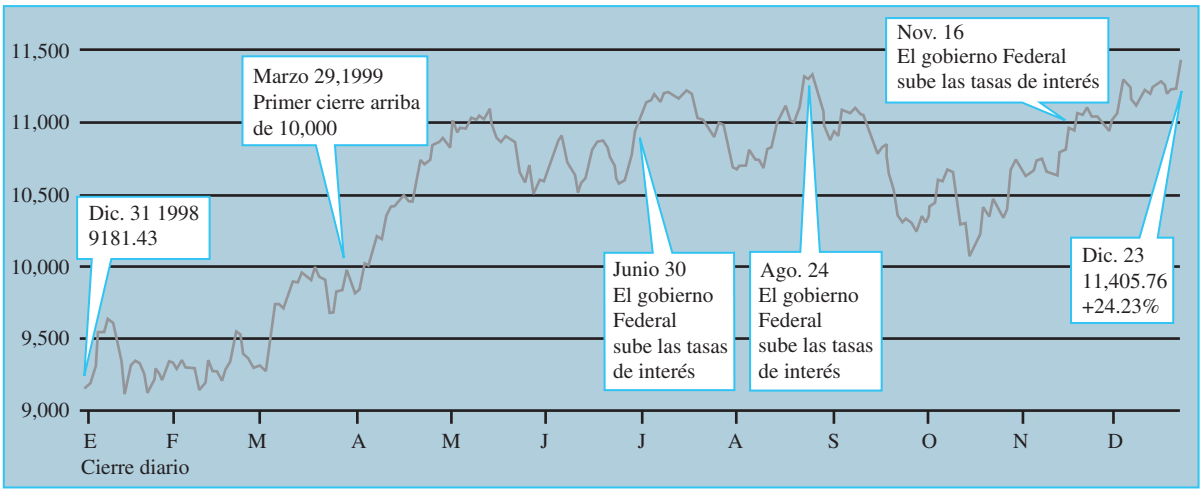


FIGURA 9.16 Diagrama de tiempo del Índice Industrial Dow Jones durante el espectacular año 1999. Los inversionistas tienen una buena visualización de donde ha estado el mercado de acciones, aunque el truco es calcular hacia dónde va. (*Fuente: Quote.com de acuerdo con Associated Press en Chattanooga Times/Free Press*).

Tabla 9.9 Millones de unidades de CD (discos compactos) enviados a minoristas anualmente (1991-2003)

Año	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
CD	333.3	407.5	495.4	662.1	722.9	778.9	753.1	847.0	938.9	942.5	881.9	803.3	745.9

Fuente: Asociación de la Industria de Grabación de Estados Unidos, de acuerdo con The World Almanac and Book of Facts 2005.

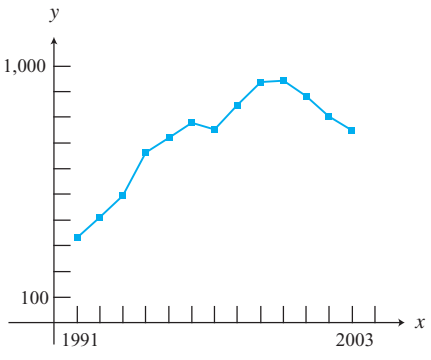


FIGURA 9.17 Un diagrama de tiempo del volumen de CD durante los años de 1991 a 2003, como se reflejan en los envío a los minoristas (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Dibujo de un diagrama de tiempo

La tabla 9.9 proporciona el número de discos compactos (CD) enviados anualmente a minoristas, en el periodo de 13 años de 1991 a 2003 (los números se muestran en millones, netos después de devoluciones). Muestre los datos en un diagrama de tiempo y analice la tendencia de los 13 años.

SOLUCIÓN El eje horizontal representa el tiempo (en años) desde 1991 hasta 2003; el eje vertical representa el número de CD enviados ese año, en millones de unidades. Como la visualización se realza mostrando ambos ejes en la ventana de visualización, por lo regular, el eje vertical de una gráfica de tiempo se traslada para que cruce el eje x en o cerca del inicio del intervalo de tiempo en los datos. Puede crear este efecto en su graficadora ingresando los años como $\{1, 2, 3, \ldots, 13\}$ en lugar de $\{1991, 1992, 1993, \ldots, 2003\}$. Entonces, el etiquetado del eje x puede mostrar los años, como se muestra en la figura 9.17.

La gráfica de tiempo muestra que los envíos de CD aumentaron constantemente desde 1991 hasta 1999, con años especialmente buenos de 1994 a 1996; luego disminuyeron de manera constante de 2000 a 2003. La industria de la música conoce la razón de este vuelco drástico, ¿lo sabe usted?

Ahora resuelva el ejercicio 17.

Tabla 9.10 Millones de unidades de casetes enviados a minoristas, 1991-2003

Año	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Casetes	360.1	366.4	339.5	345.4	272.6	225.3	172.6	158.5	123.6	76	45	31.1	17.2

Fuente: Asociación de la Industria de Grabación de Estados Unidos, de acuerdo con The World Almanac and Book of Facts 2005

EJEMPLO 6 Dos diagramas de tiempo traslapados

La tabla 9.10 proporciona el número de casetes enviados a minoristas anualmente, en el periodo de 13 años de 1991 a 2003 (los números se muestran en millones, netos después de devoluciones). Compare la tendencia de los casetes con la tendencia de los CD traslapando los diagramas de tiempo de los dos productos.

SOLUCIÓN Los dos diagramas de tiempo se muestran en la figura 9.18. La popularidad de las cintas en casete disminuyó conforme más consumidores cambiaron a la tecnología de los CD (y en algún momento a MP3).

Ahora resuelva el ejercicio 19.

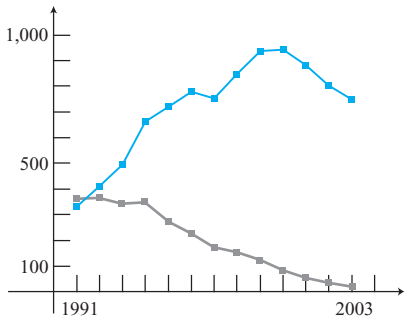


FIGURA 9.18 Un diagrama de tiempo que compara los envíos de casetes y los envíos de CD durante el periodo de 1991 a 2003 (ejemplo 6).

REPASO RÁPIDO 9.7

En los ejercicios del 1 al 6 resuelva para los valores solicitados.

1. ¿Qué porcentaje es 457 de 2,953?
2. ¿Qué porcentaje es 827 de 3,950?
3. ¿Qué porcentaje es 52° de 360°?
4. ¿Qué porcentaje es 98° de 360°?
5. ¿De qué número 734 es el 42.6%?
6. ¿De qué número 5,106 es el 55.5%?

En los ejercicios del 7 al 10 redondee el valor dado al entero más cercano en las unidades que se especifican.

7. $234,598.43 (miles de dólares)
8. 237,834,289 (millones)
9. 848.36 miles (millones)
10. 1,432 millones (en miles de millones)

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.7

La tabla 9.11 muestra la estadística de cuadrangulares de Roger Maris durante su carrera en las ligas mayores.

Tabla 9.11 Estadística de cuadrangulares en temporada regular de Roger Maris

Año	Cuadrangulares
1957	14
1958	28
1959	16
1960	39
1961	61
1962	33
1963	23
1964	26
1965	8
1966	13
1967	9
1968	5

Fuente: The Baseball Encyclopedia, séptima edición, 1988.

1. Construya un diagrama de tallo para los datos en la tabla 9.11. ¿Hay algún dato extremo (*outlier*)?
2. Construya gráficas adosadas de tallos que comparen la producción de cuadrangulares de Roger Maris (tabla 9.11) con la de Hank Aaron (tabla 9.8, página 765). Escriba una breve interpretación del diagrama de tallos.

En los ejercicios del 3 al 6 construya el diagrama de tallos que se indica a partir de los datos de la tabla 9.12. Luego escriba una breve interpretación del diagrama de tallos.

Tabla 9.12 Expectativa de vida por género para los países de Sudamérica

País	Hombre	Mujer
Argentina	72.0	79.7
Bolivia	62.5	67.9
Brasil	67.5	75.6
Chile	73.1	79.8
Colombia	67.6	75.4
Ecuador	73.2	79.0
Guyana	60.1	64.8
Paraguay	72.1	77.3
Perú	67.5	71.0
Surinam	66.8	71.6
Uruguay	72.7	79.2
Venezuela	71.0	77.3

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2005.

3. Un diagrama de tallos que muestre las expectativas de vida para hombres en los países de Sudamérica (redondee al año más cercano y utilice tallos divididos).
4. Un diagrama de tallos que muestre las expectativas de vida para mujeres en los países de Sudamérica (redondee al año más cercano y utilice tallos divididos).
5. Un diagrama de tallos adosados para las expectativas de vida para hombres y mujeres en los países de Sudamérica (redondee al año más cercano y utilice tallos divididos).
6. Un diagrama de tallos que muestre la diferencia entre expectativas de vida para mujeres y hombres en los países de Sudamérica (utilice datos sin redondear y no divida los tallos).

En los ejercicios 7 y 8 utilice los datos de la tabla 9.12 para construir la tabla de frecuencias indicada, usando los intervalos 60.0 – 64.9, 65.0 – 69.9, etcétera.

7. Expectativas de vida para hombres en los países de Sudamérica.
8. Expectativas de vida para mujeres en los países de Sudamérica.

En los ejercicios del 9 al 12 dibuje un histograma para la tabla dada.

9. La tabla de frecuencias del ejercicio 7.
10. La tabla de frecuencias del ejercicio 8.
11. La tabla 9.13 del número total de cuadrangulares anuales de Willie Mays, usando los intervalos 1-5, 6 – 10, 11 – 15, etcétera.
12. La tabla 9.13 del número total de cuadrangulares anuales de Mickey Mantle, usando los intervalos 0 – 4, 5 – 9, 10 – 14, etcétera.

Tabla 9.13 Estadística de cuadrangulares en temporada regular para Willie Mays y Mickey Mantle

Año	Mays	Mantle	Año	Mays	Mantle
1951	20	13	1962	38	30
1952	4	23	1963	47	15
1953	41	21	1964	52	35
1954	51	27	1965	37	19
1955	36	37	1966	22	23
1956	35	52	1967	23	22
1957	29	34	1968	13	18
1958	34	42	1969	28	
1959	29	31	1970	18	
1960	40	40	1971	8	
1961	49	54	1972	6	

Fuente: The Baseball Encyclopedia, séptima edición, 1988.

En los ejercicios del 13 al 16 construya un diagrama de tiempo para los datos que se indican.

13. El número total de cuadrangulares de Willie Mays dado en la tabla 9.13.
14. El número total de cuadrangulares de Mickey Mantle dado en la tabla 9.13.
15. El número total de cuadrangulares de Mark McGwire dado en la tabla 9.6 (página 763).
16. El número total de cuadrangulares de Hank Aaron dado en la tabla 9.8 (página 765).

La tabla 9.14 muestra el monto total ganado (en unidades de $1,000, redondeado al entero más cercano) por los mejor remunerados en el golf profesional de mujeres (LPGA) y hombres (PGA) para años seleccionados entre 1970 y 2003.

Tabla 9.14 Ganancias anuales (en miles de dólares) de los golfistas mejor remunerados, hombres y mujeres, para años seleccionados de 1970 a 2003

Año	Hombres (PGA)	Mujeres (LPGA)
1970	157	30
1975	323	95
1980	531	231
1985	542	416
1990	1165	864
1995	1655	667
1996	1780	1002
1997	2067	1237
1998	2591	1093
1999	6617	1592
2000	9188	1877
2001	5688	2106
2002	6913	2864
2003	7574	2030

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2005.

17. Construya un diagrama de tiempo para las ganancias de los hombres en la tabla 9.14. Escriba una breve interpretación del diagrama de tiempo.

18. Elabore un diagrama de tiempo para las ganancias de las mujeres en la tabla 9.14. Escriba una breve interpretación del diagrama de tiempo.

19. Compare las tendencias en la tabla 9.14 sobreponiendo los diagramas de tiempo. Escriba una breve interpretación.

20. Escriba para aprender (continuación del ejercicio 19) Los datos en la tabla 9.14 muestran que las ganancias para el jugador que encabezó la PGA se elevó un modesto 68% en la década de 1975 a 1985, mientras que las ganancias para la jugadora que encabezó la LPGA se elevó un enorme 338%. Aunque fue, de hecho, un periodo de fuerte crecimiento para los deportes de mujeres, no es probable que los estadísticos saque conclusiones de la comparación de estos dos números. Utilice la visualización de las gráficas de tiempo comparativas del ejercicio 19 para explicar por qué.



En los ejercicios 21 y 22 compare los desempeños traslapando diagramas de tiempo.

21. Los diagramas de tiempo de los ejercicios 13 y 14, para comparar los desempeños de Mays y Mantle.

22. Los diagramas de tiempo de los ejercicios 15 y 16, para comparar los desempeños de McGwire y Aaron.

En los ejercicios 23 y 24 analice los datos como se indica.

23. Los salarios de los trabajadores de un departamento de la Compañía de los Hermanos García (en miles de dólares) son los siguientes:

33.5, 35.3, 33.8, 29.3, 36.7, 32.8, 31.7, 36.3, 33.5, 28.2, 34.8, 33.5, 35.3, 29.7, 38.5, 32.7, 34.8, 34.2, 31.6, 35.4

a) Elabore un diagrama de tallos para este conjunto de datos.

b) Cree una tabla de frecuencias para estos datos.

c) Dibuje un histograma para los datos. ¿Qué ventana de visualización usó?

d) ¿Por qué un diagrama de tiempo no funciona bien para los datos?

24. El promedio de rapidez del viento durante un año en 44 centros climáticos alrededor de Estados Unidos fueron los siguientes:

9.0, 6.9, 9.1, 9.2, 10.2, 12.5, 12.0, 11.2, 12.9, 10.3, 10.6, 10.9, 8.7, 10.3, 11.0, 7.7, 11.4, 7.9, 9.6, 8.0, 10.7, 9.3, 7.9, 6.2, 8.3, 8.9, 9.3, 11.6, 10.6, 9.0, 8.2, 9.4, 10.6, 9.5, 6.3, 9.1, 7.9, 9.7, 8.8, 6.9, 8.7, 9.0, 8.9, 9.3

a) Elabore un diagrama de tallos para este conjunto de datos.

b) Cree una tabla de frecuencias para estos datos.

c) Dibuje un histograma para los datos. ¿Qué ventana de visualización usó?

d) ¿Por qué una gráfica circular no funciona bien para los datos?

En los ejercicios 25 y 26 compare traslapando diagramas de tiempo para los datos de la tabla 9.15.

Tabla 9.15 Población (en millones) de los seis estados más poblados

Censo	CA	FL	IL	NY	PA	TX
1900	1.5	0.5	4.8	7.3	6.3	3.0
1910	2.4	0.8	5.6	9.1	7.7	3.9
1920	3.4	1.0	6.5	10.4	8.7	4.7
1930	5.7	1.5	7.6	12.6	9.6	5.8
1940	6.9	1.9	7.9	13.5	9.9	6.4
1950	10.6	2.8	8.7	14.8	10.5	7.7
1960	15.7	5.0	10.1	16.8	11.3	9.6
1970	20.0	6.8	11.1	18.2	11.8	11.2
1980	23.7	9.7	11.4	17.6	11.9	14.2
1990	29.8	12.9	11.4	18.0	11.9	17.0
2000	33.9	16.0	12.4	19.0	12.3	20.9

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2005.

25. Las poblaciones de California (CA), Nueva York (NY) y Texas (TX) de 1900 a 2000.

26. Las poblaciones de Florida (FL), Illinois (IL) y Pennsylvania (PA) de 1900 a 2000.

Preguntas de examen estandarizado

27. **Verdadero o falso** Si hay tallos sin hojas en el interior de un diagrama de tallos, es mejor omitirlos. Justifique su respuesta.

28. **Verdadero o falso** Los números más grandes y más pequeños en un conjunto de datos se denominan *outliers* (datos extremos). Justifique su respuesta.

Resuelva los ejercicios del 29 al 32 sin utilizar calculadora.

29. **Opción múltiple** Un diagrama de tiempo es un ejemplo de

A) una histograma. **B)** una gráfica de barras.

C) una gráfica de líneas. **D)** una gráfica de pastel.

E) una tabla.

30. **Opción múltiple** Un diagrama adosado de tallos es particularmente útil para

A) identificar *outliers* (datos extremos).

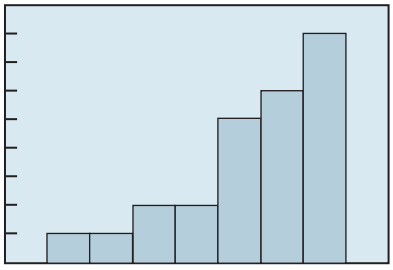
B) comparar dos distribuciones de datos.

C) mezclar dos conjuntos de datos.

D) graficar cuadrangulares.

E) distinguir tallos de hojas.

31. **Opción múltiple** El histograma siguiente resultaría más probablemente, ¿de qué conjunto de datos?



A) calificaciones de un examen muy sencillo.

B) pesos de niños en una clase de tercer grado.

C) marcadores ganadores para un equipo durante toda una temporada.

D) edades de todas las personas que visitan el zoológico del Bronx en un instante dado.

E) precios de todos los postres en el menú de cierto restaurante.

32. **Opción múltiple** Un sector de una gráfica de pastel, con ángulo central de 45°, ¿a qué porcentaje de los datos corresponde?

A) 8% **B)** 12.5%

C) 15% **D)** 25%

E) 45%

Exploraciones

33. **Actividad en equipo** Mida el pulso en reposo (en latidos por minuto) de los miembros de su clase. Construya un diagrama de tallos para los datos. ¿Hay algún o algunos datos extremos (*outliers*)? ¿Pueden explicarse?

34. **Actividad en equipo** Mida las estaturas (en pulgadas) de los miembros de su clase. Construya un diagrama adosado de tallos para comparar la distribución de estaturas de hombres y estaturas de mujeres. Escriba una breve interpretación del diagrama.

Ampliación de las ideas

35. **Gráfica de tiempo de datos periódicos** Algunos datos son funciones periódicas del tiempo. Si los datos varían en un ciclo anual, el periodo es 1 año. Utilice la información de la tabla 9.16 para traslapar los diagramas de tiempo para las temperaturas alta y baja promedio diarias para Beijing, China.

Tabla 9.16 Temperaturas alta y baja promedio diarias, en °C para Beijing, China

Mes	Alta	Baja
Enero	2	−9
Febrero	5	−7
Marzo	12	−1
Abril	20	7
Mayo	27	13
Junio	31	18
Julio	32	22
Agosto	31	21
Septiembre	27	14
Octubre	21	7
Noviembre	10	−1
Diciembre	3	−7

Fuente: National Geographic Atlas of the World (sexta edición revisada, 1992, Washington, D.C.), lámina 132.

36. Determine una función sinusoidal que modele cada gráfica de tiempo del ejercicio 35 (consulte las secciones 4.4 y 4.8).

9.8 Estadística y datos (enfoque algebraico)

Aprenderá acerca de...

- Los parámetros y la estadística
- La media, mediana y moda
- El resumen de cinco números
- El diagrama de cajas (*boxplot*)
- La varianza y desviación estándar
- Las distribuciones normales

. . . porque

El lenguaje de la estadística se está popularizando en nuestro mundo cotidiano.

Parámetros y estadística

Los diferentes números que se asocian con un conjunto de datos se denominan **estadísticos**. Sirven para describir a los individuos de los cuales provienen los datos, de modo que la reunión y procesamiento de tal información numérica, se denomina frecuentemente **estadística descriptiva**. En la sección 9.7, vimos muchos ejemplos de estadística descriptiva.

La *ciencia* de la estadística interviene cuando utilizamos la estadística descriptiva (como los resultados de un estudio de 1,500 fumadores) para hacer juicios, denominados *inferencias*, acerca de las *poblaciones* (como la de todos los fumadores). Los estadísticos en realidad están interesados en los números llamados **parámetros** que están asociados a las poblaciones completas. Como por lo regular no es práctico o posible medir a todas las poblaciones, los estadísticos reúnen estadísticas de **muestras** cuidadosamente seleccionadas y luego utilizan la ciencia de la **estadística inferencial** para hacer inferencias acerca de los parámetros.

EJEMPLO 1 Distinción de un parámetro de un estadístico

Un estudio de 1996 denominado *Los niños de esos días: lo que los estadounidenses realmente piensan acerca de la siguiente generación* reportó que 33% de los adolescentes dicen que no hay ningún adulto en casa cuando ellos llegan de la escuela. El reporte está basado en una encuesta aleatoria de 600 personas elegidas entre los 12 y 17 años de edad, y tuvo un margen de error de $\pm 4\%$ (fuente: *Public Agenda*). ¿La encuesta midió un parámetro o un estadístico? y ¿qué significa "margen de error"?

SOLUCIÓN La encuesta no midió a todos los adolescentes de la población, así que no midió un parámetro. Ellos *muestrearon a* 600 adolescentes y determinaron un estadístico. Por otra parte, el enunciado "33% de los adolescentes dice que no hay adultos en casa" está haciendo una inferencia acerca de *todos* los adolescentes de Estados Unidos. Debemos interpretar ese enunciado en términos del margen de error, del tipo "entre el 29% y el 37% de todos los adolescentes de Estados Unidos dirían que no hay adultos en casa cuando ellos regresan de la escuela". En otras palabras, los estadísticos están confiados en que el parámetro se encuentra entre $\pm 4\%$ del estadístico muestral, aunque sólo hayan muestreado a 600 adolescentes, ¡una pequeña fracción de la población de adolescentes! La matemática que les da esa confianza tiene como base las leyes de la probabilidad y es confiable científicamente, pero aquí no la discutiremos.

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Media, mediana y moda

Si tuviera que estudiar el efecto que los aditivos del alimento para pollos tiene en el grosor de los cascarones de los huevos, necesitaría muestrear muchos huevos de varias gallinas bajo diversas condiciones de alimentación. Suponga que hubiese reunido datos de 50 huevos de gallinas alimentadas con el alimento A y 50 huevos de gallinas alimentadas con el alimento B, ¿cómo podría comparar los dos conjuntos? La forma más sencilla sería determinar el *promedio* del grosor de los cascarones para cada alimentación y después comparar esos dos números.

Sin embargo, la palabra "promedio" puede tener varios significados, todos ellos *medidas del centro* en algún sentido (medidas de tendencia central).

- Si decimos, "El promedio de los exámenes de la última semana fue 83.4", nos referimos la **media** (lo que la mayoría de la gente piensa como "promedio").
- Si decimos, "El promedio de calificaciones lo coloca justo a la mitad del grupo", nos estamos refiriendo a la **mediana**.
- Si decimos, "El estudiante estadounidense promedio inicia la universidad a los 18 años", nos estamos refiriendo a la **moda**.

A continuación describiremos cada una de estas medidas.

DEFINICIÓN Media

La **media** de una lista de n números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

La media también se denomina *media aritmética*, *promedio aritmético* o *valor promedio*.

EJEMPLO 2 Cálculo de una media

Determine la media del total de cuadrangulares anuales de la carrera en ligas mayores de Roger Maris, 1957-1968 (tabla 9.11, página 768).

SOLUCIÓN De acuerdo con la tabla 9.11, estamos buscando la media de la siguiente lista de 12 números: {14, 28, 16, 39, 61, 33, 23, 26, 8, 13, 9, 5}.

$$\bar{x} = \frac{14 + 28 + 16 + \cdots + 9 + 5}{12} = \frac{275}{12} \approx 22.9$$

Ahora resuelva el ejercicio 9.

Tan común es el uso de la media como medida de tendencia central, que algunas veces puede ser engañosa. Por ejemplo, si tuviese que encontrar la media del salario anual de un estudiante con especialidad en Geografía de la Universidad de Carolina del Norte que trabajase en Chicago en 1997, quizá sería un número en millones de dólares. Esto es debido a que el grupo que está midiendo, el cual no es muy grande, incluye un dato extremo (*outlier*) llamado Michael Jordan. La media puede afectarse seriamente por los datos extremos.

A un estadístico le llamamos **resistente** si no es afectado fuertemente por datos extremos (consulte la exploración 1, sección 9.7). La media no es una medida de tendencia central resistente, mientras que la *mediana* sí lo es.

DEFINICIÓN Mediana

La **mediana** de una lista de n números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ acomodados en orden (ya sea en forma ascendente o descendente) es

- el número de la mitad, si n es impar, y
- la media de los dos números de la mitad, si n es par.

EJEMPLO 3 Determinación de una mediana

Determine la mediana de los totales de cuadrangulares de Roger Maris (consulte el ejemplo 2).

SOLUCIÓN Primero acomodamos la lista en forma ascendente: {5, 8, 9, 13, 14, 16, 23, 26, 28, 33, 39, 61}. Como hay 12 números, la mediana es la media del sexto y séptimo números:

$$\frac{16 + 23}{2} = 19.5.$$

Observe que este número es un poco más pequeño que la media (22.9). La media es afectada de forma muy fuerte por el dato extremo que representa el mejor récord de una temporada de Maris, mientras que la mediana no. La mediana seguiría siendo 19.5 si él sólo hubiese conectado 41 cuadrangulares esa temporada o, incluso, si hubiese conectado 81.

Ahora resuelva el ejercicio 11.

Tanto la media como la mediana son importantes medidas de tendencia central. Una medida de tendencia central un poco menos importante, pero con importancia estadística, es la *moda*.

A LA MODA

La moda también puede utilizarse para variables categóricas.

DEFINICIÓN Moda

La **moda** de una lista de números es el número que aparece con mayor frecuencia en la lista.

EJEMPLO 4 Determinación de una moda

Determine la moda para los totales de cuadrangulares de Hank Aaron (tabla 9.8, página 765). ¿Tiene alguna importancia este número?

SOLUCIÓN Es útil acomodar la lista en orden ascendente: {10, 12, 13, 20, 24, 26, 27, 29, 30, 32, 34, 34, 38, 39, 39, 40, 40, 44, 44, 44, 44, 45, 47}.

La mayor parte de los números de esta lista aparecen sólo una vez; tres números aparecen dos veces y el número 44 aparece cuatro veces. La moda es 44.

Es bastante raro tener muchas repeticiones de un número en una lista de este tipo (en comparación, la lista de Maris no tiene repeticiones y, por tanto, no tiene moda; ningún número de las listas de Mays, Mantle, McGwire y Bonds aparece más de dos veces). En este caso, la moda tiene importancia especial sólo para los fanáticos de las curiosidades del béisbol, quienes reconocen al 44, ¡como el número del uniforme de Aaron!

Ahora resuelva el ejercicio 17.

El ejemplo 4 demuestra por qué la moda es menos útil como medida de tendencia central. La moda (44) está lejos de la mediana (34) y la media (32.83), cualquiera de las cuales describe mejor la producción anual de cuadrangulares de Aaron durante el curso de su carrera.

EJEMPLO 5 Uso de una tabla de frecuencias

Un maestro aplica un examen de 10 puntos y registra las calificaciones en una tabla de frecuencias (tabla 9.17) como se muestra a continuación. Determine moda, mediana y media de los datos.

Tabla 9.17 Calificaciones de exámenes para el ejemplo 5

Calificación	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Frecuencia	2	2	3	8	4	3	3	2	1	1	1

SOLUCIÓN El total de las frecuencias es 30, de modo que hay 30 calificaciones.

La *moda* es 7, ya que es la calificación con la frecuencia más alta.

La *mediana* de 30 números será la media de los números 15° y 16°. La tabla ya está acomodada en orden descendente, así que contamos las frecuencias de izquierda a derecha hasta que lleguemos a 15. Vemos que el décimo quinto número es un 7 y el décimo sexto es un 6. Por lo tanto, la mediana es 6.5.

Para determinar la *media*, multiplicamos cada número por su frecuencia, sumamos los productos y dividimos el total entre 30:

$$\bar{x} = \frac{\begin{array}{r}[10(2) + 9(2) + 8(3) + 7(8) + 6(4) + 5(3) \\ + 4(3) + 3(2) + 2(1) + 1(1) + 0(1)]\end{array}}{30}$$

$$= 5.9\overline{3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 19.

La fórmula para determinar la media de una lista de números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con frecuencias $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}.$$

Esta misma fórmula puede utilizarse para determinar una **media ponderada,** en la que a los números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se les dan **pesos** antes de que la media sea calculada. Los pesos actúan de la misma forma que las frecuencias.

EJEMPLO 6 Trabajo con una media ponderada

En la escuela de Marty rige la política administrativa de que el examen final cuenta 25% de la calificación del semestre. Marty tiene un promedio de 88.5 de promedio al entrar al examen final, ¿cuál es la calificación mínima que debe obtener en el examen para obtener un 90 en el semestre?

continúa

SOLUCIÓN Al promedio preliminar (88.5) se le da un peso de 0.75 y al examen final (x) se le da un peso de 0.25. Asumimos que un promedio semestral de 89.5 será redondeado a 90 en el expediente académico. Por lo tanto,

$$\frac{88.5(0.75) + x(0.25)}{0.75 + 0.25} = 89.5$$

$$0.25x = 89.5(1) - 88.5(0.75)$$

$$x = 92.5$$

Al interpretar la respuesta, concluimos que Marty necesita obtener un 93 en el examen final. ***Ahora resuelva el ejercicio 21.***

Resumen de cinco números

Las medidas de tendencia central sólo nos dicen parte de la historia de un conjunto de datos. En general *no* indican cómo están distribuidos los datos o si éstos son muy variables. *Las medidas de dispersión* sí lo hacen. La medida más sencilla y burda de dispersión es el **rango**, que es la diferencia entre los valores máximo y mínimo en el conjunto de datos:

$$\text{Rango} = \text{máximo} - \text{mínimo}.$$

Por ejemplo, el rango de la producción anual de cuadrangulares de Roger Maris es $61 - 5 = 56$. Al igual que la media, el rango es un estadístico que está fuertemente influenciado por datos extremos (outliers), así que puede ser engañoso. Una medida más resistente (y, por tanto, más útil) es el *rango intercuartílico*, que es el rango de la mitad central de los datos.

DETERMINACIÓN DE CUARTILES

Cuando estamos buscando cuartiles para un conjunto de datos con un número impar de valores, *no* consideramos el valor de la mitad para ser incluido en la mitad superior o la mitad inferior de los datos.

Al igual que la mediana separa los datos en mitades, los **cuartiles** separan a los datos en cuartos. El **primer cuartil** P_1 es la mediana de la mitad inferior de los datos, el **segundo cuartil** es la mediana y el **tercer cuartil** P_3 es la mediana de la mitad superior de los datos. El **rango intercuartílico** (*RIC*) mide la dispersión entre el primero y el tercer cuartiles, constituyendo la mitad central de los datos:

$$RIC = P_3 - P_1.$$

Considerar al mismo tiempo el máximo, el mínimo y los tres cuartiles, proporciona un panorama bastante completo tanto de la tendencia central como de la dispersión de un conjunto de datos.

DEFINICIÓN Resumen de los cinco números

El **resumen de los cinco números** de los datos es la colección

(mínimo, P_1, mediana, P_3, máximo).

EJEMPLO 7 Resumen de los cinco números y la dispersión

Determine los resúmenes de los cinco números para las expectativas de vida de hombres y mujeres en los países de Sudamérica (tabla 9.12, página 768) y compare las dispersiones.

SOLUCIÓN A continuación están las listas en orden ascendente.

Hombres:

{59.0, 60.5, 61.5, 66.7, 67.9, 68.5, 69.0, 70.3, 71.4, 71.9, 72.1, 72.6}

CÁLCULO DE ESTADÍSTICA EN UNA CALCULADORA

Las calculadoras modernas, por lo regular, procesan listas de datos y proporcionan estadísticos tales como media, mediana y cuartiles con sólo oprimir un botón. Consulte su manual de propietario.

continúa

Mujeres:

{66.2, 66.7, 67.7, 72.8, 74.3, 74.4, 74.6, 76.5, 76.6, 78.8, 79.0, 79.4}

Hemos espaciado la lista para mostrar dónde aparecen los cuartiles. La mediana de los 12 valores está a la mitad de los valores sexto y séptimo. El primer cuartil es la mediana de los 6 valores menores (por ejemplo, la mitad entre el tercero y cuarto), y el tercer cuartil es la mediana de los seis valores superiores (por ejemplo, la mitad entre el noveno y décimo).

Los resúmenes de los cinco números se muestran a continuación.

Hombres: {59.0, 64.1, 68.75, 71.65, 72.6}

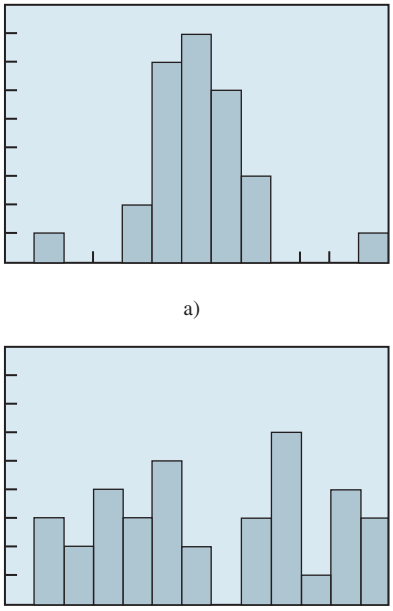
Mujeres: {66.2, 70.25, 74.5, 77.7, 79.4}

Los hombres tienen un rango de $72.6 - 59.0 = 13.6$ y un *RIC* de $71.65 - 64.1 = 7.55$.

Las mujeres tienen un rango de $79.4 - 66.2 = 13.2$ y un *RIC* de $77.7 - 70.25 = 7.45$.

No sólo viven más las mujeres, sino que además presentan menos variabilidad en su expectativa de vida (medida por el *RIC*). La expectativa de vida está fuertemente afectada por las diferentes condiciones políticas de los países (guerra, conflictos civiles, crimen, etcétera).

Ahora resuelva el ejercicio 23.



a)

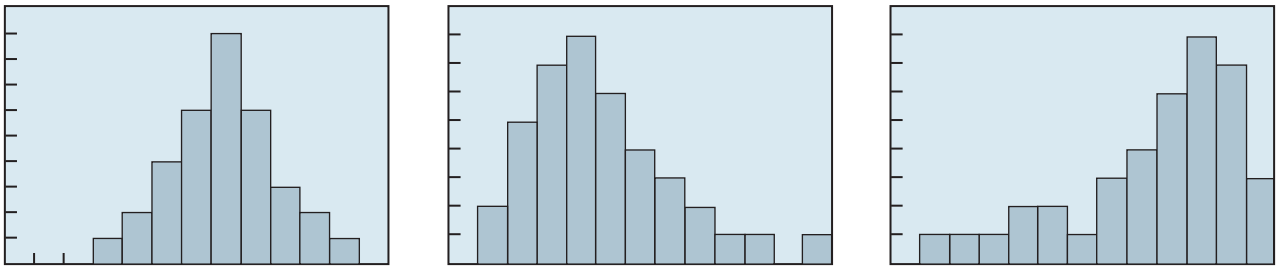
b)

FIGURA 9.19 ¿Cuál conjunto de datos tiene más variabilidad? (Exploración 1).

Puede aprender mucho acerca de los datos considerando la *forma* de la distribución, como se ve en un histograma. Intente responder las preguntas de la exploración 1.

EXPLORACIÓN 1 **Interpretación de histogramas**

1. De los histogramas que se muestran en la figura 9.19, ¿cuál muestra un conjunto de datos con mayor variabilidad?
2. De los tres histogramas de la figura 9.20, ¿cuál tiene una mediana menor que su media? ¿Cuál tiene una mediana mayor que su media? ¿Cuál tiene una mediana aproximadamente igual a su media?



a) b) c)

FIGURA 9.20 ¿Cuál gráfica muestra un conjunto de datos en el que la media sea menor que la mediana? ¿Mayor que la mediana? ¿Aproximadamente igual a la mediana? (Exploración 1).

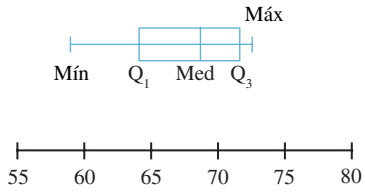


FIGURA 9.21 Un diagrama de caja para el resumen de los cinco números de las expectativas de vida de hombres del ejemplo 7 (las características de la caja se etiquetan aquí con propósitos de ilustración; no es necesario etiquetar el mínimo, los cuartiles o el máximo).

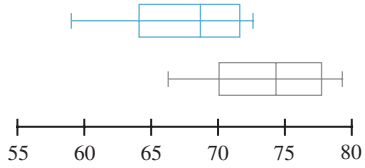
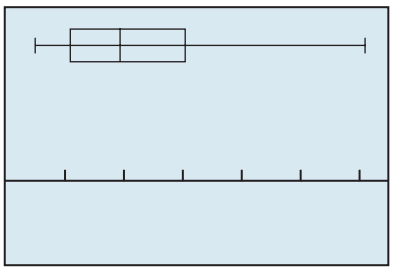


FIGURA 9.22 Una sola gráfica que muestre los diagramas de caja, para las expectativas de vida de **hombres** y de **mujeres** en los países de Sudamérica, proporciona una buena visualización de las diferencias en los dos conjuntos de datos (ejemplo 8).



[0, 65] por [−5, 10]

FIGURA 9.23 Un diagrama de caja de la producción anual de cuadrangulares de Roger Maris (tabla 9.11, página 768). El dato extremo (61) da como resultado un largo bigote a la derecha, ya que el máximo es mucho mayor que P_3.

La distribución de la figura 9.20a es **simétrica**, ya que se ve aproximadamente igual si se reflejara con respecto a una recta vertical que pasara por la mediana. La distribución de la figura 9.20b está **sesgada a la derecha**, ya que tiene una "cola" más larga del lado derecho. Los valores en la cola jalan a las medidas no resistentes (como la media) hacia la *derecha*, dejando a las medidas resistentes (como la mediana) detrás. La distribución en la figura 9.20c está **sesgada a la izquierda**, ya que las medidas no resistentes se jalan hacia la *izquierda*.

También puede ver simetría y sesgo en diagramas de tallos, que tienen las mismas formas, verticalmente, que los histogramas tienen horizontalmente.

Diagramas de caja (*boxplot*)

Un diagrama de caja o *boxplot* (en ocasiones conocida también como **diagrama de caja y bigotes**) es una gráfica que describe el resumen de los cinco números de un conjunto de datos. El diagrama consiste en un rectángulo central (caja) que se extiende desde el primero hasta el tercer cuartil, con un segmento vertical que marca la mediana. Los segmentos de recta (bigotes) se extienden en los extremos de la caja hasta los valores mínimo y máximo. Por ejemplo, el resumen de los cinco números para las expectativas de vida de hombres en países de Sudamérica (ejemplo 7) fue {59.0, 64.1, 68.75, 71.65, 72.6}. El diagrama de caja para los datos se muestra en la figura 9.21. Observe que la caja y el bigote se extienden más hacia la izquierda de la mediana que hacia la derecha, sugiriendo una distribución que está sesgada hacia la izquierda (el histograma obtenido en el ejercicio 9, sección 9.7, confirma que éste es el caso).

EJEMPLO 8 Comparación de diagramas de cajas

Dibuje los diagramas de cajas para los datos de hombres y mujeres del ejemplo 7 y describa brevemente la información que se despliega en la visualización.

SOLUCIÓN Los resúmenes de los cinco números son:

Hombres: {59.0, 64.1, 68.75, 71.65, 72.6}

Mujeres: {66.2, 70.25, 74.5, 77.7, 79.4}

Los diagramas de cajas puede graficarse en forma simultánea (figura 9.22).

Con base en la gráfica podemos ver que la mitad central de las expectativas de vida de las mujeres son todas mayores que la mediana de las expectativas de vida de los hombres. La expectativa de vida para las mujeres en los países de Sudamérica es mayor que el máximo de los hombres.

Ahora resuelva el ejercicio 31.

Si observamos el diagrama de caja para el total de cuadrangulares anuales de Roger Maris {14, 28, 16, 39, 61, 33, 23, 26, 8, 13, 9, 5}, vemos que el bigote de la derecha es muy largo (figura 9.23). Ésta es una visualización del efecto del dato extremo (61), que es mucho mayor que el tercer cuartil (30.5).

De hecho, un diagrama de caja nos proporciona una forma conveniente de pensar en un dato extremo (*outlier*): un número que hace que uno de los bigotes sea notablemente más largo que la caja. La regla empírica usual para "notablemente más largo" es 1.5 veces más largo. Como la longitud de la caja es el *RIC*, nos lleva a la siguiente comprobación numérica.

Un número de un conjunto de datos puede considerarse un **dato extremo** (o **outlier**) si está más de $1.5 \times RIC$ por debajo del primer cuartil o por arriba del tercero.

DEFINICIÓN DE DATOS EXTREMOS (OUTLIERS)

Debe señalarse que la regla empírica que se dio para identificar datos extremos no es una regla universal. La única forma segura de caracterizar un dato extremo es que esté fuera del rango esperado de los datos, y ése "rango esperado" es discutible.

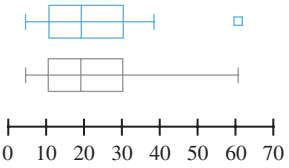


FIGURA 9.24 Un diagrama **modificado** de caja y un diagrama **común** de caja del total de cuadrangulares anuales de Roger Maris.

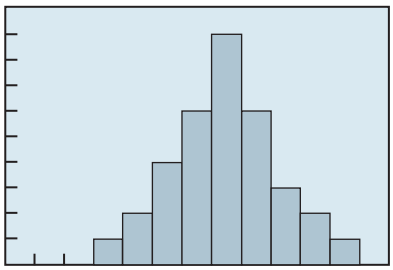


FIGURA 9.25 Los histogramas basados en datos reunidos de fuentes del mundo real con frecuencia son simétricos, y altos en la mitad, sin datos extremos. Las distribuciones de frecuencias con gráficas de esta forma se denominan *normales*.

EJEMPLO 9 Identificación de un dato extremo (outlier)

Bajo el criterio de $1.5 \times RIC$, ¿el 61 es un dato extremo de los datos de cuadrangulares de Roger Maris?

SOLUCIÓN En orden, los totales de Maris son: {5, 8, 9, 13, 14, 16, 23, 26, 28, 33, 39, 61}.

Su resumen de cinco números: {5, 11, 19.5, 30.5, 61}

Si *RIC*: $30.5 - 11 = 19.5$

Por lo que,

$$P_3 + 1.5 \times RIC = 30.5 + 1.5 \times 19.5 = 59.75.$$

Como $61 > 59.75$, la regla empírica lo identifica como un dato extremo.

Ahora resuelva el ejercicio 39.

Por su naturaleza, los datos extremos pueden distorsionar la apariencia global de los datos. Por esa razón, los estadísticos con frecuencia buscan razones para omitirlos de sus gráficas y cálculos (por supuesto, esto puede ser riesgoso. Usted tendría que omitir una lectura extraña en el laboratorio si sospechara un error en el equipo, pero intentaría no correr el riesgo de ignorar un potencial descubrimiento científico). Un **diagrama modificado de caja** es una visualización intermedia que separa los datos extremos como puntos aislados, extendiendo los bigotes sólo hasta los datos no extremos más alejados. La figura 9.24 muestra un diagrama modificado de caja para los datos de cuadrangulares de Roger Maris, comparado con un diagrama de caja común.

Varianza y desviación estándar

Podría sorprenderle que el resumen de cinco números y su diagrama de cajas no hagan referencia a la media, que es una medida más común que una mediana o un cuartil. La razón es que la media, una medida no resistente, es menos confiable en presencia de datos extremos o sesgados.

En la otra cara de la moneda, la media es una excelente medida de tendencia central cuando no están presentes datos extremos o sesgo, que es un caso muy frecuente. En realidad, los histogramas de datos de toda clase de fuentes del mundo real tienden a verse como el de la figura 9.25, en la que las frecuencias son más altas cerca de la media y menores conforme se aleja de la media en cualquiera de las direcciones. Los estadísticos llaman a estas distribuciones *normales* (en breve definiremos ese término con mayor precisión).

Para datos distribuidos normalmente, la media es la medida preferida de tendencia central. También hay una medida de variabilidad para datos normales, que es mejor que el *RIC*, denominada *desviación estándar*. Al igual que la media, la desviación estándar es afectada fuertemente por datos extremos y puede ser engañosa si éstos se presentan.

DEFINICIÓN Desviación estándar

La **desviación estándar** de los números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

donde $\bar{x}$ expresa a la media. La **varianza** es σ^2, el cuadrado de la desviación estándar.

Si definimos la "desviación" de un dato como lo que difiere de la media, entonces la varianza sólo es la media de las desviaciones al cuadrado. La desviación estándar es la *raíz* cuadrada de la *media* de las *desviaciones al cuadrado*, por lo que en ocasiones se conoce como la *raíz media de las desviaciones al cuadrado*. El símbolo "σ" es una letra griega sigma minúscula.

El cálculo manual de una desviación estándar puede ser tedioso, pero con las calculadoras modernas sólo es necesario ingresar la lista de datos y oprimir un botón. De hecho, la mayoría de las calculadoras le proporcionan la opción de dos desviaciones estándar, una ligeramente mayor que la otra. La mayor (comúnmente llamada s) tiene como base la fórmula

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

La diferencia es que la fórmula para σ sirve para determinar el parámetro verdadero, que significa que sólo se aplica cuando $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es la **población** completa. Si $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es una *nuestra* de la población, entonces la fórmula para s en realidad proporciona una mejor estimación del parámetro que la fórmula para σ. Por ello utilizamos la desviación estándar más grande cuando los datos provengan de una muestra (como es el caso casi siempre).

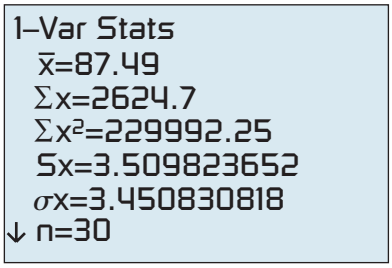


FIGURA 9.26 Estadísticos de una sola variable en una pantalla de una calculadora común (ejemplo 10).

EJEMPLO 10 Determinación de la desviación estándar con una calculadora

Un investigador pesó 30 polluelos recién salidos del cascarón y registró sus pesos en gramos, como se muestra en la tabla 9.18.

Tabla 9.18 Pesos en gramos de 30 polluelos recién nacidos

79.5	87.5	88.5	89.2	91.6	84.5	82.1	82.3	85.7	89.8
84.0	84.8	88.2	88.2	82.9	89.8	89.2	94.1	88.0	91.1
91.8	87.0	87.7	88.0	85.4	94.4	91.3	86.4	85.7	86.0

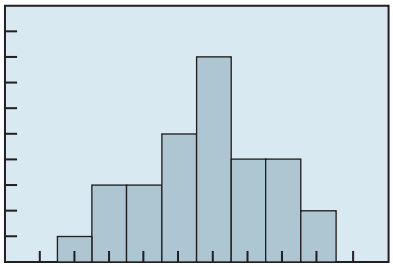
Con base en la muestra, estime la media y la desviación estándar para los pesos de los polluelos. ¿Estas medidas son útiles en este caso o debe utilizarse el resumen de los cinco números?

SOLUCIÓN Ingresamos la lista de datos en la calculadora y elegimos el comando que producirá estadísticas de una sola variable. La salida de una de tales calculadoras se muestra en la figura 9.26.

La media es $\bar{x} = 87.49$ gramos. Para la desviación estándar, elegimos $Sx = 3.51$ gramos, ya que los cálculos están basados en una muestra de polluelos recién salidos del cascarón, no la población completa de polluelos.

Un histograma (Xscl = 2) en la ventana [77, 98] por [0, 10] muestra que la distribución normal (como lo esperaríamos de la naturaleza) no tiene datos extremos o un fuerte sesgo. Por lo tanto, la media y la desviación estándar son medidas adecuadas (figura 9.27).

Ahora resuelva el ejercicio 35.



[77, 98] por [0, 10]

FIGURA 9.27 Los pesos de polluelos recién salidos del cascarón, del ejemplo 10, parecen normales, sin datos extremos o un sesgo pronunciado. Concluimos que la media y la desviación estándar son medidas adecuadas de tendencia central y de variabilidad, respectivamente.

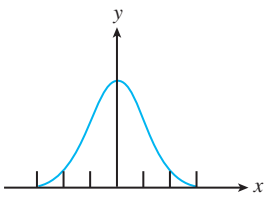


FIGURA 9.28 La gráfica de $y = e^{-x^2/2}$. Ésta es una curva gaussiana (o normal).

Distribuciones normales

Aunque utilizamos la palabra *normal* en muchos contextos para sugerir un comportamiento típico, en el contexto de la estadística y las distribuciones de datos realmente es un término técnico. Si grafica la función

$$y = e^{-x^2/2}$$

en la ventana $[-3, 3]$ por $[0, 1]$, verá lo que significa **normal** en sentido matemático (figura 9.28).

La forma corresponde a la clase de distribución que hemos estado llamando "normal". De hecho, esta curva, denominada **curva gaussiana** o **curva normal** es un *modelo matemático preciso* del comportamiento normal. Es donde la media y la desviación intervienen.

La desviación estándar de la curva en la figura 9.28 es 1. Mediante Cálculo, podemos determinar que alrededor del 68% del área total bajo esta curva está entre -1 y 1 (figura 9.29a). Como cualquier distribución normal tiene esta forma, *alrededor del 68% de los datos de cualquier distribución normal, se encuentra en un radio de 1 desviación estándar de la media.*

De forma análoga, podemos determinar que alrededor del 95% del área total debajo de la curva gaussiana se encuentra entre -2 y 2 (figura 9.29b), lo que implica que *alrededor del 95% de los datos, en cualquier distribución normal, se encuentra en un radio de 2 desviaciones estándar de la media.*

De forma análoga, podemos determinar que alrededor del 99.7% del área total debajo de la curva gaussiana se encuentra entre -3 y 3 (figura 9.29c), lo que implica que *alrededor del 99.7% de los datos, en cualquier distribución normal, se encuentra en un radio de 3 desviaciones estándar de la media.*

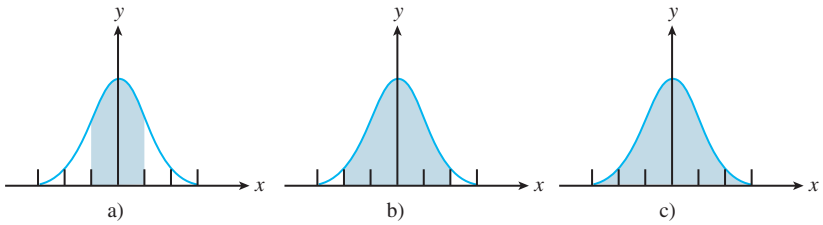


FIGURA 9.29 a) Alrededor de 68% del área debajo de la curva gaussiana está en un radio de 1 unidad de la media. b) Alrededor de 95% del área está en un radio de 2 unidades de la media. c) Alrededor de 99.7% del área está en un radio de 3 unidades de la media. Si consideramos las unidades como desviaciones estándar, esto nos da un modelo para *cualquier* distribución normal.

La regla 68-95-99.7

Si los datos para una población se distribuyen normalmente, con media μ y desviación estándar σ, entonces

- aproximadamente 68% de los datos están entre $\mu - 1\sigma$ y $\mu + 1\sigma$;
- aproximadamente 95% de los datos están entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$;
- aproximadamente 99.7% de los datos están entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$.

Lo que hace útil a esta regla es que las distribuciones normales son comunes en una amplia gama de aplicaciones estadísticas. Terminaremos este capítulo con una aplicación sencilla.

EJEMPLO 11 Uso de la regla 68-95-99.7

Con base en los datos de la investigación presentada en el ejemplo 10, un polluelo que pesa 95 gramos, ¿está en el 2.5% superior de todos los polluelos recién salidos del cascarón?

SOLUCIÓN Suponemos que los pesos de los polluelos recién nacidos se distribuyen de forma normal en la población total. Como no conocemos la media y la desviación estándar de la población completa (los parámetros μ y σ), utilizamos $\bar{x} = 87.49$ y $Sx = 3.51$ como estimadores.

Vea la figura 9.29b. La región sombreada contiene el 95% del área, de modo que cada una de las regiones en blanco en cada extremo debe tener 2.5% del área. Esto es, para que un polluelo esté en el 2.5% superior, tendrá que pesar al menos 2 desviaciones estándar más que la media:

$$\bar{x} + 2Sx = 87.49 + 2(3.51) = 94.51 \text{ gramos.}$$

Como $95 > 94.51$, un polluelo recién salido del cascarón en verdad estará en el 2.5% superior.

Ahora resuelva el ejercicio 41.

Si, en algún momento, usted estudia estadística con mayor profundidad, aprenderá que existe más en el ejemplo 11 de lo que parece a simple vista. Para empezar, necesitamos conocer que los polluelos en realidad son una muestra aleatoria de todos los polluelos (y no, por ejemplo, de la misma área geográfica). Además, perdemos un poco de precisión usando un estadístico para estimar la desviación estándar verdadera y los estadísticos tienen formas de tomar en cuenta eso.

Esta sección sólo ha ofrecido un breve vistazo de cómo los estadísticos utilizan matemáticas. Si está interesado en aprender más, le recomendamos encontrar un buen libro de texto de estadística y ¡continuar con él!

REPASO RÁPIDO 9.8 *(Es necesaria la habilidad de la sección 9.5)*

En los ejercicios del 1 al 6 escriba la suma en forma desarrollada.

1. $\sum_{i=1}^{7} x_i$
2. $\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})$
3. $\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i$
4. $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})$
5. $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2$
6. $\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2}$

En los ejercicios del 7 al 10 escriba la suma en notación sigma.

7. $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \cdots + x_8 f_8$
8. $(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_{10} - \bar{x})^2$
9. $\frac{1}{50}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_{50} - \bar{x})^2]$
10. $\sqrt{\frac{1}{7}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_7 - \bar{x})^2]}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9.8

1. En cada caso identifique si el número descrito es un *parámetro* o un *estadístico*.

a) La calificación promedio en el último examen fue 73.4.

b) Alrededor de 13% de la población humana es zurda.

c) En un estudio de ratas de laboratorio, 93% se volvieron agresivas cuando no se les permitió dormir.

2. En cada caso identifique si el **promedio** descrito es una *media*, *mediana* o *moda*.

a) El **promedio** de niños irlandeses pelirrojos también tienen pecas.

b) El **promedio** de carreras permitidas de un lanzador (pitcher) es 2.35.

c) Un coro alineado por estaturas, las más altas detrás, las más bajas adelante y las personas de altura **promedio** en el medio.

En los ejercicios del 3 al 6 determine la media del conjunto de datos.

3. {12, 23, 15, 48, 36}

4. {4, 8, 11, 6, 21, 7}

5. {32.4, 48.1, 85.3, 67.2, 72.4, 55.3}

6. {27.4, 3.1, 9.7, 32.3, 12.8, 39.4, 73.7}

En los ejercicios 7 y 8 determine la población media de los seis estados que se listan en la tabla 9.15 (página 769) para el año que se indica.

7. 1900

8. 1990

En los ejercicios 9 y 10 determine la media de los datos que se indican.

9. El número de satélites (lunas), con base en la información de la tabla 9.19.

Tabla 9.19 Satélites de los planetas

Planeta	Número de satélites
Mercurio	0
Venus	0
Tierra	1
Marte	2
Júpiter	61
Saturno	33
Urano	26
Neptuno	13
Plutón	1

Fuente: The World Almanac and Book of Facts, 2005.

10. El área de los continentes con base en la información de la tabla 9.20.

Tabla 9.20 Tamaño del continente

Continente	Área (km^2)
África	30,065,000
Antártica	13,209,000
Asia	44,579,000
Australia/Oceanía	8,112,000
Europa	9,938,000
Norteamérica	24,474,000
Sudamérica	17,819,000

Fuente: Worldatlas.com, 2005.

11. Determine la mediana de los datos en la tabla 9.19 (ejercicio 9).

12. Determine la mediana de los datos en la tabla 9.20 (ejercicio 10).

13. Producción de cuadrangulares Determine la producción de cuadrangulares promedio anual para Willie Mays y para Mickey Mantle para los totales de sus carreras de 660 durante 22 años y 536 durante 18 años, respectivamente. ¿Quién tuvo la mayor tasa de producción?

14. Pintando casas Un equipo para pintar casas del Colegio Estatal de Pennsylvania pintó 12 casas en 5 días, mientras que un equipo del College Station de Texas pintó 15 casas en 7 días. Determine el número promedio de casas por día que cada equipo pintó. ¿Cuál equipo tuvo una mayor tasa?

15. Producción de faldas La Casa Hip-Hop produjo 1,147 faldas en 4 semanas y Modas What-Next produjo 1,516 faldas en 4 semanas. ¿Cuál compañía tiene la mayor tasa de producción?

16. Ingreso per capita El ingreso per capita (IPC) es un promedio que se determina dividiendo el producto nacional bruto (PNB) de un país entre su población. La India tiene 882,575,000 habitantes y un PNB de 311 mil millones de dólares, y México tiene 87,715,000 habitantes y un PNB de 218 mil millones de dólares. Determine el OPC para la India y para México. ¿Cuál país tiene el mayor ingreso por persona?

17. Determine la mediana y la moda de los números en la tabla 9.18 de la página 779 (pesos en gramos de polluelos recién salidos del cascarón).

18. En 1998, un total de 116,517 estudiantes presentaron el Examen Avanzado de Colocación (AP) en Cálculo AB. A partir de la tabla de frecuencias siguiente determine la calificación media en Cálculo AB en 1998. (*Fuente: The College Board*).

Calificación en el examen AP	Número de estudiantes
5	18,522
4	27,102
3	31,286
2	20,732
1	18,875

19. En 1998, un total de 26,784 estudiantes presentaron el Examen Avanzado de Colocación (AP) en Cálculo BC. A partir de la tabla de frecuencias siguiente determine la calificación media en Cálculo BC en 1998. (*Fuente: El College Board*).

Calificación en el examen AP	Número de estudiantes
5	9,879
4	5,119
3	6,143
2	2,616
1	3,027

En los ejercicios 20 y 21 utilice la información de la tabla 9.16 (página 770).

a) Determine el promedio (media) de las temperaturas que se indican para Beijing.

b) Determine el promedio ponderad, usando el número de días del mes como el peso (suponga que no es año bisiesto).

c) Compare sus resultados de las partes **a** y **b**. ¿Los pesos tienen un efecto sobre el promedio? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Cuál promedio es el mejor indicador para estas temperaturas?

20. Las temperaturas altas mensuales.

21. Las temperaturas bajas mensuales.

En los ejercicios del 22 al 25 determine el resumen de los cinco números, el rango y el rango intercuartílico para los conjuntos de datos especificados. Identifique los datos extremos, si los hay.

22. La información de producción de cuadrangulares para Mark McGwire y Barry Bonds de la tabla 9.6 (página 763).

23. La información de producción de cuadrangulares para Willie Mays y Mickey Mantle de la tabla 9.13 (página 768).

24. Los promedios anuales de velocidad de viento siguientes en 44 estaciones climáticas en Estados Unidos:

9.0, 6.9, 9.1, 9.2, 10.2, 12.5, 12.0, 11.2, 12.9, 10.3, 10.6, 10.9, 8.7, 10.3, 11.0, 7.7, 11.4, 7.9, 9.6, 8.0, 10.7, 9.3, 7.9, 6.2, 8.3, 8.9, 9.3, 11.6, 10.6, 9.0, 8.2, 9.4, 10.6, 9.5, 6.3, 9.1, 7.9, 9.7, 8.8, 6.9, 8.7, 9.0, 8.9, 9.3

25. Los siguientes salarios de empleados en un departamento de la Compañía Hermanos García (en miles de dólares):

33.5, 35.3, 33.8, 29.3, 36.7, 32.8, 31.7, 37.3, 33.5, 28.2, 34.8, 33.5, 29.7, 38.5, 32.7, 34.8, 34.2, 31.6, 35.4

En los ejercicios del 26 al 28 construya **a** un diagrama de caja y **b** un diagrama modificado de caja para los datos.

26. Los datos de producción anual de cuadrangulares para McGwire de la tabla 9.6 (página 763).

27. Los datos de producción anual de cuadrangulares para Barry Bonds de la tabla 9.6 (página 763).

28. Los envíos de CD de la tabla 9.9 (página 766).

En los ejercicios 29 y 30 se hace referencia a la información de rapidez del viento analizada en el ejercicio 24.

29. Algunas aeroturbinas son eficientes generadoras de potencia pero requieren velocidades de viento promedio de al menos 10.5 mph. Aproximadamente, ¿qué fracción de los centros climáticos son adecuados para estas turbinas generadoras?

30. Si la tecnología mejora la eficiencia de las aeroturbinas de modo que sean eficientes en vientos que promedien al menos 7.5 mph, aproximadamente, ¿qué fracción de los centros climáticos son adecuados para estos generadores mejorados?

En los ejercicios 31 y 32 utilice diagramas de caja simultáneos de la información de cuadrangulares anuales para Willie Mays y Mickey Mantle de la tabla 9.13 (página 768) para responder las preguntas.

31. a) ¿Cuál conjunto de datos tiene el mayor rango?

b) ¿Cuál conjunto de datos tiene el mayor rango intercuartílico?

32. Escriba para aprender Escriba un párrafo que explique la diferencia en producción de cuadrangulares entre Willie Mays y Mickey Mantle.

En los ejercicios del 33 al 38 determine la desviación estándar y la varianza del conjunto de datos (puesto que el conjunto de datos es la población bajo consideración, utilice σ en lugar de s).

33. {23, 45, 29, 34, 41, 19, 22}

34. {28, 84, 67, 71, 92, 37, 45, 32, 74, 96}

35. La información de envíos de CD de la tabla 9.9 (página 766).

36. La información de envíos de casetes de la tabla 9.10 (página 767).

37. La información del ejercicio 24.

38. La información del ejercicio 25.

39. La producción anual de cuadrangulares de Mark McGwire (tabla 9.6, página 763) varía de una baja de 3 a una alta de 70. Bajo el criterio de $1.5 \times RIC$, ¿estos números son datos extremos (*outliers*)?

40. Escriba para aprender ¿Es posible que la desviación estándar de un conjunto sea negativa? ¿Sea cero? En ambos casos, explique su respuesta.

41. Calificaciones del SAT En 1995, las calificaciones de los SAT (por sus siglas en inglés de Exámenes de Aptitudes Académicas) se reescalaron a su media original (500) con una desviación estándar aproximada de 100. Las calificaciones SAT en la población general tienen una distribución normal.

a) Aproximadamente, ¿qué porcentaje de las calificaciones de 1995 caen entre 400 y 600?

b) Aproximadamente, ¿qué porcentaje de las calificaciones de 1995 caen debajo de 300?

c) En 2001, el promedio nacional en la sección de matemáticas del SAT se elevó a 514. ¿Este número es un parámetro o un estadístico?

42. Calificaciones ACT En 2001, la media nacional de calificaciones ACT de matemáticas fue 20.7, con una desviación estándar aproximada de 6. Las calificaciones ACT en la población general tienen una distribución normal.

a) Aproximadamente, ¿qué porcentaje de las calificaciones de 2001 fueron superiores a 26.7?

b) Aproximadamente, ¿qué calificación ACT de matemáticas necesitaría uno haber obtenido en 2001 para estar clasificado entre el 2.5% superior de todos los que presentaron el examen?

c) Escriba para aprender Las calificaciones promedio del ACT se publican estado por estado. Si sumamos las medias de los 50 estados y lo dividimos entre 50, ¿el resultado será una buena estimación para la calificación media nacional? Explique su respuesta.

Preguntas de examen estandarizado

43. Verdadero o falso La mediana es fuertemente afectada por datos extremos. Justifique su respuesta.

44. Verdadero o falso La longitud de la caja en un diagrama de caja es el rango intercuartílico. Justifique su respuesta.

Para resolver los ejercicios del 45 al 48 puede utilizar una calculadora graficadora.

45. Opción múltiple La gráfica de una distribución normal será

A) simétrica.

B) sesgada a la izquierda.

C) sesgada a la derecha.

D) más baja en el centro que en los extremos.

E) de una forma no predecible.

46. Opción múltiple A continuación se da una tabla de frecuencias para un conjunto de 25 calificaciones de un examen. ¿Cuál es la media de los datos?

Calificación del examen	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Número de estudiantes	3	3	5	6	4	3	1	0	0	0

A) 7.00

B) 7.28

C) 7.35

D) 7.60

E) 7.86

47. Opción múltiple El profesor Mitchell califica los exámenes de sus 30 estudiantes y encuentra que las calificaciones tienen una media de 81.3 y una mediana de 80.5. Posteriormente, determina que el estudiante con la calificación más alta merece 9 puntos más debido a una demostración mal calificada. Después de que el error se corrige, las calificaciones tienen

A) una media de 81.3 y una mediana de 80.5.

B) una media de 81.6 y una mediana de 80.5.

C) una media de 81.6 y una mediana de 80.8.

D) una media de 90.3 y una mediana de 80.5.

E) una media de 90.3 y una mediana de 89.5.

48. Opción múltiple Si los contenidos de calorías de huevos de petirrojo se distribuyen normalmente con una media de 25 y una desviación estándar de 1.2, entonces 95% de todos los huevos de petirrojo tendrán un contenido de calorías que cae en el intervalo

A) [21.4, 28.6]

B) [22, 28]

C) [22.6, 27.4]

D) [23, 27]

E) [23.8, 26.2]

Exploraciones

49. Actividad en equipo Liste un conjunto de datos para los cuales se cumplan las siguientes desigualdades:

a) Moda $<$ mediana $<$ media

b) Mediana $<$ media $<$ moda

c) Media $<$ moda $<$ mediana

50. Actividad en equipo Liste un conjunto de datos para los cuales se cumplan la ecuación o desigualdad siguientes:

a) Desviación estándar $<$ rango intercuartílico

b) Rango intercuartílico $<$ desviación estándar

c) Rango $=$ rango intercuartílico

51. Para la desviación estándar de un conjunto de datos, ¿es posible que sea mayor que el rango? Explique.

52. ¿Por qué podemos determinar la moda de datos categóricos pero no la media o la mediana?

53. Dibuje un diagrama de caja para la cual se cumplan las siguientes desigualdades:

a) Mediana $<$ media

b) $2 \times$ rango intercuartílico $<$ rango

c) Rango $< 2 \times$ rango intercuartílico

54. Elabore un conjunto de datos con mediana 5, moda 6 y media 7.

Ampliación de las ideas

Ponderación de datos para la población Las expectativas de vida promedio para hombres y mujeres en países de Sudamérica se dieron en la tabla 9.12 (página 768). Para determinar una expectativa global de vida promedio para hombres o mujeres en todos estos países, necesitaríamos ponderar los datos de cada país de acuerdo con las diversas poblaciones nacionales. La tabla 9.21 es una extensión de la tabla 9.12, que muestra las poblaciones (en millones de habitantes). Suponga que los hombres y mujeres son aproximadamente el mismo número en cada país.

Tabla 9.21 Esperanza de vida por género y población (en millones) para los países de Sudamérica

País	Mujeres	Hombres	Población
Argentina	79.7	72.0	39.1
Bolivia	67.9	62.5	8.7
Brasil	75.6	67.5	184.1
Chile	79.8	73.1	15.8
Colombia	75.4	67.6	42.3
Ecuador	79.0	73.2	13.2
Guyana	64.8	60.1	0.7
Paraguay	77.3	72.1	6.2
Perú	71.0	67.5	27.5
Surinam	71.6	66.8	0.4
Uruguay	79.2	72.7	3.4
Venezuela	77.3	71.0	25.0

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2005.

En los ejercicios 55 y 56 utilice los datos de la tabla 9.21 para determinar la media de expectativa de vida de cada grupo.

55. Mujeres que viven en países de Sudamérica.

56. Hombres que viven en países de Sudamérica.

57. **Control de calidad** Una planta fabrica cojinetes esféricos de acuerdo con las especificaciones del comprador, rechazando cualquier producto con un diámetro que se desvíe más de 0.1 mm del valor especificado. Si los cojinetes esféricos se producen con la media especificada y una desviación estándar de 0.05 mm, ¿qué porcentaje de los productos serán rechazados?

58. **Control de calidad** Una máquina llena latas de refresco de cola de 12 onzas con una media de 12.08 onzas de refresco y una desviación estándar de 0.04 onzas. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de las latas en realidad tendrán menos de las 12 onzas de cola anunciadas?



Matemáticas en el trabajo

En el transcurso para obtener mi grado de licenciatura en comunicaciones, tome una clase en investigación de matemáticas en las comunicaciones, y la disfrute muchísimo. Después de graduarme en la universidad, traté de colocarme en el área de prensa escrita, pero no era buena editora. Como en realidad disfrutaba la investigación y el análisis, me inicié en administración de la investigación.

Lo que me gusta más de mi trabajo es que soy como una detective, usando matemáticas para informarme acerca de la gente. Básicamente, mi trabajo es llevar la voz de los clientes a un plan de desarrollo de productos, de modo que pueda encontrar cómo hacer un producto para ellos. Hay dos maneras de conocer a los clientes: mediante matemáticas y mediante psicología. Mediante la psicología, la gente que desarrolla el producto tiene una tendencia a usar sus instintos y corazonadas, que en ocasiones son totalmente incorrectas, para conjeturar lo que los clientes quieren. Por eso es que yo utilizo las matemáticas.



Verónica Guerrero

Utilizamos un conjunto de preguntas, denominadas "Encuesta de satisfacción del cliente" para determinar qué valores son importantes para el cliente. Luego podemos analizar la información sin procesar y encontrar cosas tales como las diferencias entre usuarios frecuentes y no frecuentes, y cómo difieren hombres y mujeres en los usos del producto. De esta manera, aprendo acerca de toda la gente, y nosotros, como compañía, sabemos cómo elaborar un producto a la medida de nuestros clientes.

Ideas Clave DEL CAPÍTULO 9

PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

Principio de multiplicación del conteo 701
Fórmula del conteo de permutaciones 703
Fórmula del conteo de las combinaciones 704
Fórmula de conteo de un subconjunto de un conjunto con n elementos 706
Fórmula recursiva para el triángulo de Pascal 713
Teorema del binomio 714
Identidades factoriales básicas 714
Probabilidad de un evento (resultados igualmente probables) 718
Probabilidad de un evento (resultados que nos son igualmente probables) 720
Principio de multiplicación de probabilidades 722
Fórmula de la probabilidad condicional 724
Teorema de la suma de una sucesión aritmética finita 743
Teorema de la suma de una sucesión geométrica finita 745
Teorema de una serie geométrica infinita 748
Principio de inducción matemática 753
La regla 68-95-99.7 780

PROCEDIMIENTOS

Estrategia para la determinación de probabilidades 721

CAPÍTULO 9 Ejercicios de repaso

La colección de ejercicios marcados en azul podría utilizarse como un examen del capítulo.

En los ejercicios del 1 al 6 resuelva a mano y luego compruebe su resultado con una calculadora.

1. $\binom{12}{5}$

2. $\binom{789}{787}$

3. ${}_{18}C_{12}$

4. ${}_{35}C_{28}$

5. ${}_{12}P_{7}$

6. ${}_{15}P_{8}$

7. Contraseñas ¿Cuántas contraseñas de cinco caracteres hay, si el primer carácter siempre es una letra y los otros caracteres son letras y/o dígitos?

8. Programación de viajes Un agente de viajes esta tratando de programar el viaje de un cliente de la ciudad A a la ciudad B. Hay tres vuelos directos, tres vuelos de A hacia una ciudad de conexión C y cuatro vuelos que conectan la ciudad C con la ciudad B. ¿Cuántos viajes son posibles?

9. Número de placas ¿Cuántos números de placas hay que comiencen con dos letras seguidas por cuatro dígitos, o que se inicien con tres dígitos seguidos por tres letras? Suponga que no se repiten las letras ni los dígitos.

10. Formación de comités Un club tiene 45 miembros y el comité de membresías tiene tres miembros. ¿Cuántos diferentes comités de membresía son posibles?

11. Manos de bridge ¿Cuántas manos de bridge de 13 cartas hay que incluyan al as, al rey y a la reina de espadas?

12. Manos de bridge ¿Cuántas manos de bridge de 13 cartas hay que incluyan los cuatro ases y exactamente un rey?

13. Lanzamiento de moneda Suponga que una moneda se lanza cinco veces. ¿Cuántos diferentes resultados hay que incluyan al menos dos caras?

14. Formación de comités Cierta empresa pequeña tiene 35 empleados, 21 mujeres y 14 hombres. ¿Cuántos comités representativos de empleados hay, si el comité debe consistir en dos mujeres y dos hombres?

15. Contraseñas ¿Cuántas contraseñas de cualquier longitud, incluyendo palabras de una sola letra, puede formar usando cinco letras distintas?

16. Una bolsa con monedas Sean le dice a Moira que él tiene menos de 50 centavos en monedas de Estados Unidos (de menos de 50 centavos, hay monedas de 1, 5, 10 y 25 centavos) y no tiene dos monedas de la misma denominación. ¿Cuántos montos totales podría tener Sean en su bolsa?

17. Permutaciones Determine el número de permutaciones distinguibles que pueden formarse con todas las letras de

a) GERMANY

b) PRESBYTERIANS

En cada caso, ¿puede encontrar una permutación que sea el nombre y apellido de una famosa artista?

18. Permutaciones Determine el número de permutaciones distinguibles que pueden formarse con las letras de

a) FLORIDA

b) TALLAHASSEE

En los ejercicios del 19 al 24 desarrolle cada expresión.

19. $(2x + y)^5$

20. $(4a - 3b)^7$

21. $(3x^2 + y^3)^5$

22. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^6$

23. $(2a^3 - b^2)^9$

24. $(x^{-2} + y^{-1})^4$

25. Determine el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $(x - 2)^{11}$.

26. Determine el coeficiente de x^2y^6 en el desarrollo de $(2x + y)^8$.

En los ejercicios del 27 al 30 liste los elementos del espacio muestral.

27. Rueda giratoria Se hace girar una rueda giratoria, dividida en seis sectores iguales, numerados del 1 al 6.

28. Tiro de dados Se lanzan dos dados, uno rojo y uno verde.

29. Contraseñas Un código de dos dígitos se selecciona de los dígitos {1, 3, 6}, donde los dígitos no se repiten.

30. Línea de producción Un producto se inspecciona conforme sale de la línea de producción y se clasifica como defectuoso o no defectuoso.

En los ejercicios del 31 al 34 se lanza una moneda de un centavo, una de cinco centavos y una de diez centavos.

31. Liste todos los resultados posibles.

32. Liste todos los resultados en el evento "dos caras o dos cruces"

33. Liste todos los resultados del complemento del evento del ejercicio 32 (por ejemplo, el evento "no salen dos caras ni salen dos cruces").

34. Determine la probabilidad de obtener al menos una cara.

35. Lanzamiento de moneda Una moneda equilibrada se lanza seis veces. Determine la probabilidad del evento "HHTHTT".

36. Lanzamiento de moneda Una moneda equilibrada se lanza cinco veces. Determine la probabilidad de obtener dos caras y tres cruces.

37. Lanzamiento de moneda Una moneda equilibrada se lanza cuatro veces. Determine la probabilidad de obtener una cara y tres cruces.

38. Línea de ensamble En una verificación aleatoria en una línea de ensamble, la probabilidad de encontrar un artículo defectuoso es de 0.003. Determine la probabilidad de que un artículo no defectuoso ocurra 10 veces en sucesión.

39. Éxito o fracaso Un experimento tiene sólo dos posibles resultados —éxito (E) o fracaso (F)— y las repeticiones del experimento son eventos independientes. Si $P(S) = 0.5$, determine la probabilidad de obtener tres éxitos y un fracaso en cuatro repeticiones.

40. Éxito o fracaso Para el experimento del ejercicio 39, explique por qué la probabilidad de un éxito y tres fracasos es igual a la probabilidad de tres éxitos y un fracaso.

En los ejercicios del 41 al 44, un experimento tiene sólo dos posibles resultados —éxito (E) o fracaso (F)— y las repeticiones son eventos independientes. La probabilidad de éxito es 0.4.

41. Determine la probabilidad de EF en dos repeticiones.

42. Determine la probabilidad de EFE en tres repeticiones.

43. Determine la probabilidad de al menos un éxito en dos repeticiones.

44. Explique por qué la probabilidad de un éxito y tres fracasos no es igual a la probabilidad de tres éxitos y un fracaso.

45. Mezcla de nueces Dos latas de nueces mezcladas de diferentes marcas se abren en una mesa. La marca *A* consiste en 30% de anacardos, mientras que la marca *B* consiste en 40% de anacardos. Se elige al azar una lata y de ella se elige al azar una nuez. Determine la probabilidad de que la nuez sea

a) de la lata de la marca *A*.

b) un anacardo de la marca *A*.

c) un anacardo.

d) de la lata de la marca *A*, dado que es un anacardo.

46. Carrera de caballos Si la pista está mojada, Mudder Earth tiene 70% de posibilidad de ganar la quinta carrera en Keeneland. Si la pista está seca, tiene sólo 40% de posibilidad de ganar. Los pronósticos del clima predicen 80% de posibilidades de que la pista estará mojada. Determine la probabilidad de que

a) la pista esté mojada y Mudder Earth gane.

b) la pista esté seca y Mudder Earth gane.

c) Mudder Earth gane.

d) (en retrospectiva) la pista estuvo mojada, dado que Mudder Earth ganó.

En los ejercicios 47 y 48 determine los primeros 6 términos y el cuadragésimo término de la sucesión.

47. $a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}$

48. $b_k = \frac{(-2)^k}{k + 1}$

En los ejercicios del 49 al 54 determine los primeros 6 términos y el décimo segundo término de la sucesión.

49. $a_1 = -1$ y $a_n = a_{n-1} + 3$, para $n \geq 2$.

50. $b_1 = 5$ y $b_k = 2b_{k-1}$, para $k \geq 2$.

51. Sucesión aritmética, con $a_1 = -5$ y $d = 1.5$.

52. Sucesión geométrica, con $a_1 = 3$ y $r = 1/3$.

53. $v_1 = -3$, $v_2 = 1$ y $v_k = v_{k-2} + v_{k-1}$, para $k \geq 3$.

54. $w_1 = -3$, $w_2 = 2$ y $w_k = w_{k-2} + w_{k-1}$, para $k \geq 3$.

En los ejercicios del 55 al 62, las sucesiones son aritméticas o geométricas. Determine una fórmula explícita para el término *n*-ésimo. Indique la diferencia o razón común.

55. 12, 9.5, 7, 4.5, . . .

56. $-5, -1, 3, 7, \ldots$

57. 10, 12, 14.4, 17.28, . . .

58. $\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, \ldots$

59. $a_1 = -11$ y $a_n = a_{n-1} + 4.5$, para $n \geq 2$.

60. $b_1 = 7$ y $b_n = (1/4)b_{n-1}$, para $n \geq 2$.

61. Los términos cuarto y noveno de una sucesión geométrica son -192 y 196,608, respectivamente.

62. Los términos tercero y octavo de una sucesión geométrica son 14 y -3.5, respectivamente.

En los ejercicios del 63 al 66 determine la suma de los términos de la sucesión aritmética.

63. $-11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10$

64. $13, 9, 5, 1, -3, -7, -11$

65. $2.5, -0.5, -3.5, \ldots, -75.5$

66. $-5, -3, -1, 1, \ldots, 55$

En los ejercicios del 67 al 70 determine la suma de los términos de la sucesión geométrica.

67. $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$

68. $-3, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}$

69. $2, 6, 18, \ldots, 39{,}366$

70. $1, -2, 4, -8, \ldots, -8192$

En los ejercicios 71 y 72 determine la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética o geométrica.

71. $2187, 729, 243, \ldots$

72. $94, 91, 88, \ldots$

En los ejercicios 73 y 74 grafique la sucesión.

73. $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

74. $a_n = 2n^2 - 1$

75. Anualidad El señor Andalib deposita $150 al final de cada mes en una cuenta que paga 8% de interés compuesto cada mes. Al final de 10 años, el saldo en la cuenta, en dólares, es

$$150\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^0 + 150\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^1 + \cdots + 150\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{119}.$$

Utilice la fórmula para la suma de una serie geométrica para determinar el saldo.

76. Anualidad ¿Cuál es el depósito que debe hacerse al final de cada mes en una cuenta que paga 8% de interés compuesto mensualmente, si el saldo al final de los 10 años debe ser al menos $30,000?

En los ejercicios del 77 al 82 determine si la serie geométrica converge. Si lo hace, determine su suma.

77. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^j$

78. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

79. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} 4\left(-\frac{4}{3}\right)^j$

80. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{6}{5}\right)^k$

81. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3(0.5)^k$

82. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (1.2)^k$

En los ejercicios del 83 al 86 escriba la suma en notación sigma.

83. $-8 - 3 + 2 + \cdots + 92$

84. $4 - 8 + 16 - 32 + \cdots - 2{,}048$

85. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots$

86. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots$

En los ejercicios del 87 al 90 utilice las fórmulas de sumas para evaluar la expresión.

87. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k + 1)$

88. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3k^2$

89. $\displaystyle\sum_{k=1}^{25} (k^2 - 3k + 4)$

90. $\displaystyle\sum_{k=1}^{175} (3k^2 - 5k + 1)$

En los ejercicios del 91 al 94 utilice inducción matemática para demostrar que la proposición es verdadera para todos los enteros positivos n.

91. $1 + 3 + 6 + \cdots + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

92. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

93. $2^{n-1} \leq n!$

94. $n^3 + 2n$ es divisible entre 3.

En los ejercicios del 95 al 98 construya **a** un diagrama de tallos, **b** una tabla de frecuencias y **c** un histograma para la información que se indica.

95. Precios de inmuebles Utilice intervalos de $10,000. Los precios medianos (en unidades de $10,000) para casas en 30 áreas metropolitanas elegidas al azar, en 2001, fueron las siguientes:

10.7, 11.4, 12.7, 11.5, 14.6, 13.6, 9.2, 21.9, 16.1, 12.2, 13.5, 12.6, 12.0, 14.7, 23.4, 12.4, 17.0, 11.7, 11.5, 10.6, 14.1, 15.4, 15.8, 17.6, 14.7, 11.7, 12.7, 9.1, 16.4, 14.8

(Fuente: *Asociación Nacional de Agentes Inmobiliarios*, de acuerdo con *The World Almanac and Book of Facts 2002*).

96. Sitios Web populares Utilice intervalos de 5 millones. El número de visitantes (en unidades de 10 millones) para los 25 sitios más visitados. Los sitios Web en 2001 (como se midieron del 1 a 31 de mayo) tuvieron los siguientes números de visitantes:

7.1, 6.1, 5.8, 3.3, 2.9, 2.8, 2.6, 2.0, 2.0, 2.0, 1.9, 1.9, 1.9, 1.5, 1.4, 1.4, 1.3, 1.3, 1.2, 1.2, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1

(Fuente: *Media Matrix*, como se reportó en *The New York Times Almanac, 2002*).

97. Canciones de los Beatles Utilice intervalos de longitud 10. Las duraciones (en segundos) de 24 canciones de los Beatles elegidas aleatoriamente que aparecieron en discos sencillos, son las siguientes, en orden de la fecha de estreno:

143, 120, 120, 139, 124, 144, 131, 132, 148, 163, 140, 177, 136, 124, 179, 131, 180, 137, 156, 202, 191, 197, 230, 190

(Fuente: Colección personal).

98. Yardas por pase En 1995, Warren Moon, de los Vikingos de Minnesota se convirtió en el primer mariscal de campo profesional en pasar para 60,000 yardas totales. Utilice intervalos de 1,000 yardas para las yardas por pase en temporada regular de Moon dadas en la tabla 9.22.



Tabla 9.22 Estadística de yardas por pase en temporada regular para Warren Moon

Año	Yardas	Año	Yardas
1978	1112	1987	2806
1979	2382	1988	2327
1980	3127	1989	3631
1981	3959	1990	4689
1982	5000	1991	4690
1983	5648	1992	2521
1984	3338	1993	3485
1985	2709	1994	4264
1986	3489	1995	4228

Fuente: The Minnesota Vikings, de acuerdo con Julie Stracey, en USA Today, el 25 de septiembre de 1995 y www.nfl.com.

En los ejercicios del 99 al 102 determine el resumen de los cinco números, el rango, el rango intercuartílico, la desviación estándar y la varianza σ para los datos especificados (utilice σ y σ^2). Identifique cualquier dato extremo (*outlier*).

99. Los datos del ejercicio 95 **100.** Los datos del ejercicio 96

101. Los datos del ejercicio 97 **102.** Los datos del ejercicio 98

En los ejercicios del 103 al 106 construya **a** un diagrama de caja y **b** un diagrama modificado de caja para los datos especificados.

103. Los datos del ejercicio 95 **104.** Los datos del ejercicio 96

105. Los datos del ejercicio 97 **106.** Los datos del ejercicio 98

107. Haga un diagrama de tallos adosados de los datos en el ejercicio 97, que muestre las 12 primeras canciones en un diagrama y las últimas 12 canciones en el otro. Escriba una oración que interprete el diagrama de tallos.

108. Construya diagramas simultáneos de cajas de los datos del ejercicio 97, que muestre las primeras 12 canciones en un diagrama de caja y las últimas 12 canciones en el otro.

a) ¿Cuál conjunto de datos tiene el mayor rango?

b) ¿Cuál conjunto de datos tiene el mayor rango intercuartílico?

109. Diagramas de tiempo Construya un diagrama de tiempo para los datos del ejercicio 97, suponiendo intervalos iguales entre las canciones. Interprete la tendencia que revela el diagrama de tiempo.

110. Diagramas de tiempo amortiguados En ocasiones los estadísticos utilizan una técnica llamada *amortiguamiento* para suavizar fluctuaciones aleatorias en un diagrama de tiempo. Determine la media de los primeros cuatro números del ejercicio 97, la media de los siguientes cuatro números y así sucesivamente. Entonces grafique las seis medias como una función del tiempo. ¿Existe una tendencia clara?

111. Determine el renglón 9 del triángulo de Pascal.

112. Muestre de forma algebraica que

$$ {}_nP_k \times {}_{n-k}P_j = {}_nP_{k+j}. $$

113. Bates de béisbol Suponga que la probabilidad de producir un bat defectuoso de béisbol es 0.02. Cuatro bates se seleccionan al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote de cuatro bates contenga lo siguiente?

a) Ningún bat defectuoso.

b) Un bat defectuoso.

114. Focos Suponga que la probabilidad de producir un foco defectuoso es 0.0004. Se seleccionan al azar diez focos. ¿Cuál es la probabilidad que el lote de 10 contenga lo siguiente?

a) Ningún foco defectuoso.

b) Dos focos defectuosos.

CAPÍTULO 9 Proyecto

Análisis de información sobre la altura

El siguiente conjunto de datos fue reunido a partir de un grupo de 30 estudiantes de precálculo. Utilice este conjunto de datos o reúna los datos para su grupo y utilícelo para el análisis.

Estatura, en pulgadas, de estudiantes				
66	69	72	64	68
70	71	66	65	63
72	59	64	63	66
68	63	64	71	71
69	62	61	67	69
64	73	75	61	70

1. Elabore un diagrama de tallos y hojas de los datos utilizando tallos divididos. Con base en estos datos, ¿cuál es la estatura promedio aproximada de un estudiante en el grupo?
2. Elabore una tabla de frecuencias para los datos utilizando un intervalo de 2. ¿Qué información proporciona ésta?
3. Elabore un histograma para los datos usando un intervalo de 2. ¿Qué conclusiones puede sacar a partir de esta representación de los datos? ¿Puede estimar la estatura promedio de hombres y la estatura promedio de mujeres?
4. Calcule la media, mediana y moda para el conjunto de datos. Analice si cada una es una buena medida de la estatura promedio de un estudiante en el grupo. ¿Cada uno es un buen indicador de la estatura promedio de los estudiantes en otros grupos de precálculo?
5. ¿Qué puede decir acerca de los datos, si los valores de la media y la mediana son cercanos?
6. Determine el resumen de los cinco números para las estaturas del grupo.
7. Cree un diagrama de caja y explique qué información proporciona acerca del conjunto de datos.
8. Un nuevo estudiante se agregó al grupo. Él es jugador estrella de baloncesto y mide 7′2″. Agregue su estatura al conjunto de datos. Recalcule la media, mediana y el resumen de los cinco números. Elabore un nuevo diagrama de caja y utilice su graficadora para graficarlo debajo del diagrama de caja para el grupo original. ¿Cómo afecta este nuevo estudiante la estadística?
9. Explique por qué este nuevo estudiante sería considerado un dato extremo (*outlier*) y la importancia de identificar datos extremos cuando se calculan estadísticas y se realizan pronósticos a partir de ellas.
10. Ahora suponga que se transfieren tres jugadores de baloncesto más al grupo. Ellos tienen estaturas de 7′0″, 6′11″ y 6′10″. Recalcule las estadísticas del número 9 y analice las implicaciones de utilizar estas estadística para hacer predicciones para otros grupos de precálculo.

CAPÍTULO 10

Una introducción al cálculo: límites, derivadas e integrales

10.1 Límites y movimiento: el problema de la tangente

10.2 Límites y movimiento: el problema del área

10.3 Más acerca de los límites

10.4 Integrales y derivadas numéricas



Las grandes aspas características de los molinos de viento han sido utilizadas durante mucho tiempo para extraer agua de los pozos, moler granos, cortar madera y, más recientemente, para producir electricidad. El radio de la hélice de esos aerogeneradores va de uno a 100 metros, y producen entre cientos de watts y miles de kilowatts de potencia. Para conocer más información y una pregunta con su respuesta sobre los aerogeneradores, consulte la página 800 en la sección 10.1.

Panorama general del capítulo 10

En los inicios del siglo XVII, el álgebra y la geometría ya habían sido desarrolladas al grado en que era posible modelar comportamientos físicos algebraica y geométricamente, y cada tipo de representación brindaba más información de la otra. Los nuevos descubrimientos acerca del sistema solar habían abierto preguntas fascinantes sobre la gravedad y sus efectos en el movimiento planetario, de modo que la determinación de la clave matemática para estudiar el movimiento llegó a ser la pregunta científica del día. La geometría analítica de René Descartes (1596–1650) puso las piezas finales en su lugar, dejando el escenario para que Isaac Newton (1642–1727) y Gottfried Leibniz (1646–1716) pudieran pararse "sobre los hombros de los gigantes" por ver más allá de las fronteras del álgebra que habían limitado a sus predecesores. Con la geometría mostrándoles el camino, crearon la nueva forma de álgebra que llegaría a conocerse como cálculo.

En este capítulo estudiaremos los dos problemas centrales de movimiento, como de alguna manera lo hicieron Newton y Leibniz, conectándolos a problemas geométricos que incluyen rectas tangentes y áreas. Veremos cómo las soluciones geométricas obvias para ambos problemas conducen a dilemas algebraicos y cómo éstos conducen al descubrimiento del cálculo. El lenguaje de los límites, que hemos utilizando en este libro para describir las asíntotas, el comportamiento en los extremos y la continuidad, nos servirá para hacer esa transición.

10.1 Límites y movimiento: el problema de la tangente

Aprenderá acerca de...

- La velocidad promedio
- La velocidad instantánea
- La revisión de límites
- La relación con las rectas tangentes
- La derivada

. . . porque

La derivada nos permite analizar las tasas de cambio, las cuales son fundamentales para entender la física, la economía, la ingeniería e inclusive la historia.

Velocidad promedio

La **velocidad promedio** es el cambio de la posición dividida entre el cambio del tiempo, como en el ejemplo siguiente de una situación conocida.

EJEMPLO 1 Cálculo de la velocidad promedio

Un automóvil recorre 120 millas en 2 horas y 30 minutos. ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo completo de $2\frac{1}{2}$ horas?

SOLUCIÓN La velocidad promedio es el cambio de la posición (120 millas) divida entre el cambio del tiempo (2.5 horas). Si expresamos la posición con s y el tiempo con t, tendríamos

$$v_{\text{prom}} = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{120 \text{ millas}}{2.5 \text{ horas}} = 48 \text{ millas por hora.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 1.

Observe que la velocidad promedio no nos dice qué tan rápido va el automóvil en algún momento durante el intervalo de tiempo. Podría haber ido a una velocidad constante de 48 mph todo el camino, o podría haber acelerado, disminuido la velocidad, o incluso detenerse momentáneamente muchas veces durante el recorrido. Científicos como Galileo Galilei (1564–1642), que estudió el movimiento antes que Newton y Leibniz, buscaron fórmulas que expresaran la velocidad como *función* del tiempo, es decir, fórmulas que dieran valores *instantáneos* de v para valores individuales de t. El paso de promedio a instantáneo suena simple, pero hubo complicaciones, como veremos más adelante.

Velocidad instantánea

Galileo experimentó con la gravedad haciendo rodar una bola hacia abajo en un plano inclinado y registrando su velocidad promedio como una función del tiempo transcurrido. Esto es lo que tal vez él se habría preguntado cuando empezó sus experimentos:

Una pregunta de velocidad

Una bola rueda una distancia de 16 pies en 4 segundos. ¿Cuál es la velocidad instantánea de la bola justo 3 segundos después de que empezó a rodar?

UN AVISO

Los lectores que saben un poco de cálculo reconocerán que la bola de la pregunta de velocidad realmente tiene una velocidad instantánea distinta de cero después de 3 segundos (como demostraremos más adelante). La finalidad de la discusión es presentar qué tan difícil es demostrar ese hecho en un solo instante, debido a que tanto el tiempo como la posición de la bola parecen no cambiar.

Tal vez usted quiera visualizar la bola congelada en ese momento, y entonces trate de determinar su velocidad. Bien, entonces la bola habría tenido velocidad cero, ¡debido a que está congelada! Este acercamiento parece tonto, ya que, por supuesto, la bola se está moviendo.

¿Es una pregunta engañosa? Al contrario, esto en realidad es muy profundo; es exactamente la pregunta que Galileo (entre muchas otras) estaba tratando de responder. Note qué tan fácil es encontrar la velocidad *promedio*:

$$v_{\text{prom}} = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{16 \text{ pies}}{4 \text{ segundos}} = 4 \text{ pies por segundo.}$$

Ahora, note que el álgebra se vuelve inadecuada cuando tratamos de aplicarla a la misma fórmula de la velocidad *instantánea*:

$$v_{\text{prom}} = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{0 \text{ pies}}{0 \text{ segundos}},$$

la cuál implica una división entre 0 y por eso mismo ¡queda indefinida!

Entonces Galileo hizo lo mejor que pudo cuando definió $\triangle t$ tan pequeño como experimentalmente fuera posible. Midió pequeños valores de $\triangle s$, y entonces determinó los cocientes. Solamente aproximó la velocidad instantánea, pero obteniendo el valor exacto aparentemente de manera algebraica, ya que la división entre cero es imposible.

Revisión de límites

Newton inventó las "fluxiones" y Leibniz las "diferenciales" para explicar las tasas de cambio sin recurrir al cero como denominador. Ambos incluyen cantidades misteriosas que pueden ser infinitamente pequeñas sin realmente ser cero (su colega del siglo 17, el obispo Berkeley, los llamó "fantasmas de las cantidades difuntas" y los eliminó por no tener sentido). Aunque no fuera bien entendido por muchos, las cantidades extrañas modelaron el comportamiento de cuerpos en movimiento tan efectivamente que la mayoría de los científicos las aceptaron con fe hasta que se desarrollara una mejor explicación. Ese desarrollo, que tomó cerca de 100 años, condujo a nuestra comprensión moderna de límites.

Debido a que usted ya está familiarizado con la notación de los límites, podemos mostrarle cómo funcionan con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 2 Utilización de los límites para evitar la división entre cero

Una bola rueda hacia abajo en una rampa de tal manera que su distancia s, desde la parte superior de la rampa después de t segundos, es exactamente t^2 pies. ¿Cuál es su velocidad instantánea después de 3 segundos?

SOLUCIÓN Podríamos tratar de responder esta pregunta mediante el cálculo de la velocidad promedio en periodos cada vez más pequeños.

En el intervalo [3, 3.1]:

$$\frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{(3.1)^2 - 3^2}{3.1 - 3} = \frac{0.61}{0.1} = 6.1 \text{ pies por segundo.}$$

En el intervalo [3, 3.05]:

$$\frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{(3.05)^2 - 3^2}{3.05 - 3} = \frac{0.3025}{0.05} = 6.05 \text{ pies por segundo.}$$

Si continuáramos este proceso concluiríamos que la **velocidad instantánea** tendría que ser 6 pies por segundo.

Sin embargo, podemos ver *directamente* lo que está sucediendo al cociente expresándolo como un *límite* de la velocidad promedio en el intervalo [3, t] conforme t se aproxima a 3:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 3} \frac{\triangle s}{\triangle t} &= \lim_{t\to 3} \frac{t^2 - 3^2}{t - 3} \\
&= \lim_{t\to 3} \frac{(t+3)(t-3)}{t-3} && \text{Factorizar el numerador.} \\
&= \lim_{t\to 3} (t+3) \cdot \frac{t-3}{t-3} \\
&= \lim_{t\to 3} (t+3) && \text{Como } t \neq 3, \frac{t-3}{t-3} = 1 \\
&= 6
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 3.

Observe que t *no es igual* a 3 pero se *aproxima* a 3 como un límite que nos permite hacer una cancelación crucial de la segunda a la última línea del ejemplo 2. Si t fuera en realidad igual a 3, el álgebra utilizada nos llevaría a la conclusión incorrecta de que $0/0 = 6$. La diferencia entre igual a 3 y aproximado a 3 como un límite es sutil, pero hace toda la diferencia algebraica.

No es fácil formular una rigurosa definición algebraica de un límite (razón por la cual ni Newton ni Leibniz lo hicieron alguna vez). Hasta aquí hemos utilizado una aproximación intuitiva de los límites y continuaremos haciéndolo, posponiendo las definiciones rigurosas a su curso de cálculo. Por ahora, usaremos la siguiente definición *informal*.

ARBITRARIAMENTE CERCANO

Esta definición no tiene utilidad para las pruebas matemáticas hasta que alguien define "arbitrariamente cercano", pero si usted tiene un sentido de cómo puede aplicarse a la solución del ejemplo 2, entonces está listo para utilizar los límites para estudiar los problemas de movimiento.

DEFINICIÓN Límite en *a*

Cuando escribimos "$\lim_{x\to a} f(x) = L$," queremos decir que $f(x)$ está arbitrariamente cerca de L conforme x está arbitrariamente cerca (pero no igual) de a.

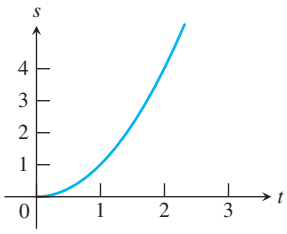


FIGURA 10.1 La gráfica de $s = t^2$ muestra la distancia (s) recorrida por una bola que rueda hacia abajo, en una rampa, como una función del tiempo t.

Relación con las rectas tangentes

Lo que Galileo descubrió haciendo rodar una bola hacia abajo de la rampa fue que la distancia recorrida era proporcional al *cuadrado* del tiempo transcurrido. Por simplicidad, vamos a suponer que la rampa estaba suficientemente inclinada para que la relación entre s, la distancia de la parte superior de la rampa, y t el intervalo de tiempo, fuera expresada (como en el ejemplo 2) por

$$s = t^2.$$

La gráfica de s como una función de $t \geq 0$ proporciona la mitad derecha de una parábola (figura 10.1).

EXPLORACIÓN 1 **Apariencia de la velocidad promedio**

Copie la figura 10.1 en una hoja de papel y conecte los puntos (1, 1) y (2, 4) con una recta (a ésta se le llama *recta secante* ya que conecta dos puntos que están sobre la curva).

1. Determine la pendiente de la recta.
2. Obtenga la velocidad promedio de la bola en el intervalo de tiempo [1, 2].
3. ¿Cuál es la relación entre los números de las respuestas a las preguntas 1 y 2?
4. En general, ¿cómo se puede representar geométricamente la velocidad promedio de la bola en el intervalo $[a, b]$?

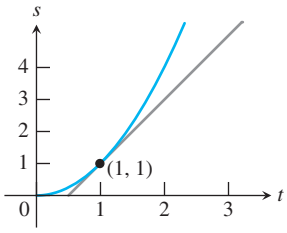


FIGURA 10.2 Una recta tangente a la gráfica de $s = t^2$ en el punto (1, 1). La pendiente de esa recta parece ser la velocidad en $t = 1$, aun cuando $\triangle s/\triangle t = 0/0$. ¡La geometría funciona donde el álgebra falla!

La exploración 1 sugiere una característica general importante: Si $(a, s(a))$ y $(b, s(b))$ son dos puntos de la gráfica distancia-tiempo, entonces la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[a, b]$ puede considerarse la *pendiente* de la recta que conecta a ambos puntos. De hecho, designamos a ambas cantidades con el mismo símbolo: $\triangle s/\triangle t$.

Galileo lo sabía; también sabía que quería obtener la velocidad instantánea haciendo que ambos puntos fueran uno solo, resultando esto en $\triangle s/\triangle t = 0/0$, una imposibilidad algebraica. Sin embargo *geométricamente* el dibujo nos dice una historia diferente. Por ejemplo, si conectamos pares de punto cada vez más cercanos a (1, 1), las rectas secantes se parecerían más y más a una recta que es tangente a la curva en (1, 1) (figura 10.2).

Para Galileo y otros científicos de su tiempo parecía obvio que la pendiente de la recta tangente era la respuesta largamente buscada a la pregunta de la velocidad instantánea. Ellos podían *verlo*, pero ¿cómo podían *calcularlo* sin dividir entre cero? Ése era el "problema de la recta tangente", que finalmente Newton y Leibniz resolvieron para funciones generales de formas ligeramente diferentes. Lo resolveremos con límites como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Determinación de la pendiente de la recta tangente

Use límites para obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $s = t^2$ en el punto (1, 1) (figura 10.2).

SOLUCIÓN Esta solución es muy parecida a la del ejemplo 2.

$$\lim_{t\to 1} \frac{\triangle s}{\triangle t} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2 - 1^2}{t - 1}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{(t+1)(t-1)}{t-1} \qquad \text{Factorizar el numerador.}$$

$$= \lim_{t\to 1} (t+1) \cdot \frac{t-1}{t-1}$$

$$= \lim_{t\to 1} (t+1) \qquad \text{Como } t \neq 1, \frac{t-1}{t-1} = 1$$

$$= 2$$

Ahora resuelva el ejercicio 17 a).

Si compara el ejemplo 3 con el ejemplo 2 encontrará que el método para resolver el problema de la recta tangente aparentemente puede utilizarse para resolver el problema de la velocidad instantánea, y viceversa. ¡Son la versión geométrica y la versión algebraica del mismo problema!

EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE

Aunque nos hemos concentrado en el trabajo de Galileo sobre los problemas de movimiento a fin de seguir una historia correcta, fue Pierre de Fermat (1601–1665) quien primero desarrolló un "método de tangentes" para las curvas en general, reconociendo su utilidad para encontrar su máximo y su mínimos relativos. Fermat es más recordado por su trabajo con la teoría de los números, particularmente por el *Último Teorema de Fermat*, el cual establece que no hay enteros positivos x, y y z que satisfagan la ecuación $x^n + y^n = z^n$, si n es un entero más grande que 2. Fermat escribió en el margen de un libro de texto, "tengo una prueba verdaderamente maravillosa pero este margen es demasiado pequeño para escribirla"; si tenía alguna, aparentemente nunca la escribió. Aunque los matemáticos trataron de probar (o refutar) el Último Teorema de Fermat por más de 330 años, nadie lo había hecho hasta que Andrew Wiles, de la Universidad de Princeton, finalmente lo hizo en 1994.

La derivada

Velocidad, la tasa de cambio de la posición con respecto al tiempo, es sólo una aplicación del concepto general de "tasa de cambio". Si $y = f(x)$ es *cualquier* función, podemos hablar de cómo y cambia conforme x cambia.

DEFINICIÓN Tasa promedio de cambio

Si $y = f(x)$, entonces la **tasa promedio de cambio** de y con respecto a x en el intervalo $[a, b]$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geométricamente, ésta es la pendiente de la **recta secante** que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Utilizando límites podemos proceder a definir la tasa instantánea de cambio de y con respecto a x en el punto donde $x = a$. Esta tasa instantánea de cambio se llama *derivada*.

DERIVABILIDAD

Decimos que una función es "derivable" en *a* si $f'(a)$ existe, ya que podemos determinar el límite del "cociente de las diferencias".

DEFINICIÓN Derivada en un punto

La **derivada de la función** f **en** $x = a$ se expresa como $f'(a)$ y se lee "f prima de a" es

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

siempre que el límite exista.

Geométricamente, ésta es la pendiente de una **recta tangente** que pasa por $(a, f(a))$.

Una fórmula útil de la derivada, en términos de cálculo, se obtiene haciendo $x = a + h$ y viendo el límite cuando h tiende a 0 (equivale a x tiende a a).

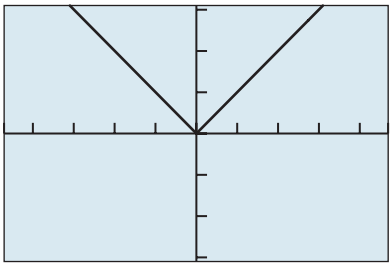
DEFINICIÓN Derivada en un punto (más fácil en términos de cálculo)

La **derivada de la función** f **en** $x = a$, se expresa como $f'(a)$ y se lee "f prima de a" es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

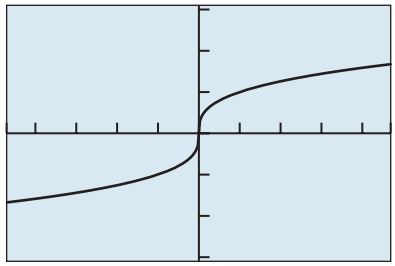
siempre que el límite exista.

El hecho de que la derivada de una función en un punto pueda verse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto, nos da una idea de cómo una derivada podría no existir. A menos que una función tenga una "pendiente" bien definida cuando se hace un acercamiento en a, la derivada en a no existe. Por ejemplo, la figura 10.3 muestra tres casos en los que $f(0)$ existe pero $f'(0)$ no.



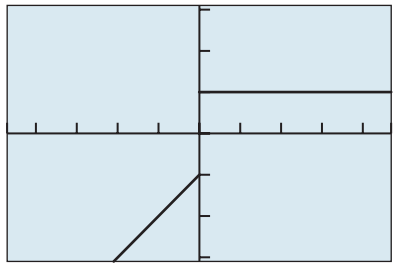
[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
a)

$f(x) = |x|$ tiene una gráfica con una pendiente no definida en $x = 0$.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
b)

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ tiene una gráfica con recta tangente vertical (no existe la pendiente) en $x = 0$.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]
c)

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ para } x < 0 \\ 1 \text{ para } x \geq 0 \end{cases}$$

tiene una gráfica sin que se pueda definir la pendiente en $x = 0$.

FIGURA 10.3 Tres ejemplos de funciones definidas en $x = 0$ pero no derivables en $x = 0$.

EJEMPLO 4 Determinación de una derivada en un punto

Obtenga $f'(4)$, si $f(x) = 2x^2 - 3$.

SOLUCIÓN

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(4+h)^2 - 3 - (2 \cdot 4^2 - 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(16 + 8h + h^2) - 32}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16h + 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (16 + 2h) \qquad \frac{h}{h} = 1, \text{ ya que } h \neq 0.$$

$$= 16$$

Ahora resuelva el ejercicio 23.

La derivada puede interpretarse también como una función de x. Su dominio consiste en todos los valores del dominio de f para los cuales f es derivable. La función f' puede definirse adaptando la segunda definición de la siguiente manera:

DEFINICIÓN Derivada

Si $y = f(x)$, entonces la **derivada de la función f con respecto a x**, es la función f' para la cual el valor de x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

para todos los valores de x donde el límite existe.

Para enfatizar la relación con la pendiente $\triangle y/\triangle x$, Leibniz utilizó la notación dy/dx para la derivada (el dy y dx eran los "fantasmas de las cantidades difuntas"). Esta **notación de Leibniz** tiene muchas ventajas sobre la notación "prima", como aprenderá cuando estudie cálculo. Utilizaremos ambas notaciones en los ejemplos y los ejercicios.

EJEMPLO 5 Obtención de la derivada de una función

a) Determine $f'(x)$, si $f(x) = x^2$.

b) Determine $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \dfrac{1}{x}$.

continúa

SOLUCIÓN

a)
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (2x + h) \qquad \text{Debido a que } h \neq 0, \frac{h}{h} = 1.$$
$$= 2x$$

Por lo que $f'(x) = 2x$.

b)
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{x(x+h)} \cdot \frac{1}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$
$$= -\frac{1}{x^2}$$

Por lo que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ahora resuelva el ejercicio 29.



PROBLEMA DE INICIO DE CAPÍTULO (de la página 791)

PROBLEMA: Para el caso de una aeroturbina eficiente, la energía generada en watts se expresa con la ecuación

$$P = kr^2v^3$$

donde r es el radio de la hélice en metros, v es la velocidad del viento en metros por segundo y k es una constante con las unidades kg/m^3. El valor exacto de k depende de varias características del dispositivo. Suponga que una aeroturbina tiene una hélice cuyo radio mide 5 metros y que $k = 0.134$ kg/m^3.

a) Determine la función $P(v)$ que representa la energía como una función de la velocidad del viento.

b) Obtenga $P'(7)$, la tasa de cambio de la energía generada con respecto a la velocidad del viento, cuando la velocidad del viento es de 7 metros por segundo.

SOLUCIÓN:

a) Debido a que $r = 5$ m y que $k = 0.134$ kg/m^3, tenemos

$$P = kr^2v^3 = (0.134)(5^2)v^3 = 3.35v^3$$

Por lo que, $P(v) = 3.35v^3$, donde v está en metros por segundo y P en watts.

b)
$$P'(7) = \lim_{h\to 0} \frac{P(7+h) - P(7)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3.35(7+h)^3 - 3.35(7)^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3.35[(7^3 + 147h + 21h^2 + h^3) - 7^3]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3.35(147h + 21h^2 + h^3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} [3.35(147 + 21h + h^2)]$$

$$= 3.35(147)$$

$$= 492.45$$

La tasa de cambio de la energía generada es de aproximadamente 492 watts por m/s.

REPASO RÁPIDO 10.1 *(Para obtener ayuda revise las secciones R.1 y R.4)*

En los ejercicios 1 y 2 obtenga la pendiente de la recta determinada por los puntos.

1. $(-2, 3)$ y $(5, -1)$ **2.** $(-3, -1)$ y $(3, 3)$

En los ejercicios del 3 al 6 encuentre una ecuación para las rectas que se especifican.

3. Pasa por $(-2, 3)$ con pendiente $3/2$

4. Pasa por $(1, 6)$ y $(4, -1)$

5. Pasa por $(1, 4)$ y es paralela a $y = (3/4)x + 2$

6. Pasa por $(1, 4)$ y es perpendicular a $y = (3/4)x + 2$

En los ejercicios del 7 al 10 simplifique la expresión suponiendo que $h \neq 0$.

7. $\dfrac{(2+h)^2 - 4}{h}$

8. $\dfrac{(3+h)^2 + 3 + h - 12}{h}$

9. $\dfrac{1/(2+h) - 1/2}{h}$

10. $\dfrac{1/(x+h) - 1/x}{h}$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.1

1. Velocidad promedio Una ciclista recorre 21 millas en 1 hora con 45 minutos. ¿Cuál es su velocidad promedio durante el lapso completo de 1 3/4 horas?

2. Velocidad promedio Un automóvil recorre 540 kilómetros en 4 horas con 30 minutos. ¿Cuál es su velocidad promedio durante el lapso completo de 4 1/2 horas?

En los ejercicios del 3 al 6 la posición de un objeto en el momento t está dada por $s(t)$. Determine la velocidad instantánea en el valor indicado de t.

3. $s(t) = 3t - 5$ en $t = 4$

4. $s(t) = \dfrac{2}{t+1}$ en $t = 2$

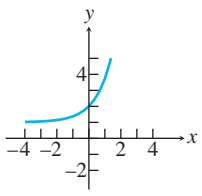
5. $s(t) = at^2 + 5$ en $t = 2$

6. $s(t) = \sqrt{t+1}$ en $t = 1$

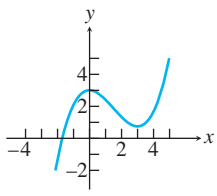
[*Sugerencia:* Racionalice el numerador].

En los ejercicios del 7 al 10 utilice la gráfica para estimar la pendiente de la recta tangente, si existe, a la gráfica en el punto dado.

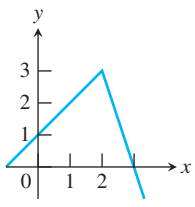
7. $x = 0$



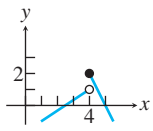
8. $x = 1$



9. $x = 2$



10. $x = 4$



En los ejercicios del 11 al 14 grafique la función en una ventana cuadrada de visualización y, sin hacer cálculos, estime la derivada de la función en el punto dado, interpretándolo como la pendiente de la recta tangente, si existe en el punto.

11. $f(x) = x^2 - 2x + 5$ en $x = 3$

12. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 5$ en $x = 2$

13. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ en $x = 0$

14. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$ en $x = \pi$

15. Lanzamiento de una roca Se lanza una roca directamente hacia arriba desde el piso. La distancia (en pies) de la roca desde el piso (la función de posición) se expresa con la función $f(t) = 3 + 48t - 16t^2$ en cualquier momento t (en segundos). Determine

a) $f'(0)$.

b) la velocidad inicial de la roca.

16. Despegue de un cohete Un cohete de juguete despega hacia arriba desde el piso. La distancia (en pies) del cohete desde el piso (la función de posición) se expresa con la función $f(t) = 170t - 16t^2$ en cualquier momento t (en segundos). Determine

a) $f'(0)$.

b) la velocidad inicial del cohete.

En los ejercicios del 17 al 20 use la definición del límite para obtener

a) la pendiente de la grafica de la función en el punto indicado.

b) una ecuación de la recta tangente en el punto.

c) Dibuje la gráfica de la curva cerca del punto sin usar su calculadora graficadora.

17. $f(x) = 2x^2$ en $x = -1$

18. $f(x) = 2x - x^2$ en $x = 2$

19. $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$ en $x = 2$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ en $x = 1$

En los ejercicios 21 y 22 estime la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, si existe, en los puntos indicados.

21. $f(x) = |x|$ en $x = -2, 2$ y 0.

22. $f(x) = \tan^{-1}(x+1)$ en $x = -2, 2$ y 0.

En los ejercicios 23 al 28 obtenga la derivada, si existe, de la función en el punto especificado.

23. $f(x) = 1 - x^2$ en $x = 2$

24. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2}x^2$ en $x = 2$

25. $f(x) = 3x^2 + 2$ en $x = -2$

26. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en $x = 1$

27. $f(x) = |x+2|$ en $x = -2$

28. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ en $x = -1$

En los ejercicios 29 al 32 obtenga la derivada de f.

29. $f(x) = 2 - 3x$

30. $f(x) = 2 - 3x^2$

31. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

33. Velocidad promedio Desde un bote, una bola de plomo colocada a nivel del agua se deja caer al lago. En la tabla 10.1 se puede observar la distancia a la que cae la bola en intervalos de tiempo de 0.1 segundo.

Tabla 10.1 Datos de la distancia de la bola de plomo

Tiempo (segundos)	Distancia (pies)
0	0
0.1	0.1
0.2	0.4
0.3	0.8
0.4	1.5
0.5	2.3
0.6	3.2
0.7	4.4
0.8	5.8
0.9	7.3

a) Calcule la velocidad promedio de 0.5 a 0.6 segundos y de 0.8 a 0.9 segundos.

b) Determine el modelo cuadrático de regresión para los datos de la distancia y sobreponga su gráfica a un diagrama de dispersión de los datos.

c) Utilice el modelo de la parte **b** para determinar cuál es la profundidad del lago si la bola tiene contacto con el fondo después de 2 segundos.

34. Determinación de derivadas a partir de datos Una bola se deja caer desde el techo de un edificio de dos pisos. La distancia en pies entre la bola y el piso puede verse en la tabla 10.2, donde t está en segundos.

Tabla 10.2 Datos de la distancia de la bola

Tiempo (segundos)	Distancia (pies)
0.2	30.00
0.4	28.36
0.6	25.44
0.8	21.24
1.0	15.76
1.2	9.02
1.4	0.95

a) Use los datos para estimar la velocidad promedio de la bola en el intervalo $0.8 \le t \le 1$.

b) Determine el modelo cuadrático de regresión s de los datos de la tabla 10.2 y sobreponga su gráfica a un diagrama de dispersión de los datos.

c) Obtenga la derivada de la ecuación de la regresión y utilícela para estimar la velocidad de la bola en el instante $t = 1$.

En los ejercicios del 35 al 38 lleve a cabo lo siguiente:

a) Elabore la gráfica de la función.

b) Si existe, determine la derivada de la función en el punto dado.

c) Escriba para aprender Si la derivada de la función no existe en el punto, explique por qué no.

35. $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x \le 2 \\ x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

36. $f(x) = \begin{cases} 1 + (x-2)^2 & \text{si } x \le 2 \\ 1 - (x-2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

37. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x \ne 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ en $x = 2$

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

En los ejercicios del 39 al 42 elabore las posibles gráficas de las siguientes funciones que tienen las propiedades descritas.

39. El dominio de f es $[0, 5]$ y la derivada en $x = 2$ es 3.

40. El dominio de f es $[0, 5]$ y la derivada es 0 en $x = 2$ y en $x = 4$.

41. El dominio de f es $[0, 5]$ y la derivada en $x = 2$ está indefinida.

42. El dominio de f es $[0, 5]$, f es no decreciente en $[0, 5]$ y la derivada en $x = 2$ es 0.

43. Escriba para aprender Explique por qué puede obtener la derivada de $f(x) = ax + b$ sin hacer cálculos. ¿Qué es $f'(x)$?

44. Escriba para aprender Use la *primera* definición de derivada en un punto para expresar la derivada de $f(x) = |x|$ en $x = 0$ como un límite. Después explique por qué no existe el límite (puede ayudarle hacer una gráfica del cociente para los valores de x cercanos a 0).

Preguntas de examen estandarizado

45. Verdadero o falso Cuando una bola rueda hacia abajo en una rampa, su velocidad instantánea siempre es cero. Justifique su respuesta.

46. Verdadero o falso Si la derivada de la función f existe en $x = a$, entonces la derivada es igual a la pendiente de la recta tangente en $x = a$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 47 al 50 elija la respuesta correcta. Puede utilizar su calculadora.

47. Opción múltiple Si $f(x) = x^2 + 3x - 4$, obtenga $f'(x)$.

A) $x^2 + 3$ **B)** $x^2 - 4$ **C)** $2x - 1$ **D)** $2x + 3$ **E)** $2x - 3$

48. Opción múltiple Si $f(x) = 5x - 3x^2$, obtenga $f'(x)$.

A) $5 - 6x$ **B)** $5 - 3x$ **C)** $5x - 6$ **D)** $10x - 3$ **E)** $5x - 6x^2$

49. Opción múltiple Si $f(x) = x^3$, obtenga la derivada de f en $x = 2$.

A) 3 **B)** 6 **C)** 12 **D)** 18 **E)** No existe

50. Opción múltiple Si $f(x) = \frac{1}{x - 3}$, determine la derivada de f en $x = 1$.

A) $-\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $-\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** No existe

Exploraciones

Grafique cada función de los ejercicios del 51 al 54 y responda las siguientes preguntas:

a) Escriba para aprender ¿La función tiene derivada en $x = 0$? Explique.

b) La función parece tener una recta tangente en $x = 0$? Si es así, ¿cuál es una ecuación de la recta tangente?

51. $f(x) = |x|$

52. $f(x) = |x^{1/3}|$

53. $f(x) = x^{1/3}$

54. $f(x) = \tan^{-1} x$

55. Caída libre Un globo con agua que se arroja desde una ventana caerá una distancia de $s = 16t^2$ pies durante los primeros t segundos. Determine **a)** la velocidad promedio durante los primeros 3 segundos de caída y **b)** la velocidad instantánea en $t = 3$.

56. Caída libre en otro planeta Puede establecerse mediante experimentación que los objetos pesados arrojados desde el reposo caen libremente cerca de la superficie de otro planeta de acuerdo con la fórmula $y = gt^2$, donde y es la distancia en metros que el objeto cae en t segundos después de empezar la caída. Un objeto cae desde la parte superior de una nave espacial que mide 125 metros, la cual aterrizó en la superficie. El objeto choca con la superficie en 5 segundos.

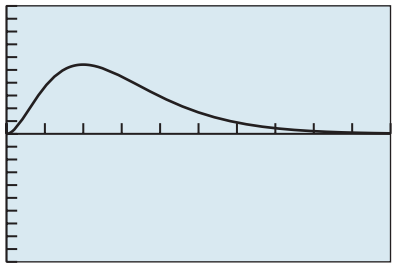
a) Determine el valor de g.

b) Determine la velocidad promedio de la caída del objeto.

c) ¿A qué velocidad el objeto choca con la superficie?

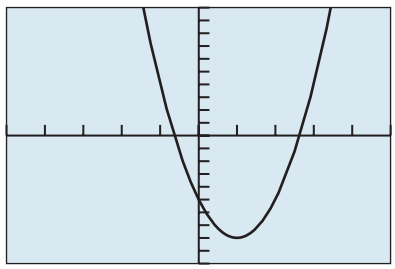
Ampliación de las ideas

57. Gráfica de la derivada La gráfica de $f(x) = x^2 e^{-x}$ se muestra a continuación. Use su conocimiento de la interpretación geométrica de la derivada para hacer un esbozo a grandes rasgos de la gráfica de la derivada $y = f'(x)$.



[0, 10] por [–1, 1]

58. Actividad en equipo La gráfica de $y = f'(x)$ se muestra a continuación. Determine una posible gráfica de la función $y = f(x)$.



[–5, 5] por [–10, 10]

10.2 Límites y movimiento: el problema del área

Aprenderá acerca de...

- La distancia a partir de una velocidad constante
- La distancia a partir de una velocidad cambiante
- Los límites en el infinito
- La relación con las áreas
- La integral definida

. . . porque

Al igual que el problema de la recta tangente, el problema del área tiene muchas aplicaciones en todos los campos científicos, sociales y de la economía.

Distancia a partir de una velocidad constante

"Distancia es igual a velocidad por tiempo" es una de las primeras fórmulas para resolver problemas que se aprenden en los cursos de matemáticas. Dada una velocidad y un periodo de tiempo, podemos emplear la fórmula para calcular la distancia recorrida, de acuerdo con el siguiente ejemplo estándar.

EJEMPLO 1 Cálculo de la distancia recorrida

Un automóvil lleva una velocidad constante de 48 millas por hora durante 2 horas y 30 minutos. ¿Qué distancia recorre el automóvil?

SOLUCIÓN Aplicamos la fórmula $d = rt$:

$$d = (48 \text{ mi/h})(2.5 \text{ h}) = 120 \text{ millas}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 1.

La similitud con el ejemplo 1 de la sección 10.1 es intencional. De hecho, si representamos la distancia recorrida (por ejemplo, el cambio de posición) por $\triangle s$ y el intervalo de tiempo por $\triangle t$, la fórmula es

$$\triangle s = (48 \text{ mph})\, \triangle t,$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{\triangle s}{\triangle t} = 48 \text{ mph}.$$

Entonces los dos ejemplos 1 son casi idénticos, excepto porque en el ejemplo 1 de la sección 10.1 no se hizo ninguna suposición acerca de la velocidad constante; lo que calculamos en ese caso fue la velocidad promedio en el intervalo de 2.5 horas. Eso sugiere que tendríamos resuelto el ligeramente distinto problema inicial de esta sección.

EJEMPLO 2 Cálculo de la distancia recorrida

Un automóvil lleva una velocidad *promedio* de 48 millas por hora durante 2 horas y 30 minutos. ¿Qué distancia recorre el automóvil?

SOLUCIÓN La distancia recorrida es $\triangle s$, el intervalo de tiempo tiene duración $\triangle t$, y $\triangle s/\triangle t$ es la velocidad promedio.

Por eso,

$$\triangle s = \frac{\triangle s}{\triangle t} \cdot \triangle t = (48 \text{ mi/h})(2.5 \text{ h}) = 120 \text{ millas}.$$

Ahora resuelva el ejercicio 5.

Así que, dada la velocidad promedio en un intervalo de tiempo, es fácil determinar la distancia recorrida. Pero suponga que tenemos una función de velocidad $v(t)$ que representa a la velocidad instantánea como una función cambiante del tiempo. ¿Cómo podemos utilizar la velocidad instantánea para determinar la distancia recorrida en un intervalo de tiempo? Éste fue otro intrigante problema relacionado con la velo-

PARADOJAS DE ZENÓN

El filósofo griego Zenón de Elea (490–425 a. C.) destacó por presentar paradojas similares a la pregunta de la distancia. Una de las más famosas consiste en la carrera entre Aquiles y una tortuga lenta pero segura. Aquiles, deportivamente, le da a la tortuga una ventaja al inicio de la carrera para entonces alcanzarla. Primero deja que la tortuga recorra la mitad del camino, pero para el momento en que él ha recorrido medio camino, al punto donde la tortuga estaba cuando él empezó, la tortuga se ha adelantado. Ahora Aquiles debe aproximarse a la mitad de esa distancia original, pero para el momento en que lo hace, la tortuga se ha adelantado otra vez. Este argumento continúa para siempre, y vemos que Aquiles nunca alcanza a la tortuga; entonces, la tortuga debe ganar la carrera.

cidad instantánea que desconcertó a los científicos del siglo XVII; una vez más, el álgebra fue inadecuada para resolver esto, como veremos.

Distancia a partir de una velocidad cambiante

Cuando Galileo empezó sus experimentos, esto es lo que probablemente se preguntó acerca del uso de la velocidad cambiante para determinar la distancia:

Una pregunta de distancia

Suponga que una bola rueda hacia abajo en una rampa y su velocidad es siempre de $2t$ pies por segundo, donde t es el número de segundos después de que empezó a rodar. ¿Qué tanta distancia recorre la bola durante los 3 primeros segundos?

Uno podría estar tentado a presentar la siguiente "solución":

La velocidad por $\triangle t$ da $\triangle s$. Pero la velocidad instantánea ocurre en un instante, así que $\triangle t = 0$. Esto significa que $\triangle s = 0$. Entonces, dado cualquier instante de tiempo, la bola no se mueve. Debido a que el intervalo de tiempo consiste en instante de tiempo, ¡la bola nunca se mueve! (Tal vez ahora se pregunte: ¿es otra pregunta capciosa?)

Como en el caso de la pregunta de la velocidad de la sección 10.1, este ejemplo aparentemente tonto oculta un dilema algebraico muy sutil; lejos de ser una pregunta capciosa, ésta es exactamente la que necesita responderse a fin de calcular la distancia recorrida por un objeto cuya velocidad varía como función del tiempo. Los científicos dedicados al problema de la tangente se dieron cuenta de que el problema de la distancia recorrida debía estar relacionado pero, sorprendentemente, la geometría los llevó en otra dirección. El problema de la distancia recorrida no conduce a rectas tangentes, sino a áreas.

Límites en el infinito

Antes de que estudiemos la relación con las áreas, permítanos revisar otro concepto de límites que hará que la velocidad instantánea sea más fácil de manejar, como en la última sección. Nuevamente será suficiente con una definición informal.

DEFINICIÓN (INFORMAL) Límites en el infinito

Cuando escribimos "$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$," decimos que $f(x)$ está arbitrariamente cercano a L cuando x es arbitrariamente grande.

EXPLORACIÓN 1 Un límite infinito

Un galón de agua se divide en partes iguales y se vierte en tazas de té. Determine la cantidad en cada taza y la cantidad total en todas las tazas si hay

1. 10 tazas
2. 100 tazas
3. mil millones de tazas
4. un número infinito de tazas

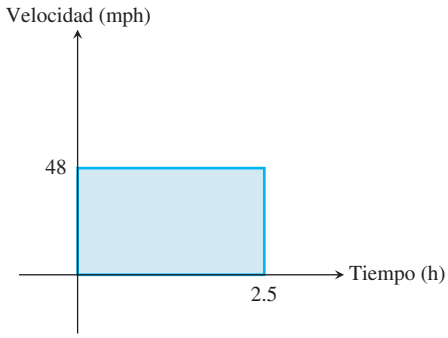


FIGURA 10.4 Para velocidad constante, el área del rectángulo es la misma que la distancia recorrida, ya que representa el producto de las mismas dos cantidades: (48 mph)(2.5 h) = 120 millas.

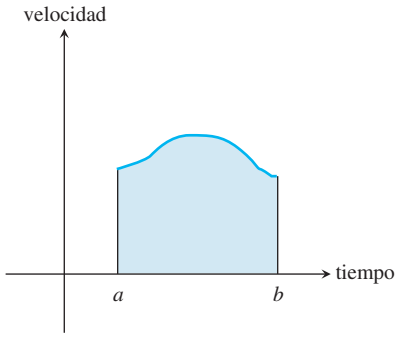


FIGURA 10.5 Si la velocidad varía en el intervalo de tiempo $[a, b]$, ¿la región sombreada es la distancia recorrida?

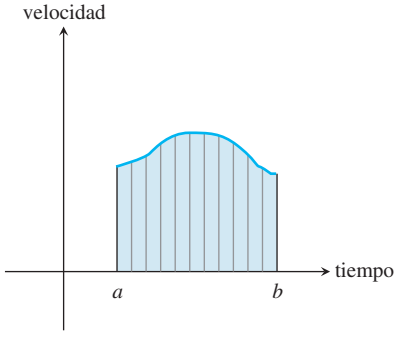


FIGURA 10.6 La región está dividida en franjas verticales. Si las franjas son suficientemente angostas, casi no se distinguen de los rectángulos. La suma de las áreas de esos "rectángulos" será el área total y puede interpretarse como la distancia recorrida.

Es probable que la exploración anterior le haya parecido sencilla hasta que llegó al número infinito de tazas. Hasta ese punto, quizá se conformaba con indicar cual sería la *cantidad total* y, un poco inconforme, decía cuánto habría en cada taza. (Teóricamente sería cero, la cual es una razón por la que el experimento realmente no puede ejecutarse). En el lenguaje de límites, la cantidad total de agua en el número infinito de tazas se vería como:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n} = 1 \text{ galón}$$

mientras que la cantidad total de cada taza se vería así:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \text{ galones.}$$

Sumar un número infinito de nada para obtener algo ya es suficientemente misterioso cuando se utilizan límites; *sin* límites parece ser algebraicamente imposible. Ése es el dilema al que se enfrentaron los científicos del siglo XVII que trataron de trabajar con la velocidad instantánea. Una vez más, fue la geometría la que mostró el camino cuando el álgebra falló.

La relación con las áreas

Si se grafica la velocidad constante $v = 48$ del ejemplo 1 como una función del tiempo t, observamos que el área del rectángulo sombreado es la misma que la distancia recorrida (figura 10.4). Esto no es mera coincidencia, pero tampoco es que el área del rectángulo y la distancia recorrida en el intervalo de tiempo se calculen multiplicando las mismas dos cantidades:

$$(48 \text{ mph})(2.5 \text{ h}) = 120 \text{ millas.}$$

Ahora suponga que graficamos una función de la velocidad que continuamente varía como una función del tiempo (figura 10.5). ¿El área de esa región de forma irregular aún daría la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo $[a, b]$?

Newton y Leibniz (y, de hecho, muchos otros habían tratado de responder esta pregunta) estaban convencidos de que obviamente así sería, y esto es porque estaban interesados en el cálculo para encontrar las áreas bajo las curvas. Imaginaron que el intervalo de tiempo sería partido en muchos subintervalos delgados, cada uno tan pequeño que la velocidad en ese intervalo sería esencialmente una constante. Geométricamente, esto equivalía a dividir el área en franjas estrechas, cada una de las cuales sería prácticamente indistinguible de un rectángulo delgado (figura 10.6).

La idea de partir las áreas de forma irregular en rectángulos aproximados no era nueva. En realidad, Arquímedes había utilizado este método para aproximar el área de un círculo con notable exactitud. Sin embargo, ése fue un ejercicio de paciencia y perseverancia, como se mostrará en el ejemplo 3.

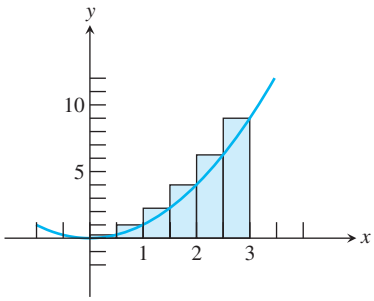


FIGURA 10.7 El área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ está aproximada con seis rectángulos, cada uno con base 1/2. La altura de cada rectángulo es el valor de la función en el extremo derecho del subintervalo (ejemplo 3).

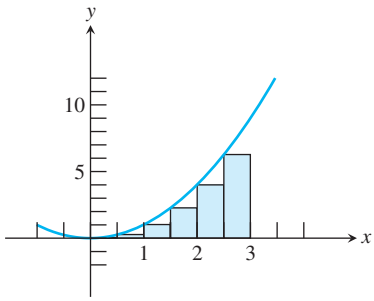


FIGURA 10.8 Si cambiamos los rectángulos de la figura 10.7 de tal manera que las alturas estén determinadas por los valores de la función en los *extremos izquierdos,* obtenemos una aproximación del área (6.875 unidades cuadradas) que subestima el área verdadera.

EJEMPLO 3 Aproximación de un área con rectángulos

Utilice los seis rectángulos de la figura 10.7 para aproximar el área de la región debajo de la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo [0, 3].

SOLUCIÓN La base de cada rectángulo aproximado es 1/2. La altura está determinada por el valor de la función al lado derecho del punto final de cada subintervalo. Las áreas de los seis rectángulos y el área total se calculan en la siguiente tabla:

Subintervalo	Base del rectángulo	Altura del rectángulo	Área del rectángulo
[0, 1/2]	1/2	$f(1/2) = (1/2)^2 = 1/4$	$(1/2)(1/4) = 0.125$
[1/2, 1]	1/2	$f(1) = (1)^2 = 1$	$(1/2)(1) = 0.500$
[1, 3/2]	1/2	$f(3/2) = (3/2)^2 = 9/4$	$(1/2)(9/4) = 1.125$
[3/2, 2]	1/2	$f(2) = (2)^2 = 4$	$(1/2)(4) = 2.000$
[2, 5/2]	1/2	$f(5/2) = (5/2)^2 = 25/4$	$(1/2)(25/4) = 3.125$
[5/2, 3]	1/2	$f(3) = (3)^2 = 9$	$(1/2)(9) = 4.500$
		Área total:	11.375

Los seis rectángulos proporcionan una (burda) aproximación de 11.375 unidades cuadradas para el área bajo la curva de 0 a 3.

Ahora resuelva el ejercicio 11.

En la figura 10.7 se muestra que el *método de aproximación rectangular derecha* (MARD) en el ejemplo 4 sobreestima el área verdadera. Si se utilizasen los valores de la función de los puntos finales del lado izquierdo de los subintervalos (MARI), se obtendría una aproximación rectangular (6.875 unidades cuadradas) que subestima el área verdadera (figura 10.8). El promedio de las dos aproximaciones es 9.125 unidades cuadradas, el cual es en realidad una buena estimación del área verdadera de 9 unidades cuadradas. Si repitiésemos el proceso con 20 rectángulos, el promedio sería de 9.01125. Este método de convergencia hacia un área desconocida mediante aproximaciones refinadas es tedioso pero funciona: Arquímedes utilizó una variación de esto hace 2200 años para estimar el área de un círculo, y con el fin de demostrar que la razón de la circunferencia y el diámetro está entre 3.140845 y 3.142857.

El paso que se da con el cálculo es pasar de un número finito de rectángulos (lo que produce un área aproximada) a un número infinito de rectángulos (lo que produce un área exacta). Esto nos lleva a la integral definida.

SUMAS DE RIEMANN

Una suma de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x$ en la cual x_1 está en el primer subintervalo, x_2 está en el segundo y así sucesivamente, se llama **suma de Riemann**, en honor a Georg Riemann (1826–1866), quien determinó las funciones para los cuales esas sumas tienen límite cuando $n \to \infty$.

La integral definida

En general, inicie con una función continua $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Divida $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\triangle x = (b - a)/n$. Elija cualquier valor x_1 en el primer subintervalo, x_2 en el segundo, y así sucesivamente. Calcule $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, . . . , $f(x_n)$, multiplique cada valor por $\triangle x$ y sume los productos. En notación sigma, la suma de los productos es

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x.$$

El *límite* de esta suma cuando n tiende a infinito es la solución al problema del área y es también la solución al problema de la distancia recorrida (cuando estudie cálculo aprenderá que, de hecho, resuelve una gran variedad de problemas). Al límite, si existe, se le llama *integral definida*.

NOTACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Observe que la notación de la integral definida (otro legado de Leibniz) es análoga al símbolo sigma de la suma la cual es el límite. La "Σ" en el límite se transforma en una "S" estilizada, por "suma". La "$\triangle x$" se convierte en "dx" (como fue con la derivada) y el "$f(x_i)$" se simplifica a "$f(x)$" porque efectivamente se están sumando *todos* los valores $f(x)$ a lo largo del intervalo (multiplicado por un cambio arbitrariamente pequeño en x), haciendo los subíndices innecesarios.

DEFINICIÓN Integral definida

Sea f una función definida en $[a, b]$ y sea $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x$ como se definió anteriormente. La integral definida de f sobre $[a, b]$, expresada por $\int_a^b f(x)\,dx$, está dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x,$$

siempre que exista el límite. Si el límite existe, se dice que f es **integrable** en $[a, b]$.

La solución del ejemplo 4 muestra que puede ser tedioso aproximar una integral definida trabajando con la mencionada suma para valores grandes de n. Uno de los logros más sobresalientes del cálculo fue demostrar cómo el valor exacto de una integral definida puede obtenerse sin sumar todos los productos. Tendrá que esperar hasta que estudie cálculo para ver cómo se lleva a cabo ese proceso; mientras tanto, en la sección 10.4 aprenderá cómo utilizar una calculadora para evitar lo tedioso de determinar la integral definida mediante sumas.

También puede utilizar la relación del área en su provecho, como se muestra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 4 Cálculo de una integral

Determine $\int_1^5 2x\,dx$.

SOLUCIÓN Ésta será el área bajo la recta $y = 2x$ sobre el intervalo $[1, 5]$. La gráfica de la figura 10.9 muestra que ésta es el área de un trapecio.

Utilizando la fórmula $A = h\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)$, obtenemos que

$$\int_1^5 2x\,dx = 4\left(\frac{2(1) + 2(5)}{2}\right) = 24$$

Ahora resuelva el ejercicio 23.

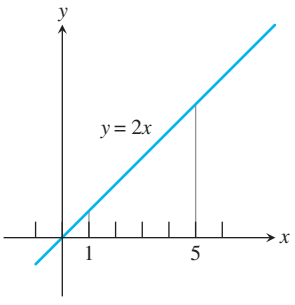


FIGURA 10.9 El área del trapecio es igual a $\int_1^5 2x\,dx$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 5 Cálculo de una integral

Suponga que una bola rueda hacia abajo en una rampa de tal manera que su velocidad después de t segundos siempre es $2t$ pies por segundo. ¿Qué distancia recorre durante los primeros 3 segundos?

SOLUCIÓN

La distancia recorrida será la misma que el área bajo la gráfica de la velocidad, $v(t) = 2t$, sobre el intervalo [0, 3]. La gráfica se muestra en la figura 10.10. Debido a que la región es triangular podemos determinar su área: $A = (1/2)(3)(6) = 9$. Por lo tanto, la distancia recorrida en los primeros 3 segundos es $\triangle s = (1/2)$ (3 seg)(6 pies/seg) = 9 pies.

Ahora resuelva el ejercicio 5.

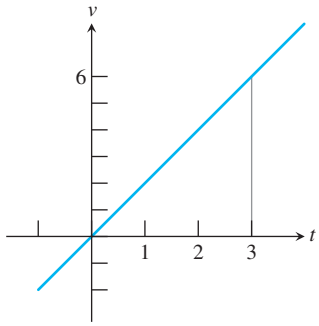


FIGURA 10.10 El área bajo la gráfica de la velocidad $v(t) = 2t$, en el intervalo [0, 3], es la distancia recorrida por la bola en el ejemplo 5 durante los 3 primeros segundos.

REPASO RÁPIDO 10.2 *(Para obtener ayuda revise las secciones 1.1 y 9.4)*

En los ejercicios 1 y 2 liste los elementos de la sucesión.

1. $a_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}k\right)^2$ para $k = 1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10$

2. $a_k = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{4}k\right)^2$ para $k = 1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10$

En los ejercicios del 3 al 6 obtenga las sumas.

3. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}(k+1)$

4. $\sum_{k=1}^{n} (k+1)$

5. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}(k+1)^2$

6. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}k^2$

7. Un camión circula a una velocidad promedio de 57 mph durante 4 horas. ¿Qué distancia recorre?

8. Una bomba que funciona a una velocidad de 5 gal/min extrae líquido durante 2 horas. ¿Cuántos galones extrae?

9. El agua fluye en un canal a una velocidad constante de 200 pies cúbicos por segundo. En 6 horas, ¿cuántos pies cúbicos de agua pasan por el canal?

10. Un condado tiene una densidad poblacional de 560 personas por milla cuadrada en un área de 35,000 millas cuadradas. ¿Cuál es la población del condado?

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.2

En los ejercicios del 1 al 6 explique cómo representar los problema como problemas de áreas y resuélvalos.

1. Un tren se mueve a 65 mph durante 3 horas. ¿Qué distancia recorre?

2. Una bomba que funciona a una velocidad de 15 galones/minuto extrae líquido durante media hora. ¿Cuántos galones extrae?

3. El agua fluye en un canal a una velocidad constante de 150 pies cúbicos por segundo. ¿Cuántos pies cúbicos de agua pasan por el canal en una hora?

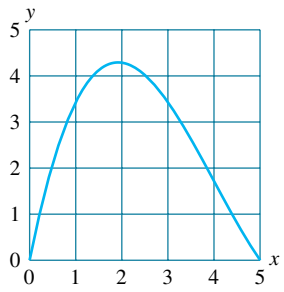
4. Una ciudad tiene una densidad poblacional de 650 personas por milla cuadrada en un área de 20 millas cuadradas. ¿Cuál es la población de la ciudad?

5. Un aeroplano vuela a una velocidad promedio de 640 kilómetros por hora durante 3 horas y 24 minutos. ¿Qué distancia recorre el aeroplano?

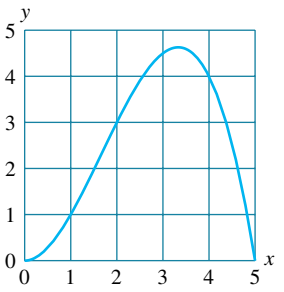
6. Un tren se mueve a una velocidad promedio de 24 millas por hora durante 4 horas y 50 minutos. ¿Qué distancia recorre el tren?

En los ejercicios 7 al 10, estime el área de la región sobre el eje x y bajo la gráfica de la función desde $x = 0$ a $x = 5$.

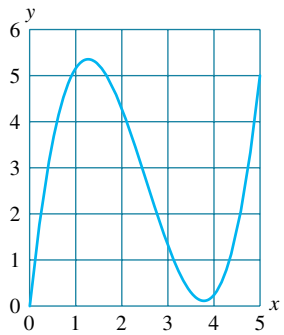
7.



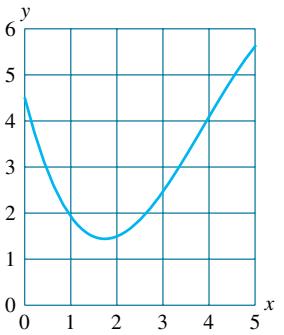
8.



9.

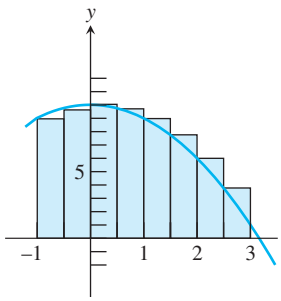


10.

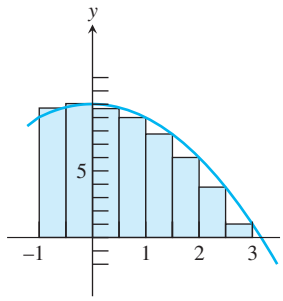


En los ejercicios 11 y 12 use los 8 rectángulos mostrados para aproximar el área de la región sobre la gráfica de $f(x) = 10 - x^2$ en el intervalo $[-1, 3]$

11.



12.



En los ejercicios del 13 al 16 haga las particiones del intervalo dado en los números indicados de subintervalos.

13. [0, 2]; 4

14. [0, 2]; 8

15. [1, 4]; 6

16. [1, 5]; 8

En los ejercicios del 17 al 20 complete lo que se pide.

a) Dibuje la gráfica de la función para x en el intervalo especificado. Verifique que la función sea no negativa en ese intervalo.

b) Sobre la gráfica de la parte **a** dibuje y sombree la aproximación por rectángulos utilizando las particiones especificadas con la aproximación MARD. Calcule el área con la aproximación MARD sin usar calculadora

c) Repita la parte b) utilizando el método MARI.

d) Promedie las aproximaciones MARD y MARI de las partes **b** y **c** para obtener una estimación promedio del área.

17. $f(x) = x^2$; [0, 4]; 4 subintervalos

18. $f(x) = x^2 + 2$; [0, 6]; 6 subintervalos

19. $f(x) = 4x - x^2$; [0, 4]; 4 subintervalos

20. $f(x) = x^3$; [0, 3]; 3 subintervalos

En los ejercicios del 21 al 28 determine la integral definida mediante el cálculo del área (podría ayudar observar la gráfica de la función).

21. $\int_3^7 5\,dx$

22. $\int_{-1}^4 6\,dx$

23. $\int_0^5 3x\,dx$

24. $\int_1^7 0.5x\,dx$

25. $\int_1^4 (x + 3)\,dx$

26. $\int_1^4 (3x - 2)\,dx$

27. $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

28. $\int_0^6 \sqrt{36 - x^2}\,dx$

Puede demostrarse que el área encerrada entre el eje x y un arco de la curva seno es 2. Use esa información en los ejercicios del 29 al 38 para calcular la integral definida (podría ayudar observar la gráfica de la función).

29. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

30. $\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x + 2)\, dx$

31. $\int_2^{\pi+2} \operatorname{sen} (x - 2)\, dx$

32. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx$

33. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

34. $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$

35. $\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} x\, dx$ [*Sugerencia:* todos los rectángulos tienen el doble de altura].

36. $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) dx$ [*Sugerencia:* todos los rectángulos tienen el doble de ancho].

37. $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx$

38. $\int_{-\pi}^{3\pi/2} |\cos x|\, dx$

En los ejercicios del 39 al 42 determine las integrales suponiendo que k es un número entre 0 y 4.

39. $\int_0^4 (kx + 3)\, dx$

40. $\int_0^k (4x + 3)\, dx$

41. $\int_0^4 (3x + k)\, dx$

42. $\int_k^4 (4x + 3)\, dx$

43. Escriba para aprender Sea $g(x) = -f(x)$ en donde f son los valores no negativos de la función en el intervalo $[a, b]$. Explique por qué el área sobre la gráfica de g es la misma que el área bajo la curva de f en el mismo intervalo.

44. Escriba para aprender Explique cómo puede determinar el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$ solamente con cálculos mentales.

45. Bola que cae Suponga que se deja caer una bola desde una torre y su velocidad después de t segundos siempre es $32t$ pies por segundo. ¿Qué distancia recorre la bola durante los primeros 2 segundos?

46. Aceleración de un automóvil Suponga que un automóvil acelera de tal manera que su velocidad después de t segundos siempre es $6t$ pies por segundo. ¿Qué distancia recorre el automóvil en los primeros 7 segundos?

47. Lanzamiento de una roca Una roca es arrojada hacia arriba desde el nivel del piso. La velocidad de la roca en cualquier instante t (segundos) es $v(t) = 48 - 32t$ pies/s.

a) Grafique la función de velocidad.

b) ¿En qué momento la roca alcanza la mayor altura?

c) Determine la distancia que la roca alcanza en la altura máxima.

48. Lanzamiento de un cohete Un cohete de juguete se lanza hacia arriba desde el nivel del piso. Su función de velocidad es $f(t) = 170 - 32t$ pies/seg, donde t es la cantidad de segundos después del lanzamiento.

a) Grafique la función de velocidad.

b) ¿En qué momento el cohete alcanza la mayor altura?

c) Determine la distancia que el cohete alcanza en la altura máxima?

49. Determinación de la distancia recorrida como un área Se arroja una bola desde el techo de un edificio de tres pisos. La tabla 10.3 proporciona la velocidad (en pies por segundo) de la caída de la bola en intervalos de 0.2 segundos hasta que golpea al piso 1.4 segundos después.

Tabla 10.3 Datos de la velocidad de la bola

Tiempo	Velocidad
0.2	−5.05
0.4	−11.43
0.6	−17.46
0.8	−24.21
1.0	−30.62
1.2	−37.06
1.4	−43.47

a) Elabore un diagrama de dispersión de los datos

b) Determine la altura aproximada del edificio utilizando la aproximación MARD de las áreas como en el ejemplo 4. Utilice el hecho de que si la función de la velocidad siempre es negativa, la distancia recorrida siempre será la misma como si se emplearan los valores absolutos de la velocidad.

50. Trabajo El trabajo se define como la fuerza por la distancia. Un barril lleno de agua que pesa 1,250 libras tiene una fuga importante y debe elevarse 35 metros. En la tabla 10.4 se muestra el peso del barril medido después de cada 5 pies de movimiento. Determine el trabajo aproximado en libras-pies que se hace cuando se eleva el barril 35 pies.

Tabla 10.4 Peso de un barril con agua que tiene una fuga

Distancia (pies)	Peso (libras)
0	1,250
5	1,150
10	1,050
15	950
20	850
25	750
30	650

Preguntas de examen estandarizado

51. Verdadero o falso Cuando se estima el área bajo una curva empleando la aproximación MARI, la exactitud, por lo general, se mejora a medida que el número n de subintervalos se incrementa.

52. Verdadero o falso La proposición $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que $f(x)$ es arbitrariamente grande conforme x se acerca arbitrariamente a L.

Puede mostrarse que el área de una región encerrada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 9$ es 18. Use este hecho en los ejercicios del 53 al 56 para elegir la respuesta correcta. No utilice calculadora.

53. Opción múltiple $\int_0^9 2\sqrt{x}\,dx$

A) 36 **B)** 27 **C)** 18 **D)** 9 **E)** 6

54. Opción múltiple $\int_0^9 \left(\sqrt{x} + 5\right) dx$

A) 14 **B)** 23 **C)** 33 **D)** 45 **E)** 63

55. Opción múltiple $\int_5^{14} \left(\sqrt{x - 5}\right) dx$

A) 9 **B)** 13 **C)** 18 **D)** 23 **E)** 28

56. Opción múltiple $\int_0^3 \sqrt{3}x\,dx$

A) 54 **B)** 18 **C)** 9 **D)** 6 **E)** 3

Exploraciones

57. Actividad en equipo Tal vez usted haya supuesto erróneamente que la función f debía ser positiva en la definición de la integral definida. Es un hecho que $\int_0^{2\pi} \text{sen } x\,dx = 0$. Emplee la definición de integral definida para explicar por qué es así. ¿Qué implica esto con respecto a $\int_0^1 (x - 1)\,dx$?

58. Área bajo una función discontinua Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

a) Dibuje una gráfica de f. Determine su dominio y su rango.

b) Escriba para aprender ¿Cómo definiría el área bajo f desde $x = 0$ hasta $x = 4$? ¿Hay diferencia si la función no tiene valor en $x = 2$?

Ampliación de las ideas

Actividad en equipo A partir de lo que sabe acerca de las integrales definidas, decida si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso para las funciones integrables (en general). Trabaje con sus compañeros de clase para justificar sus respuestas.

59. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$

60. $\int_a^b 8 \cdot f(x)\,dx = 8 \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

61. $\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$

62. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ para $a < c < b$

63. $\int_a^b f(x) = \int_b^a f(x)$

64. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

10.3 Más acerca de los límites

Aprenderá acerca de...

- Un poco de historia
- La definición informal de límite
- Las propiedades de los límites
- Los límites de funciones continuas
- Los límites laterales y de dos lados
- Los límites que tienden a infinito

. . . porque

Los límites son conceptos esenciales en el desarrollo del cálculo.

Un poco de historia

El progreso en matemáticas ocurre gradualmente y sin muchas fanfarrias en las etapas iniciales. Las fanfarrias ocurren mucho después, cuando los descubrimientos e innovaciones han sido pulidos y puestos en perspectiva. El cálculo es uno de esos casos. Muchas de las ideas en este capítulo son anteriores a Newton y a Leibniz. Otras personas resolvieron problemas de cálculo, en tiempos tan lejanos, como Arquímedes de Siracusa (287–212 a. C.), mucho antes de que se "descubriera" el cálculo. Lo que Newton y Leibniz hicieron fue desarrollar las reglas del juego, de modo que las derivadas y las integrales pudiesen calcularse algebraicamente. Lo más importante es que ellos desarrollaron lo que se ha llamado el *Teorema Fundamental del Cálculo*, que explica la relación entre el "problema de la tangente" y el "problema del área".

Sin embargo, los métodos de Newton y Leibniz dependen de misteriosas cantidades "infinitesimales" que eran suficientemente pequeñas para desaparecer sin ser cero. Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) proponía enérgicamente que se reemplazara las cantidades infinitesimales con límites (la estrategia que eventualmente funcionaría), pero esos conceptos no fueron bien entendidos hasta que Karl Weierstrass (1815–1897) y su pupilo Eduard Heine (1821–1881) introdujeron definiciones irrebatibles y formales, que se utilizan en los cursos de nivel superior que se imparten hoy en día. Para entonces, Newton y Leibniz ya habían muerto hacía más de 150 años.

Definición informal de límite

No hay nada difícil con respecto a las siguientes afirmaciones del límite:

$$\lim_{x\to 3}(2x-1)=5 \qquad \lim_{x\to\infty}(x^2+3)=\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Ésta es la razón por la que hemos utilizado la notación de límite a lo largo de este libro. Particularmente, cuando se dispone de graficadoras electrónicas, el análisis del comportamiento algebraico, numérico y gráfico de los límites de las funciones puede decirnos mucho de lo que necesitamos saber acerca de las funciones.

Lo que *es* difícil es obtener una definición categórica de lo que realmente es un límite (si hubiera sido fácil no habría tomado 150 años). Las sutilezas de la definición "epsilon-delta" de Weierstrass y Heine son tan bellas como profundas, pero no son materia de un curso de precálculo. Por lo tanto, aun cuando se estudie detalladamente a los límites y sus propiedades en esta sección, continuaremos refiriéndonos a la definición informal del límite (esencialmente la de d'Alembert). La repetimos aquí como referencia:

DEFINICIÓN (INFORMAL) Límite en *a*

Cuando escribimos "$\lim_{x\to a} f(x) = L$," queremos decir que $f(x)$ está arbitrariamente cerca de L conforme x está arbitrariamente cerca (pero no es igual) a a.

EXPLORACIÓN 1 **¿Qué es el límite?**

En grupo, analice las siguientes dos afirmaciones del límite hasta que comprenda realmente por qué son ciertas. Obsérvelas de todas las formas que pueda. Utilice su calculadora. ¿Podrá ver cómo esas afirmaciones se pueden comprobar con la definición mostrada en el recuadro anterior? En particular, ¿puede defender su posición contra los retos que representan las siguientes afirmaciones? (Esta exploración tiene la intención de ser filosófica e informal. No puede *probar* estas proposiciones sin una definición sólida).

1. $\lim_{x \to 2} 7x \neq 14.000000000000000001$

Retos:

- ¿$7x$ no se hace "arbitrariamente cercano" a ese número cuando x se aproxima a 2?
- ¿Cómo puede afirmar que 14 es el límite y 14.000000000000000001 no?

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x}{x} = 2$

Retos:

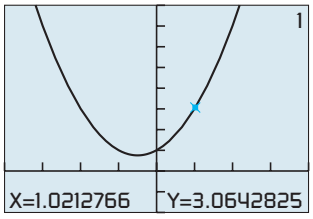
- ¿Cómo puede ser 2 el límite cuando el cociente no esta definido en 0?
- ¿No habrá una asíntota en $x = 0$? Allí, el denominador es igual a 0.
- ¿Cómo puede *afirmar* que 2 es el límite y 1.99999999999999999999 no?

EJEMPLO 1 Obtención del límite

Determine $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Resolución gráfica

La gráfica de la figura 10.11a sugiere que el límite existe y que es cercano a 3.



[−4, 4] por [−2, 8]

a)

FIGURA 10.11a Una gráfica de $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$.

Resolución numérica

La tabla también proporciona una fuerte evidencia de que el límite es 3.

X	Y1
.997	2.991
.998	2.994
.999	2.997
1	ERROR
1.001	3.003
1.002	3.006
1.003	3.009

Y1 = (X3−1)/(X−1)

b)

FIGURA 10.11b Una tabla de valores para $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$.

Resolución algebraica

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1)$$

$$= 1 + 1 + 1$$

$$= 3$$

La evidencia algebraica es tan convincente como las evidencias gráfica y numérica. El límite es 3.

Ahora resuelva el ejercicio 11.

Propiedades de los límites

Cuando los límites existen, no hay nada raro con respecto a la forma en que interactúan algebraicamente con otros. Usted podría predecir fácilmente que las siguientes propiedades se cumplen; todas constituyen teoremas que se pueden probar con una definición rigurosas del límite, aunque aquí debemos establecerlos sin probarlos.

Propiedades de los límites

Si $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$ existen, entonces

1. Regla de la suma	$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
2. Regla de la diferencia	$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
3. Regla del producto	$\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$
4. Regla de la multiplicación por una constante	$\lim_{x\to c}(k\cdot g(x)) = k \cdot \lim_{x\to c} g(x)$
5. Regla del cociente	$\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, siempre que $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$
6. Regla de la potencia	$\lim_{x\to c}(f(x))^n = (\lim_{x\to c} f(x))^n$ para n un entero positivo
7. Regla de la raíz	$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ para $n \geq 2$ un entero positivo, siempre que $\sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ y $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)}$ sean números reales.

EJEMPLO 2 Uso de las propiedades de los límites

Aprenderá en el ejemplo 10 que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Use este hecho, junto con las propiedades de los límites, para determinar los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ **c)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}{\sqrt[3]{x}}$

SOLUCIÓN

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$ Regla de la suma.

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

continúa

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$ Identidad de Pitágoras.

$= \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$ Regla del producto.

$= 1 \cdot 1$

$= 1$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$

$= \sqrt[3]{\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$ Regla de la raíz.

$= \sqrt[3]{1}$

$= 1$ *Ahora resuelva el ejercicio 19.*

Límites de funciones continuas

Recuerde de la sección 1.2 que una función es continua en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Esto significa que el límite (en a) de una función puede obtenerse "sustituyendo a" con la condición de que la función sea continua en a (la condición de la continuidad es esencial cuando se utiliza esta estrategia. Por ejemplo, la sustitución de 0 no funciona en los límites del ejemplo 2).

EJEMPLO 3 Determine los límites mediante substitución

Obtenga los límites.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \tan x}{\cos^2 x}$ **b)** $\lim_{n\to 16} \dfrac{\sqrt{n}}{\log_2 n}$

SOLUCIÓN

Tal vez no reconozca que esas funciones son continuas, pero puede utilizar las propiedades de los límites para expresar los límites en términos de los límites de funciones básicas.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \tan x}{\cos^2 x} = \dfrac{\lim_{x\to 0} (e^x - \tan x)}{\lim_{x\to 0} (\cos^2 x)}$ Regla del cociente.

$= \dfrac{\lim_{x\to 0} e^x - \lim_{x\to 0} \tan x}{(\lim_{x\to 0} \cos x)^2}$ Reglas de la diferencia y la potencia.

$= \dfrac{e^0 - \tan 0}{(\cos 0)^2}$ Límites de funciones continuas.

$= \dfrac{1-0}{1}$

$= 1$

continúa

b) $\lim_{n\to 16} \dfrac{\sqrt{n}}{\log_2 n} = \dfrac{\lim_{n\to 16} \sqrt{n}}{\lim_{n\to 16} \log_2 n}$ Regla del cociente.

$= \dfrac{\sqrt{16}}{\log_2 16}$ Límites de funciones continuas.

$= \dfrac{4}{4}$

$= 1$

Ahora resuelva el ejercicio 23.

El ejemplo 3 sugiere algunas propiedades importantes de las funciones continuas que surgen de las propiedades de los límites. Si f y g son continuas en $x = a$, entonces también $f + g, f - g, fg$ y f/g (con la condición de que $g(a)$ no haga que el denominador sea cero en el cociente). También, la potencia *n-ésima* y la raíz *n-ésima* de una función que es continua en a será también continua en a (con la condición de que $\sqrt{f(a)}$ sea real).

Límites laterales y de dos lados

Podemos observar que el límite de la función de la figura 10.11 es 3 si x se aproxima a 1 por la izquierda o por la derecha. Algunas veces el valor de la función f puede aproximarse a diferentes valores cuando x se aproxima a un número c desde los lados opuestos. Cuando esto sucede, el límite de f conforme x se aproxima a c por la izquierda es el **límite del lado izquierdo** de f en c, y el límite de f conforme x se aproxima a c por la derecha es el **límite del lado derecho** de f en c. Ésta es la notación que utilizamos:

Lado izquierdo: $\lim_{x\to c^-} f(x)$ *El límite de f conforme x se aproxima a c por la izquierda.*

Lado derecho: $\lim_{x\to c^+} f(x)$ *El límite de f conforme x se aproxima a c por la derecha.*

EJEMPLO 4 Determinación del límite lateral, derecho e izquierdo

Determine $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ en donde $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x \le 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

SOLUCIÓN La figura 10.12 sugiere que los límites del lado derecho e izquierdo de f existen, pero que no son iguales. Mediante álgebra encontramos que:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-x^2 + 4x - 1)$ Definición de f

$= -2^2 + 4 \cdot 2 - 1$

$= 3$

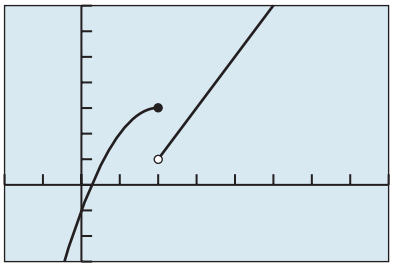
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x - 3)$ Definición de f

$= 2 \cdot 2 - 3$

$= 1$

Puede utilizar dibujos o tablas para justificar los resultados obtenidos.

Ahora resuelva el ejercicio 21, partes a) y b).



[–2, 8] por [–3, 7]

FIGURA 10.12 Una gráfica de la función definida por partes.

$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & x \le 2 \\ 2x - 3 & x > 2 \end{cases}$

(Ejemplo 4)

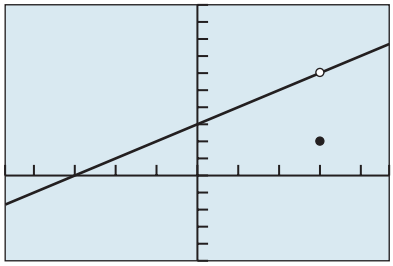
Al límite $\lim_{x\to c} f(x)$ algunas veces se le llama **límite de dos lados** de f en c para distinguirlo de los límites laterales, ya sea derecho o izquierdo, de f en c. El siguiente teorema indica cómo se relacionan esos límites.

TEOREMA Límites laterales y de dos lados

Una función $f(x)$ tiene un límite conforme x se aproxima a c si, y sólo si, los límites del lado derecho y del lado izquierdo en c existen y son iguales. Esto es

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

El límite de la función f del ejemplo 4 cuando x se aproxima a 2 no existe, por lo que f es discontinua en $x = 2$. Sin embargo, las funciones discontinuas pueden tener un límite en un punto de discontinuidad. La función f del ejemplo 1 es discontinua en $x = 1$ porque $f(1)$ no existe, pero tiene el límite 3 cuando x se aproxima a 1. El ejemplo 5 ilustra otra manera de cómo una función puede tener un límite y seguir siendo discontinua.



[–4.7, 4.7] por [–5, 10]

FIGURA 10.13 Una gráfica de la función del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Obtención de un límite en un punto de discontinuidad

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

Determine $\lim_{x\to 3} f(x)$ y pruebe que f es discontinua en $x = 3$.

SOLUCIÓN La figura 10.13 sugiere que el límite de f cuando x se aproxima a 3 existe. Utilizando álgebra obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} &= \lim_{x\to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x\to 3} (x + 3) \qquad \text{Podemos suponer que } x \neq 3. \\ &= 6. \end{aligned}$$

Ya que $f(3) = 2 \neq \lim_{x\to 3} f(x)$, f es discontinua en $x = 3$.

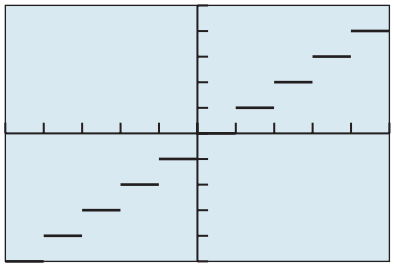
Ahora resuelva el ejercicio 37.

EJEMPLO 6 Obtención de los límites laterales y de dos lados

Sea $f(x) = \text{ent}(x)$ (la función entero mayor). Determine:

a) $\lim_{x\to 3^-} \text{ent}\,(x)$ **b)** $\lim_{x\to 3^+} \text{ent}\,(x)$ **c)** $\lim_{x\to 3} \text{ent}\,(x)$

continúa



[–5, 5] por [–5, 5]

FIGURA 10.14 La gráfica de $f(x) = \text{ent}\,(x)$ (ejemplo 6).

SOLUCIÓN Recuerde que ent (x) es igual al mayor *entero menor que o igual a* x. Por ejemplo ent $(3) = 3$. De la definición de f y su gráfica en la figura 10.14 se puede ver que

a) $\lim_{x \to 3^-} \text{ent}\,(x) = 2$

b) $\lim_{x \to 3^+} \text{ent}\,(x) = 3$

c) $\lim_{x \to 3} \text{ent}\,(x)$ no existe.

Ahora resuelva el ejercicio 41.

Límites que tienden a infinito

La definición informal que hemos utilizado se refiere a $\lim_{x \to a} f(x) = L$, donde a y L son números reales. En la sección 10.2 adaptamos la definición para aplicarla a los límites de la forma $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ por lo que podemos utilizar esta notación para describir las integrales definidas. Ésta es un tipo de "límite en el infinito". Observe que el límite (L) por si mismo es un número finito real, suponiendo que el límite existe, pero que los valores de x tienden a infinito.

DEFINICIÓN Límites en infinito

Cuando escribimos "$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$," queremos decir que $f(x)$ está arbitrariamente cerca de L conforme x se hace arbitrariamente grande. Decimos que ***f* tiene un límite *L* conforme *x* se aproxima a** ∞.

Cuando escribimos "$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$," queremos decir que $f(x)$ está arbitrariamente cerca de L conforme $-x$ se hace arbitrariamente grande. Decimos que ***f* tiene un límite *L* conforme *x* se aproxima a** ∞.

LOS LÍMITES INFINITOS NO SON LÍMITES

Es importante hacer notar que *un límite infinito no es un límite*, a pesar de lo que el nombre pudiera implicar. Describe un caso especial de un límite que no existe. Recuerde que un caballo de fuerza no es un caballo y que un gallito de bádminton no es un gallo.

ARQUÍMEDES (287 – 212 a. C.)

El matemático griego Arquímedes obtuvo el área de un círculo empleando un método que implicaba límites infinitos. Consulte el ejercicio 89 para conocer una versión moderna de este método.

Observe que los límites, en a o en infinito, siempre son números reales finitos; de otra manera, los límites no existirían. Por ejemplo, es correcto escribir

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \text{ no existe,}$$

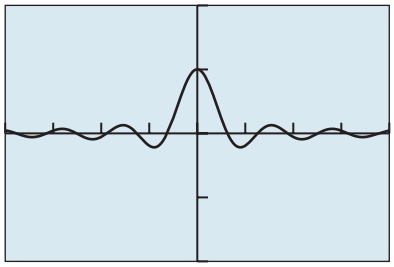
ya que éste no tiende a número real L. Sin embargo, en este caso es conveniente escribir

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

lo cual nos da un poco más de información acerca de *por qué* el límite no existe (se incrementa sin cota). Similarmente, es conveniente escribir

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty,$$

ya que ln x decrece sin cota conforme x se aproxima a 0 desde la derecha. En este contexto, a los símbolos "∞" y "$-\infty$" algunas veces se les llama **límites infinitos**.



[–20, 20] por [–2, 2]

FIGURA 10.15 La gráfica de $f(x) = (\text{sen } x)/x$ (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Estudio de los límites cuando $x \to \pm\infty$

Sea $f(x) = (\text{sen } x)/x$. Determine $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

SOLUCIÓN La gráfica de f en la figura 10.15 sugiere que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0.$$

Ahora resuelva el ejercicio 47.

En la sección 1.3 utilizamos límites para describir el *comportamiento sin cota* de la función $f(x) = x^3$ as $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

El comportamiento de la función $g(x) = e^x$, cuando $x \to \pm\infty$, puede describirse con los siguientes dos límites:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

La función $g(x) = e^x$ tiene un comportamiento no acotado cuando $x \to \infty$ y tiene un límite finito cuando $x \to -\infty$.

EJEMPLO 8 Uso de tablas para estudiar los límites cuando $x \to \pm\infty$

Sea $f(x) = xe^{-x}$. Determine $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

SOLUCIÓN Las tablas de la figura 10.16 sugieren que

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty.$$

X	Y2
0	0
10	4.5E–4
20	4.1E–8
30	3E–12
40	2E–16
50	1E–20
60	5E–25

Y2= Xe^(–X)

a)

X	Y2
0	0
–10	–2.2E5
–20	–9.7E9
–30	–3E14
–40	–9E18
–50	–3E23
–60	–7E27

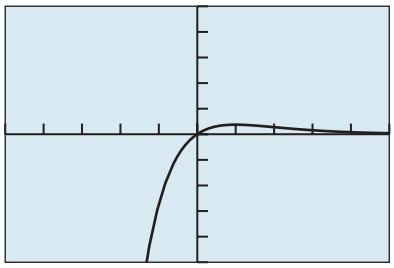
Y2= Xe^(–X)

b)

FIGURA 10.16 La tabla en a) sugiere que los valores de $f(x) = xe^{-x}$ se aproximan a 0 cuando $x \to \infty$ y la tabla en b) sugiere que los valores de $f(x) = xe^{-x}$ se aproximan $-\infty$ cuando $x \to -\infty$ (ejemplo 8).

La gráfica de f en la figura 10.17 respalda estos resultados.

Ahora resuelva el ejercicio 49.



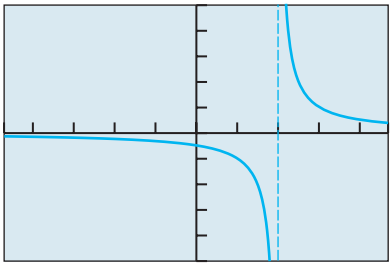
[–5, 5] por [–5, 5]

FIGURA 10.17 La gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$ (ejemplo 8).

EXPLORACIÓN 2 **Investigación de una función logística**

Sea $f(x) = \dfrac{50}{1 + 2^{3-x}}$.

1. Utilice tablas y gráficas para obtener $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Identifique si existe alguna asíntota horizontal.
3. ¿Cómo está relacionado el numerador de la fracción para f con la parte 2?



[–4.7, 4.7] por [–5, 5]

FIGURA 10.18 La gráfica de $f(x) = 1/(x - 2)$ con sus asíntotas verticales sobrepuestas.

En la sección 2.6 utilizamos la gráfica de $f(x) = 1/(x - 2)$ para establecer que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty.$$

Cualquiera de estos límites no acotados nos permite concluir que la recta vertical $x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de f (figura 10.18).

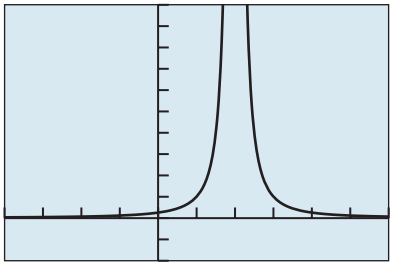
EJEMPLO 9 Estudio de límites acotados

Obtenga $\lim_{x\to 2} 1/(x - 2)^2$.

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x) = 1/(x - 2)^2$ en la figura 10.19, sugiere que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty.$$

Esto significa que el límite de f cuando x se aproxima a 2 no existe. La tabla de valores de la figura 10.20 concuerda con esta conclusión. La gráfica de f tiene una asíntota vertical en $x = 2$. ***Ahora resuelva el ejercicio 55.***



[–4, 6] por [–2, 10]

FIGURA 10.19 La gráfica de $f(x) = 1/(x - 2)^2$ del ejemplo 9.

No todos los ceros de los denominadores corresponden a asíntotas verticales como se ilustra en los ejemplos 5 y 7.

EJEMPLO 10 Estudio de los límites cuando $x = 0$

Obtenga $\lim_{x\to 0} (\text{sen } x)/x$.

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x) = (\text{sen } x)/x$ de la figura 10.15 sugiere que ese límite existe. La tabla de valores de la figura 10.21 sugiere que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

X	Y1
1.9	100
1.99	10000
1.999	1E6
2	ERROR
2.001	1E6
2.01	10000
2.1	100

Y1 = 1/(X–2)²

FIGURA 10.20 Una tabla de valores $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ (ejemplo 9).

X	Y1
–.03	.99985
–.02	.99993
–.01	.99998
0	ERROR
.01	.99998
.02	.99993
.03	.99985

Y1 = sin(X)/X

FIGURA 10.21 Una tabla de valores de $f(x) = (\text{sen } x)/x$ (ejemplo 10).

Ahora resuelva el ejercicio 63.

REPASO RÁPIDO 10.3 *(Para obtener ayuda revise las secciones 1.2 y 1.3)*

En los ejercicios 1 y 2 determine **a)** $f(-2)$, **b)** $f(0)$ y **c)** $f(2)$.

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(2x-4)^2}$ **2.** $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

En los ejercicios 3 y 4 determine **a)** las asíntotas verticales y **b)** las asíntotas horizontales de la gráfica de f, si existen.

3. $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2-4}$ **4.** $f(x) = \dfrac{x^3+1}{2-x-x^2}$

En los ejercicios 5 y 6 la asíntota del comportamiento en los extremos de la función f es una de las siguientes expresiones. ¿Cuál de ellas es?

a) $y = 2x^2$ **b)** $y = -2x^2$ **c)** $y = x^3$ **d)** $y = -x^3$

5. $f(x) = \dfrac{2x^3-3x^2+1}{3-x}$ **6.** $f(x) = \dfrac{x^4+2x^2+x+1}{x-3}$

En los ejercicios 7 y 8 determine **a)** los puntos de continuidad y **b)** los puntos de discontinuidad de la función.

7. $f(x) = \sqrt{x+2}$ **8.** $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$

En los ejercicios 9 y 10 tome como referencia la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x \le 1 \\ 4-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

9. Haga la gráfica de f.

10. Obtenga los puntos de continuidad y los puntos de discontinuidad de f.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.3

En los ejercicios 1 al 10, si existen, determine los límites mediante sustitución directa.

1. $\lim\limits_{x\to -1} x\,(x-1)^2$ **2.** $\lim\limits_{x\to 3} (x-1)^{12}$

3. $\lim\limits_{x\to 2} (x^3-2x+3)$ **4.** $\lim\limits_{x\to -2} (x^3-x+5)$

5. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x+5}$ **6.** $\lim\limits_{x\to -2} (x-4)^{2/3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x \operatorname{sen} x)$ **8.** $\lim\limits_{x\to \pi} \ln\left(\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to a} (x^2-2)$ **10.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

En los ejercicios del 11 al 18 **a)** explique por qué no puede utilizar la sustitución para obtener el límite y **b)** determine algebraicamente el límite, si existe.

11. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9}$ **12.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-15}$

13. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$ **14.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x-2}$

15. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$ **16.** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x^2-4|}{x+2}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x-3}$ **18.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2}{x^2}$

En los ejercicios del 19 al 22 utilice el hecho de que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, junto con las propiedades de los límites, para determinar los límites.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x^2-x}$ **20.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$ **22.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{2x}$

En los ejercicios del 23 al 26 obtenga los límites.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-\sqrt{x}}{\log_4(x+2)}$ **24.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{sen} x - 4\cos x}{5\operatorname{sen} x + \cos x}$

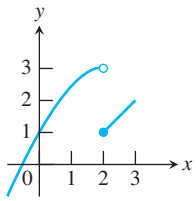
25. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln(2x)}{\operatorname{sen}^2 x}$ **26.** $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{\sqrt{x+9}}{\log_3 x}$

En los ejercicios del 27 al 30 utilice la gráfica dada para determinar los límites o explicar por qué los límites no existen.

27. a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

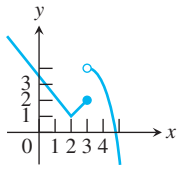
c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



28. a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

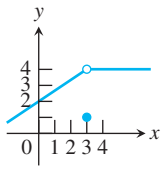
c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$



29. a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

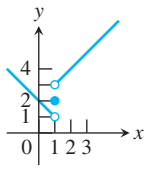
c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$



30. **a)** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$



En los ejercicios 31 y 32 se proporciona la gráfica de la función $y = f(x)$. ¿Cuál de las afirmaciones acerca de la función son verdaderas y cuáles son falsas?

31. **a)** $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

d) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe

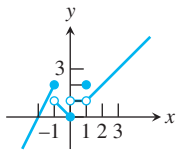
f) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

g) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

h) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

i) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

j) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$



32. **a)** $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe

c) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

d) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

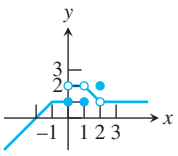
e) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

f) $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe

g) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

h) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe para todo valor c en $(-1, 1)$.

i) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe para todo valor c en $(1, 3)$.



En los ejercicios 33 y 34 utilice la gráfica de f para determinar **a)** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, **b)** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, y **c)** $\lim_{x\to 0} f(x)$ si existen.

33. $f(x) = (1 + x)^{1/x}$

34. $f(x) = (1 + x)^{1/(2x)}$

35. Actividad en equipo Suponga que $\lim_{x\to 4} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 4} g(x) = 4$. Determine el límite.

a) $\lim_{x\to 4} (g(x) + 2$

b) $\lim_{x\to 4} xf(x)$

c) $\lim_{x\to 4} g^2(x)$

d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x) - 1}$

36. Actividad en equipo Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -3$. Determine el límite.

a) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$

b) $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x))$

c) $\lim_{x\to a} (3g(x) + 1)$

d) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

En los ejercicios del 37 al 40 complete lo siguiente para las función f dadas por partes.

a) Elabore la gráfica de f.

b) Determine $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

c) **Escriba para aprender** ¿Existe $\lim_{x\to a} f(x)$? Si es así, proporcione su valor. Si no existe, dé una explicación.

37. $a = 2, f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

38. $a = 1, f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

39. $a = 0, f(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

40. $a = -3, f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \geq -3 \\ 8 - x & \text{si } x < -3 \end{cases}$

En los ejercicios del 41 al 46 obtenga el límite.

41. $\lim_{x\to 2^+}$ ent (x)

42. $\lim_{x\to 2^-}$ ent (x)

43. $\lim_{x\to 0.0001}$ ent (x)

44. $\lim_{x\to 5/2^-}$ ent $(2x)$

45. $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{x + 3}{|x + 3|}$

46. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{5x}{|2x|}$

En los ejercicios del 47 al 54 obtenga **a)** $\lim_{x\to\infty} y$ y **b)** $\lim_{x\to -\infty} y$.

47. $y = \dfrac{\cos x}{1 + x}$

48. $y = \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x}$

49. $y = 1 + 2^x$

50. $y = \dfrac{x}{1 + 2^x}$

51. $y = x + \operatorname{sen} x$

52. $y = e^{-x} + \operatorname{sen} x$

53. $y = -e^x \operatorname{sen} x$

54. $y = e^{-x} \cos x$

En los ejercicios del 55 al 60 utilice las gráficas y las tablas para obtener el límite e identifique las asíntotas verticales, si las hay.

55. $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x - 3}$

56. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x}{x - 3}$

57. $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{1}{x + 2}$

58. $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{x}{x + 2}$

59. $\lim_{x\to 5} \dfrac{1}{(x - 5)^2}$

60. $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2 - 4}$

En los ejercicios del 61 al 64 determine algebraicamente el límite, si es posible. Justifique gráficamente su respuesta.

61. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^3 - 1}{x}$

62. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1/(3 + x) - 1/3}{x}$

63. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

64. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x - 4}{x^2 - 4}$

En los ejercicios 65 al 72 obtenga el límite.

65. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2}$

66. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}$

67. $\lim_{x\to 0} \left[x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

68. $\lim_{x\to 27} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

69. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x-1}$

70. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^2}{\ln x}$

71. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x^2}$

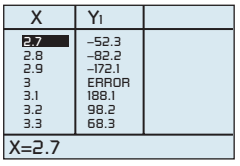
72. $\lim_{x\to\infty} 3^{-x}$

Preguntas de examen estandarizado

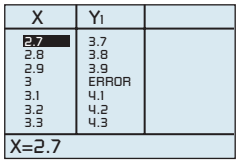
73. Verdadero o falso Si $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \le 3 \\ 8-x & \text{si } x > 3 \end{cases}$, entonces $\lim_{x\to 3} f(x)$ está indefinido. Justifique su respuesta.

74. Verdadero o falso Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones y $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, entonces $\lim_{x\to 0} [f(x)\cdot g(x)]$ no puede existir. Justifique su respuesta.

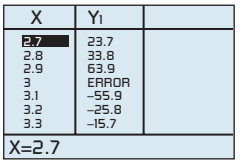
Opción múltiple En los ejercicios del 75 al 78 relacione la función $y = f(x)$ con la tabla. No utilice calculadora.



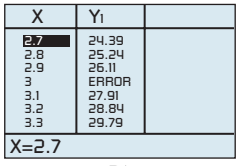
A)



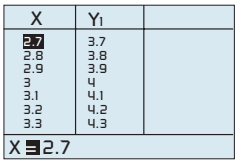
B)



C)



D)



E)

75. $y = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$

76. $y = \frac{x^2+2x+3}{x-3}$

77. $y = \frac{x^2-2x-9}{x-3}$

78. $y = \frac{x^3-27}{x-3}$

Exploraciones

En los ejercicios 79 al 82 complete lo siguiente para las funciones f dadas por partes.

a) Haga la gráfica de f.

b) ¿En cuáles puntos c en el dominio de f el $\lim_{x\to c} f(x)$ existe?

c) ¿En cuáles puntos c solamente existe el límite del lado izquierdo?

d) ¿En cuáles puntos c solamente existe el límite del lado derecho?

79. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ -\cos x & \text{si } 0 \le x \le \pi \end{cases}$

80. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ \csc x & \text{si } 0 \le x \le \pi \end{cases}$

81. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \le x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

82. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \text{ o } 0 < x \le 2 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 2x & \text{si } x < -2 \text{ o } x > 2 \end{cases}$

83. Población de conejos En la tabla 10.5 se proporciona la población de conejos en un periodo de 2 años en cierto condado.

Tabla 10.5 Población de conejos

Inicio del mes	Número (en miles)
0	10
2	12
4	14
6	16
8	22
10	30
12	35
14	39
16	44
18	48
20	50
22	51



a) Elabore un diagrama de dispersión de los datos de la tabla 10.5.

b) Determine un modelo logístico de regresión de los datos. Obtenga el límite de ese modelo cuando el tiempo tiende a infinito.

c) ¿Qué puede concluir acerca del límite del crecimiento de la población de conejos en el condado?

d) Proporcione una explicación razonable del límite del crecimiento de la población.

Actividad en equipo En los ejercicios del 84 al 87 elabore una gráfica de una función $y = f(x)$ que satisfaga las condiciones establecidas. Incluya las asíntotas, si existen.

84. $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$

85. $\lim_{x\to 4} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$

86. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$

87. $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$

Ampliación de las ideas

88. Propiedades de los límites Obtenga los límites de f, g y fg cuando x se aproxima a c.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$, $g(x) = x^2$, $c = 0$

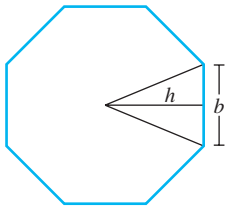
b) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $c = 0$

c) $f(x) = \left|\dfrac{3}{x-1}\right|$, $g(x) = (x-1)^2$, $c = 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^4}$, $g(x) = (x-1)^2$, $c = 1$

e) Escriba para aprender Suponga que $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 0$. Con base en sus resultados de las partes a) a la d), ¿qué puede decir acerca de $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x))$?

89. Límites y el área de un círculo Considere un polígono regular de n lados construido con n triángulos isósceles congruentes, cada uno de altura h y base b. La figura muestra un polígono regular de 8 lados.



a) Muestre que el área de un polígono regular de 8 lados es $A = 4hb$ y el área de un polígono regular de n lados es $A = (1/2)nhb$.

b) Muestre que la base b del polígono regular de n lados es $b = 2h \tan(180/n)°$.

c) Muestre que el área A de un polígono regular de n lados es $A = nh^2 \tan(180/n)°$.

d) Haga $h = 1$. Construya una tabla de valores de n y A para $n = 4, 8, 16, 100, 500, 1{,}000, 5{,}000, 10{,}000, 100{,}000$. ¿$A$ tiene un límite cuando $n \to \infty$?

e) Repita la parte (d) cuando $h = 3$.

f) Proporcione un argumento convincente para justificar que $\lim_{n\to\infty} A = \pi h^2$, es el área de un círculo de radio h.

90. Extensión continua de una función Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{si } x \neq 2 \\ a & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

a) Bosqueje varias de las posibles gráficas de f.

b) Obtenga un valor de a de tal manera que la función sea continua en $x = 2$.

En los ejercicios del 91 al 93 **a)** grafique la función, **b)** verifique que la función tiene una discontinuidad removible y **c)** proporcione una fórmula para la extensión continua de la función. [*Sugerencia:* Consulte el ejercicio 90].

91. $y = \dfrac{2x+4}{x+2}$

92. $y = \dfrac{x-5}{5-x}$

93. $y = \dfrac{x^3-1}{x-1}$

10.4 Integrales y derivadas numéricas

Aprenderá acerca de...

- Las derivadas obtenidas con calculadora
- Las integrales definidas obtenidas con calculadora
- El cálculo de la derivada a partir de datos
- El cálculo de la integral definida a partir de datos

. . . porque

Las capacidades numéricas de una calculadora graficadora facilitan la realización de muchos cálculos que habrían sido sumamente difíciles en el pasado.

Derivadas obtenidas con calculadora

Así como las computadoras y las sofisticadas calculadoras han llegado a ser herramientas indispensables para los matemáticos y los ingenieros modernos (y, recientemente, para los estudiantes modernos), también las técnicas modernas de diferenciación e integración han resurgido como métodos importantes para la resolución de problemas. Esto constituye una ironía importante, dado que fue precisamente para evitar los cálculos tediosos inherentes a tales métodos que el cálculo se inventó, principalmente. Aunque nada puede disminuir la magnitud del cálculo como un logro humano importante, y nadie puede ir más allá en las matemáticas o en la ciencia sin él, la realidad en el mundo de hoy es que la aplicación de métodos antiguos de aproximación de límites —con la ayuda de la calculadora— es a menudo la forma más eficiente de resolver un problema de cálculo.

Muchas calculadoras graficadoras tienen integrados algoritmos que aproximan numéricamente las derivadas a funciones con buena precisión en la mayoría de los puntos de sus dominios. Utilizaremos la notación NDER $f(a)$ para expresar la aproximación de una derivada a $f'(a)$ hecha con calculadora.

Para pequeños valores de h, el cociente de la diferencia regular

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

con frecuencia es una buena aproximación de $f'(a)$. Sin embargo, el mismo valor de h usualmente produce una mejor aproximación de $f'(a)$ si se utiliza el **cociente de la diferencia simétrica**

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h},$$

como se ilustra en la figura 10.22.

Muchas de esas calculadoras emplean el cociente de la diferencia simétricas con un valor preestablecido de $h = 0.001$ para calcular NDER $f(a)$. Cuando nos referimos a la derivada en este libro, supondremos que es el cociente de la diferencia simétrica con $h = 0.001$.

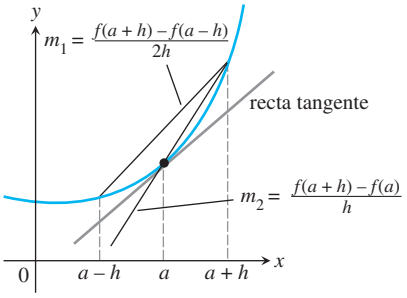


FIGURA 10.22 El cociente de la diferencia simétrica (pendiente m_1) generalmente proporciona una mejor aproximación de la derivada para un valor dado de h que el cociente de la diferencia regular (pendiente m_2).

DEFINICIÓN Derivada numérica

En este libro, definimos la **derivada numérica de f en a** como

$$\text{NDER } f(a) = \frac{f(a+0.001)-f(a-0.001)}{0.002}.$$

Similarmente, definimos la **derivada numérica de f** como la función

$$\text{NDER } f(x) = \frac{f(x+0.001)-f(x-0.001)}{0.002}$$

EJEMPLO 1 Cálculo de una derivada numérica

Sea $f(x) = x^3$. Calcule NDER $f(2)$, mediante el cociente de la diferencia simétrica con $h = 0.001$. Compárelo con el valor real de $f'(x)$.

SOLUCIÓN

$$\text{NDER } f(x) = \frac{f(2 + 0.001) - f(2 - 0.001)}{0.002}$$

$$= \frac{f(2.001) - f(1.999)}{0.002}$$

$$= 12.000001$$

El valor real es

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^3 - 2^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (12 + 6h + h^2)$$

$$= 12$$

Ahora resuelva el ejercicio 3.

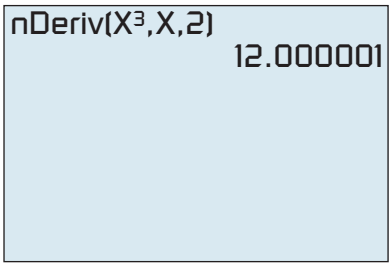


FIGURA 10.23 Aplicación del comando de la derivada numérica de una calculadora graficadora (ejemplo 1).

La derivada numérica en este caso es obviamente muy precisa. En la práctica no es necesario ingresar a la calculadora el cociente simétrico, ya que esto lo hace la calculadora con su algoritmo interno. La figura 10.23 muestra el comando que se utilizaría en una de esas calculadoras para obtener la derivada numérica del ejemplo 1.

Si $f'(a)$ existe, entonces NDER $f(a)$ usualmente proporciona una buena aproximación al valor real. Por otro lado, algunas veces el algoritmo arrojará un valor para NDER $f(a)$ incluso cuando $f'(a)$ no exista (consulte el ejercicio 51).

Integrales definidas obtenidas con calculadora

Recuerde de la historia del problema del área (sección 10.2) que la estrategia de sumar los rectángulos delgados para aproximar las áreas es antigua. Entre más delgados sean los rectángulos, la aproximación es mejor, y, por supuesto, los cálculos son más tediosos. Actualmente, gracias a la tecnología podemos utilizar la antigua estrategia sin que sea tediosa.

Muchas calculadoras graficadoras ya traen algoritmos para calcular las integrales definidas con gran precisión. Utilizamos la notación NINT $(f(x), x, a, b)$ para expresar la aproximación de la calculadora para $\int_a^b f(x)\,dx$. A diferencia de NDER, que utiliza un valor fijo de $\triangle x$, NINT varía el valor de $\triangle x$ hasta que la integral numérica se acerque más al valor del límite, lo que frecuentemente produce una respuesta exacta (al menos al número de dígitos en la pantalla de la calculadora). Ya que el algoritmo para el cálculo de NINT determina la integral definida mediante la aproximación de la suma de Riemann en vez del Cálculo, le llamaremos una **integral numérica**.

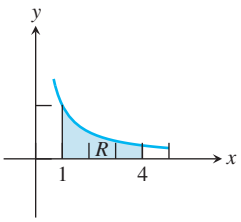


FIGURA 10.24 La gráfica de $f(x) = 1/x$ con el área sombreada bajo la curva entre $x = 1$ y $x = 4$ (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Cálculo de una integral numérica

Utilice NINT para obtener el área de la región R encerrada entre el eje x y la gráfica de $y = 1/x$ desde $x = 1$ hasta $x = 4$.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 10.24.

El área puede escribirse como la integral definida $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$, que puede obtenerse con una calculadora graficadora: NINT $(1/x, x, 1, 4) = 1.386294361$. La respuesta correcta (como usted aprenderá en un curso de cálculo) es ln 4, ¡lo cual coincide con cada dígito desplegado del valor NINT! La figura 10.25 muestra la sintaxis de la integración numérica en un tipo de calculadora.

Ahora resuelva el ejercicio 13.

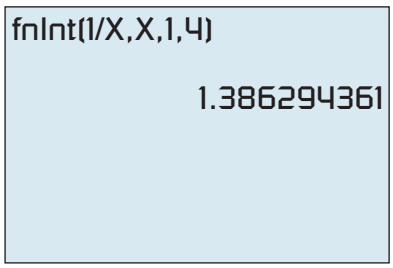


FIGURA 10.25 Una aproximación de la integral numérica $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$ (ejemplo 2).

EXPLORACIÓN 1 Un integrador numérico hecho por usted mismo

Recuerde que una integral definida es el límite cuando tiende a infinito una suma de Riemann, es decir, una suma de la forma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x$. Puede utilizar su calculadora para estimar las sumas de las sucesiones utilizando los comandos LIST (no es tan preciso como NINT, y ciertamente no es fácil, pero al menos usted puede observar las sumas que se hacen).

1. La integral del ejemplo 2 puede calcularse utilizando el comando

   $$\text{sum}\,(\text{seq}(1/(1 + K \cdot 3/50) \cdot 3/50, K, 1, 50)).$$

   Esto utiliza 50 rectángulos en el MARD, cada uno con anchura $\triangle x = 3/50$. Obtenga la suma en su calculadora y compárela con el valor NINT.

2. Estudie el comando hasta que comprenda cómo funciona, adáptelo para obtener la aproximación por el MARD para 100 rectángulos y calcúlelo con su calculadora. ¿La aproximación mejora?

3. ¿Cuál es la integral definida que se aproxima mediante el comando

   $$\text{sum}\,(\text{seq}(\text{sen}(0 + K \cdot \pi/50) \cdot \pi/50, K, 1, 50))?$$

   Calcúlela con su calculadora y compárela con el valor NINT para la misma integral.

4. Escriba un comando que utilice 50 rectángulos para el MARD para aproximar $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx$. Calcúlela con su calculadora y compárela con el valor NINT para la misma integral.

Recuerde que originalmente estábamos motivados para obtener áreas debido a su relación con el problema de la distancia recorrida. Para mostrar solamente una de las muchas aplicaciones de la integración, utilizamos la integración numérica para resolver el problema de la distancia del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Obtención de la distancia recorrida

Un automóvil es conducido a una velocidad variable a lo largo de un pista de prueba durante 2 horas, de tal manera que su velocidad en cualquier instante t $(0 \le t \le 2)$, está expresado con la ecuación $v(t) = 30 + 10 \text{ sen } 6t$ millas por hora. ¿Qué distancia recorre el automóvil en la prueba de 2 horas?

continúa



¿QUIÉN ESTÁ MANEJANDO?

Francamente admitiremos que las condiciones del ejemplo 3 serían prácticamente imposibles de reproducir en una situación real, incluso si uno pudiera imaginar una razón para hacerlo. Los libros de texto de matemáticas están llenos de problemas de un mundo real que no son auténticos, pero sirven para los estudiantes que están aprendiendo algo. Los problemas auténticos del mundo real son, frecuentemente, muy sencillos para ilustrar el concepto o muy difíciles para que los principiantes los resuelvan.

Tabla 10.6 Bola que cae

Tiempo (segundos)	Posición (pies)
0.04	6.80
0.08	6.40
0.12	5.95
0.16	5.45
0.20	4.90
0.24	4.30
0.28	3.60
0.32	2.90
0.36	2.15
0.40	1.30
0.44	0.40

SOLUCIÓN De acuerdo con el análisis obtenido en la sección 10.2, la distancia recorrida está expresada mediante $\int_0^2 (30 + 10 \text{ sen } (6t))\, dt$. Utilizamos la calculadora para obtener la integral numérica:

$$\text{NINT } (30 + 10 \text{ sen } (6t), t, 0, 2) \approx 60.26.$$

Interpretando la respuesta, concluimos que el automóvil recorre 60.26 millas.

Ahora resuelva el ejercicio 21.

Cálculo de la derivada a partir de datos

En algunas ocasiones todo lo que se proporciona de un problema es un diagrama de dispersión obtenido a partir de un conjunto de datos, es decir, un modelo numérico del problema. Hay dos formas de obtener información acerca de la derivada del modelo.

1. Para aproximar la derivada a un punto, recuerde que la tasa promedio de cambio en un pequeño intervalo, $\triangle y/\triangle x$, aproxima a la derivada a puntos en ese intervalo (generalmente, la aproximación es mejor cerca de la mitad del intervalo que cerca de los puntos finales). La tasa promedio de cambio en un intervalo entre dos datos puede calcularse directamente a partir de los datos.
2. Para aproximar la función derivada, las técnicas de regresión pueden utilizarse para ajustar la curva a los datos, y entonces NDER puede aplicarse al modelo de regresión para aproximar la derivada. Alternativamente, los valores $\triangle y/\triangle x$ pueden graficarse y entonces las técnicas de regresión se pueden utilizar para ajustar la aproximación de la derivada que pase por esos puntos.

EJEMPLO 4 Obtención de la derivada a partir de los datos

La tabla 10.6 muestra la altura (en pies) de una bola que cae al piso medido con un detector de movimiento en intervalos de 0.04 segundos.

a) Estime la velocidad instantánea de la bola en $t = 0.2$ segundos.

b) Haga un diagrama de dispersión de los datos y utilice la regresión cuadrática para modelar la altura s, de la bola que cae al piso, como una función de t.

c) Utilice NDER para aproximar $s'(0.2)$ y compárela con el valor hallado en a).

SOLUCIÓN

a) Debido a que 0.2 es el punto medio del intervalo de tiempo [0.16, 0.24], la tasa promedio de cambio $\triangle s/\triangle t$ en el intervalo [0.16, 0.24] debería ser una buena aproximación a $s'(0.2)$.

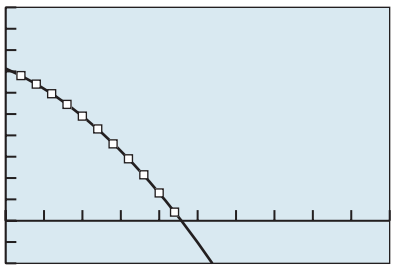
$$s'(0.2) \approx \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{4.30 - 5.45}{0.24 - 0.16} = -14.375.$$

La velocidad es aproximadamente 14.375 pies por segundo en $t = 0.2$.

b) El diagrama de dispersión se muestra en la figura 10.26, junto con la curva cuadrática de regresión. Una calculadora graficadora da $s(t) \approx -17.12\,t^2 - 7.74\,t + 7.13$ como la ecuación del modelo cuadrático de regresión.

c) La calculadora encuentra el valor NDER $s(0.2)$ como -14.588, lo cual concuerda muy bien con la aproximación en a). De hecho, la diferencia es de únicamente 0.213 pies por segundo, menos de 1.5% de la velocidad de la bola.

Ahora resuelva el ejercicio 23.



[0, 1] por [–2, 10]

FIGURA 10.26 Un diagrama de dispersión de los datos de la tabla 10.6 junto con su modelo cuadrático de regresión.

Tabla 10.7 Cambio en los intervalos de la tabla 10.6

Punto medio	$\triangle s/\triangle t$
0.06	−10.00
0.10	−11.25
0.14	−12.50
0.18	−13.75
0.22	−15.00
0.26	−17.50
0.30	−17.50
0.34	−18.75
0.38	−21.25
0.42	−22.50

EJEMPLO 5 Determine las derivadas a partir de datos

Este ejemplo también utiliza los datos de la bola que cae de la tabla 10.6.

a) Calcule la velocidad promedio, $\triangle s/\triangle t$, de cada subintervalo de longitud 0.04. Haga una tabla que muestre los puntos medios de los subintervalos en una columna y los valores de $\triangle s/\triangle t$ en la segunda columna.

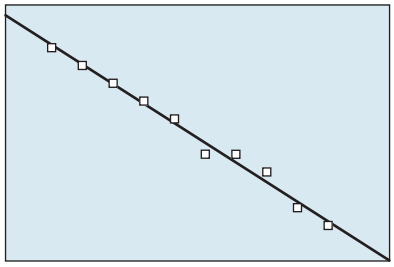
b) Elabore un diagrama de dispersión que muestre los números de la segunda columna como una función de los números de la primera columna y obtenga un modelo de regresión lineal para modelar los datos.

c) Use el modelo de regresión lineal de **b** para aproximar la velocidad de la bola en $t = 0.2$ y compárela con los valores hallados en el ejemplo 4.

SOLUCIÓN

a) El primer subintervalo, el cual empieza en 0.04 y termina en 0.08, tiene un punto medio de $(0.04 + 0.08)/2 = 0.06$. En ese intervalo, $\triangle s/\triangle t = (6.40 - 6.80)/(0.08 - 0.04) = -10.00$. El resto de los puntos medios y los valores de $\triangle s/\triangle t$ se calculan de manera similar y se muestran en la tabla 10.7.

b) El diagrama de dispersión y la recta de regresión se muestran en la figura 10.27. Una calculadora graficadora proporciona $v(t) = -34.470t - 7.727$ como la recta de regresión.



[0, 0.5] por [–25, –7]

FIGURA 10.27 Un diagrama de dispersión de los datos de la tabla 10.7 junto con su modelo de regresión lineal (ejemplo 5).

c) El modelo de regresión lineal da $v(0.2) \approx -14.62$, el cual es cercano a los valores hallados en el ejemplo 4.

Ahora resuelva el ejercicio 25.

Cálculo de la integral definida a partir de datos

Si se nos proporciona un conjunto de datos, las coordenadas x de los puntos definen los subintervalos entre los valores más pequeños y más grandes en los datos. Podemos formar una suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\triangle x$$

empleando las longitudes de los intervalos para $\triangle x$ y los puntos finales derechos o izquierdos de los intervalos como las x_k. Entonces, la suma de Riemann aproxima la integral definida de la función en el intervalo.

El ejemplo 6 ilustra cómo se lleva a cabo este procedimiento.

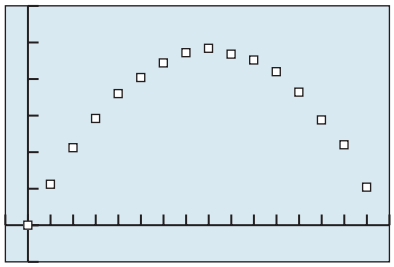
Tabla 10.8 Velocidad de un cuerpo en movimiento

Tiempo (segundos)	Velocidad (m/s)
0.00	0.00
0.25	0.28
0.50	0.53
0.75	0.73
1.00	0.90
1.25	1.01
1.50	1.11
1.75	1.18
2.00	1.21
2.25	1.17
2.50	1.13
2.75	1.05
3.00	0.91
3.25	0.72
3.50	0.55
3.75	0.26

EJEMPLO 6 Obtención de una integral definida utilizando datos

La tabla 10.8 muestra la velocidad de un cuerpo en movimiento (en metros por segundo) medido en intervalos regulares de un cuarto de segundo. Estime la distancia recorrida del cuerpo desde $t = 0$ a $t = 3.75$.

SOLUCIÓN La figura 10.28 proporciona un diagrama de dispersión de los datos de la velocidad.



[–0.25, 4] por [–0.25, 1.5]

FIGURA 10.28 Un diagrama de dispersión de los datos de velocidad de la tabla 10.8 (ejemplo 6).

La distancia recorrida es $\int_0^{3.75} v(t)\,dx$, que aproximamos con una suma Riemann construida directamente de los datos. Sumamos 15 productos de la forma $v(t_k)\,\triangle t$, utilizando cada vez el extremo de la derecha para cada t_k (ésta es la aproximación MARD, en la notación de la sección 10.2). Note que $\triangle t = 0.25$ para cada subintervalo.

$$\begin{aligned}\int_0^{3.75} v(t)\,dx &= \sum_{k=1}^{15} v(t_k)\,\triangle t \\ &= 0.25(0.28 + 0.53 + 0.73 + 0.90 + 1.01 + 1.11 \\ &\quad + 1.18 + 1.21 + 1.17 + 1.13 + 1.05 + 0.91 + 0.72 \\ &\quad + 0.55 + 0.26) \\ &= 3.185\end{aligned}$$

Así que la distancia recorrida por el cuerpo es aproximadamente 3.2 metros.

Ahora resuelva el ejercicio 27.

REPASO RÁPIDO 10.4 *(Para obtener ayuda revise las secciones R.4 y 1.3)*

En los ejercicios del 1 al 10 obtenga $\triangle y/\triangle x$ en el intervalo [1, 4] de acuerdo con las condiciones dadas.

1. $y = x^2$ **2.** $y = \sqrt{x}$

3. $y = \log_2 x$ **4.** $y = 3^x$

5. $y = 2$ cuando $x = 1$ y $y = 11$ cuando $x = 4$.

6. La gráfica de $y = f(x)$ que pasa por los puntos (4, 10) y (1, −2).

En los ejercicios del 7 al 10 calcule el cociente $(f(1 + h) - f(1 - h))/2h$ con la f y la h dadas.

7. $f(x) = \text{sen } x$, $h = 0.01$ **8.** $f(x) = x^4$, $h = 0.001$

9. $f(x) = \ln x$, $h = 0.001$ **10.** $f(x) = e^x$, $h = 0.0001$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10.4

En los ejercicios del 1 al 10 utilice NDER de su calculadora para obtener la derivada numérica de la función en el punto específico.

1. $f(x) = 1 - x^2$ en $x = 2$

2. $f(x) = 2x + \frac{1}{2}x^2$ en $x = 2$

3. $f(x) = 3x^2 + 2$ en $x = -2$

4. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en $x = 1$

5. $f(x) = |x + 2|$ en $x = -2$

6. $f(x) = \frac{1}{x + 2}$ en $x = -1$

7. $f(x) = \ln 2x$ en $x = 1$

8. $f(x) = 2 \ln 2x$ en $x = 1$

9. $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$ en $x = \pi$

10. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ en $x = \pi$

En los ejercicios del 11 al 20 utilice NINT de su calculadora para determinar la integral numérica de la función en el intervalo especificado.

11. $f(x) = x^2$, $[0, 4]$

12. $f(x) = x^2$, $[-4, 0]$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, \pi]$

14. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[\pi, 2\pi]$

15. $f(x) = \cos x$, $[0, \pi]$

16. $f(x) = |\cos x|$, $[0, \pi]$

17. $f(x) = 1/x$, $[1, e]$

18. $f(x) = 1/x$, $[e, 2e]$

19. $f(x) = \frac{2}{1 + x^2}$, $[0, 10^8]$

20. $f(x) = \sec^2 x + \tan^2 x$, $[0, 10]$

21. Tiempo de viaje Una camioneta es manejada a una velocidad variable durante 3 horas, de tal manera que su velocidad en cualquier momento t ($0 \le t \le 3$) está expresada por $v(t) = 35 - 12 \cos 4t$ millas por hora. ¿Qué distancia recorre la camioneta durante las 3 horas? Redondee su respuesta al centésimo más cercano.

22. Tiempo de viaje Una ciclista se desplaza durante 90 minutos y su velocidad en cualquier momento t horas ($0 \le t \le 1.5$) está expresada por $v(t) = 12 - 8 \operatorname{sen} 5t$ millas por hora. ¿Qué distancia recorre durante los 90 minutos? Redondee su respuesta al centésimo más cercano.

23. Obtención de las derivadas a partir de los datos Se arroja una bola desde el techo de un edificio de 30 pisos. La altura en pies del piso al punto donde se arroja la bola se mide en intervalos de 1/2 segundo y se registró en la tabla.

Tiempo (seg)	Altura (pies)
0	500
0.5	495
1.0	485
1.5	465
2.0	435
2.5	400
3.0	355
3.5	305
4.0	245
4.5	175
5.0	100
5.5	15

a) Utilice la velocidad promedio en el intervalo [1, 2] para estimar la velocidad de la bola en $t = 1.5$ segundos.

b) Elabore un diagrama de dispersión de los datos.

c) Encuentre el modelo cuadrático de regresión para los datos.

d) Use NDER del modelo en la parte **c)** para estimar la velocidad de la bola en $t = 1.5$ segundos.

e) Use el modelo para estimar qué tan rápido va la bola cuando toca el suelo.

24. Estimación de la tasa promedio de cambio a partir de los datos La tabla 10.9 proporciona los datos del producto interno bruto de Estados Unidos en miles de millones de dólares, de 1990 a 2003.



Tabla 10.9 Datos del Producto Interno Bruto de Estados Unidos

Año	Cantidad (miles de millones de dólares)
1990	5803.1
1995	7397.7
1997	8304.3
1998	8747.0
1999	9268.4
2000	9817.0
2001	10,100.8
2002	10,480.8
2003	10,987.9

Fuente: Resumen estadístico de los Estados Unidos: 2004 – 2005.

a) Determine la tasa de cambio promedio del promedio interno bruto de 1997 a 1998 y de 2001 a 2002.

b) Determine un modelo cuadrático de regresión de los datos de la tabla 10.9 y sobrepóngalo en su gráfica del diagrama de dispersión de los datos. Haga $x = 0$ para 1990, $x = 1$ para 1991 y así sucesivamente.

c) Use el modelo de la parte **b)** y la NDER de su calculadora para estimar la tasa de cambio del producto interno bruto en 1997 y en 2001.

d) Escriba para aprender Use el modelo en la parte **b)** para predecir el producto interno bruto en 2007. ¿Esto es razonable? ¿Por qué sí o por qué no?

25. Estimación de la velocidad Refiérase a los datos del ejercicio 23.

a) Calcule la velocidad promedio, $\triangle y/\triangle x$, en cada subintervalo de longitud 0.5. Elabore una tabla que muestre los puntos medios de los subintervalos en una columna y la velocidad promedio en la segunda columna.

b) Haga un diagrama de dispersión que muestre los números de la segunda columna como una función de los números de la primera columna y determine el modelo de regresión lineal para modelar los datos.

c) Utilice el modelo de regresión lineal de la parte **b)** para determinar la velocidad de la bola en $t = 1.5$ segundos y compare sus resultados con los valores hallados en el ejercicio 23 d).

26. Aproximación de la tasa de cambio Consulte los datos del ejercicio 24.

a) Calcule la velocidad promedio, $\triangle y/\triangle x$, en cada subintervalo. Elabore una tabla que muestre los puntos medios de los subintervalos en una columna y las tasas de cambio promedio en la segunda columna.

b) Elabore un diagrama de dispersión que muestre los números de la segunda columna como una función de los números de la primera columna y determine el modelo de regresión lineal para modelar los datos.

c) Utilice el modelo de regresión lineal de la parte **b)** para aproximar la tasa de cambio en 1997 y en 2001, y compare sus resultados con los valores hallados en el ejercicio 24 **c)**.

27. Estimación de la distancia Se arroja una piedra desde un acantilado; su velocidad (en pies por segundo) en intervalos regulares de 0.5 segundo se muestra en la tabla 10.10. Estime la distancia que la piedra recorre de $t = 0$ a $t = 2.5$.

Tabla 10.10 Velocidad de la piedra

Tiempo (seg)	Velocidad (pies/seg)
0	0
0.5	16
1	32
1.5	48
2	64
2.5	80

28. Estimación de la distancia La tabla 10.11 muestra la velocidad de un objeto en movimiento en metros por segundo medido en intervalos regulares de 0.2 segundos. Estime la distancia recorrida por el cuerpo de $t = 0$ a $t = 1.6$.

Tabla 10.11 Velocidad del objeto

Tiempo (segundos)	Velocidad (m/s)
0	1.20
0.2	0.98
0.4	0.72
0.6	0.50
0.8	0.34
1.0	0.30
1.2	0.44
1.4	0.79
1.6	1.40

29. Escriba para aprender Analice el siguiente programa, el cual genera una aproximación MARI (LRAM, en inglés) para la función introducida en $Y1$ en la calculadora. Después escriba un párrafo pequeño en el que se explique cómo funciona.

```
PROGRAM:LRAM
:Input "A",A
:Input "B",B
:Input "N",N
:sum(seq(((B–A)/
N)Y1(A+K((B–A)/N
)),K,0,N–1))→C
:Disp "AREA =",C
```

30. Escriba para aprender Analice el siguiente programa, el cual genera una aproximación MARD (RRAM, en inglés) para la función introducida en $Y1$ en la calculadora. Después escriba un párrafo pequeño en el que se explique cómo funciona.

```
PROGRAM:RRAM
:Input "A",A
:Input "B",B
:Input "N",N
:sum(seq(((B–A)/
N)Y1(A+K((B–A)/N
)),K,1,N))→C
:Disp "AREA =",C
```

En los ejercicios del 31 al 42 complete lo siguiente para los intervalos $[a, b]$ indicados.

a) Verifique que la función dada es no negativa.

b) Utilice la calculadora para determinar la MARI, MARD y las aproximaciones promedio del área bajo la gráfica de la función, desde $x = a$ hasta $x = b$, con aproximación de 10, 20, 50 y 100 rectángulos (tal vez desee utilizar los programas de los ejercicios 29 y 30).

c) Compare el área promedio estimada en la parte **a)** utilizando la aproximación de 100 rectángulos con la estimación del área NINT de la calculadora, si su calculadora tiene esa función.

31. $f(x) = x^2 - x + 1$; $[0, 4]$

32. $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$; $[0, 6]$

33. $f(x) = x^2 - 2x + 1$; $[0, 4]$

34. $f(x) = x^2 + x + 5$; $[0, 6]$

35. $f(x) = x^2 + x + 5$; $[2, 6]$

36. $f(x) = x^3 + 1$; $[1, 5]$

37. $f(x) = \sqrt{x + 2}$; $[0, 4]$

38. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $[3, 6]$

39. $f(x) = \cos x$; $[0, \pi/2]$

40. $f(x) = x \cos x$; $[0, \pi/2]$

41. $f(x) = xe^{-x}$; $[0, 2]$

42. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; $[3, 5]$

Preguntas de examen estandarizado

43. Verdadero o falso El algoritmo NDER de la derivada numérica siempre utiliza el mismo valor de $\triangle x$ (o h) para completar sus cálculos. Justifique su respuesta.

44. Verdadero o falso El algoritmo de la integral numérica siempre utiliza el mismo valor de $\triangle x$ para completar sus cálculos. Justifique su respuesta.

En los ejercicios del 45 al 48 elija la respuesta correcta. No utilice su calculadora.

45. Opción múltiple Estimación del área bajo la curva ¿Cuál de las siguientes aproximaciones normalmente produce la estimación más precisa del área bajo la curva?

A) NDER **B)** NINT

C) MARI, 10 rectángulos **D)** MARD, 25 rectángulos

E) MARI, 60 rectángulos

46. Opción múltiple Estimación del valor de la derivada Dada una función continua f, ¿cuál de las siguientes expresiones normalmente produce la estimación más precisa de $f'(a)$?

A) $\dfrac{f(a + 0.05) - f(a - 0.05)}{0.05}$

B) $\dfrac{f(a + 0.05) - f(a - 0.05)}{0.1}$

C) $\dfrac{f(a + 0.01) - f(a)}{0.01}$

D) $\dfrac{f(a + 0.01) - f(a - 0.01)}{0.01}$

E) $\dfrac{f(a + 0.01) - f(a - 0.01)}{0.02}$

47. Opción múltiple Uso de la integral numérica ¿Cuál de los siguientes valores *no puede* estimarse utilizando una integral numérica?

A) El área bajo la curva que representa alguna función $f(x)$.

B) La distancia recorrida, cuando se conoce la función de velocidad.

C) La velocidad instantánea de un objeto, cuando se conoce su función de posición.

D) El cambio de la población de una ciudad en un periodo de 10 años, cuando se conoce la función de la tasa de cambio.

E) El cambio en la estatura de un niño en un periodo de 4 años, cuando se conoce la función de la tasa de cambio.

48. Opción múltiple Uso de la derivada numérica ¿Cuál de los siguientes valores *no puede* estimarse utilizando una derivada numérica?

A) La velocidad instantánea de un objeto, cuando se conoce la función de posición.

B) La pendiente de una curva que representa a alguna función $g(x)$.

C) La tasa de crecimiento de la población de una ciudad, cuando se sabe que la población es una función de tiempo.

D) El área bajo la curva que representa alguna función $f(x)$.

E) La tasa de cambio de la altitud de un aeroplano, cuando se sabe que la altitud es una función de tiempo.

Exploraciones

49. Sea $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = x^3 + 1$.

a) Calcule la derivada de f.

b) Calcule la derivada de g.

c) Utilizando $x = 2$ y $h = 0.001$, calcule el cociente de la diferencia estándar

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

y el cociente de la diferencia simétrica

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}.$$

d) Utilizando $x = 2$ y $h = 0.001$, compare las aproximaciones a $f'(2)$ de la parte **c**. ¿Cuál es la mejor aproximación?

e) Repita las partes **c** y **d** para g.

50. ¿Cuándo son iguales las áreas y las derivadas? Sea $f(x) = 1 + e^x$.

a) Elabore la gráfica de f para $0 \leq x \leq 1$.

b) Use NDER de su calculadora para obtener la derivada de f en 1.

c) Use NINT de su calculadora para obtener el área bajo f desde $x = 0$ hasta $x = 1$ y compárela con la respuesta de la parte b).

d) Actividad en equipo ¿Cuáles piensa que son las respuestas exactas de las partes **b)** y **c)**?

51. Error de calculadora Muchas calculadoras reportan que NDER de $f(x) = |x|$ en $x = 0$ es igual a 0. Explique por qué es incorrecto. Explique por qué se comete este error.

52. Error de graficadora Grafique la función $f(x) = |x|/x$ en la ventana $[-5, 5]$ por $[-3, 3]$ y explique porque $f'(0)$ no existe. Determine el valor de NDER $f(0)$ en su calculadora y explique por qué da una respuesta incorrecta.

Ampliación de las ideas

53. Actividad en equipo Obtención del área total El **área total** acotada por la gráfica de la función $y = f(x)$ y el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ es el área debajo de la gráfica $y = |f(x)|$ desde $x = a$ hasta $x = b$.

a) Determine el área total acotada por la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$ y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$.

b) Determine el área total acotada por la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 5$.

54. Escriba para aprender Si una región *no está acotada* en un intervalo $[a, b]$ puede tener un área *finita*. Use su conocimiento de límites en infinito para explicar por qué esto puede suceder.

55. Escriba para aprender Sean f y g dos funciones continuas con $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Construya un límite de las definiciones del área de la región entre los curvas. Explique cómo calcular el área si el área bajo ambas curvas ya se conoce.

56. Área como una función Considere la función $f(t) = 2t$.

a) Use NINT en su calculadora para obtener $A(x)$ en donde A es el área bajo la gráfica de f desde $t = 0$ hasta $t = x$ para $x = 0.25, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ y 3.

b) Elabore una tabla de pares $(x, A(x))$ para los valores de x dados en la parte **a)** y grafíquelos usando papel para graficar. Una los puntos encontrados con una curva suave.

c) Use una ecuación cuadrática de regresión para modelar los datos de la parte **b)** y sobreponga su gráfica en un diagrama de dispersión de los datos.

d) Haga conjeturas acerca del valor exacto de $A(x)$ para cualquier x mayor que cero.

e) Obtenga la derivada de $A(x)$ hallada en la parte **d)**. Registre cualquier observación.

57. Área como una función Considere la función $f(t) = 3t^2$.

a) Use NINT en su calculadora para obtener $A(x)$ donde A es el área bajo la gráfica de f desde $t = 0$ hasta $t = x$ para $x = 0.25, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ y 3.

b) Elabore una tabla de las parejas $(x, A(x))$, para los valores de x dados en la parte **a)** y grafíquelos usando papel para graficar. Una los puntos encontrados con una curva suave.

c) Use una ecuación cúbica de regresión para modelar los datos de la parte **b)** y sobreponga su gráfica en un diagrama de dispersión de los datos.

d) Haga conjeturas acerca del valor exacto de $A(x)$ para cualquier x más grande que cero.

e) Obtenga la derivada de $A(x)$ hallada en la parte **d)**. Registre cualquier observación.

58. Actividad en equipo Con base en los ejercicios 56 y 57, comente cómo pueden relacionarse las derivadas (pendiente de una función) y las integrales (funciones de área).

Ideas Clave DEL CAPÍTULO 10

PROPIEDADES, TEOREMAS Y FÓRMULAS

Límite en *a* (definición informal) 794
Tasa promedio de cambio 796
Derivada en un punto 797
Derivada en un punto (más fácil en términos de cálculo) 797
Derivada 798
Límite en el infinito (definición informal) 805
Integral definida 808
Propiedades de los límites 815
Límites en infinito (definición informal) 819
Cociente de la diferencia simétrica 826
Derivada numérica de *f* en *a* 826
Derivada numérica de *f* 826
Integral numérica 827

PROCEDIMIENTOS

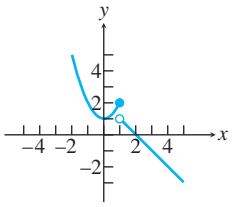
Cálculo de la derivada a partir de datos 829

CAPÍTULO 10 Ejercicios de repaso

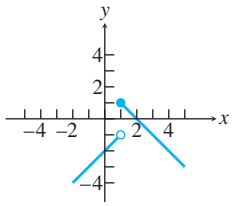
La colección de ejercicios marcados en azul podría utilizarse como un examen del capítulo.

En los ejercicios del 1 al 4 utilice la gráfica de la función $y = f(x)$ para determinar **a)** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ y **b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$.

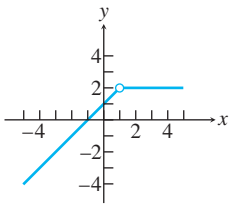
1.



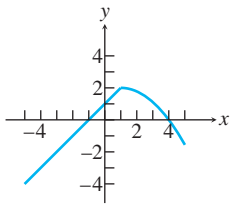
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 al 10 obtenga el límite en el punto indicado, si existe. Respalde su respuesta con una gráfica.

5. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}, x = -1$

6. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}, x = 0$

7. $f(x) = \dfrac{x^2-3x-10}{x+2}, x = -2$

8. $f(x) = |x-1|, x = 1$

9. $f(x) = 2\tan^{-1} x, x = 0$

10. $f(x) = \dfrac{2}{1-2^x}, x = 0$

En los ejercicios del 11 al 14 obtenga el límite. Respalde su respuesta con una tabla apropiada.

11. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

12. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+5}{x-3}$

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2-x^2}{x}$

14. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x-2}$

En los ejercicios 15 al 18 obtenga el límite.

15. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$

16. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x^2-4}$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1/(2+x) - 1/2}{x}$

18. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2+x)^3 - 8}{x}$

En los ejercicios 19 y 20 determine las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.

19. $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2+6x+5}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-4}$

En los ejercicios del 21 al 26 obtenga algebraicamente el límite.

21. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{3-x}$

22. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1/(-3+x) + 1/3}{x}$

24. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\tan(3x-6)}{x-2}$

25. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

26. $\lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)^2}{x-3}$

En los ejercicios 27 y 28 establezca una fórmula para la extensión continua de la función (consulte el ejercicio 90, sección 10.3).

27. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x-5}$

En los ejercicios 29 y 30 utilice la definición de límite para determinar la derivada de la función en el punto específico, si existe. Justifique numéricamente su respuesta con una estimación NDER con su calculadora.

29. $f(x) = 1 - x - 2x^2$ en $x = 2$

30. $f(x) = (x + 3)^3$ en $x = 2$

En los ejercicios 31 y 32 determine **a)** la tasa promedio de cambio de la función en el intervalo [3, 3.01] y **b)** la tasa instantánea de cambio en $x = 3$.

31. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **32.** $f(x) = \dfrac{3}{x + 2}$

En los ejercicios 33 y 34 determine **a)** la pendiente y **b)** una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto indicado.

33. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ en $x = 1$

34. $f(x) = \sqrt{x - 4}$ en $x = 7$

En lo ejercicios 37 y 38 obtenga la derivada de f.

35. $f(x) = 5x^2 + 7x - 1$ **36.** $f(x) = 2 - 8x + 3x^2$

En los ejercicios 37 y 38 complete lo siguiente para el intervalo indicado $[a, b]$.

a) Verifique que la función dada es no negativa.

b) Use una calculadora para determinar MARI, MARD y las aproximaciones promedio del área bajo la gráfica de la función desde $x = a$ hasta $x = b$ con una aproximación de 50 rectángulos.

37. $f(x) = (x - 5)^2$; [0, 4]

38. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; [1, 5]

39. Precios de la gasolina El precio anual promedio al menudeo para la gasolina regular sin plomo en Estados unidos en el periodo de 1990 a 2003 se muestra en la tabla 10.12.



Tabla 10.12 Precio promedio de la gasolina regular sin plomo

Año	Precio (centavos por galón)
1990	116.4
1991	114.0
1992	112.7
1993	110.8
1994	111.2
1995	114.7
1996	123.1
1997	123.4
1998	105.9
1999	116.5
2000	151.0
2001	146.1
2002	135.8
2003	159.1

Fuente: Administración de Información de Energía, Departamento de Energía de Estados Unidos, The World Almanac and Book of Facts, 2005.

a) Elabore un diagrama de dispersión de los datos de la tabla 10.12. Utilice $x = 0$ para 1990, $x = 1$ para 1991 y así sucesivamente.

b) Determine la tasa promedio de cambio de 1990 a 1991 y de 1997 a 1998.

c) ¿De qué año al siguiente consecutivo se encuentra la tasa promedio de incremento más grande?

d) ¿De qué año al siguiente consecutivo se encuentra la tasa promedio de disminución más grande?

e) Obtenga el modelo de regresión lineal de los datos y colóquelo sobre el diagrama de dispersión.

f) Actividad en equipo Determine el modelo cúbico de regresión de los datos y colóquelo sobre el diagrama de dispersión. Analicen los argumentos a favor y en contra de si es un buen modelo para los datos del precio de la gasolina. Compare el modelo cúbico con el modelo lineal. ¿Cuál es el mejor según su equipo? ¿Por qué?

g) Escriba para aprender Utilice el modelo cúbico de regresión, hallado en la parte f), y la NDER para determinar la tasa instantánea de cambio en 1997, 1998, 1999 y 2000. ¿El modelo cúbico podría dar alguna información engañosa?

h) Escriba para aprender Utilice el modelo cúbico de regresión, hallado en la parte f), para predecir el precio promedio del galón de la gasolina regular sin plomo en 2007. ¿Considera que es una estimación razonable? Explique su razonamiento.

40. Una conexión interesante

Sea $A(x) = \text{NINT}(\cos t, t, 0, x)$

a) Elabore un diagrama de dispersión de las parejas $(x, A(x))$ para $x = 0, 0.4, 0.8, 0.12, \ldots, 6.0, 6.4$.

b) Obtenga una función que parezca modelar los datos de la parte a) y colóquela sobre su diagrama de dispersión de los datos.

c) Asumiendo que la función hallada en la parte b) concuerda con $A(x)$ para todos los valores de x, ¿cuál es la derivada de $A(x)$?

d) Escriba para aprender Describa las características que parece tener la derivada de NINT $(f(t), t, 0, x)$.

CAPÍTULO 10 Proyecto

Estimación de las tasas de crecimiento de la población

Las Vegas, Nevada y las ciudades que la rodean constituyen una de las áreas de mayor velocidad de crecimiento en los Estados Unidos. Clark County, el condado en que Las Vegas se localiza, ha crecido en más de un millón de personas en las pasadas tres décadas. Los datos de la siguiente tabla (obtenida de la página web http://cber.unlv.edu/pop.html) resumen el crecimiento desde 1970 a 2004.

Año	Población
1970	277,230
1980	463,087
1990	770,280
1995	1,055,435
1999	1,327,145
2000	1,394,440
2001	1,485,855
2002	1,549,657
2003	1,620,748
2004	1,715,337

Exploraciones

1. Introduzca los datos de la tabla anterior en su calculadora graficadora o en su computadora. (Haga que $t = 0$ represente a 1970). Haga un diagrama de dispersión de los datos.
2. Obtenga las tasas promedio de crecimiento de la población de Clark County de 1970 a 2004, de 1980 a 2004, de 1990 a 2004 y de 1995 a 2004.
3. Utilice su calculadora o su computadora para determinar una ecuación exponencial de regresión para modelar el conjunto de datos de la población (consulte el instructivo de la calculadora para saber cómo hacer esto).
4. Utilice el modelo exponencial que acaba de obtener en la pregunta 3 y la característica NDER de su calculadora/computadora para determinar la tasa instantánea de crecimiento de la población en 2004. ¿Cuál de las tasas promedio de crecimiento que obtuvo en la pregunta 2 es más parecida a la tasa instantánea de crecimiento? Explique por qué esto tiene sentido.
5. Use el modelo exponencial de regresión que obtuvo en la pregunta 3 para predecir el tamaño de la población de Clark County en los años, 2010, 2020 y 2030. Compare sus predicciones con las de la tabla que se muestra a continuación, obtenida de la página web www.co.clark.nv.us. ¿Cuál de las predicciones parece ser más razonable? Explique.

Año	Población
2010	2,089,102
2020	2,578,221
2030	2,941,398

Fuente: http://www.co.clark.nv.us/comprehensive_planning/Advanced/Demographics/Population_Forecasts/Pop_Forecast_2002to2035.htm.

Panorama general de los apéndices

Los apéndices contienen un repaso de algunas habilidades algebraicas básicas (antes de leer este apéndice debe leer la sección R.1). En ellos se presentan radicales y expresiones racionales, y se simplifican algebraicamente expresiones con radicales. Además, se llevan a cabo sumas, restas y multiplicaciones de polinomios, además de factorizaciones de polinomios sencillos mediante diferentes técnicas. Estas técnicas de factorización se utilizan para sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones fraccionarias.

A.1 Radicales y exponentes racionales

Aprenderá acerca de...

- Los radicales
- La simplificación de expresiones con radicales
- La racionalización del denominador
- Exponentes racionales

. . . porque

Necesita repasar estas habilidades algebraicas básicas, en caso de que no las recuerde.

Radicales

Si $b^2 = a$, entonces b es una **raíz cuadrada** de a. Por ejemplo, 2 y -2 son raíces cuadradas de 4, ya que $2^2 = (-2)^2 = 4$. En forma análoga, b es una **raíz cúbica** de a si $b^3 = a$. Por ejemplo, 2 es una raíz cúbica de 8 ya que $2^3 = 8$.

DEFINICIÓN raíz n-ésima real de un número real

Sean n un entero mayor que 1, y a y b números reales.

1. Si $b^n = a$, entonces b es una **raíz *n*-ésima** de a.

2. Si a tiene una raíz n-ésima, la **raíz *n*-ésima principal** de a es la raíz n-ésima que tiene el mismo signo que a.

La raíz n-ésima principal de a se expresa mediante la **expresión radical** $\sqrt[n]{a}$. El entero positivo n es el **índice** del radical y a es el **radicando**.

Todo número real tiene exactamente una raíz real n-ésima siempre que n sea impar. Por ejemplo, 2 es la única raíz cúbica real de 8. Cuando n es par, los números reales positivos tienen dos *raíces n-ésimas* reales; los números negativos no tienen raíces *n-ésimas reales*. Por ejemplo, las raíces cuartas reales de 16 son ± 2 y -16 no tiene raíces cuartas reales. La raíz cuarta *principal* de 16 es 2.

Cuando $n = 2$ se utiliza una notación especial para raíces. Omitimos el índice y escribimos $\sqrt{a}$, en lugar de $\sqrt[2]{a}$. Si a es un número real positivo y n es un entero par positivo, sus dos raíces n-ésimas se expresan mediante $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$.

EJEMPLO 1 Determinación de raíces *n*-ésimas principales

a) $\sqrt{36} = 6$ ya que $6^2 = 36$.

b) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$ ya que $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

c) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$ ya que $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$.

d) $\sqrt[4]{-625}$ no es un número real, ya que el índice 4 es par y el radicando -625 es negativo (*no* existen números reales cuya cuarta potencia sea negativa).

Ahora resuelva los ejercicios 7 y 9.

LAS RAÍCES *n*-ÉSIMAS PRINCIPALES Y LAS CALCULADORAS

La mayor parte de las calculadoras tienen una tecla para la raíz n-ésima principal. Utilice esta función de su calculadora para comprobar los cálculos del ejemplo 1.

A continuación se listan algunas propiedades de los radicales junto con ejemplos que ayudan a entender su significado.

Propiedades de los radicales

Sean u y v números reales, variables o expresiones algebraicas, y m y n enteros positivos mayores que 1. Suponemos que todas las raíces son números reales y todos los denominadores no son cero.

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$	$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}}$	$\dfrac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\dfrac{96}{6}} = \sqrt[4]{16} = 2$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[m \cdot n]{u}$	$\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2 \cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$
4. $(\sqrt[n]{u})^n = u$	$(\sqrt[4]{5})^4 = 5$
5. $\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$	$\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
6. $\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} \lvert u \rvert & n \text{ par} \\ u & n \text{ impar} \end{cases}$	$\sqrt{(-6)^2} = \lvert -6 \rvert = 6$ $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$

CUIDADO

Sin la restricción que precede a esta lista, la propiedad 5 necesitaría atención especial. Por ejemplo,

$$\sqrt{(-3)^2} \neq (\sqrt{-3})^2$$

ya que $\sqrt{-3}$ en la derecha no es un número real.

Simplificación de expresiones con radicales

Muchas técnicas de simplificación para raíces de números reales se han vuelto obsoletas debido a las calculadoras. Por ejemplo, cuando al determinar la forma decimal de $1/\sqrt{2}$, alguna vez era muy común cambiar primero la fracción, de modo que el radical estuviese en el numerador:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Con papel y lápiz, era más sencillo dividir una aproximación decimal para $\sqrt{2}$ entre 2 que dividir entre 1 ese decimal. Ahora, cualquiera de las dos formas se calcula rápidamente con una calculadora. Sin embargo, estas técnicas aún son válidas para radicales que incluyen expresiones algebraicas y para cálculos numéricos, cuando se requieren respuestas exactas. El ejemplo 2 ilustra la técnica de *eliminar factores de los radicandos*.

PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES

Verifique las propiedades de los exponentes (página 8, sección R.1), para ver por qué

$$16 = 2^4 \text{ y } 9x^4 = (3x^2)^2.$$

EJEMPLO 2 Eliminación de factores de los radicandos

a) $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{16 \cdot 5}$ Determinar el mayor factor que sea cuarta potencia.

$= \sqrt[4]{2^4 \cdot 5}$ $16 = 2^4$

$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{5}$ Propiedad 1.

$= 2\sqrt[4]{5}$ Propiedad 6.

b) $\sqrt{18x^5} = \sqrt{9x^4 \cdot 2x}$ Determinar el mayor factor cuadrático.

$= \sqrt{(3x^2)^2 \cdot 2x}$ $9x^4 = (3x^2)^2$

$= 3x^2\sqrt{2x}$ Propiedades 1 y 6

continúa

c) $\sqrt[4]{x^4y^4} = \sqrt[4]{(xy)^4}$ Determinar el mayor factor que sea cuarta potencia.

$= |xy|$ Propiedad 6.

d) $\sqrt[3]{-24y^6} = \sqrt[3]{(-2y^2)^3 \cdot 3}$ Determinar el mayor factor cúbico.

$= -2y^2\sqrt[3]{3}$ Propiedades 1 y 6.

Ahora resuelva los ejercicios 29 y 33.

Racionalización del denominador

El proceso de rescribir fracciones que contienen radicales de modo que el denominador esté sin radicales es la **racionalización del denominador**. Cuando el denominador tiene la forma $\sqrt[n]{u^k}$, al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{u^{n-k}}$ y mediante la propiedad 6 se eliminará el radical del denominador ya que

$$\sqrt[n]{u^k} \cdot \sqrt[n]{u^{n-k}} = \sqrt[n]{u^{k+n-k}} = \sqrt[n]{u^n}.$$

El ejemplo 3 ilustra el proceso.

EJEMPLO 3 Racionalización del denominador

a) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^4}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{|x|}$

c) $\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{\sqrt[5]{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{y}$

Ahora resuelva el ejercicio 37.

Exponentes racionales

Sabemos cómo manejar expresiones exponenciales con exponentes enteros (consulte la sección R.1). Por ejemplo $x^3 \cdot x^4 = x^7$, $(x^3)^2 = x^6$, $x^5/x^2 = x^3$, $x^{-2} = 1/x^2$, y así sucesivamente. Pero los exponentes también pueden ser números racionales. ¿Cómo debemos definir $x^{1/2}$? Si suponemos que para los exponentes racionales se aplican las mismas reglas que para los números enteros, podemos obtener una pista. Por ejemplo, queremos que

$$x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^1.$$

Esta ecuación sugiere que $x^{1/2} = \sqrt{x}$. En general, tenemos la definición siguiente:

DEFINICIÓN Exponentes racionales

Sea u un número real, variable o expresión algebraica, y n un entero mayor a uno. Entonces

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}.$$

Si m es un entero positivo, m/n está en la forma reducida, y todas las raíces son números reales, entonces

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m \quad \text{y} \quad u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}.$$

El numerador de un exponente racional es la *potencia* a la cual se eleva la base, y el denominador es la *raíz* que se tomará. La fracción m/n necesita estar en la forma reducida, ya que, por ejemplo,

$$u^{2/3} = (\sqrt[3]{u})^2$$

está definida para todos los números reales u (todo número real tiene una raíz cúbica), pero

$$u^{4/6} = (\sqrt[6]{u})^4$$

sólo está definida para $u \geq 0$ (sólo los números reales no negativos tienen raíces sextas).

EJEMPLO 4 Conversión de radicales a exponenciales y viceversa

a) $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{3/2}$

b) $3x\sqrt[5]{x^2} = 3x \cdot x^{2/5} = 3x^{7/5}$

c) $x^{2/3}y^{1/3} = (x^2y)^{1/3} = \sqrt[3]{x^2y}$

d) $z^{-3/2} = \dfrac{1}{z^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{z^3}}$

Ahora resuelva los ejercicios 43 y 47.

SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Si en el ejemplo 4 d) usted también quiere que la forma radical sea simplificada, entonces continúe como sigue:

$$\frac{1}{\sqrt{z^3}} = \frac{1}{\sqrt{z^3}} \cdot \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{z}}{z^2}$$

Una expresión que incluye potencias está *simplificada* si cada factor sólo aparece una vez y todos los exponentes son positivos. El ejemplo 5 lo ilustra.

EJEMPLO 5 Simplificación de expresiones exponenciales

a) $(x^2y^9)^{1/3}(xy^2) = (x^{2/3}y^3)(xy^2) = x^{5/3}y^5$

b) $\left(\dfrac{3x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{2x^{-1/2}}{y^{2/5}}\right) = \dfrac{6x^{1/6}}{y^{9/10}}$

Ahora resuelva el ejercicio 61.

El ejemplo 6 sugiere cómo simplificar una suma o diferencia de radicales.

EJEMPLO 6 Reducción de radicales

a) $2\sqrt{80} - \sqrt{125} = 2\sqrt{16 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5}$ Determinar los mayores factores cuadráticos.

$= 8\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$ Sacar los factores de los radicandos.

$= 3\sqrt{5}$ Propiedad distributiva.

b) $\sqrt{4x^2y} - \sqrt{y^3} = \sqrt{(2x)^2y} - \sqrt{y^2y}$ Determinar los mayores factores cuadráticos.

$= 2|x|\sqrt{y} - |y|\sqrt{y}$ Sacar los factores de los radicandos.

$= (2|x| - |y|)\sqrt{y}$ Propiedad distributiva

Ahora resuelva el ejercicio 71.

A continuación se presenta un sumario de los procedimientos que utilizamos para *simplificar expresiones* que incluyen radicales.

Simplificación de expresiones con radicales

1. Sacar los factores del radicando (consulte el ejemplo 2).
2. Eliminar radicales de los denominadores y denominadores de los radicandos (consulte el ejemplo 3).
3. Si es posible, reducir sumas y diferencias de radicales (consulte el ejemplo 6).

EJERCICIOS DEL APÉNDICE A.1

En los ejercicios del 1 al 6 determine las raíces reales indicadas.

1. Raíces cuadradas de 81
2. Raíces cuartas de 81
3. Raíces cúbicas de 64
4. Raíces quintas de 243
5. Raíces cuadradas de 16/9
6. Raíces cúbicas de $-27/8$

En los ejercicios del 7 al 12, evalúe la expresión sin utilizar una calculadora.

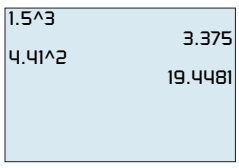
7. $\sqrt{144}$ **8.** $\sqrt{-16}$ **9.** $\sqrt[3]{-216}$

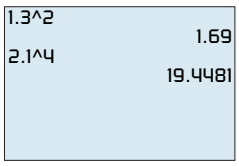
10. $\sqrt[3]{216}$ **11.** $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$ **12.** $\sqrt{\frac{64}{25}}$

En los ejercicios del 13 al 22 utilice una calculadora para evaluar la expresión.

13. $\sqrt[4]{256}$
14. $\sqrt[5]{3125}$
15. $\sqrt[3]{15.625}$
16. $\sqrt{12.25}$
17. $81^{3/2}$
18. $16^{5/4}$
19. $32^{-2/5}$
20. $27^{-4/3}$
21. $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-1/3}$
22. $\left(-\frac{125}{64}\right)^{-1/3}$

En los ejercicios del 23 al 26 utilice la información de las siguientes pantallas de la graficadora para evaluar la expresión.





23. $\sqrt{1.69}$
24. $\sqrt{19.4481}$
25. $\sqrt[4]{19.4481}$
26. $\sqrt[3]{3.375}$

En los ejercicios del 27 al 36 simplifique sacando factores del radicando.

27. $\sqrt{288}$
28. $\sqrt[3]{500}$
29. $\sqrt[3]{-250}$
30. $\sqrt[4]{192}$
31. $\sqrt{2x^3y^4}$
32. $\sqrt[3]{-27x^3y^6}$
33. $\sqrt[4]{3x^8y^6}$
34. $\sqrt[3]{8x^6y^4}$
35. $\sqrt[5]{96x^{10}}$
36. $\sqrt{108x^4y^9}$

En los ejercicios del 37 al 42 racionalice el denominador.

37. $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$
38. $\frac{1}{\sqrt{5}}$
39. $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$
40. $\frac{2}{\sqrt[4]{y}}$
41. $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}$
42. $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}}$

En los ejercicios del 43 al 46 convierta a forma exponencial.

43. $\sqrt[3]{(a+2b)^2}$
44. $\sqrt[5]{x^2y^3}$
45. $2x\sqrt[3]{x^2y}$
46. $xy\sqrt[4]{xy^3}$

En los ejercicios del 47 al 50 convierta a forma radical.

47. $a^{3/4}b^{1/4}$
48. $x^{2/3}y^{1/3}$
49. $x^{-5/3}$
50. $(xy)^{-3/4}$

En los ejercicios del 51 al 56 escriba mediante un solo radical.

51. $\sqrt{\sqrt{2x}}$
52. $\sqrt{\sqrt[3]{3x^2}}$
53. $\sqrt[4]{\sqrt{xy}}$
54. $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$
55. $\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}$
56. $\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}$

En los ejercicios del 57 al 64 simplifique la expresión exponencial.

57. $\dfrac{a^{3/5}a^{1/3}}{a^{3/2}}$

58. $(x^2y^4)^{1/2}$

59. $(a^{5/3}b^{3/4})(3a^{1/3}b^{5/4})$

60. $\left(\dfrac{x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)^6$

61. $\left(\dfrac{-8x^6}{y^{-3}}\right)^{2/3}$

62. $\dfrac{(p^2q^4)^{1/2}}{(27q^3p^6)^{1/3}}$

63. $\dfrac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^2)^{-1/2}}$

64. $\left(\dfrac{2x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)\left(\dfrac{3x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)$

En los ejercicios del 65 al 74 simplifique la expresión radical.

65. $\sqrt{9x^{-6}y^4}$

66. $\sqrt{16y^8z^{-2}}$

67. $\sqrt[4]{\dfrac{3x^8\,y^2}{8x^2}}$

68. $\sqrt[5]{\dfrac{4x^6y}{9x^3}}$

69. $\sqrt[3]{\dfrac{4\,x^2}{y^{\,2}}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{y}}$

70. $\sqrt[5]{9ab^6} \cdot \sqrt[5]{27a^2b^{-1}}$

71. $3\sqrt{48} - 2\sqrt{108}$

72. $2\sqrt{175} - 4\sqrt{28}$

73. $\sqrt{x^3} - \sqrt{4xy^2}$

74. $\sqrt{18x^2y} + \sqrt{2y^3}$

En los ejercicios del 75 al 82 reemplace $\bigcirc$, con $<$, $=$, o $>$ para hacer una proposición verdadera.

75. $\sqrt{2+6} \bigcirc \sqrt{2} + \sqrt{6}$

76. $\sqrt{4} + \sqrt{9} \bigcirc \sqrt{4+9}$

77. $(3^{-2})^{-1/2} \bigcirc 3$

78. $(2^{-3})^{1/3} \bigcirc 2$

79. $\sqrt[4]{(-2)^4} \bigcirc -2$

80. $\sqrt[3]{(-2)^3} \bigcirc -2$

81. $2^{2/3} \bigcirc 3^{3/4}$

82. $4^{-2/3} \bigcirc 3^{-3/4}$

83. El tiempo t (en segundos) que tarda un péndulo para completar un periodo es aproximadamente $t = 1.1\sqrt{L}$, donde L es la longitud (en pies) del péndulo. ¿Cuánto dura el periodo de un péndulo de longitud 10 pies?

84. El tiempo t (en segundos) que tarda una piedra en caer una distancia de d (metros), es aproximadamente $t = 0.45\sqrt{d}$. ¿Cuánto tarda una piedra en caer una distancia de 200 m?

85. Escriba para aprender Explique por qué $\sqrt[n]{a}$ y una raíz n-ésima real no necesariamente tienen el mismo valor.

A.2 Polinomios y factorización

Aprenderá acerca de...

- Cómo sumar, restar y multiplicar polinomios
- Los productos especiales
- La factorización de polinomios mediante los productos especiales
- La factorización de trinomios
- La factorización por agrupación

. . . porque

Usted necesita revisar estas habilidades básicas, en caso de que no las recuerde.

Cómo sumar, restar y multiplicar polinomios

Un **polinomio en x** es cualquier expresión que puede escribirse en la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo, y $a_n \pi 0$. Los números a_n, a_{n-1},..., a_1, a_0 son números reales denominados **coeficientes**. El **grado del polinomio** es n y el **coeficiente principal (líder)** es a_n. Los polinomios con uno, dos o tres términos son **monomios, binomios** o **trinomios**, respectivamente. Un polinomio escrito con potencias de x en *orden descendente* está en la **forma estándar**.

Para sumar o restar polinomios, sumamos o restamos *términos semejantes* mediante la propiedad distributiva. Los términos de los polinomios que tienen la misma variable, cada una elevada a la misma potencia, son **términos semejantes**.

EJEMPLO 1 Suma y resta de polinomios

a) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) + (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$

b) $(4x^2 + 3x - 4) - (2x^3 + x^2 - x + 2)$

SOLUCIÓN

a) Agrupamos los términos semejantes y luego los reducimos como sigue:

$$(2x^3 + x^3) + (-3x^2 + 2x^2) + (4x + (-5x)) + (-1 + 3)$$
$$= 3x^3 - x^2 - x + 2$$

b) Agrupamos términos semejantes y luego los reducimos como sigue:

$$(0 - 2x^3) + (4x^2 - x^2) + (3x - (-x)) + (-4 - 2)$$
$$= -2x^3 + 3x^2 + 4x - 6$$

Ahora resuelva los ejercicios 9 y 11.

Para **desarrollar el producto** de dos polinomios utilizamos la propiedad distributiva. A continuación se presenta el procedimiento cuando multiplicamos los binomios $3x + 2$ y $4x - 5$.

$$(3x + 2)(4x - 5)$$
$$= (3x + 2)\,4x + (3x + 2)(-5) \quad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$= (3x)(4x) + (2)(4x) - (3x)(5) - (2)(5) \quad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$= \underbrace{12x^2}_{\text{Producto de los Primeros términos.}} + \underbrace{8x}_{\text{Producto de los términos Internos.}} - \underbrace{15x}_{\text{Producto de los términos Externos.}} - \underbrace{10}_{\text{Producto de los ÚltimoS términos.}}$$

En el **método PIES** anterior para productos de binomios, los productos de los términos externos (E) e internos (I) son términos semejantes y pueden sumarse para obtener

$$(3x + 2)(4x - 5) = 12x^2 - 7x - 10.$$

La multiplicación de dos polinomios requiere de multiplicar cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio. Una forma conveniente de calcular un producto es acomodar los polinomios en la forma estándar uno encima del otro, de modo que sus términos estén alineados verticalmente, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Multiplicación en forma vertical de polinomios

Escriba $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)$ en forma estándar.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rl}
x^2 - 4x + 3 & \\
x^2 + 4x + 5 & \\
\hline
x^4 - 4x^3 + 3x^2 & = x^2(x^2 - 4x + 3) \\
\quad 4x^3 - 16x^2 + 12x & = 4x(x^2 - 4x + 3) \\
\quad\quad 5x^2 - 20x + 15 & = 5(x^2 - 4x + 3) \\
\hline
x^4 + 0x^3 - 8x^2 - 8x + 15 & \text{Sumar.}
\end{array}$$

Por tanto,

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5) = x^4 - 8x^2 - 8x + 15.$$

Ahora resuelva el ejercicio 33.

Productos especiales

Ciertos productos proporcionan patrones que son útiles cuando factorizamos polinomios. A continuación se proporciona una lista de algunos productos especiales de binomios.

Productos especiales de binomios

Sean u y v números reales, variables o expresiones algebraicas.

1. Producto de una suma y una diferencia:	$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$
2. Cuadrado de una suma:	$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$
3. Cuadrado de una diferencia:	$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$
4. Cubo de una suma:	$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$
5. Cubo de una diferencia:	$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$

EJEMPLO 3 Uso de los productos especiales

Desarrolle los productos.

a) $(3x + 8)(3x - 8) = (3x)^2 - 8^2$ Producto de una suma y una diferencia.

$= 9x^2 - 64$ Simplificar.

b) $(5y - 4)^2 = (5y)^2 - 2(5y)(4) + 4^2$ Cuadrado de una diferencia.

$= 25y^2 - 40y + 16$ Simplificar.

continúa

c) $(2x - 3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3y)$
$+ 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3$ Cubo de una diferencia.
$= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$ Simplificar.

Ahora resuelva los ejercicio 23, 25 y 27.

Factorización de polinomios mediante los productos especiales

Cuando escribimos un polinomio como un producto de dos o más **factores polinomiales**, estamos **factorizando un polinomio**. En este apéndice, a menos que se especifique lo contrario, factorizaremos polinomios en factores de menor grado y con coeficientes enteros. Un polinomio que no puede factorizarse usando coeficientes enteros es un **polinomio primo**.

Un polinomio está **completamente factorizado**, si está escrito como un producto de sus factores primos. Por ejemplo,

$$2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4)$$

y

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$$

están completamente factorizados (puede demostrarse que $x^2 + 1$ es primo). Sin embargo,

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9)$$

no está completamente factorizado, ya que $(x^2 - 9)$ *no* es primo. De hecho, $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ y

$$x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3)$$

está completamente factorizado.

El primer paso en la factorización de un polinomio es sacar factores comunes de sus términos utilizando la propiedad distributiva, como se ilustra en el ejemplo 4.

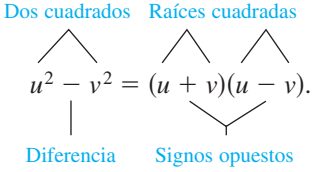
EJEMPLO 4 Cómo sacar factores comunes

a) $2x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(x^2 + x - 3)$ $2x$ es el factor común.

b) $u^3v + uv^3 = uv(u^2 + v^2)$ uv es el factor común.

Ahora resuelva el ejercicio 43.

Reconocer la forma desarrollada de los cinco productos especiales no ayudará a factorizarlos. La forma especial más fácil de identificar es la diferencia de dos cuadrados. Los dos factores binomiales tienen signos opuestos:



EJEMPLO 5 Factorización de la diferencia de dos cuadrados

a) $25x^2 - 36 = (5x)^2 - 6^2$ Diferencia de dos cuadrados.

$= (5x + 6)(5x - 6)$ Los factores son primos.

b) $4x^2 - (y + 3)^2 = (2x)^2 - (y + 3)^2$ Diferencia de dos cuadrados.

$= [2x + (y + 3)][2x - (y + 3)]$ Los factores son primos.

$= (2x + y + 3)(2x - y - 3)$ Simplificar.

Ahora resuelva el ejercicio 45.

Un trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado de un binomio y tiene una de las dos formas siguientes. El primero y el último términos son cuadrados de u y v, y el término de en medio es el doble del producto de y y v. Los signos de la operación antes del término de en medio y en el binomio factorizado son iguales.

Cuadrado perfecto (suma) Cuadrado perfecto (diferencia)

$u^2 + 2uv + v^2 = (u + v)^2$ $u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2$

Signos iguales Signos iguales

EJEMPLO 6 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

a) $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2(3x)(1) + 1^2$ $u = 3x$, $v = 1$

$= (3x + 1)^2$

b) $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2$ $u = 2x$, $v = 3y$

$= (2x - 3y)^2$

Ahora resuelva el ejercicio 49.

En la suma y diferencia de dos cubos, observe el patrón de los signos.

Signos iguales Signos iguales

$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$ $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$

Signos opuestos Signos opuestos

EJEMPLO 7 Factorización de la suma y la diferencia de dos cubos

a) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3$ Diferencia de dos cubos.

$= (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$ Los factores son primos.

b) $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3$ Suma de dos cubos.

$= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$ Los factores son primos.

Ahora resuelva el ejercicio 55.

Factorización de trinomios

La factorización del trinomio $ax^2 + bx + c$ en un producto de binomios con coeficientes enteros requiere la factorización de los enteros a y c:

$$ax^2 + bx + c = (\square x + \square)(\square x + \square)$$

Factores de a — Factores de c

Puesto que los factores enteros de a y c son finitos, podemos listar todos los posibles factores binomiales. Entonces iniciamos la verificación de cada posibilidad hasta que encontremos un par que funcione (si ninguna pareja funciona, entonces el trinomio es primo). El ejemplo 8 lo ilustra.

EJEMPLO 8 Factorización de un trinomio con coeficiente principal = 1

Factorice $x^2 + 5x - 14$.

SOLUCIÓN La única pareja de factores del coeficiente principal es 1 y 1. Las parejas de factores de 14 son 1 y 14 y 2 y 7. A continuación están las cuatro posibles factorizaciones del trinomio:

$$(x + 1)(x - 14) \qquad (x - 1)(x + 14)$$
$$(x + 2)(x - 7) \qquad (x - 2)(x + 7)$$

Si comprueba el término central de cada factorización encontrará que

$$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7).$$

Ahora resuelva el ejercicio 59.

Con práctica usted encontrará que, por lo regular, no es necesario listar todos los posibles factores. Con frecuencia puede probar mentalmente las posibilidades.

EJEMPLO 9 Factorización de un trinomio con coeficiente principal ≠ 1

Factorice $35x^2 - x - 12$.

SOLUCIÓN Los pares de factores del coeficiente principal son 1 y 35, y 5 y 7. Las parejas de factores de 12 son 1 y 12, 2 y 6 y 3 y 4. Las posibles factorizaciones deben ser de la forma

$$(x - *)(35x + ?), \qquad (x + *)(35x - ?),$$
$$(5x - *)(7x + ?), \qquad (5x + *)(7x - ?),$$

donde * y ? son uno de los pares de factores de 12. Puesto que los dos factores binomiales tienen signos opuestos, hay 6 posibilidades para cada una de las cuatro formas: un total de 24 posibilidades en total. Si intenta con todas ellas, mental y sistemáticamente, debe encontrar que

$$35x^2 - x - 12 = (5x - 3)(7x + 4).$$

Ahora resuelva el ejercicio 63.

Podemos ampliar la técnica de los ejemplos 8 y 9 a trinomios con dos variables, como se ilustra en el ejemplo 10.

EJEMPLO 10 Factorización de trinomios con *x* y *y*

Factorice $3x^2 - 7xy + 2y^2$.

SOLUCIÓN La única forma de obtener $-7xy$ como el término de en medio es con $3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - ?y)(x - ?y)$.

Los signos en el binomio deben ser negativos, ya que el coeficiente de y^2 es positivo y el del término central es negativo. La verificación de las dos posibilidades $(3x - y)(x - 2y)$ y $(3x - 2y)(x - y)$, muestra que

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - y)(x - 2y).$$

Ahora resuelva el ejercicio 67.

Factorización por agrupación

Observe que $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. Si un polinomio con cuatro términos es el producto de dos binomios, podemos agrupar términos para factorizar. Sólo hay tres formas de agrupar los términos y dos de ellas funcionan. De esta manera, si dos de las posibilidades no funcionan, entonces no es factorizable.

EJEMPLO 11 Factorización por agrupación

a) $3x^3 + x^2 - 6x - 2$

$= (3x^3 + x^2) - (6x + 2)$ Agrupar términos.

$= x^2(3x + 1) - 2(3x + 1)$ Factorizar cada grupo.

$= (3x + 1)(x^2 - 2)$ Propiedad distributiva.

b) $2ac - 2ad + bc - bd$

$= (2ac - 2ad) + (bc - bd)$ Agrupar términos.

$= 2a(c - d) + b(c - d)$ Factorizar cada grupo.

$= (c - d)(2a + b)$ Propiedad distributiva.

Ahora resuelva el ejercicio 69.

A continuación se proporciona una lista de verificación para la factorización de polinomios.

Factorización de polinomios

1. Buscar factores comunes.

2. Buscar formas polinomiales especiales.

3. Usar parejas de factores.

4. Si hay cuatro términos, intente la agrupación.

EJERCICIOS DEL APÉNDICE A.2

En los ejercicios del 1 al 4 escriba los polinomios en forma estándar e indique sus grados.

1. $2x - 1 + 3x^2$ **2.** $x^2 - 2x - 2x^3 + 1$

3. $1 - x^7$ **4.** $x^2 - x^4 + x - 3$

En los ejercicios del 5 al 8 indique si las expresiones son polinomios.

5. $x^3 - 2x^2 + x^{-1}$ **6.** $\dfrac{2x - 4}{x}$

7. $(x^2 + x + 1)^2$ **8.** $1 - 3x + x^4$

En los ejercicios del 9 al 18 simplifique la expresión. Escriba su respuesta en forma estándar.

9. $(x^2 - 3x + 7) + (3x^2 + 5x - 3)$

10. $(-3x^2 - 5) - (x^2 + 7x + 12)$

11. $(4x^3 - x^2 + 3x) - (x^3 + 12x - 3)$

12. $-(y^2 + 2y - 3) + (5y^2 + 3y + 4)$

13. $2x(x^2 - x + 3)$ **14.** $y^2(2y^2 + 3y - 4)$

15. $-3u(4u - 1)$ **16.** $-4v(2 - 3v^3)$

17. $(2 - x - 3x^2)(5x)$ **18.** $(1 - x^2 + x^4)(2x)$

En los ejercicios del 19 al 40 desarrolle el producto. Utilice la alineación vertical en los ejercicios 33 y 34.

19. $(x - 2)(x + 5)$ **20.** $(2x + 3)(4x + 1)$

21. $(3x - 5)(x + 2)$ **22.** $(2x - 3)(2x + 3)$

23. $(3x - y)(3x + y)$ **24.** $(3 - 5x)^2$

25. $(3x + 4y)^2$ **26.** $(x - 1)^3$

27. $(2u - v)^3$ **28.** $(u + 3v)^3$

29. $(2x^3 - 3y)(2x^3 + 3y)$ **30.** $(5x^3 - 1)^2$

31. $(x^2 - 2x + 3)(x + 4)$ **32.** $(x^2 + 3x - 2)(x - 3)$

33. $(x^2 + x - 3)(x^2 + x + 1)$

34. $(2x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 2)$

35. $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ **36.** $(x^{1/2} - y^{1/2})(x^{1/2} + y^{1/2})$

37. $(\sqrt{u} + \sqrt{v})(\sqrt{u} - \sqrt{v})$ **38.** $(x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3})$

39. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ **40.** $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

En los ejercicios del 41 al 44 factorice el factor común.

41. $5x - 15$ **42.** $5x^3 - 20x$

43. $yz^3 - 3yz^2 + 2yz$ **44.** $2x(x + 3) - 5(x + 3)$

En los ejercicios del 45 al 48 factorice la diferencia de dos cuadrados.

45. $z^2 - 49$ **46.** $9y^2 - 16$

47. $64 - 25y^2$ **48.** $16 - (x + 2)^2$

En los ejercicios del 49 al 52 factorice el trinomio cuadrado perfecto.

49. $y^2 + 8y + 16$ **50.** $36y^2 + 12y + 1$

51. $4z^2 - 4z + 1$ **52.** $9z^2 - 24z + 16$

En los ejercicios del 53 al 58 factorice la suma o diferencia de dos cubos.

53. $y^3 - 8$ **54.** $z^3 + 64$

55. $27y^3 - 8$ **56.** $64z^3 + 27$

57. $1 - x^3$ **58.** $27 - y^3$

En los ejercicios del 59 al 68 factorice el trinomio.

59. $x^2 + 9x + 14$ **60.** $y^2 - 11y + 30$

61. $z^2 - 5z - 24$ **62.** $6t^2 + 5t + 1$

63. $14u^2 - 33u - 5$ **64.** $10v^2 + 23v + 12$

65. $12x^2 + 11x - 15$ **66.** $2x^2 - 3xy + y^2$

67. $6x^2 + 11xy - 10y^2$ **68.** $15x^2 + 29xy - 14y^2$

En los ejercicios del 69 al 74 factorice mediante agrupación.

69. $x^3 - 4x^2 + 5x - 20$ **70.** $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

71. $x^6 - 3x^4 + x^2 - 3$ **72.** $x^6 + 2x^4 + x^2 + 2$

73. $2ac + 6ad - bc - 3bd$

74. $3uw + 12uz - 2vw - 8vz$

En los ejercicios del 75 al 90 factorice completamente.

75. $x^3 + x$ **76.** $4y^3 - 20y^2 + 25y$

77. $18y^3 + 48y^2 + 32y$ **78.** $2x^3 - 16x^2 + 14x$

79. $16y - y^3$ **80.** $3x^4 + 24x$

81. $5y + 3y^2 - 2y^3$ **82.** $z - 8z^4$

83. $2(5x + 1)^2 - 18$ **84.** $5(2x - 3)^2 - 20$

85. $12x^2 + 22x - 20$ **86.** $3x^2 + 13xy - 10y^2$

87. $2ac - 2bd + 4ad - bc$ **88.** $6ac - 2bd + 4bc - 3ad$

89. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ **90.** $x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x$

91. Escriba para aprender Muestre que la agrupación

$$(2ac + bc) - (2ad + bd)$$

conduce a la misma factorización del ejemplo 11 b). Explique por qué la tercera posibilidad

$$(2ac - bd) + (-2ad + bc)$$

no conduce a una factorización.

A.3 Expresiones fraccionales

Aprenderá acerca de...

- El dominio en una expresión algebraica
- La reducción de expresiones racionales
- Las operaciones con expresiones racionales
- Las expresiones racionales compuestas

. . . porque

Usted necesita revisar estas habilidades algebraicas básicas, en caso de que no las recuerde.

Dominio de una expresión algebraica

Un cociente de dos expresiones algebraicas es una **expresión fraccionaria**, o simplemente fracción. Si el cociente puede escribirse como la razón de dos polinomios, la expresión fraccionaria es una **expresión racional**. A continuación se presentan ejemplos de cada una.

$$\frac{x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \frac{2x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x - 3}$$

La de la izquierda es una expresión fraccionaria, pero no una expresión racional; la otra es tanto expresión fraccionaria como expresión racional.

A diferencia de los polinomios, que están definidos para todos los números reales, algunas expresiones algebraicas no están definidas para algunos números reales. El conjunto de los números reales para los que una expresión algebraica está definida es el **dominio de la expresión algebraica**.

EJEMPLO 1 Determinación de dominios de expresiones algebraicas

a) $3x^2 - x + 5$ **b)** $\sqrt{x - 1}$ **c)** $\dfrac{x}{x - 2}$

SOLUCIÓN

a) El dominio de $3x^2 - x + 5$, al igual que el de cualquier polinomio, es el conjunto de todos los números reales.

b) Puesto que sólo los números no negativos tienen raíz cuadrada, $x - 1 \geq 0$, o $x \geq 1$. En notación de intervalos, el dominio es $[1, \infty)$.

c) Puesto que la división entre cero no está definida, $x - 2 \neq 0$, o $x \neq 2$. El dominio es el conjunto de todos los números reales excepto 2.

Ahora resuelva los ejercicios 11 y 13.

Reducción de expresiones racionales

Sean u, v y z números reales, variables o expresiones algebraicas. Podemos escribir expresiones racionales en forma más sencilla mediante

$$\frac{uz}{vz} = \frac{u}{v}$$

siempre que $z \neq 0$. Esto requiere que primero factoricemos el numerador y el denominador en factores primos. Cuando todos los factores comunes del numerador y del denominador se han eliminado, la expresión racional (o número racional) está en la **forma reducida**.

EJEMPLO 2 Reducción de expresiones racionales

Escriba $(x^2 - 3x)/(x^2 - 9)$ en la forma reducida.

SOLUCIÓN

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{x(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)}$$ Factorizar completamente.

$$= \frac{x}{x + 3}, \quad x \neq 3$$ Eliminar los factores comunes.

continúa

Incluimos $x \neq 3$ como parte de la forma reducida ya que 3 no está en el dominio de la expresión racional original y, por tanto, no debe estar en el dominio de la expresión racional final.

Ahora resuelva el ejercicio 35.

Dos expresiones racionales son **equivalentes**, si tienen el mismo dominio y tienen el mismo valor para todos los valores en el dominio. La forma reducida de una expresión racional debe tener el mismo dominio que el de la expresión racional original. Esto es por lo que adjuntamos la restricción $x \neq 3$ a la forma reducida del ejemplo 2.

Operaciones con expresiones racionales

Dos fracciones son **iguales**, $u/v = z/w$, si, y sólo, si $uw = vz$. A continuación se describe cómo operar con fracciones.

Operaciones con fracciones

Sean u, v, w y z números reales, variables o expresiones algebraicas. Se supone que todos los denominadores son diferentes de cero.

Operación	Ejemplo
1. $\frac{u}{v} + \frac{w}{v} = \frac{u+w}{v}$	$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$
2. $\frac{u}{v} + \frac{w}{z} = \frac{uz+vw}{vz}$	$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2\cdot 5 + 3\cdot 4}{3\cdot 5} = \frac{22}{15}$
3. $\frac{u}{v} \cdot \frac{w}{z} = \frac{uw}{vz}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} = \frac{8}{15}$
4. $\frac{u}{v} \div \frac{w}{z} = \frac{u}{v} \cdot \frac{z}{w} = \frac{uz}{vw}$	$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

5. Para la resta, en 1 y 2 reemplace "+" por "−".

INVERTIR Y MULTIPLICAR

El paso de la división que se muestra en 4, con frecuencia se describe como invertir el divisor (la fracción que sigue al símbolo de la división) y multiplicar el resultado por el numerador (la primera fracción).

EJEMPLO 3 Multiplicación y división de expresiones racionales

a) $\dfrac{2x^2 + 11x - 21}{x^3 + 2x^2 + 4x} \cdot \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 5x - 14}$

$= \dfrac{(2x-3)(\cancel{x+7})}{x(\cancel{x^2+2x+4})} \cdot \dfrac{(\cancel{x-2})(\cancel{x^2+2x+4})}{(\cancel{x-2})(\cancel{x+7})}$ Factorizar completamente.

$= \dfrac{2x-3}{x}, \quad x \neq 2, \quad x \neq -7$ Eliminar factores comunes.

b) $\dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2} \div \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 4x + 4}$

$= \dfrac{(x^3+1)(x^2-4x+4)}{(x^2-x-2)(x^2-x+1)}$ Invertir y multiplicar.

$= \dfrac{(\cancel{x+1})(\cancel{x^2-x+1})(x-2)^{\cancel{2}^1}}{(\cancel{x+1})(x-2)(\cancel{x^2-x+1})}$ Factorizar completamente.

$= x - 2, \quad x \neq -1, \quad x \neq 2$ Eliminar factores comunes.

Ahora resuelva los ejercicios 49 y 55.

OBSERVACIÓN DEL EJEMPLO

El numerador, $x^2 + 4x - 6$, de la expresión final en el ejemplo 4, es un polinomio primo. Por tanto, no hay factores comunes.

EJEMPLO 4 Suma de expresiones racionales

$$\frac{x}{3x-2} + \frac{3}{x-5} = \frac{x(x-5) + 3(3x-2)}{(3x-2)(x-5)}$$ Definición de la suma.

$$= \frac{x^2 - 5x + 9x - 6}{(3x-2)(x-5)}$$ Propiedad distributiva.

$$= \frac{x^2 + 4x - 6}{(3x-2)(x-5)}$$ Reducir términos semejantes.

Ahora resuelva el ejercicio 59.

Si los denominadores de las fracciones tienen factores comunes, entonces con frecuencia es más eficiente determinar el MCD antes de sumar o restar las fracciones. El **MCD (mínimo común denominador)** es el producto de todos los factores primos en los denominadores, donde cada factor se eleva a la mayor potencia que se tenga en los denominadores para ese factor.

EJEMPLO 5 Uso del MCD

Escriba las expresiones siguientes como una fracción en forma reducida.

$$\frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 - 4}$$

SOLUCIÓN Los denominadores factorizados son $x(x - 2)$, x y $(x - 2)(x + 2)$, respectivamente. El MCD es $x(x - 2)(x + 2)$.

$$\frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{2}{x(x-2)} + \frac{1}{x} - \frac{3}{(x-2)(x+2)}$$ Factorizar.

$$= \frac{2(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} - \frac{3x}{x(x-2)(x+2)}$$ Fracciones equivalentes.

$$= \frac{2(x+2) + (x-2)(x+2) - 3x}{x(x-2)(x+2)}$$ Combinar numeradores.

$$= \frac{2x + 4 + x^2 - 4 - 3x}{x(x-2)(x+2)}$$ Desarrollar términos.

$$= \frac{x^2 - x}{x(x-2)(x+2)}$$ Simplificar.

$$= \frac{x(x-1)}{x(x-2)(x+2)}$$ Factorizar.

$$= \frac{x-1}{(x-2)(x+2)}, \quad x \neq 0$$ Reducir.

Ahora resuelva el ejercicio 61.

Expresiones racionales compuestas

En ocasiones, una expresión algebraica complicada necesita cambiarse a una forma más común antes de poder trabajar con ella. Una **fracción compuesta** (en ocasiones denominada **fracción compleja**), en la que los numeradores y denominadores pueden tener fracciones, es un ejemplo de tales fracciones. Una forma para simplificar una fracción compleja es escribir tanto el numerador como el denominador como fracciones sencillas y luego invertir y multiplicar. Si la fracción toma la forma de una expresión racional, entonces escribimos la expresión en la forma reducida o más sencilla.

EJEMPLO 6 Simplificación de una fracción compuesta

$$\frac{3-\dfrac{7}{x+2}}{1-\dfrac{1}{x-3}} = \frac{\dfrac{3(x+2)-7}{x+2}}{\dfrac{(x-3)-1}{x-3}}$$ Combinar fracciones.

$$= \frac{\dfrac{3x-1}{x+2}}{\dfrac{x-4}{x-3}}$$ Simplificar.

$$= \frac{(3x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}, \quad x \neq 3$$ Invertir y multiplicar.

Ahora resuelva el ejercicio 63.

Una segunda forma para simplificar una fracción compuesta es multiplicar el numerador y el denominador por el MCD de todas las fracciones en el numerador y el denominador, como se ilustra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Simplificación de otra fracción compuesta

Utilice el MCD para simplificar la fracción compuesta

$$\frac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}.$$

SOLUCIÓN El MCD de las cuatro fracciones en el numerador y denominador es a^2b^2.

$$\frac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}} = \frac{\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)a^2b^2}{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)a^2b^2}$$ Multiplicar el numerador y el denominador por a^2b^2.

$$= \frac{b^2-a^2}{ab^2-a^2b}$$ Simplificar.

$$= \frac{(b+a)(b-a)}{ab(b-a)}$$ Factorizar.

$$= \frac{b+a}{ab}, \quad a \neq b$$ Reducir.

Ahora resuelva el ejercicio 69.

EJERCICIOS DEL APÉNDICE A.3

En los ejercicios del 1 al 8 reescriba como fracciones sencillas.

1. $\frac{5}{9}+\frac{10}{9}$

2. $\frac{17}{32}-\frac{9}{32}$

3. $\frac{20}{21}\cdot\frac{9}{22}$

4. $\frac{33}{25}\cdot\frac{20}{77}$

5. $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$

6. $\frac{9}{4}\div\frac{15}{10}$

7. $\frac{1}{14}+\frac{4}{15}-\frac{5}{21}$

8. $\frac{1}{6}+\frac{6}{35}-\frac{4}{15}$

En los ejercicios del 9 al 18 determine el dominio de las expresiones algebraicas.

9. $5x^2-3x-7$

10. $2x-5$

11. $\sqrt{x-4}$

12. $\frac{2}{\sqrt{x+3}}$

13. $\frac{2x+1}{x^2+3x}$

14. $\frac{x^2-2}{x^2-4}$

15. $\frac{x}{x-1}, \quad x\neq 2$

16. $\frac{3x-1}{x-2}, \quad x\neq 0$

17. x^2+x^{-1}

18. $x(x+1)^{-2}$

En los ejercicios del 19 al 26 determine el numerador o denominador que falte, de modo que las dos expresiones racionales sean iguales.

19. $\frac{2}{3x}=\frac{?}{12x^3}$

20. $\frac{5}{2y}=\frac{15y}{?}$

21. $\frac{x-4}{x}=\frac{x^2-4x}{?}$

22. $\frac{x}{x+2}=\frac{?}{x^2-4}$

23. $\frac{x+3}{x-2}=\frac{?}{x^2+2x-8}$

24. $\frac{x-4}{x+5}=\frac{x^2-x-12}{?}$

25. $\frac{x^2-3x}{?}=\frac{x-3}{x^2+2x}$

26. $\frac{?}{x^2-9}=\frac{x^2+x-6}{x-3}$

En los ejercicios del 27 al 32 considere la fracción original y la forma reducida de todos los casos a partir de los ejemplos especificados. Explique por qué las restricciones dadas son necesarias en sus formas reducidas.

27. Ejemplo 3 a), $x\neq 2, x\neq 7$.

28. Ejemplo 3 b), $x\neq -1, x\neq 2$

29. Ejemplo 4, ninguna.

30. Ejemplo 5, $x\neq 0$

31. Ejemplo 6, $x\neq 3$

32. Ejemplo 7, $a\neq b$

En los ejercicios del 33 al 44 escriba la expresión en forma reducida,

33. $\frac{18x^3}{15x}$

34. $\frac{75y^2}{9y^4}$

35. $\frac{x^3}{x^2-2x}$

36. $\frac{2y^2+6y}{4y+12}$

37. $\frac{z^2-3z}{9-z^2}$

38. $\frac{x^2+6x+9}{x^2-x-12}$

39. $\frac{y^2-y-30}{y^2-3y-18}$

40. $\frac{y^3+4y^2-21y}{y^2-49}$

41. $\frac{8z^3-1}{2z^2+5z-3}$

42. $\frac{2z^3+6z^2+18z}{z^3-27}$

43. $\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^3+2x^2}$

44. $\frac{y^2+3y}{y^3+3y^2-5y-15}$

En los ejercicios del 45 al 62 simplifique.

45. $\frac{3}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{9}$

46. $\frac{x+3}{7}\cdot\frac{14}{2x+6}$

47. $\frac{x+3}{x-1}\cdot\frac{1-x}{x^2-9}$

48. $\frac{18x^2-3x}{3xy}\cdot\frac{12y^2}{6x-1}$

49. $\frac{x^3-1}{2x^2}\cdot\frac{4x}{x^2+x+1}$

50. $\frac{y^3+2y^2+4y}{y^3+2y^2}\cdot\frac{y^2-4}{y^3-8}$

51. $\frac{2y^2+9y-5}{y^2-25}\cdot\frac{y-5}{2y^2-y}$

52. $\frac{y^2+8y+16}{3y^2-y-2}\cdot\frac{3y^2+2y}{y+4}$

53. $\frac{1}{2x}\div\frac{1}{4}$

54. $\frac{4x}{y}\div\frac{8y}{x}$

55. $\frac{x^2-3x}{14y}\div\frac{2xy}{3y^2}$

56. $\frac{7x-7y}{4y}\div\frac{14x-14y}{3y}$

57. $\frac{\frac{2x^2y}{(x-3)^2}}{\frac{8xy}{x-3}}$

58. $\frac{\frac{x^2-y^2}{2xy}}{\frac{y^2-x^2}{4x^2y}}$

59. $\frac{2x+1}{x+5}-\frac{3}{x+5}$

60. $\frac{3}{x-2}+\frac{x+1}{x-2}$

61. $\frac{3}{x^2+3x}-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2-9}$

62. $\frac{5}{x^2+x-6}-\frac{2}{x-2}+\frac{4}{x^2-4}$

En los ejercicios del 63 al 70 simplifique las fracciones compuestas.

63. $\frac{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}$

64. $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$

65. $\frac{2x+\frac{13x-3}{x-4}}{2x+\frac{x+3}{x-4}}$

66. $\frac{2-\frac{13}{x+5}}{2+\frac{3}{x-3}}$

67. $\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$

68. $\frac{\frac{x+h}{x+h+2}-\frac{x}{x+2}}{h}$

69. $\frac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

70. $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}$

En los ejercicios del 71 al 74 escriba con exponentes positivos y simplifique.

71. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)^{-1}$

72. $\frac{(x+y)^{-1}}{(x-y)^{-1}}$

73. $x^{-1}+y^{-1}$

74. $(x^{-1}+y^{-1})^{-1}$

B
Fórmulas importantes

B.1 Fórmulas de álgebra

Exponentes

Si todas las bases son diferentes de cero:

$$u^m u^n = u^{m+n} \qquad \frac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$$

$$u^0 = 1 \qquad u^{-n} = \frac{1}{u^n}$$

$$(uv)^m = u^m v^m \qquad (u^m)^n = u^{mn}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^m = \frac{u^m}{v^m}$$

Radicales y exponentes racionales

Si todas las raíces son números reales:

$$\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v} \qquad \sqrt[n]{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}} \quad (v \neq 0)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[mn]{u} \qquad (\sqrt[n]{u})^n = u$$

$$\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m \qquad \sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| & n \text{ par} \\ u & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u} \qquad u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m$$

$$u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}$$

Productos especiales

$$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$$

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

Factorización de polinomios

$$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$$

$$u^2 + 2uv + v^2 = (u + v)^2$$

$$u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2$$

$$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$$

$$u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$$

Desigualdades

Si $u < v$ y $v < w$, entonces $u < w$.

Si $u < v$, entonces $u + w < v + w$.

Si $u < v$ y $c > 0$, entonces $uc < vc$.

Si $u < v$ y $c < 0$, entonces $uc > vc$.

Si $c > 0$, $|u| < c$ es equivalente a $-c < u < c$.

Si $c > 0$, $|u| > c$ es equivalente a $u < -c$ o bien $u > c$.

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Logaritmos

Si $0 < b \neq 1$, $0 < a \neq 1$, $x, R, S > 0$

$y = \log_b x$ si, y sólo, si $b^y = x$

$$\log_b 1 = 0 \qquad \log_b b = 1$$

$$\log_b b^y = y \qquad b^{\log_b x} = x$$

$$\log_b RS = \log_b R + \log_b S \qquad \log_b \frac{R}{S} = \log_b R - \log_b S$$

$$\log_b R^c = c \log_b R \qquad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Determinantes

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Sucesiones y series aritméticas

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \text{ o } S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

Sucesiones y series geométricas

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

$$S = \frac{a_1}{1 - r} \quad (|r| < 1) \text{ serie geométrica infinita.}$$

Factorial

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$n \cdot (n - 1)! = n!, \; 0! = 1$$

Coeficiente binomial

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ (enteros } n \text{ y } r,\ n \geq r \geq 0)$$

Teorema del binomio

Si n es un entero positivo

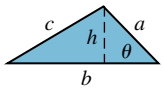
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

B.2 Fórmulas de geometría

Triángulo

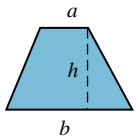
$h = a \operatorname{sen} \theta$

Área $= \frac{1}{2}bh$



Trapecio

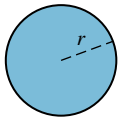
Área $= \frac{h}{2}(a+b)$



Círculo

Área $= \pi r^2$

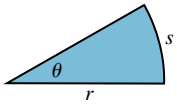
Circunferencia $= 2\pi r$



Sector circular

Área $= \frac{\theta r^2}{2}$ (θ en radianes)

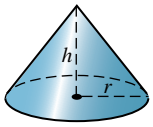
$s = r\theta$ (θ en radianes)



Cono circular recto

Volumen $= \frac{\pi r^2 h}{3}$

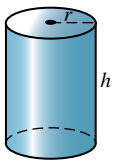
Área de la superficie lateral $= \pi r\sqrt{r^2+h^2}$



Cilindro circular recto

Volumen $= \pi r^2 h$

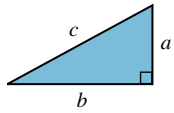
Área de la superficie lateral $= 2\pi rh$



Triángulo rectángulo

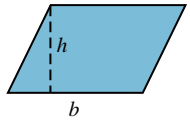
Teorema de Pitágoras:

$c^2 = a^2 + b^2$



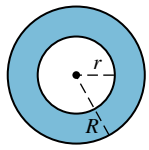
Paralelogramo

Área $= bh$



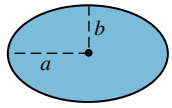
Anillo circular

Área $= \pi(R^2 - r^2)$



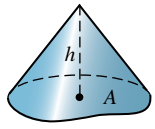
Elipse

Área $= \pi ab$



Cono

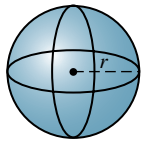
Volumen $= \frac{Ah}{3}$ (A = Área de la base)



Esfera

Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Área de la superficie $= 4\pi r^2$



B.3 Fórmulas de trigonometría

Medida angular

π radianes $= 180°$

Por lo que, 1 radián $= \dfrac{180}{\pi}$ grados,

y 1 grado $= \dfrac{\pi}{180}$ radianes.

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\csc x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

Identidades cociente

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades impar-par

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \csc(-x) = -\csc x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sec(-x) = \sec x$$

$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \cot(-x) = -\cot x$$

Identidades de suma y diferencia

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

Identidades de cofunción

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Identidades del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$$

$$= 2\cos^2 u - 1$$

$$= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u$$

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

Identidades para reducir potencias

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

Identidades del ángulo medio

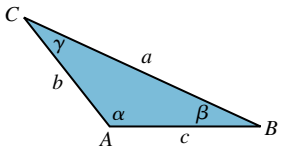
$$\operatorname{sen} \frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\cos \frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan \frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}}$$

$$= \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

Triángulos



Ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Ley de los cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Área:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$$

$$= \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$$

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Forma trigonométrica de un número complejo

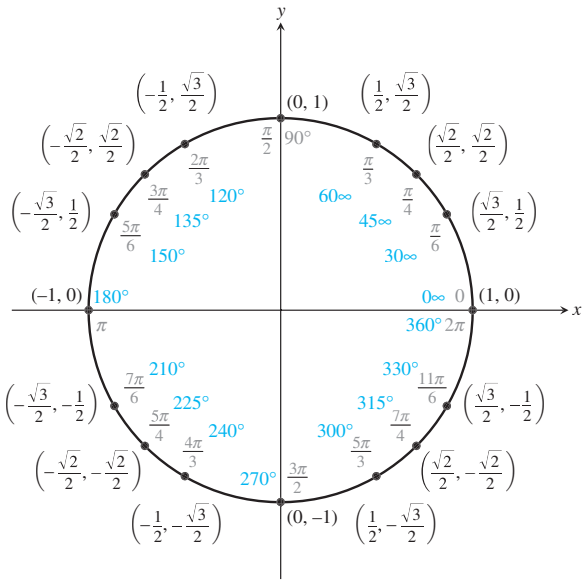
$$z = a + bi = (r \cos \theta) + (r \operatorname{sen} \theta)i$$

$$= r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Teorema de Moivre

$$z^n = [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n$$

$$= r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$



B.4 Fórmulas de geometría analítica

Fórmulas básicas

Distancia d entre puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Punto medio: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Pendiente de una recta: $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Condición para rectas paralelas: $m_1 = m_2$

Condición para rectas perpendiculares: $m_2 = \frac{-1}{m_1}$

Ecuaciones de una recta

La forma punto pendiente, pendiente m y que pasa por (x_1, y_1):

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

La forma pendiente-intercepción, pendiente m e intersección en y igual a b:

$$y = mx + b$$

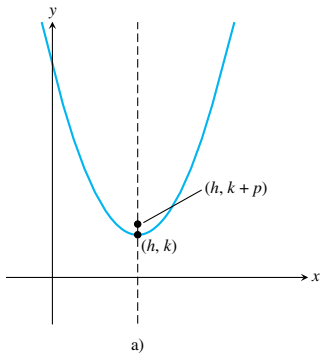
Ecuación de una circunferencia

La circunferencia con centro (h, k) y radio r:

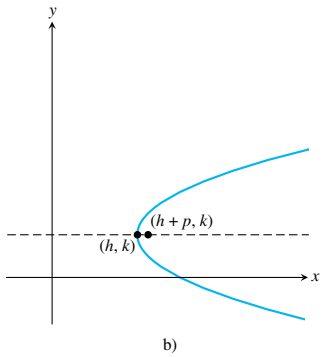
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Parábolas con vértice en (h, k)

Ecuación estándar	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$
Abre	Hacia arriba o hacia abajo	A la derecha o a la izquierda
Foco	$(h, k + p)$	$(h + p, k)$
Directriz	$y = k - p$	$x = h - p$
Eje	$x = h$	$y = k$



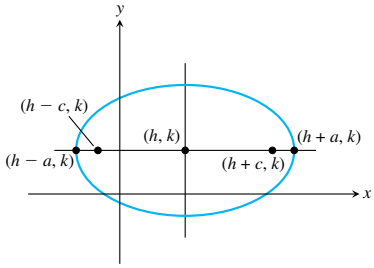
a)



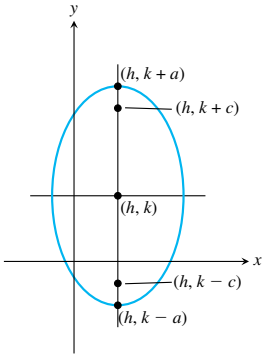
b)

Elipses con centro en (h, k) y $a > b > 0$

Ecuación estándar	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2} + \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Eje focal	$y = k$	$x = h$
Focos	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
Vértices	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
Relación pitagórica	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$



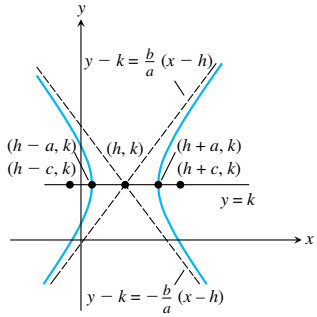
a)



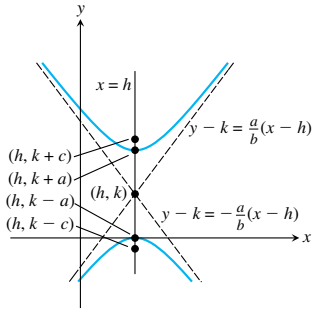
b)

Hipérbolas con centro en (h, k)

Ecuación estándar	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Eje focal	$y = k$	$x = h$
Focos	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
Vértices	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
Relación pitagórica	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
Asíntotas	$y = \pm\dfrac{b}{a}(x-h) + k$	$y = \pm\dfrac{a}{b}(x-h) + k$

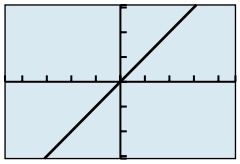


a)



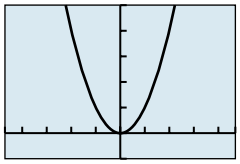
b)

B.5 Galería de funciones básicas



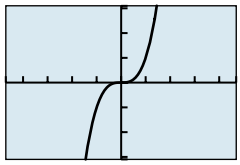
[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

Función identidad
$f(x) = x$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= (-\infty, \infty)$



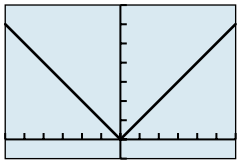
[−4.7, 4.7] por [−1, 5]

Función cuadrática
$f(x) = x^2$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= [0, \infty)$



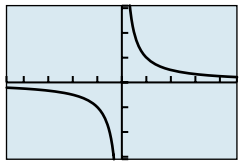
[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

Función cúbica
$f(x) = x^3$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= (-\infty, \infty)$



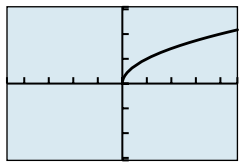
[−6, 6] por [−1, 7]

Función valor absoluto
$f(x) = |x| = \text{abs}\,(x)$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= [0, \infty)$



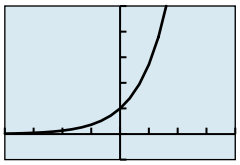
[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

Función recíproca
$f(x) = \dfrac{1}{x}$
Dominio $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Rango $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



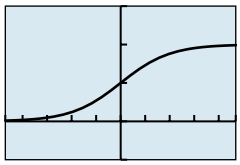
[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

Función raíz cuadrada
$f(x) = \sqrt{x}$
Dominio $= [0, \infty)$
Rango $= [0, \infty)$



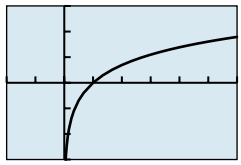
[−4, 4] por [−1, 5]

Función exponencial
$f(x) = e^x$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= (0, \infty)$



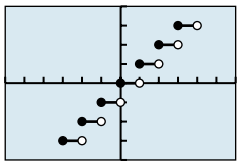
[−4.7, 4.7] por [−0.5, 1.5]

Función logística
$f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= (0, 1)$



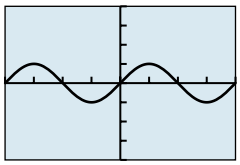
[−2, 6] por [−3, 3]

Función logaritmo natural
$f(x) = \ln x$
Dominio $= (0, \infty)$
Rango $= (-\infty, \infty)$



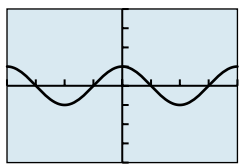
[−6, 6] por [−4, 4]

Función entero Mayor
$f(x) = \text{ent}\,(x)$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango = todos los enteros



[$-2\pi, 2\pi$] por [−4, 4]

Función seno
$f(x) = \text{sen}\,(x)$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= [-1, 1]$



[$-2\pi, 2\pi$] por [−4, 4]

Función coseno
$f(x) = \cos\,(x)$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= [-1, 1]$

C.1 Lógica: Una introducción

Aprenderá acerca de...

- Las proposiciones
- Las proposiciones compuestas

. . . porque

Estos temas son importantes en el estudio de la lógica.

Proposiciones

La lógica es una herramienta utilizada en el razonamiento matemático y la resolución de problemas. En lógica, una **proposición** *es un enunciado que es verdadero o falso, pero no ambos.*

Las expresiones siguientes no son proposiciones, ya que sus valores de verdad no pueden determinarse sin más información:

1. Ella tiene los ojos azules.

2. $x + 7 = 18$

3. $2y + 7 > 1$

Las expresiones anteriores se convierten en proposiciones si, en 1) se dice quién es "ella" , y en 2) y 3) se asignan valores a x y y, respectivamente. Sin embargo, una expresión que incluye *él* o *ella* o x o y podría considerarse una proposición. Por ejemplo, "Si él mide más de 210 cm entonces él mide más de 2 m" y "$2(x + y) = 2x + 2y$", ambas son proposiciones ya que son verdaderas, sin importar quién es él o cuáles son los valores numéricos de x y y.

Con base en una proposición dada, es posible crear una nueva proposición formando una **negación**. La negación de una proposición es una proposición con el valor de verdad opuesto al de la proposición dada. Si una proposición es verdadera, su negación es falsa, y si una proposición es falsa, su negación es verdadera. Considere la proposición "Está nevando"; la negación de esta proposición podría establecerse como "No está nevando".

EJEMPLO 1 Negación de proposiciones

Niegue cada una de las proposiciones siguientes:

a) $2 + 3 = 5$

b) Un hexágono tiene seis lados.

c) Hoy no es lunes.

SOLUCIÓN

a) $2 + 3 \neq 5$

b) Un hexágono no tiene seis lados.

c) Hoy es lunes.

Ahora resuelva el ejercicio 5, parte a), b) y c).

Las proposiciones "La camisa es azul" y "La camisa es verde" no son negaciones una de la otra. Una proposición y su negación deben tener valores de verdad opuestos. Si la camisa en realidad es roja, entonces ambas proposiciones son falsas y, por tanto, no pueden ser negaciones una de la otra. Sin embargo, las proposiciones "La camisa es azul" y "La camisa no es azul" son negaciones una de la otra, ya que tienen valores de verdad opuestos, sin importar de qué color sea la camisa.

Algunas proposiciones incluyen **cuantificadores** y es más complicado negarlas. Los cuantificadores incluyen palabras tales como *todos*, *cada* y *existe*.

Los cuantificadores *todo, cada* y *no* se refieren a todos y cada uno de los elementos en un conjunto y son **cuantificadores universales**. Los cuantificadores *algunos* y *existe al menos uno* se refieren a uno o más, o posiblemente todos, los elementos en un conjunto. *Algunos* y *existe* se denominan **cuantificadores existenciales**. A continuación se proporcionan ejemplos con cuantificadores universales y existenciales:

1. Todas las rosas son rojas [universal].

2. Cada estudiante es importante [universal].

3. Para cada número de conteo x, $x + 0 = x$ [universal].

4. Algunas rosas son rojas [existencial].

5. Existe al menos un número de conteo par menor que 3 [existencial].

6. Hay una mujer que es más alta que 200 cm [existencial].

Los diagramas de Venn pueden usarse para ilustrar proposiciones que incluyen cuantificadores. Por ejemplo, las figuras C.1a y C.1b representan a las proposiciones 1) y 4). La x, en la figura C.1b, se utiliza para mostrar que debe haber al menos un elemento del conjunto de rosas que es roja.

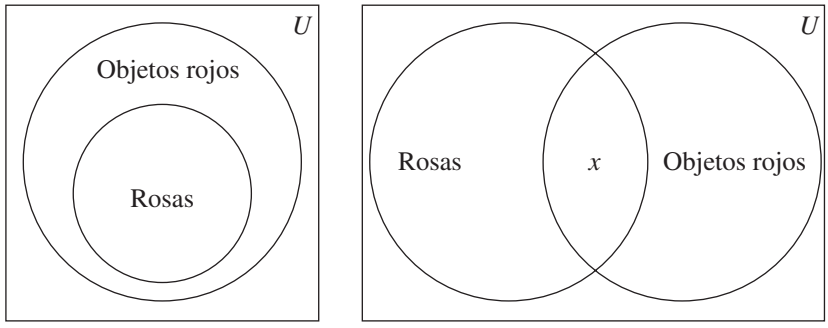


FIGURA C.1 **a** Todas las rosas son rojas. **b** Algunas rosas son rojas.

Considere la proposición siguiente que incluye el cuantificador existencial *algunos*: "Algunos profesores de la Universidad Paxxon tienen ojos azules". Esto significa que al menos un profesor de la Universidad Paxxon tiene ojos azules. No excluye las posibilidades de que todos los profesores tengan los ojos azules o que algunos de los profesores de Paxxon no tengan los ojos azules. Puesto que la negación de una proposición verdadera es falsa, ni "Algunos profesores en la Universidad de Paxxon no tienen los ojos azules" ni "Todos los profesores en Paxxon tiene los ojos azules" son negaciones de la proposición original. Una posible negación de la proposición original es "Ningún profesor en la Universidad Paxxon tiene los ojos azules".

Proposición	**Negación**
Algunos *a* son *b*.	Ningún *a* es *b*.
Algunos *a* no son *b*.	Todos los *a* son *b*.
Todos los *a* son *b*.	Algunos *a* no son *b*.
Ningún *a* es *b*.	Algunos *a* son *b*.

EJEMPLO 2 Negación con cuantificadores

Niegue cada una de las proposiciones siguientes:

a) A todos los estudiantes les gustan las hamburguesas.

b) A algunas personas les gustan las matemáticas.

c) Existe un número de conteo x tal que $3x = 6$.

d) Para todos los números de conteo x, $3x = 3x$.

SOLUCIÓN

a) A algunos estudiantes no les gustan las hamburguesas.

b) A ninguna persona le gustan las matemáticas.

c) Para todos los números de conteo x, $3x \neq 6$.

d) Existe un número de conteo x tal que $3x \neq 3x$.

Ahora resuelva el ejercicio 5, partes e) y f).

Existe un sistema simbólico definido para ayudar al estudio de la lógica. Si p representa una proposición, la negación de la proposición p se expresa como $\sim p$. Con frecuencia se utilizan **tablas de verdad** para mostrar todos los posibles patrones verdadero-falso para las proposiciones. La tabla C.1 resume las tablas de verdad para p y $\sim p$.

Tabla C.1 Negación

p	$\sim p$
V	F
F	V

Observe que p y $\sim p$ son análogos a los conjuntos P y $\overline{P}$. Si x es un elemento de P, entonces x no es un elemento de $\overline{P}$.

Proposiciones compuestas

Con base en dos proposiciones dadas, es posible crear una nueva, **proposición compuesta** mediante el uso de un conectivo tal como *y*. Por ejemplo, "Está nevando" y "la pista de esquí está abierta" unidas con *y* se obtiene "Está nevando y la pista de esquí está abierta". Otras proposiciones compuestas pueden obtenerse mediante el conector *o*. Por ejemplo "Está nevando o la pista de esquí está abierta".

Los símbolos $\wedge$ y $\vee$ se utilizan para representar los conectores *y* y *o*, respectivamente. Por ejemplo, si p representa "Está nevando" y si q representa "La pista de esquí está abierta", entonces "Está nevando y la pista de esquí está abierta" se expresa mediante $p \wedge q$. De forma similar, "Está nevando o la pista de esquí está abierta" se expresa mediante $p \vee q$.

Tabla C.2 Conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

El valor de verdad de cualquier proposición compuesta, tal como $p \wedge q$, se define mediante la tabla de verdad de cada una de las proposiciones simples. Como cada una las proposiciones p y q pueden ser verdadera o falsa, existen cuatro posibilidades para los valores de verdad de p y q, como se muestra en la tabla C.2. La proposición compuesta $p \wedge q$, es la **conjunción** de p y q, y se define como verdadera si, y sólo si, p y q son ambas verdaderas. De otra forma, es falsa.

Tabla C.2 Disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La proposición compuesta $p \vee q$ —esto es, p o q— es una **disyunción**. En el lenguaje cotidiano, *o* no siempre se interpreta de la misma manera. En lógica, utilizamos un *o inclusivo*, como en el caso de la proposición "Iré al cine o leeré un libro" que significa: iré al cine o leeré un libro o haré las dos cosas. De aquí que, en lógica, p o q, simbolizada como $p \vee q$, se define como falsa si p y q ambas son falsas y verdadera en los demás casos. Esto se resume en la tabla C.3.

EJEMPLO 3 Conjunción y disyunción

Dadas las proposiciones siguientes, clasifique cada una de las conjunciones o disyunciones como verdadera o falsa:

p: $2 + 3 = 5$ $\quad r$: $5 + 3 = 9$
q: $2 \cdot 3 = 6$ $\quad s$: $2 \cdot 4 = 9$

a) $p \wedge q$ **b)** $p \wedge r$ **c)** $s \wedge q$ **d)** $r \wedge s$

e) $\sim p \wedge q$ **f)** $\sim(p \wedge q)$ **g)** $p \vee q$ **h)** $p \vee r$

i) $s \vee q$ **j)** $r \vee s$ **k)** $\sim p \vee q$ **l)** $\sim(p \vee q)$

SOLUCIÓN

a) p es verdadera y q es verdadera, por lo que $p \wedge q$ es verdadera.

b) p es verdadera y r es falsa, así que $p \wedge r$ es falsa.

c) s es falsa y q es verdadera, por lo que $s \wedge q$ es falsa.

d) r es falsa y s es falsa, así que $r \wedge s$ es falsa.

e) $\sim p$ es falsa y q es verdadera, por lo que $\sim p \wedge q$ es falsa.

f) $p \wedge q$ es verdadera [parte a)], así que $\sim(p \wedge q)$ es falsa.

g) p es verdadera y q es verdadera, por lo que $p \vee q$ es verdadera.

h) p es verdadera y r es falsa, así que $p \vee r$ es verdadera.

i) s es falsa y q es verdadera, por lo que $s \vee q$ es verdadera.

j) r es falsa y s es falsa, así que $r \vee s$ es falsa.

k) $\sim p$ es falsa y q es verdadera, por lo que $\sim p \vee q$ es verdadera.

l) $p \vee q$ es verdadera [parte g)], así que $\sim(p \vee q)$ es falsa.

Ahora resuelva el ejercicio 7, partes a) y f).

Existe una analogía entre los conectores $\wedge$ y $\vee$, con las operaciones de conjuntos de intersección ($\cap$) y la unión ($\cup$). Al igual que la proposición $p \wedge q$ es verdadera sólo cuando p y q ambas son verdaderas, un elemento x pertenece al conjunto $P \cap Q$ sólo cuando x pertenece a P y a Q. Análogamente, la proposición $p \vee q$ es verdadera si cualquiera de p o q es verdadera, y un elemento x pertenece al conjunto $P \cup Q$ cuando x pertenece a P o a Q.

EJEMPLO 4 Proposiciones y conjuntos

Utilice operaciones de conjuntos para construir un conjunto que corresponda, por analogía, a cada una de las proposiciones siguientes:

a) $p \wedge q$ **b)** $\sim r \vee q$ **c)** $\sim(p \wedge q)$ **d)** $\sim(p \vee \sim r)$

SOLUCIÓN

a) $P \cap R$ **b)** $\overline{R} \cup Q$ **c)** $\overline{P \cap Q}$ **d)** $\overline{P \cup R}$

Ahora resuelva el ejercicio 9.

Tabla C.4

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

Se utilizan tablas de verdad no sólo para resumir los valores de verdad de las proposiciones compuestas; también se emplean para determinar si dos proposiciones son lógicamente equivalentes. Dos proposiciones son **lógicamente equivalentes** si, y sólo, si tienen los mismos valores de verdad. Por ejemplo, podríamos mostrar que $p \wedge q$ es lógicamente equivalente a $q \wedge p$ mediante el uso de una tabla de verdad como en la tabla C.4.

EJEMPLO 5 Equivalencia lógica

Utilice una tabla de verdad para determinar si $\sim p \vee \sim q$ y $\sim(p \wedge q)$ son lógicamente equivalentes.

SOLUCIÓN La tabla C.5 muestra encabezados y las cuatro posibilidades para p y q. En la columna encabezada con $\sim p$ escribimos las negaciones de la columna p. En la columna $\sim q$, escribimos la negación de la columna q. Después, utilizamos los valores en las columnas $\sim p$ y $\sim q$ para construir la columna $\sim p \vee \sim q$. Para determinar los valores de verdad para $\sim(p \wedge q)$, utilizamos las columnas p y q para determinar los valores de verdad para $p \wedge q$ y luego negar $p \wedge q$.

Tabla C.5

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V

Como los valores en las columnas para $\sim p \vee \sim q$ y $\sim(p \wedge q)$ son idénticas, las proposiciones son equivalentes.

Ahora resuelva el ejercicio 4, partes b) y d).

EJERCICIOS DEL APÉNDICE C.1

1. Determine cuál de las siguientes son proposiciones, y luego clasifique cada proposición como verdadera o falsa:

a) $2 + 4 = 8$ **b)** Cierre la ventana.

c) Los Ángeles es un estado. **d)** Él está en la ciudad.

e) ¿Qué hora es? **f)** $5x = 15$

g) $3 \cdot 2 = 6$ **h)** $2x^2 > x$

i) Ésta es una proposición falsa. **j)** ¡No se mueva!

2. Utilice cuantificadores para hacer que cada una de las siguientes sea verdadera, donde x es un número natural:

a) $x + 8 = 11$ **b)** $x + 0 = x$

c) $x^2 = 4$ **d)** $x + 1 = x + 2$

3. Utilice cuantificadores para hacer que cada ecuación del ejercicio 2 sea falsa.

4. Complete cada una de las tablas de verdad siguientes:

a)

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V		
F		

b)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
V			
F			

c) Con base en la parte a), ¿p es lógicamente equivalente a $\sim(\sim p)$?

d) Con base en la parte b), ¿$p \vee \sim p$ es lógicamente equivalente a $p \wedge \sim p$?

5. Escriba la negación para cada una de las proposiciones siguientes:

a) El libro tiene 500 páginas.

b) Seis es menor que ocho.

c) $3 \cdot 5 = 15$.

d) Algunas personas tienen cabello rubio.

e) Todos los perros tienen cuatro patas.

f) Algunos gatos no tienen nueve vidas.

g) Todos los cuadrados son rectángulos.

h) No todos los rectángulos son cuadrados.

i) Para todos los números naturales x, $x + 3 = 3 + x$.

j) Existe un número natural x tal que $3 \cdot (x + 2) = 12$.

k) Todo número de conteo es divisible entre el mismo y entre 1.

l) No todos los números naturales son divisibles entre 2.

m) Para todo número natural x, $5x + 4x = 9x$.

6. Si q indica "Este curso es fácil" y r se establece para "Estudiantes flojos no estudian", escriba cada una de las siguientes en forma simbólica:

a) Este curso es fácil y los estudiantes flojos no estudian.

b) Los estudiantes flojos no estudian o este curso no es fácil.

c) Es falso que tanto este curso es fácil como que los estudiantes flojos no estudian.

d) Este curso no es fácil.

7. Si p es falso y q es verdadero, determine los valores de verdad para cada una de las siguientes:

a) $p \wedge q$ **b)** $p \vee q$

c) $\sim p$ **d)** $\sim q$

e) $\sim(\sim p)$ **f)** $\sim p \vee q$

g) $p \wedge \sim q$ **h)** $\sim(p \vee q)$

i) $\sim(\sim p \wedge q)$ **j)** $\sim q \wedge \sim p$

8. Determine el valor de verdad para cada proposición del ejercicio 7 si p es falsa y q es falsa.

9. Utilice operaciones de conjuntos para construir un conjunto que corresponda, por analogía, a cada una de las proposiciones siguientes:

a) $r \vee s$ **b)** $q \wedge \sim q$

c) $\sim(r \vee q)$ **d)** $p \wedge (r \vee s)$

10. Para cada una de las siguientes, ¿la pareja es lógicamente equivalente?

a) $\sim(p \vee q)$ y $\sim p \vee \sim q$

b) $\sim(p \vee q)$ y $\sim p \wedge \sim q$

c) $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \wedge \sim q$

d) $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \vee \sim q$

11. a) Escriba dos equivalencias lógicas que haya descubierto en las partes de la 10 a) a la 10 d). Estas equivalencias se denominan Leyes de DeMorgan para "*y*" y "*o*".

b) Escriba una explicación de la analogía entre las leyes de DeMorgan para conjuntos y las que encontró en la parte a).

12. Complete la tabla de verdad siguiente:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

13. Reformule lo siguiente en una forma lógicamente equivalente:

a) No es verdadero que ahora sea miércoles y que el mes sea junio.

b) No es cierto que ayer desayuné y haya visto la televisión.

c) No está lloviendo o no es julio.

C.2 Condicionales y bicondicionales

Aprenderá acerca de...

- Las formas de las proposiciones
- El razonamiento válido

. . . porque

Estos temas son importantes en el estudio de la lógica.

Formas de proposiciones

Las proposiciones expresadas en la forma "si p, entonces q" se denominan **condicionales** o **implicaciones**, y se expresan mediante $p \rightarrow q$. Tales proposiciones también pueden leerse "p implica q". La parte "si" de un condicional se denomina **hipótesis** de la implicación y la parte "entonces" se llama **conclusión**.

Muchos tipos de proposiciones pueden ponerse en la forma "si-entonces"; un ejemplo es el siguiente:

> Proposición: Todos los niños de primer año tienen 6 años de edad.
>
> Forma si-entonces: Si un niño es de primer año, entonces el niño tiene 6 años de edad.

Una implicación también puede considerarse una promesa. Suponga que Betty hace la promesa, "Si obtengo un aumento, entonces te invitaré a cenar". Si Betty cumple su promesa, la implicación es verdadera; si Betty rompe su promesa la implicación es falsa. Considere las cuatro posibilidades siguientes:

	p	q	
(1)	V	V	Betty obtiene el aumento; ella lo invita a cenar.
(2)	V	F	Betty obtiene el aumento; ella no lo invita a cenar.
(3)	F	V	Betty no obtiene el aumento; ella lo invita a cenar.
(4)	F	F	Betty no obtiene el aumento; ella no lo invita a cenar.

El único caso en que Betty no cumple su promesa es cuando ella obtiene su aumento y no lo invita a cenar, el caso 2). Si ella no obtiene el aumento, ella puede invitarlo a cenar o no sin romper su promesa. La definición de la implicación se resume en la tabla C.6. Observe que el único caso para el que la implicación es falsa es cuando p es verdadera y q es falsa.

Tabla C.6

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Una implicación puede ser expresada de varias formas equivalentes, de las siguientes maneras:

1. Si el sol brilla, entonces la alberca se abre (si p, entonces q).
2. Si el sol brilla, la alberca se abre (si p, q).
3. La alberca se abre si el sol brilla (q si p).
4. El sol brilla implica que la alberca se abra (p implica q).
5. El sol está brillando sólo si la alberca está abierta (p sólo si q).
6. Que el sol esté brillando es una condición suficiente para que la alberca sea abierta (p es una condición suficiente para q).
7. Que la alberca se abra es una condición necesaria para que el sol esté brillando (q es una condición necesaria para p).

Cualquier implicación $p \rightarrow q$ tiene tres implicaciones relacionadas, como sigue:

Proposición:	Si p, entonces q	$p \rightarrow q$
Recíproca:	Si q, entonces p	$q \rightarrow p$
Inversa:	Si no p, entonces no q	$\sim p \rightarrow \sim q$
Contrapositiva:	Si no q, entonces no p	$\sim q \rightarrow \sim p$

EJEMPLO 1 Recíproca, inversa, contrapositiva

Escriba la recíproca, la inversa y la contrapositiva para cada una de las proposiciones siguientes:

a) Si $2x = 6$, entonces $x = 3$.

b) Si estoy en San Francisco, entonces estoy en California.

SOLUCIÓN

a) *Recíproca:* Si $x = 3$, entonces $2x = 6$.

Inversa: Si $2x \neq 6$, entonces $x \neq 3$.

Contrapositiva: Si $x \neq 3$, entonces $2x \neq 6$.

b) *Recíproca:* Estoy en California, entonces estoy en San Francisco.

Inversa: Si no estoy en San Francisco, entonces No estoy en California.

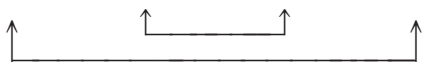
Contrapositiva: Si no estoy en California, entonces no estoy en San Francisco.

Ahora resuelva el ejercicio 3, partes a) y b).

La tabla C.7 muestra que una implicación y su recíproco no siempre tienen el mismo valor de verdad. Sin embargo, una implicación y su contrapositiva siempre tienen el mismo valor de verdad. Además, la recíproca y la inversa de una proposición condicional son lógicamente equivalentes.

Tabla C.7 Recíproca, Inversa, Contrapositiva

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implicación $p \rightarrow q$	Recíproca $q \rightarrow p$	Inversa $\sim p \rightarrow \sim q$	Contra-positiva $\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V



La conexión de una proposición y su recíproca con el conectivo *y* da $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Esta proposición compuesta puede escribirse como $p \leftrightarrow q$ y generalmente se lee "p si, y sólo si q". La proposición "p si, y sólo si q" es una **bicondicional**. La C.8 es una tabla de verdad para $p \leftrightarrow q$. Observe que $p \leftrightarrow q$ es verdadera si, y sólo, si ambas proposiciones son verdaderas o ambas son falsas.

Tabla C.8 Bicondicional

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	Bicondicional $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ o $p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

EJEMPLO 2 Bicondicionales

Dadas las proposiciones siguientes, clasifique cada una de las bicondicionales como verdadera o falsa:

p: $2 = 2$ $\quad r$: $2 = 1$

q: $2 \neq 1$ $\quad s$: $2 + 3 = 1 + 3$

a) $p \leftrightarrow q$ **b)** $p \leftrightarrow r$

c) $s \leftrightarrow q$ **d)** $r \leftrightarrow s$

SOLUCIÓN

a) $p \rightarrow q$ es verdadera y $q \rightarrow p$ es verdadera, así que $p \leftrightarrow q$ es verdadera.

b) $p \rightarrow r$ es falsa y $r \rightarrow p$ es verdadera, por lo que $p \leftrightarrow r$ es falsa.

c) $s \rightarrow q$ es verdadera y $q \rightarrow s$ es falsa, así que $s \leftrightarrow q$ es falsa.

d) $r \rightarrow s$ es verdadera y $s \rightarrow r$ es verdadera, por lo que $r \leftrightarrow s$ es verdadera.

Ahora resuelva el ejercicio 5, partes a) y f).

Ahora considere la proposición siguiente:

Está lloviendo o no está lloviendo.

Esta proposición, que puede modelarse como $p \vee (\sim p)$, siempre es verdadera, como se muestra en la tabla C.9. Una proposición que siempre es verdadera se denomina una **tautología**. Una forma de construir una tautología es tomar dos proposiciones lógicamente equivalentes, tal como $p \rightarrow q$ y $\sim q \rightarrow \sim p$ (de la tabla C.7) y con ellas formar una bicondicional de la siguiente manera:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

Como $p \rightarrow q$ y $\sim q \rightarrow \sim p$ tienen los mismos valores de verdad, $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ es una tautología.

Tabla C.9 Una tautología

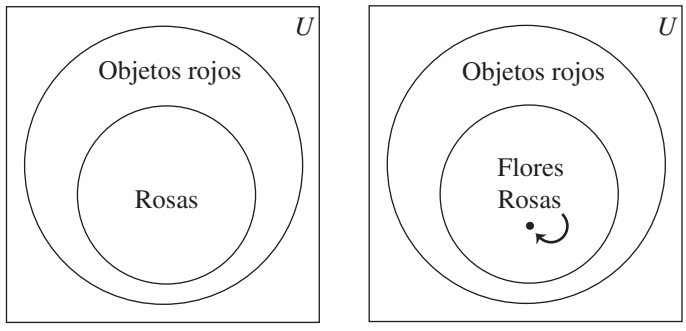
p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
V	F	V
F	V	V

Razonamiento válido

En la resolución de problemas, se dice que el razonamiento utilizado es **válido** si la conclusión se deduce inevitablemente de las hipótesis. Considere el ejemplo siguiente:

Hipótesis:	Todas las rosas son rojas.
	Esta flor es una rosa.
Conclusión:	Por lo tanto, esta flor es roja.

La proposición "Todas las rosas son rojas" puede escribirse como la implicación "Si una flor es una rosa, entonces es roja", y representada mediante el diagrama de Venn en la figura C.2a.



a) **b)**

FIGURA C.2 **a** Todas las rosas son rojas. **b** Esta flor es una rosa.

La información "Esta flor es una rosa" implica que esta flor debe pertenecer al círculo que contiene a las rosas, como se ilustra en la figura C.2b. Esta flor también debe pertenecer al círculo que contiene a los objetos rojos. Así que el razonamiento es válido ya que es imposible dibujar una gráfica que satisfaga las hipótesis y contradiga la conclusión.

Considere el argumento siguiente:

Hipótesis: Todo maestro de educación elemental está instruido en matemáticas.
Algunas personas instruidas en matemáticas no son niños.

Conclusión: Por lo tanto, ningún maestro de educación elemental es un niño.

Sea E el conjunto de maestros de educación elemental, M el conjunto de personas instruidas en matemáticas y C el conjunto de niños. Entonces la proposición "Todos los maestros de educación elemental son instruidos en matemáticas" puede ilustrarse como en la figura C.3a. La proposición "Algunas personas instruidas en matemáticas no son niños" puede graficarse de varias formas; tres de ellas se ilustran en las figuras de la C.3b a la C.3d.

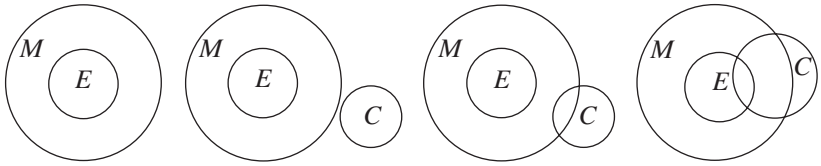


FIGURA C.3 **a** Todos los maestros de enseñanza elemental son instruidos en matemáticas. **b–d** Algunas personas instruidas en matemáticas no son niños.

De acuerdo con la figura C.3d, es posible que algunos maestros de educación elemental sean niños y las proposiciones dadas aún se satisfacen. Por lo tanto, la conclusión que "Ningún maestro de educación elemental es un niño" no se deduce de las hipótesis dadas. Por tanto, el razonamiento no es válido.

Si puede dibujarse un dibujo que satisfaga las hipótesis de un argumento y contradice la conclusión, el argumento no es válido. Sin embargo, para mostrar que un argumento es válido, deben considerarse todos los posibles dibujos para mostrar que no hay contradicción. Si el argumento es válido, no debe haber forma de satisfacer las hipótesis y contradecir la conclusión.

EJEMPLO 3 Argumento válido

Determine si el argumento siguiente es válido:

Hipótesis: En Washington, D.C. todos los senadores usan corbata.
Nadie en Washington, D.C. que mida más de 6 pies de alto usa una corbata.

Conclusión: Las personas de más de 6 pies de alto no son senadores en Washington, D.C.

SOLUCIÓN

Si S representa el conjunto de senadores y P representa el conjunto de personas que utilizan corbatas, la primera hipótesis está representada como se muestra en la figura C.4a. Si T representa el conjunto de personas en Washington , D.C. de más de 6 pies de alto, la segunda hipótesis está representada en la figura C.4b. Como las personas de más de 6 pies de alto están fuera del círculo que representa a los que utilizan corbatas y los senadores están dentro del círculo P, la conclusión es válida: ninguna persona de más de 6 pies de alto puede ser un senador en Washington, D.C.

Ahora resuelva el ejercicio 14a.

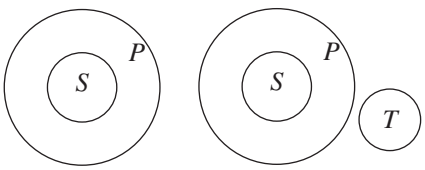


FIGURA C.4 **a** En Washington, D.C., todos los senadores utilizan corbata. **b** Nadie en Washington, D.C. de más de 6 pies de alto usa una corbata.

Un método diferente para determinar si un argumento es válido utiliza el **razonamiento directo** y una forma de argumento denominado Ley de separación (o **modus ponens**). Por ejemplo, considere las siguientes proposiciones verdaderas:

Si el sol brilla, entonces iremos de viaje.

El sol está brillando.

Utilizando estas dos proposiciones, podemos concluir que iremos de viaje. En general, la **Ley de separación** se establece de la siguiente forma:

Si una proposición en la forma "si p, entonces q" es verdadera y p es verdadera, entonces q también debe ser verdadera.

En ocasiones, la ley de separación se describe esquemáticamente de la siguiente manera, donde todas las proposiciones arriba de la línea horizontal son verdaderas y la proposición debajo de la línea horizontal es la conclusión.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p} \\ q \end{array}$$

La ley de separación se deduce de la tabla de verdad para $p \to q$ dada en la tabla C.6. El único caso en que p y $p \to q$ son verdaderos es cuando q es verdadero (línea 1 en la tabla).

EJEMPLO 4 Aplicación de la ley de separación

Determine si cada uno de los argumentos siguientes es válido:

Hipótesis:	Si usted come espinacas, entonces usted estará fuerte. Usted come espinacas.
Conclusión:	Por lo tanto, usted estará fuerte.
Hipótesis:	Si Claude va a esquiar, él se romperá una pierna. Si Claude se rompe una pierna, él no podrá ingresar al concurso de baile. Claude va a esquiar.
Conclusión:	Por lo tanto, Claude no puede ingresar al concurso de baile.

SOLUCIÓN

a) Mediante la ley de separación, vemos que la conclusión es válida.

b) Al utilizar la ley de separación dos veces, vemos que la conclusión es válida.

Ahora resuelva el ejercicio 14 b).

Un tipo diferente de razonamiento, **razonamiento indirecto**, utiliza una forma del argumento denominado **modus tollens**. Por ejemplo, considere las proposiciones verdaderas siguientes:

Si Pollito hubiese sido golpeado por una rana saltarina, él habría pensado que la Tierra se había levantado.

Pollito no cree que la Tierra se haya levantado.

¿Cuál es la conclusión? La conclusión es que Pollito no fue golpeado por una rana saltarina. Esto nos lleva a la forma general del modus tollens.

Si tenemos una condicional aceptada como verdadera y sabemos que la conclusión es falsa, entonces la hipótesis debe ser falsa.

En ocasiones, el modus tolles se describe esquemáticamente como sigue:

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

La validez del modus tollens también se deduce de la tabla para $p \rightarrow q$, dada en la tabla C.6. El único caso en que $p \rightarrow q$ es verdadera y q es falsa, es cuando p es falsa (línea 4 en la tabla). La validez del modus tollens puede establecerse a partir del hecho que una implicación y su contrapositiva son equivalentes.

EJEMPLO 5 Aplicaciones del modus tollens

Determine las conclusiones para cada uno de los siguientes conjuntos de proposiciones verdaderas:

a) Si una viejecita vive en un zapato, entonces ella no sabe qué hacer.

La señora Pumpkin Eater, una viejecita, sabe qué hacer.

b) Si Jack es ágil, él no se quemará. Jack se quemó.

SOLUCIÓN

a) La señora Pumkin Eater no vive en un zapato.

b) Jack no es ágil.

Ahora resuelva el ejercicio 13 a).

Con frecuencia, la gente obtiene conclusiones no válidas con base en anuncios u otra información. Por ejemplo, considere la proposición "La gente saludable come cereal Súper-Bran". ¿Las conclusiones siguientes son válidas?

Si una persona come cereal Súper-Bran, entonces la persona es saludable.
Si una persona no es saludable, la persona no come cereal Súper-Bran.

Si la proposición original se expresa mediante $p \rightarrow q$, donde p es "una persona es saludable" y q es "una persona come cereal Súper-Bran", entonces la primera conclusión es la recíproca de $p \rightarrow q$, (esto es, $q \rightarrow p$) y la segunda conclusión es la inversa de $p \rightarrow q$ (esto es, $\sim p \rightarrow \sim q$). La tabla C.7 indica que ni la recíproca ni la inversa son lógicamente equivalentes a la proposición original, y en consecuencia no necesariamente son verdaderas.

El último argumento de razonamiento que será considerado aquí, incluye la **Regla de la cadena**. Considere las proposiciones:

Si mi esposa trabaja, yo me jubilaré pronto.
Si yo me jubilo pronto, yo estaré ocioso.

¿Cuál es la conclusión? La conclusión es que si mi esposa trabaja, yo estaré ocioso. En general, la regla de la cadena puede establecerse como sigue:

Si "si p, entonces q" y "si q, entonces r" son verdaderas, entonces "si p, entonces r" es verdadera.

En ocasiones, mediante un esquema, la regla de la cadena se describe así:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ p \to r \end{array}$$

Observe que la regla de la cadena muestra que la implicación es una relación transitiva.

EJEMPLO 6 Aplicaciones de la regla de la cadena

Determine conclusiones para cada uno de los conjuntos siguientes de proposiciones verdaderas:

a) Si Alicia sigue al Conejo Blanco, ella caerá en un agujero. Si ella cae en un agujero, ella irá a una fiesta de té.

b) Si Pollito es golpeado por una bellota, nosotros pensaremos que el cielo se está cayendo. Si pensamos que el cielo se está cayendo, iremos a un refugio antinuclear. Si vamos a un refugio antinuclear, permaneceremos allí un mes.

SOLUCIÓN

a) Si Alicia sigue al Conejo Blanco, ella irá a una fiesta de té.

b) Si Pollito es golpeado por una bellota, nosotros permaneceremos en un refugio antinuclear un mes.

Ahora resuelva el ejercicio 13 c).

OBSERVACIÓN

Observe que en el ejemplo 6, la regla de la cadena puede ampliarse para tener varias implicaciones.

EJERCICIOS DEL APÉNDICE C.2

1. Escriba cada una de las siguientes en forma simbólica, si p es la proposición "Está lloviendo" y q es la proposición "El pasto está mojado".

a) Si está lloviendo, entonces el pasto está mojado.
b) Si no está lloviendo, entonces el pasto está mojado.
c) Si está lloviendo, entonces el pasto no está mojado.
d) El pasto está mojado si está lloviendo.
e) Que el pasto no esté mojado implica que no está lloviendo.
f) El pasto está mojado si, y sólo si, está lloviendo.

2. Construya una tabla de verdad para cada una de las siguientes:

a) $p \to (p \vee q)$ **b)** $(p \wedge q) \to q$
c) $p \leftrightarrow \sim(\sim p)$ **d)** $\sim(p \to q)$

3. Para cada una de las implicaciones siguientes, indique la recíproca, la inversa y la contrapositiva.

a) Si come Meaties, entonces usted es bueno en los deportes.
b) Si no le gusta este libro, entonces a usted no le gustan las matemáticas.
c) Si usted no utiliza la pasta dental Ultra Brush, entonces tiene caries.
d) Si usted es bueno en lógica, entonces sus calificaciones son altas.

4. ¿Una implicación y su recíproca pueden ser falsas al mismo tiempo? Explique su respuesta.

5. Si p es verdadera y q es falsa, determine los valores de verdad para cada una de las siguientes:

a) $\sim p \to \sim q$ **b)** $\sim(p \to q)$
c) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$ **d)** $p \to \sim p$
e) $(p \vee \sim p) \to p$ **f)** $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

6. Si p es falsa y q es falsa, determine los valores de verdad para cada una de las proposiciones del ejercicio 5.

7. Iris hace la afirmación verdadera: "Si llueve, entonces yo iré al cine". ¿Se deduce lógicamente que si no llueve, entonces Iris no va al cine?

8. Considere la proposición "Si cada dígito de un número es 6, el número es divisible entre 3". Determine si cada una de las proposiciones siguientes es lógicamente equivalente a la proposición.

a) Si cada dígito de un número no es 6, entonces el número no es divisible entre 3.

b) Si un número no es divisible entre 3, entonces algún dígito del número no es 6.

c) Si un número es divisible entre 3, entonces cada dígito del número es 6.

9. Escriba una proposición lógicamente equivalente a la proposición "Si un número es un múltiplo de 8, entonces es un múltiplo de 4".

10. Utilice tablas de verdad para demostrar que las siguientes son tautologías:

a) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow q]$. Ley de la hipótesis agregada.

b) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$. Ley de separación.

c) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$. Modus tollens

d) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$. Regla de la cadena.

11. **a)** Suponga que $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ y $r \rightarrow s$ son verdaderas, pero que s es falsa. ¿Qué puede concluir acerca del valor de verdad de p?

b) Suponga que $(p \wedge q) \rightarrow r$ es verdadera, r es falsa y q es verdadera. ¿Qué puede concluir acerca del valor de verdad de p?

c) Suponga que $p \rightarrow q$ es verdadero y $q \rightarrow p$ es falsa. ¿q puede ser verdadera? ¿Por qué sí o por qué no?

12. Traduzca las proposiciones siguientes a forma simbólica. Proporcione significados de los símbolos que utilice.

a) Si el corderito de María la sigue a la escuela, entonces parecerá que infringe las reglas y María será enviada a casa.

b) Si no es el caso que Jack sea ágil, entonces Jack no alcanzará el candelero.

c) Si la manzana no hubiese golpeado en la cabeza a Isaac Newton, entonces las leyes de la gravedad no hubiesen sido descubiertas.

13. Para cada una de las siguientes, obtenga una conclusión que se deduzca lógicamente de las proposiciones dadas:

a) Todos los estudiantes universitarios son pobres.
Helen es una estudiante universitaria.

b) A algunos estudiantes de primer año les gustan las matemáticas.
Todas las personas a quienes les gustan las matemáticas son inteligentes.

c) Si yo estudio para el examen final, entonces pasaré el examen final.
Si paso el examen final, entonces aprobaré el curso.
Si apruebo el curso, entonces buscare un empleo en la enseñanza.

d) Todo triángulo equilátero es isósceles.
Existen triángulos que son equiláteros.

14. Investigue la validez de cada uno de los argumentos siguientes:

a) Todas las mujeres son mortales.
Hipatia fue una mujer.
Por lo tanto, Hipatia fue mortal.

b) Todos los cuadrados son cuadriláteros.
Todos los cuadriláteros son polígonos.
Por lo tanto, todos los cuadriláteros son polígonos.

c) Todos los maestros son inteligentes.
Algunos maestros son ricos.
Por lo tanto, algunas personas inteligentes son ricas.

d) Si una estudiante es de primer año, entonces ella cursa matemáticas.
Jane es una estudiante de segundo año.
Por lo tanto, Jane no cursa matemáticas.

15. Escriba lo siguiente en la forma si-entonces:

a) Toda figura que es un cuadrado es un rectángulo.

b) Todos los enteros son números racionales.

c) Las figuras con exactamente tres lados pueden ser triángulos.

d) Llueve sólo si está nublado.

Glosario

Abre hacia arriba o abre hacia abajo Una parábola $y = ax^2 + bx + c$ abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$ (página 636).

Acotada Una función f está acotada, si existen números b y B tales que $b \leq f(x) \leq B$, para toda x en el dominio de f (página 95).

Acotada por abajo Una función f está acotada por abajo si existe un número b tal que $b \leq f(x)$ para toda x en el dominio de f (página 95).

Acotada por arriba Una función f está acotada por arriba si existe un número B tal que $f(x) \leq B$ para toda x en el dominio de f (página 95).

Afelio El punto más alejado del Sol en la órbita de un planeta (página 649).

Ajuste de una recta o curva a datos Determinación de una recta o una curva que pase cerca de todos los puntos de un diagrama de dispersión (página 155).

Alargamiento en un factor c Transformación de una gráfica obtenida por la multiplicación de todas las coordenadas x (alargamiento horizontal) por la constante $1/c$, o todas las coordenadas y (alargamiento vertical) de los puntos por una constante c, $c > 1$ (página 144).

Alargamiento o compresión horizontal Consulte *Alargamiento*, *Compresión*.

Alargamiento o compresión vertical Consulte *Alargamiento, Compresión*.

Alejamiento (zoom out) Procedimiento de una utilería gráfica usado para ver más del plano coordenado (por ejemplo, utilizado para determinar el comportamiento en los extremos de una función) (página 203).

Algoritmo de la división para polinomios Dado $f(x)$, $d(x) \neq 0$ existen polinomios únicos $q(x)$ (cociente) y $r(x)$ (residuo) con $f(x) = d(x)q(x) + r(x)$, con $r(x) = 0$ o grado de $r(x) <$ grado de $d(x)$ (página 214).

Amplitud Consulte *Sinusoide*.

Ancho focal de una parábola La longitud de la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje (página 635).

Ángulo Unión de dos rayos con un extremo común (el vértice). El lado inicial puede rotarse con respecto a su extremo para obtener la posición final (el lado terminal) (página 370).

Ángulo agudo Un ángulo cuya medida está entre 0° y 90° (página 360).

Ángulo central Un ángulo cuyo vértice es el centro de un círculo (página 350).

Ángulo de cuadrante Un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal está en un eje (página 375).

Ángulo de depresión El ángulo agudo formado por la línea de visión (hacia abajo) y la horizontal (página 425).

Ángulo de dirección de un vector El ángulo que forma el vector con la parte positiva del eje x (página 507).

Ángulo de elevación El ángulo agudo formado por la línea de visión (hacia arriba) y la horizontal (página 425).

Ángulo de referencia Consulte *Triángulo de referencia*.

Ángulo diedro El ángulo formado a lo largo del lado común de dos planos que se intersecan (página 491).

Ángulo dirigido Consulte *Coordenadas polares.*

Ángulo entre vectores El ángulo formado por dos vectores no nulos, en posición estándar, que comparten un punto inicial común (página 515).

Ángulo negativo Ángulo generado mediante una rotación en el sentido de las manecillas del reloj (página 370).

Ángulo positivo Ángulo generado por una rotación en contra del sentido de las manecillas del reloj (página 370).

Ángulo recto Un ángulo de 90° (página 360).

Ángulos coterminales Dos ángulos que tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal (página 370).

Anualidad Una sucesión de pagos periódicos iguales (página 338).

Anualidad ordinaria Anualidad en la que los depósitos se hacen al mismo tiempo en que el interés se contabiliza (página 338).

Arco intersecado Arco de un círculo entre el lado inicial y el lado terminal de un ángulo central (página 351).

Argumento de un número complejo El argumento de $a + bi$ es el ángulo de dirección del vector $\langle a, b \rangle$ (página 551).

Asíntota, en los extremos, de una función racional Un polinomio al que la función se aproxima cuando $|x| \to \infty$ (página 240).

Asíntota horizontal La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función f si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ o $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ (página 100).

Asíntota inclinada Asíntota, de comportamiento a la larga, que es una recta y no es horizontal ni vertical (página 241).

Asíntota vertical La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ (páginas 100, 240).

Base Consulte *N-ésima potencia de a.*

Binomio Un polinomio con exactamente dos términos (página 711).

Cardioide Una *limaçon* cuya ecuación polar es $r = a \pm a \operatorname{sen} \theta$, o $r = a \pm a \cos \theta$, donde $a > 0$ (página 545).

Caso ambiguo Un triángulo en el cual se conocen dos lados y un ángulo no incluido (página 479).

Caso base Consulte *Inducción matemática.*

Centro El punto central en un círculo, elipse, hipérbola o esfera (páginas 18, 647).

Cero de una función Un valor del dominio que provoca que el valor de la función sea cero (página 217).

Cero factorial Consulte *n factorial*.

Ceros irracionales Ceros de una función que son números irracionales (página 218).

Ceros racionales Ceros de una función que son números racionales (página 218).

Ceros reales Ceros de una función que son números reales (página 205).

Ceros repetidos Ceros de multiplicidad ≥ 2 (Consulte *Multiplicidad*) (página 205).

Cicloide La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = t - \text{sen } t$, $y = 1 - \cos t$ (página 532).

Círculo unitario Círculo con radio 1 y centro en el origen (página 377).

Circunferencia Un conjunto de puntos en el plano a la misma distancia de un punto fijo denominado centro (página 18).

Cociente de funciones $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ (página 117).

Cociente de la diferencia simétrica de f en a

$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ (página 826).

Cociente de números complejos

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (páginas 56, 552).

Cociente de polinomios Consulte *Algoritmo de la división para polinomios*.

Coeficiente El número real que multiplica a la variable o variables en un término (página 200).

Coeficiente de correlación Una medida de la fuerza de la relación lineal entre dos variables (página 158).

Coeficiente de determinación El número r^2 o R^2 que mide qué tan bien una curva de regresión se ajusta a los datos (página 158).

Coeficiente principal Consulte *Función polinomial en x.*

Coeficientes binomiales Los números del triángulo de Pascal:

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ (página 712).

Combinación Disposición de elementos de un conjunto en la que el orden no es importante (página 704).

Combinación lineal de vectores u y v Una expresión $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, donde a y b son números reales (página 507).

Combinaciones de n objetos tomados de r en r

${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ (página 704).

Combinatoria Rama de las matemáticas dedicada a la determinación del número de elementos de un conjunto o el número de formas en que los objetos pueden acomodarse o combinarse (página 700).

Complementos o ángulos complementarios Dos ángulos de medida positiva cuya suma es 90° (página 446).

Completar el cuadrado Un método de sumar una constante a una expresión para formar un cuadrado perfecto (página 45).

Componente horizontal Consulte *Forma componente de un vector*.

Componente vertical Consulte *Forma componente de un vector*.

Componentes de un vector Consulte *Forma componente de un vector.*

Comportamiento en los extremos (a la larga) El comportamiento de una gráfica de una función cuando $|x| \to \infty$ (página 203).

Composición anual Consulte *Composición k veces por año.*

Composición continua Interés compuesto que utiliza la fórmula $A = Pe^{rt}$ (página 337).

Composición de funciones $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ (página 118).

Composición k veces por año Interés compuesto que utiliza la fórmula $A = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$, donde $k = 1$ se compone anualmente, $k = 4$ se compone cada trimestre, $k = 12$ se compone cada mes, etcétera (página 335).

Composición mensual Consulte *Composición k veces por año.*

Compresión (contracción) en un factor c Transformación de una gráfica obtenida al multiplicar todas las coordenadas x (compresión horizontal) por la constante $1/c$ o todas las coordenadas y (compresión vertical) por la constante c, $0 < c < 1$ (página 145).

Conjugados complejos Números complejos $a + bi$ y $a - bi$ (página 55).

Conjunto ordenado Un conjunto está ordenado si es posible comparar cualesquier dos elementos y decir que un elemento es "menor que" o "mayor que" el otro (página 3).

Conjunto solución de una desigualdad El conjunto de todas las soluciones (página 26).

Conjunto vacío Un conjunto sin elementos (página 720).

Constante Una letra o símbolo que se establece por un número específico (página 6).

Constante de variación Consulte *Función potencia.*

Continua en $x = a$ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (página 91).

Convergencia de una serie Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, converge a una suma S, si $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$.

Convergencia de una sucesión Una sucesión $\{a_n\}$ converger a a, si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Coordenada *x* (abscisa) La distancia dirigida del eje y (plano yz) a un punto en un plano (espacio), o el primer número en un par ordenado (terna) (página 14).

Coordenada *y* (ordenada) La distancia dirigida del eje x (plano xz) a un punto en un plano (espacio), o el segundo número en un par ordenado (terna) (página 14).

Coordenada *z* La distancia dirigida desde el plano xy a un punto en el espacio, o el tercer número en una terna ordenada (página 685).

Coordenada(s) de un punto El número asociado con un punto en una recta numérica, o la pareja ordenada asociada con un punto en el plano de coordenadas cartesianas, o la terna ordenada asociada con un punto en el espacio cartesiano tridimensional (páginas 3, 14, 685).

Coordenadas polares Los números (r, θ) que determinan la ubicación de un punto en un sistema de coordenadas polares. El número r es la distancia dirigida y θ es el ángulo dirigido (página 534).

Correlación lineal Un diagrama de dispersión con puntos agrupados a lo largo de una recta. La correlación es positiva si la pendiente es positiva y es negativa si la pendiente es negativa (página 174).

Corrimiento de fase Consulte *Sinusoide*.

Cosecante La función $y = \csc x$ (página 399).

Coseno La función $y = \cos x$ (página 386).

Cota inferior de *f* Cualquier número b para el que $b \le f(x)$ para toda x en el dominio de f (página 95).

Cota inferior para ceros reales Una número c es una cota inferior para el conjunto de ceros reales de f, si $f(x) \neq 0$, siempre que $x < c$ (página 220).

Cota superior para ceros reales Un número d es una cota superior para el conjunto de ceros de f, si $f(x) \neq 0$ siempre que $x > d$ (página 220).

Cota superior para *f* Cualquier número B para el que $f(x) \le B$ para toda x en el dominio de f (página 95).

Cotangente La función $y = \cot x$ (página 397).

Creciente en un intervalo Una función f es creciente en un intervalo I, si para cualesquier dos puntos en I, un cambio positivo en x resulta en un cambio positivo en $f(x)$ (página 93).

Criterio de la cota inferior para ceros reales Una prueba para determinar una cota inferior para los ceros reales de un polinomio (página 220).

Criterio de la cota superior para ceros reales Criterio para determinar una cota superior para los ceros reales de un polinomio (página 220).

Cuadrante Cualquiera de las cuatro partes en las que el plano es dividido por los ejes de coordenadas perpendiculares (página 14).

Cuadrática irreducible en los reales Un polinomio cuadrático con coeficientes reales que no puede factorizarse utilizando coeficientes reales (página 232).

Cuartil El primer cuartil es la mediana de la mitad inferior de un conjunto de datos, el segundo cuartil es la mediana y el tercer cuartil es la mediana de la mitad superior de los datos (página 775).

Cúbica Una función polinomial de grado tres (página 200).

Cuerda de una cónica Un segmento de recta con extremos en la cónica (página 635).

Cuerda focal de una parábola Una cuerda de una parábola que pasa por el foco (página 635).

Curso Consulte *Rumbo.*

Curva de demanda $p = g(x)$, donde x representa la demanda y p el precio (página 574).

Curva de oferta $p = f(x)$, donde x representa la producción y p representa el precio (página 574).

Curva en forma de rosa Una gráfica de una ecuación polar $r = a \cos n\theta$ o $r = a \operatorname{sen} n\theta$ (página 544).

Curva gausiana Consulte *Curva normal*.

Curva logística La gráfica de la función de crecimiento logístico (página 283).

Curva normal La gráfica de $f(x) = e^{-x^2/2}$ (página 780).

Curva paramétrica La gráfica de ecuaciones paramétricas (página 522).

Datos Elementos de información recolectados con fines estadísticos (página 759).

Datos extremos (*outliers*) Datos a más de 1.5 veces el RIC por abajo del primer cuartil o arriba del tercer cuartil (página 777).

Decreciente en un intervalo Una función f es decreciente en un intervalo I, si para cualesquier dos puntos en I, un cambio positivo en x tiene como resultado un cambio negativo en $f(x)$ (página 93).

Derivada de *f* La función f definida por $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para toda x, donde el límite exista (página 797).

Derivada de *f* en *x* = *a* $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ siempre que el límite exista (página 797).

Derivada numérica de *f* en *a*

$$\text{NDER } f(a) = \frac{f(a + 0.001) - f(a - 0.001)}{0.002}$$ (página 826).

Desigualdad Una proposición que compara dos cantidades usando un símbolo de desigualdad (página 4).

Desigualdad doble Una proposición que describe un intervalo acotado, tal como $3 \le x < 5$ (página 28).

Desigualdad lineal con dos variables *x* y *y* Desigualdad que puede escribirse en una de las formas siguientes: $y < mx + b$, $y \leq mx + b$, $y > mx + b$ o $y \geq mx + b$ con $m \neq 0$ (página 617).

Desigualdad lineal en *x* Desigualdad que puede escribirse en la forma $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$ o $ax + b \geq 0$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$ (página 26).

Desviación estándar La medida de cuánto están dispersos los datos (página 778).

Desviación estándar muestral La *desviación estándar* calculada utilizando sólo una muestra de la población total (página 778).

Determinante Un número que está asociado con una matriz cuadrada (página 585).

Diagonal principal La diagonal que va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha de una matriz cuadrada (página 584).

Diagrama adosado de tallos Un diagrama de tallo con hojas a cada lado, usadas para comparar dos distribuciones (página 763).

Diagrama de árbol Visualización del *Principio de multiplicación para conteo* (página 723).

Diagrama de caja (o diagrama de caja y bigotes) Una gráfica que muestra un resumen de cinco números (página 777).

Diagrama de caja modificado Un diagrama de caja de la que se han eliminado los datos extremos (*outliers*) (página 778).

Diagrama de dispersión Diagrama de todas las parejas ordenadas de un conjunto de datos con dos variables en un plano coordenado (página 9).

Diagrama de pastel Consulte *Gráfica circular*.

Diagrama de tallo (o diagrama de tallo y hojas) Disposición de un conjunto de datos numéricos en una forma tabular específico (página 760).

Diagrama de tiempo Gráfica de líneas en la que el tiempo se mide en el eje horizontal (página 765).

Diagrama de Venn Visualización de la relación entre eventos en un espacio muestral (página 723).

Diferencia común Consulte *Sucesión aritmética*.

Diferencia de dos vectores $\langle u_1, u_2\rangle - \langle v_1, v_2\rangle = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2\rangle$ o $\langle u_1, u_2, u_3\rangle - \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle u_1 - u_2, v_1 - v_2, u_3 - v_3\rangle$ (página 690).

Diferencia de funciones $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ (página 117).

Diferencia de números complejos $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ (página 53).

Diferenciable en *x* = *a* $f'(a)$ existe (página 797).

Dimensiones de la ventana Las restricciones en x y y que especifican la ventana de visualización. Consulte *Ventana de visualización*.

Dirección de una flecha El ángulo que la flecha forma con la parte positiva del eje x (página 503).

Directriz de una parábola, elipse o hipérbola Una recta usada para determinar la cónica (páginas 634, 675).

Discontinuidad de salto en *x* = *a* $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe pero no son iguales (página 91).

Discontinuidad infinita en *x* = *a* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ (página 91).

Discontinuidad removible en *x* = *a* $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ pero el límite común no es igual a $f(a)$ o $f(a)$ no está definido (página 91).

Discriminante Para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, la expresión $b^2 - 4ac$; para la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, la expresión $B^2 - 4AC$ (páginas 56, 671).

Distancia (en el espacio cartesiano) La distancia $d(P, Q)$ entre $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ o $d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ (página 686).

Distancia (en un plano coordenado) La distancia $d(P, Q)$ entre $P(x, y)$ y $Q(x, y)$, $d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (página 16).

Distancia (en una recta numérica) La distancia entre los números reales a y b, o $|a - b|$ (página 15).

Distancia dirigida Consulte *Coordenadas polares.*

Distribución de frecuencias Consulte *Tabla de frecuencias*.

Distribución de probabilidad La colección de probabilidades de resultados en un espacio muestral asignada mediante una función de probabilidad (página 719).

Distribución normal Una distribución de datos que tiene la forma de la *curva normal* (página 780).

Divergencia Una sucesión o serie diverge si no converge (página 773).

División $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$, $b \neq 0$ (página 6).

División sintética Procedimiento usado para dividir un polinomio entre un factor lineal, $x - a$ (página 217).

Divisor de un polinomio Consulte *Algoritmo de la división para polinomios.*

Dominio de una función EL conjunto de todos los valores de entrada para una función (página 86).

Dominio implícito El dominio de una función con expresión algebraica (página 88).

Dominio relevante La parte del dominio aplicable a la situación que se modela (página 88).

Ecuación Una proposición de igualdad entre dos expresiones (página 24).

Ecuación cuadrática en *x* Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (página 45).

Ecuación de primer grado en *x*, *y* y *z* Una ecuación que puede escribirse en la forma $Ax + By + Cz + D = 0$ (página 689).

Ecuación de regresión lineal Ecuación de una recta de regresión lineal (página 157).

Ecuación de segundo grado con dos variables $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A, B y C no todas son iguales a cero (página 633).

Ecuación lineal en x Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax + b = 0$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$ (página 24).

Ecuación polar Una ecuación en r y θ (página 537).

Ecuación vectorial para una recta en el espacio La recta que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del vector no nulo $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ tiene la ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, donde $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ (página 692).

Ecuaciones equivalentes (Desigualdades) Ecuaciones (desigualdades) que tienen las mismas soluciones (páginas 25, 27).

Ecuaciones paramétricas Ecuaciones de la forma $x = f(t)$ y $y = f(t)$ para toda t en el intervalo I. La variable t es el parámetro e I es el intervalo del parámetro (páginas 127, 522).

Ecuaciones paramétricas para una recta en el espacio La recta que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del vector no nulo $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ tiene ecuaciones paramétricas $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$ (página 692).

Eje conjugado de una hipérbola El segmento de recta de longitud $2b$, que es perpendicular al eje focal y tiene el centro de la hipérbola como su punto medio (página 657).

Eje de simetría Consulte *Línea de simetría.*

Eje focal La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz de una cónica (página 644).

Eje imaginario Consulte *Plano complejo*.

Eje mayor El segmento de recta que pasa por el foco de una elipse y tiene sus extremos en la elipse (página 645).

Eje menor La bisectriz perpendicular del eje mayor de una elipse, que tiene sus extremos en la elipse (página 645).

Eje polar Consulte *Sistema de coordenadas polares*.

Eje real Consulte *Plano complejo*.

Eje transversal El segmento de recta cuyos extremos están en los vértices de una hipérbola (página 657).

Eje x En un sistema de coordenadas cartesianas, generalmente la recta coordenada horizontal con dirección positiva hacia la derecha (página 14).

Eje y En un sistema de coordenadas cartesianas, generalmente la recta vertical, con dirección positiva hacia arriba (página 14).

Eje z Generalmente, la tercera dimensión en el espacio cartesiano (página 685).

Elemento de la matriz Cualquiera de los números reales en una matriz (página 579).

Eliminación gausiana Un método para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas (página 594).

Elipse El conjunto de todos los puntos en el plano tal que la suma de las distancias a un par de puntos fijos (los focos) es una constante (página 644).

Elipsoide de revolución Una superficie generada mediante la rotación de un elipse alrededor de su eje mayor (página 651).

Enteros Los números ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,... (página 2).

Enteros no negativos Los números 0, 1, 2, 3,... (página 2).

Escala Richter Escala logarítmica que se emplea en la medición de la intensidad de un terremoto (páginas 318, 324).

Escalar Un número real (página 504).

Esfera Conjunto de puntos en el espacio cartesiano que están a la misma distancia de un punto fijo, llamado el centro (página 687).

Espacio muestral Conjunto de todos los posibles resultados de un experimento (página 718).

Espiral de Arquímedes La gráfica de la curva polar $r = \theta$ (página 546).

Estadística descriptiva La recolección y procesamiento de información numérica (página 771).

Estadística inferencial Uso de la ciencia estadística para hacer inferencias acerca de los parámetros de una población a partir de una muestra (página 771).

Estadístico Número que mide una variable cuantitativa para una muestra de una población (página 771).

Evento Un subconjunto del espacio muestral (página 718).

Evento dependiente Un evento cuya probabilidad depende de que otro evento ya haya ocurrido (página 725).

Eventos independientes Eventos A y B tales que $P(A \text{ y } B) = P(A)P(B)$ (página 722).

Excentricidad Un número no negativo que especifica la forma de una cónica (páginas 650, 660, 675).

Experimento Un procedimiento que tiene uno o más posibles resultados (página 718).

Exponente Consulte *N-ésima potencia de a*.

Expresión algebraica Una combinación de variable y constantes que incluyen suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces (página 6).

Expresión racional Expresión que puede escribirse como una razón de dos polinomios (página 852).

Extracción de raíces cuadradas Un método para resolver ecuaciones de la forma $x^2 = k$ (página 45).

Extremo de un intervalo Un número real que representa el "final" de un intervalo (página 5).

Extremo local Un máximo local o un mínimo local (página 96).

Factor de amortiguamiento El factor Ae^{-at} de una ecuación como $y = Ae^{-at} \cos bt$ (página 410).

FACTOR DE CONVERSIÓN Una razón igual a 1 (página 155).

FACTORIZACIÓN (DE UN POLINOMIO) Escritura de un polinomio como un producto de dos o más polinomios factores (página 47).

FLECHA La notación $\overrightarrow{PQ}$ que expresa al segmento dirigido de recta cuyo punto inicial es P y cuyo punto terminal es Q.

FLECHAS EQUIVALENTES Flechas que tienen la misma magnitud y dirección (página 503).

FOCO, FOCOS Consulte *Elipse, Hipérbola, Parábola*.

FORMA COMPONENTE DE UN VECTOR Si la representación de un vector en posición estándar tiene un punto terminal (a, b) (o a, b, c)), entonces $\langle a, b\rangle$ o $\langle a, b, c\rangle$ es la forma componente del vector, y a y b son los componentes horizontal o vertical del vector (o a, b y c son las componentes x, y y z del vector, respectivamente) (página 503).

FORMA DE VÉRTICE PARA UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA $f(x) = a(x - h)^2 + k$ (página 178).

FORMA DESARROLLADA El lado derecho de $u(v + w) = uv + uw$ (página 7).

FORMA DESARROLLADA DE UNA SERIE Una serie escrita explícitamente como una suma de términos (no en notación de suma) (página 747).

FORMA ESCALONADA POR RENGLONES Una matriz en la que los renglones que contienen solamente ceros aparecen sólo en la parte inferior de la misma, cuya primera entrada distinta de cero (en cualquier renglón que no consta únicamente de ceros) es 1 y en la que los 1 iniciales se mueven a la derecha conforme nos movemos hacia abajo en los renglones (página 597).

FORMA ESCALONADA REDUCIDA POR RENGLONES Una matriz de la forma escalonada por renglones en la que cada columna que comienza con 1 tiene ceros en el resto de las posiciones (página 599).

FORMA ESTÁNDAR:

ECUACIÓN DE UN POLINOMIO
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (página 200).

ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ (página 18).

ECUACIÓN DE UNA ELIPSE $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ o $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} + \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ (página 647).

ECUACIÓN DE UNA HIPÉRBOLA $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ o $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ (página 659).

ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ o $(y - k)^2 = 4p(x - k)$ (página 637).

ECUACIÓN DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA
$f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ (página 177).

FORMA ESTÁNDAR DE LA ECUACIÓN POLAR DE UNA CÓNICA $r = \dfrac{ke}{1 \pm e\cos\theta}$ o $r = \dfrac{ke}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$ (página 677).

FORMA ESTÁNDAR DE UN NÚMERO COMPLEJO $a + bi$, donde a y b son números reales (página 53).

FORMA EXPONENCIAL Una ecuación escrita con exponentes en lugar de logaritmos (páginas 276, 300).

FORMA FACTORIZADA El lado izquierdo de $u(v + w) = uv + uw$ (página 7).

FORMA GENERAL (DE UNA RECTA) $Ax + By + C = 0$, donde A y B no son ambos iguales a cero (página 33).

FORMA LOGARÍTMICA Una ecuación escrita con logaritmos en lugar de exponentes (página 300).

FORMA PENDIENTE INTERSECCIÓN (DE UNA RECTA) $y = mx + b$ (página 33).

FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO Consulte *Forma trigonométrica de un número complejo*.

FORMA PUNTO PENDIENTE (DE UNA RECTA) $y - y_1 = m(x - x_1)$ (página 32).

FORMA TRIANGULAR Forma especial para un sistema de ecuaciones lineales que facilita la determinación de la solución (página 594).

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ (página 551).

FÓRMULA CUADRÁTICA La fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ usada para resolver $ax^2 + bx + c = 0$ (página 46).

FÓRMULA DE HERÓN El área del $\triangle ABC$ con semiperímetro s está dada por $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (página 490).

FÓRMULA DE LA DISTANCIA EN POLARES La distancia entre los puntos con coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) $= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$ (página 540).

FÓRMULA DE LA LONGITUD DE ARCO La longitud de un arco de un círculo, de radio r, intersecado por un ángulo central de θ es $s = r\theta$ (página 353).

FRACCIONES COMPUESTAS Una expresión fraccionaria en la que el numerador o el denominador puede tener fracciones (página 854).

FRACCIONES PARCIALES El proceso de desarrollar una fracción en una suma de fracciones. La suma se denomina descomposición en fracciones parciales de la fracción original (página 608).

FRECUENCIA Recíproco del periodo (página 388).

FRECUENCIA (EN ESTADÍSTICA) El número de individuos u observaciones con cierta característica (página 764).

FRONTERA El conjunto de puntos en el "borde" de una región (página 618).

FUNCIÓN Una relación que asocia cada valor del dominio con exactamente un valor del rango (páginas 86, 690).

FUNCIÓN ARCOCOSECANTE Consulte *Función cosecante inversa.*

FUNCIÓN ARCOCOTANGENTE Consulte *Función cotangente inversa.*

FUNCIÓN ARCOSECANTE Consulte *Función secante inversa.*

FUNCIÓN ARCOSENO Consulte *Función coseno inverso* y *Función seno inverso.*

Función arcotangente Consulte *Función cotangente inversa.*

Función bicuadrática Una función polinomial de grado 4 (página 200).

Función constante (sobre un intervalo) $f(x_1) = f(x_2)$ para cualquier x_1 y x_2 (en el intervalo) (página 93).

Función continua Una función que es continua en todo su dominio (página 109).

Función cosecante inversa La función $y = \csc^{-1} x$.

Función coseno inverso La función $y = \cos^{-1} x$.

Función cotangente inversa La función $y = \cot^{-1} x$.

Función cuadrática Una función que puede escribirse en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$ (página 176).

Función de crecimiento exponencial Crecimiento modelado mediante $f(x) = a \cdot b^x$, $a > 0$, $b > 1$ (página 279).

Función de crecimiento logístico Un modelo de crecimiento población: $f(x) = \dfrac{c}{1 + a \cdot b^x}$ o $f(x) = \dfrac{c}{1 + ae^{-kx}}$, donde a,) b, c y k son positivas con $b < 1$, c es el límite de crecimiento (página 283).

Función de decaimiento exponencial Decaimiento modelado por $f(x) = a \cdot b^x$, $a > 0$ con $0 < b < 1$ (página 279).

Función de probabilidad Una función P que asigna un número real a cada resultado O en un espacio muestral que satisface $0 \leq P(O) \leq 1$, $P(\varnothing) = 0$ y la suma de las probabilidades de todos los resultados es 1 (página 720).

Función definida por partes Función cuyo dominio está dividido en varias partes y una regla funcional diferente se aplica a cada parte (página 111).

Función envolvente La función que asocia puntos en el círculo unitario con puntos en la recta real (página 377).

Función exponencial Una función de la forma $f(x) = a \cdot b^x$, $a \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ (página 276).

Función exponencial natural La función $f(x) = e^x$ (página 281).

Función identidad La función $f(x) = x$ (página 106).

Función impar Función cuya gráfica es simétrica con respecto al origen ($f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f) (página 98).

Función inversa La relación inversa de una función uno a uno (página 131).

Función lineal Una función que puede escribirse en la forma $f(x) = mx + b$, donde $m \neq 0$ y b son números reales (página 171).

Función logarítmica con base *b* La inversa de la función exponencial $y = b_x$, denotada por $y = \log_b x$ (página 300).

Función logarítmica natural El inverso de la función exponencial $y = e^x$, expresada como $y = \ln x$ (página 305).

Función logística básica La función $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$, (página 283).

Función monomial Un polinomio con exactamente un término (página 190).

Función objetivo Consulte *Problema de programación lineal.*

Función par Una función cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y ($f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f) (página 97).

Función periódica Una función f para la que existe un número positivo c tal que $f(t + c) = f(t)$ para todo valor de t en el dominio de f. El número más pequeño de tal c es el periodo de la función (página 379).

Función polinomial Una función en la que $f(x)$ es un polinomio en x (página 170).

Función polinomial de grado superior Una función polinomial cuyo grado es ≥ 3 (página 200).

Función potencia Función de la forma $f(x) = k \cdot x^a$, donde k y a son constantes no cero, k es la constante de variación y a es la potencia (página 188).

Función racional Función de la forma $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, donde) $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios y $g(x)$ no es el polinomio cero (página 237).

Función recíproca La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (página 107).

Función secante inversa La función $y = \sec^{-1} x$.

Función seno inverso La función $y = \text{sen}^{-1} x$ (página 414).

Función tangente inversa La función $y = \tan^{-1} x$ (página 417).

Función uno a uno Función en la que cada elemento del rango corresponde a exactamente un elemento en el dominio (página 132).

Funciones circulares Cuando las funciones trigonométricas se aplican a números reales son funciones circulares (página 378).

Grado Unidad de medida (representado por el símbolo ^{o}) para ángulos o arcos, igual a 1/360 de una vuelta completa (página 351).

Grado de un polinomio (función) El exponente más grande en cualquiera de los términos del polinomio (función) (página 170).

Gráfica circular Una gráfica circular que muestra datos categóricos (página 760).

Gráfica de barras Exhibición rectangular de datos categóricos (página 760).

Gráfica de ecuaciones paramétricas El conjunto de todos los puntos en el plano de coordenadas que corresponden a las parejas ordenadas determinadas mediante las ecuaciones paramétricas (página 522).

Gráfica de líneas Una gráfica de datos en los que puntos consecutivos se unen mediante segmentos de recta (página 765).

Gráfica de una desigualdad en *x* y *y* El conjunto de todos los puntos en el plano de coordenadas que corresponden a las soluciones (x, y) de la desigualdad (página 617).

GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN EN *x* Y *y* El conjunto de todos los puntos en el plano de coordenadas que corresponden a las parejas (x, y) que son soluciones de la ecuación (página 34).

GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN POLAR El conjunto de todos los puntos del sistema de coordenadas polares que corresponden a las parejas ordenadas (r, θ) que son soluciones de las ecuación polar (página 541).

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN El conjunto de todos los puntos que en el plano coordenado corresponden a los pares $(x, f(x))$ para x en el dominio de f (página 76).

GRÁFICA DE UNA RELACIÓN El conjunto de todos los puntos en el plano de coordenadas que corresponden a las parejas ordenadas de la relación (página 123).

GRÁFICA EN LA RECTA NUMÉRICA DE UNA DESIGUALDAD LINEAL La gráfica de las soluciones de una desigualdad lineal (en x) en la recta numérica (página 28).

GRAFICADORA O UTILERÍA GRAFICADORA Calculadora graficadora, o una computadora con un software para graficar (página 35).

HIPÉRBOLA Conjunto de puntos en el plano en el que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos (los focos) es una constante (página 656).

HIPOTENUSA Lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo (página 360).

HISTOGRAMA Una gráfica que representa visualmente la información en una tabla de frecuencias mediante áreas rectangulares proporcionales a las frecuencias (página 764).

HOJA El dígito final de un número en un diagrama de tallo (página 760).

IDÉNTICO ADITIVO PARA LOS NÚMEROS COMPLEJOS $0 + 0i$ es el número complejo cero (página 54).

IDENTIDAD Una ecuación que siempre es verdadera en todo su dominio (página 444).

IDENTIDAD DE COFUNCIÓN Una identidad que relaciona el seno, secante o tangente con coseno, cosecante o cotangente, respectivamente (página 446).

IDENTIDAD DE DIFERENCIA Identidad que incluye a una función trigonométrica de $u - v$ (páginas 464-465).

IDENTIDAD DE LA SUMA Identidad que incluye una función trigonométrica de $u + v$ (página 463).

IDENTIDAD DE MEDIO ÁNGULO Identidad que implica una función trigonométrica de $u/2$ (página 473).

IDENTIDAD DE REDUCCIÓN DE POTENCIA Una identidad que implica el cuadrado de una función trigonométrica (página 472).

IDENTIDAD DEL ÁNGULO DOBLE Una identidad que implica una función trigonométrica de $2u$ (página 471).

IDENTIDAD IMPAR-PAR Identidad que implica una función trigonométrica de $-x$ (página 447).

IDENTIDAD MULTIPLICATIVA PARA MATRICES Consulte *Matriz identidad*.

IDENTIDAD RECÍPROCA Identidad que iguala una función trigonométrica con el recíproco de otra función trigonométrica (página 445).

IDENTIDADES COCIENTES $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, (página 445).

IDENTIDADES PITAGÓRICAS $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ y $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ (página 446).

ÍNDICE DE UNA SUMA Consulte *Notación de suma*.

INDUCCIÓN MATEMÁTICA Un proceso para demostrar que una proposición es verdadera para todos los números naturales n mediante la demostración que es verdadera para $n = 1$ (el paso base) y que, si es verdadera para $n = k$, entonces debe ser verdadera para $n = k + 1$ (el paso inductivo) (página 752).

INTEGRABLE SOBRE [*a*, *b*] $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existe (página 808).

INTEGRAL DEFINIDA La integral definida de la función f sobre $[a, b]$ es $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\triangle x$ siempre que exista el límite de las sumas de Riemann (página 808).

INTERÉS COMPUESTO Interés que se convierte en parte de la inversión (página 334).

INTERPOLACIÓN POLINOMIAL El proceso de ajustar un polinomio de grado n a $(n + 1)$ puntos (página 208).

INTERSECCIÓN Punto, en una gráfica, donde una curva cruza el eje x, y o z (páginas 33, 76, 689).

INTERSECCIÓN *x* Un punto que está tanto en la gráfica como en el eje x (página 34).

INTERSECCIÓN *y* Punto que está tanto en la gráfica como en el eje y (página 33).

INTERVALO Subconjunto conexo de la recta de números reales con al menos dos puntos (página 5).

INTERVALO ABIERTO Intervalo que no incluye a sus extremos (página 5).

INTERVALO ACOTADO Un intervalo que tiene longitud finita (no se extiende a ∞ o a $-\infty$) (página 5).

INTERVALO CERRADO Un intervalo que incluye sus extremos (página 5).

INTERVALO DEL PARÁMETRO Consulte *Ecuaciones paramétricas*.

INTERVALO NO ACOTADO Intervalo que se extiende a $-\infty$ o a ∞ (o a ambos) (página 5).

INVERSA DE UNA MATRIZ La inversa de una matriz cuadrada A, si existe, es una matriz B tal que $AB = BA = I$, donde I es una matriz identidad (página 584).

INVERSO ADITIVO DE UN NÚMERO COMPLEJO El opuesto de $a + bi$ o $-a - bi$ (página 54).

INVERSO ADITIVO DE UN NÚMERO REAL El opuesto de b o $-b$ (página 6).

Inverso multiplicativo de un número complejo El recíproco de $a + bi$, o $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}\,i$ (página 55).

Inverso multiplicativo de un número real El recíproco de b, o $1/b$, $b \neq 0$ (página 6).

Inverso multiplicativo de una matriz Consulte *Inversa de una matriz*.

***K*-ésimo término de una secuencia** La expresión k-ésima de la secuencia (página 732).

Lado inicial de un ángulo Consulte *Ángulo*.

Lado terminal de un ángulo Consulte *Ángulo*.

Lemniscata Una gráfica de una ecuación polar de la forma $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ o $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (página 547).

Ley de enfriamiento de Newton $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ (página 326).

Ley de los cosenos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (página 487).

Ley de los senos $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$ (página 478).

Limaçon Una gráfica de una ecuación polar $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$ o $r = a \pm \text{b} \cos \theta$, con $a > 0$, $b > 0$ (página 545).

Límite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se hace arbitrariamente cercana a L cuando x se hace arbitrariamente cercana (pero no igual) a a (página 813).

Límite de crecimiento Consulte *Función de crecimiento logístico*.

Límite en infinito $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se hace arbitrariamente cercana a L cuando x se hace arbitrariamente grande, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ significa que $f(x)$ se hace arbitrariamente cercana a L cuando $-$x se hace arbitrariamente grande (páginas 805, 819).

Límite infinito Caso especial de un límite que no existe (página 819).

Límite por la derecha de *f* en *x* = *a* El límite de f cuando x tiende a a por la derecha (página 817).

Límite por la izquierda de *f* en *x* = *a* El límite de f cuando x se aproxima a a por la izquierda (página 817).

Línea de simetría Una línea sobre la que una gráfica es la imagen de espejo de ella misma (página 177).

Logaritmo Una expresión de la forma $\log_b x$ (Consulte *Función logarítmica natual*) (página 300).

Logaritmo común Un logaritmo con base 10 (página 302).

Logaritmo natural Un logaritmo con base e (página 303).

Longitud de un vector Consulte *Magnitud de un vector*.

Longitud de una flecha Consulte *Magnitud de una flecha*.

Longitud focal de una parábola La *distancia dirigida* del vértice al foco (página 635).

Magnitud de un número real Consulte *Valor absoluto de un número real*.

Magnitud de un vector La magnitud de $\langle a, b \rangle$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$. La magnitud de $\langle a, b, c \rangle$ es $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Magnitud de una flecha La magnitud de $\overrightarrow{PQ}$ es la distancia entre P y Q.

MARD (MARI) Una aproximación de sumas de Riemann del área bajo una curva $f(x)$ desde $x =$ a hasta $x = b$ usando x_i como el extremo derecho de cada subintervalo (página 810).

Matrices iguales Matrices que tienen el mismo orden y elementos correspondientes iguales (página 579).

Matriz aumentada Una matriz que representa un sistema de ecuaciones (página 596).

Matriz cero Matriz que consiste en ceros exclusivamente (página 581).

Matriz cuadrada Matriz cuyo número de renglones es igual al número de columnas (página 579).

Matriz de coeficientes Una matriz cuyos elementos son los coeficientes en un sistema de ecuaciones lineales (página 597).

Matriz identidad Una matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en los demás componentes (página 584).

Matriz no singular Una matriz cuadrada con determinante diferente de cero (página 584).

Matriz simétrica Una matriz $A = [a_{ij}]$ con la propiedad $a_{ij} = a_{ji}$ para toda i y j (página 591).

Matriz singular Matriz cuadrada con determinante cero (página 584).

Matriz *m* × *n* Un arreglo rectangular de m renglones y n columnas de números reales (página 579).

Máximo Absoluto Un valor $f(c)$ es un valor máximo absoluto de f, si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en el dominio de f (página 96).

Máximo local Un valor $f(c)$ es un máximo local de f, si existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todos los valores de x en I (página 96).

Máximo valor de *r* El valor de $|r|$ en el punto sobre la gráfica de una ecuación polar que tiene la distancia máxima al polo (página 542).

Media (de un conjunto de datos) La suma de todos los datos dividida entre el número total de elementos (página 772).

Media ponderada Media calculada de tal manera que algunos elementos del conjunto de datos tienen pesos superiores (esto es, cuentan más al determinar la media) a otros (página 774).

MEDIANA (DE UN CONJUNTO DE DATOS) El número de la mitad (o la media de los dos números de en medio), si los datos se listan en orden (página 772).

MEDIDA DE DISPERSIÓN Una medida que indica cómo están distribuidos los datos (página 775).

MEDIDA DE TENDENCIA CENTRAL Una medida del valor promedio, típico o medio para un conjunto de datos (página 772).

MEDIDA DE UN ÁNGULO El número de grados o radianes en un ángulo (página 351).

MEDIDA EN RADIANES La medida de un ángulo en radianes, o para un ángulo central, la razón de la longitud del arco intersecado al radio del círculo (página 352).

MEDIDA GMS La medida de un ángulo en grados, minutos y segundos (página 351).

MEDIDA RESISTENTE Una medida estadística que no cambia mucho a consecuencia de datos extremos (*outliers*) (página 772).

MÉTODO DE ELIMINACIÓN Un método para resolver un sistema de ecuaciones lineales (página 571).

MILLA NÁUTICA Longitud de un arco de 1 minuto a lo largo del ecuador terrestre (página 354).

MILLA TERRESTRE 5280 pies (página 355).

MÍNIMO ABSOLUTO Un valor $f(c)$ es un valor mínimo absoluto de f, si $f(c) \leq f(x)$, para toda x en el dominio de f (página 96).

MÍNIMO LOCAL Un valor $f(c)$ es un mínimo local de f, si existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que $f(x) \geq f(c)$ para todos los valores de x en I (página 96).

MINUTO Medida de un ángulo igual a 1/60 de un grado (página 351).

MODA DE UN CONJUNTO DE DATOS La categoría o número que ocurre con mayor frecuencia en el conjunto (página 773).

MODELO ALGEBRAICO Una ecuación que relaciona cantidades variables asociadas con un fenómeno que se estudia (página 71).

MODELO DE REGRESIÓN Ecuación determinada mediante regresión y que puede usarse para predecir valores desconocidos (página 155).

MODELO MATEMÁTICO Una estructura matemática que aproxima fenómenos con el propósito de estudiar o predecir su comportamiento (página 70).

MODELO NUMÉRICO Modelo determinado mediante el análisis de números o datos para obtener mayor idea del fenómeno (página 70).

MODELOS GRÁFICO Una representación visual de un modelo numérico o algebraico (página 72).

MÓDULO Consulte *Valor absoluto de un número complejo*.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Movimiento descrito mediante $d = a \operatorname{sen} \omega t$ o $d = a \cos \omega t$ (página 428).

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL El movimiento de un objeto que está sujeto sólo a la fuerza de gravedad (página 63).

MULTIPLICIDAD La multiplicidad de un cero c de un polinomio $f(x)$ de grado $n > 0$ es el número de veces que el factor $(x - c)$ aparece en la factorización lineal $f(x) = a(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$ (página 205).

***n* FACTORIAL** Para cualquier entero positivo, n factorial es $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$; cero factorial es $0! = 1$ (página 702).

***n*-CONJUNTO** Un conjunto con n objetos (página 702).

NDER $f(a)$ Consulte *Derivada numérica de f en x = a* (página 826).

n*-ÉSIMA POTENCIA DE *a El número $a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ (con n factores de a), donde n es el exponente y a es la base (página 8).

NINT($f(x)$,x, a, b) Una aproximación de calculadora para $\int_a^b f(x)\,dx$ (página 827).

NOTACIÓN CIENTÍFICA Número positivo escrito en la forma $c \times 10^m$, donde $1 \leq c < 10$ y m es un entero (página 9).

NOTACIÓN DE INTERVALO Notación utilizada para especificar intervalos (página 5).

NOTACIÓN DE LEIBNIZ La notación dy/dx para la derivada de f (página 798).

NOTACIÓN DE SUMA La serie $\sum_{k=1}^{b} a_k$, donde n es un número natural (o ∞) que está en la notación de suma y se lee "la suma de a_k desde $k = 1$ hasta n (o infinito)", k es el índice de la suma, y a_k es el término k-ésimo de la serie (página 742).

NÚMERO COMPLEJO Una expresión $a + bi$, donde a (la parte real) y b (la parte imaginaria) son números reales (página 53). Consulte también *Fracciones compuestas*.

NÚMERO REAL Cualquier número que pueda escribirse como un decimal (página 2).

NÚMERO TRIANGULAR Número que es una suma de las serie aritmética $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, para algún número natural n (página 716).

NÚMEROS COMPLEJOS IGUALES Números complejos cuyas partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales (página 53).

NÚMEROS DE FIBONACCI Los términos de la sucesión de Fibonacci (página 738).

NÚMEROS IRRACIONALES Números reales que no son racionales (página 2).

NÚMEROS NATURALES Los números 1, 2, 3,... (página 2).

NÚMEROS NEGATIVOS Números reales que se muestran a la izquierda del origen en una recta numérica (página 3).

NÚMEROS POSITIVOS Números reales que aparecen a la derecha del origen en una recta numérica (página 3).

NÚMEROS RACIONALES Números que pueden escribirse como a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$ (página 2).

OCTANTE Las ocho regiones del espacio determinadas por los planos coordenados (página 685).

Operaciones elementales por renglones Las siguientes tres operaciones por renglones: multiplicar todos los elementos de un renglón por una constante diferente de cero; intercambiar dos renglones y sumar un múltiplo de un renglón con otro renglón (página 598).

Operaciones por renglones Consulte *Operaciones elementales por renglones*.

Opuesto Consulte *Inverso aditivo de un número real* e *Inverso aditivo de un número complejo*.

Orden de magnitud (de n) $\log n$ (página 323).

Orden de una matriz de $m \times n$ El orden de una matriz $m \times n$ es $m \times n$ (página 579).

Origen El número cero de una recta numérica, o el punto dónde se cruzan los ejes x y y en el sistema de coordenadas cartesianas, o el punto en dónde se cruzan los ejes x, y y z en el espacio cartesiano tridimensional (página 3).

Par ordenado Un par de números reales (x, y) (página 14).

Parábola La gráfica de una función cuadrática, o el conjunto de puntos que son equidistantes de un punto fijo (el foco) y una recta fija (la directriz) (página 634).

Paraboloide de revolución Superficie generada mediante la rotación de una parábola alrededor de su línea de simetría (página 639).

Parametrización Un conjunto de ecuaciones paramétricas para una curva (página 522).

Parámetro Consulte *Ecuaciones paramétricas*.

Parte imaginaria de un número complejo Consulte *Número complejo*.

Parte real de un número complejo Consulte *Número complejo*.

Paso inductivo Consulte *Inducción matemática*.

Pendiente Razón $\dfrac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$ página 31.

Perihelio El punto más cercano al Sol en la órbita de un planeta (página 649).

Periodo Consulte *Función periódica*.

Permutación Un arreglo de elementos de un conjunto, en el que el orden es importante (página 702).

Permutaciones de n objetos tomados de r a la vez ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (página 703).

Pesos Consulte *Media ponderada*.

pH La medida de la acidez (página 325).

Plano complejo Un plano coordenado usado para representar los números complejos. El eje x del plano complejo se denomina el eje real, y el eje y es el eje imaginario (página 550).

Plano coordenado Consulte *Sistema de coordenadas cartesianas.*

Plano en el espacio cartesiano La gráfica de $Ax + By + Cz + D = 0$, donde A, B y C no todas son cero (página 689).

Plano xy Los puntos $(x, y, 0)$ en el espacio cartesiano (página 685).

Plano xz Los puntos $(x, 0, z)$ en el espacio cartesiano (página 685).

Plano yz Los puntos $(0, y, z)$ en el espacio cartesiano (página 685).

Polinomio característico de una matriz cuadrada A $\det(xI_n - A)$, donde A es una matriz $n \times n$ (página 593).

Polinomio en x Una expresión que puede escribirse en la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde n es un entero no negativo, los coeficientes son números reales y $a_n \neq 0$. El grado del polinomio es n, el coeficiente principal es a_n, el término principal es $a_n x^n$, y el término constante es a_0 (el número cero es el polinomio cero) (página 170).

Polinomio factorizado completamente Un polinomio escrito en forma factorizada con todos su factores primos (página 232).

Polinomio residuo Consulte *Algoritmo de la división para polinomios*.

Polo Consulte *Sistema de coordenadas polares*.

Posición estándar (ángulo) Ángulo colocado en un sistema de coordenadas rectangulares con su vértice en el origen y su lado inicial en la parte positiva del eje x (páginas 360, 370).

Precio de equilibrio Consulte *Punto de equilibrio*.

Primer cuartil Consulte *Cuartil*.

Primer octante Los puntos (x, y, z) en el espacio con $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$ (página 685).

Principio de inducción matemática Un principio relacionado a la inducción matemática (página 753).

Principio de multiplicación de conteo Un principio utilizado para determinar el número de formas en que un evento puede ocurrir (página 701).

Probabilidad binomial En un experimento con dos posibles resultados, la probabilidad de que ocurra un resultado k veces en n ensayos independientes es $P(E) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\,p^k(1-p)^{n-k}$, donde p es la probabilidad de que el resultado ocurra una vez (página 727).

Probabilidad condicional La probabilidad de un evento A dado que un evento B *ya haya ocurrido* ($P(A|B)$) (página 724).

Probabilidad de un evento en un espacio muestral finito El número de resultados en el evento dividido entre el número de resultados en el espacio muestral (página 720).

Problema de programación lineal Método para resolver ciertos problemas que implican la maximización o minimización de una función de dos variables (denominada *función objetivo*) sujeta a restricciones (página 620).

PRODUCTO DE FUNCIONES $(fg)(x) = f(x)g(x)$ (página 117).

PRODUCTO DE MATRICES *A* Y *B* La matriz en la que cada entrada se obtiene mediante la multiplicación de las entradas de un renglón de A por las entradas correspondientes de una columna de B, y la posterior suma de ellas (página 581).

PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (páginas 54, 552).

PRODUCTO DE UN ESCALAR Y UN VECTOR El producto del escalar k y el vector $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ (o $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ es $k \cdot \mathbf{u} = \langle ku_1, ku_2 \rangle$ (o $k \cdot \mathbf{u} = \langle ku_1, ku_2, ku_3 \rangle$) (páginas 505, 690).

PRODUCTO PUNTO El número que se obtiene cuando las componentes correspondientes de dos vectores se multiplican y los resultados se suman (página 514).

PROPIEDAD DE LA DESIGUALDAD, SUMA $u < v$, entonces $u + w < v + w$ (página 27).

PROPIEDAD DE LAS IGUALDADES, SUMA Si $u = v$ y $w = z$, entonces $u + w = v + z$ (página 24).

PROPIEDAD DE MULTIPLICACIÓN DE UNA DESIGUALDAD Si $u < v$ y $c > 0$, entonces $uc < vc$. Si $u < v$ y $c < 0$, entonces $uc > vc$ (página 27).

PROPIEDAD DE MULTIPLICACIÓN DE UNA IGUALDAD Si $u = v$ y $w = z$, entonces $uw = vz$ (página 24).

PROPIEDAD DE TRICOTOMÍA Para números reales a y b, exactamente una de las siguientes proposiciones es cierta: $a < b$, $a = b$ o $a > b$ (página 4).

PROPIEDAD DEL FACTOR CERO Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$ (páginas 45, 75).

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA $a(b + c) = ab + ac$, y las propiedades relacionadas (página 7).

PROPIEDAD REFLEXIVA DE LA IGUALDAD $a = a$ (página 24).

PROPIEDAD SIMÉTRICA DE LA IGUALDAD Si $a = b$, entonces $b = a$ (página 24).

PROPIEDAD TRANSITIVA Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$. Para los símbolos de desigualdad $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, se cumplen propiedades análogas (páginas 24, 27).

PROPIEDADES ASOCIATIVAS $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$ (página 7).

PROPIEDADES CONMUTATIVAS $a + b = b + a$, $ab = ba$ (página 7).

PROPIEDADES DE LA IDENTIDAD $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$ (página 7).

PROPIEDADES DEL INVERSO $a + (-a) = 0$, $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1 (a \neq 0)$, (página 7).

PROYECCIÓN DE U SOBRE V El vector $\text{proy}_v \mathbf{u} = \left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right)^2 \mathbf{v}$, (página 517).

PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL Una prueba para determinar si la inversa de una relación es una función (página 130).

PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL Prueba para determinar si una gráfica es una función (página 87).

PUNTO DE EQUILIBRIO Un punto en donde se intersecan la curva de oferta y la curva de demanda. El precio correspondiente es el precio de equilibrio (página 574).

PUNTO INICIAL Consulte *Flecha*.

PUNTO MEDIO (EN EL ESPACIO CARTESIANO) Para el segmento de recta con extremos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2), $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2} \right)$ (página 687).

PUNTO MEDIO (EN UN PLANO COORDENADO) Para el segmento de recta con extremos (a, b) y (c, d), $\left(\dfrac{a + c}{2}, \dfrac{b + d}{2} \right)$ (página 17).

PUNTO MEDIO (EN UNA RECTA NUMÉRICA) Para el segmento de recta con extremos a y b, $\dfrac{a + b}{2}$ (página 17).

PUNTO TERMINAL Consulte *Flecha*.

PUNTOS FACTIBLES Puntos que satisfacen las restricciones de un problema de programación lineal (página 620).

RADIÁN La medida de un ángulo central cuya arco intersecado tiene una longitud igual al radio del círculo (página 351).

RADIO La distancia de un punto en un círculo (o esfera) al centro del círculo (o esfera) (páginas 18, 687).

RAÍZ CÚBICA n-ésima raíz, donde $n = 3$ (consulte *Raíz n-ésima principal*) (página 557).

RAÍZ DE UN NÚMERO Consulte *Raíz n-ésima principal*.

RAÍZ DE UNA ECUACIÓN Una solución (página 76).

RAÍZ *N*-ÉSIMA DE LA UNIDAD Un número complejo v tal que $v^n = 1$ (página 555).

RAÍZ *N*-ÉSIMA DE UN NÚMERO COMPLEJO *Z* Un número complejo v tal que $v^n = z$ (página 555).

RAÍZ *N*-ÉSIMA PRINCIPAL Si $b^n = a$, entonces b es una raíz n-ésima de a. Si $b^n = a$ y a y b tienen el mismo signo, b es la raíz n-ésima principal de a (página 555).

RAÍZ *N*-ÉSIMA Consulte *Raíz n-ésima principal*.

RAMAS Las dos curvas separadas que constituyen una hipérbola (página 656).

RANGO (EN ESTADÍSTICA) La diferencia entre los valores más grande y más pequeño de un conjunto de datos (página 775).

RANGO DE LA PANTALLA Consulte *Ventana de visualización*.

RANGO DE UNA FUNCIÓN El conjunto de todos los valores de salida que corresponden a los elementos en el dominio (página 86).

RANGO INTERCUARTÍLICO La diferencia entre el tercer cuartil y el primer cuartil (página 775).

RAPIDEZ La magnitud del vector velocidad, dada mediante distancia/tiempo (página 508).

Razón común Consulte *Sucesión geométrica*.

Razón unitaria Consulte *Factor de conversión*.

Razonamiento deductivo El proceso de utilizar información general para probar una hipótesis específica (página 80).

Recíproco de un número real Consulte *Inverso multiplicativo de un número real*.

Recta de mínimos cuadrados Consulte *Recta de regresión lineal*.

Recta de regresión lineal La recta para la que la suma de los cuadrados de los residuales es la menor posible (página 157).

Recta de trayectoria La trayectoria a lo largo de la cual un objeto viaja (página 351).

Recta horizontal $y = b$ (página 34).

Recta numérica real Recta horizontal que representa al conjunto de los números reales (página 3).

Recta secante de f Recta que une dos puntos de la gráfica de f (página 796).

Recta tangente de f en $x = a$ La recta que pasa por $(a, f(a))$ con pendiente $f'(a)$, siempre que $f'(a)$ exista (página 797).

Recta vertical $x = a$ (página 34).

Rectas paralelas Dos rectas que son verticales o bien tienen la misma pendiente (página 35).

Rectas perpendiculares Dos rectas que forman ángulos rectos (página 35).

Reflexión Dos puntos que son simétricos con respecto a una recta o a un punto (página 132).

Reflexión con respecto al eje x (x, y) y $(x, -y)$ son reflexiones, con respecto al eje x, uno del otro (página 141).

Reflexión con respecto al eje y (x, y) y $(-x, y)$ son reflexiones, con respecto al eje y, uno del otro (página 141).

Reflexión con respecto al origen (x, y) y $(-x, -y)$ son reflexiones mutuas con respecto del origen.

Regla de potencia para logaritmos $\log_b R^c = c \log_b R$, $R > 0$ (página 310).

Regla del cociente para logaritmos
$\log_b \left(\frac{R}{S}\right) = \log_b R - \log_b S$, $R > 0$, $S > 0$ (página 310).

Regla del producto para logaritmos
$\log_b(RS) = \log_b R + \log_b S$, $R > 0$, $S > 0$ (página 310).

Regla inversa de logaritmos $b^{\log_b x} = x$ y $\log_b b^y = y$ (página 301).

Regla uno a uno de logaritmos $x = y$ si, y sólo si $\log_b x = \log_b y$ (página 320).

Regla uno a uno de los exponentes $x = y$ si, y sólo si $b^x = b^y$ (página 320).

Regresión bicuadrática Un procedimiento para ajustar una función bicuadrática a un conjunto de datos (página 157).

Regresión cuadrática Un procedimiento para ajustar una función cuadrática a un conjunto de datos (página 157).

Regresión exponencial Un procedimiento para ajustar una función exponencial a un conjunto de datos (página 157).

Regresión lineal Procedimiento para determinar la recta que proporciona el mejor ajuste para los datos (página 157).

Regresión logarímica natural Un procedimiento para ajustar una curva a un conjunto de datos (página 157).

Regresión logística Un procedimiento para ajustar una curva logística a un conjunto de datos (página 157).

Regresión potencia Un procedimiento para ajustar una curva $y = a \cdot x^b$ a un conjunto de datos (página 157).

Regresión sinusoidal Procedimiento para ajustar una curva $y = a \operatorname{sen}(bx + c) + d$ a un conjunto de datos (página 157).

Relación Conjunto de pares ordenados de números reales (página 122).

Relación inversa (de la relación R) Una relación que consiste de todas las parejas ordenadas (b, a), para las que (a, b) pertenece a R (página 130).

Rendimiento porcentual anual (RPA) La tasa que daría el mismo rendimiento, si el interés fuese calculado sólo una vez al año (página 337).

Representación de paralelogramo de la suma de vectores Representación geométrica de la suma de vectores mediante el paralelogramo determinado mediante los vectores de posición.

Representación estándar de un vector Flecha representativa con su punto inicial en el origen (página 503).

Residual La diferencia $y_1 - (ax_1 + b)$, donde (x_1, y_1) es un punto de un diagrama de dispersión y $y = ax + b$ es una recta que ajusta al conjunto de datos (página 187).

Resolución de un sistema Determinar todas las soluciones de un sistema (página 568).

Resolución de un triángulo Determinar uno o más lados desconocidos o ángulos de un triángulo (página 364).

Resolución de un vector Determinación de las componentes horizontal y vertical de un vector (página 507).

Resolución de una ecuación o desigualdad Determinar todas las soluciones de la ecuación o desigualdad (página 24).

Resolución mediante eliminación o sustitución Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales (páginas 568, 571).

Resta $a - b = a + (-b)$ (página 6).

Restricciones Consulte *Problema de programación lineal.*

Resultados igualmente probables Resultados de un experimento que tienen la misma probabilidad de ocurrir (página 718).

Resultados Los diferentes posibles resultados de un experimento (página 718).

Resumen de cinco números El mínimo, el primer cuartil, la mediana, el tercer cuartil y el máximo de un conjunto de datos (página 775).

Rumbo Medida del ángulo que una trayectoria forma, en sentido contrario a las manecillas del reloj, con la dirección norte (página 351).

Secante La función $y = \sec x$ (página 398).

Sección cónica (o cónica) Curva obtenida por la intersección de un cono circular recto de dos mantos con un plano (página 632).

Segmento dirigido de recta Consulte *Flecha.*

Segundo Medida de un ángulo igual a 1/60 de un minuto (página 351).

Segundo cuartil Consulte *Cuartil.*

Semieje mayor Segmento de recta con extremos en el centro de y en la elipse, y que contiene a uno de los focos (página 645).

Semieje menor Segmento de recta con extremos en el centro de y en la elipse, y que es perpendicular al eje mayor (página 645).

Semiperímetro de un triángulo Un medio de la suma de las longitudes de los lados de un triángulo (página 490).

Semiplano La gráfica de la desigualdad lineal $y \geq ax + b$, $y > ax + b$, $y \leq ax + b$ o $y < ax + b$ (página 618).

Seno La función $y = \operatorname{sen} x$ (página 386).

Serie Suma finita o infinita de términos (página 742).

Serie finita Suma de un número finito de términos (página 743).

Serie geométrica Una serie cuyos términos forman una sucesión geométrica (página 748).

Símbolo de desigualdad $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$ (página 4).

Simétrica con respecto al eje *x* Gráfica en la que $(x, -y)$ está en la gráfica siempre que (x, y) esté; o una gráfica en la que $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$ está en la gráfica siempre que (r, θ) esté (página 97).

Simétrica con respecto al eje *y* Gráfica en la que $(-x, y)$ está en la gráfica siempre que (x, y) esté; o una gráfica en la que $(-r, -\theta)$ o $(r, \pi - \theta)$ está en la gráfica siempre que (r, θ) esté (página 97).

Simétrica con respecto al origen Gráfica en la que $(-x, -y)$ está en la gráfica siempre que (x, y) esté; o una gráfica en la que $(-r, \theta)$ o $(r, \theta + \pi)$ está en la gráfica siempre que (r, θ) esté (página 98).

Sinusoide Función que puede escribirse en la forma $f(x) = a \operatorname{sen}(b(x - h)) + k$ o $f(x) = a \cos(b(x - h)) + k$. El número a es la amplitud, y el número h es el desfase (página 386).

Sistema Conjunto de ecuaciones o de desigualdades (página 568).

Sistema de coordenadas cartesianas Una asociación entre los puntos de un plano y pares ordenados de números reales, o una asociación entre los puntos en el espacio tridimensional y ternas ordenadas de números reales (página 14).

Sistema de coordenadas polares Sistema de coordenadas cuyo par ordenado tiene como base la distancia dirigida desde un punto central (el polo) y el ángulo medido desde un rayo a partir del polo (el eje polar) (página 534).

Sistema de coordenadas rectangulares Consulte *Sistema de coordenadas cartesianas.*

Sistema lineal Un sistema de ecuaciones lineales (página 568).

Sistema lineal invertible Un sistema de n ecuaciones lineales con n variables cuya matriz de coeficientes tiene un determinante distinto de cero (página 601).

Sistemas equivalentes de ecuaciones Sistemas de ecuaciones que tienen la misma solución (página 594).

Solución de un sistema con dos variables Pareja ordenada que satisface todas las ecuaciones o desigualdades del sistema (página 568).

Solución de una ecuación o desigualdad Valor de la variable (o valores de las variables) para la (o las) que la ecuación o desigualdad es verdadera (página 24).

Solución extraña Cualquier solución de la ecuación resultante que no es una solución de la ecuación original (página 248).

Sucesión Consulte *Sucesión finita, Sucesión infinita.*

Sucesión aritmética Una sucesión $\{a_n\}$ en la que $a_n = a_{n-1} + d$ para todo entero $n \geq 2$. El número d es la diferencia común (página 734).

Sucesión de Fibonacci La sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... (página 738).

Sucesión de sumas parciales La sucesión $\{S_n\}$, donde S_n es la n-ésima suma parcial de la serie, es decir, la suma de los primeros n términos de la serie (página 747).

Sucesión definida explícitamente Una sucesión en la que el k-ésimo término está dado como una función de k (página 732).

Sucesión definida recursivamente Una sucesión que se define dando el primer término (o los primeros términos) junto con un procedimiento para determinar los términos siguientes (página 732).

Sucesión finita Una función cuyo dominio consiste en los primeros n enteros positivos para algún entero fijo n (página 732).

Sucesión geométrica Una sucesión $\{a_n\}$ en la que $a_n = a_{n-1} \cdot r$, para todo entero positivo $n \geq 2$. El número r, distinto de cero, se denomina razón común (página 735).

Sucesión infinita Función cuyo dominio es el conjunto de todos los números naturales (página 732).

Suma de funciones $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (página 117).

Suma de números complejos $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ (página 53).

Suma de Riemann Una suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\triangle x$ donde el intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos de igual longitud $\triangle x$ y x_i está en el subintervalo i (página 808).

Suma de una serie aritmética finita

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$ (página 743).

Suma de una serie geométrica finita $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$, (página 745).

Suma de una serie geométrica infinita $S_n = \frac{a}{1 - r}$, $|r| < 1$ (página 748).

Suma de una serie infinita Consulte *Convergencia de una serie*.

Suma de vectores $\langle u_1, u_2\rangle + \langle v_1 + v_2\rangle = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2\rangle$ o $\langle u_1, u_2, u_3\rangle + \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3\rangle$ (página 505).

Sumas parciales Consulte *Sucesión de sumas parciales*.

Superficie cuádrica La gráfica en tres dimensiones de una ecuación de segundo grado con tres variables (página 690).

Tabla de frecuencias (en estadística) Una tabla que muestra las frecuencias (página 764).

Tallo El dígito o los dígitos iniciales de un número en un diagrama de tallo (página 760).

Tangente La función $y = \tan x$ (página 396).

Tasa porcentual anual (TPA) La tasa de interés anual (página 340).

Tasa promedio de cambio de f sobre $[a, b]$ El número $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, siempre que $a \neq b$ (página 172).

Teorema de factorización lineal Un polinomio $f(x)$ de grado $n > 0$ tiene la factorización $f(x) = a(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$, donde las z_i son los ceros de f (página 228).

Teorema de los ceros racionales Procedimiento para determinar los posibles ceros racionales de un polinomio (página 218).

Teorema De Moivre $(r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ (página 554).

Teorema de Pitágoras En un triángulo rectángulo con lados a y b, e hipotenusa c, $c^2 = a^2 + b^2$ (página 16).

Teorema del binomio Un teorema que proporciona una fórmula de desarrollo para $(a + b)^n$ (página 711).

Teorema del factor $x - c$ es un factor de un polinomio si, y sólo si, c es un cero del polinomio (página 216).

Teorema del residuo Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, el residuo es $f(c)$ (página 215).

Teorema del valor intermedio Si f es una función polinomial y $a < b$, entonces f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ (página 206).

Teorema fundamental del álgebra Una función polinomial de grado $n > 0$ tiene n ceros complejos (contando multiplicidad) (página 228).

Tercer cuartil Consulte *Cuartil*.

Término constante Consulte *Función polinomial.*

Término de un polinomio (función) Expresión de la forma $a_n x^n$ en un polinomio (función) (página 200).

Término principal Consulte *Función polinomial en x.*

Términos de una sucesión Los elementos del rango de una sucesión (página 732).

Trabajo El producto de una fuerza aplicada a un objeto en una distancia dada $W = |\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|$ (página 519).

Transformación Función que asocia números reales con números reales (página 138). Función visualizada como un mapeo de los elementos del dominio sobre los elementos del rango (página 86).

Transformación de datos Transformación de un conjunto de datos (página 314).

Transformación logarítmica de datos Transformación de un conjunto de datos que implica el uso del logaritmo natural: regresión exponencial, regresión logarítmica natural, regresión potencia (página 328).

Transformación rígida Una transformación que deja sin cambio la forma básica de una gráfica (página 138).

Transpuesta de una matriz La matriz A^T obtenida al intercambiar los renglones y las columnas de A (página 583).

Traslación Consulte *Traslación horizontal, Traslación vertical*.

Traslación horizontal Desplazamiento de una gráfica hacia la derecha o hacia la izquierda (página 138).

Traslación vertical Desplazamiento de una gráfica hacia arriba o hacia abajo (página 138).

Triángulo acutángulo Un triángulo en el que todos los ángulos miden menos de 90° (página 478).

Triángulo de Pascal Un patrón numérico en el que el renglón n (iniciando con $n = 0$) consiste en los coeficientes de la forma desarrollada de $(a + b)^n$ (página 712).

Triángulo de referencia Para un ángulo θ en posición estándar, el triángulo de referencia es el triángulo formado por el lado terminal del ángulo θ, el eje x y una perpendicular bajada desde un punto en el lado terminal al eje x. El ángulo en el triángulo de referencia, en el origen, es el ángulo de referencia (página 373).

Triángulo obtuso Triángulo en el que un ángulo es mayor que 90° (página 478).

Triángulo rectángulo Un triángulo con un ángulo de 90° (página 16).

Unidad imaginaria El número complejo $i = \sqrt{-1}$, (página 53).

Unión de dos conjuntos A y B El conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos (página 60).

Valor absoluto de un número complejo El valor absoluto del número complejo $z = a + bi$ está dado por $\sqrt{a^2 + b^2}$. Además, es la longitud del segmento que va desde el origen hasta z en el plano complejo (página 551).

Valor absoluto de un número real Se expresa como $|a|$ y representa el número de a o el número positivo $-a$, si $a < 0$ (página 134).

Valor absoluto de un vector Consulte *Magnitud de un vector.*

Valor de una anualidad $VF = \dfrac{R(1 + i)^n - 1}{i}$ (página 339).

Valor de una inversión $A = P\left(1 + \dfrac{r}{k}\right)^{kt}$ o $A = Pe^{rt}$ (página 337).

Valor futuro de una anualidad El monto neto de dinero que se obtiene de una anualidad (página 339).

Valor inicial de una función $f(0)$ (página 173).

Valor presente de una anualidad El monto neto de su dinero invertido en una anualidad (página 339).

Variable Letra que representa un número no especificado (página 6).

Variable (en estadística) Una característica de individuos que se identifica o mide (página 759).

Variable categórica Una variable (en estadística) que identifica cada individuo como perteneciente a una clase (página 759).

Variable cuantitativa Una variable (en estadística) que toma valores numéricos para una característica que se mide (página 759).

Variable dependiente Variable que representa el valor del rango de una función (generalmente y) (página 86).

Variable independiente Variable que representa el valor del dominio de una función (regularmente x) (página 86).

Varianza El cuadrado de la desviación estándar (página 778).

Vector Par ordenado $\langle a, b\rangle$ de números reales en el plano, o terna ordenada $\langle a, b, c\rangle$ de números reales en el espacio. Un vector tiene magnitud y dirección (página 502).

Vector cero El vector $\langle 0, 0\rangle$ o $\langle 0, 0, 0\rangle$ (página 503).

Vector dirección de una recta Un vector en la dirección de una recta en el espacio tridimensional (página 692).

Vector posición del punto (a, b) El vector $\langle a, b\rangle$ (página 502).

Vector unitario en la dirección de un vector Vector unitario que tiene la misma dirección que el vector dado (página 506).

Vector unitario Vector de longitud 1 (página 506).

Vectores equivalentes Vectores con la misma magnitud y dirección (página 503).

Vectores ortogonales Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ (página 516).

Vectores unitarios estándar (canónicos) En el plano $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$; en el espacio $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ (página 507).

Velocidad Vector que especifica el movimiento de un objeto en términos de su rapidez y dirección (página 508).

Velocidad angular Rapidez de rotación que generalmente se mide en radianes o revoluciones por unidad de tiempo (página 354).

Velocidad instantánea La tasa instantánea de cambio de posición de una función con respecto al tiempo (página 793).

Velocidad promedio El cambio de posición dividido entre el cambio en el tiempo (página 795).

Ventana de visualización La parte rectangular del plano coordenado especificado por las dimensiones [Xmin, Xmax] por [Ymin, Ymax] (página 34).

Vértice de un ángulo Consulte *Ángulo*.

Vértice de una parábola El punto de intersección de una parábola con su línea de simetría (páginas 177, 634).

Vértices de una elipse Los puntos donde la elipse interseca su eje focal (página 644).

Vértices de una hipérbola Los puntos donde una hipérbola interseca a la recta que contiene a sus focos (página 659).

Vida media La cantidad de tiempo necesaria para que una sustancia radiactiva decaiga a la mitad (página 291).

Xmax El valor *x* del lado derecho de la ventana de visualización (página 34).

Xmin El valor *x* del lado izquierdo de la ventana de visualización (página 34).

Xscl La escala de las marcas en el eje *x*, en una ventana de visualización (página 34).

Ymax El valor *y* de la parte superior de la ventana de visualización (página 34).

Ymin El valor *y* de la parte inferior de la ventana de visualización (página 34).

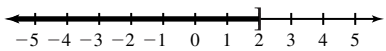
Yscl La escala de las marcas en el eje *y*, en una ventana de visualización (página 34).

Respuestas seleccionadas

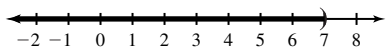
Repaso rápido R.1

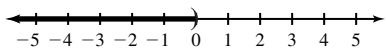
1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **3.** $\{-3, -2, -1\}$ **5. a)** 1187.5 **b)** -4.72 **7.** -3; 1.375 **9.** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

Ejercicios R.1

1. -4.625 (termina) **3.** $-2.1\overline{6}$ (se repite) **5.** 

; Todos los números reales menores o iguales a 2.

7. 

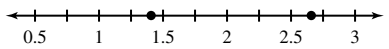
; Todos los números reales menores que 7. **9.** 

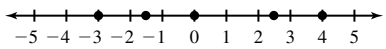
; Todos los números reales menores que 0.

11. $-1 \le x < 1$ **13.** $-\infty < x < 5$, o $x < 5$ **15.** $-1 < x < 2$ **17.** $(-3, \infty)$ **19.** $(-2, -1)$ **21.** $(-3, 4]$ **23.** Los números reales mayores que 4 y menores o iguales a 9. **25.** Los números reales mayores o iguales a -3, o los números reales que al menos son -3. **27.** Los números reales mayores que -1. **29.** $-3 < x \le 4$; extremos -3 y 4; acotado; semiabierto. **31.** $x < 5$; extremo 5; no acotado; abierto. **33.** $x \ge 29$ o $[29, \infty)$; $x =$ edad de Bill. **35.** $1.099 \le x \le 1.399$ o $[1.099, 1.399]$; $x =$ dólares por galón de gasolina. **37.** $ax^2 + ab$ **39.** $(a + d)x^2$ **41.** $\pi - 6$ **43.** 5 **45. a)** Propiedad asociativa de la multiplicación. **b)** Propiedad conmutativa de la multiplicación. **c)** Propiedad del inverso de la suma. **d)** Propiedad de la identidad de la suma. **e)** Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. **47.** $\frac{x^2}{y^2}$ **49.** $\frac{16}{x^4}$ **51.** x^4y^4 **53.** 3.6930338×10^{10} **55.** $1.93175805 \times 10^{11}$ **57.** 4.839×10^{8} **59.** 0.000 000 033 3 **61.** 5,870,000,000,000 **63.** 2.6028×10^{-8} **65. a)** Ya que $a^m \ne 0$, $a^m a^0 = a^{m+0} = a^m$ implica que $a^0 = 1$ **b)** Ya que $a^m \ne 0$, $a^m a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$ implica que $a^{-m} \times \frac{1}{a^m}$. **67.** Falsa. Por ejemplo, el inverso aditivo de -5 es 5, que es positivo. **69.** E **71.** B **73.** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 **75.** $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

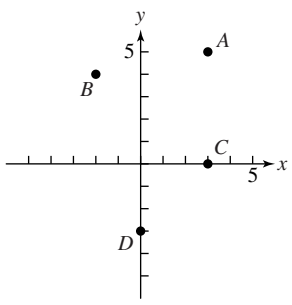
SECCIÓN R.2

Repaso rápido R.2

1. 

3. 

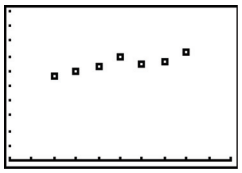
Distancia: $\sqrt{7} - \sqrt{2} \approx 1.232$

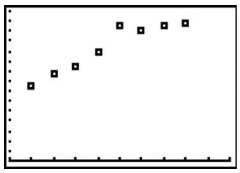
5. 

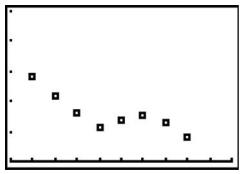
7. 5.5 **9.** 10

Ejercicios R.2

1. $A(1, 0)$, $B(2, 4)$, $C(-3, -2)$, $D(0, -2)$ **3. a)** Primer cuadrante. **b)** Sobre el eje y, entre los cuadrantes II y II. **c)** Segundo cuadrante. **d)** Tercer cuadrante. **5.** 6 **7.** 6 **9.** $4 - \pi$ **11.** 19.9 **13.** 8 **15.** 5 **17.** 7 **19.** Perímetro $= 2\sqrt{41} + \sqrt{82} \approx 21.86$; Área $= 20.5$ **21.** Perímetro $= 2\sqrt{20} + 16 \approx 24.94$; Área $= 32$ **23.** 0.65 **25.** (2, 6) **27.** $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right)$

29. 
[1995, 2005] por [0, 10]

31. 
[1995, 2005] por [0, 150]

33. 
[1995, 2005] por [0, 50]

35. a) Alrededor de \$183,000. **b)** Alrededor de \$277,000. **37.** Los tres lados tienen longitudes 5, 5, y $5\sqrt{2}$. Como dos lados tienen la misma longitud, el triángulo es isósceles **39. a)** (No hay respuesta) **b)** $8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89 = (\sqrt{89})^2$
41. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ **43.** $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$ **45.** Centro: (3, 1); radio: 6. **47.** Centro: (0, 0); radio $\sqrt{5}$
49. $|x - 4| = 3$ **51.** $|x - c| < d$ **53.** 7; 6 **55.** El punto medio es $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}$. Las distancias de este punto a los vértices son iguales a $\sqrt{18.5}$. **57.** $x \le -8$ o $x \ge 2$ **59.** Verdadera. $\dfrac{\text{longitud de } AM}{\text{longitud de } AB} = \dfrac{1}{2}$, ya que M es el punto medio de AB. Mediante triángulos semejantes $\dfrac{\text{longitud de } AM'}{\text{longitud de } AC} = \dfrac{\text{longitud de } AM}{\text{longitud de } AB} = \dfrac{1}{2}$, por lo que M' es el punto medio de AC. **61.** C **63.** E **65.** Si los catetos tienen longitudes a y b, y la hipotenusa es de c unidades de longitud, entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los vértices son (0, 0), (a, 0) y (0, b). Entonces el punto medio de la hipotenusa es $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. La distancia a los otros vértices es $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}c$.
67. $Q(a, -b)$ **69.** $Q(-a, b)$

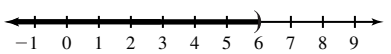
SECCIÓN R.3

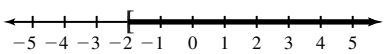
Repaso rápido R.3

1. $4x + 5y + 9$ **3.** $3x + 2y$ **5.** $\frac{5}{y}$ **7.** $\frac{2x+1}{x}$ **9.** $\frac{11x+18}{10}$

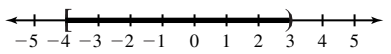
Ejercicios R.3

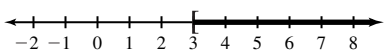
1. a) y c) **3.** b) **5.** Sí **7.** No **9.** No **11.** $x = 8$ **13.** $t = 4$ **15.** $x = 1$ **17.** $y = -\frac{4}{5} = -0.8$
19. $x = \frac{7}{4} = 1.75$ **21.** $x = \frac{4}{3}$ **23.** $z = \frac{8}{19}$ **25.** $x = \frac{17}{10} = 1.7$ **27.** $t = \frac{31}{9}$ **29. a)** La figura muestra que $x = -2$ es una solución de la ecuación $2x^2 + x - 6 = 0$. **b)** La figura muestra que $x = \frac{3}{2}$ es una solución de la ecuación $2x^2 + x - 6 = 0$. **31.** a)
33. b) y c)

35. 

$x < 6$ **37.** 

$x \ge -2$

39. 

$-4 \le x < 3$ **41.** 

$x \ge 3$

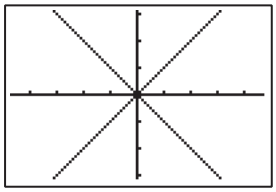
43. $x \le -\frac{19}{5}$ **45.** $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{17}{2}$ **47.** $-\frac{5}{2} \le z < \frac{3}{2}$ **49.** $x > \frac{21}{5}$ **51.** $y < \frac{7}{6}$ **53.** $x \le \frac{34}{7}$ **55.** $x = 1$ **57.** $x = 3, 4, 5,$
59. Multiplicar ambos lados de la primera ecuación por 2. **61. a)** No **b)** Sí **63.** Falso: $-6 < -2$ ya que -6 está a la izquierda de -2 en la recta numérica. **65.** E **67.** A **69. a)** (Sin respuesta) **b)** (Sin respuesta) **c)** 800/801 < 799/800
d) $-103/102 > -102/101$ **e)** Si su calculadora devuelve 0 cuando usted ingresa $2x + 1 < 4$, puede concluir que el valor almacenado en x no es una solución de la desigualdad $2x + 1 < 4$.
71. $b_1 = \frac{2A}{h} - b_2$ **73.** $F = \frac{9}{5}C + 32$

SECCIÓN R.4

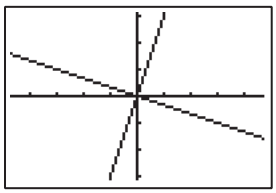
Exploración 1

1. Las gráficas de $y = mx + b$ y $y = mx + c$ tienen la misma pendiente pero diferentes intersecciones con el eje y.

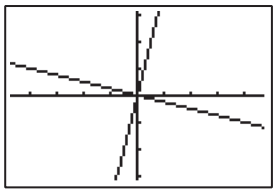
3.



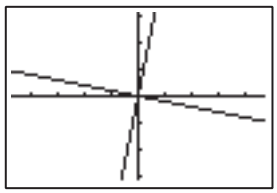
$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$
$m = 1$



$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$
$m = 3$



$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$
$m = 4$



$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$
$m = 5$

En cada caso, las dos rectas formarán ángulos rectos, una con la otra.

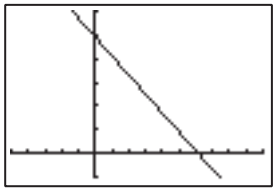
Repaso rápido R.4

1. $x = -\frac{7}{3}$ **3.** $x = 12$ **5.** $y = \frac{2}{5}x - \frac{21}{5}$ **7.** $y = \frac{17}{5}$ **9.** $\frac{2}{3}$

Ejercicios R.4

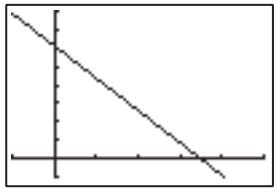
1. -2 **3.** $\frac{4}{7}$ **5.** 8 **7.** $x = 2$ **9.** $y = 16$ **11.** $y - 4 = 2(x - 1)$ **13.** $y + 4 = -2(x - 5)$ **15.** $x - y + 5 = 0$
17. $y + 3 = 0$ **19.** $x - y + 3 = 0$ **21.** $y = -3x + 5$ **23.** $y = -\frac{1}{4}x + 4$ **25.** $y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}$

27.



$[-5, 10]$ por $[-10, 60]$

29.



$[-1, 5]$ por $[-10, 80]$

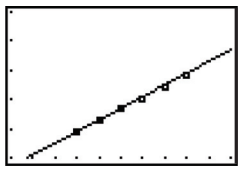
31. a) La pendiente es 1.5, comparada con 1 en b). **33.** $x = 4$; $y = 21$ **35.** $x = -10$; $y = -7$ **37.** Ymin $= -30$, Ymax $= 30$, Yscl $= 3$ **39.** Ymin $= -20/3$, Ymax $= 20/3$, Yscl $= 2/3$

41. a) $y = 3x - 1$ **b)** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ **43. a)** $y = -\frac{2}{3}x + 3$ **b)** $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ **45. a)** 3187.5; 42,000 **b)** 9.57 años **c)** $3187.5t + 42{,}000 = 74{,}000$; $t = 10.04$ **d)** 12 años

47. 32,000 pies

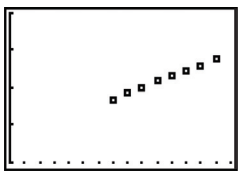
49. $m = \frac{3}{8} > \frac{4}{12}$, por lo que los tejados asfaltados son aceptables.

51. a) $y = 0.4x - 793.3$ **b)** \$7.5 billones **c)** \$9.1 billones **d)**



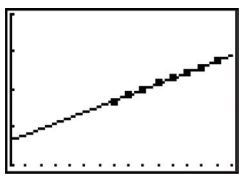
[1995, 2005] por [5, 10]

53. a)



[0, 15] por [5,000, 7,000]

$y = 75x + 5327$ **b)**

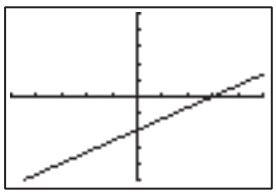


[0, 15] por [5,000, 7,000]

c) El año 2006 está representado por $x = 16$. Por lo que el valor de y para $x = 16$ es $\approx$ 6,527 millones, un poco mayor que la estimación de la Oficina de Censos de Estados Unidos, de 6525 millones.

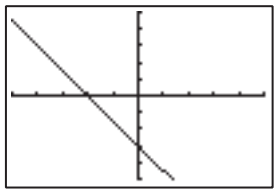
55. 9 **57.** $b = 5$; $a = 6$ **59. a)** No; las rectas perpendiculares tienen pendientes con signos opuestos.
b) No; las rectas perpendiculares tiene pendientes con signos opuestos. **61.** Falso. La pendiente de una recta vertical es indefinida. Por ejemplo, la recta vertical que pasa por (3, 1) y (3, 6) tendría pendiente $(6 - 1)/(3 - 3) = 5/0$, que es indefinido. **63.** A **65.** E

67. a)



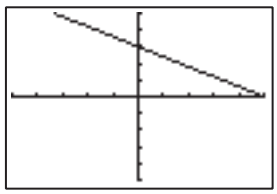
$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

b)



$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

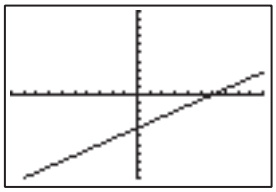
c)



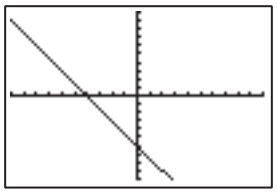
$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

d) a es la intersección x y b es la intersección y cuando $c = 1$.

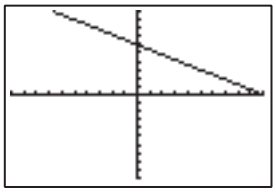
e)



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

f) Cuando $c = -1$, a es el opuesto de la intersección x y b es el opuesto de la intersección y.

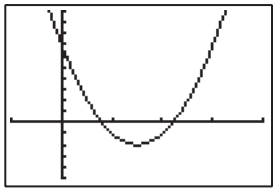
a es la mitad de la intersección x y b es la mitad de la intersección y cuando $c = 2$.

69. Como en el diagrama, podemos elegir un punto que sea el origen, y otro que esté en el eje x. Los puntos medios de los lados, iniciando desde el origen y trabajando en contra de las manecillas del reloj en el diagrama, son entonces $A\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, $C\left(\frac{b+d}{2}, \frac{c+e}{2}\right)$, y $D\left(\frac{d}{2}, \frac{e}{2}\right)$. Por lo tanto, los lados opuestos son paralelos, como las pendientes de las cuatro rectas que conectan esos puntos son: $m_{AB} = \frac{c}{b}$; $m_{BC} = \frac{e}{d-a}$; $m_{CD} = \frac{c}{b}$; $m_{DA} = \frac{e}{d-a}$. **71.** A tiene coordenadas $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, mientras que B es $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, por lo que la recta que contiene a A y a B es la recta horizontal $y = \frac{c}{2}$ y la distancia de A a B es $\left|\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}\right| = \frac{a}{2}$.

SECCIÓN R.5

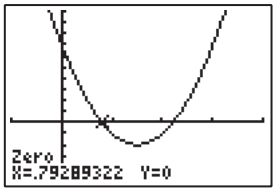
Exploración 1

1.

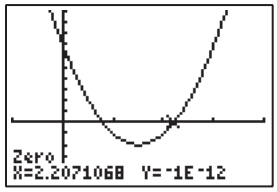


$[-1, 4]$ por $[-5, 10]$

3.



$[-1, 4]$ por $[-5, 10]$



$[-1, 4]$ por $[-5, 10]$

Por este método, tenemos ceros en 0.79 y 2.21. **5.** Las respuestas en las partes 2, 3, y 4 son las mismas. **7.** 0.792893; 2.207107

Repaso rápido R.5

1. $9x^2 - 24x + 16$ **3.** $6x^2 - 7x - 5$ **5.** $(5x - 2)^2$ **7.** $(3x + 1)(x^2 - 5)$ **9.** $\frac{(x-2)(x+1)}{(2x+1)(x+3)}$

Ejercicios R.5

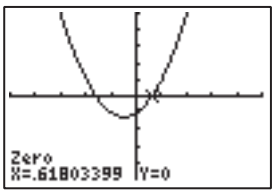
1. $x = -4$ o $x = 5$ **3.** $x = 0.5$ o $x = 1.5$ **5.** $x = -\frac{2}{3}$ o $x = 3$ **7.** $x = \pm\frac{5}{2}$ **9.** $x = -4 \pm \sqrt{\frac{8}{3}}$ **11.** $y = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$

13. $x = -7$ o $x = 1$ **15.** $x = \frac{7}{2} - \sqrt{11} \approx 0.18$ o $x = \frac{7}{2} + \sqrt{11} \approx 6.82$ **17.** $x = 2$ o $x = 6$

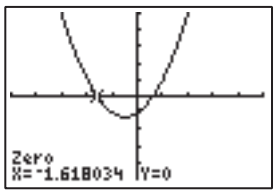
19. $x = -4 - 3\sqrt{2} \approx -8.24$ o $x = -4 + 3\sqrt{2} \approx 0.24$ **21.** $x = -1$ o $x = 4$ **23.** $-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2} \approx 1.77$ o $-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{73}}{2} \approx -6.77$

25. intersección x: 3; intersección y: -2 **27.** intersecciones x: -2, 0, 2; intersección y: 0

29.

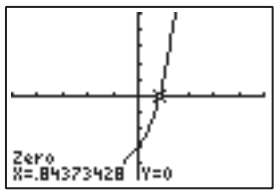


[−5, 5] por [−5, 5]



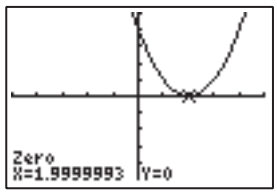
[−5, 5] por [−5, 5]

31.



[−5, 5] por [−5, 5]

33.



[−5, 5] por [−5, 5]

35. $x^2 + 2x - 1 = 0$; $x \approx 0.4$ **37.** 1.62, −0.62 **39.** $t = 6$ o $t = 10$ **41.** $x = 1$ o $x = -6$ **43.** $x = -3$ o $x = 1$

45. a) $y_1 = 3\sqrt{x+4}$ (la que inicia en el eje x) y $y_2 = x^2 - 1$ **b)** $y = 3\sqrt{x+4} - x^2 + 1$ **c)** Las coordenadas x de las intersecciones en la primera figura son las mismas que las coordenadas x en donde la segunda gráfica cruza el eje x. **47.** $x = -2$ o $x = 1$

49. $x = 3$ o $x = -2$ **51.** $x \approx -4.56$ o $x \approx -0.44$ o $x = 1$ **53.** $x = -2 \pm 2\sqrt{3}$ **55.** $x \approx -2.41$ o $x \approx 2.91$ **57. a)** Debe tener 2 ceros reales distintos, ya que $b^2 - 4ac > 0$ implica que $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ son 2 números reales distintos. **b)** Debe ser 1 cero real, ya que $b^2 - 4ac > 0$ implica que $\pm\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, por lo que la raíz debe ser $x = -\frac{b}{2a}$. **c)** No debe haber ceros reales, ya que $b^2 - 4ac < 0$ implica que $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ no son números reales. **59.** 80 yardas de ancho; 110 yardas de largo. **61.** ≈ 11.98 pies. **63.** Falso. Observe que $2(-3)^2 = 18$, por lo que x también podría ser -3. **65.** B **67.** E **69. a)** $c = 2$ **b)** $c = 4$ **c)** $c = 5$ **d)** $c = -1$ **e)** No hay otro número posible de soluciones de esta ecuación. Para cualquier c, la solución incluye dos ecuaciones cuadráticas, cada una de las cuales tiene 0, 1 o 2 soluciones. **71.** $2.5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$, o aproximadamente 0.697 y 4.303.

SECCIÓN R.6

Repaso rápido

1. $x + 9$ **3.** $a + 2d$ **5.** $x^2 - x - 6$ **7.** $x^2 - 2$ **9.** $x^2 - 2x - 1$

Repaso rápido R.6

1. $8 + 2i$ **3.** $13 - 4i$ **5.** $5 - (1 + \sqrt{3})i$ **7.** $-5 + i$ **9.** $7 + 4i$ **11.** $-5 - 14i$ **13.** $-48 - 4i$ **15.** $5 - 10i$ **17.** $4i$

19. $\sqrt{3}i$ **21.** $x = 2$, $y = 3$ **23.** $x = 1$, $y = 2$ **25.** $5 + 12i$ **27.** -1 **29.** 13 **31.** 25 **33.** $2/5 - 1/5i$ **35.** $3/5 + 4/5i$

37. $1/2 - 7/2i$ **39.** $7/5 - 1/5i$ **41.** $x = -1 \pm 2i$ **43.** $x = \frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}i$ **45.** Falso. Cualquier número complejo bi tiene esta propiedad. **47.** E **49.** A **51. a)** i; -1; $-i$; 1; i; -1; $-i$; 1 **b)** $-i$; -1; i; 1; $-i$; -1; i; 1 **c)** 1 **d)** (Sin respuesta)

53. $(a + bi) - (a - bi) = 2bi$, la parte real es cero.

55. $\overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) - (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$ y
$\overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$ son iguales

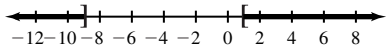
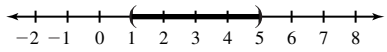
57. $(-i)^2 - i(-i) + 2 = 0$ pero $(i)^2 - i(i) + 2 \neq 0$. Ya que el coeficiente de x en $x^2 - ix + 2 = 0$ no es un número real, el conjugado complejo, i, de $-i$, no necesariamente es solución.

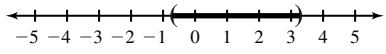
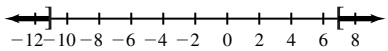
EJERCICIOS R.7

Repaso rápido R.7

1. $-2 < x < 5$ **3.** $x = 1$ o $x = -5$ **5.** $x(x-2)(x+2)$ **7.** $\dfrac{z+5}{z}$ **9.** $\dfrac{4x^2-4x-1}{(x-1)(3x-4)}$

SECCIÓN R.7

1.  $(-\infty, -9] \cup [1, \infty)$ **3.**  $(1, 5)$

5.  $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$ **7.**  $(-\infty, -11] \cup [7, \infty)$

9. $[-7, -3/2]$ **11.** $(-\infty, -5) \cup \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$ **13.** $(-\infty, -2) \cup \left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ **15.** $[-1, 0] \cup [1, \infty)$ **17.** $(-0.24, 4.24)$

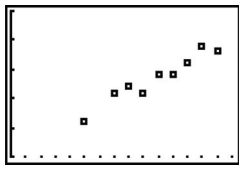
19. $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{4}{3}, \infty\right)$ **21.** $(-\infty, -1.41] \cup [0.08, \infty)$ **23.** $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$ **25.** No hay solución.

27. $[-2.08, 0.17] \cup [1.19, \infty)$ **29.** $(1.11, \infty)$ **31. a)** $x^2 + 1 > 0$ **b)** $x^2 + 1 < 0$ **c)** $x^2 \le 0$ **d)** $(x+2)(x-5) \le 0$ **e)** $(x+1)(x-4) > 0$ **f)** $x(x-4) \ge 0$ **33. a)** $t = 4$ seg cuando sube; $t = 12$ seg cuando baja **b)** Cuando t está en el intervalo $[4, 12]$. **c)** Cuando t está en el intervalo $(0, 4]$ o $[12, 16)$. **35.** Revela las fronteras del conjunto solución. **37. a)** 1 pulgada $< x <$ 34 pulgadas. **b)** Cuando x está en el intervalo $(1, 25]$. **39.** No más de \$100,000. **41.** Verdadero. El valor absoluto de cualquier número real siempre es mayor o igual a cero. **43.** D **45.** D **47.** $(-5.69, -4{,}11) \cup (0.61, 2.19)$

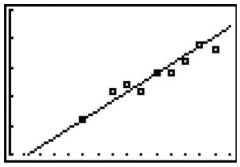
EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO R

1. Extremos 0 y 5; acotado. **3.** $2x^2 - 2x$ **5.** v^4 **7.** 3.68×10^9 **9.** 5,000,000,000 **11. a)** 5.0711×10^{10} **b)** 4.63×10^9 **c)** 5.0×10^8 **d)** 3.995×10^9 **e)** 1.4497×10^{10} **13.** 19; 4.5 **15.** $5\sqrt{5}; 2\sqrt{5}; \sqrt{145}$ **17.** $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 2^2$, o $x^2 + y^2 = 4$ **19.** Centro: $(-5, -4)$; radio: 3 **21. a)** $\sqrt{20} \approx 4.47, \sqrt{80} \approx 8.94, 10$ **b)** $(\sqrt{20})^2 + (\sqrt{80})^2 = 20 + 80 = 100 = 10^2$

23. $a = 7; b = 9$ **25.** $y + 1 = -\dfrac{2}{3}(x-2)$ **27.** $y = \dfrac{4}{5}x - 4.4$ **29.** $y = 4$ **31.** $y = -\dfrac{2}{5}x - \dfrac{11}{5}$

33. a) 
[0, 15] por [500, 525]

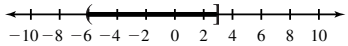
b) $y = 1.6x + 498$


[0, 15] por [500, 525]

c) 507.6, que es muy cercano a 508. **d)** 524

35. 2.5 **37.** $x = -3$ **39.** $y = 3$ **41.** $x = 2 - \sqrt{7} \approx -0.65; x = 2 + \sqrt{7} \approx 4.65$ **43.** $x = \dfrac{1}{3}$ o $x = -\dfrac{3}{2}$ **45.** $x = \dfrac{7}{2}$ o $x = -4$

47. $x = \dfrac{5}{2}$ **49.** $x = 0, x = 3$ **51.** $3 \pm 2i$ **53.** $x = \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{17}}{4} \approx -0.28$ o $x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{17}}{4} \approx 1.78$ **55.** $x = 0$ o $x = -\dfrac{2}{3}$ o $x = 7$

57. $x \approx 2.36$ **59.** $(-6, 3]$  **61.** $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$ **63.** $(-\infty, -2] \cup \left[-\dfrac{2}{3}, \infty\right)$

65. $(-\infty, -0.37) \cup (1.37, \infty)$ **67.** $(-\infty, -2.82] \cup [-0.34, 3.15]$ **69.** $(-\infty, -17) \cup (3, \infty)$ **71.** $(-\infty, \infty)$ **73.** $1 + 3i$

75. $7 + 4i$ **77.** 25 **79.** $4i$ **81. a)** $t \approx 8$ seg al subir; $t \approx 12$ seg al bajar. **b)** Cuando t está en el intervalo $(0, 8]$ o $(12, 20]$, aproximadamente. **c)** Cuando t está en el intervalo $[8, 12]$, aproximadamente. **83. a)** Cuando w está en el intervalo $(0, 18.5]$. **b)** Cuando w está en el intervalo $(22.19, \infty)$, aproximadamente.

SECCIÓN 1.1

Exploración 1

1. 0.75 **3.** 0.8025 **5.** $124.61

Exploración 2

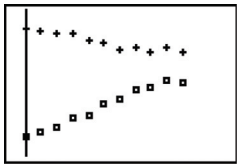
1. Los porcentajes deben ser ≤ 100.
3. Un estadístico podría buscar factores económicos adversos en 1990, en especial aquellos que afectarían a las personas cerca o por abajo de la línea de pobreza.

Repaso rápido 1.1

1. $(x + 4)(x - 4)$ **3.** $(9y + 2)(9y - 2)$ **5.** $(4h^2 + 9)(2h + 3)(2h - 3)$ **7.** $(x + 4)(x - 1)$ **9.** $(2x - 1)(x - 5)$

Ejercicios 1.1

1. d) q) **3.** a) p) **5.** e) l) **7.** g) t) **9.** i) m)
11. a) Creciente, excepto por una ligera caída de 1999 a 2004. **b)** 1974 a 1979
13. Mujeres (□), Hombres (+)



[−5, 55] por [23, 92]

15. Mujeres: $y = 0.582x + 32.3$, hombres: $y = -0.211x + 83.5$.
17. 2018, 69.9%
19. a) y **b)**

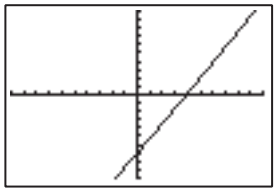
L3
3.7975
4.375
5.5405
5.8986
6.657

21. Los adoquines cuadrados. **23.** $y = 1.2t^2$

25. La línea inferior muestra los salarios mínimos, ya que son menores que los salarios promedio.
27. El año 15. Existe una clara caída en el salario promedio después de la huelga de 1994.

29. $\pm\sqrt{\frac{13}{3}}$ **31.** $-1; 4$ **33.** $-1.5; 4$ **35.** $-\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{105}}{2}$ **37.** 5

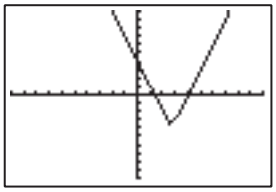
39.



[−10, 10] por [−10, 10]

$x \approx 1.77$

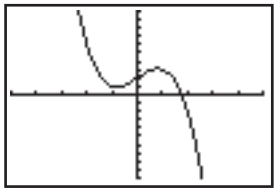
41.



[−10, 10] por [−10, 10]

$x \approx -1.47$

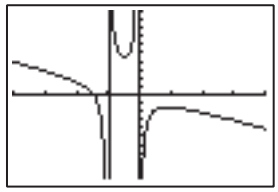
43.



[–5, 5] por [–10, 10]

$x \approx 3.91$

45.

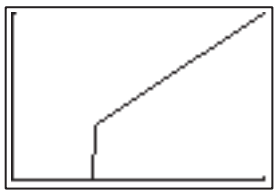


[−4, 4] por [−10, 10]

$x \approx 1.33$ o $x = 4$

47. a) $46.94 **b)** 210 mi

49. a) $y = (x^{200})^{1/200} = x^{200/200} = x^1 = x$ para toda $x \geq 0$. **b)**

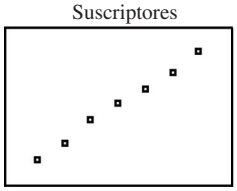


[0, 1] por [0, 1]

c) Sí **d)** Para valores de x cercanos a 0, x^{200} es tan pequeña que la calculadora no la puede distinguir de cero. Devuelve un valor de $0^{1/200} = 0$ en lugar de x.

51. a) -3 o 1.1 o 1.15 **b)** -3
53. Sea n cualquier entero $n^2 + 2n = n(n + 2)$, que es el producto de dos enteros impares o dos enteros pares. El producto de dos enteros impares es impar; el producto de dos enteros pares es un múltiplo de 4, ya que cada entero par del producto contribuye con un factor de 2 al producto. Por lo tanto, $n^2 + 2n$ es impar o bien es un múltiplo de 4.
55. Falso; un producto es cero si al menos uno de los factores es cero. **57.** C **59.** B **61. a)** Marzo. **b)** $120 **c)** Junio, después de tres meses de mal desempeño. **d)** Alrededor de $2,000. **e)** Después de tener una baja en junio, la acción volvió a subir a un precio cercano a $140 en diciembre. Las acciones de LaToya han ganado $2,000 en ese punto. **f)** Cualquier gráfica que decrezca constantemente de marzo a diciembre favorecería a la estrategia de Ahmad sobre la de LaToya.

63. a)



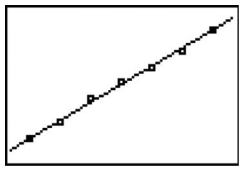
[7, 15] por [50, 200]



[7, 15] por [35, 55]

b) El modelo lineal para los suscriptores como una función de los años, a partir de 1990, es $y = 18.53x + 79.04$.

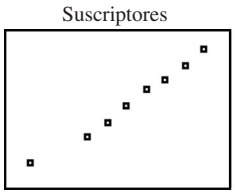
c) El ajuste es muy bueno:



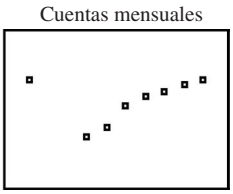
[7, 15] por [50, 200]

d) Es obvio que el diagrama de dispersión de la facturación mensual tiene una forma curvada que podría modelarse de forma más efectiva mediante una función con una gráfica curvada. Algunas posibilidades; cuadrática (parábola), logaritmo, seno, potencia (por ejemplo, raíz cuadrada), logística (posteriormente en el texto, aprenderá acerca de estas curvas).

e)



[4, 15] por [10, 200]



[4, 15] por [30, 60]

f) La tecnología de telefonía celular apenas estaba emergiendo en 1995, por lo que la tasa de crecimiento no fue tan rápida, lo que explica la menor pendiente en el diagrama de dispersión de los suscriptores. La nueva tecnología también fue más cara antes de que la competencia condujera a una disminución de los precios, explicando la *anomalía* en el diagrama de dispersión de la facturación mensual.

SECCIÓN 1.2

Exploración 1

1. De izquierda a derecha, las tablas son c) constante, b) decreciente, y a) creciente.
3. positivo; negativo; 0.

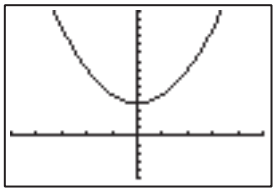
Repaso rápido 1.2

1. $x = \pm 4$ **3.** $x < 10$ **5.** $x = 16$ **7.** $x < 16$ **9.** $x < -2, x \geq 3$

Ejercicios 1.2

1. Función **3.** No es una función; y tiene dos valores para cada valor positivo de x. **5.** Sí **7.** No

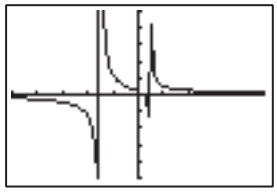
9.



[−5, 5] por [−5, 15]

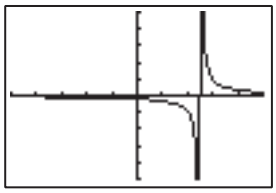
$(-\infty, \infty)$

11.



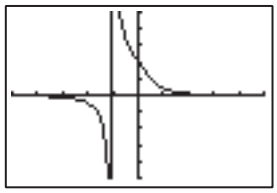
[−10, 10] por [−10, 10]

13.



[−10, 10] por [−5, 5]

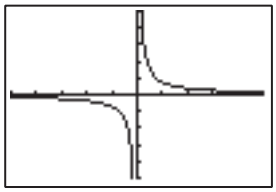
15.



[−5, 5] por [−5, 5]

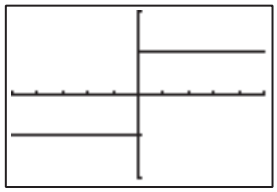
17. $(-\infty, 10]$ **19.** $(-\infty, \infty) \cup [0, \infty)$

21. Sí, no removible.



[−10, 10] por [−10, 10]

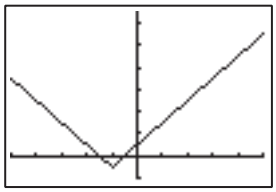
23. Sí, no removible.



[−10, 10] por [−2, 2]

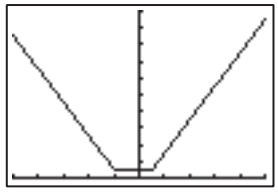
25. Máximos locales en $(-1, 4)$ y $(5, 5)$, mínimo local en $(2, 2)$. La función crece en $(-\infty, -1]$, decrece en $[-1, 2]$, crece en $[2, 5]$ y decrece en $[5, \infty)$. **27.** $(-1, 3)$ y $(3, 3)$ no son ni máximos ni mínimos, $(1, 5)$ es un máximo local y $(5, 1)$ es un mínimo local. La función crece en $(-\infty, 1]$, decrece en $[1, 5]$ y crece en $[5, \infty)$.

29. Decreciente en $(-\infty, -2]$;
creciente en $[-2, \infty)$



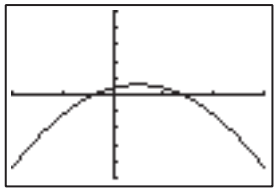
[−10, 10] por [−2, 18]

31. Decreciente en $(-\infty, -2]$;
constante en $[-2, 1]$;
creciente en $[1, \infty)$



[−10, 10] por [0, 20]

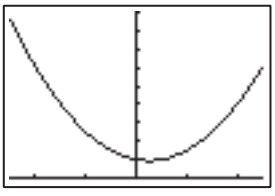
33. Creciente en $(-\infty, 1]$;
decreciente en $[1, \infty)$.



[−4, 6] por [−25, 25]

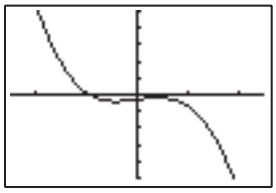
35. Acotada. **37.** Acotada por abajo. **39.** Acotada.

41. f tiene un mínimo local de $y = 3.75$ en $x = 0.5$.
No tienen máximo.



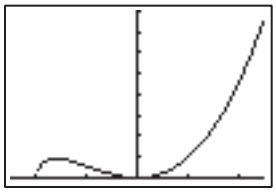
[−5, 5] por [0, 36]

43. Mínimo local: $y \approx -4.09$ en $x \approx -0.82$.
Máximo local: $y \approx -1.91$ en $x \approx 0.82$.



$[-5, 5]$ por $[-50, 50]$

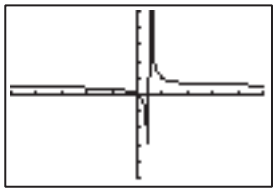
45. Máximo local: $y \approx 9.16$ en $x \approx -3.20$.
Mínimo local: $y = 0$ en $x = 0$ y $y = 0$ en $x = -4$.



$[-5, 5]$ por $[0, 80]$

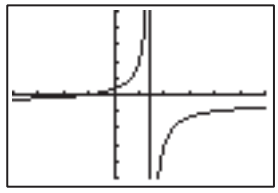
47. Par. **49.** Par. **51.** Par. **53.** Impar.

55. $y = 1$; $x = 1$



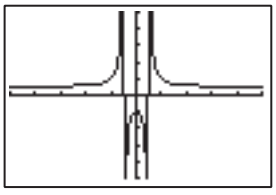
$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

57. $y = -1$; $x = 3$



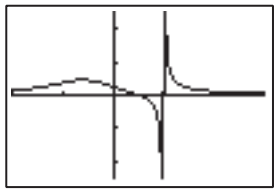
$[-8, 12]$ por $[-10, 10]$

59. $y = 1$; $x = 1$; $x = -1$



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

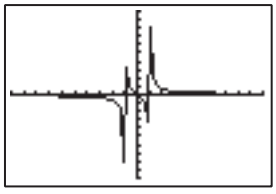
61. $y = 0$; $x = 2$



$[-4, 6]$ por $[-5, 5]$

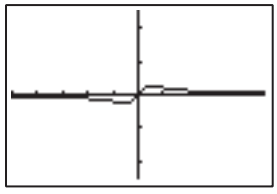
63. b) **65.** a)

67. a) $f(x)$ cruza la asíntota horizontal en (0, 0).



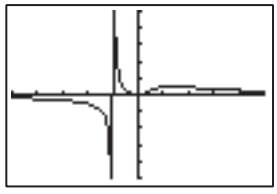
$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

b) $g(x)$ cruza la asíntota horizontal en (0, 0).



$[-10, 10]$ por $[-5, 5]$

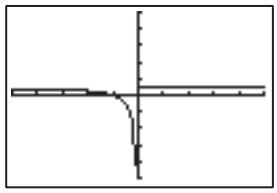
c) $h(x)$ cruza la asíntota horizontal horizontal en (0, 0).



$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

69. a) La asíntota vertical es $x = 0$ y esta función no está definida en $x = 0$ (ya que un denominador no puede ser cero).

b)



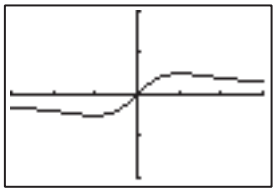
$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

Agregue el punto $(0, 0)$.

c) Sí

71. Verdadera; ésta es la definición de la gráfica de una función. **73.** B **75.** C

77 a)



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

$k = 1$

b) $\dfrac{x}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow x < 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$; pero el discriminante de $x^2 - x + 1$ es negativo (-3), así que la gráfica nunca cruza el eje x en el intervalo $(0, \infty)$.

c) $k = -1$

d) $\dfrac{x}{1+x^2} > -1 \Leftrightarrow x > -1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0$; pero el discriminante de $x^2 - x + 1$ es negativo (-3), por lo que la gráfica nunca cruza el eje x en el intervalo $(-\infty, 0)$.

79. a) **b)** **c)** **d)** **e)** Las respuestas varían. **81. a)** **b)** **c)** **d)** Las respuestas varían. **83. a)** 2; está en el rango. **b)** 3; no está en el rango. **c)** $h(x)$ no está acotada por arriba. **d)** 2; está en el rango. **e)** 1; está en el rango.

85. Como f es impar, $f(-x) = -f(x)$ para toda x. En particular, $f(-0) = -f(0)$. Esto es equivalente a decir que $f(0) = -f(0)$ y el único número que es igual a su opuesto es 0. Por lo tanto $f(0) = 0$, lo que significa que la gráfica debe pasar por el origen.

SECCIÓN 1.3

Exploración 1

1. $f(x) = 1/x$, $f(x) = \ln x$ **3.** $f(x) = 1/x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = 1/(1 + e^{-x})$ **5.** No, existe una discontinuidad removible en $x = 0$.

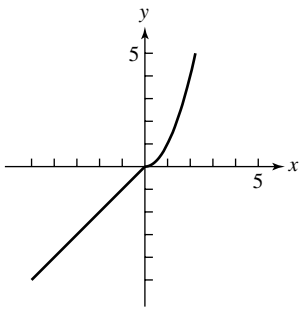
Repaso rápido 1.3

1. 59.34 **3.** $7 - \pi$ **5.** 0 **7.** 3 **9.** -4

Ejercicios 1.3

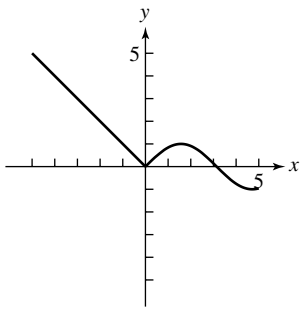
1. e) **3.** j) **5.** i) **7.** k) **9.** d) **11.** l) **13.** Ej. 8 **15.** Ej. 7, 8. **17.** Ej. 2, 4, 6, 10, 11, 12
19. $y = x$, $y = x^3$, $y = 1/x$, $y = \operatorname{sen} x$ **21.** $y = x^2$, $y = 1/x$, $y = |x|$ **23.** $y = 1/x$, $y = e^x$, $y = 1/(1 + e^{-x})$
25. $y = 1/x$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = 1/(1 + e^{-x})$ **27.** $y = x$, $y = x^3$, $y = 1/x$, $y = \operatorname{sen} x$ **29.** Dominio: todos los reales; Rango: $[-5, \infty)$. **31.** Dominio: $(-6, \infty)$; Rango: todos los reales. **33.** Dominio: todos los reales; Rango: todos los reales.
35. a) Creciente en $[10, \infty)$ **b)** Ninguna **c)** Valor mínimo de 0 en $x = 10$ **d)** Función raíz cuadrada, recorrida 10 hacia la derecha.
37. a) Creciente en $(-\infty, \infty)$ **b)** Ninguna **c)** Ninguno **d)** Función logística, alargada verticalmente en un factor de 3.
39. a) Creciente en $[0, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 0]$ **b)** Ninguna **c)** Mínimo de -10 en $x = 0$ **d)** Función valor absoluto, recorrida 10 unidades hacia abajo **41. a)** Creciente en $[2, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 2]$ **b)** Ninguna **c)** Mínimo de 0 en $x = 2$ **d)** Función valor absoluto, recorrida 2 unidades a la derecha. **43.** $y = 2$, $y = -2$

45.



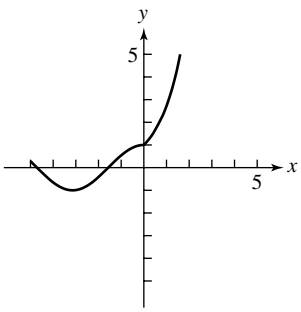
No hay puntos de discontinuidad

47.



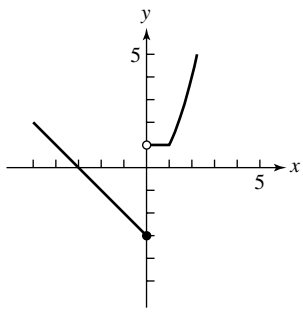
No hay puntos de discontinuidad

49.



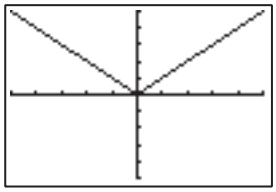
No hay puntos de discontinuidad

51.



$x = 0$

53. a)

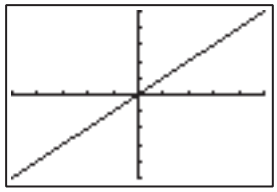


$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

$g(x) = |x|$

b) $f(x) = \sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x| = g(x)$

55. a)



$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

$f(x) = x$

b) El hecho de que $\ln(e^x) = x$ muestra que la función logaritmo natural toma valores arbitrariamente grandes. En particular, toma el valor L, cuando $x = e^L$.

57. Dominio: todos los números reales; rango: todos los enteros; continuidad: hay una discontinuidad en cada valor entero de x; comportamiento creciente/decreciente: constante en los intervalos de la forma $[k, k + 1)$, donde k es un entero; simetría: ninguna; acotamiento: no está acotada; extremos locales; todo número no entero es tanto mínimo como máximo local; asíntota horizontal: ninguna; asíntota vertical: ninguna; comportamiento en los extremos: $\text{ent}(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$ y $\text{ent}(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

59. Verdadero; las asíntotas son $x = 0$ y $x = 1$. **61.** D **63.** E **65. a)** par **b)** par **c)** impar

67. a) La cantidad de pepperoni podría ser proporcional al área de la pizza, que es proporcional al cuadrado del radio **b)** 0.75 **c)** Sí, muy bien. **d)** El hecho de que la cantidad de pepperoni se ajuste al modelo cuadrático esperado de forma tan perfecta sugiere que la pizzería utiliza una tabla. Si observaciones repetidas producen los mismos resultados, habría pocas dudas.

69. a) $f(x) = 1/x, f(x) = e^x, f(x) = \ln x, f(x) = \cos x, f(x) = 1/(1 + e^{-x})$ **b)** $f(x) = x$ **c)** $f(x) = e^x$ **d)** $f(x) = \ln x$ **e)** Las funciones impares: x, x^3, $1/x$, sen x.

SECCIÓN 1.4

Exploración 1

f	g	$f \circ g$
$2x - 3$	$\frac{x+3}{2}$	x
$\|2x + 4\|$	$\frac{(x-2)(x+2)}{2}$	x^2
$\sqrt{x}$	x^2	$\|x\|$
x^5	$x^{0.6}$	x^3
$x - 3$	$\ln(e^3 x)$	$\ln x$
$2 \operatorname{sen} x \cos x$	$\frac{x}{2}$	$\operatorname{sen} x$
$1 - 2x^2$	$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$	$\cos x$

Repaso rápido 1.4

1. $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$ **3.** $(-\infty, 5]$ **5.** $[1, \infty)$ **7.** $(-\infty, \infty)$ **9.** $(-1, 1)$

Ejercicios 1.4

1. $(f + g)(x) = 2x - 1 + x^2$; $(f - g)(x) = 2x - 1 - x^2$; $(fg)(x) = (2x - 1)(x^2) = 2x^3 - x^2$. No hay restricciones sobre los dominios, por lo que los tres dominios son $(-\infty, \infty)$.

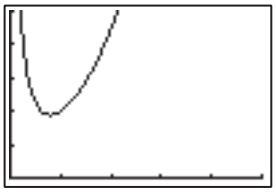
3. $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \operatorname{sen} x$; $(f - g)(x) = \sqrt{x} - \operatorname{sen} x$; $(fg)(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$. El dominio en cada caso es $[0, \infty)$.

5. $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2}$; $x + 3 \geq 0$ y $x \neq 0$, por lo que el dominio es $[-3, 0) \cup (0, \infty)$.

$(g/f)(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}$; $x + 3 > 0$, por lo que el dominio es $(-3, \infty)$.

7. $(f/g)(x) = x^2 / \sqrt{1 - x^2}$; $1 - x^2 > 0$, por lo que $x^2 < 1$; el dominio es $(-1, 1)$.
$(g/f)(x) = \sqrt{1 - x^2} \ / x^2$; $1 - x^2 \geq 0$ y $x \neq 0$; el dominio es $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

9.



$[0, 5]$ por $[0, 5]$

11. 5; -6 **13.** 8; 3 **15.** $f(g(x)) = 3x - 1$; $(-\infty, \infty)$; $g(f(x)) = 3x + 1$; $(-\infty, \infty)$

17. $f(g(x)) = x - 1$; $[-1, \infty)$; $g(f(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$; $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$

19. $f(g(x)) = 1 - x^2$; $[-1, 1]$; $g(f(x)) = \sqrt{1 - x^4}$; $[-1, 1]$

21. $f(g(x)) = \dfrac{3x}{2}$; $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; $g(f(x)) = \dfrac{2x}{3}$; $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

23. Una posibilidad: $(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 5x$

25. Una posibilidad: $f(x) = |x|$ y $g(x) = 3x - 2$

27. Una posibilidad: $f(x) = x^5 - 2$ y $g(x) = x - 3$

29. Una posibilidad: $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \sqrt{x}$

31. $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(48 + 0.03t)^3$; 775,734.6 pulgada^3 **33.** $t \approx 3.63$ seg **35.** $(3, -1)$ **37.** $y = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = -\sqrt{25 - x^2}$

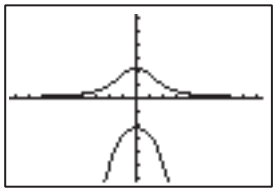
39. $y = \sqrt{x^2 - 25}$ y $y = -\sqrt{x^2 - 25}$ **41.** $y = 1 - x$ y $y = x - 1$ **43.** $y = x$ y $y = -x$ o $y = |x|$ y $y = -|x|$

45. Falso; x no está en el dominio de $(f/g)(x)$ si $g(x) = 0$. **47.** C **49.** E

51.

f	g	D
e^x	$2 \ln x$	$(0, \infty)$
$(x^2 + 2)^2$	$\sqrt{x - 2}$	$[2, \infty)$
$(x^2 - 2)^2$	$\sqrt{2 - x}$	$(-\infty, 2]$
$\frac{1}{(x - 1)^2}$	$\frac{x + 1}{x}$	$x \neq 0$
$x^2 - 2x + 1$	$x + 1$	$(-\infty, \infty)$
$\left(\frac{x + 1}{x}\right)^2$	$\frac{1}{x - 1}$	$x \neq 1$

53. **a)** $g(x) = 0$ **b)** $g(x) = 1$ **c)** $g(x) = x$ **55.**



[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

$$y = \frac{-x^2 \pm \sqrt{x^4 + 20}}{2}$$

SECCIÓN 1.5

Exploración 1

1. T empieza en −4, en el punto (−8, −3). Se detiene en T = 2, en el punto (8, 3). Se calcularon 61 puntos.
3. La gráfica es menos suave, ya que los puntos trazados están más alejados.
5. La graficadora se salta directamente del punto (0, −1) al punto (0, 1), que corresponde a los valores de T con T = − 2 y T = 0. Los dos puntos están conectados por una recta, oculta por el eje Y. **7.** Dejando todo igual, pero cambiando Tmin a −4 Tmax a −1.

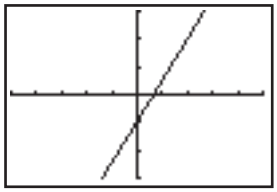
Repaso rápido 1.5

1. $y = \frac{1}{3}x + 2$ **3.** $y = \pm\sqrt{x - 4}$ **5.** $y = \frac{3x + 2}{1 - x}$ **7.** $y = \frac{4x + 1}{x - 2}$ **9.** $y = x^2 - 3$, $y \geq -3$, y $x \geq 0$

Ejercicios 1.5

1. (6, 9) **3.** (15, 2) **5.** **a)** (−6, −10), (−4, −7), (−2, −4), (0, −1), (2, 2), (4, 5), (6, 8) **b)** $1.5x - 1$; es una función.

c)

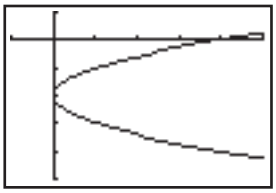


[−5, 5] por [−3, 3]

7. a) (9, −5), (4, −4), (1, −3), (0, −2), (1, −1), (4, 0), (9, 1)

b) $x = (y + 2)^2$; no es una función.

c)



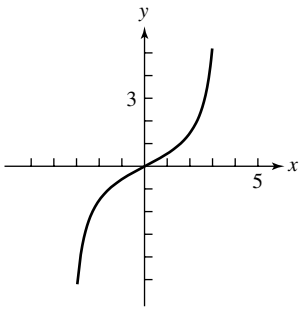
[−1, 5] por [−5, 1]

9. a) No **b)** Sí **11. a)** Sí **b)** Sí **13.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2, (-\infty, \infty)$ **15.** $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2-x}, (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

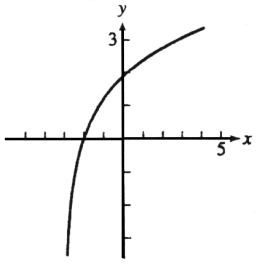
17. $f^{-1}(x) = x^2 + 3, x \geq 0$

19. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}, (-\infty, \infty)$ **21.** $f^{-1}(x) = x^3 - 5, (-\infty, \infty)$

23. Uno a uno



25. Uno a uno



27. $f(g(x)) = 3\left[\frac{1}{3}(x+2)\right] - 2 = x + 2 - 2 = x$; $g(f(x)) = \frac{1}{3}[(3x - 2) + 2] = \frac{1}{3}(3x) = x$

29. $f(g(x)) = [(x-1)^{1/3}]^3 + 1 = (x-1)^1 + 1 = x - 1 + 1 = x$; $g(f(x)) = [(x^3 + 1) - 1]^{1/3} = (x^3)^{1/3} = x^1 = x$

31. $f(g(x)) = \dfrac{\frac{1}{x-1} + 1}{\frac{1}{x-1}} = (x-1)\left(\frac{1}{x-1} + 1\right) = 1 + x - 1 = x$; $g(f(x)) = \dfrac{1}{\frac{x+1}{x} - 1} = \left(\dfrac{1}{\frac{x+1}{x} - 1}\right) \cdot \frac{x}{x} = \dfrac{x}{x + 1 - x} = \frac{x}{1} = x$

33. a) 108 euros **b)** $y = \frac{25}{27}x$. Esto convierte euros (x) a dólares (y). **c)** \$44.44

35. $y = e^x$ y $y = \ln x$ son inversas. Si restringimos el dominio de la función $y = x^2$ al intervalo $[0, \infty)$, entonces la función restringida y $y = \sqrt{x}$ son inversas. **37.** $y = |x|$ **39.** Verdadero. Todas las parejas ordenadas barren los valores del dominio y del rango. **41.** E **43.** C **45.** (Las respuestas pueden variar.) **a)** Si la gráfica de f no está rota, tampoco lo estará su reflexión en la recta $y = x$. **b)** f y su inversa deben ser uno a uno para ser funciones inversas. **c)** Como f es impar, $(-x, -y)$ está en la gráfica siempre que (x, y) lo esté. Esto implica que $(-y, -x)$ está en la gráfica de f^{-1} siempre (x, y) lo esté. Esto implica que f^{-1} es impar. **d)** Sea $y = f(x)$. Como la razón de Δy a Δx es positiva, la razón Δx a Δy es positiva. Cualquier razón de Δy a Δx en la gráfica de f^{-1} es la misma que la razón de Δx a Δy en la grafica de f, por tanto, es positiva. Esto implica que f^{-1} es creciente. **47. a)** $y = 0.75x + 31$ **b)** $y = \frac{4}{3}(x - 31)$. Convierte calificaciones en escala a calificaciones sin escala. **49. a)** No **b)** No **c)** 45°; sí. **51.** Cuando $k = 1$, la función de escala es lineal. Las opiniones variarán sobre cuál es el mejor valor de k.

SECCIÓN 1.6

Exploración 1

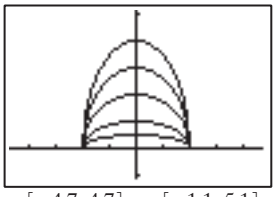
1. Esto sube o baja la parábola con respecto al eje y. **3.** Sí.

Exploración 2

1. Grafica C. Los puntos con coordenada y positiva permanecen sin cambio, mientras que los puntos con coordenada y negativa se reflejan con respecto al eje x.
3. Grafica F. La gráfica será una reflexión de la gráfica C, con respecto al eje y.

Exploración 3

1.



$[-4.7, 4.7]$ por $[-1.1, 5.1]$

El 1.5 y el 2 alargan verticalmente la gráfica; el 0.5 y el 0.25 comprimen verticalmente la gráfica.

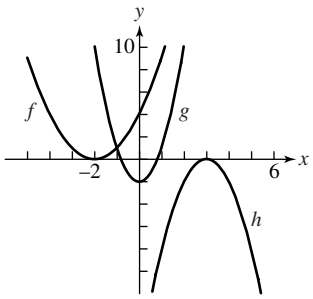
Repaso rápido 1.6

1. $(x + 1)^2$ **3.** $(x + 6)^2$ **5.** $(x - 5/2)^2$ **7.** $x^2 - x + 2$ **9.** $x^3 - 6x + 5$

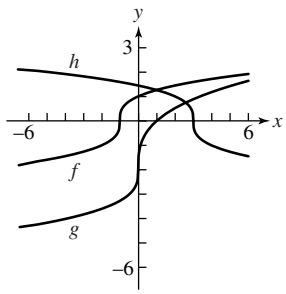
Ejercicios 1.6

1. Traslación vertical 3 unidades hacia abajo. **3.** Traslación horizontal 4 unidades hacia la izquierda.
5. Traslación horizontal 100 unidades hacia la derecha.
7. Traslación horizontal 1 unidad hacia la derecha, y traslación vertical 3 unidades hacia arriba.
9. Reflexión con respecto del eje x.
11. Reflexión respecto del eje y.
13. Alargamiento vertical por 2.
15. Alargamiento horizontal por $\dfrac{1}{0.2} = 5$ o compresión vertical por $0.2^3 = 0.008$.
17. Traslación derecha 6 unidades para obtener g.
19. Trasladar a la izquierda 4 unidades y reflejar con respecto del eje x para obtener g.

21.

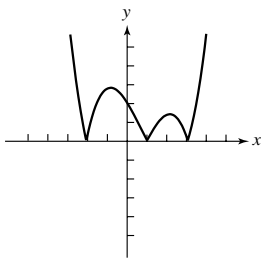


23.

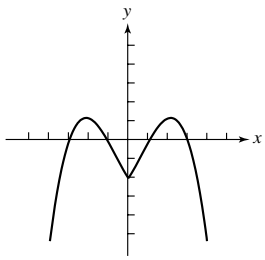


25. $f(x) = \sqrt{x + 5}$ **27.** $f(x) = -\sqrt{x + 2} + 3 = 3 - \sqrt{x + 2}$
29. a) $-x^3 + 5x^2 + 3x - 2$ **b)** $-x^3 - 5x^2 + 3x + 2$
31. a) $y = -f(x) = -(\sqrt[3]{8x}) = -2\sqrt[3]{x}$ **b)** $y = f(-x) = \sqrt[3]{8(-x)} = -2\sqrt[3]{x}$
33. Sea f una función impar; esto es, $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f. Para reflejar la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje y, hacemos la transformación $y = f(-x)$. Pero $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f, entonces esta transformación resulta en $y = -f(x)$, que es exactamente la traslación que refleja la grafica de f con respecto del eje x; por lo tanto, las dos reflexiones producen la misma gráfica.

35.



37.



39. **a)** $2x^3 - 8x$ **b)** $27x^3 - 12x$

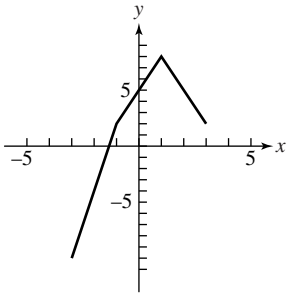
41. **a)** $2x^2 + 2x - 4$ **b)** $9x^2 + 3x - 2$

43. Empezando con $y = x^2$, trasladar 3 unidades hacia la derecha, estirar verticalmente en un factor de 2 y trasladar 4 unidades hacia abajo.

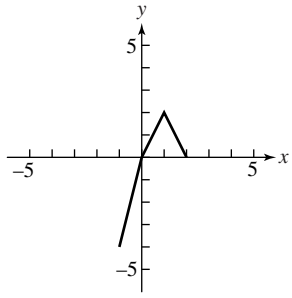
45. Empezando con $y = x^2$, comprimir horizontalmente en un factor de $\frac{1}{3}$ y trasladar 4 unidades hacia abajo.

47. $y = 3(x - 4)^2$ **49.** $y = 2|x + 2| - 4$

51.



53.

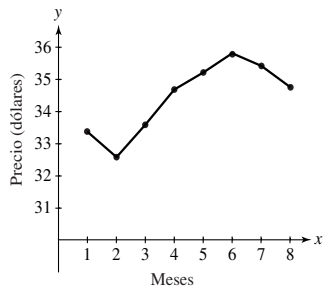


55. Las reflexiones tienen mayor efecto en los puntos que están más lejos de la línea de reflexión. Las traslaciones afectan la distancia de los puntos de los ejes y, por tanto, cambia el efecto de las reflexiones.

57. Primero alargar verticalmente en un factor de $\frac{9}{5}$ y luego trasladar hacia arriba 32 unidades.

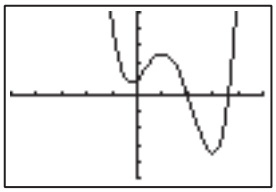
59. Falso; es trasladado hacia la izquierda. **61.** C **63.** A

65. **a)**

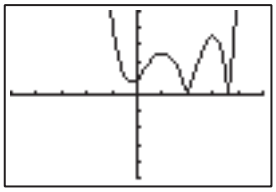


b) Cambiar el valor y, multiplicando por el factor de conversión de dólares a yen, un número que cambia de acuerdo con las condiciones del mercado internacional. Esto resulta en un alargamiento vertical por el factor de conversión.

67. **a)** La gráfica original está en la parte superior; la gráfica de $y = |f(x)|$ está en la parte inferior.

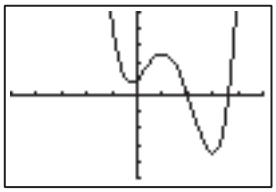


[−5, 5] por [−10, 10]

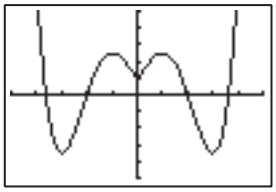


[−5, 5] por [−10, 10]

b) La gráfica original está en la parte superior; la gráfica de $y = f(|x|)$ está en la parte inferior.

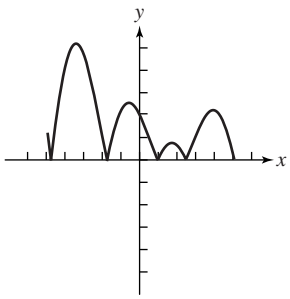


[−5, 5] por [−10, 10]

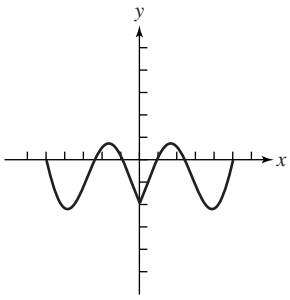


[−5, 5] por [−10, 10]

c)



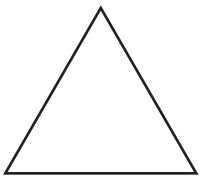
d)



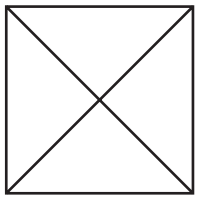
SECCIÓN 1.7

Exploración 1

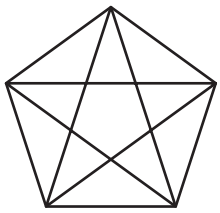
1.



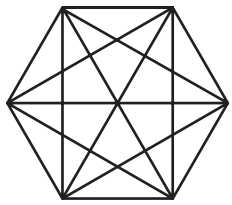
$n = 3;\ d = 0$



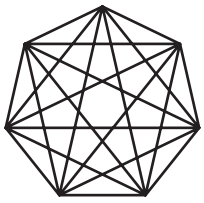
$n = 4;\ d = 2$



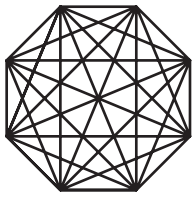
$n = 5;\ d = 5$



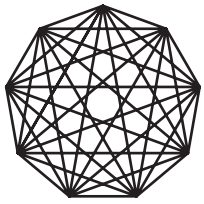
$n = 6;\ d = 9$



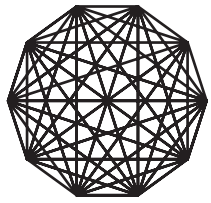
$n = 7;\ d = 14$



$n = 8;\ d = 20$



$n = 9;\ d = 27$



$n = 10;\ d = 35$

2, 5, 9, 14, 20, 27

3. Lineal: $r^2 = 0.9758$; potencia: $r^2 = 0.9903$;
cuadrática: $R^2 = 1$; cúbica: $R^2 = 1$; bicuadrática o cuártica: $R^2 = 1$.

5. Como la curva cuadrática se ajusta a los puntos de manera perfecta, no se gana algo sumando un término cúbico o de cuarto grado. En las regresiones, los coeficientes de estos términos son cero.

Repaso rápido 1.7

1. $h = 2(A/b)$ **3.** $h = V/(\pi r^2)$ **5.** $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$ **7.** $h = \dfrac{A - 2\pi r^2}{2\pi r} = \dfrac{A}{2\pi r} - r$ **9.** $P = \dfrac{A}{(1 + r/n)^{nt}} = A(1 + r/n)^{-nt}$

Ejercicios 1.7

1. $3x + 5$ **3.** $0.17x$ **5.** $(x + 12)(x)$ **7.** $1.045x$ **9.** $0.60x$ **11.** Sea C el costo total y n el número de artículos producidos; $C = 34{,}500 + 5.75n$.

13. Sea R el ingreso y n el número de artículos vendidos: $R = 3.75n$. **15.** $V = 2\pi r^3$ **17.** $A = a^2\sqrt{15}/4$ **19.** $A = 24r^2$

21. $x + 4x = 620$; $x = 124$; $4x = 496$ **23.** $1.035x = 36{,}432$; $x = 35{,}200$ **25.** $182 = 52t$, así que $t = 3.5$ h

27. $0.60(33) = 19.8$, $0.75(27) = 20.25$; La camisa de \$33 es mejor compra ya que el precio de venta es menor. **29.** 15.95%

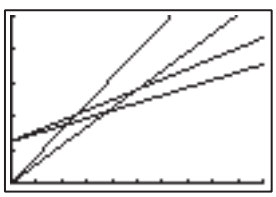
31. a) $0.10x + 0.45\,(100 - x) = 0.25\,(100)$ **b)** Usar $x \approx 57.14$ galones de la solución al 10% y alrededor de 42.86 galones de la solución al 45%. **33. a)** $V = x(10 - 2x)(18 - 2x)$ **b)** (0.5) **c)** Aproximadamente 2.06 pulgadas por 2.06 pulgadas.

35. 6 pulgadas. **37.** Aproximadamente 21.36 pulgadas. **39.** Aproximadamente 11.42 mph.

41. Verdadero; si hay un buen ajuste, el coeficiente de correlación es cercano a 1. **43.** C **45.** B **47. a)** $C = 100{,}000 + 30x$ **b)** $R = 50x$ **c)** $x = 5000$ pares de zapatos. **d)** El punto de intersección corresponde al punto de equilibrio, donde $C = R$.

49. a) $y_1 = u(x) = 125{,}000$ **b)** $y_2 = s(x) = 125{,}000 + 31x$ **c)** $y_3 = R_u(x) = 56x$ **d)** $y_4 = R_s(x) = 79x$

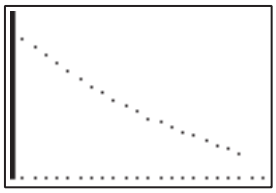
e)



$[0, 10{,}000]$ por $[0, 500{,}000]$

f) Debe recomendar encordar las raquetas; necesita vender menos raquetas con cuerdas para empezar a obtener una ganancia (ya que la intersección de y_2 y y_4 ocurre para un valor más pequeño de x que la intersección de y_1 y y_3).

51. a)



[0, 22] por [100, 200]

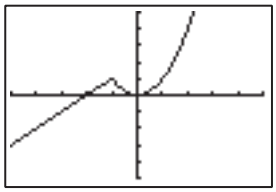
b) Lista L3 = {112.3, 106.5, 101.5, 96.6, 92.0, 87.2, 83.1, 79.8, 75.0, 71.7, 68, 64.1, 61.5, 58.5, 55.9, 53.0, 50.8, 47.9, 45.2, 43.2}

c) $y = 118.07 \times 0.951^x$. Se ajusta extremadamente bien.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

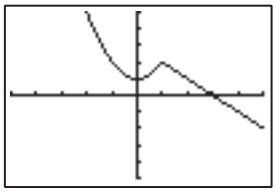
1. d) **3.** i) **5.** b) **7.** g) **9.** a) **11. a)** Todos los reales. **b)** Todos los reales. **13. a)** Todos los reales. **b)** $[0, \infty)$
15. a) Todos los reales. **b)** $[8, \infty)$ **17. a)** Todos los reales, excepto 0 y 2. **b)** Todos los reales excepto 0.
19. Continua. **21. a)** Asíntotas verticales en $x = 0$ y $x = 5$. **b)** $y = 0$
23. a) Ninguna. **b)** $y = 7$ y $y = -7$ **25.** $(-\infty, \infty)$ **27.** $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ **29.** No acotada. **31.** Acotada por arriba.
33. a) Ninguna. **b)** -7 en $x = -1$.
35. a) -1 en $x = 0$ **b)** Ninguna. **37.** Par. **39.** Ninguna. **41.** $(x - 3)/2$ **43.** $2/x$

45.



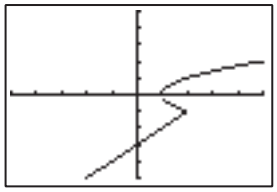
[−5, 5] por [−5, 5]

47.



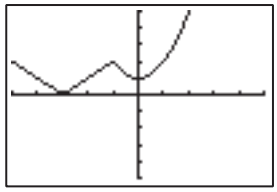
[−5, 5] por [−5, 5]

49.



[−5, 5] por [−5, 5]

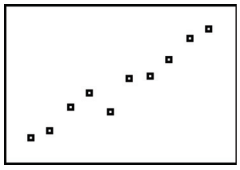
51.



[–5, 5] por [–5, 5]

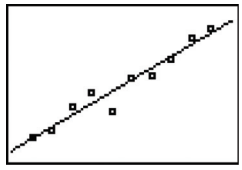
53. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ **55.** $(f \circ g)(x) = \sqrt{x}(x^2 - 4)$; $[0, \infty)$
57. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$ **59.** $\pi s^2/2$ **61.** $100\pi h$ **63.** $40 - t/(50\pi)$

65. a)



[4, 15] por [940, 1700]

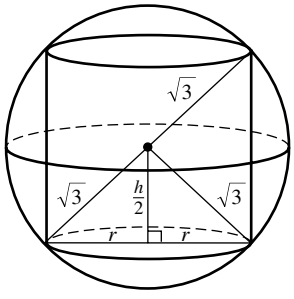
b) La recta de regresión es $y = 61.133x + 725.333$.



[4, 15] por [940, 1700]

c) 1,948 (miles de barriles)

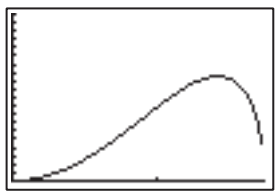
67. a) $h = 2\sqrt{3 - r^2}$



$h = 2\sqrt{3 - r^2}$

b) $2\pi r^2\sqrt{3 - r^2}$ **c)** $[0, \sqrt{3}]$

d)

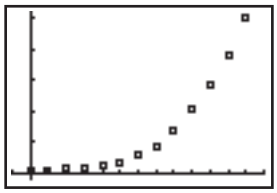


$[0, \sqrt{3}]$ por $[0, 20]$

e) 12.57 pulgada^3

Capítulo 1 Proyecto

1.



[–1, 13] por [–100, 2600]

3. 4690, 7085 **5.** $y = \dfrac{4914.198}{1 + 269.459e^{-0.468x}}$

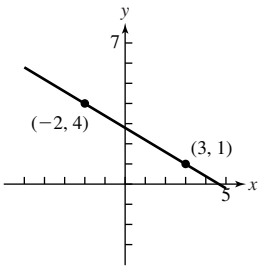
SECCIÓN 2.1

Exploración 1

1. −$2,000 por año. **3.** $50,000; $18,000.

Repaso rápido 2.1

1. $y = 8x + 3.6$ **3.** $y = -0.6x + 2.8$ **5.** $x^2 + 6x + 9$ **7.** $3x^2 - 36x + 108$ **9.** $2(x - 1)^2$



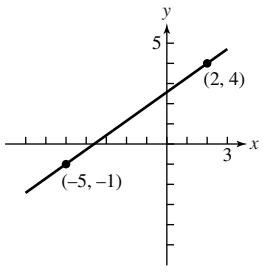
Ejercicios 2.1

1. No es una función polinomial debido al exponente −5.

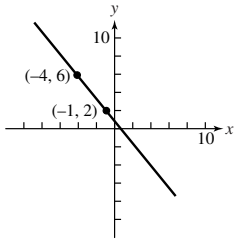
3. Polinomio de grado 5 con coeficiente principal 2.

5. No es una función potencial por el radical.

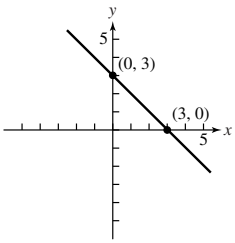
7. $f(x) = \dfrac{5}{7}x + \dfrac{18}{7}$



9. $f(x) = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}$

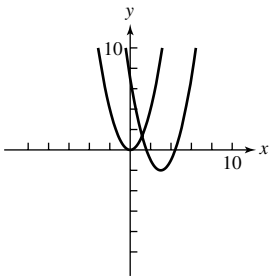


11. $f(x) = -x + 3$

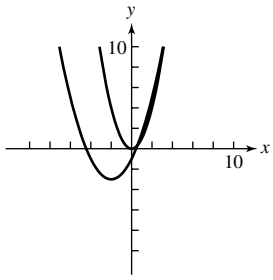


13. a) **15.** b) **17.** e)

19. Trasladar la grafica de $y = x^2$ hacia la derecha 3 unidades y el resultado 2 unidades hacia abajo



21. Trasladar 2 unidades hacia la izquierda la gráfica de $y = x^2$, comprimir verticalmente la gráfica resultante por un factor de $\frac{1}{2}$ y trasladar esa gráfica 3 unidades hacia abajo.



23. Vértice: $(1, 5)$; eje: $x = 1$.

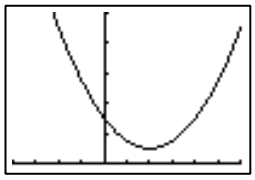
25. Vértice: $(1, -7)$; eje: $x = 1$.

27. Vértice: $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{73}{12}\right)$; eje: $x = -\frac{5}{6}$; $f(x) = 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{73}{12}$.

29. Vértice: $(4, 19)$; eje $x = 4$; $f(x) = -(x - 4)^2 + 19$.

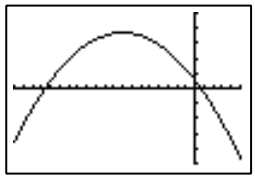
31. Vértice: $\left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$; eje; $x = \frac{3}{5}$; $g(x) = 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{11}{5}$.

33. $f(x) = (x - 2)^2 + 2$; vértice: $(2, 2)$; eje: $x = 2$; abre hacia arriba; no interseca al eje x.



$[-4, 6]$ por $[0, 20]$

35. $f(x) = -(x + 8)^2 + 74$; vértice: $(-8, 74)$; $x = -8$; abre hacia abajo; interseca al eje x alrededor de -16.602 y 0.602 o $(-8 \pm \sqrt{74})$.

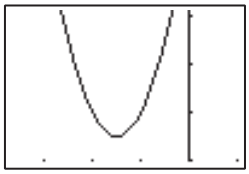


$[-20, 5]$ por $[-100, 100]$

37. $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$;

Vértice: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; eje: $x = -\frac{3}{2}$;

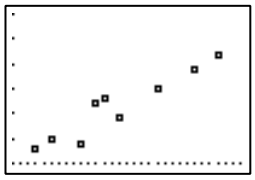
abre hacia arriba; no interseca al eje y; alargada verticalmente en un factor de 2



[−3.7, 1] por [2, 5.1]

39. $y = 2(x + 1)^2 - 3$ **41.** $y = -2(x - 1)^2 + 11$ **43.** $y = 2(x - 1)^2 + 3$ **45.** Fuerte positiva. **47.** Débil positiva.

49. a)



[15, 45] por [20, 50]

b) Fuerte positiva

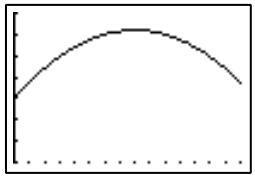
51. $940

53. a) $y \approx 0.541x + 4.702$. La pendiente indica que la compensación por hora para trabajadores de la producción aumenta alrededor de 54 centavos/año. **b)** Alrededor de $25.70.

55. a) [0, 100] por [0, 1000] es una posibilidad. **b)** Ya sea 107,335 unidades o 372,665 unidades.

57. 3.5 pies

59. a) $R(x) = (26{,}000 - 1{,}000x)(0.50 + 0.05x)$ **b)**

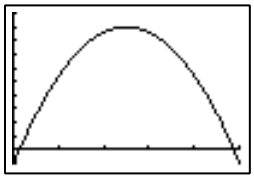


[0, 15] por [10,000, 17,000]

c) 90 centavos por lata, $16,200.

61. a) Alrededor de 215 pies por arriba del campo. **b)** Alrededor de 6.54 seg. **c)** Alrededor de 117 pies/seg hacia abajo.

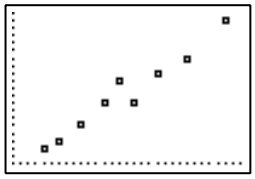
63. a) $h = -16t^2 + 80t - 10$ **b)** 90 pies, 25 seg



[0, 5] por [−10, 100]

65. 2006

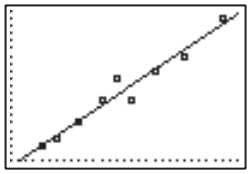
67. a)



[15, 45] por [20, 40]

c) En promedio, los niños ganaron 0.68 libras por mes.

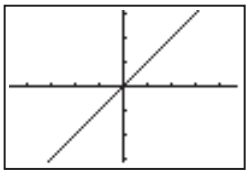
d)



[15, 45] por [20, 40]

b) $y \approx 0.68x + 9.01$ **e)** ≈ 29.41 lb

69. La función identidad $f(x) = x$



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

Dominio: $(-\infty, \infty)$; Rango: $(-\infty, \infty)$; continua; creciente para toda x; simétrica con respecto al origen; no es acotada; no tiene máximo ni mínimo; no tienen asíntotas horizontales ni verticales; comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

71. Falso. El valor inicial es $f(0) = -3$

73. E

75. B

77. a) (i), (iii) y (v) **b)** (i), (iii), (iv) y (vi) **c)** (ii) no es función.

81. a) Las dos soluciones son $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; su suma es $2\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{b}{a}$.

b) El producto de las dos soluciones dadas antes es $\dfrac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

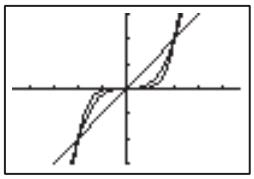
83. $\left(\dfrac{a+b}{2}, -\dfrac{(a-b)^2}{4}\right)$

85. Suponga que $f(x) = mx + b$, con m y b constantes y $m \neq 0$. Sean x_1 y x_2 números reales con $x_1 \neq x_2$. Luego la tasa de cambio promedio de f es $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = \dfrac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$, una constante distinta de cero. Por otra parte, suponga que m y x_1 son constantes y $m \neq 0$. Sea x un número real con $x \neq x_1$ y sea f una función definida para todos los números reales tal que $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = m$. Entonces $f(x) - f(x_1) = m(x - x_1)$ y $f(x) = mx + (f(x_1) - mx_1)$. Observe que la expresión $f(x_1) - mx_1$ es constante; llámela b. Entonces $f(x_1) - mx_1 = b$; así que, $f(x_1) = mx_1 + b$ y $f(x) = mx + b$ para toda $x \neq x_1$. Así que f es una función lineal.

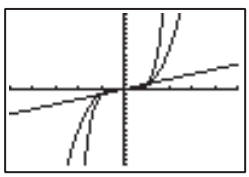
SECCIÓN 2.2

Exploración 1

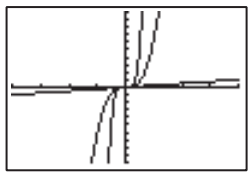
1.



[−2.35, 2.35] por [−1.5, 1.5]



[−5, 5] por [−15, 15]



[−20, 20] por [−200, 200]

Las parejas (0, 0), (1, 1) y (−1, −1) son comunes a las tres gráficas.

Repaso rápido 2.2

1. $\sqrt[3]{x^2}$ **3.** $1/d^2$ **5.** $1/\sqrt[5]{q^4}$ **7.** $3x^{3/2}$ **9.** $\approx 1.71x^{-4/3}$

Ejercicios 2.2

1. Potencia $= 5$, constante $= -\frac{1}{2}$ **3.** No es una función potencia.

5. Potencia $= 1$, constante c^2. **7.** Potencia $= 2$, constante $= \frac{g}{2}$.

9. Potencia $= -2$, constante $= k$.

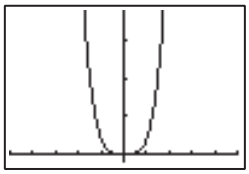
11. Grado $= 0$, coeficiente $= -4$. **13.** Grado $= 7$, coeficiente $= -6$. **15.** Grado $= 2$, coeficiente $= 4\pi$.

17. $A = ks^2$ **19.** $I = V/R$ **21.** $E = mc^2$

23. El peso w de un objeto varía directamente con respecto a su masa m, con la constante de variación g.

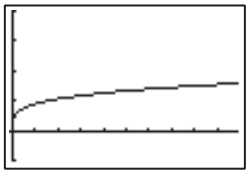
25. El índice de refracción n de un medio es inversamente proporcional a v, la velocidad de la luz en el medio, con constante de variación c, la velocidad constante de la luz en el espacio libre.

27. Potencia $= 4$, constante $= 2$; dominio: $(-\infty, \infty)$;
rango: $[0, \infty)$; continua; decreciente en $(-\infty, 0)$.
Creciente en $(0, \infty)$; par. Simétrica con respecto
al eje y; acotada por abajo, pero no por arriba.
Mínimo local en $x = 0$; asíntotas: ninguna;
comportamiento en los extremos; $\lim_{x \to -\infty} 2x^4 = \infty$, $\lim_{x \to \infty} 2x^4 = \infty$



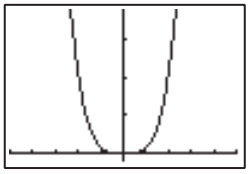
$[-5, 5]$ por $[-1, 49]$

29. Potencia $= \frac{1}{4}$, constante $= \frac{1}{2}$; dominio: $[0, \infty)$;
rango: $[0, \infty)$; continua; creciente en $[0, \infty)$.
Acotada por abajo; no es par ni impar.
Mínimo local en $(0, 0)$; asíntotas: ninguna;
comportamiento en los extremos; $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2}\sqrt[4]{x} = \infty$



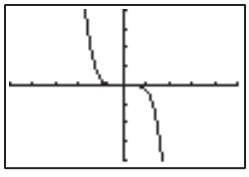
$[-1, 99]$ por $[-1, 4]$

31. Compresión vertical en un factor de $\frac{2}{3}$; f es par.



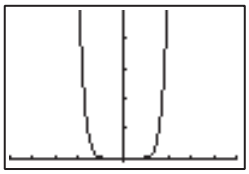
$[-5, 5]$ por $[-1, 19]$

33. Compresión vertical en un factor de 1.5 y reflejada con respecto al eje x; f es impar.



$[-5, 5]$ por $[-20, 20]$

35. Compresión vertical en un factor de $\frac{1}{4}$; f es par. **37.** g) **39.** d) **41.** h)



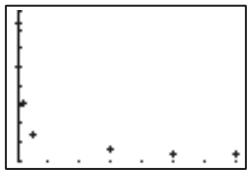
$[-5, 5]$ por $[-1, 49]$

43. $k = 3$, $a = \frac{1}{4}$, f es creciente en el primer cuadrante, f no está definida para $x < 0$. **45.** $k = -2$, $a = \frac{4}{3}$. f es decreciente en el cuarto cuadrante, f es par.

47. $k = \frac{1}{2}$, $a = -3$. f es decreciente en el primer cuadrante. f es impar.

49. $y = \frac{8}{x^2}$, potencia $= -2$, constante $= 8$. **51.** 2.21 L **53.** 1.24×10^8 m/s.

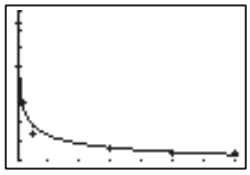
55. a)



$[-2, 71]$ por $[50, 450]$

b) $r \approx 231.204 \cdot w^{-0.297}$

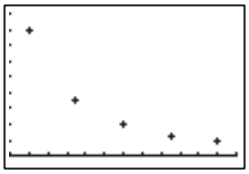
c)



$[-2, 71]$ por $[50, 450]$

d) Aproximadamente 37.67 latidos/minuto, que es muy cercano a el valor observado por Clark.

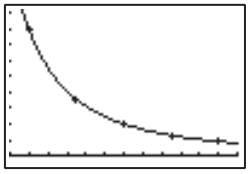
57. a)



$[0.8, 3.2]$ por $[-0.3, 9.2]$

b) $y \approx 7.932 \cdot x^{-1.987}$; sí

c)

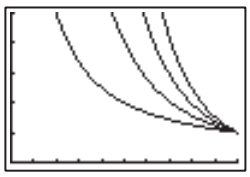


$[0.8, 3.2]$ por $[-0.3, 9.2]$

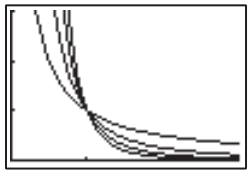
d) Aproximadamente 2.76 $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ y 0.697 $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, respectivamente.

59. Falso, ya que $f(-x) = (-x)^{1/3} = -x^{1/3} = -f(x)$. La gráfica de f es simétrica con respecto del origen. **61.** E **63.** B

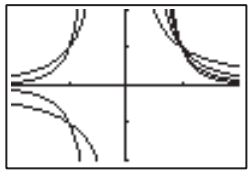
65. a)



[0, 1] por [0, 5]



[0, 3] por [0, 3]

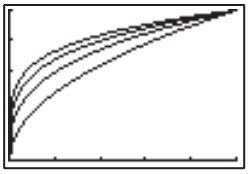


[−2, 2] por [−2, 2]

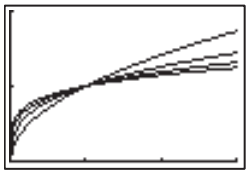
Las gráficas de $f(x) = x^{-1}$ y $h(x) = x^{-3}$ son similares y aparecen sólo en el primero y tercer cuadrantes. Las gráficas de $g(x) = x^{-2}$ y $k(x) = x^{-4}$ son similares y aparecen sólo en el primero y segundo cuadrantes. La pareja (1, 1) es común a las cuatro funciones.

	f	g	h	k
Dominio	$x \neq 0$	$x \neq 0$	$x \neq 0$	$x \neq 0$
Rango	$y \neq 0$	$y > 0$	$y \neq 0$	$y > 0$
Continua	sí	sí	sí	sí
Creciente		$(-\infty, 0)$		$(-\infty, 0)$
Decreciente	$(-\infty, 0), (0, \infty)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0), (0, \infty)$	$(0, \infty)$
Simetría	c.r.a. origen	c.r.a. eje y	c.r.a. origen	c.r.a. eje y
Acotada	no	por abajo	no	por abajo
Máx/mín	ninguno	ninguno	ninguno	ninguno
Asíntotas	eje x, eje y	eje x, eje y	eje x, eje y	eje x, eje y
Comport. en los extremos	$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$	$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = 0$	$\lim_{x \to \pm\infty} k(x) = 0$

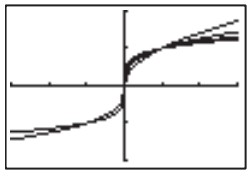
b)



[0, 1] por [0, 1]



[0, 3] por [0, 2]



[−3, 3] por [−2, 2]

Las gráficas de $f(x) = x^{1/2}$ y $h(x) = x^{1/4}$ son similares y aparecen sólo en el primer cuadrante. Las gráficas de $g(x) = x^{1/3}$ y $k(x) = x^{1/5}$ son similares y aparecen sólo en el primero y tercer cuadrantes. Las parejas (0, 0) y (1, 1) son comunes a las cuatro funciones.

	f	g	h	k
Dominio	$[0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
Rango	$y \geq 0$	$(-\infty, \infty)$	$y \geq 0$	$(-\infty, \infty)$
Continua	sí	sí	sí	sí
Creciente	$[0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
Decreciente				
Simetría	ninguna	c.r.a. origen	ninguna	c.r.a. origen
Acotada	por abajo	no	por abajo	no
Máx/mín	mín en (0, 0)	ninguno	mín en (0, 0)	ninguno
Asíntotas	ninguna	ninguna	ninguna	ninguna
Comport. en los extremos	$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$	$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$	$\lim_{x \to \infty} k(x) = \infty$ $\lim_{x \to -\infty} k(x) = -\infty$

67. $T \approx a^{1.5}$. Al elevar al cuadrado ambos lados se muestra que $T^2 = a^3$ aproximadamente. **69.** Si $f(x)$ es par, $g(-x) = 1/f(-x) = 1/f(x) = g(x)$. Si $f(x)$ es impar, $g(-x) = 1/f(-x) = 1/(-f(x)) = -1/f(x) = -g(x)$. Si $g(x) = 1/f(x)$ entonces $f(x) \cdot g(x) = 1$ y $f(x) = 1/g(x)$. Así que mediante el razonamiento usado anteriormente, si $g(x)$ es par, también lo es $f(x)$, y si $g(x)$ es impar, también lo es $f(x)$. **71. a)** La fuerza F que actúa sobre un objeto varía conjuntamente con la masa m del objeto y la aceleración a del objeto. **b)** La energía cinética EC de un objeto varía conjuntamente con la masa m del objeto y el cuadrado de la velocidad v del objeto. **c)** La fuerza debida a la gravedad F que actúa sobre dos objetos varía conjuntamente con sus masas m_1 y m_2, e inversamente al cuadrado de la distancia r entre sus centros, con la constante de variación G (constante de gravitación universal).

SECCIÓN 2.3

Exploración 1

1. a) $\infty; -\infty$ **b)** $-\infty; \infty$ **c)** $\infty; -\infty$ **d)** $-\infty; \infty$ **3. a)** $-\infty; \infty$ **b)** $-\infty; -\infty$ **c)** $\infty; \infty$ **d)** $\infty; -\infty$

Exploración 2

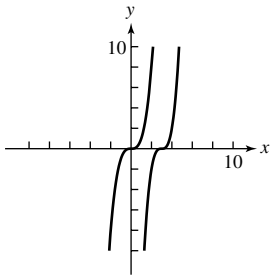
1. $y = 0.0061x^3 + 0.0177x^2 - 0.5007x + 0.9769$

Repaso rápido 2.3

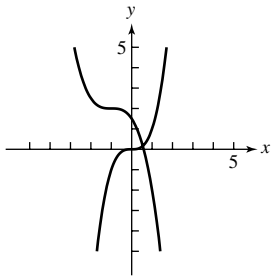
1. $(x - 4)(x + 3)$ **3.** $(3x - 2)(x - 3)$ **5.** $x(3x - 2)(x - 1)$ **7.** $x = 0, x = 1$ **9.** $x = -6, x = -3, x = 1.5$

Ejercicios 2.3

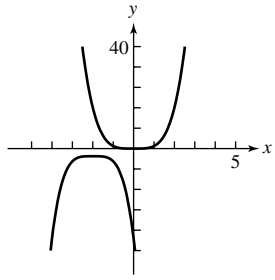
1. Desplazar $y = x^3$ a la derecha 3 unidades y alargar verticalmente en un factor de 2. Intersección y: $(0, -54)$



3. Desplazar $y = x^3$ una unidad hacia la izquierda, comprimir verticalmente en un factor de $\frac{1}{2}$, reflejar con respecto 2 unidades hacia arriba, intersección y: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

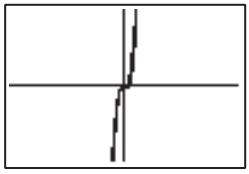


5. Desplazar $y = x^4$ dos unidades hacia la izquierda, alargar verticalmente en un factor de 2, reflejar con respecto del eje x y desplazar verticalmente 3 unidades hacia abajo, intersección y: $(0, -35)$



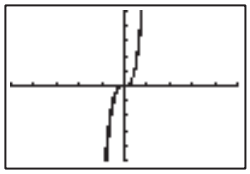
7. Máximo local: $\approx (0.79, 1.19)$, ceros: $x = 0$ y $x \approx 1.26$. **9.** c) **11.** a)

13. Una posibilidad:



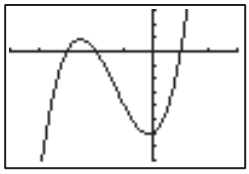
$[-100, 100]$ por $[-1{,}000, 1{,}000]$

15. Una posibilidad:



$[-50, 50]$ por $[-1{,}000, 1{,}000]$

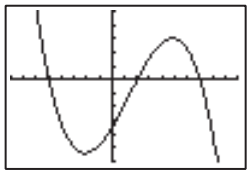
17.



$[-5, 3]$ por $[-8, 3]$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

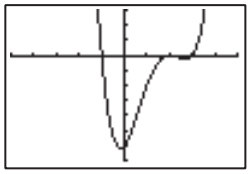
19.



$[-8, 10]$ por $[-120, 100]$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

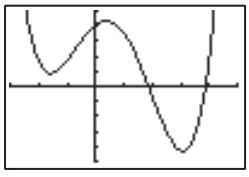
21.



$[-5, 5]$ por $[-14, 6]$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

23.



$[-3, 5]$ por $[-50, 50]$

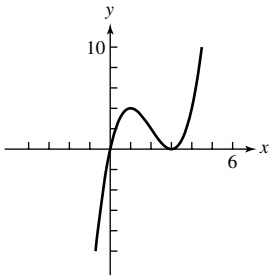
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

25. ∞, ∞ **27.** $-\infty, \infty$

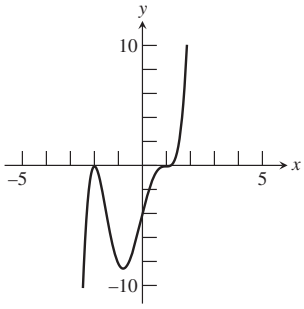
29. a) Hay 3 ceros, son -2.5, 1 y 1.1 **31.** c) Hay 3 ceros; aproximadamente -0.273 $\left(\text{en realidad } -\frac{3}{11}\right)$, -0.25 y 1.

33. -4 y 2 **35.** $\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{3}$ **37.** 0, $-\frac{2}{3}$, y 1

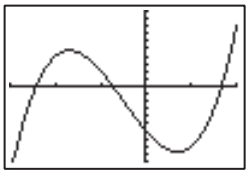
39. Grado 3; ceros: $x = 0$ (mult. 1, la gráfica cruza el eje x), $x = 3$ (mult. 2, la gráfica es tangente).



41. Grado 5; ceros: $x = 1$ (mult. 3, la gráfica cruza al eje x), $x = -2$ (mult. 2, la gráfica es tangente).



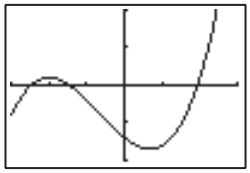
43.



[−3, 2] por [−10, 10]

-2.43, -0.74, 1.67

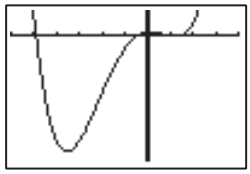
45.



[−3, 3] por [−10, 10]

-2.47, -1.46, 1.94

47.



[−6, 4] por [−100, 20]

-4.90, -0.45, 1, 1.35

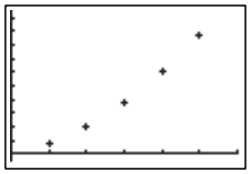
49. 0, -6 y 6 **51.** -5, 1, 11

53. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 18x + 72$ **55.** $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 12$ **57.** $y = 0.25x^3 - 1.25x^2 - 6.75x + 19.75$

59. $y = -2.21x^4 + 45.75x^3 - 339.79x^2 + 1075.25x - 1231$

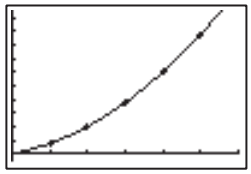
61. Se deduce del teorema del valor intermedio.

63. a)



[0, 60] por [−10, 210]

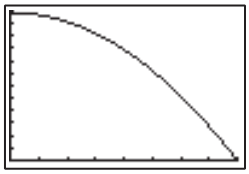
b) $y = 0.051x^2 + 0.97x + 0.26$ **c)**



[0, 60] por [−10, 210]

d) ≈ 56.39 pies **e)** 67.74 mph

65. a)



[0, 0.8] por [0, 1.20]

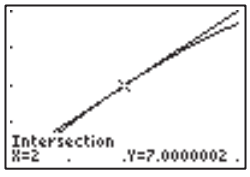
b) 0.3391 cm **67.** $0 < x \leq 0.929$ o $3.644 \leq x < 5$

69. Verdadero. Ya que f es continua y $f(1) = -2$ y $f(2) = 2$, el teorema del valor intermedio asegura que la gráfica cruza el eje x entre $x = 1$ y $x = 2$. **71.** C **73.** B **75.** La primera pantalla muestra la conducta definitiva de la función, pero oculta el hecho de que hay dos máximos locales y un mínimo local, además de cuatro intersecciones con el eje x entre -3 y 4. Todo esto si se ve en la segunda pantalla pero se pierde el mínimo cerca de $x=7$ y la intersección cerca de $x = 9$. La segunda pantalla sugiere un polinomio de cuarto grado y no de quinto grado.

77. El comportamiento exacto cerca de $x = 1$, es difícil de ver. Una visualización más cerca alrededor del punto (1, 0) sugiere que la gráfica sólo toca el eje x en 0 sin cruzarla en realidad. Esto es (1, 0) es un máximo local. Una posible ventana es [0.9999, 1.0001] por $[-1 \times 10^{-7}, 1 \times 10^{-7}]$. **79.** Un máximo y un mínimo no son visibles en la ventana estándar, pero pueden verse en la ventana [0.2, 0.4] por [5.29, 5.3]. **81.** La gráfica de $y = 3(x^3 - x)$ aumenta, luego decrece, luego crece; la gráfica de $y = x^3$ sólo crece. Por lo tanto, esta gráfica no puede obtenerse a partir de la gráfica de $y = x^3$ mediante las transformaciones estudiadas en el capítulo 1 (traslaciones, reflexiones y alargamientos/compresiones). Como el lado derecho incluye sólo estas transformaciones, no puede ser una solución.

83. a) Al sustituir $x = 2$, $y = 7$, encontramos que $7 = 5(2 - 2) + 7$, por lo que Q está en la recta L, y también $f(2) = -8 + 8 + 18 - 11 = 7$, por lo que Q está en la gráfica de $f(x)$.

b)



[1.8, 2.2] por [6, 8]

c) La recta L también cruza la gráfica de $f(x)$ en $(-2, -13)$.

85. a) $\frac{8}{D-\text{u}} = \frac{x}{D}$ y $\frac{8}{u} = \frac{y}{D}$ implica $D - u = \frac{uy}{x} \cdot \frac{8}{u} = \frac{y-8}{D-u}$ implica $D - u = \frac{u(y-8)}{8}$. Al combinar éstas se obtiene $\frac{uy}{x} = \frac{u(y-8)}{8}$, lo que implica que $\frac{8}{x} = \frac{y-8}{y}$. **b)** La ecuación (a) dice que $\frac{8}{x} = 1 - \frac{8}{y}$. Así que, $\frac{8}{y} = 1 - \frac{8}{x} = \frac{x-8}{x}$. Por tanto $y = \frac{8x}{x-8}$ **c)** Por el teorema de Pitágoras $y^2 + D^2 = 900$ y $x^2 + D^2 = 400$. Restando cantidades iguales se obtiene $y^2 - x^2 = 500$. Así, $500 = \left(\frac{8x}{x-8}\right)^2 - x^2$. Por tanto, $500(x-8)^2 = 64x^2 - x^2(x-8)^2$ o $500x^2 - 8{,}000x - 32{,}000 = 64x^2 - x^4 + 16x^3 - 64x^2$. Eso es equivalente a $x^4 - 16x^3 + 500x^2 - 8{,}000x + 32{,}000 = 0$ **d)** Observe que $8 < x < 20$, por lo que, la solución que buscamos es $x \approx 11.71$, que da $y \approx 25.54$ y $D \approx 16.21$.

SECCIÓN 2.4

Repaso rápido 2.4

1. $x^2 - 4x + 7$ **3.** $7x^3 + x^2 - 3$ **5.** $x(x+2)(x-2)$ **7.** $4(x+5)(x-3)$ **9.** $(x+2)(x+1)(x-1)$

Ejercicios 2.4

1. $f(x) = (x-1)^2 + 2$; $\frac{f(x)}{x-1} = x - 1 + \frac{2}{x-1}$

3. $f(x) = (x^2 + x + 4)(x+3) - 21$; $\frac{f(x)}{x+3} = x^2 + x + 4 - \frac{21}{x+3}$

$\frac{f(x)}{2x+1} = 2x^2 - 5x + \frac{7}{2} - \frac{9/2}{2x+1}$ **5.** $f(x) = (x^2 - 4x + 12)(x^2 + 2x - 1) - 32x + 18$;

$\frac{f(x)}{x^2+2x-1} = x^2 - 4x + 12 + \frac{-32x+18}{x^2+2x-1}$ **7.** $x^2 - 6x + 9 + \frac{-11}{x+1}$ **9.** $9x^2 + 97x + 967 + \frac{9{,}670}{x-10}$

11. $-5x^3 - 20x^2 - 80x - 317 + \frac{-1{,}269}{4-x}$ **13.** 3 **15.** -43 **17.** 5 **19.** Sí. **21.** No. **23.** Sí.

25. $f(x) = (x+3)(x-1)(5x-17)$ **27.** $2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$ **29.** $2x^3 - 8x^2 + \frac{19}{2}x - 3$ **31.** $f(x) = 3(x+4)(x+3)(x-5)$

33. $\frac{\pm 1}{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6}$; 1 **35.** $\frac{\pm 1, \pm 3, \pm 9}{\pm 1, \pm 2}$; $\frac{3}{2}$ **45.** No hay ceros fuera de la ventana.

47. *Hay* ceros que no se muestran (aprox. -11.002 y 12.003).

49. Cero racional: $\frac{3}{2}$; ceros irracionales: $\pm\sqrt{2}$. **51.** Racional: -3; irracional: $1 \pm \sqrt{3}$.

53. Racional: -1 y 4; irracional $\pm\sqrt{2}$. **55.** Racional: $-\frac{1}{2}$ y 4, irracional: ninguna. **57.** \$36.27; 53.7 **59.** -2

61. b) 2 es un cero de $f(x)$. **c)** $(x-2)(x^3 + 4x^2 - 3x - 19)$ **d)** Un cero irracional es $x \approx 2.04$.
e) $f(x) \approx (x-2)(x-2.04)(x^2 + 6.04x + 9.3116)$

63. Falso $(x+2)$ es un factor si, y sólo si, $f(-2) = 0$. **65.** A **67.** B

69. d) $x \approx 0.6527$ m.

71. a) Una posible visualización es en la ventana [0, 600] por [0, 500].



[0, 600] por [0, 500]

b) La población máxima, después de 300 días, es 460 pavos.
c) $P = 0$ cuando $t \approx 523.22$, aproximadamente 523 días después de que se sueltan.
d) Las respuestas pueden variar.

73. **a)** 0 o 2 ceros positivos, 1 cero negativo. **b)** No hay ceros positivos, 1 o 3 ceros negativos. **c)** 1 cero positivo, no hay ceros negativos. **d)** 1 cero positivo, 1 cero negativo.

75. Las respuestas pueden variar, pero incluimos un diagrama de la división sintética y un resumen.

$$4x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(4x^2 - 3x + \frac{3}{2}\right) + \frac{7}{4}$$
$$= (2x - 1)\left(2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right) + \frac{7}{4}$$

77. **b)** $-\frac{7}{3}, \frac{1}{2}$ y 3 **c)** No hay ceros racionales.

79. **a)** Ceros aproximados: -3.126, -1.075, 0.910, 2.291. **b)** $f(x) \approx g(x) = (x + 3.126)(x + 1.075)(x - 0.910)(x - 2.291)$

c) Grafique la función original y la factorización aproximada en varias ventanas y observe su similaridad. Numéricamente calcule $f(c)$ y $g(c)$ para varios valores de c.

SECCIÓN 2.5

Exploración 1

1. $f(2i) = (2i)^2 - i(2i) + 2 = -4 + 2 + 2 = 0$; $f(-i) = (-i)^2 - i(-i) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$; no.

3. El teorema de los ceros complejos conjugados no necesariamente se cumple para una función polinomial con coeficientes *complejos*.

Repaso rápido 2.5

1. $1 + 3i$ **3.** $7 + 4i$ **5.** $(2x - 3)(x + 1)$ **7.** $\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}i$ **9.** $\pm 1, \pm 2, \pm 1/3, \pm 2/3$

Ejercicios 2.5

1. $x^2 + 9$; ceros: $\pm 3i$; intersecciones x: ninguna. **3.** $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$; ceros 1 (mult. 2); $\pm 2i$; intersección x: $x = 1$ **5.** $x^2 + 1$

7. $x^3 - x^2 + 9x - 9$ **9.** $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$ **11.** $x^3 - 11x^2 + 43x - 65$ **13.** $x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 8$

15. $x^4 - 10x^3 + 38x^2 - 64x + 40$ **17.** b) **19.** d) **21.** Dos ceros complejos; ninguno real **23.** 3 ceros complejos; 1 real.

25. 4 ceros complejos; 2 reales.

27. Ceros: $x = 1, x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}i$; $f(x) = \frac{1}{4}(x - 1)(2x + 1 + \sqrt{19}i)(2x + 1 - \sqrt{19}i)$

29. Ceros: $x = \pm 1, x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2}i$; $f(x) = \frac{1}{4}(x - 1)(x + 1)(2x + 1 + \sqrt{23}i)(2x + 1 - \sqrt{23}i)$

31. Ceros: $x = -\frac{7}{3}, x = \frac{3}{2}, x = 1 \pm 2i$; $f(x) = (3x + 7)(2x - 3)(x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i)$

33. Ceros: $x = \pm\sqrt{3}, x = 1 \pm i$; $f(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 1 + i)(x - 1 - i)$

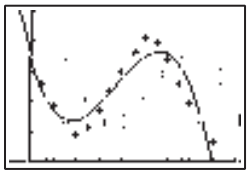
35. Ceros: $x = \pm\sqrt{2}, x = 3 \pm 2i$; $f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 3 + 2i)(x - 3 - 2i)$

37. $(x - 2)(x^2 + x + 1)$ **39.** $(x - 1)(2x + x + 3)$ **41.** $(x + 1)(x + 4)(x^2 + 1)$ **43.** $h \approx 3.776$ pies.

45. Sí, $f(x) = (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. **47.** No, cualquier grado sería al menos 5 o algunos de los coeficientes serían no reales.

49. $f(x) = -2x^4 + 12x^3 - 20x^2 - 4x + 30$

51. **a)** $D \approx -0.0820t^3 + 0.9162t^2 - 2.5126t + 3.3779$



$[-1, 9]$ por $[0, 5]$

b) Sally camina hacia el detector, da vuelta y camina hacia adelante (o camina de regreso); luego, nuevamente, camina hacia el detector.

c) $t \approx 1.81$ seg. ($D \approx 1.35$ m) y $t \approx 5.64$ seg. ($D \approx 3.65$ m).

53. Falso. Si $1 - 2i$ es un cero, entonces $1 + 2i$ también debe ser un cero. **55.** E **57.** C

59. a)

Potencia	Parte real	Parte imaginaria
7	8	-8
8	16	0
9	16	16
10	0	32

b) $(1 + i)^7 = 8 - 8i$
$(1 + i)^8 = 16$
$(1 + i)^9 = 16 + 16i$
$(1 + i)^{10} = 32i$

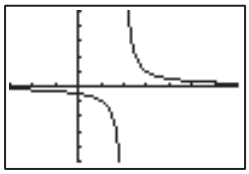
c) Concilie como sea necesario.

61. $f(i) = i^3 - i(i)^2 + 2i(i) + 2 = -i + i - 2 + 2 = 0$ **63.** La división sintética muestra que $f(i) = 0$ (el residuo) y al mismo tiempo proporciona $f(x) \div (x - i) = x^2 + 3x - i = h(x)$, por lo que $(x - i)(x^2 + 3x - i)$. **65.** $-4, 2 + 2\sqrt{3}i, 2 - 2\sqrt{3}i$

SECCIÓN 2.6

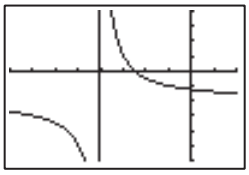
Exploración 1

1. $g(x) = \dfrac{1}{x - 2}$



$[-3, 7]$ por $[-5, 5]$

3. $k(x) = \dfrac{3}{x + 4} - 2$



$[-8, 2]$ por $[-5, 5]$

Repaso rápido 2.6

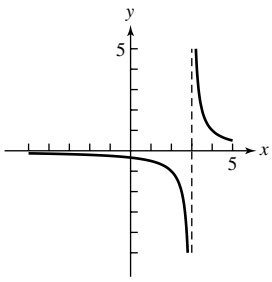
1. $x = -3, x = \dfrac{1}{2}$ **3.** $x = \pm 2$ **5.** $x = 1$ **7.** 2; 7 **9.** 3; -5

Ejercicios 2.6

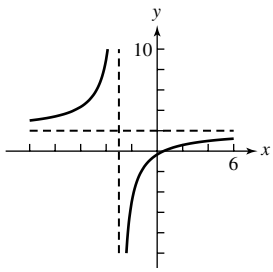
1. Dominio: toda $x \neq -3$; $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \infty$

3. Dominio: toda $x \neq -2, 2$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

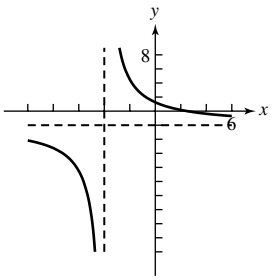
5. Trasladar 3 unidades hacia la derecha.
Asíntotas: $x = 3$, $y = 0$



7. Trasladar 3 unidades hacia la izquierda, reflejar con respecto al eje x, alargar verticalmente en un factor de 7 y subir 2 unidades.
Asíntotas: $x = -3$, $y = 2$



9. Trasladar 4 unidades a la izquierda, alargar verticalmente en un factor de 13 y bajar 2 unidades.
Asíntotas: $x = -4$, $y = -2$

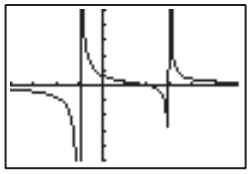


11. ∞ **13.** 0 **15.** ∞ **17.** 5

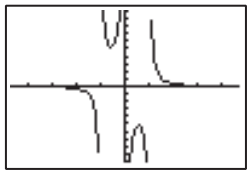
19. Asíntota vertical: ninguna; asíntota horizontal: $y = 2$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 2$

21. Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 1$; asíntota horizontal: $y = 0$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

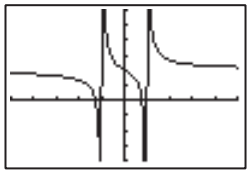
23. Intersecciones: $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y (2, 0)
asíntotas: $x = -1$, $x = 3$
y $y = 0$


[−4, 6] por [−5, 5]

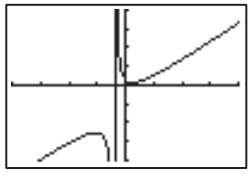
25. No hay intersecciones
asíntotas: $x = -1$, $x = 0$,
$x = 1$ y $y = 0$


[−4.7, 4.7] por [−10, 10]

27. Intersecciones: (0, 2), (−1.28, 0) y (0.78, 0); asíntotas: $x = 1$, $x = -1$ y $y = 2$

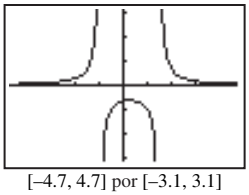

[−5, 5] por [−4, 6]

29. Intersección: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$
asíntotas: $x = -2$, $y = x - 4$


[−20, 20] por [−20, 20]

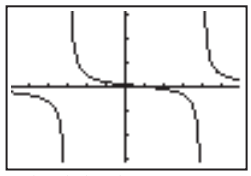
31. d); Xmin = −2, Xmax = 8, Xscl = 1 y Ymin = −3, Ymax = 3, Yscl = 1
33. a); Xmin = −3, Xmax = 5, Xscl = 1 y Ymin = −5, Ymax = 10, Yscl = 1
35. e); Xmin = −2, Xmax = 8, Xscl = 1 y Ymin = −3, Ymax = 3, Yscl = 1

37. Intersección: $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$; asíntotas: $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$, $y = 0$; $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to (3/2)^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to (3/2)^+} f(x) = \infty$;


[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

Dominio: $x \neq -1, \frac{3}{2}$; rango: $\left(-\infty, -\frac{16}{25}\right] \cup (0, \infty)$; continuidad: toda $x \neq -1, \frac{3}{2}$;
creciente: $(-\infty, -1)$, $\left(-1, \frac{1}{4}\right]$; decreciente: $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$; no acotada;
máximo local en $\left(\frac{1}{4}, -\frac{16}{25}\right)$; asíntota horizontal: $y = 0$;
asíntota vertical: $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$; comportamiento en los extremos:
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

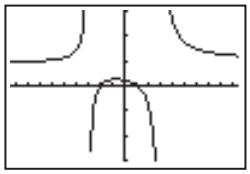
39. Intersecciones: $\left(0, \frac{1}{12}\right)$, $(1, 0)$; asíntotas: $x = -3$, $x = 4$, $y = 0$; $\lim_{x \to -3^-} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -3^+} h(x) = \infty$, $\lim_{x \to 4^-} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 4^+} h(x) = \infty$



[−5.875, 5.875] por [−3.1, 3.1]

dominio: $x \neq -3, 4$; rango: $(-\infty, \infty)$;
continuidad: toda $x \neq -3, 4$;
decreciente: $(-\infty, -3)$, $(-3, 4)$, $(4, \infty)$;
no tiene simetría; no está acotada; no tiene máximos ni mínimos;
asíntota horizontal: $y = 0$; asíntota vertical: $x = -3$, $x = 4$;
comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} h(x) = 0$

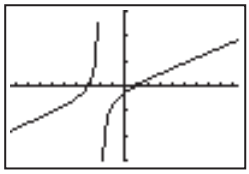
41. Intersecciones: $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $\left(0, \frac{2}{9}\right)$; asíntotas: $x = -3$, $x = 3$, $y = 1$; $\lim_{x \to -3^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty$



[−9.4, 9.4] por [−3, 3]

dominio: $x \neq -3, 3$; rango: $(-\infty, 0.260] \cup (1, \infty)$; continuidad: toda $x \neq -3, 3$;
creciente; $(-\infty, -3)$, $(-3, -0.675)$; decreciente: $(-0.675, 3)$, $(3, \infty)$;
no tiene simetría; no acotada; máximo local en $(-0675, 0.260)$;
asíntota horizontal: $y = 1$; asíntotas verticales: $x = -3$, $x = 3$;
comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

43. Intersecciones: $(-3, 0)$, $(1, 0)$, $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$; asíntotas: $x = -2$, $y = x$; $\lim_{x \to -2^-} h(x) = \infty$, $\lim_{x \to -2^+} h(x) = -\infty$

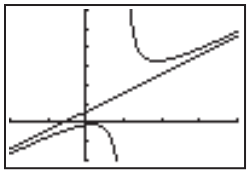


[−9.4, 9.4] por [−15, 15]

dominio: $x \neq -2$; rango: $(-\infty, \infty)$;
continuidad: toda $x \neq -2$;
creciente: $(-\infty, -2)$, $(-2, \infty)$;
no tienen simetría; no acotada; no tiene máximo ni mínimo; $x = -2$;
asíntota inclinada: $y = x$; comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$

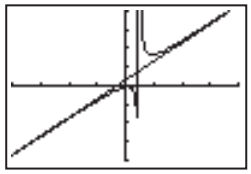
45. $y = x + 3$

a)



[−10, 20] por [−10, 30]

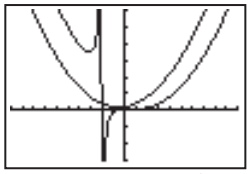
b)



[−40, 40] por [−40, 40]

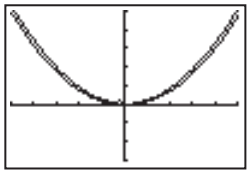
47. $y = x^2 - 3x + 6$

a)



[−10, 10] por [−30, 60]

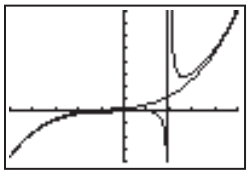
b)



[−50, 50] por [−1,500, 2,500]

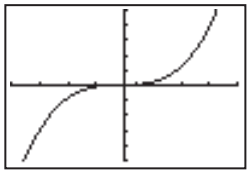
49. $y = x^3 + 2x^2 + 4x + 6$

a)



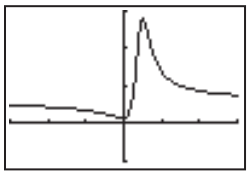
[−5, 5] por [−100, 200]

b)

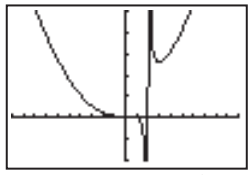


[−20, 20] por [−5,000, 5,000]

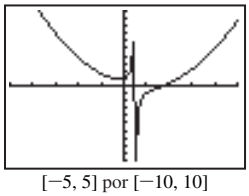
51. Intersección: $\left(0, \frac{4}{5}\right)$;
Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: [0.773, 14.227];
continuidad: $(-\infty, \infty)$; creciente: $[-0.245, 2.445]$;
decreciente: $(-\infty, -0.245]$, $[2.445, \infty)$;
no hay simetría; acotada;
máx. local en (2.445, 14.227), mín. local en $(-0.245, 0.773)$;
asíntota horizontal: $y = 3$; asíntota vertical: ninguna;
comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 3$


[−15, 15] por [−5, 15]

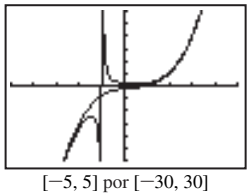
53. Intersecciones: (1, 0), $\left(0, \frac{1}{2}\right)$;
dominio: $x \neq 2$; rango: $(-\infty, \infty)$; continuidad: $x \neq 2$;
creciente: $[-0.384, 0.442]$, $[2.942, \infty)$;
decreciente: $(-\infty, -0.384]$, $[0.442, 2)$, $(2, 2.942)$;
no hay simetría; no acotada;
máx. local en (0.442, 0.586), mín. local en $(-0.384, 0.443)$
y (2.942, 25.970); asíntota horizontal: ninguna;
asíntota vertical: $x = 2$;
comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$;
asíntota de comportamiento a la larga: $y = x^2 + 2x + 4$


[−10, 10] por [−20, 50]

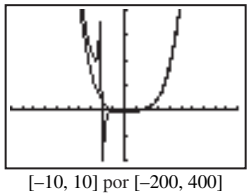
55. Intersecciones: (1.755, 0), (0, 1);
dominio: $x \neq \frac{1}{2}$; rango: $(-\infty, \infty)$; continuidad: $x \neq \frac{1}{2}$;
creciente: $\left[-0.184, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$;
decreciente: $(-\infty, -0.184]$;
no tiene simetría; no está acotada;
mín. local en $(-0.184, 0.920)$;
asíntota horizontal: ninguna; asíntota vertical: $x = \frac{1}{2}$;
comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$;
asíntota de comportamiento a la larga: $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$


[−5, 5] por [−10, 10]

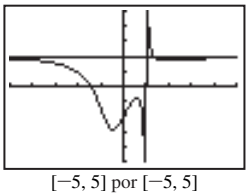
57. Intersección: (0, 1];
asíntota: $x = -1$;
asíntota de comportamiento
a la larga: $y = x^3 - x^2 + x - 1$


[−5, 5] por [−30, 30]

59. Intersecciones: (1, 0), $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$;
asíntota: $x = -2$;
asíntota de comportamiento
a la larga:
$y = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$


[−10, 10] por [−200, 400]

61. Intersecciones: $(-1.476, 0)$, $(0, -2)$;
asíntota: $x = 1$;
asíntota de comportamiento a la larga: $y = 2$
$y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

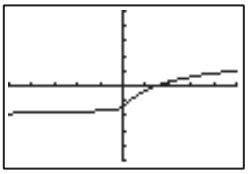

[−5, 5] por [−5, 5]

63. Falso. $\frac{1}{x^2 + 1}$ es una función racional y no tiene asíntotas verticales. **65.** E **67.** D

69. a) No; el dominio de f es $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$; el dominio de g es todos los números reales.
b) No; mientras no esté definido en 3, no tiende a $\pm\infty$ en ninguno de los lados.
c) La mayoría de las ventanas de visualización de las graficadoras no revelan que f no está definida en 3. **d)** Casi, pero no completamente, todas son iguales para $x \neq 3$.
71. a) El volumen es $f(x) = k/x$, donde x es la presión y k es una constante. $f(x)$ es un cociente de polinomio y, por tanto, es racional, pero $f(x) = k \cdot x^{-1}$, así que es una función potencia con constante de variación k y potencia -1. **b)** Si $f(x) = kx^a$, donde a es un entero negativo, entonces la función potencia f también es una función racional. **c)** 4.22 L.
73. Asíntotas horizontales: $y = -2$ y $y = 2$;

Intersecciones: $\left(0, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)$;

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x+2} & x \geq 0 \\ \dfrac{2x-3}{-x+2} & x < 0 \end{cases}$$

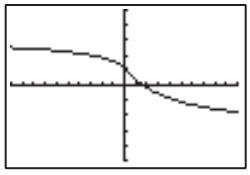


$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

75. Asíntotas horizontales: $y = \pm 3$;

Intersecciones: $\left(0, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{5}{3}, 0\right)$;

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5-3x}{x+4} & x \geq 0 \\ \dfrac{5-3x}{-x+4} & x < 0 \end{cases}$$



$[-10, 10]$ por $[-5, 5]$

77. La gráfica de f es la gráfica $m = \dfrac{1}{x}$ recorrida horizontalmente $-d/c$ unidades, alargada verticalmente en un factor de $|bc - ad|/c^2$, reflejada con respecto del eje x si, y sólo si, $bc - ad < 0$, y luego desplazada verticalmente a/c veces.

SECCIÓN 2.7

Repaso rápido 2.7

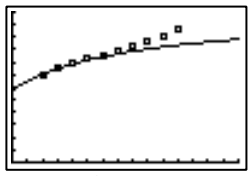
1. $2x^2 + 8x$ **3.** MCD: 36; $-\dfrac{1}{36}$ **5.** MCD: $(2x + 1)(x - 3)$; $\dfrac{x^2 - 7x - 2}{(2x + 1)(x - 3)}$

7. $\dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$ **9.** $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$

Ejercicios 2.7

1. $x = -1$ **3.** $x = 2$ o $x = -7$ **5.** $x = -4$ o $x = 3$, la última es extraña. **7.** $x = 2$ o $x = 5$ **9.** $x = 3$ o $x = 4$
11. $x = \dfrac{1}{2}$ o $x = -1$, la última es extraña. **13.** $x = -\dfrac{1}{3}$ o $x = 2$, la última es extraña. **15.** $x = -5$ o $x = 0$, la última es extraña.
17. $x = -2$ o $x = 0$, ambas son extrañas (no hay soluciones reales). **19.** $x = -2$ **21.** Ambas.
23. $x = 3 + \sqrt{2} \approx 4.414$ o $x = 3 - \sqrt{2} \approx 1.586$ **25.** $x = 1$ **27.** No hay soluciones reales. **29.** $x \approx -3.100$ o $x \approx 0.661$ o $x \approx 2.439$
31. a) La cantidad total de solución es $(125 + x)$ mL; de ésta, la cantidad de ácido es x más 60% de la cantidad original, o $x + 0.6(125)$.
b) $y = 0.83$ **c)** $C(x) = \dfrac{x + 75}{x + 125} = 0.83$; $x \approx 169.12$ mL
33. a) $C(x) = \dfrac{3{,}000 + 2.12x}{x}$ **b)** 4762 gorras por semana. **c)** 6,350 gorras por semana.
35. a) $P(x) = 2x + \dfrac{364}{x}$ **b)** $x \approx 13.49$ (un cuadrado); $P \approx 53.96$
37. a) $S = \dfrac{2\pi x^3 + 1{,}000}{x}$ **b)** Cualquiera de $x \approx 1.12$ cm y $h \approx 126.88$ cm o $x \approx 11.37$ cm y $h \approx 1.23$ cm
39. a) $R(x) = \dfrac{2.3x}{x + 2.3}$ **b)** $x \approx 6.52$ ohms **41. a)** $D(t) = \dfrac{4.75 + t}{4.75t}$ **b)** $t \approx 5.74$ h

43. a)



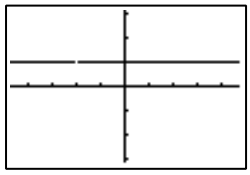
[0, 15] por [0, 120]

b) Alrededor de 98.3 mil millones de dólares.

45. Falso. Una solución extraña es una solución de la ecuación que no tiene fracciones pero que *no* es solución de la ecuación original.

47. D **49.** E

51. a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x}$ **b)** $x \neq 0, -2$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq -2, 0 \\ \text{indefinida}, & x = -2 \text{ o } x = 0 \end{cases}$ **d)** La gráfica parece ser la recta horizontal $y = 1$ con agujeros en $x = -2$ y $x = 0$.



[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

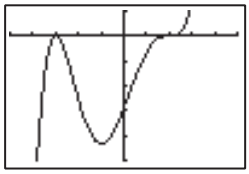
53. $x = \dfrac{y}{y - 1}$ **55.** $x = \dfrac{2y - 3}{y - 2}$

SECCIÓN 2.8

Exploración 1

1. a) (+)(−)(+) Negativo | (+)(−)(+) Negativo | (+)(+)(+) Positivo x; -3, 2

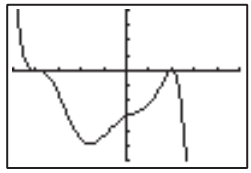
b)



[−5, 5] por [−250, 50]

3. a) (+)(+)(−)(−) Positivo | (+)(+)(+)(−) Negativo | (+)(+)(+)(−) Negativo x; -4, 2

b)



[−5, 5] por [−3,000, 2,000]

Repaso rápido 2.8

1. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ **3.** $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \infty$ **5.** $(x^3 + 5)/x$ **7.** $\dfrac{x^2 - 7x - 2}{2x^2 - 5x - 3}$

9. a) $\pm 1, \pm\dfrac{1}{2}, \pm 3, \pm\dfrac{3}{2}$ **b)** $(x + 1)(2x - 3)(x + 1)$

Ejercicios 2.8

1. a) $x = -2, -1, 5$ **b)** $-2 < x < -1$ o $x > 5$ **c)** $x < -2$ o $-1 < x < 5$

3. a) $x = -7, -4, 6$ **b)** $x < -7$ o $-4 < x < 6$ o $x > 6$ **c)** $-7 < x < -4$

5. a) $x = 8, -1$ **b)** $-1 < x < 8$ o $x > 8$ **7.** $(-1, 3) \cup (3, \infty)$ **9.** $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$ **11.** $[-2, 1/2] \cup [3, \infty)$

13. $[-1, 0] \cup [2, \infty)$ **15.** $(-1, 3/2) \cup (2, \infty)$ **17.** $[-1.15, \infty)$ **19.** $(3/2, 2)$

21. a) $(-\infty, \infty)$ **b)** $(-\infty, \infty)$ **c)** No hay soluciones. **d)** No hay soluciones.

23. a) $x \neq \dfrac{4}{3}$ **b)** $(-\infty, \infty)$ **c)** No hay soluciones. **d)** $x = \dfrac{4}{3}$

25. a) $x = 1$ **b)** $x = -\dfrac{3}{2}, 4$ **c)** $-\dfrac{3}{2} < x < 1$ o $x > 4$ **d)** $x < -\dfrac{3}{2}$, o $1 < x < 4$

27. a) $x = 0, -3$ **b)** $x < -3$ **c)** $x > 0$ **d)** $-3 < x < 0$ **29. a)** $x = -5$ **b)** $x = -\dfrac{1}{2}, x = 1, x < -5$ **c)** $-5 < x < -\dfrac{1}{2}$ o $x > 1$

d) $-\dfrac{1}{2} < x < 1$ **31. a)** $x = 3$ **b)** $x = 4, x < 3$ **c)** $3 < x < 4$ o $x > 4$ **d)** $f(x)$ nunca es negativa.

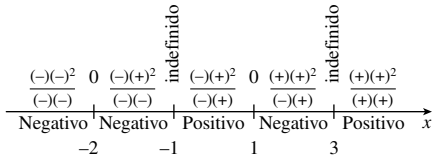
33. $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$ **35.** $[-1, 1]$ **37.** $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$ **39.** $[-1, 0] \cup [1, \infty)$ **41.** $(0, 2) \cup (2, \infty)$ **43.** $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$

45. $(0, 2)$ **47.** $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, \infty)$ **49.** $(-\infty, -1) \cup [1, 3)$ **51.** $[-3, \infty)$ **53.** $[5, \infty)$ **57.** 1 pulg $< x <$ 34 pulg
59. 0 pulg $\leq x \leq$ 0.69 pulg o 4.20 pulg $\leq x \leq$ 6 pulg

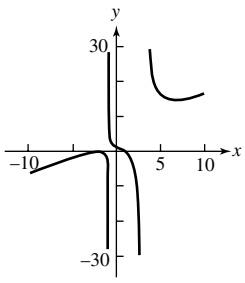
61. a) $S = 2\pi x^2 + 1{,}000/x$ **b)** 1.12 cm $\leq x \leq$ 11.37 cm, 1.23 cm $\leq h \leq$ 126.88 cm **c)** alrededor de 348.73 cm^2.

63. a) $y \approx 993.870x + 19{,}025.768$ **b)** Después de 2,011. **65.** Falso, ya que el factor x^4 no cambia de signo en $x = 0$. **67.** C **69.** D

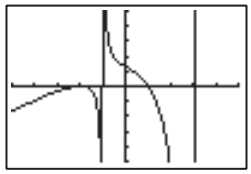
71. Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 3$; intersecciones x: $(-2, 0)$, $(1, 0)$; intersección y: $\left(0, \frac{4}{3}\right)$



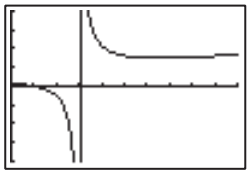
En forma manual:



Respaldo con la graficadora



$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$



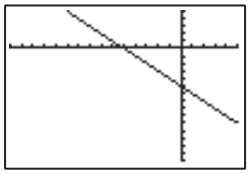
$[0, 10]$ por $[-40, 40]$

73. a) $|x - 3| < 1/3 \Rightarrow |3x - 9| < 1 \Rightarrow |3x - 5 - 4| < 1 \Rightarrow |f(x) - 4| < 1$.
b) Si x permanece dentro de las líneas verticales discontinuas, $f(x)$ siempre estará dentro de las líneas horizontales discontinuas.
c) $|x - 3| < 0.01 \Rightarrow |3x - 9| < 0.03 \Rightarrow |3x - 5 - 4| < 0.03 \Rightarrow |f(x) - 4| < 0.03$. Las líneas discontinuas estarán más cercanas cuando $x = 3$ y $y = 4$.

75. $0 < a < b \Rightarrow a^2 < ab$ y $ab < b^2$; así que, $a^2 < b^2$.

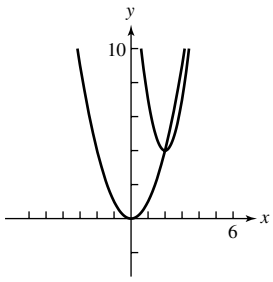
EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

1. $y = -x - 5$



$[-15, 5]$ por $[-15, 5]$

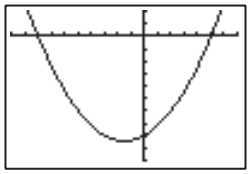
3. Iniciando a partir de $y = x^2$, trasladar 2 unidades hacia la derecha y alargar verticalmente en un factor de 3 (en cualquier orden), luego trasladar hacia arriba 4 unidades.



5. Vértice: $(-3, 5)$; eje: $x = -3$ **7.** Vértice: $(-4, 1)$; eje: $x = -4$

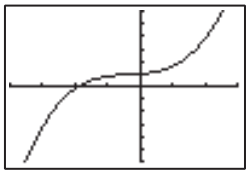
9. $y = (5/9)(x + 2)^2 - 3$ **11.** $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$

13.



[−10, 7] por [−50, 10]

15.



[−4, 3] por [−30, 30]

17. $S = kr^2$

19. La fuerza F necesaria varía directamente con la distancia x desde su posición de reposo, con constante de variación k.

21. $k = 4$, $a = \frac{1}{3}$, f es creciente en el primer cuadrante, f es impar.

23. $k = -2$, $a = -3$, f es creciente en el cuarto cuadrante, f es impar.

25. $2x^2 - x + 1 - \frac{2}{x-3}$ **27.** $2x^2 - 3x + 1 + \frac{-2x+3}{x^2+4}$ **29.** -39 **31.** Sí

37. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}$ y 2 son ceros **39.** $-2 + 2i$ **41.** i **43.** $3 \pm 2i$ **45.** c) **47.** b)

49. Racional: 0. Irracional: $5 \pm \sqrt{2}$. No tiene ceros que no sean reales.

51. Racionales: ninguna. Irracionales: aproximadamente -2.34, 0.57, 3.77. No hay ceros que no sean reales.

53. $-\frac{3}{2}, 3 \pm i; f(x) = (2x + 3)(x - 3 + i)(x - 3 - i)$

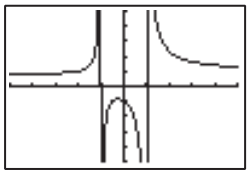
55. $1, -1, \frac{2}{3}$, y $-\frac{5}{2}; f(x) = (3x - 2)(2x + 5)(x - 1)(x + 1)$ **57.** $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1)$

59. $f(x) = (2x - 3)(x - 1)(x^2 - 2x + 5)$ **61.** $x^3 - 3x^2 - 5x + 15$

63. $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$ **65.** $x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64$

67. Trasladar hacia la derecha 5 unidades y alargar verticalmente en un factor de 2 (en cualquier orden), luego trasladar una unidad hacia abajo; asíntota horizontal: $y = -1$; asíntota vertical: $x = 5$.

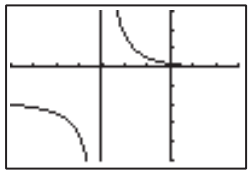
69. Asíntotas: $y = 1$, $x = -1$ y $x = 1$. Intersección: $(0, -1)$.



[−5, 5] por [−5, 5]

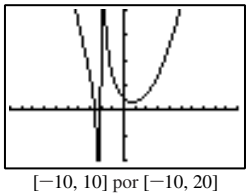
71. Asíntota de comportamiento a la larga: $y = x - 7$; asíntota vertical: $x = -3$.

Intersección: $\left(0, \frac{5}{3}\right)$.



[−7, 3] por [−50, 30]

73. Intersección y: $\left(0, \frac{5}{2}\right)$; intersección x: $(-2.55, 0)$;
dominio: $x \neq 2$; rango: $(-\infty, \infty)$; continuidad: toda $x \neq -2$;
decreciente: $(-\infty, -2)$; $(-2, 0.82]$; creciente: $[0.82, \infty)$;
no acotada; mínimo local: (0.82, 1.63);
asíntota vertical: $x = -2$;
asíntota de comportamiento a la larga: $y = x^2 - x$;
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$



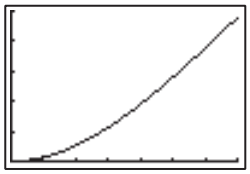
[−10, 10] por [−10, 20]

75. $x = \frac{3}{2}$ o $x = 4$ **77.** $(-\infty, -5/2) \cup (-2, 3)$ **79.** $[-3, -2) \cup (2, \infty)$

81. $x = -3, x = \frac{1}{2}$ **83.** Sí; en aproximadamente 10.0002.

85. a) $V = x(30 - 2x)(70 - 2x)$ pulg^3 **b)** Cualquiera de $x \approx 4.57$ o $x \approx 8.63$ pulg

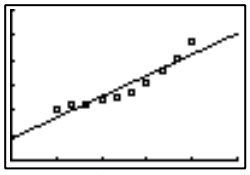
87. a) $V = \frac{4}{3}\pi x^3 + \pi x^2(140 - 2x)$ **b)**



[0, 70] por [0, 1,500,000]

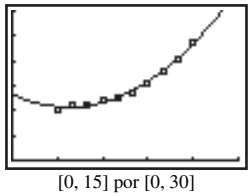
c) El mayor volumen ocurre cuando $x = 70$ (por lo que en realidad es una esfera). Este volumen es $\frac{4}{3}\pi(70)^3 \approx 1{,}436{,}755$ pies^3.

89. a) $y = 1.401x + 4.331$



[0, 15] por [0, 30]

b) $y = 0.188x^2 - 1.411x + 13.331$



[0, 15] por [0, 30]

c) Mediante regresión lineal: en 2008; mediante regresión cuadrática: en 2003

91. a) $P(15) = 325$, $P(70) = 600$, $P(100) = 648$ **b)** $y = \frac{640}{0.8} = 800$ **c)** La población de ciervos se aproxima (pero nunca es igual) a 800.

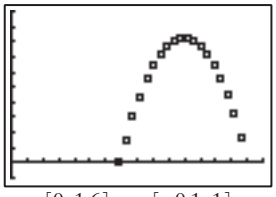
93. a) $C(x) = \frac{50}{50 + x}$ **b)** Alrededor de 33.33 onzas de agua destilada. **c)** $x = \frac{100}{3} \approx 33.33$

95. a) $S = x^2 + 4{,}000/x$ **b)** 20 pies por 20 pies por 2.5 pies o $x \approx 7.32$, lo que da las dimensiones aproximadas 7.32 por 7.32 por 18.66.
c) $7.32 < x < 20$ (cota inferior aproximada), así que y debe estar entre 2.5 y alrededor de 18.66.

Capítulo 2 Proyecto

Las respuestas están basadas en los datos que se muestran en la tabla.

1.



[0, 1.6] por [−0.1, 1]

3. El signo de a afecta la dirección hacia donde abre la parábola.
La magnitud de a afecta el alargamiento vertical de la gráfica.
Los cambios en h provocan desplazamiento horizontal de la gráfica, mientras que los cambios en k provocan desplazamiento vertical.

5. $y \approx -4.968x^2 - 10.913x - 5.160$

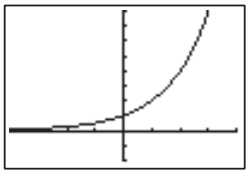
SECCIÓN 3.1

Exploración 1

1. (0, 1) está en común; dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, \infty)$; continua: siempre creciente; no tiene simetrías; no tiene máximo ni mínimo; acotada por abajo por $y = 0$, que también es la única asíntota; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Exploración 2

1.



[−4, 4] por [−2, 8]

3. $k \approx 0.693$

Repaso rápido 3.1

1. -6 **3.** 9 **5.** $1/2^{12}$ **7.** $1/a^6$ **9.** -1.4

Ejercicios 3.1

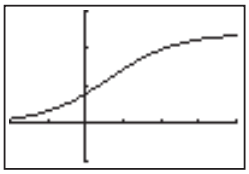
1. No es exponencial, una función monomial. **3.** Función exponencial, valor inicial de 1 y base de 5. **5.** No es exponencial, base variable. **7.** 3 **9.** $-2\sqrt[3]{3}$ **11.** $3/2 \cdot (1/2)^x$ **13.** $3 \cdot 2^{x/2}$ **15.** Trasladar $f(x) = 2^x$ hacia la derecha 3 unidades. **17.** Reflejar $f(x) = 4^x$ con respecto al eje y. **19.** Hacer un alargamiento vertical de $f(x)$ en un factor de 3 y luego desplazar 4 unidades hacia arriba. **21.** Reflejar $f(x) = e^x$ con respecto del eje y y comprimir horizontalmente en un factor de 2. **23.** Reflejar $f(x) = e^x$ con respecto del eje y, comprimir horizontalmente en un factor de 3, trasladar una unidad hacia la derecha y alargar verticalmente en un factor de 2.

25. La gráfica a) es la única gráfica con la forma y ubicada como la gráfica de $y = b^x$, $b > 1$.

27. La gráfica c) es la reflexión de $y = 2^x$ con respecto al eje x. **29.** La gráfica b) es la gráfica de $y = 3^{-x}$ trasladada 2 unidades hacia abajo. **31.** Decaimiento exponencial: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

33. Decaimiento exponencial: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ **35.** $x < 0$ **37.** $x < 0$ **39.** $y_1 = y_3$ ya que $3^{2x+4} = 3^{2(x+2)} = 9^{x+2}$

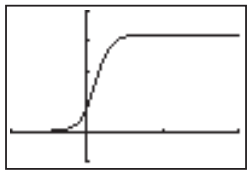
41.



$[-10, 20]$ por $[-5, 15]$

Intersección y: $(0, 4)$;
asíntotas horizontales:
$y = 0$, $y = 12$.

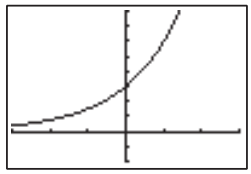
43.



$[-5, 10]$ por $[-5, 20]$

Intersección y: $(0, 4)$;
asíntotas horizontales;
$y = 0$, $y = 16$.

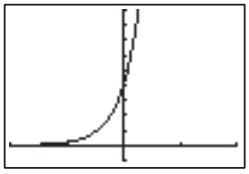
45.



$[-3, 3]$ por $[-2, 8]$

Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, \infty)$; continua;
siempre creciente; no es simétrica;
acotada por abajo por $y = 0$, que también es la única asíntota;
no tiene máximo ni mínimo; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

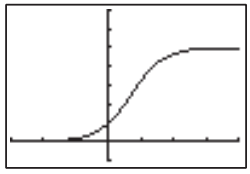
47.



$[-2, 2]$ por $[-1, 9]$

Dominio; $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, \infty)$; continua;
siempre creciente; no es simétrica;
acotada por abajo por $y = 0$, que es la única asíntota;
no tiene máximo ni mínimo; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

49.

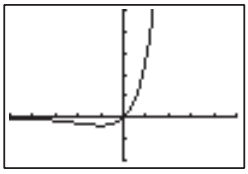


$[-3, 4]$ por $[-1, 7]$

Dominio; $(-\infty, \infty)$; rango: (0 5); continua;
siempre creciente; simétrica con respecto a (0.69, 2.5);
acotada por abajo por $y = 0$ y por arriba por $y = 5$,
ambas son asíntotas;
no tiene máximo ni mínimo; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

51. En 2006. **53.** Cerca del final de 2003. **55.** En 1970. **57. a)** 100 **b)** ≈6394 **59.** Falso. Si $a > 0$ y $0 < b < 1$, entonces $f(x) = a \cdot b^x$ es decreciente. **61.** E **63.** A

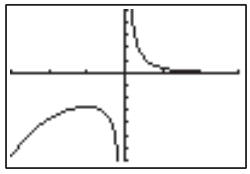
65. a)



$[-5, 5]$ por $[-2, 5]$

Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $\left[-\frac{1}{e}, \infty\right)$;
decreciente en $(-\infty, -1]$; creciente en $[-1, \infty)$;
acotada por abajo por $y = -\frac{1}{e}$; mínimo local en $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$;
asíntota: $y = 0$; $y = 0$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b)



$[-3, 3]$ por $[-7, 5]$

dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; rango: $(-\infty, -e] \cup (0, \infty)$;
creciente en $(-\infty, -1]$; decreciente en $[-1, 0) \cup (0, \infty)$;
no acotada; máximo local en $(-1, -e)$;
asíntotas: $x = 0$, $y = 0$;
$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

67. a) $y_1 - f(x)$ disminuye menos rápido conforme aumenta x. **b)** $y_3 -$ cuando x aumenta, $g(x)$ disminuye cada vez más rápido.

69. $a \neq 0$, $c = 2$ **71.** $a > 0$ y $b > 1$, $0 < 0$ y $0 < b < 1$ **73.** Cuando $x \to -\infty$, $b^x \to \infty$, así que $1 + a \cdot b^x \to \infty$ y $\frac{c}{1 + a \cdot b^x} \to 0$;
Conforme $x \to \infty$, $b^x \to 0$, por lo que $1 + a \cdot b^x \to 1$ y $\frac{c}{1 + a \cdot b^x} \to c$

SECCIÓN 3.2

Repaso rápido 3.2

1. 0.15 **3.** 23 • 1.07 **5.** ±2 **7.** 1.01 **9.** 0.61

Ejercicios 3.2

1. Crecimiento exponencial, 9%. **3.** Decaimiento exponencial, 3.2%.
5. Crecimiento exponencial, 100%. **7.** $5 \cdot 1.17^x$ **9.** $16 \cdot 0.5^x$ **11.** $28{,}900 \cdot 0.974^x$
13. $18 \cdot 1.052^x$ **15.** $0.6 \cdot 2^{x/3}$ **17.** $592 \cdot 2^{-x/6}$ **19.** $2.3 \cdot 1.25^x$ **21.** $\approx 4 \cdot 1.15^x$ **23.** $40/[1 + 3 \cdot (1/3)^x]$ **25.** $\approx 128/(1 + 7 \cdot 0.844^x)$
27. $\dfrac{20}{1 + 3 \cdot 0.58^x}$ **29.** ln 2021 **31. a)** 12,315; 24,265 **b)** 1966 **33. a)** $y = 6.6\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/14}$, donde t es el tiempo en días
b) Después de 38.11 días. **35.** Una posible respuesta: Las funciones exponencial y lineal son similares en el sentido que siempre son crecientes o siempre decrecientes. Sin embargo, las dos funciones son diferentes en la *rapidez* en que crecen o decrecen. Mientras que una función lineal aumentará o disminuirá a una razón constante en un intervalo dado, la tasa a la que las funciones exponenciales aumentan o disminuyen en un intervalo dado variará. **37.** Una posible respuesta: Con base en la gráfica, vemos que el tiempo de duplicación para este modelo es 4 años. Éste es el tiempo requerido para crecer de 50,000 a 100,000, de 100,000 a 200,000, o de cualquier tamaño de población al doble de ese tamaño. Sin importar el tamaño de la población, tarda 4 años para duplicarse. **39.** Cuando $t = 1$; cada hora.
41. 2.14 lb/pulg^2 **43.** Alrededor de 3,981,000, sobreestimada por 161,000, 4% de error. **45. a)** 16 **b)** Alrededor de 14 días.
c) En casi 17 días. **47.** $\approx$ 311,400,000 **51.** Falso. Esto es cierto para crecimiento *logístico*, no exponencial. **53.** C **55.** D

59. $\operatorname{senh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{senh}(x)$ **61. a)** $\dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh(x)$

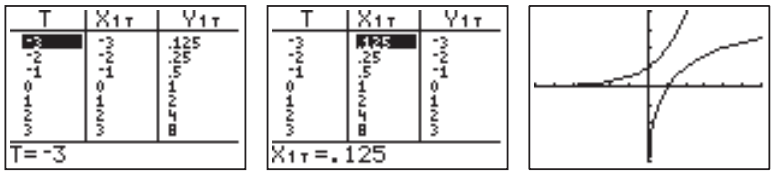
b) $\tanh(-x) = \dfrac{\operatorname{senh}(-x)}{\cosh(-x)} = \dfrac{-\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$

c) $f(x) = 1 + \tanh(x) = 1 + \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{2e^x}{e^x + e^{-x}} \cdot \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}} = \dfrac{2}{1 + e^{-2x}}$, que es logística.

SECCIÓN 3.3

Exploración 1

1.



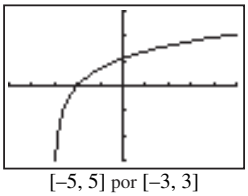
[−6, 6] por [−4, 4]

Repaso rápido 3.3

1. $1/25 = 0.04$ **3.** $1/5 = 0.2$ **5.** 32 **7.** $5^{1/2}$ **9.** $e^{-1/2}$

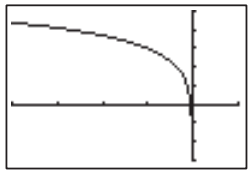
Ejercicios 3.3

1. 1 **3.** 5 **5.** 2/3 **7.** 3 **9.** 5 **11.** 1/3 **13.** 3 **15.** −1 **17.** 1/4 **19.** 3 **21.** 0.5 **23.** 6 **25.** $\approx$ 0.975
27. No definida. **29.** $\approx$ 1.399 **31.** No definida. **33.** 100 **35.** 0.1 **37.** d) **39.** a)
41. Iniciando con $y = \ln x$: recorrer 3 unidades hacia la izquierda.



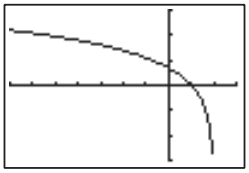
[–5, 5] por [–3, 3]

43. Iniciando con $y = \ln x$: reflejar con respecto del eje y y trasladar hacia arriba 3 unidades.



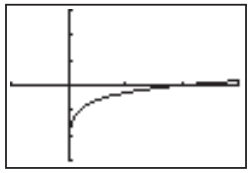
[–4, 1] por [–3, 5]

45. Iniciando con $y = \ln x$:
reflejar con respecto del eje y
y trasladar 2 unidades hacia
la derecha.



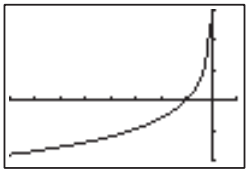
$[-7, 3]$ por $[-3, 3]$

47. Iniciando con $y = \log x$:
recorrer hacia abajo una unidad.



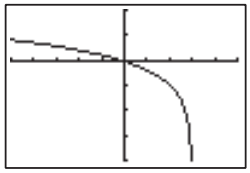
$[-5, 15]$ por $[-3, 3]$

49. Iniciando con $y = \log x$:
reflejar con respecto a ambos ejes
y alargar verticalmente en un
factor de 2.



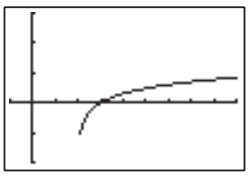
$[-8, 1]$ por $[-2, 3]$

51. Iniciando con $y = \log x$:
reflejar con respecto del eje y,
trasladar 3 unidades hacia la derecha,
alargar verticalmente en un factor de 2
y trasladar hacia abajo una unidad.



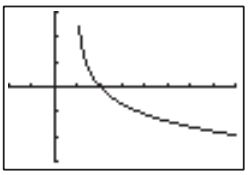
$[-5, 5]$ por $[-4, 2]$

53. Dominio: $(2, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$; continua;
siempre creciente; no es simétrica; no es acotada;
no tiene máximo ni mínimo locales;
asíntota en $x = 2$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$



$[-1, 9]$ por $[-3, 3]$

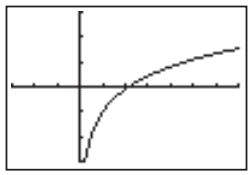
55.



[−2, 8] por [−3, 3]

Dominio: (1, ∞); rango: (−∞, ∞); continua; siempre creciente; no es simétrica; no está acotada: no tiene máximo ni mínimo locales; asíntota: $x = 1$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

57.



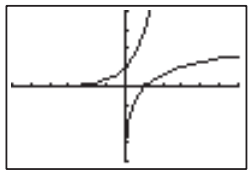
[−3, 7] por [−3, 3]

Dominio: (0, ∞); rango: (−∞, ∞); continua; siempre creciente en su dominio; no es simétrica; no está acotada; no tiene máximo ni mínimo locales; asíntota: $x = 0$; $x = 0$; $\lim_{x \to \infty} x = \infty$

59. **a)** 10 dB **b)** 70 dB **c)** 150 dB **61.** 2023 **63.** Verdadero, por definición. **65.** C **67.** B

69.

$f(x)$	3^x	$\log_3 x$
Dominio	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$
Rango	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
Intersecciones	$(0, 1)$	$(1, 0)$
Asíntotas	$y = 0$	$x = 0$



[−6, 6] por [−4, 4]

71. $b = \sqrt[e]{e}$; (e, e) **73.** Reflejar con respecto del eje x.

SECCIÓN 3.4

Exploración 1

1. 0.90309 = 0.30103 + 0.60206 **3.** 0.90309 = 3 × 0.30103 **5.** 1.20412; 1.50515; 1.80618

Exploración 2

1. Falso. **3.** Verdadero. **5.** Falso. **7.** Falso.

Repaso rápido 3.4

1. 2 **3.** −2 **5.** x^3y^2 **7.** $|x|^3/|y|$ **9.** $1/(3|u|)$

Ejercicios 3.4

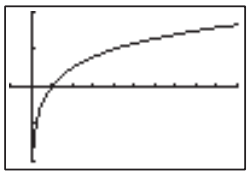
1. $3 \ln 2 + \ln x$ **3.** $\log 3 - \log x$ **5.** $5 \log_2 y$ **7.** $3 \log x + 2 \log y$ **9.** $2 \ln x - 3 \ln y$ **11.** $\frac{1}{4}\log x - \frac{1}{4}\log y$ **13.** $\log xy$

15. $\ln (y/3)$ **17.** $\log \sqrt[3]{x}$ **19.** $\ln (x^2y^3)$ **21.** $\log (x^4y/z^3)$ **23.** 2.8074 **25.** 2.4837 **27.** −3.5850 **29.** $\ln x/\ln 3$

31. $\ln (a + b)/\ln 2$ **33.** $\log x/\log 2$ **35.** $-\log (x + y)/\log 2$

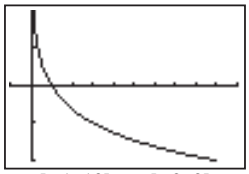
37. Sea $x = \log_b R$ y $y = \log_b S$. Entonces $\frac{R}{S} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$. Por lo que $\log_b\left(\frac{R}{S}\right) = x - y = \log_b R - \log_b S$.

39. Iniciando con $g(x) = \ln x$: comprimir verticalmente por un factor de $\frac{1}{\ln 4} \approx 0.72$.



[−1, 10] por [−2, 2]

41. Iniciando con $g(x) = \ln x$: reflejar con respecto del eje x y luego comprimir verticalmente en un factor de $\frac{1}{\ln 3} \approx 0.91$.

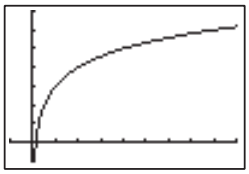


$[-1, 10]$ por $[-2, 2]$

43. (b): $[-5, 5]$ por $[-3, 3]$, con Xscl $= 1$ y Yscl $= 1$

45. (d): $[-2, 8]$ por $[-3, 3]$, con Xscl $= 1$ y Yscl $= 1$

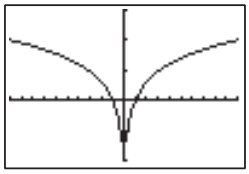
47.



$[-1, 9]$ por $[-1, 7]$

Dominio: $(0, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$; continua; siempre creciente; asíntota: $x = 0$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

49.



$[-10, 10]$ por $[-2, 3]$

Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$; discontinua en $x = 0$; decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$; creciente en el intervalo $(0, \infty)$; asíntota: $x = 0$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

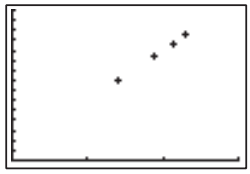
51. **a)** 0 **b)** 10 **c)** 60 **d)** 80 **e)** 100 **f)** 120 **53.** ≈ 9.6645 lúmenes. **55.** Alargamiento vertical por un factor de ≈ 0.9102.

57. Verdadero, por la regla del producto de los logaritmos **59.** B **61.** A

63. **a)** $2.75x^{5.0}$ **b)** 49,616

c)

$\ln(x)$	1.39	1.87	2.14	2.30
$\ln(y)$	7.94	10.37	11.71	12.52



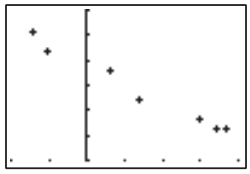
$[0, 3]$ por $[0, 15]$

d) $(\ln y) = 5.00 (\ln x) + 1.01$

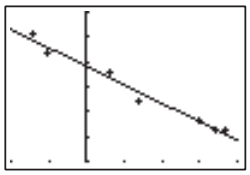
e) $a \approx 5$, $b \approx 1$ por lo que $f(x) = e^1 x^5 \approx 2.72x^5$; las dos ecuaciones son casi la misma.

65. a)

$\log(w)$	-0.70	-0.52	0.30	0.70	1.48	1.70	1.85
$\log(r)$	2.62	2.48	2.31	2.08	1.93	1.85	1.86


[−1, 2] por [1.6, 2.8]

b) $\log r = (-0.30) \log w + 2.36$

c)

[−1, 2] por [1.6, 2.8]

e) Una respuesta posible: Considere la función potencia $y = a \cdot x^b$, entonces $\log y = \log(a \cdot x^b) = \log a + \log x^b = \log a + b \log x = b(\log x) + \log a$; que claramente es una función lineal de la forma $f(t) = mt + c$, donde $m = b$; $c = \log a, f(t) = \log y$ y $t = \log x$. Como una consecuencia hay una relación lineal entre $\log y$ y $\log x$.

67. (6.41, 93.35) **69. a)** Dominio de f y g: $(3, \infty)$ **b)** Dominio de f y g: $(5, \infty)$ **c)** Dominio de f: $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$; Dominio de g: $(-3, \infty)$; Las respuestas variarán.

71. $\dfrac{\log x}{\ln x} = \dfrac{\log x}{\log x / \log e} = \log e, x > 0, x \neq 1$

SECCIÓN 3.5

Exploración 1

1. 1.60206, 2.60206, 3.60206, 4.60206, 5.60206, 6.60206, 7.60206, 8.60206, 9.60206, 10.60206

3. Las partes decimales son exactamente iguales.

Repaso rápido 3.5

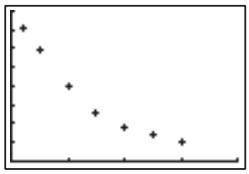
1. $f(g(x)) = e^{2 \ln(x^{1/2})} = e^{\ln x} = x$ y $g(f(x)) = \ln(e^{2x})^{1/2} = \ln(e^x) = x$

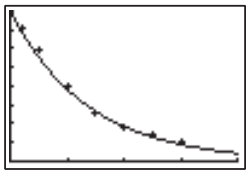
3. $f(g(x)) = \dfrac{1}{3} \ln(e^{3x}) = \dfrac{1}{3}(3x) = x$ y $g(f(x)) = e^{3(1/3 \ln x)} = e^{\ln x} = x$ **5.** 7.783×10^8 km

7. 602,000,000,000,000,000,000,000 **9.** 5.766×10^{12}

Ejercicios 3.5

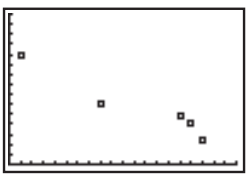
1. 10 **3.** 12 **5.** -3 **7.** 10,000 **9.** 5.25 **11.** ≈ 24.2151 **13.** ≈ 39.6084 **15.** ≈ -0.4055 **17.** ≈ 4.3956
19. Dominio: $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$; gráfica (e) **21.** Dominio: $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$; gráfica (d) **23.** Dominio: $(0, \infty)$; gráfica a)
25. $x = 1{,}000$ o $x = -1{,}000$ **27.** $\pm\sqrt{10}$ **29.** $x \approx 3.5949$ **31.** $x \approx \pm 2.0634$ **33.** $x \approx -9.3780$ **35.** $x \approx 2.3028$ **37.** 4
39. 3 **41.** 1.5 **43.** 3 **45.** Alrededor de 20 veces más grande **47. a)** 1.26×10^{-4}; 1.26×10^{-12} **b)** 10^8 **c)** 8 **49.** ≈ 28.41 min

51. a)

[0, 40] por [0, 80]

b)

[0, 40] por [0, 80]

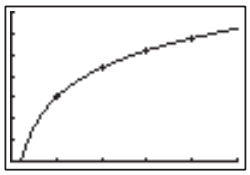
c) 89.47°C

$T(x) \approx 79.47 \cdot 0.93^x$

53. a)

[0, 20] por [0, 15]

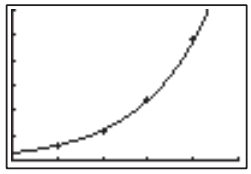
b) El diagrama de dispersión es mejor porque representa de manera precisa los tiempos entre las medidas. El espaciamiento igual en la gráfica de barras sugiere que las medidas fueron tomadas en intervalos igualmente espaciados, lo cual distorsiona nuestra percepción de cómo ha cambiado el consumo durante el tiempo.

55. La logarítmica parece ser mejor; el diagrama de dispersión de (x, y) se ve más logarítmico. (Los datos pueden modelarse por $y = 3 + 2 \ln x$).



[0, 5] por [0, 7]

57. Exponencial; el diagrama de dispersión de (x, y) es *exactamente* exponencial. $\left(\text{Los datos pueden modelarse mediante } y = \frac{3}{2} \cdot 2^x\right)$.

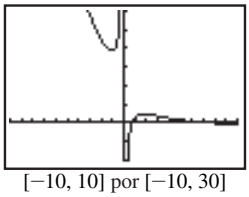


[0, 5] por [0, 30]

59. Falso. El orden de magnitud es su logaritmo *común*. **61.** B **63.** E **65.** Regresión logística.

67. a) Conforme k aumenta, la curva en forma de campana se alarga verticalmente. **b)** Conforme c aumenta, la curva en forma de campana se comprime horizontalmente.

69. a)



[−10, 10] por [−10, 30]

b) [0, 10] por [−5, 3]; 2.3807 **71.** $y = a \ln x + b$, una regresión logarítmica.

r no puede ser negativa ya que es una distancia

73. $x \approx 1.3066$ **75.** $0 < x < 1.7115$ (aprox.) **77.** $x > 9$

SECCIÓN 3.6

Exploración 1

1.

k	A
10	1104.6
20	1104.9
30	1105
40	1105
50	1105.1
60	1105.1
70	1105.1
80	1105.1
90	1105.1
100	1105.1

A tiende a un límite de alrededor de 1105.1.

Repaso rápido 3.6

1. 7 **3.** 1.8125% **5.** 65% **7.** 150 **9.** \$315

Ejercicios 3.6

1. \$2251.10 **3.** \$19,908.59 **5.** \$2122.17 **7.** \$86,496.26 **9.** \$1728.31 **11.** \$30,402.43 **13.** \$14,755.51 **15.** \$70,819.63
17. \$43,523.31 **19.** \$293.24 **21.** 6.63 años, redondeado a 6 años 9 meses. **23.** 13.78 años; redondeado a 13 años 10 meses.
25. ≈ 10.13% **27.** 7.07% **29.** 12.14; redondeado a 12 años y 3 meses. **31.** 7.7016 años; \$48,217.82 **33.** 17.33%; \$127,816.26
35. 17.42; redondeado a 17 años 6 meses. **37.** 10.24 –redondeado a 11 años. **39.** 9.93; redondeado a 10 años. **41.** ≈ 6.14%
43. ≈ 6.50% **45.** 5.1% trimestralmente. **47.** \$42,211.46 **49.** \$239.41 por mes. **51.** \$219.51 por mes. **53.** \$676.56
55. a) 172 meses (14 años, 4 meses). **b)** \$137,859.60 **57.** Una posible respuesta: El RPA es el porcentaje de aumento del saldo inicial $S(0)$ al saldo final del año $S(1)$; específicamente es $S(1)/S(0) - 1$. Al multiplicar el saldo inicial por P se tiene como resultado el saldo al final

del año siendo multiplicado por la misma cantidad, así que la razón permanece sin cambio. **59.** Una posible respuesta: Algunas de estas situaciones incluyen conteo de cosas (por ejemplo, poblaciones), así que sólo puede tomar valores enteros no negativos (los modelos exponenciales que predicen, por ejemplo, 439.72 peces, tienen que ser interpretado a la luz de este hecho). Técnicamente, el crecimiento de bacterias, el decaimiento radiactivo y el interés compuesto también son "problemas de conteo"; es decir, no podemos tener bacterias o moléculas fraccionarias de material radiactivo como tampoco hay fracciones de monedas de un centavo. Sin embargo, como por lo general se trata de cantidades muy grandes, es más sencillo ignorar las partes fraccionarias (esto podría aplicarse también al caso de, por ejemplo, la población mundial). Otra distinción: mientras que con frecuencia utilizamos un modelo exponencial para todas estas situaciones, por lo general se ajusta mejor (en periodos largos) para decaimiento radiactivo que para la mayoría de los otros casos. Las tasas de crecimiento en poblaciones (y especialmente de poblaciones humanas) tienden a fluctuar más de lo que sugieren los modelos exponenciales. Por supuesto, un modelo exponencial también se ajusta a situaciones de interés compuesto donde la tasa de interés se mantiene constante, pero hay muchos casos en donde la tasa de interés cambia durante el tiempo.

61. Falso. El límite es $A = Pe^{rt} = 100e^{0.05} \approx \$105.13$. **63.** B **65.** E **67.** \$364.38 **69. a)** 8% **b)** 12 **c)** \$100

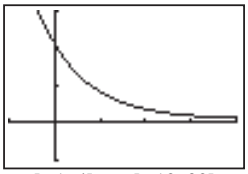
EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1. $-3\sqrt[3]{4}$ **3.** $3 \cdot 2^{x/2}$ **5.** $f(x) = 2^{-2x} + 3$ –iniciando con 2^x, comprimir horizontalmente en un factor de $\frac{1}{3}$, reflejar con respecto al eje y trasladar 3 unidades hacia arriba. **7.** $f(x) = -2^{-3x} - 3$ –iniciando con 2^x, comprimir horizontalmente en un factor de $\frac{3}{2}$, reflejar con respecto al eje y, reflejar con respecto del eje x y trasladar 3 unidades hacia abajo. **9.** Iniciando con e^x, comprimir horizontalmente por $\frac{1}{2}$, luego trasladar a la derecha $\frac{3}{2}$ unidades o trasladar 3 unidades a la derecha y luego comprimir horizontalmente en un factor de $\frac{1}{2}$.

11. Intersección y: (0, 12.5); asíntotas: $y = 0$, $y = 20$.

13. Decaimiento radiactivo: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

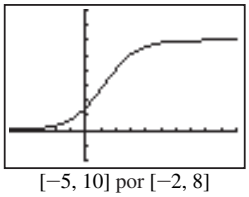
15.



[−1, 4] por [−10, 30]

Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(1, \infty)$; continua;
siempre decrece; no es simétrica;
acotada por abajo por $y = 1$, que también es la única asíntota;
no tiene máximo ni mínimo; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

17.



[−5, 10] por [−2, 8]

Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, 6)$; continua;
creciente; simétrica con respecto de (1.20, 3);
acotada por las asíntotas $y = 0$, $y = 6$; no tiene máximo ni mínimo;
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 6$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

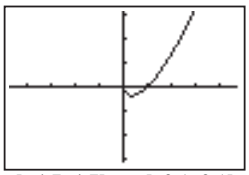
19. $f(x) = 24 \cdot 1.053^x$ **21.** $f(x) = 18 \cdot 2^{x/21}$ **23.** $f(x) \approx 30/(1 + 1.5e^{-0.55x})$ **25.** $f(x) \approx \dfrac{20}{1 + 3e^{-0.37x}}$ **27.** 5 **29.** 1/3

31. $3^5 = x$ **33.** $y = xe^2$

35. Trasladar 4 unidades hacia la izquierda.

37. Trasladar 1 unidad hacia la derecha, reflejar con respecto del eje x y trasladar 2 unidades hacia arriba.

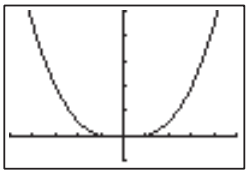
39.



[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

domino: $(0, \infty)$; rango: $\left[-\frac{1}{e}, \infty\right) \approx [-0.37, \infty)$;
continua; decreciente en $(0, 0.37]$;
creciente en $[0.37, \infty)$; no es simétrica;
acotada por abajo;
mínimo local en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

41.



$[-5, 5]$ por $[-5, 25]$

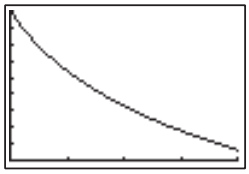
dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; rango: $[-0.18, \infty)$;
discontinua en $x = 0$;
decreciente en $(-\infty, -0.61]$, $(0, 0.61]$;
creciente en $[-0.61, 0)$, $[0.61, \infty)$;
simétrica con respecto del eje y; acotada por abajo;
mínimo local en $(-0.61, -0.18)$ y $(0.61, -0.18)$;
no tiene asíntotas; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

43. $\log 4 \approx 0.6021$ **45.** ≈ 22.5171 **47.** 0.0000001 **49.** 4 **51.** ≈ 2.1049 **53.** ≈ 99.5112 **55.** $\ln x / \ln 2$ **57.** $\log x / \log 5$

59. (c) **61.** (b) **63.** \$515.00 **65.** Pe^{rt} **67.** \$28,794.06 **69.** -0.3054

71. $P(t) \approx 2.0956 \cdot 1.01218^t$, $P(105) \approx 7.5$ millones.

73. **a)** 90 unidades **b)** 32.8722 unidades **c)**



$[0, 4]$ por $[0, 90]$

75. **a)** $P(t) = 89{,}000(0.982)^t$ **b)** 31.74 años. **77.** **a)** $P(t) = 20 \cdot 2^t$ **b)** 81,920; 2.3058×10^{19} **c)** ≈ 8.9658 meses.
79. **a)** $S(t)$) $S_0 \cdot (1/2)^{t/1.5}$ **b)** 1,099,500 toneladas métricas **c)** $S_0/2$; $S_0/4$ **81.** 6.31 **83.** 11.75 años.

85. 137.7940; alrededor de 11 años 6 meses. **87.** $\approx 8.57\%$ **89.** ≈ 5.84 lúmenes. **91.** $\frac{1}{10} < b < 10$; $0 < b < \frac{1}{10}$ o $b > 10$

93. **a)** 16 **b)** alrededor de $11\frac{1}{2}$ días. **c)** 8.7413 –alrededor de 8 o 9 días. **95.** ≈ 41.54 minutos. **97.** **a)** 9% **b)** 4 **c)** \$100

99. a) El saldo de Grace siempre permanecerá en \$1,000 ya que no se agrega el interés. Cada año ella recibe 5% del interés sobre \$1,000; después de t años, ella ha recibido $5t$% de la inversión de \$1,000, significa que en total ella tiene $1{,}000 + 1{,}000 \cdot 0.05t = 1{,}000(1 + 0.05t)$.

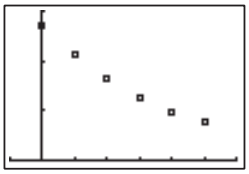
b)

Años	No compuesto	Compuesto
0	1000.00	1000.00
1	1050.00	1051.27
2	1100.00	1105.17
3	1150.00	1161.83
4	1200.00	1221.40
5	1250.00	1284.03
6	1300.00	1349.86
7	1350.00	1419.07
8	1400.00	1491.82
9	1450.00	1568.31
10	1500.00	1648.72

Capítulo 3 Proyecto

Las respuestas están basadas en los datos que se muestran en la tabla.

3.



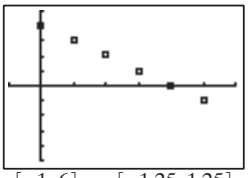
$[-1, 6]$ por $[0, 3]$

5. $y \approx 2.7188 \cdot 0.788^x$

7. Una pelota diferente cambiaría el porcentaje de rebote.

9. $y = He^{\ln(P)x}$ so $y = 2.7188e^{-0.238x}$

11. La regresión lineal es $y \approx -0.253x + 1.005$. Como $\ln y = (\ln P)x + \ln H$ la pendiente es $\ln P$ y la intersección y es $\ln H$.



$[-1, 6]$ por $[-1.25, 1.25]$

SECCIÓN 4.1

Exploración 1

1. $2\pi r$ **3.** No, no completamente, ya que la distancia πr requeriría una pedazo de cuerda de π veces de largo, y $\pi > 3$.

Repaso rápido 4.1

1. 5π pulg **3.** $\frac{6}{\pi}$ m **5. a)** 47.52 pies **b)** 39.77 km **7.** 88 pies/seg **9.** 6 mph

Ejercicios 4.1

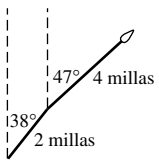
1. 23.2° **3.** 118.7375° **5.** 21°12′ **7.** 118°19′12″ **9.** $\pi/3$ **11.** $2\pi/3$ **13.** ≈ 1.2518 rad **15.** ≈ 1.0716 rad **17.** 30°

19. 18° **21.** 140° **23.** $\approx 114.59°$ **25.** 50 pulg **27.** $6/\pi$ pies **29.** 3 (radianes) **31.** $360/\pi$ cm **33.** $\theta = \frac{9}{11}$ rad y $s_2 = 36$ cm

35. 24 pulg **37.** ≈ 5.4 pulg **39. a)** 45° **b)** 22.5° **c)** 247.5° **41.** ESE es la más cercana a 112.5°.

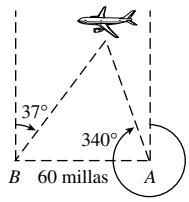
43. ≈ 4.23 millas terrestres. **45.** ≈ 387.85 rpm. **47.** $\approx 12{,}566.37$

49.



51. $\approx$ 778 millas náuticas. **53. a)** $16\pi \approx 50.265$ pulg **b)** $2\pi \approx 6.283$ pies **55. a)** 4π rad/seg **b)** 28π cm/seg **c)** 7π rad/seg **57.** Verdadero. El caballo A recorre $2\pi(2r) = 2(2\pi r)$ unidades de distancia en la misma cantidad de tiempo que el caballo B recorre $2\pi r$ unidades de distancia, así que se mueve el doble de rápido. **59.** C **61.** B **63.** 38°02′ **65.** 5°37′ **67.** 80 millas náuticas **69.** 902 millas náuticas **71.** El área de todo el círculo es πr^2, el sector con ángulo central θ cubre $\frac{\theta}{2\pi}$ de esa área, o $\frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$.

73.



SECCIÓN 4.2

Exploración 1

1. sen y csc, cos y sec, y tan y cot. **3.** sec θ. **5.** sen θ y cos θ.

Exploración 2

1. Sea $\theta = 60°$. Entonces $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ $\csc\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\sec\theta = 2$

$\tan\theta = \sqrt{3} \approx 1.732$ $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$

3. El valor de una función trigonométrica en θ es el mismo que el valor de su co-función en $90° - \theta$.

Repaso rápido 4.2

1. $5\sqrt{2}$ **3.** 6 **5.** 100.8 pulg **7.** 7.9152 km **9.** $\approx$ 1.0101 (sin unidades)

Ejercicios 4.2

1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$, $\csc\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$

3. $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$, $\cos\theta = \frac{5}{13}$, $\tan\theta = \frac{12}{5}$, $\csc\theta = \frac{13}{12}$, $\sec\theta = \frac{13}{5}$, $\cot\theta = \frac{5}{12}$

5. $\operatorname{sen}\theta = \frac{7}{\sqrt{170}}$, $\cos\theta = \frac{11}{\sqrt{170}}$, $\tan\theta = \frac{7}{11}$, $\csc\theta = \frac{\sqrt{170}}{7}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{170}}{11}$, $\cot\theta = \frac{11}{7}$

7. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{57}}{11}$, $\cos\theta = \frac{8}{11}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{57}}{8}$, $\csc\theta = \frac{11}{\sqrt{57}}$, $\sec\theta = \frac{11}{8}$, $\cot\theta = \frac{8}{\sqrt{57}}$

9. $\cos\theta = \frac{2\sqrt{10}}{7}$, $\tan\theta = \frac{3}{2\sqrt{10}}$, $\csc\theta = \frac{7}{3}$, $\sec\theta = \frac{7}{2\sqrt{10}}$, $\cot\theta = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

11. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{6}}{11}$, $\tan\theta = \frac{4\sqrt{6}}{5}$, $\csc\theta = \frac{11}{4\sqrt{6}}$, $\sec\theta = \frac{11}{5}$, $\cot\theta = \frac{5}{4\sqrt{6}}$

13. $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{\sqrt{106}}$, $\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{106}}$, $\csc\theta = \frac{\sqrt{106}}{5}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{106}}{9}$, $\cot\theta = \frac{9}{5}$

15. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{130}}$, $\cos\theta = \frac{11}{\sqrt{130}}$, $\tan\theta = \frac{3}{11}$, $\csc\theta = \frac{\sqrt{130}}{3}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{130}}{11}$, $\cot\theta = \frac{11}{3}$

17. $\operatorname{sen}\theta = \frac{9}{23}$, $\cos\theta = \frac{8\sqrt{7}}{23}$, $\tan\theta = \frac{9}{8\sqrt{7}}$, $\sec\theta = \frac{23}{8\sqrt{7}}$, $\cot\theta = \frac{8\sqrt{7}}{9}$ **19.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **21.** $\sqrt{3}$ **23.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **25.** $\sqrt{2}$

27. $\sqrt{4/3} = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$ **29.** 0.961 **31.** 0.943 **33.** 0.268 **35.** 1.524 **37.** 0.810 **39.** 2.414 **41.** $30° = \frac{\pi}{6}$

43. $60° = \frac{\pi}{3}$ **45.** $60° = \frac{\pi}{3}$ **47.** $30° = \frac{\pi}{6}$ **49.** $\frac{15}{\operatorname{sen} 34°} \approx 26.82$ **51.** $\frac{32}{\tan 57°} \approx 20.78$

53. $\frac{6}{\operatorname{sen} 35°} \approx 10.46$ **55.** $b \approx 33.79$, $c \approx 35.96$, $\beta = 70°$

57. $b \approx 22.25$, $c \approx 27.16$, $\alpha = 35°$ **59.** Conforme θ se hace cada vez más pequeño, el lado opuesto se hace cada vez más pequeño, así que su razón a la hipotenusa se aproxima a 0 como límite. **61.** ≈ 205.26 pies. **63.** ≈ 74.16 pies^2. **65.** ≈ 378.80 pies.

67. Falso. Esto sólo es cierto si θ es un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. **69.** E **71.** D **73.** Los valores de seno deben aumentar, los valores del coseno deben disminuir y sólo los valores de la tangente pueden ser mayores que 1. Por lo tanto, la primera columna es tangente, la segunda es seno y la tercera columna es coseno.

75. La distancia d_A desde A al espejo es 5 cos 30°; la distancia desde B al espejo es $d_B = d_A - 2$.

Entonces $PB = \frac{d_B}{\cos\beta} = \frac{d_A - 2}{\cos 30°} = 5 - \frac{2}{\cos 30°} = 5 - \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2.69$ m

77. Una posible demostración: $(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$ (Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$).

SECCIÓN 4.3

Exploración 1

1. El lado opuesto a θ en el triángulo tiene longitud y y la hipotenusa tiene longitud r. Por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} = \frac{y}{r}$. **3.** $\tan\theta = y/x$

Exploración 2

1. Las coordenadas x en el círculo unitario están entre -1 y 1, y cos t siempre es una coordenada x en el círculo unitario.

3. Los puntos correspondientes a t y $-t$ en la recta numérica corresponde a puntos arriba y abajo del eje x con la misma coordenada x. Por lo tanto, cos t y cos$(-t)$ son iguales. **5.** Como 2π es la distancia alrededor del círculo unitario, t y $t + 2\pi$ corresponden al mismo punto.

7. Mediante la observación en (6), tan t y tan$(t + \pi)$ son razones de la forma $\frac{y}{x}$ y $\frac{-y}{-x}$, que son iguales entre ellas o ambas están indefinidas.

9. Las respuestas variarán. Por ejemplo, hay proposiciones similares que pueden hacerse acerca de las funciones cot, sec, y csc.

Repaso rápido 4.3

1. $-30°$ **3.** 45° **5.** $\sqrt{3}/3$ **7.** $\sqrt{2}$ **9.** $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$, $\csc\theta = \frac{13}{5}$, $\sec\theta = \frac{13}{12}$, $\cot\theta = \frac{12}{5}$

Ejercicios 4.3

1. 450° **3.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan\theta = -2$, $\csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sec\theta = -\sqrt{5}$, $\cot\theta = -\frac{1}{2}$

$\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\csc\theta = -\frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$ **5.** $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\theta = 1$, $\csc\theta = -\sqrt{2}$, $\sec\theta = -\sqrt{2}$,

$\cot\theta = 1$

7. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$, $\csc\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$

9. $\operatorname{sen}\theta = 1$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ indefinida, $\csc\theta = 1$, $\sec\theta$ indefinida, $\cot\theta = 0$.

11. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{29}}$, $\tan\theta = -\frac{2}{5}$, $\csc\theta = -\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{29}}{5}$, $\cot\theta = -\frac{5}{2}$ **13.** +, +, + **15.** −, −, +

17. − **19.** − **21.** a) **23.** a) **25.** $-1/2$ **27.** 2 **29.** $\frac{1}{2}$ **31.** 1 **33.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **35.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

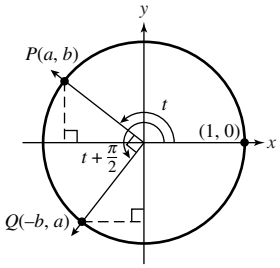
37. a) -1 **b)** 0 **c)** Indefinida.

39. a) 0 **b)** -1 **c)** 0 **41. a)** 1 **b)** 0 **c)** Indefinida. **43.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

45. $\tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{21}}$; $\sec\theta = \frac{5}{\sqrt{21}}$ **47.** $\sec\theta = -\frac{5}{4}$; $\csc\theta = \frac{5}{3}$ **49.** 1/2 **51.** 0

53. El valor de la calculadora del número irracional π necesariamente es una aproximación. Cuando multiplicamos por un número muy grande, el pequeño error de la aproximación original se magnifica lo suficiente para que los valores de las funciones trigonométricas sean incorrectos.

55. $\mu = \frac{\operatorname{sen} 83^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ} \approx 1.69$ **57. a)** 0.4 pulg. **b)** ≈ 0.1852 pulg. **59.** La diferencia en las elevaciones es 600 pies, así que $d = 600/\operatorname{sen}\theta$. Entonces: **a)** ≈ 848.53 pies. **b)** 600 pies. **c)** ≈ 933.43 pies. **61.** Verdadero. Los ángulos agudos determinan triángulos de referencia en el primer cuadrante, donde el coseno es positivo, mientras que los ángulos obtusos determinan triángulos de referencia en el segundo cuadrante, donde el coseno es negativo. **63.** E **65.** A **67.** $5\pi/6$ **69.** $7\pi/4$ **71.** Los dos triángulos son congruentes: ambos tienen hipotenusa 1 y los ángulos correspondientes son congruentes (el ángulo agudo más pequeño tienen medida de t en ambos triángulos), y los dos ángulos agudos en un triángulo rectángulo suman $\pi/2$. **73.** Una respuesta posible: Iniciando en el punto (a, b) en el círculo unitario —en un ángulo de t, de modo que $\cos t = a$— y después midiendo un cuarto de vuelta alrededor del círculo (que corresponde a sumar un ángulo de $\pi/2$), terminamos en $(-b, a)$ de modo que $\operatorname{sen}(t + \pi/2) = a$. Para (a, b) en el primer cuadrante, esto se muestra en la figura; ilustraciones similares pueden hacerse para los otros cuadrantes. **75.** Iniciando en el punto (a, b) en el círculo unitario —en un ángulo t, de modo que $\cos t = a$— y luego midiendo un cuarto de la vuelta alrededor del círculo (que corresponde a suma $\pi/2$ al ángulo), terminamos en $(-b, a)$, por lo que $\operatorname{sen}(t + \pi/2) = a$. Esto se cumple cuando (a, b) está en el segundo cuadrante, lo mismo que para el primer cuadrante.



77. $|\theta| < 0.2441$ (aproximadamente)

79. Por lo general, este polinomio de Taylor es una muy buena aproximación para sen θ; de hecho, el error relativo es menor que 1% para $|\theta| < 1$ (aproximadamente). Es mejor para θ cercana a 0; es ligeramente mayor que sen θ cuando $\theta < 0$ y ligeramente menor cuando $\theta > 0$.

SECCIÓN 4.4

Exploración 1

1. $\pi/2$ (en el punto (0, 1)). **3.** Ambas gráficas cruzan el eje x cuando la coordenada y en el círculo unitario es 0. **5.** La función seno sigue la coordenada y del punto, conforme se mueve alrededor del círculo unitario. Después de que el punto ha dado la vuelta por completo alrededor del círculo unitario (una distancia de 2π), se repite el mismo patrón de coordenadas y.

Repaso rápido 4.4

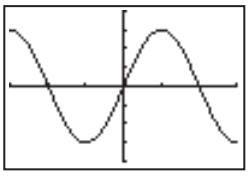
1. En orden; +. +. −, −. **3.** En orden: +, − +, −. **5.** $-5\pi/6$ **7.** Alargar verticalmente por 3. **9.** Comprimir verticalmente por 0.5.

Ejercicios 4.4

1. Amplitud 2; alargar verticalmente por un factor de 2. **3.** Amplitud 4; alargar verticalmente por un factor de 4, reflejar con respecto del eje x **5.** Amplitud 0.73; comprimir verticalmente por un factor de 0.73. **7.** Periodo $\frac{2\pi}{3}$, comprimir horizontalmente por un factor de $\frac{1}{3}$

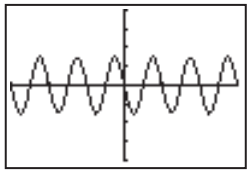
9. Periodo $\frac{2\pi}{7}$; comprimir horizontalmente por un factor de $\frac{1}{7}$, reflexión con respecto del eje y. **11.** Periodo π, comprimir horizontalmente por un factor de $\frac{1}{2}$, alargar verticalmente por un factor de 3. **13.** Amplitud 3, periodo 4π. **15.** Amplitud $\frac{3}{2}$, periodo π.

frecuencia $\frac{1}{4\pi}$



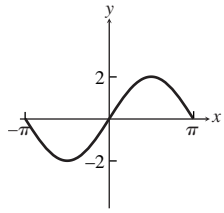
$[-3\pi, 3\pi]$ por $[-4, 4]$

frecuencia $\frac{1}{\pi}$

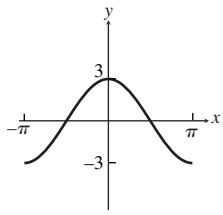


$[-3\pi, 3\pi]$ por $[-4, 4]$

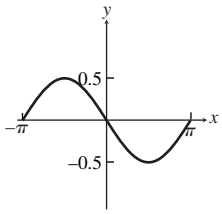
17.



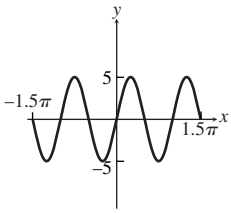
19.



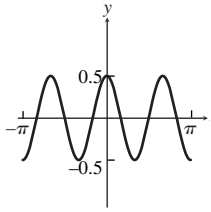
21.



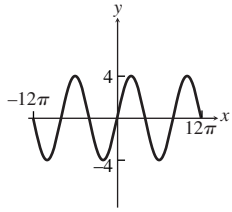
23.



25.



27.



29. Periodo π, amplitud 1.5; $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2, 2]$.

31. Periodo π; amplitud 3; $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$.

33. Periodo 6; amplitud 4; $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$.

35. Máximo: $2\left(\text{en } -\frac{3\pi}{2} \text{ y } \frac{\pi}{2}\right)$; mínimo : $-2\left(\text{en } -\frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{3\pi}{2}\right)$; ceros: $0, \pm\pi, \pm 2\pi$

37. Máximo: 1 (en $0, \pm\pi, \pm 2\pi$); mínimo: $-1\left(\text{en } \pm\frac{\pi}{2} \text{ y } \pm\frac{3\pi}{2}\right)$; ceros: $\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}, \pm\frac{7\pi}{4}$

39. Máximo: $1\left(\text{en } \pm\frac{\pi}{2} \text{ y } \pm\frac{3\pi}{2}\right)$; mínimo: -1 (en $0, \pm\pi, \pm 2\pi$); ceros: $\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}, \pm\frac{7\pi}{4}$

41. Una posibilidad es $y = \text{sen}(x + \pi)$.

43. Iniciando con $y = \text{sen } x$, alargar horizontalmente por $\frac{1}{3}$, comprimir verticalmente en un factor de 0.5.

45. Iniciando con $y = \cos x$, estirar horizontalmente por 3, comprimir verticalmente por $\frac{2}{3}$, reflejar con respecto al eje x.

47. Iniciando con $y = \cos x$, comprimir horizontalmente por $\frac{3}{2\pi}$ y alargar verticalmente por 3.

49. Iniciando con y_1, alargar verticalmente por un factor de $\frac{5}{3}$.

51. Iniciando con y_1, comprimir horizontalmente por $\frac{1}{2}$. **53.** a) y b) **55.** a) y b)

57. Una posibilidad es $y = 3 \text{ sen } 2x$. **59.** Una posibilidad es $y = 1.5 \text{ sen } 12(x - 1)$.

61. Amplitud 2, periodo 2π, corrimiento de fase $\frac{\pi}{4}$, traslación vertical de una unidad hacia arriba.

63. Amplitud 5, periodo $\frac{2\pi}{3}$, corrimiento de fase $\frac{\pi}{18}$, traslación vertical de 0.5 unidades hacia arriba

65. Amplitud 2, periodo 1, corrimiento de fase 0, traslación vertical una unidad hacia arriba.

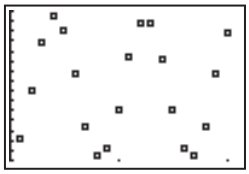
67. Amplitud $\frac{7}{3}$, periodo 2π, corrimiento de fase $-\frac{5}{2}$, traslación vertical de una unidad hacia abajo.

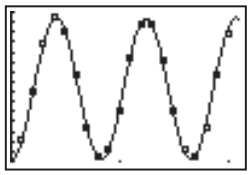
69. $y = 2 \text{ sen } 2x$ $(a = 2, b = 2, h = 0, k = 0)$

71. **a)** Dos **b)** $(0, 1)$ y $(2\pi, 1.3^{-2\pi}) \approx (6.28, 0.19)$ **73.** ≈ 15.90 seg **75.** **a)** 1:00 A.M. **b)** 8.90 pies; 10.52 pies. **c)** 4:06 A.M.

77. **a)** El máximo d es aproximadamente 21.4 cm. **b)** ≈ 0.83 seg **c)** $d(t) = -7.1 \cos\left(\frac{2\pi x}{0.83}\right) + 14.3$

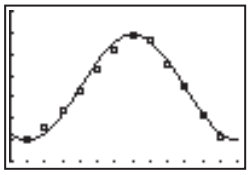
La amplitud es 7.1 cm; diagrama de dispersión:


[0, 2.1] por [7, 22]

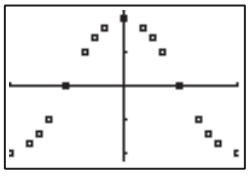
d)

[0, 2.1] por [7, 22]

79. Una solución posible es

$$T = 21.5 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 7)\right) + 57.5.$$


[0, 13] por [10, 80]

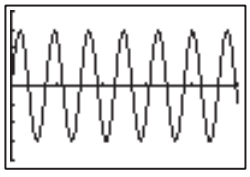
81. Falso, $y = \text{sen } 2x$ es un *alargamiento* horizontal de $y = \text{sen } 4x$ en un factor de 2, por lo que tiene el doble del periodo. **83.** D **85.** C

87. a)

$[-\pi, \pi]$ por $[-1.1, 1.1]$

b) $0.0246x^4 + 0x^3 - 0.4410x^2 + 0x + 0.9703$

c) Los coeficientes son muy similares.

89. a) 1/262 seg **b)** $f = 262\dfrac{1}{\text{seg}}$ ("ciclos por seg"), o 262 Hertz

c)

$[0, 0.025]$ por $[-2, 2]$

91. a) $a - b$ debe ser igual a 1. **b)** $a - b$ debe ser igual a 2.

c) $a - b$ debe ser igual a k.

93. $B = (0, 3)$; $C = \left(\dfrac{3\pi}{4}, 0\right)$ **95.** $B = \left(\dfrac{\pi}{4}, 2\right)$; $C = \left(\dfrac{3\pi}{4}, 0\right)$

97. a) Si b es negativa, entonces $b = -B$, donde B es positiva. Entonces $y = a \text{ sen}[-B(x - H)] + k = -a \text{ sen}[B(x - H)] + k$, ya que seno es una función impar. En la parte d) veremos qué hacer si el número del frente es negativo.

b) Una gráfica de seno puede trasladarse un cuarto de periodo a la izquierda para transformarse en una gráfica de coseno de la misma sinusoide. Así, $y = a \text{ sen}\left[b\left((x - h) + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2\pi}{b}\right)\right] + k = a \text{ sen}\left[b\left(x - \left(h - \dfrac{\pi}{2b}\right)\right)\right] + k$ tiene la misma gráfica que $y = a \cos[b(x - h)] + k$.

Por lo tanto, elegimos $H = h - \dfrac{\pi}{2b}$.

c) Los ángulos $\theta + \pi$ y θ determinan puntos diametralmente opuestos en el círculo unitario, así que tienen puntos simétricos con respecto del origen. Por lo tanto, las coordenadas y son opuestas, así que $\text{sen}(\theta + \pi) = -\text{sen}(\theta$.

d) Por la identidad en c), $y = a \text{ sen}[b(x - h) + \pi] + k = -a \text{ sen}[b(x - h)] + k$. Por lo tanto, elegimos $H = h - \dfrac{\pi}{b}$.

e) La parte b) muestra cómo convertir $y = a \cos[b(x - h)] + k$ a $y = a \text{ sen}[b(x - H)] + k$, y las partes a) y d) muestran cómo asegura que a y b sean positivos.

SECCIÓN 4.5

Exploración 1

1. Las gráficas no parecen intersecarse.

Repaso rápido 4.5

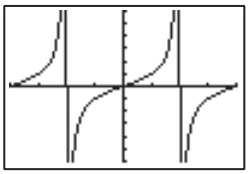
1. π **3.** 6π **5.** Cero: 3; asíntota: $x = -4$ **7.** Cero: -1; asíntotas: $x = 2$ y $x = -2$ **9.** Par.

Ejercicios 4.5

1. La gráfica de $y = 2 \csc x$ debe ser alargada verticalmente en un factor de 2, comparada con $y = \csc x$, así que $y_1 = 2 \csc x$ y $y_2 = \csc x$.

3. $y_1 = 3 \csc 2x$, $y_2 = \csc x$

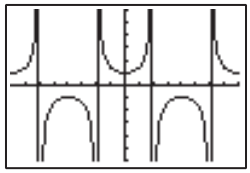
5.



$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ por $[-6, 6]$

Contracción horizontal de $y = \sec x$ por un factor de 1/3; asíntotas en múltiplos de $\pi/6$.

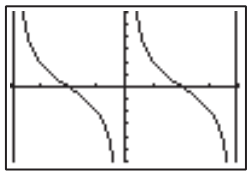
7.



$[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ por $[-6, 6]$

Contracción horizontal de $y = \cot x$ por un factor de 1/2, alargamiento vertical en un factor de 2; asíntotas en múltiplos de $\pi/2$.

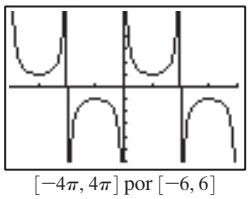
9.



$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ por $[-6, 6]$

Contracción horizontal de $y = \tan x$ por un factor de 1/2; asíntotas en múltiplos de $\pi/4$.

11.



$[-4\pi, 4\pi]$ por $[-6, 6]$

Alargamiento horizontal de $y = \csc x$ por un factor de 2; asíntotas en múltiplos de 2π.

13. Gráfica a); Xmin $= -\pi$ y Xmax $= \pi$

15. Gráfica c); Xmin $= -\pi$ y Xmax $= \pi$

17. Dominio; todos los reales excepto múltiplos enteros de π; rango: $(-\infty, \infty)$; continua en su dominio; decreciente en cada intervalo de su dominio; simétrica con respecto al origen (impar); no está acotada por arriba ni por abajo; no tiene máximo ni mínimo; no tiene asíntotas horizontales; asíntotas verticales: $x = k\pi$ para todos los enteros k; comportamiento en los extremos; $\lim_{x \to \infty} \cot x$ y $\lim_{x \to -\infty}$ no existen.

19. Dominio: todos los reales excepto múltiplos enteros de π; rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; continua en su dominio: en cada intervalo centrado en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donde k es un entero, decrece en la mitad izquierda y crece en la derecha, para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, creciente en la primera mitad del intervalo y decreciente en la segunda mitad; simétrica con respecto al origen (impar); no acotada por arriba ni por abajo; mínimo local de 1 en cada $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y máximo local de -1 en cada $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, donde k es un entero; no tiene asíntotas horizontales; asíntotas verticales: $x = k\pi$ para todos los enteros k; comportamiento en los extremos: $\lim_{x \to \infty} \csc x$ y $\lim_{x \to -\infty}$ no existen.

21. Iniciando con $y = \tan x$, alargamiento vertical por 3.

23. Iniciando con $y = \csc x$, alargamiento vertical por 3.

25. Iniciando con $y = \cot x$, alargamiento horizontal por 2, alargamiento vertical de 3 y reflexión respecto del eje x.

27. Iniciando con $y = \tan x$, contracción horizontal de $\frac{2}{\pi}$, reflexión respecto del eje x, y desplazamiento hacia arriba de 2 unidades.

29. $\pi/3$ **31.** $5\pi/6$ **33.** $5\pi/2$ **35.** $x \approx 0.92$ **37.** $x \approx 5.25$ **39.** $x \approx 0.52$ o $x \approx 2.62$

41. a) La reflexión de (a, b) con respecto del origen es $(-a, -b)$, **b)** Definición de tangente **c)** $\tan t = \frac{b}{a} = \frac{-b}{-a} = \tan(t - \pi)$ **d)** Como puntos ubicados en lados opuestos del círculo unitario determinan la misma razón de la tangente, $\tan(t \pm \pi) = \tan t$ para todos los números t en el dominio. Otros puntos en el círculo unitario proporcionan triángulos con diferentes razones de tangente, así que es posible un periodo más pequeño. **e)** El mismo argumento anterior que utiliza la razón $\frac{b}{a}$ puede repetirse usando la razón $\frac{a}{b}$ que es la razón cotangente.

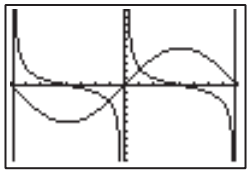
43. Para cualquier x, $\left(\frac{1}{f}\right)(x + p) = \frac{1}{f(x + p)} = \frac{1}{f(x)} = \left(\frac{1}{f}\right)(x)$. Esto no es cierto para cualquier valor pequeño de p, ya que éste es el valor más pequeño que funciona para f.

45. a) $d = 350 \sec x$. **b)** $\approx$ 16,831 pies. **47.** $\approx \pm 0.905$ **49.** $\approx \pm 1.107$ o $\approx \pm 2.034$

51. Falso. Sólo es creciente en intervalos en los que está definida, es decir, intervalos acotados por asíntotas consecutivas.

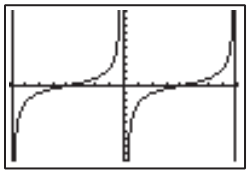
53. A **55.** D

57. Casi $(-0.44, 0) \cup (0.44, \pi)$



$[-\pi, \pi]$ por $[-10, 10]$

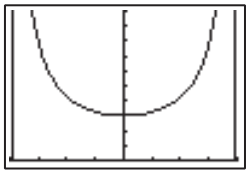
59. cot x no está definida en 0; la definición de "creciente en (a, b)" requiere que la función esté definida en (a, b). Además, eligiendo $a = -\pi/4$ y $b = \pi/4$, tenemos $a < b$ pero $f(a) = 1 > f(b) = -1$.



$[-\pi, \pi]$ por $[-10, 10]$

61. $\csc x = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

63. $d = \frac{30}{\cos x} = 30 \sec x$

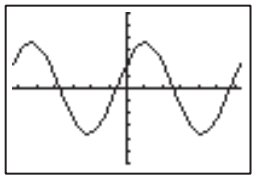


$[-0.5\pi, 0.5\pi]$ por $[0, 100]$

65. ≈ 0.8952 radianes $\approx 51.29°$

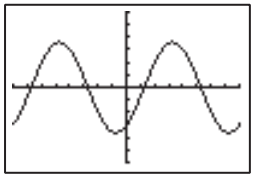
SECCIÓN 4.6

Exploración 1



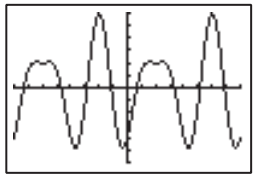
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$

Sinusoide



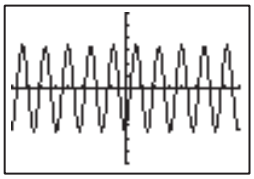
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$

Sinusoide



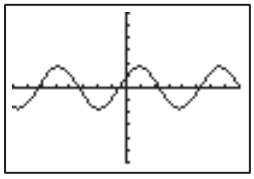
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$

No es sinusoide



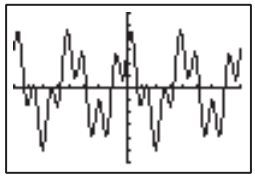
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$

Sinusoide



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$

Sinusoide



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$

No es sinusoide

Repaso rápido 4.6

1. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[-3, 3]$. **3.** Dominio: $[1, \infty)$; rango: $[0, \infty)$.

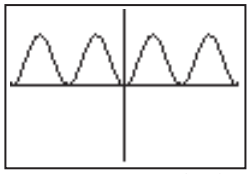
5. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[-2, \infty)$.

7. Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$, cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 0$.

9. $(f \circ g)(x) = x - 4$, dominio: $[0, \infty)$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, dominio: $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

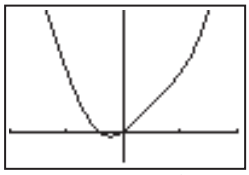
Ejercicios 4.6

1. Periódica



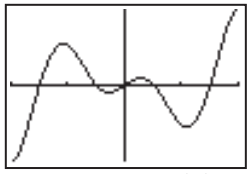
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.5, 1.5]$

3. No es periódica



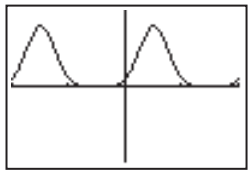
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-5, 20]$

5. No es periódica



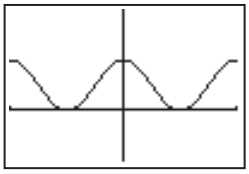
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-6, 6]$

7. Periódica



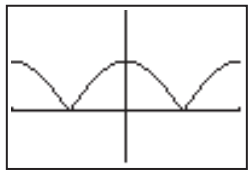
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-10, 10]$

9. Como el periodo de $\cos x$ es 2π, tenemos $\cos^2(x + 2\pi) = (\cos(x + 2\pi))^2 = (\cos x)^2 = \cos^2 x$. Por lo tanto, el periodo es un divisor exacto de 2π y vemos gráficamente que es π. Una gráfica para $-\pi \le x \le \pi$ se muestra:



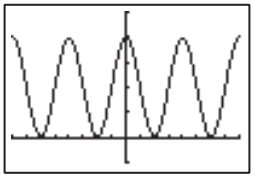
$[-\pi, \pi]$ por $[-1, 2]$

11. Por lo tanto, el periodo es un divisor exacto de 2π, $\sqrt{\cos^2(x + 2\pi)} = \sqrt{(\cos(x + 2\pi))^2} = \sqrt{(\cos x)^2} = \sqrt{\cos^2 x}$. Por lo tanto, el periodo es un divisor exacto de 2π y gráficamente vemos que es π. Una gráfica para $-\pi \le x \le \pi$ se muestra:



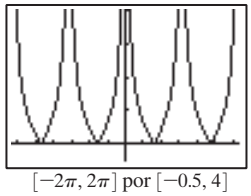
$[-\pi, \pi]$ por $[-1, 2]$

13. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[0, 1]$;



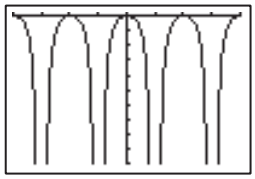
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-0.25, 1.25]$

15. Dominio: toda $x \neq n\pi$, n un entero; rango: $[0, \infty)$:



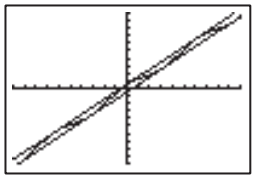
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-0.5, 4]$

17. Dominio: toda $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, n es un entero; rango: $(-\infty, 0]$;



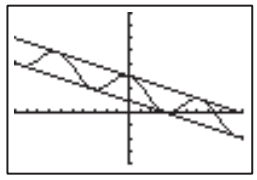
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-10, 0.2]$

19. $y = 2x - 1$; $y = 2x + 1$



$[-10, 10]$ por $[-20, 20]$

21. $y = 1 - 0.3x$; $y = 3 - 0.3x$



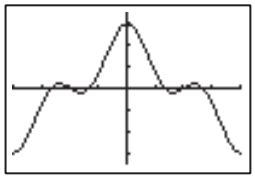
$[-10, 10]$ por $[-4, 8]$

23. Sí.

25. Sí. **27.** No **29.** $a \approx 3.61$, $b = 2$, $h \approx 0.49$

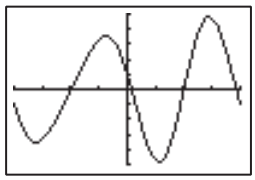
31. $a \approx 2.24$, $b = \pi$, $h \approx 0.35$ **33.** $a \approx 2.24$, $b = 1$, $h \approx -1.11$

35.



$[-\pi, \pi]$ por $[-3.5, 3.5]$

37.



$[-\pi, \pi]$ por $[-5, 5]$

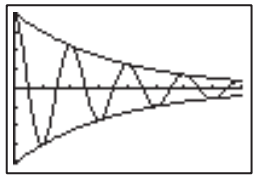
39. a) **41.** c)

43. El factor de amortiguamiento es e^{-x}, y la amortiguación ocurre cuando $x \to \infty$.

45. No hay amortiguamiento. **47.** El factor de amortiguamiento es x^3 y el amortiguamiento ocurre cuando $x \to 0$.

49. f oscila entre 1.2^{-x} y -1.2^{-x}.

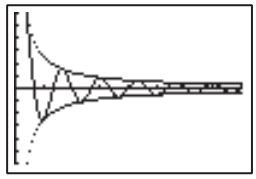
Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 0$.



$[0, 4\pi]$ por $[-1, 1]$

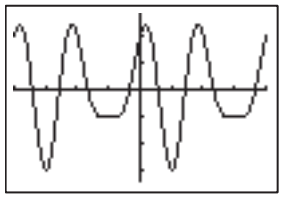
51. f oscila entre $\frac{1}{x}$ y $-\frac{1}{x}$.

Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 0$.



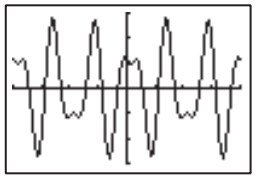
$[0, 4\pi]$ por $[-1.5, 1.5]$

53. 2π



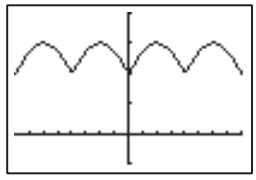
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-3.4, 2.8]$

55. 2π



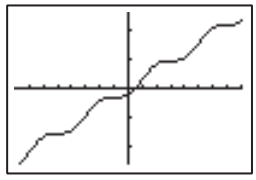
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-3, 3]$

57. Periodo 2π



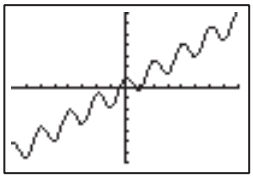
$[-4\pi, 4\pi]$ por $[-1, 4]$

59. No es periódica



$[-4\pi, 4\pi]$ por $[-13, 13]$

61. No es periódica



$[-4\pi, 4\pi]$ por $[-7, 7]$

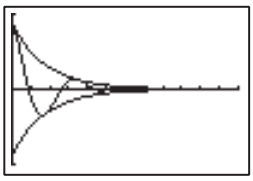
63. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$.

65. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[1, \infty)$.

67. Dominio: ... $\cup$ $[-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup$ ...; esto es, toda x en $2n\pi \leq x \leq (2n + 1)\pi$, n un entero; rango: $[0, 1]$.

69. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[0, 1]$.

71. a)



[0, 12] por [−0.5, 0.5]

73. No es periódica **75.** a)

77. Gráfica a), se muestra en $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$.

79. Grafica b), se muestra en $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$.

b) Para $t > 0.51$ (aproximadamente).

81. Falso. Por ejemplo, la función tiene un mínimo relativo de 0 en $x = 0$ que no se repite en otra parte.

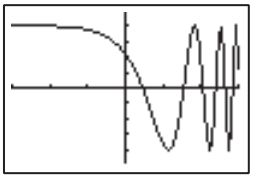
83. B **85.** D

87. a) Las respuestas variarán; por ejemplo, en una TI−81: $\frac{\pi}{47.5} = 0.0661\ldots \approx 0.07$,

en una TI−82: $\frac{\pi}{47} = 0.0668\ldots \approx 0.07$; en una TI−85: $\frac{\pi}{63} = 0.0498\ldots \approx 0.05$; en una TI−92: $\frac{\pi}{119} = 0.0263\ldots \approx 0.03$.

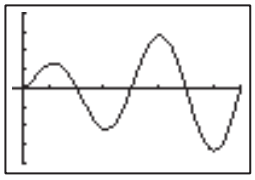
b) Periodo: $p = \pi/125 = 0.0251...$ Para cualquiera de las graficadoras TI, hay de 1 a 3 ciclos entre cada pareja de píxeles; por lo tanto, las gráficas producidas son imprecisas, ya que se pierde mucho detalle.

89. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[-1, 1]$;
asíntota horizontal: $y = 1$;
ceros en $\ln\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$,
n un entero no negativo



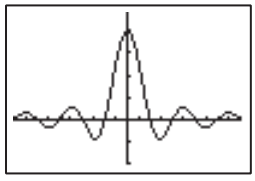
[−3, 3] por [−1.2, 1.2]

91. Dominio: $[0, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$;
ceros en $n\pi$, n un entero no negativo



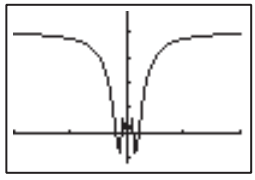
$[-0.5, 4\pi]$ por $[-4, 4]$

93. Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
rango: aproximadamente $[-0.22, 1)$;
asíntota horizontal: $y = 0$;
ceros en $n\pi$, n un entero no cero



$[-5\pi, 5\pi]$ por $[-0.5, 1.2]$

95. Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
rango: aproximadamente $[-0.22, 1)$;
asíntota horizontal: $y = 1$;
ceros en $\frac{1}{n\pi}$, n un entero no cero



$[-\pi, \pi]$ por $[-0.3, 1.2]$

SECCIÓN 4.7

Exploración 1

1. x **3.** $\sqrt{1 + x^2}$ **5.** $\sqrt{1 + x^2}$

Repaso rápido 4.7

1. sen x: positivo; cos x: positivo; tan x: positiva. **3.** sen x: negativo; cos x: negativo; tan x: positiva. **5.** 1/2 **7.** −1/2 **9.** −1/2

Ejercicios 4.7

1. $\pi/3$ **3.** 0 **5.** $\pi/3$ **7.** $-\pi/4$ **9.** $-\pi/4$ **11.** $\pi/2$ **13.** 21.22° **15.** −85.43° **17.** 1.172 **19.** −0.478

21. $\lim_{x \to \infty} \tan^{-1}(x^2) = \frac{\pi}{2}$ y $\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}(x^2) = \frac{\pi}{2}$ **23.** $\sqrt{3}/2$ **25.** $\pi/4$ **27.** 1/2 **29.** $\pi/6$ **31.** 1/2

33. Dominio: $[-1, 1]$; rango: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; continua; creciente; simétrica con respecto del origen (impar); acotada; máximo absoluto de $\frac{\pi}{2}$; mínimo absoluto de $-\frac{\pi}{2}$; no tiene asíntotas; no tiene comportamiento a la larga (dominio acotado).

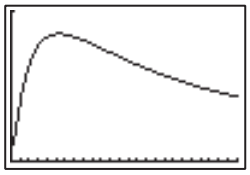
35. Dominio $(-\infty, \infty)$; rango: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; continua; creciente; simétrica con respecto del origen (impar); acotada, no tiene máximo ni mínimo; asíntotas horizontal: $y = \frac{\pi}{2}$ y $y = -\frac{\pi}{2}$. Comportamiento en los extremos; $\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ y $\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$.

37. Dominio: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; rango: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Iniciando con $y = \text{sen}^{-1} x$, comprimir horizontalmente por $\frac{1}{2}$.

39. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $\left(-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$; iniciando con $y = \tan^{-1} x$, alargamiento horizontal de 2 y compresión vertical de 5 (en cualquier orden).

41. 1 **43.** $\text{sen}\,\frac{1}{2} \approx 0.479$ **45.** $\frac{1}{3}$ **47.** $x/\sqrt{1 + x^2}$ **49.** $x/\sqrt{1 - x^2}$ **51.** $\frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

53. b)



$[0, 25]$ por $[0, 55]$

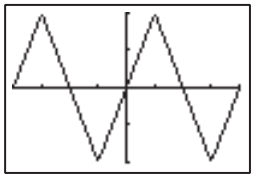
c) 2 o 15 pies.

55. a) $\theta = \tan^{-1} \frac{s}{500}$ **b)** Conforme s cambia de 10 a 20 pies, θ cambia de alrededor de 1.1458° a 2.2906°, casi se duplica de forma exacta (un aumento de 99.92%). Cuando s cambia de 200 a 210 pies, θ cambia de alrededor de 21.90° a 22.78°, un aumento de menos de 1°, y un cambio relativo muy pequeño (sólo de cerca de 4.5%). **c)** El eje x representa la altura y el eje y representa el ángulo: el ángulo no puede crecer más de 90° (de hecho, *se aproxima* pero nunca es exactamente igual a 90°).

57. Falso. Esto sólo es verdadero para $-1 \leq x \leq 1$, el dominio de $\text{sen}^{-1} x$. **59.** E **61.** C

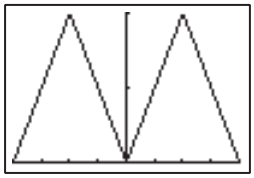
63. La función cotangente restringida al intervalo $(0, \pi)$ es uno a uno y tiene una inversa. El ángulo único y entre 0 y π (sin incluirlo) tal que $\cot y = x$ se denomina la cotangente inversa (o arcocotangente) de x, expresado como $\cot^{-1}$ o arccot x. El dominio de $y = \cot^{-1} x$ es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $(0, \pi)$.

65. a) Dominio todos los reales, rango $[-\pi/2, \pi/2]$, periodo 2π



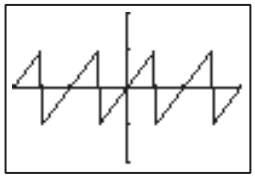
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-0.5\pi, 0.5\pi]$

b) Dominio todos los reales, rango $[0, \pi]$, periodo 2π



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[0, \pi]$

c) Dominio todos los reales excepto $\pi/2 + n\pi$, n un entero, rango $(-\pi/2, \pi/2)$, periodo π. La discontinuidad no es removible.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-\pi, \pi]$

67. $y = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$ **69.** $\frac{18}{\pi} \tan^{-1} x + 33$

71. a) $y = \pi/2$ **b)** $y = \pi/2$, $y = 3\pi/2$ **c)** La gráfica de la izquierda. **d)** La gráfica de la izquierda.

SECCIÓN 4.8

Exploración 1

1. El círculo unitario.

3. Como la graficadora está trazando puntos a lo largo del círculo unitario cubre el círculo a rapidez constante. Hacia los extremos, su movimiento es principalmente vertical, así que no hay demasiado avance horizontal (que es todo lo que vemos). Hacia la parte media, el movimiento es principalmente horizontal, así que se mueve más rápido.

Repaso rápido 4.8

1. $b = 15 \cot 31° \approx 24.964$, $c = 15 \csc 31° \approx 29.124$

3. $b = 28 \cot 28° - 28 \cot 44° \approx 23.665$, $c = 28 \csc 28° \approx 59.642$, $a = 28 \csc 44° \approx 40.308$ **5.** Complemento: 58°; suplemento: 148°.

7. 45° **9.** Amplitud: 3; periodo π

Ejercicios 4.8

1. $300\sqrt{3} \approx 519.62$ pies **3.** $120 \cot 10° \approx 680.55$ pies. **5.** longitud del alambre $= 5 \sec 80° \approx 28.79$ pies; altura de la torre $= 5 \tan 80° \approx 28.36$ pies.

7. $185 \tan 80°1'12'' \approx 1051$ pies. **9.** $100 \tan 83°12' \approx 839$ pies. **11.** $10 \tan 55° \approx 14.3$ pies. **13.** $4.25 \tan 35° \approx 2.98$ millas.

15. $200(\tan 40° - \tan 30°) \approx 52.35$ pies. **17.** Distancia: $60\sqrt{2} \approx 84.85$ millas náuticas; el rumbo es 140°.

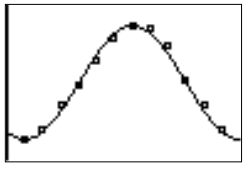
19. $1097 \cot 19° \approx 3{,}186$ pies. **21.** $325 \tan 63° \approx 638$ pies. **23.** $36.5 \tan 15° \approx 9.8$ pies. **25.** $\dfrac{550}{\cot 70° - \cot 80°} \approx 2{,}931$ pies

27. a) 8 ciclos/seg. **b)** $d = 6 \cos 16\pi t$ **c)** Alrededor de 4.1 pulg a la izquierda del la posición de inicio. **29.** $d = 3 \cos 4\pi t$ cm.

31. a) 25 pies. **b)** 33 pies. **c)** $\pi/10$ radianes/seg.

33. a) $\pi/6$ **b)** $a = (82 - 48)/2 = 17$ y $k = 82 - 17 = 65$

c) $(3 + 1 = 4)$ **d)** El ajuste es muy bueno. **e)** Haciendo $17 \operatorname{sen}(\pi/6(t - 4)) + 65 = 70$, obtenemos $t = 4.57$ o $t = 9.43$. Éstos representan (aproximadamente) los días #139 y #287 de un año con 365 días, a saber 19 de mayo y 14 de octubre.

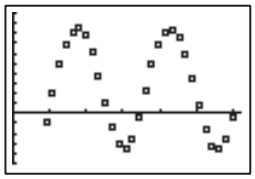


[0, 13] por [42, 88]

35. a) Marzo **b)** Noviembre

37. Verdadero. Ya que la frecuencia y el periodo son recíprocos, entre mayor sea la frecuencia menor será el periodo. **39.** D **41.** D

43. a)

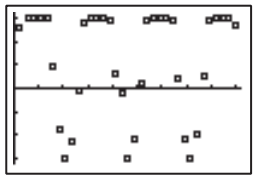


[0, 0.0062] por [−0.5, 1]

b) La primera es la mejor. **c)** Alrededor de $\dfrac{2{,}464}{2\pi} = \dfrac{1{,}232}{\pi} \approx 392$ oscilación/seg.

45. $2.5 \cot \dfrac{\pi}{7} \approx 5.2$ cm **47.** $AC \approx 33.6$ pulg; $BD \approx 12.9$ pulg. **49.** $\tan^{-1} 0.06 \approx 3.4°$

51. a)



[0, 0.0092] por [−1.6, 1.6]

b) Un buen ajuste es $y = 1.51971 \operatorname{sen}[2467(t - 0.0002)]$ (esto es, $a = 1.51971$, $b = 2467$, $h = 0.0002$). Las respuestas variarán pero deben ser cercanas a estos valores.

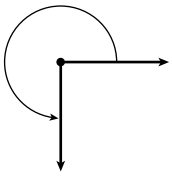
c) Frecuencia: alrededor de $\dfrac{2{,}467}{2\pi} \approx 393$ Hz; Parece ser una G.

d) G

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

1. Eje y positivo; 450°. **3.** III cuadrante; $-3\pi/4$. **5.** Cuadrante I, $13\pi/30$. **7.** I cuadrante; 15°.

9. 270° o $\frac{3\pi}{2}$ radianes **11.** $30° = \pi/6$ rad **13.** $120° = 2\pi/3$ rad **15.** $360° + \tan^{-1}(-2) \approx 296.565° \approx 5.176$ radianes



17. 1/2 **19.** 1 **21.** 1/2 **23.** 2 **25.** -1 **27.** 0

29. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\csc\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -2$, $\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$

31. $\operatorname{sen}(-135°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(-135°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan(-135°) = 1$, $\csc(-135°) = -\sqrt{2}$, $\sec(-135°) = -\sqrt{2}$, $\cot(-135°) = 1$

33. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\tan\alpha = \frac{5}{12}$, $\csc\alpha = \frac{13}{5}$, $\sec\alpha = \frac{13}{12}$, $\cot\alpha = \frac{12}{5}$

35. $\operatorname{sen}\theta = \frac{15}{17}$, $\cos\theta = \frac{8}{17}$, $\tan\theta = \frac{15}{8}$, $\csc\theta = \frac{17}{15}$, $\sec\theta = \frac{17}{8}$, $\cot\theta = \frac{8}{15}$

37. ≈ 4.075 radianes. **39.** $a = 15 \operatorname{sen} 35° \approx 8.604$, $b = 15\cos 35° \approx 12.287$, $\beta = 55°$

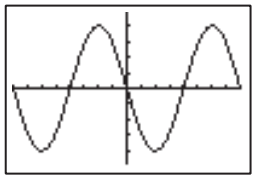
41. $b = 7\tan 48° \approx 7.774$, $c = \frac{7}{\cos 48°} \approx 10.461$, $\alpha = 42°$

43. $a = 2\sqrt{6} \approx 4.90$, $\alpha \approx 44.42°$, $\beta \approx 45.58°$ **45.** Cuadrante III. **47.** Cuadrante II.

49. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan\theta = -2$, $\csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sec\theta = -\sqrt{5}$, $\cot\theta = -\frac{1}{2}$

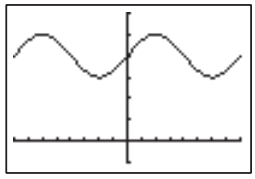
51. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\theta = -\frac{5}{\sqrt{34}}$, $\tan\theta = \frac{3}{5}$, $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{3}$, $\sec\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$, $\cot\theta = \frac{5}{3}$

53. Iniciando con $y = \operatorname{sen} x$,
trasladar π unidades a la izquierda



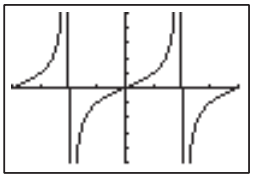
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.2, 1.2]$

55. Iniciando con $y = \cos x$,
trasladar $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda, reflejar con respecto del eje x, y trasladar 4 unidades hacia arriba.



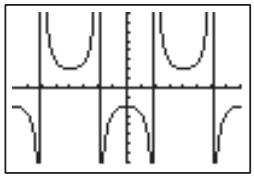
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1, 6]$

57. Iniciando con $y = \tan x$, comprimir horizontalmente en un factor de $\frac{1}{2}$.



$[-0.5\pi, 0.5\pi]$ por $[-5, 5]$

59. Iniciando con $y = \sec x$, alargar horizontalmente por 2, alargar verticalmente en un factor de 2 y reflejar corespecto al eje x (en cualquier orden).



$[-4\pi, 4\pi]$ por $[-8, 8]$

61. Amplitud: 2; periodo: $\frac{2\pi}{3}$; corrimiento de fase: 0; dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[-2, 2]$.

63. Amplitud: 1.5; periodo: π; corrimiento de fase: $\frac{\pi}{8}$; dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[-1.5, 1.5]$

65. Amplitud: 4; periodo: π; corrimiento de fase: $\frac{1}{2}$; dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[-4, 4]$

67. $a \approx 4.47$, $b = 1$ y $h \approx 1.11$ **69.** $\approx 49.996° \approx 0.873$ radianes **71.** $45° = \pi/4$ rad.

73. Iniciando con $y = \text{sen}^{-1}\, x$, comprimir horizontalmente en un factor de $\frac{1}{3}$. Dominio: $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$; rango: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

75. Iniciando con $y = \text{sen}^{-1}\, x$, trasladar una unidad a la derecha, comprimir horizontalmente en $\frac{1}{3}$, trasladar 2 unidades hacia arriba. Dominio: $\left[0, \frac{2}{3}\right]$; rango: $\left[2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2}\right]$

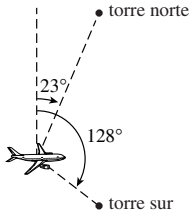
77. $5\pi/6$ **79.** $3\pi/4$ **81.** $3\pi/2$ **83.** As $|x| \to \infty$, $\frac{\text{sen}\, x}{x^2} \to 0$. **85.** 1 **87.** 3/4

89. Periódica; periodo: π; dominio: $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, n un entero; rango: $[1, \infty)$.

91. No es periódica; dominio: $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, n un entero; rango: $(-\infty, \infty)$. **93.** $4\pi/3$ **95.** $100 \tan 78° \approx 470$ m

97. $150(\cot 18° - \cot 42°) \approx 295$ pies.

99.

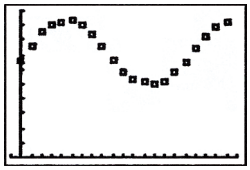


101. $62 \tan 72°24' \approx 195.4$ pies **103.** $22\pi/15 \approx 4.6$ pulg. **105.** **a)** Día 123 (3 de mayo).
b) Día 287 (14 de octubre).

Capítulo 4 Proyecto

Las respuestas están basadas en los datos que se muestran en la tabla.

1.



3. La constante a representa la mitad de la distancia que la pesa del péndulo oscila conforme se mueve de su punto más alto al más bajo; k representa la distancia desde el detector a la pesa del péndulo cuando está a la mitad de la oscilación.

5. $y \approx 0.22\ \text{sen}(3.87x - 0.16) + 0.71$. La mayoría de los modelos de regresión con calculadora/computadora se expresan en la forma $y = a\ \text{sen}(bx + p) + k$, donde $-p/b = h$ en la ecuación $y = a\ \text{sen}(b(x - h)) + k$. La última ecuación difiere de $y = a\ \cos(b(x - h) + k$ sólo en la h.

SECCIÓN 5.1

Exploración 1

1. $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, y $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

3. $\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, y $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$

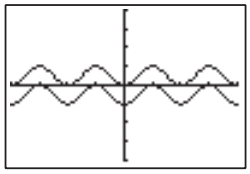
Repaso rápido 5.1

1. 1.1760 rad = 67.380° **3.** 2.4981 rad = 143.130° **5.** $(a - b)^2$ **7.** $(2x + y)(x - 2y)$ **9.** $\frac{y - 2x}{xy}$ **11.** xy

Ejercicios 5.1

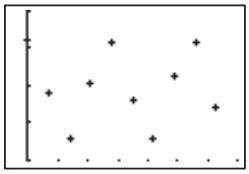
1. $\operatorname{sen}\theta = 3/5$ y $\cos\theta = 4/5$ **3.** $\tan\theta = -\sqrt{15}$ y $\cot\theta = -1/\sqrt{15} = -\sqrt{15}/15$ **5.** 0.45 **7.** -0.73 **9.** $\operatorname{sen} x$ **11.** 1
13. $\tan^2 x$ **15.** $\cos x \operatorname{sen}^2 x$ **17.** -1 **19.** -1 **21.** 1 **23.** $\cos x$ **25.** 2 **27.** $\sec x$ **29.** $\tan x$ **31.** $\tan x$
33. $2\csc^2 x$ **35.** $-\operatorname{sen} x$ **37.** $\cot x$
39. $(\cos x + 1)^2$ **41.** $(1 - \operatorname{sen} x)^2$ **43.** $(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$ **45.** $(2\tan x - 1)^2$ **47.** $1 - \operatorname{sen} x$ **49.** $1 - \cos x$
51. $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 3\pi/2$ **53.** $0, \pi$ **55.** $\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$
57. $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ **59.** $n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ **61.** $n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
63. $\{\pm1.1918 + 2n\pi \mid n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ **65.** $\{0.3047 + 2n\pi \text{ or } 2.8369 + 2n\pi \mid n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$
67. $\{\pm0.8861 + n\pi \mid n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ **69.** $|\operatorname{sen}\theta|$ **71.** $3|\tan\theta|$ **73.** $9|\sec\theta|$
75. Verdadero. Como secante es una función par, $\sec\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, que es igual a $\csc x$ por una de las identidades de cofunción.
77. D **79.** C
81. $\operatorname{sen} x$, $\cos x = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$, $\tan x = \pm\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$, $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, $\sec x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen2}\, x}}$, $\cot x = \pm\dfrac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x}$

83. Las dos funciones son paralelas entre ellas, separadas una unidad para cada x. En cualquier x, la distancia entre las dos gráficas es $\operatorname{sen}^2 x - (-\cos^2 x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.



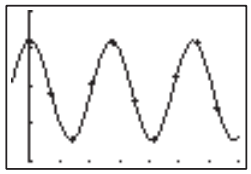
$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

85. a)



$[-6, 70]$ por $[220{,}000, 260{,}000]$

b) La ecuación es $y = 13{,}111 \operatorname{sen}(0.22997\, x + 1.571) + 238{,}855$



$[-6, 70]$ por $[220{,}000, 260{,}000]$

c) $(2\pi)/0.22998 \approx 27.32$ días. Éste es el número de días que tarda la Luna en completar una órbita alrededor de la Tierra (conocida como el periodo sideral de la luna).
d) 225,744 millas.
e) $y = 13{,}111\cos(-0.22997x) + 238855$, o $y = 13{,}111\cos(0.22997x) + 238855$.

87. Factorice el lado izquierdo: $\operatorname{sen}^4\theta - \cos^4\theta = (\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = (\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)\cdot 1 = \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$.
89. Utilice la sugerencia:

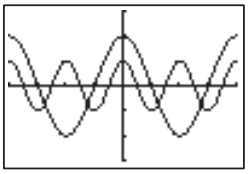
$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(\pi/2 - (x - \pi/2))$
$= \cos(x - \pi/2)$ Identidad de cofunción
$= \cos(\pi/2 - x)$ Ya que cos es par
$= \operatorname{sen} x$ Identidad de cofunción

91. Como A, B y C son ángulos de un triángulo, $A + B = \pi - C$. Así que: $\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}(\pi - C) = \operatorname{sen} C$.

SECCIÓN 5.2

Exploración 1

1. Las gráficas nos llevan a concluir que ésta no es una identidad. **3.** Sí.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

5. No. La ventana de la gráfica no puede mostrar las gráficas completas, así que podrían diferir fuera de la ventana de visualización. También, los valores de la función podrían ser tan cercanos que las gráficas *parece* que coinciden.

Repaso rápido 5.2

1. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x}$ **3.** $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$ **5.** 1 **7.** No. cualquier x negativa.

9. No. Cualquier x para la cual $\operatorname{sen} x < 0$, por ejemplo, $x = -\pi/2$. **11.** Sí.

Ejercicios 5.2

1. Una posible demostración: $\dfrac{x^3 - x^2}{x} - (x-1)(x+1) = \dfrac{x(x^2 - x)}{x} - (x^2 - 1) = x^2 - x - (x^2 - 1) = -x + 1 = 1 - x$

3. Una posible demostración: $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} - \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} - \dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x + 2 - (x - 3) = 5$ **5.** Sí. **7.** No **9.** Sí.

11. $(\cos x)(\tan x + \operatorname{sen} x \cot x) = \cos x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \cos x \operatorname{sen} x \cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x + \cos^2 x$

13. $(1 - \tan x)^2 = 1 - 2\tan x + \tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 2\tan x = \sec^2 x - 2\tan x$

15. $\dfrac{(1 - \cos u)(1 + \cos u)}{\cos^2 u} = \dfrac{1 - \cos^2 u}{\cos^2 u} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u} = \tan^2 u$ **17.** $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \dfrac{-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \operatorname{sen} x = -\tan x \operatorname{sen} x$

19. Multiplicar la expresión del lado izquierdo.

21. $(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t + \operatorname{sen} t)^2 = \cos^2 t - 2\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 2\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 + 2\operatorname{sen}^2 t = 2$

23. $\dfrac{1 + \tan^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \; 1 \; \text{cos}2\, x} = \dfrac{\sec^2 x}{1} = \sec^2 x$

25. $\dfrac{\cos \beta}{1 + \operatorname{sen} \beta} = \dfrac{\cos^2 \beta}{\cos \beta(1 + \operatorname{sen} \beta)} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 \beta}{\cos \beta(1 + \operatorname{sen} \beta)} = \dfrac{(1 - \operatorname{sen} \beta)(1 + \operatorname{sen} \beta)}{\cos \beta(1 + \operatorname{sen} \beta)} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$

27. $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec x + 1} = \sec x - 1 = \dfrac{1}{\cos x} - 1 = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

29. $\cot^2 x - \cos^2 x = \left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 - \cos^2 x = \dfrac{\cos^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \cos^2 x \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \cos^2 x \cot^2 x$

31. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 1(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

33. $(x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha)^2 + (x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha)^2 = (x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2xy \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + y^2 \cos^2 \alpha) + (x^2 \cos^2 \alpha - 2xy \cos \alpha \operatorname{sen} \sigma + y^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)$
$= x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha + x^2 \cos^2 \alpha + y^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = (x^2 + y^2)(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = x^2 + y^2.$

35. $\dfrac{\tan x}{\sec x - 1} = \dfrac{\tan x(\sec x + 1)}{\sec^2 x + 1} = \dfrac{\tan x(\sec x + 1)}{\tan^2 x} = \dfrac{\sec x + 1}{\tan x}$. También véase el #26.

37. $\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \dfrac{(\operatorname{sen} x - \cos x)(\operatorname{sen} x + \cos x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - (1 - \operatorname{sen}^2 x)}{1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x} = \dfrac{2 \operatorname{sen}^2 x - 1}{1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x}$

39. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t} + \dfrac{1 + \cos t}{\operatorname{sen} t} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 t + (1 + \cos t)(1 - \cos t)}{(\operatorname{sen} t)(1 - \cos t)} = \dfrac{1 - \cos^2 t + 1 - \cos^2 t}{(\operatorname{sen} t)(1 - \cos t)} = \dfrac{2(1 - \cos^2 t)}{(\operatorname{sen} t)(1 - \cos t)} = \dfrac{2(1 + \cos t)}{\operatorname{sen} t}$

41. $\operatorname{sen}^2 x \cos^3 x = \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x = \operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x) = (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x)(\cos x)$

43. $\cos^5 x = \cos^4 x \cos x = (\cos^2 x)^2 (\cos x) = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2(\cos x) = (1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x)(\cos x)$

45. $\dfrac{\tan x}{1 - \cot x} + \dfrac{\cot x}{1 - \tan x} = \dfrac{\tan x}{1 - \cot x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\cot x}{1 - \tan x} \cdot \dfrac{\cos x}{\cos x} = \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x/\cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} + \dfrac{\cos^2 x/\operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}\right)\dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x}$

$= \dfrac{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}{\operatorname{sen} x \cos x(\operatorname{sen} x - \cos x)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} + 1 = \csc x \sec x + 1$

47. $\dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} + \dfrac{1}{2\cos^2 x - 1} = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}$

$= \dfrac{2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)} = \dfrac{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2}{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)} = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

49. $\cos^3 x = (\cos^2 x)(\cos x) = (1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x)$

51. $\operatorname{sen}^5 x = (\operatorname{sen}^4 x)(\operatorname{sen} x) = (\operatorname{sen}^2 x)^2(\operatorname{sen} x) = (1 - \cos^2 x)^2(\operatorname{sen} x) = (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(\operatorname{sen} x)$ **53.** (d) **55.** (c) **57.** (b)

59. Verdadero. Si x está en el dominio de ambos lados de la ecuación, entonces $x \geq 0$. La ecuación se cumple para toda $x \geq 0$, así que es una identidad.

61. E **63.** B **65.** $\operatorname{sen} x$ **67.** 1 **69.** 1

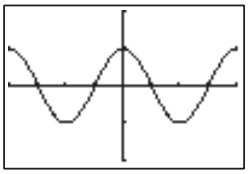
71. Si A y B son ángulos complementarios, entonces $\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B = \operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2(\pi/2 - A) = \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$.

73. Multiplicar y dividir entre $1 - \operatorname{sen} t$ bajo el radical: $\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t} \cdot \dfrac{1 - \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t}} = \sqrt{\dfrac{(1 - \operatorname{sen} t)^2}{1 + \operatorname{sen}^2 t}} = \sqrt{\dfrac{(1 - \operatorname{sen} t)^2}{\cos^2 t}} = \dfrac{|1 + \operatorname{sen} t|}{|\cos t|}$ ya que $\sqrt{a^2} = |a|$. Ahora, ya que $1 - \operatorname{sen} t \geq 0$, podemos quitar el valor absoluto en el numerador, pero debe dejarse en el denominador.

75. $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = (\operatorname{sen}^2 x)^3 + \cos^6 x = (1 - \cos^2 x)^3 + \cos^6 x = (1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x) + \cos^6 x = 1 - 3\cos^2 x(1 - \cos^2 x)$ $= 1 - 3\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x$.

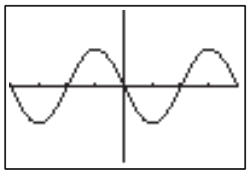
77. $\ln|\tan x| = \ln\dfrac{|\operatorname{sen} x|}{|\cos x|} = \ln|\operatorname{sen} x| - \ln|\cos x|$

79. (a) No son iguales. Se muestra en la ventana $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2, 2]$, al graficar cerca de cualquier ventana de visualización no muestra y_3 es una combinación de tres funciones sinusoidales de diferencias aparentes, pero usando TRACE uno encuentra que las coordenadas y no son idénticas. Además, una tabla de valores mostrará pequeñas diferencias; por ejemplo, cuando $x = 1$, $y_1 = 0.53988$ mientras que $y_2 = 0.54030$.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2, 2]$

(b) Una elección para h es 0.001 (la que se muestra). La función y_3 es una combinación de tres funciones sinusoidales (1,000 sen$(x + 0.001)$, 1,000 sen x y cos x), todas con periodo 2π.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-0.001, 0.001]$

81. En la ventana decimal, las coordenadas x usadas para graficar la gráfica en la calculadora son (por ejemplo) 0, 0.1, 0.2, 0.3, etcétera; es decir, $x = n/10$, donde n es un entero. Luego $10\pi x = \pi n$, y el seno de múltiplos enteros de π es 0, por lo tanto, $\cos x + \operatorname{sen} 10\pi x = \cos x + \operatorname{sen} \pi n = \cos x + 0 = \cos x$. Sin embargo, para otras elecciones de x, tal como $x = \dfrac{1}{\pi}$, tenemos $\cos x + \operatorname{sen} 10\pi x = \cos x + \operatorname{sen} 10 \neq \cos x$.

SECCIÓN 5.3

Exploración 1

1. No **3.** $\tan\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, $\tan\dfrac{\pi}{3} + \tan\dfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$. (Son posibles muchas otras respuestas.)

Repaso rápido 5.3

1. $45° - 30°$ **3.** $210° - 45°$ **5.** $2\pi/3 - \pi/4$ **7.** No. **9.** Sí.

Ejercicios 5.3

1. $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$ **3.** $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$ **5.** $(\sqrt{2}+\sqrt{6})/4$ **7.** $2+\sqrt{3}$ **9.** $(\sqrt{2}-\sqrt{6})/4$ **11.** sen 25° **13.** sen $7\pi/10$ **15.** tan 66°

17. $\cos\left(x-\frac{\pi}{7}\right)$ **19.** sen $2x$ **21.** tan $(2y+3x)$ **23.** $\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}x\cos\frac{\pi}{2}-\cos x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=\operatorname{sen}x\cdot 0-\cos x\cdot 1=-\cos x$

25. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=\cos x\cdot 0+\operatorname{sen}x\cdot 1=\operatorname{sen}x$

27. $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\operatorname{sen}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\frac{1}{2}$

29. $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan(\pi/4)}{1-\tan\theta\tan(\pi/4)}=\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta\cdot 1}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

31. Las ecuaciones b) y f).

33. Las ecuaciones d) y h). **35.** $x=n\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

37. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos u-\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}u=1\cdot\cos u-0\cdot\operatorname{sen}u=\cos u$

39. $\cot\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\frac{\cos(\pi/2-u)}{\operatorname{sen}(\pi/2-u)}=\frac{\operatorname{sen}u}{\cos u}=\tan u$, utilizando las primeras dos identidades de cofunción.

41. $\csc\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/2-u)}=\frac{1}{\cos u}=\sec u$, utilizando la segunda identidad de cofunción.

43. $y\approx 5\operatorname{sen}(x+0.9273)$ **45.** $y\approx 2.236\operatorname{sen}(3x+0.4636)$

47. $\operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(x+y)=(\operatorname{sen}x\cos y-\cos x\operatorname{sen}y)+(\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y)=2\operatorname{sen}x\cos y$

49. $\cos 3x=\cos[(x+x)+x]=\cos(x+x)\cos x-\operatorname{sen}(x+x)\operatorname{sen}x=(\cos x\cos x-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}x)\cos x-(\operatorname{sen}x\cos x+\cos x\operatorname{sen}x)\operatorname{sen}x=\cos^3 x-\operatorname{sen}^2 x\cos x-2\cos x\operatorname{sen}^2 x=\cos^3 x-3\operatorname{sen}^2 x\cos x$

51. $\cos 3x+\cos x=\cos(2x+x)+\cos(2x-x)$; utilice el ejercicio 48 con x reemplazada con $2x$ y y reemplazada con x.

53. $\tan(x+y)\tan(x-y)=\left(\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}\right)\cdot\left(\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}\right)=\frac{\tan^2 x-\tan^2 y}{1-\tan^2 x\tan^2 y}$ ya que numerador y denominador son formas factorizadas para la diferencia de cuadrados.

55. $\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x-y)}=\frac{\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}x\cos y-\cos x\operatorname{sen}y}=\frac{\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}x\cos y-\cos x\operatorname{sen}y}\cdot\frac{1/(\cos x\cos y)}{1/(\cos x\cos y)}$

$=\frac{(\operatorname{sen}x\cos y)/(\cos x\cos y)+(\cos x\operatorname{sen}y)/(\cos x\cos y)}{(\operatorname{sen}x\cos y)/(\cos x\cos y)-(\cos x\operatorname{sen}y)/(\cos x\cos y)}=\frac{(\operatorname{sen}x/\cos x)+(\operatorname{sen}y/\cos y)}{(\operatorname{sen}x/\cos x)-(\operatorname{sen}y/\cos y)}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$

57. Falso. Por ejemplo, $\cos 3\pi+\cos 4\pi=0$, pero 3π y 4π no son suplementarios.

59. A **61.** B

63. $\tan(u-v)=\frac{\operatorname{sen}(u-v)}{\cos(u-v)}=\frac{\operatorname{sen}u\cos v-\cos u\operatorname{sen}v}{\cos u\cos v+\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}=\frac{\frac{\operatorname{sen}u\cos v}{\cos u\cos v}-\frac{\cos u\operatorname{sen}v}{\cos u\cos v}}{\frac{\cos u\cos v}{\cos u\cos v}+\frac{\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}{\cos u\cos v}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}u}{\cos u}-\frac{\operatorname{sen}v}{\cos v}}{1+\frac{\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}{\cos u\cos v}}=\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\tan v}$

65. La identidad incluiría $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, que no existe. $\tan\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{\operatorname{sen}x\cos\frac{3\pi}{2}-\cos x\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}{\cos x\cos\frac{3\pi}{2}+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}$

$=\frac{\operatorname{sen}x\cdot 0-\cos x\cdot(-1)}{\cos x\cdot 0+\operatorname{sen}x\cdot(-1)}=-\cot x$

67. $\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{\cos x\cos h-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}h-\cos x}{h}=\frac{\cos x(\cos h-1)-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}h}{h}=\cos x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)-\operatorname{sen}x\frac{\operatorname{sen}h}{h}$

69. $\operatorname{sen}(A+B)=\operatorname{sen}(\pi-C)=\operatorname{sen}\pi\cos C-\cos\pi\operatorname{sen}C=0\cdot\cos C-(-1)\operatorname{sen}C=\operatorname{sen}C$.

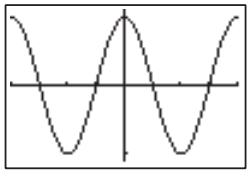
71. $\tan A + \tan B + \tan C = \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \dfrac{\operatorname{sen} B}{\cos B} + \dfrac{\operatorname{sen} C}{\cos C} = \dfrac{\operatorname{sen} A(\cos B \cos C) + \operatorname{sen} B(\cos A \cos C)}{\cos A \cos B \cos C} + \dfrac{\operatorname{sen} C(\cos A \cos B)}{\cos A \cos B \cos C}$

$= \dfrac{\cos C(\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B) + \operatorname{sen} C(\cos A \cos B)}{\cos A \cos B \cos C} = \dfrac{\cos C \operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen} C(\cos(A + B) + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B)}{\cos A \cos B \cos C}$

$= \dfrac{\cos C \operatorname{sen}(\pi - C) + \operatorname{sen} C(\cos(\pi - C) + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B)}{\cos A \cos B \cos C} = \dfrac{\cos C \operatorname{sen} C + \operatorname{sen} C(-\cos C) + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B \cos C}$

$= \dfrac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\cos A \cos B \cos C} = \tan A \tan B \tan C$

73. Esta ecuación es más sencilla de tratar después de rescribirla como $\cos 5x \cos 4x + \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 4x = 0$. El lado izquierdo de esta ecuación es la forma desarrollada de $\cos(5x - 4x)$, que, por supuesto, es igual a $\cos x$; la gráfica mostrada es simplemente $y = \cos x$. La ecuación $\cos x = 0$ se resuelve con facilidad en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$: $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ o $x = \pm\dfrac{3\pi}{2}$. La gráfica original está tan "apretada" que no puede verse en dónde ocurren los cruces. La ventana mostrada es $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.1, 1.1]$.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.1, 1.1]$

75. $B = B_{\text{en}} + B_{\text{ref}} = \dfrac{E_0}{c}\cos\left(\omega t - \dfrac{\omega x}{c}\right) + \dfrac{E_0}{c}\cos\left(\omega t + \dfrac{\omega x}{c}\right) = \dfrac{E_0}{c}\left[\cos\left(\omega t - \dfrac{\omega x}{c}\right) + \cos\left(\omega t + \dfrac{\omega x}{c}\right)\right]$

$= \dfrac{E_0}{c}\left(2\cos \omega t \cos\dfrac{\omega x}{c}\right) = 2\dfrac{E_0}{c}\cos \omega t \cos\dfrac{\omega x}{c}$

El penúltimo paso se deduce de la identidad del ejercicio 48.

SECCIÓN 5.4

Exploración 1

1. $\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1 - \cos(\pi/4)}{2} = \dfrac{1 - (\sqrt{2}/2)}{2} \cdot \dfrac{2}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$ **3.** $\operatorname{sen}^2\dfrac{9\pi}{8} = \dfrac{1 - \cos(9\pi/4)}{2} = \dfrac{1 - (\sqrt{2}/2)}{2} \cdot \dfrac{2}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$

Repaso rápido 5.4

1. $x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ **3.** $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

5. $x = -\dfrac{\pi}{4} + n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ **7.** $x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ o $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$ o $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2,$

9. 10 1/2 unidades cuadradas.

Ejercicios 5.4

1. $\cos 2u = \cos(u + u) = \cos u \cos u - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$.

3. Iniciando con el resultado del ejercicio 1: $\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = (1 - \operatorname{sen}^2 u) - \operatorname{sen}^2 u = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$ **5.** $0, \pi$ **7.** $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}$

9. $0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \pi, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$ **11.** $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta$ o $(\cos\theta)(2\operatorname{sen}\theta + 1)$

13. $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ o $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$

15. $\operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 2(2x) = 2\operatorname{sen} 2x \cos 2x$

17. $2\csc 2x = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x} = \dfrac{2}{2\operatorname{sen} x \cos x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \csc^2 x \tan x$

19. $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)\operatorname{sen} x = (\operatorname{sen} x)(4\cos^2 x - 1)$

21. $\cos 4x = \cos 2(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 2x = 1 - 2(2 \operatorname{sen} x \cos x)^2 = 1 - 8\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$

23. $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ **25.** $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$ **27.** $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$ **29.** $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 0.1\pi, 0.9\pi, 1.3\pi, 1.7\pi$

31. $(1/2)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ **33.** $(1/2)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ **35.** $-2 - \sqrt{3}$

37. a) Iniciando desde el lado derecho: $\frac{1}{2}(1 - \cos 2u) = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2\operatorname{sen}^2 u)] = \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}^2 u) = \operatorname{sen}^2 u.$

b) Iniciando en el lado derecho: $\frac{1}{2}(1 + \cos 2u) = \frac{1}{2}[1 + (2\cos^2 u - 1)] = \frac{1}{2}(2\cos^2 u) = \cos^2 u.$

39. $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 = \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right]^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4}\left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right]$

$= \frac{1}{8}(2 - 4\cos 2x + 1 + \cos 4x) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$ **41.** $\operatorname{sen}^3 2x = \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen}^2 2x = \operatorname{sen} 2x \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2x)(1 - \cos 4x)$

43. $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$; solución general: $\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ o $\pi + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

45. $0, \frac{\pi}{2}$; solución general: $2n\pi$ o $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

47. Falso. Por ejemplo, $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$ tiene periodo 2π y $g(x) = \cos x$ tiene periodo 2π, pero el producto $f(x)g(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$ tiene periodo π. **49.** D **51.** E

53. a) En la figura, el triángulo con lados de longitudes $x/2$ y R es un triángulo rectángulo, como R está dado como la distancia vertical. Entonces la tangente del ángulo $\theta/2$ es la razón "opuesto entre adyacente": $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{x/2}{R}$. Al resolver para x da la ecuación deseada. El ángulo central θ es $2\pi/n$, ya que una vuelta completa de 2π radianes se divide en n secciones.

b) $5.87 \approx 2R\tan\frac{\theta}{2}$, donde $\theta = \frac{2\pi}{11}$, así que $R \approx 5.87/\left(2\tan\frac{\pi}{11}\right) \approx 9.9957$, $R = 10$.

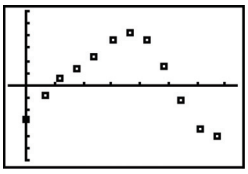
55. $\theta = \frac{\pi}{6}$; el valor máximo es alrededor de 12.99 pies^3.

57. $\csc 2u = \frac{1}{\operatorname{sen} 2u} = \frac{1}{2\operatorname{sen} u \cos u} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} u} \cdot \frac{1}{\cos u} = \frac{1}{2}\csc u \sec u$

59. $\sec 2u = \frac{1}{\cos 2u} = \frac{1}{1 - 2\operatorname{sen}^2 u} = \left(\frac{1}{1 - 2\operatorname{sen}^2 u}\right)\left(\frac{\csc^2 u}{\csc^2 u}\right) = \frac{\csc^2 u}{\csc^2 u - 2}$

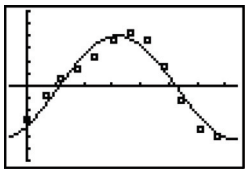
61. $\sec 2u = \frac{1}{\cos 2u} = \frac{1}{\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u} = \left(\frac{1}{\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u}\right)\left(\frac{\sec^2 u \csc^2 u}{\sec^2 u \csc^2 u}\right) = \frac{\sec^2 u \csc^2 u}{\csc^2 u - \sec^2 u}$

63. a)



[−30, 370] por [−60, 60]

b)



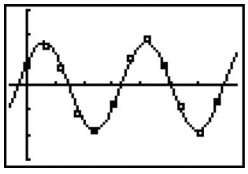
[−30, 370] por [−60, 60]

Éste es un buen ajuste, pero en realidad no es tan bueno como podría esperarse a partir de datos generados por un modelo físico sinusoidal.

$y = 41.656 \operatorname{sen}(0.015x - 0.825) - 1.473$

c) La lista residual: {3.64, 7.56, 3.35, −5.94, −9.35, −3.90, 5.12, 9.43, 3.90, −4.57, −9.72, −3.22}

d)



[−30, 370] por [−15, 15]

Éste es otro buen ajuste, el cual indica que los residuos no son debidos al cambio. Ésta es una variación periódica que es más probable que se deba a causas físicas.

e) La primera regresión indica que los datos son periódicos y casi sinusoidales. La segunda regresión indica que la *variación* de los datos alrededor de los valores previstos también es periódica y casi sinusoidal. La variación periódica alrededor de modelos periódicos es una consecuencia predecible de cuerpos que orbitan, pero los astrónomos de la antigüedad tenían dificultad para conciliar los datos con sus modelos más sencillos del universo.

$y = 8.856 \operatorname{sen}(0.0346x + 0.576) - 0.331$

SECCIÓN 5.5

Exploración 1

1. Si $BC \leq AB$, el segmento no alcanzará desde el punto B la línea punteada. Por otra parte, si $BC > AB$, entonces una circunferencia de radio BC intersecará a la línea punteada en un único punto (observe que la línea se extiende a la izquierda del punto A).
3. El segundo punto (C_2) es la reflexión del primer punto (C_1) del otro lado de la altura.
5. Si $BC \geq AB$, entonces BC sólo puede extenderse a la derecha de la altura, y, por tanto, determina un triángulo único.

Repaso rápido 5.5

1. bc/d **3.** ad/b **5.** 13.314 **7.** 17.458° **9.** 224.427°

Ejercicios 5.5

1. $C = 75°$; $a \approx 4.5$; $c \approx 5.1$ **3.** $B = 45°$; $b \approx 15.8$; $c \approx 12.8$
5. $C = 110°$; $a \approx 12.9$; $c \approx 18.8$
7. $C = 77°$; $a \approx 4.1$; $c \approx 7.3$ **9.** $B \approx 20.1°$; $C \approx 127.9°$; $c \approx 25.3$
11. $C \approx 37.2°$; $A \approx 72.8°$; $a \approx 14.2$ **13.** Cero. **15.** Dos. **17.** Dos **19.** $B_1 \approx 72.7°$; $C_1 \approx 43.3°$; $c_1 \approx 12.2$; $B_2 \approx 107.3°$; $C_2 \approx 8.7°$; $c_2 \approx 2.7$ **21.** $A_1 \approx 78.2°$; $B_1 \approx 33.8°$; $b_1 \approx 10.8$; $A_2 \approx 101.8°$; $B_2 \approx 10.2°$; $b_2 \approx 3.4$ **23. a)** $6.691 < b < 10$ **b)** $b \approx 6.691$ o $b \geq 10$ **c)** $b < 6.691$
25. a) No; éste es un caso LAL. **b)** No; sólo se dan dos partes de información. **27.** No se forma un triángulo. **29.** No se forma un triángulo.
31. $A = 99°$; $a \approx 28.3$; $b \approx 19.1$
33. $A_1 \approx 24.6°$; $B_1 \approx 80.4°$; $a_1 \approx 20.7$; $A_2 \approx 5.4°$; $B_2 \approx 99.6°$; $a_2 \approx 4.7$
35. No puede resolverse con la ley de los senos (un caso LAL).
37. a) 54.6 pies. **b)** 51.9 pies. **39.** ≈ 24.9 pies. **41.** 1.9 pies. **43.** ≈ 108.9 pies. **45.** 36.6 millas a A; 28.9 millas a B.
47. Verdadero. Mediante la ley de los senos, $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b}$, que es equivalente a $\dfrac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{a}{b}$.
49. C **51.** A
53. b) Respuestas posibles: $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2$ (o cualquier conjunto de tres números proporcionales a éstos).
c) Cualquier conjunto de tres números idénticos.
55. a) $h = AB \operatorname{sen} A$ **b)** $BC < AB \operatorname{sen} A$ **c)** $BC \geq AB$ o $BC = AB \operatorname{sen} A$ **d)** $AB \operatorname{sen} A < BC < AB$
57. $AC \approx 8.7$ millas; $BC \approx 12.2$ mi; $h \approx 5.2$ millas.

SECCIÓN 5.6

Exploración 1

1. 8475.742818 pasos^2. **3.** 0.0014714831 millas cuadradas.
5. La estimación de "un poco más de un acre" parece ser cuestionable, pero lo irregular de su sistema de medida no proporciona evidencia firme de que sea incorrecto. Si Jim y Bárbara desean plantear una discrepancia con el propietario, deberían obtener una buena asesoría para tener datos más confiables.

Repaso rápido 5.6

1. $A \approx 53.130°$ **3.** $A \approx 132.844°$
5. a) $\cos A = \dfrac{x^2 + y^2 - 81}{2xy}$ **b)** $A = \cos^{-1}\left(\dfrac{x^2 + y^2 - 81}{2xy}\right)$
7. Una respuesta: $(x - 1)(x - 2)$. **9.** Una respuesta $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$.

Ejercicios 5.6

1. $A \approx 30.7°$; $C \approx 18.3°$, $b \approx 19.2$ **3.** $A \approx 76.8°$; $B \approx 43.2°$, $C \approx 60°$
5. $B \approx 89.3°$; $C \approx 35.7°$, $a \approx 9.8$
7. $A \approx 28.5°$; $B \approx 56.5°$, $c \approx 25.1$ **9.** No hay triángulos posibles **11.** $A \approx 24.6°$; $B \approx 99.2°$, $C \approx 56.2$
13. $B_1 \approx 72.9°$; $C_1 \approx 65.1°$, $c_1 \approx 9.487$; $B_2 \approx 107.1°$; $C_2 \approx 30.9°$, $c_2 \approx 5.376$
15. No hay triángulo. **17.** ≈ 222.33 pies^2. **19.** ≈ 107.98 cm^2. **21.** ≈ 8.18 **23.** no se forma un triángulo. **25.** ≈ 216.15
27. ≈ 314.05 **29.** ≈ 1.445 radianes. **31.** ≈ 374.1 pulg^2 **33.** ≈ 498.8 pulg^2 **35.** ≈ 130.42 pies.

37. a) ≈ 42.5 pies. **b)** El segmento de *home* a segunda es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, así que la distancia desde el montículo del lanzador a la segunda base es $60\sqrt{2} - 40 \approx 44.9$ pies. **c)** $\approx 93.3°$

39. a) $\tan^{-1}(1/3) \approx 18.4°$ **b)** ≈ 4.5 pies. **c)** ≈ 7.6 pies.

41. ≈ 12.5 yardas. **43.** $\approx 37.9°$.

45. Verdadero. Por la ley de los cosenos, $b^2 + c^2 - 2bc\cos A = a^2$, que es un número positivo. Como $b^2 + c^2 - 2bc\cos A > 0$, implica que $b^2 + c^2 > 2bc\cos A$.

47. B **49.** C **51.** Área $= (nr^2/2)\,\text{sen}(360°/n)$

53. a) Barco A: $\dfrac{30.2 - 15.1}{1\text{ h}} = 15.1$ nudos; Barco B: $\dfrac{37.2 - 12.4}{2\text{ hrs}} = 12.4$ nudos **b)** $35.18°$ **c)** 34.8 mi. náuticas **55.** 6.9 pulg^2.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

1. $\text{sen}\,200°$ **3.** 1

5. $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \text{sen}\,2x\,\text{sen}\,x = (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\cos x - (2\,\text{sen}\,x\cos x)\,\text{sen}\,x$

$= \cos^3 x - 3\,\text{sen}^2 x\cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x = \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

7. $\tan^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen}^2 x\left(\dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right) = \text{sen}^2 x \cdot \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \text{sen}^2 x\tan^2 x$

9. $\csc x - \cos x\cot x = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} - \cos x \cdot \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \dfrac{1 - \cos^2 x}{\text{sen}\,x} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}\,x} = \text{sen}\,x$

11. $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} + \dfrac{1 + \cot\theta}{1 - \cot\theta} = \dfrac{(1 + \tan\theta)(1 - \cot\theta) + (1 + \cot\theta)(1 - \tan\theta)}{(1 - \tan\theta)(1 - \cot\theta)}$

$= \dfrac{(1 + \tan\theta - \cot\theta - 1) + (1 + \cot\theta - \tan\theta - 1)}{(1 - \tan\theta)(1 - \cot\theta)} = \dfrac{0}{(1 - \tan\theta)(1 - \cot\theta)} = 0$

13. $\cos^2\dfrac{t}{2} = \left[\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(1 + \cos t)}\right]^2 = \dfrac{1}{2}(1 + \cos t) = \left(\dfrac{1 + \cos t}{2}\right)\left(\dfrac{\sec t}{\sec t}\right) = \dfrac{1 + \sec t}{2\sec t}$

15. $\dfrac{\cos\phi}{1 - \tan\phi} + \dfrac{\text{sen}\,\phi}{1 - \cot\phi} = \left(\dfrac{\cos\phi}{1 - \tan\phi}\right)\left(\dfrac{\cos\phi}{\cos\phi}\right) + \left(\dfrac{\text{sen}\,\phi}{1 - \cot\phi}\right)\left(\dfrac{\text{sen}\,\phi}{\text{sen}\,\phi}\right) = \dfrac{\cos^2\phi}{\cos\phi - \text{sen}\,\phi} + \dfrac{\text{sen}^2\phi}{\text{sen}\,\phi - \cos\phi}$

$= \dfrac{\cos^2\phi - \text{sen}^2}{\cos\phi - \text{sen}\,\phi} = \cos\phi + \text{sen}\,\phi$

17. $\sqrt{\dfrac{1 - \cos y}{1 + \cos y}} = \sqrt{\dfrac{(1 - \cos y)^2}{(1 + \cos y)(1 - \cos y)}} = \sqrt{\dfrac{(1 - \cos y)^2}{1 - \cos^2 y}} = \sqrt{\dfrac{(1 - \cos y)^2}{\text{sen}^2 y}} = \dfrac{|\,1 - \cos y\,|}{|\,\text{sen}\,y\,|}$

$= \dfrac{1 - \cos y}{|\text{sen}\,y|}$; ya que $1 - \cos y \geq 0$, podemos quitar el valor absoluto.

19. $\tan\left(u + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan u + \tan(3\pi/4)}{1 - \tan u\tan(3\pi/4)} = \dfrac{\tan u + (-1)}{1 - \tan u\,(-1)} = \dfrac{\tan u - 1}{1 + \tan u}$

21. $\tan\dfrac{1}{2}\beta = \dfrac{1 - \cos\beta}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{1}{\text{sen}\,\beta} - \dfrac{\cos\beta}{\text{sen}\,\beta} = \csc\beta - \cot\beta$

23. Sí: $\sec x - \text{sen}\,x\tan x = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x$

25. Hay muchas respuestas posibles, por ejemplo, $(\cos x - \text{sen}\,x)(1 + 4\,\text{sen}\,x\cos x)$. **27.** Hay muchas respuestas posibles, por ejemplo, $1 - 4\,\text{sen}^2 x\cos^2 x - 2\,\text{sen}\,x\cos x$.

29. $\dfrac{\pi}{12} + n\pi$ o $\dfrac{5\pi}{12} + n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

31. $-\dfrac{\pi}{4} + n\pi$ **33.** $\tan 1$ **35.** $x \approx 1.12$ **37.** $x \approx 1.15$ **39.** $\pi/3, 5\pi/3$

41. $\frac{3\pi}{2}$ **43.** No hay soluciones.

45. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$ **47.** $(\pi/3, 5\pi/3)$ **49.** $y \approx 5 \operatorname{sen}(3x + 0.9273)$

51. $C = 68°$, $b \approx 3.9$, $c \approx 6.6$ **53.** No se forma un triángulo. **55.** $C = 72°$; $a \approx 2.9$, $b \approx 5.1$ **57.** $A \approx 44.4°$, $B \approx 78.5°$, $C \approx 57.1°$

59. ≈ 7.5 **61. a)** $\approx 5.6 < b < 12$ **b)** $b \approx 5.6$ o $b \geq 123$ **c)** $b < 5.6$

63. ≈ 0.6 mi **65.** 1.25 rad.

67. a) $\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta$ **b)** $\theta = 60°$; ≈ 1.30 unidades cuadradas.

69. a) $h = 4{,}000 \sec\frac{\theta}{2} - 4{,}000$ millas **b)** $\approx 35.51°$

71. Área del círculo $-$ área del hexágono $= 256\pi - 6 \cdot 64\sqrt{3} \approx 139.140$ cm^2

73. $405\pi/24 \approx 53.01$ cm^3.

75. a) Por la fórmula del producto a suma del ejercicio 74c, $2 \operatorname{sen}\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$

$= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{u+v+u-v}{2} + \operatorname{sen}\frac{u+v-(u-v)}{2}\right) = \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v$

b) Por la fórmula del producto a suma del ejercicios 74c, $2 \operatorname{sen}\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{u-v+u+v}{2} + \operatorname{sen}\frac{u-v-(u+v)}{2}\right)$

$= \operatorname{sen} u + \operatorname{sen}(-v) = \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v$ **c)** Por la fórmula del producto a suma del ejercicio 74b, $2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$

$= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\cos\frac{u+v-(u-v)}{2} + \cos\frac{u+v+u-v}{2}\right) = \cos v + \cos u = \cos u + \cos v$ **d)** Por la fórmula del producto a suma del

ejercicio 74a, $-2 \operatorname{sen}\frac{u+v}{2}\operatorname{sen}\frac{u-v}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2}\left(\cos\frac{u+v-(u-v)}{2} - \cos\frac{u+v+u-v}{2}\right) = -(\cos v - \cos u) = \cos u - \cos v$

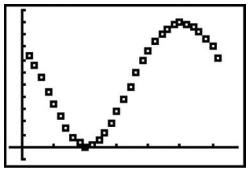
77. a) Cualquier ángulo inscrito que interseque un arco de 180° es un ángulo recto.

b) Dos ángulos inscritos que intersecan al mismo arco son congruentes. **c)** En el triángulo rectángulo $\triangle A'BC$, $\operatorname{sen} A' = \frac{\text{op.}}{\text{hip.}} = \frac{a}{d}$.

d) Ya que $\angle A'$ y $\angle A$ son congruentes, $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} A'}{a} = \frac{a/d}{a} = \frac{1}{d}$. **e)** Por supuesto. Ambas son iguales a $\frac{\operatorname{sen} A}{a}$ por la ley de los senos.

Capítulo 5 Proyecto

1.



$[-2, 34]$ por $[-0.1, 1.1]$

5. Un modelo posible es $y = 0.493 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{29.36}(x + 11.654)\right) + 0.533$.

SECCIÓN 6.1

Exploración 1

1. $\langle 5, 2\rangle$ **3.** $\langle 6, -7\rangle$

Repaso rápido 6.1

1. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$; 4.5 **3.** −5.36; −4.50 **5.** 33.85° **7.** 60.95° **9.** $180° + \tan^{-1}(5/2) \approx 248.20°$

Ejercicios 6.1

1. Ambos vectores representan a $\langle 3, -2\rangle$ por la regla TMI. **3.** Ambos vectores representan a $\langle -2, -2\rangle$ por la regla de TMI. **5.** $\langle 5, 2\rangle$; $\sqrt{29}$
7. $\langle -5, 1\rangle$; $\sqrt{26}$ **9.** $\langle -2, -24\rangle$; $2\sqrt{145}$ **11.** $\langle -11, -7\rangle$; $\sqrt{170}$ **13.** $\langle 1, 7\rangle$ **15.** $\langle -3, 8\rangle$ **17.** $\langle 4, -9\rangle$ **19.** $\langle -4, -18\rangle$
21. $\approx -0.45\mathbf{i} + 0.89\mathbf{j}$ **23.** $\approx -0.45\mathbf{i} - 0.89\mathbf{j}$

25. a) $\left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$ **b)** $\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$ **27. a)** $\left\langle -\frac{4}{\sqrt{41}}, -\frac{5}{\sqrt{41}} \right\rangle$ **b)** $-\frac{4}{\sqrt{41}}\mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{41}}\mathbf{j}$

29. $\approx \langle 16.31, 7.61\rangle$ **31.** $\approx \langle -14.52, 44.70\rangle$ **33.** 5; ≈ 53.13° **35.** 5; ≈ 306.87° **37.** 7; 135° **39.** $\langle \sqrt{2}, -\sqrt{2}\rangle$
41. $\approx \langle -223.99, 480.34\rangle$ **43. a)** $\approx \langle -111.16, 305.40\rangle$ **b)** ≈ 362.85 mph, rumbo ≈ 337.84°. **45. a)** $\approx \langle 3.42, 9.40\rangle$
b) La componente horizontal es la rapidez horizontal (constante) del balón de baloncesto cuando viaja hacia la canasta. La componente vertical es la velocidad vertical del balón de baloncesto, afectada por la rapidez inicial y el jalón hacia abajo debido a la gravedad.
47. $\approx \langle 2.20, 1.43\rangle$ **49.** $|\mathbf{F}| \approx 100.33$ lb y $\theta \approx -1.22°$ **51.** ≈ 342.86°; ≈ 9.6 mph. **53.** ≈ 13.66 mph; ≈ 7.07 mph.
55. Verdadero, $\mathbf{u}$ y $-\mathbf{u}$ tienen la misma longitud pero en direcciones opuestas. Así, la longitud de $-\mathbf{u}$, también es 1. **57.** D **59.** A

SECCIÓN 6.2

Exploración 1

1. $\langle -2 - x, -y\rangle, \langle 2 - x, -y\rangle$ **3.** Las respuestas varían.

Repaso rápido 6.2

1. $\sqrt{13}$ **3.** 1 **5.** $\langle 3, \sqrt{3}\rangle$ **7.** $\langle -1, -\sqrt{3}\rangle$ **9.** $\left\langle \frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}} \right\rangle$

Ejercicios 6.2

1. 72 **3.** −47 **5.** 30 **7.** −14 **9.** 13 **11.** 4 **13.** ≈ 115.6° **15.** ≈ 64.65° **17.** 165° **19.** 135° **21.** ≈ 94.86°

25. $-\frac{21}{10}\langle 3, 1\rangle$; $-\frac{21}{10}\langle 3, 1\rangle + \frac{17}{10}\langle -1, 3\rangle$ **27.** $\frac{82}{85}\langle 9, 2\rangle$; $\frac{82}{85}\langle 9, 2\rangle + \frac{29}{85}\langle -2, 9\rangle$ **29.** 47.73°, 74.74°, 57.53° **31.** ≈ −20.78

33. Paralelos **35.** Ninguno **37.** Ortogonales **39. a)** (4, 0) y (0, −3) **b)** (4.6, −0.8) o (3.4, 0.8) **41. a)** (7, 0) y (0, −3)

b) ≈ (7.39, −0.92) o (6.61, 0.92) **43.** $\langle -1, 4\rangle$ o $\left\langle \frac{53}{13}, \frac{8}{13} \right\rangle$ **45.** ≈ 138.56 libras. **47. a)** ≈ 415.82 libras. **b)** ≈ 1956.30 libras.

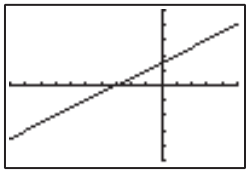
49. 14,300 libras-pie. **51.** ≈ 21.47 libras-pie. **53.** ≈ 85.30 libras-pie. **55.** $100\sqrt{39} \approx 624.5$ libras-pie. **61.** Falso. Si uno de $\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$ es el vector cero, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, pero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son perpendiculares. **63.** D **65.** A

67. a) $2 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 10$ y $2 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 10$ **b)** $\frac{5}{29}\langle 5, -2\rangle$; $\frac{1}{29}\langle 62, 155\rangle$ **c)** $|\mathbf{w}_2| = \frac{31\sqrt{29}}{29}$ **d)** $d = \frac{|2x_0 + 5y_0 - 10|}{\sqrt{29}}$
e) $d = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

SECCIÓN 6.3

Exploración 1

1.

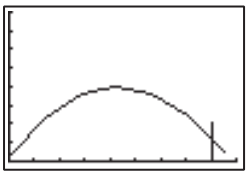


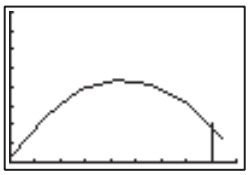
[−10, 5] por [−5, 5]

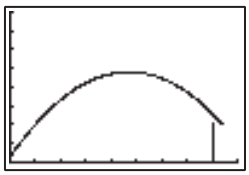
3. $t = 12$ **5.** Tmin ≤ −2 y Tmax ≥ 5.5

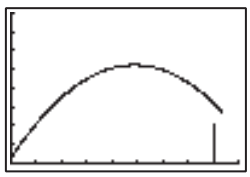
Exploración 2

3.


[0, 450] por [0, 80]


[0, 450] por [0, 80]

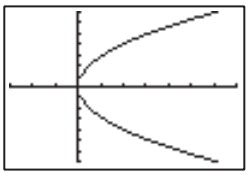

[0, 450] por [0, 80]


[0, 450] por [0, 80]

Repaso rápido 6.3

1. a) $\langle -3, -2\rangle$ **b)** $\langle 4, 6\rangle$ **c)** $\langle 7, 8\rangle$ **3.** $y + 2 = \frac{8}{7}(x + 3)$ o $y - 6 = \frac{8}{7}(x - 4)$

5.


[−3, 7] por [−7, 7]

7. $x^2 + y^2 = 4$ **9.** 20π rad/seg

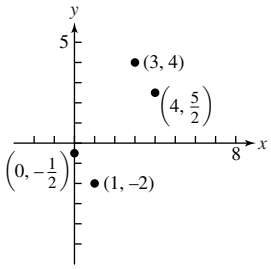
Ejercicios 6.3

1. b) [−5, 5] por [−5, 5] **3. a)** [−5, 5] por [−5, 5]

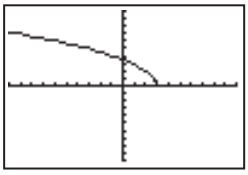
5. a)

t	−2	−1	0	1	2
x	0	1	2	3	4
y	1/2	−2	indef.	4	5/2

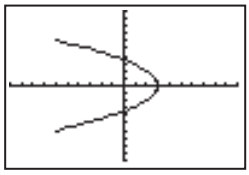
5. b)



7.


[−10, 10] por [−10, 10]

9.


[−10, 10] por [−10, 10]

11. $y = x - 1$; la recta pasa por (0, −1) y (1, 0). **13.** $y = -2x + 3$, $3 \le x \le 7$; el segmento de recta con extremos (3, −3) y (7, −11). **15.** $x = (y - 1)^2$; parábola que abre hacia la derecha con vértice en (0, 1). **17.** $y = x^3 - 2x + 3$; polinomio cúbico.

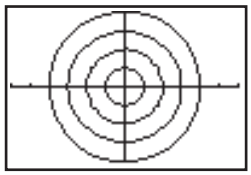
19. $x = 4 - y^2$ parábola que abre hacia la izquierda con vértice en (4, 0). **21.** $t = x + 3$, así que $y = \dfrac{2}{x + 3}$, sobre el dominio $[-8, -3) \cup (-3, 2]$. **23.** $x^2 + y^2 = 25$, circunferencia de radio 5 y con centro en (0, 0). **25.** $x^2 + y^2 = 4$, tres cuartos de una circunferencia de radio 2 con centro en (0, 0) (no en el segundo cuadrante). **27.** $x = 6t - 2$; $y = -3t + 5$.

29. $x = 3t + 3$, $y = 4 - 7t$, $0 \le t \le 1$. **31.** $x = 5 + 3\cos t$, $y = 2 + 3\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi>$ **33.** $0.5 < t < 2$

35. $-3 \le t < -2$ **37. b)** Ben está adelante por 2 pies. **39. a)** $y = -16t^2 + 1{,}000$ **c)** 744 pies **41. a)** $0 < t < \pi/2$ **b)** $0 < t < \pi$ **c)** $\pi/2 < t < 3\pi/2$ **43. a)** Alrededor de 2.80 seg. **b)** $\approx$ 7.18 pies **45. a)** sí **b)** 1.59 pies **47.** no

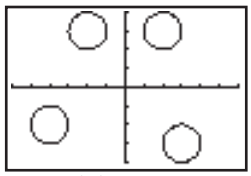
49. $v \approx -10.00$ pies/seg o 551.20 pies/seg. **51.** $x = 35\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$ y $y = 50 + 35\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$ **53. a)** Cuando $t = \pi$ (o 3π, o 5π, etcétera), $y = 2$. Esto corresponde a los puntos más altos en la gráfica. **b)** 2π unidades **55.** No hay respuesta. **57.** No hay respuesta. **59.** Verdadero. Ambas corresponden a la ecuación rectangular $y = 3x + 4$. **61.** A **63.** D

65. a)



[−6, 6] por [−4, 4]

b) a **c)**



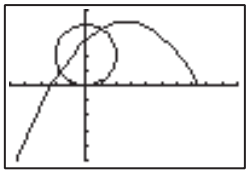
[−6, 6] por [−4, 4]

d) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$; circunferencia de radio a con centro en (h, k).

e) $x = 3\cos t - 1$; $y = 3\operatorname{sen} t + 4$

67. a) Jane esta viajando en un círculo de radio de 20 pies y origen en (0, 20), que da $x_1 = 20\cos(nt)$ y $y_1 = 20 + 20\operatorname{sen}(nt)$. Como la rueda de la fortuna está dando una vuelta (2π) cada 12 seg, $2\pi = 12n$, así que $n = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$. Por tanto, $x_1 = 20\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$ y $y_1 = 20 + 20\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$, en modo de radianes. **b)** Como la pelota se suelta en 75 pies en la dirección positiva del eje x y la gravedad actúa en la dirección negativa y a 16 pies/s^2, tenemos $x_2 = at + 75$ y $y_2 = -16t^2 + bt$, donde a es la rapidez inicial de la pelota en la dirección x y b es la rapidez inicial de la pelota en la dirección y. El vector velocidad inicial de la pelota es $60\langle\cos 120°, \operatorname{sen} 120°\rangle = \langle -30, 30\sqrt{3}\rangle$, así que $a = -30$ y $b = 30\sqrt{3}$. Como resultado, $x_2 = -30t + 75$ y $y_2 = -16t^2 + (30\sqrt{3})t$ son las ecuaciones paramétricas para la pelota.

c)



[−50, 100] por [−50, 50]

Jane y la pelota estarán cercanas, pero no en el mismo punto, exactamente en $t = 2.2$ seg.

d) $d(t) = \sqrt{\left(20\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) + 30t - 75\right)^2 + \left(20 + 20\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) + 16t^2 - 30\sqrt{3}t\right)^2}$

e) La distancia mínima ocurre en $t \approx 2.2$ seg, cuando $d(t) \approx 1.64$ pies. Jane tendrá una buena oportunidad de atrapar la pelota.

69. Alrededor de 4.11 pies. **71. a)** No hay respuesta. **b)** No hay respuesta. **73.** $t = \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$; $t = \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}$

SECCIÓN 6.4

Exploración 1

1. No hay respuesta. **3.** $(-2, \pi/3)$, $(2, \pi/2)$, $(3, 0)$, $(1, \pi)$, $(4, 3\pi/2)$

Repaso rápido 6.4

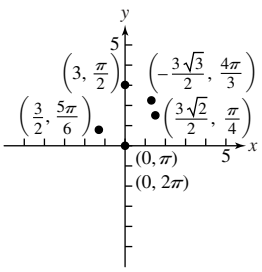
1. a) II **b)** III **3.** $7\pi/4, -9\pi/4$ **5.** $520°, -200°$ **7.** $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ **9.** ≈ 11.14

Ejercicios 6.4

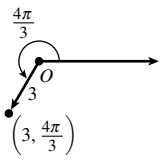
1. $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ **3.** $(-1, -\sqrt{3})$ **5. a)**

θ	$\pi/4$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π	$4\pi/3$	2π
r	$3\sqrt{2}/2$	3	3/2	0	$-3\sqrt{3}/2$	0

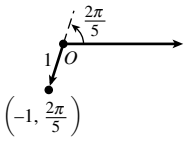
b)



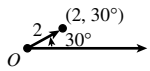
7.



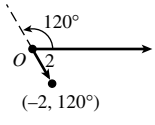
9.



11.



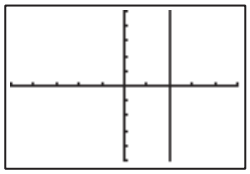
13.



15. $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}\sqrt{3}\right)$ **17.** $(-2.70, 1.30)$ **19.** $(2, 0)$ **21.** $(0, -2)$ **23.** $\left(2, \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi\right)$ y $\left(-2, \dfrac{\pi}{6} + (2n + 1)\pi\right)$, n un entero.

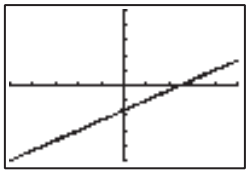
25. $(1.5, -20° + 360n°)$ y $(-1.5, 160° + 360n°)$, n un entero. **27. a)** $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ o $\left(-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ **b)** $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ o $\left(-\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$ **c)** Las respuestas de la parte (a) y también $\left(\sqrt{2}, \frac{9\pi}{4}\right)$ o $\left(-\sqrt{2}, \frac{13\pi}{4}\right)$. **29. a)** $(\sqrt{29}, 1.95)$ o $(-\sqrt{29}, 5.09)$ **b)** $(-\sqrt{29}, -1.19)$ o $(\sqrt{29}, 1.95)$ **c)** Las respuestas de la parte a), además de $(\sqrt{29}, 8.23)$ o $(-\sqrt{29}, 11.38)$ **31.** (b) **33.** (c) **35.** $x = 3$ — una recta vertical. **37.** $x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ — una circunferencia con centro en $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ y radio $\frac{3}{2}$ **39.** $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; una circunferencia con centro en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}$ **41.** $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ —una circunferencia con centro en $(-2, 1)$ y radio $\sqrt{5}$

43. $r = 2/\cos\theta = 2 \sec\theta$



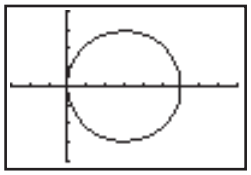
[–5, 5] por [–5, 5]

45. $r = \dfrac{5}{2\cos\theta - 3\operatorname{sen}\theta}$



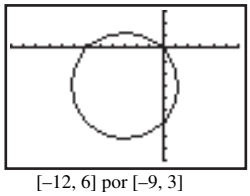
[–5, 5] por [–5, 5]

47. $r^2 - 6r\cos\theta = 0$, por lo que $r = 6\cos\theta$



[–3, 9] por [–4, 4]

49. $r^2 + 6r\cos\theta + 6r\operatorname{sen}\theta = 0$, por lo que $r = -6\cos\theta - 6\operatorname{sen}\theta$



[–12, 6] por [–9, 3]

51. $2\sqrt{3} \approx 3.46$ mi **53.** $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{5\pi}{4}\right)$, y $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{7\pi}{4}\right)$

55. Falso. $(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$ para cualquier entero n. Todas éstas son distintas coordenadas polares. **57.** C **59.** A

61. a) Si $\theta_1 - \theta_2$ es un múltiplo entero impar de π, entonces la distancia es $|r_1 + r_2|$. Si $\theta_1 - \theta_2$ es un múltiplo entero par de π, entonces la distancia es $|r_1 - r_2|$. **b)** Considere el triángulo formado por O_1, P_1 y P_2, de manera que el ángulo en el origen sea menor que 180 grados. Por la ley de los cosenos $\overline{P_1P_2} = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - 2 \cdot \overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2}\cos\theta$ donde θ es el ángulo entre $\overline{OP_1}$ y $\overline{OP_2}$. En coordenadas polares la fórmula es $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$ en donde también se puede usar $(\theta_2 - \theta_1)$ porque $(\theta_2 - \theta_1) = (\theta_1 - \theta_2)$, así que $d\sqrt{= r_1^2\ 1\ r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$. **63.** ≈ 6.24 **65.** ≈ 7.43 **67.** $x = f(\theta)\cos(\theta)$, $y = f(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$ **69.** $x = 5(\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)$, $y = 5\operatorname{sen}^2\theta$ **71.** $x = 4\cot\theta$, $y = 4$

SECCIÓN 6.5

Repaso rápido 6.5

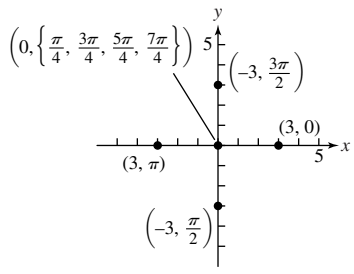
1. Mínimo: -3 en $x = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; Máximo: 3 en $x = \{0, \pi, 2\pi\}$ **3.** Mínimo: 0 en $x = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$; Máximo: 2 en $x = \{0, \pi, 2\pi\}$ **5.** No; no; sí **7.** $\operatorname{sen}\theta$ **9.** $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

Ejercicios 6.5

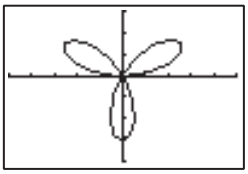
1. a)

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
r	3	0	−3	0	3	0	−3	0

b)

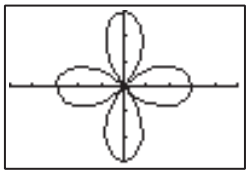


3. $k = \pi$



[−5, 5] por [−4, 3]

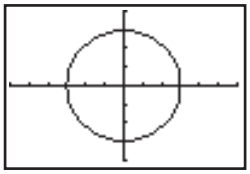
5. $k = 2\pi$



[−5, 5] por [−3, 3]

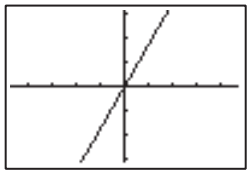
7. r_3 es la gráfica (b) **9.** La gráfica (b) es $r = 2 - 2\cos\theta$ **11.** La gráfica (a) es $r = 2 - 2\operatorname{sen}\theta$ **13.** Simétrica con respecto del eje y. **15.** Simétrica con respecto del eje x. **17.** Las tres simetrías. **19.** Simétrica con respecto del eje y. **21.** Máximo r es 5 −cuando $\theta = 2n\pi$ para cualquier entero n. **23.** Máximo r es 3 (junto con −3) −cuando $\theta = 2n\pi/3$ para cualquier entero n.

25. Dominio: Todos los reales
Rango: $r = 3$
Continua
Simétrica con respecto del eje x, eje y y origen
Acotada
Valor r máximo: 3
No tiene asíntotas



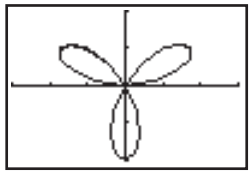
[−6, 6] por [−4, 4]

27. Dominio: $\theta = \pi/3$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Continua
Simétrica con respecto del origen
No acotada
Valor r máximo: ninguno
No tiene asíntotas



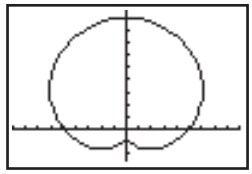
[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

29. Dominio: Todos los reales
Rango: [−2, 2]
Continua
Simétrica con respecto del eje y
Acotada
Valor r máximo: 2
No tiene asíntotas



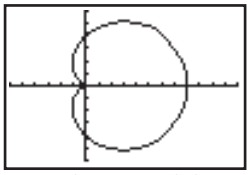
[−3, 3] por [−2, 2]

31. Dominio: Todos los reales Rango: [1, 9]
Continua
Simétrica con respecto del eje y
Acotada
Valor r máximo: 9
No tiene asíntotas



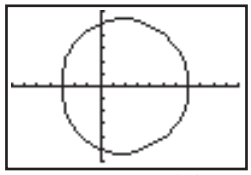
[−9, 9] por [−2.5, 9.5]

33. Dominio: Todos los reales
Rango: [0, 8]
Continua
Simétrica con respecto del eje x
Acotada
Valor r máximo: 8
No tiene asíntotas



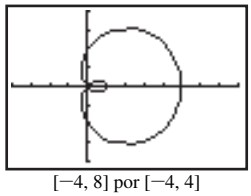
[−6, 12] por [−6, 6]

35. Dominio: Todos los reales
Rango: [3, 7]
Continua
Simétrica con respecto del eje x
Acotada
Valor r máximo: 7
No tiene asíntotas



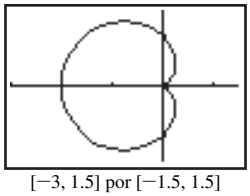
[−7, 11] por [−6, 6]

37. Dominio: Todos los reales
Rango: [−3, 7]
Continua
Simétrica con respecto del eje x
Acotada
Valor r máximo: 7
No tiene asíntotas



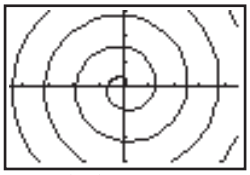
[−4, 8] por [−4, 4]

39. Dominio: Todos los reales Rango: [0, 2]
Continua
Simétrica con respecto del eje x
Acotada
Valor r máximo: 2
No tiene asíntotas



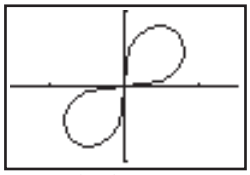
[−3, 1.5] por [−1.5, 1.5]

41. Dominio: Todos los reales
Rango: [0, ∞)
Continua
No tiene simetría
No acotada
Valor r máximo: ninguno
No tiene asíntotas
Gráfica para $\theta \geq 0$:



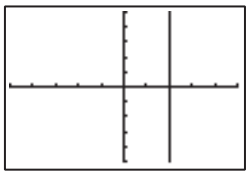
[−45, 45] por [−30, 30]

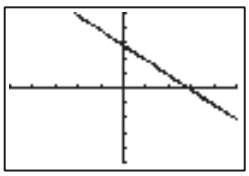
43. Dominio: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$
Rango: [0, 1]
Continua en su dominio
Simétrica con respecto del origen
Acotada
Valor r máximo: 1
No tiene asíntotas

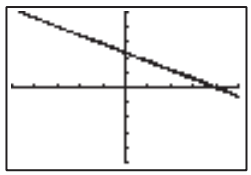


[−1.5, 1.5] por [−1, 1]

45. $\{6, 2, 6, 2\}$ **47.** $\{3, 5, 3, 5, 3, 5, 3, 5, 3, 5\}$ **49.** r_1 y r_2 **51.** r_2 y r_3 **53. a)** Una rosa de 4 pétalos con dos pétalos cortos de longitud 1 y dos pétalos de longitud 3. **b)** Simétrica con respecto del origen. **c)** Valor máximo de r: 3. **55. a)** Una rosa de 6 pétalos con tres pétalos cortos de longitud 2 y tres pétalos de longitud 4. **b)** Simétrica con respecto del eje x. **c)** Valor máximo de r: 4.
57. No hay respuesta. **59.** No hay respuesta. **61.** Falso. La espiral $r = \theta$ no es acotada. **63.** D **65.** B
67. e) Dominio: Todos los reales
Rango: $[-|a|, |a|]$
Continua
Simétrica con respecto del eje x
Acotada
Valor máximo de r: $|a|$
No tiene asíntotas
69. a) Para r_1: $0 \le \theta \le 4\pi$ (o cualquier intervalo de longitud 4π). Para r_2: la misma respuesta. **b)** r_1: 10 pétalos (traslapados)
r_2: 14 pétalos (traslapados)
71. Iniciando con la gráfica de r_1, si giramos en contra de las manecillas del reloj (con centro en el origen) $\pi/4$ radianes (45°), obtenemos la gráfica de r_2; al rotar r_1 $\pi/3$ radianes (60°) en contra de las manecillas del reloj) se obtiene la gráfica de r_3.


[−5, 5] por [−5, 5]


[−5, 5] por [−5, 5]


[−5, 5] por [−5, 5]

73. No hay respuesta.

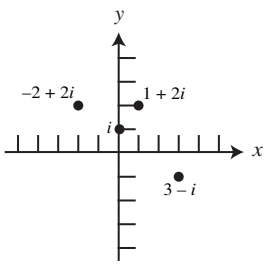
SECCIÓN 6.6

Repaso rápido 6.6

1. $2 + 3i,\ 2 - 3i$ **3.** $-4 - 4i$ **5.** $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ **7.** $\dfrac{4\pi}{3}$ **9.** 1

Ejercicios 6.6

1.



3. $3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ **5.** $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$ **7.** $4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ **9.** $\approx \sqrt{13}(\cos 0.59 + i\,\text{sen}\,0.59)$
11. $3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$ **13.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$ **15.** $5/2 - (5/2)\sqrt{3}i$ **17.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ **19.** $14\,(\cos 155° + i\,\text{sen}\,155°)$
21. $15\left(\cos\dfrac{23\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{23\pi}{12}\right)$ **23.** $\dfrac{2}{3}(\cos 30° - i\,\text{sen}\,30°)$ **25.** $2(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$ **27. a)** $5 + i; \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}i$ **b)** Igual que en la parte a).
29. a) $18 - 4i; \approx 0.35 + 0.41i$ **b)** Igual que en la parte a) **31.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **33.** $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ **35.** $-4 - 4i$ **37.** -8
39. $\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{\sqrt[3]{4}}; \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{\sqrt[3]{4}}; \sqrt[3]{2}$ **41.** $\sqrt[3]{3}\left(\cos\dfrac{4\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\dfrac{4\pi}{9}\right), \sqrt[3]{3}\left(\cos\dfrac{10\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\dfrac{10\pi}{9}\right), \sqrt[3]{3}\left(\cos\dfrac{16\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\dfrac{16\pi}{9}\right)$

43. $\approx \sqrt[3]{5}(\cos 1.79 + i \operatorname{sen} 1.79), \approx \sqrt[3]{5}(\cos 3.88 + i \operatorname{sen} 3.88), \approx \sqrt[3]{5}(\cos 5.97 + i \operatorname{sen} 5.97)$

45. $\cos\frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}, \cos\frac{3\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}, -1, \cos\frac{7\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{5}, \cos\frac{9\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{5}$

47. $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{30} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{30}\right), \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{30} + i \operatorname{sen}\frac{13\pi}{30}\right), \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right), \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{30} + i \operatorname{sen}\frac{37\pi}{30}\right),$
$\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{49\pi}{30} + i \operatorname{sen}\frac{49\pi}{30}\right)$

49. $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\right), \sqrt[5]{2}i, \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{10} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{10}\right), \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{10} + i \operatorname{sen}\frac{13\pi}{10}\right), \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{10} + i \operatorname{sen}\frac{17\pi}{10}\right)$

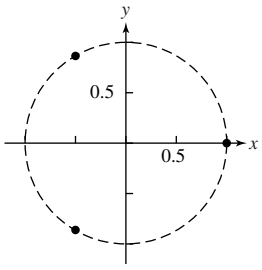
51. $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{16}\right), \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{16}\right), \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{17\pi}{16}\right), \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{25\pi}{16}\right)$

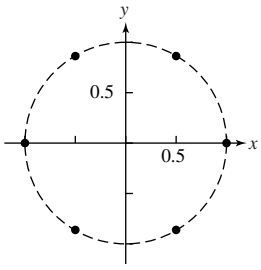
53. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right), -1 + i, \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{17\pi}{12}\right)$

55. $\frac{1+i}{\sqrt[6]{4}}, \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\right), \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}\right), \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right), \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}\right),$
$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{23\pi}{12}\right)$

57. $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

59. $\pm 1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$





61. $-8; -2$ y $1 \pm \sqrt{3}i$

65. Falso. Por ejemplo, el número complejo $1 + i$ tiene un número infinito de formas trigonométrica. Dos de ellas son

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{4}\right)$.

67. B **69.** A

71. **a)** No hay respuesta. **b)** r^2 **c)** $\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)$ **d)** No hay respuesta.

73. Configure su calculadora para redondear a 2 decimales. En la parte b), utilice el modo Degree (Grados).

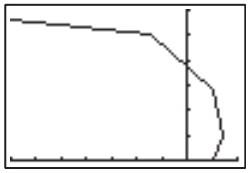
a)
```
25√(2)*(cos(⁻π/4
)+isin(⁻π/4))*14
*(cos(π/3)+isin(
π/3))
   478.11+128.11i
```

b)
```
2√(2)*(cos(135)+
isin(135))/(6*(c
os(300)+isin(300
)))
          -.46-.12i
```

c)
```
(cos(3π/4)+isin(
3π/4))^8
  1.00+2.00E-13i
```

75. $x(t) = (\sqrt{3})^t \cos(0.62t)$

$y(t) = (\sqrt{3})^t \operatorname{sen}(0.62t)$



[−7, 2] por [0, 6]

79. $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

81. $-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

83. $-1, \approx 0.81 + 0.59i, 0.81 - 0.59i, -0.31 + 0.95i, -0.31 - 0.95i$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

1. $\langle -2, -3\rangle$ **3.** $\sqrt{37}$ **5.** 6 **7.** $\langle 3, 6\rangle$; $3\sqrt{5}$ **9.** $\langle -8, -3\rangle$; $\sqrt{73}$ **11. a)** $\left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle$ **b)** $\left\langle \frac{6}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right\rangle$

13. a) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.64$, $\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1.19$ **b)** ≈ 0.55 **15.** $\approx (-2.27, -1.06)$ **17.** $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

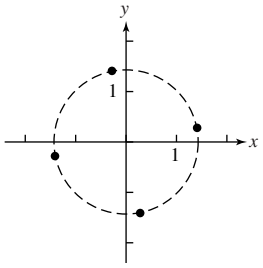
19. $\left(1, -\frac{2\pi}{3} + (2n+1)\pi\right)$ y $\left(-1, -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$, n un entero. **21. a)** $\left(-\sqrt{13}, \pi + \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)\right) \approx (-\sqrt{13}, 2.16)$ o $\left(\sqrt{13}, 2\pi + \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)\right) \approx (\sqrt{13}, 5.30)$ **b)** $\left(\sqrt{13}, \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)\right) \approx (\sqrt{13}, -0.98)$ o $\left(-\sqrt{13}, \pi + \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)\right) \approx (-\sqrt{13}, 2.16)$ **c)** Las respuestas de la parte a) y también $\left(-\sqrt{13}, 3\pi + \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)\right) \approx (-\sqrt{13}, 8.44)$ o $\left(\sqrt{13}, 4\pi + \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)\right) \approx (\sqrt{13}, 11.58)$

23. a) $(5, 0)$ o $(-5, \pi)$ o $(5, 2\pi)$ **b)** $(-5, -\pi)$ o $(5, 0)$ o $(-5, \pi)$ **c)** Las respuestas de la parte (a), y también $(-5, 3\pi)$ o $(5, 4\pi)$.

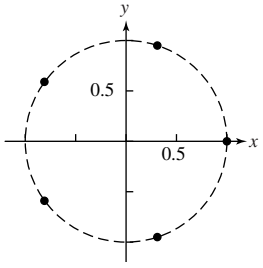
25. $y = -\frac{3}{5}x + \frac{29}{5}$: recta que pasa por $\left(0, \frac{29}{5}\right)$ con pendiente $m = -\frac{3}{5}$ **27.** $x = 2(y+1)^2 + 3$: parábola que abre hacia la derecha con vértice en $(3, -1)$. **29.** $y = \sqrt{x+1}$: función raíz cuadrada que inicia en $(-1, 0)$ **31.** $x = 2t + 3$, $y = 3t + 4$

33. $a = -3$, $b = 4$, $|z_1| = 5$ **35.** $3\sqrt{3} + 3i$ **37.** $-1.25 - 1.25\sqrt{3}i$ **39.** $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$. Otras representaciones usarían ángulos $\frac{7\pi}{4} + 2n\pi$, n un entero. **41.** $\approx \sqrt{34}[\cos(5.25) + i \operatorname{sen}(5.25)]$ Otras representaciones usarían ángulos $\approx 5.25 + 2n\pi$, n un entero. **43.** $12(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$; $\frac{3}{4}(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$ **45. a)** $243\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$ **b)** $-\frac{243\sqrt{2}}{2} - \frac{243\sqrt{2}}{2}i$

47. a) $125(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$ **b)** -125 **49.** $\sqrt[8]{18}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{18}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{18}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{17\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{18}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i \operatorname{sen}\frac{25\pi}{16}\right)$



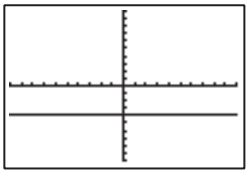
51. $1, \cos\frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}, \cos\frac{6\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{6\pi}{5}, \cos\frac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{8\pi}{5}$



53. b) **55.** a) **57.** No aparece. **59.** c) **61.** $x^2 + y^2 = 4$ —una circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio 2.

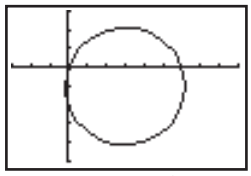
63. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{13}{4}$; una circunferencia de radio $\frac{\sqrt{13}}{2}$ con centro en $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

65. $r = -\frac{4}{\operatorname{sen}\theta} = -4 \csc\theta$



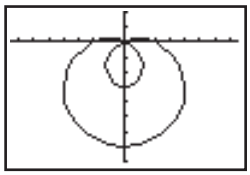
[−10, 10] por [−10, 10]

67. $r = 6\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta$



[−3, 9] por [−5, 3]

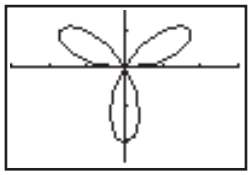
69.



[−7.5, 7.5] por [−8, 2]

Dominio: Todos los reales
Rango: [−3, 7]
Continua
Simétrica con respecto del eje y
Acotada
Valor máximo de r: 7
No tiene asíntotas

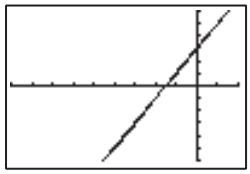
71.



[−3, 3] por [−2.5, 1.5]

Dominio: Todos los reales
Rango: [−2, 2]
Continua
Simétrica con respecto del eje y
Acotada
Valor máximo de r: 2
No tiene asíntotas

73. **a)** No hay respuesta. **b)** No hay respuesta. **c)** No hay respuesta. **d)**

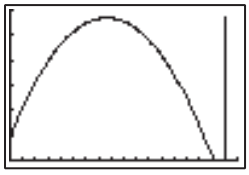


[−9, 2] por [−6, 6]

75. **a)** $\approx \langle -463.64, 124.23 \rangle$ **b)** $\approx$ 508.29 mph; rumbo $\approx 283.84°$ **77.** **a)** $\approx$ 826.91 libras **b)** 2883.79 libras

79. **a)** $h = -16t^2 + 245t + 200$ **b)** Grafique y haga un seguimiento: $x = 17$ y $y = -16t^2 + 245t + 200$ en la ventana [0, 18] por [0, 1200]. Esta gráfica parecería una recta vertical de alrededor de (17, 0) a (17, 1138). Haciendo un trazado, se muestra cómo la flecha inicia a una altura de 200 pies, se eleva a más de 1,000 pies y luego cae al piso.

c)

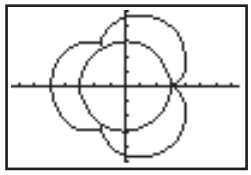


[0, 18] por [0, 1,200]

d) 924 pies. **e)** $\approx$ 1,138 pies; $t \approx 7.66$. **f)** Alrededor de 16.09 seg con $0 \leq t \leq 16.1$ (el límite superior puede variar).

81. $x = 40 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{15}t\right)$, $y = 50 - 40\cos\left(\frac{2\pi}{15}t\right)$

83. **a)**



[−7.5, 7.5] por [−5, 5]

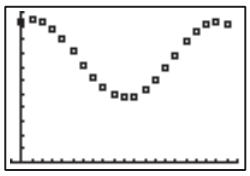
b) Los número 4 deben cambiarse por 5.

85. $t \approx 1.06$ seg, $x \approx 68.65$ pies. **87.** **a)** $\approx$ 77.59 pies. **b)** $\approx$ 4.404 seg. **89.** $\approx$ 17.65 pies.

Capítulo 6 Proyecto

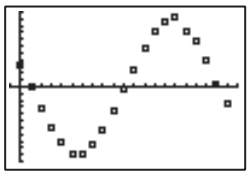
Las respuestas están basadas en los datos que se muestran en la tabla

1.



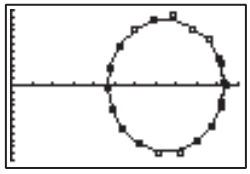
[−0.1, 2.1] por [0, 1.1]

3.



[−0.1, 2.1] por [−1.1, 1.1]

5.

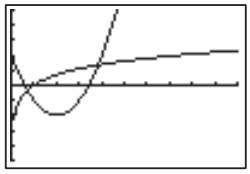


[0, 1.1] por [−1.1, 1.1]

SECCIÓN 7.1

Exploración 1

1.



[0, 10] por [−5, 5]

Repaso rápido 7.1

1. $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$ **3.** $x = -\frac{2}{3}$, $x = 1$ **5.** 0, 2, −2 **7.** $y = (-4x + 6)/5$ **9.** $-4x - 6y = -10$

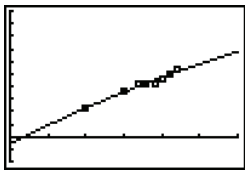
Ejercicios 7.1

1. a) No. **b)** Sí. **c)** No. **3.** (9, −2) **5.** (50/7, −10/7) **7.** (−1/2, 2) **9.** No hay solución. **11.** (±3, 9)

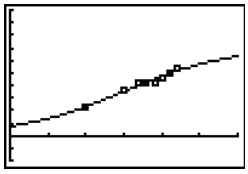
13. (−3/2, 27/2) y (1/3, 2/3) **15.** (0, 0) y (3, 18) **17.** $\left(\frac{-1 + 3\sqrt{89}}{10}, \frac{3 + \sqrt{89}}{10}\right)$ y $\left(\frac{-1 - 3\sqrt{89}}{10}, \frac{3 - \sqrt{89}}{10}\right)$

19. (8, −2) **21.** (4, 2) **23.** No hay solución. **25.** Un número infinito de soluciones. **27.** (0, 1) y (3, −2) **29.** No hay solución.
31. Una solución. **33.** Un número infinito de soluciones. **35.** ≈ (0.69, −0.37) **37.** ≈(−2.32, −3.16), (0.47, −1.77) y (1.85, −1.08)
39. (−1.2, 1.6) y (2, 0) **41.** ≈(2.05, 2.19) y (−2.05, 2.19) **43.** Curva de demanda Curva de oferta (3.75, 143.75).

45. a) $y = -0.0938x^2 + 15.0510x - 28.2375$ **b)** $y = \frac{353.6473}{(1 + 8.6873e^{-0.1427x})}$ **c)** Cuadrática: 2006, logística: 2007.

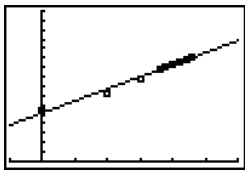


[0, 30] por [−100, 500]

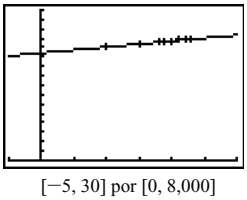


[0, 30] por [−100, 500]

47. a) $y = 127.6351x + 2587.0010$ **b)** $y = 31.3732x + 5715.9742$ **c)** 2012



[−5, 30] por [0, 8,000]

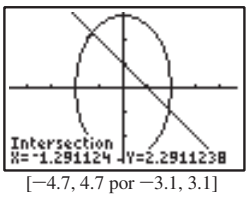


[−5, 30] por [0, 8,000]

49. ≈5.28 m × ≈94.72 m
51. rapidez de la corriente ≈ 1.06 mph; rapidez al remar ≈ 3.56 mph.
53. Mediana: \$0.79; grande: \$0.95.
55. $a = 2/3$ y $b = 14/3$ **57. a)** 300 millas.
59. Falso. Un sistema de dos ecuaciones lineales de dos variables tiene 0, 1 o un número infinito de soluciones.
61. C **63.** D

65. a) $y = (3/2)\sqrt{4 - x^2}$, $y = -(3/2)\sqrt{4 - x^2}$

b)



[−4.7, 4.7 por −3.1, 3.1]

≈(−1.29, 2.29) o (1.91, −0.91)

67. $(\pm\sqrt{2/3}, 10/3)$ **69.** 12.5 unidades

SECCIÓN 7.2

Exploración 1

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

Exploración 2

1. $\det A = -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{31}$

3. Como cada término en el desarrollo contiene un elemento de cada renglón y cada columna, al menos un factor en cada término es un cero. Por lo tanto, el desarrollo será la suma de n términos ceros o cero.

Repaso rápido 7.2

1. (3, 2); $(x, -y)$ **3.** (−2, 3); (y, x) **5.** $(3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta)$ **7.** $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ **9.** $\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Ejercicios 7.2

1. 2×3; no es cuadrada. **3.** 3×2; no es cuadrada. **5.** 3×1, no es cuadrada. **7.** 3 **9.** 4

11. a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 4 & 22 \end{bmatrix}$ **13. a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 0 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} -18 & 2 \\ 6 & -5 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$

15. a) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix}$ **17. a)** $\begin{bmatrix} -4 & -18 \\ -11 & -17 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 5 & -12 \\ 0 & -26 \end{bmatrix}$ **19. a)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -11 & 12 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 4 & 8 & -5 \\ -5 & 4 & -6 \\ -2 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

21. a) $\begin{bmatrix} 6 & -7 & -2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ -18 & -3 & 10 \end{bmatrix}$ **23. a)** $[-8]$ **b)** $\begin{bmatrix} -10 & 5 & -15 \\ 8 & -4 & 12 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ **25.** No es posible; [18 14].

27. a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ **29.** $a = 5, b = 2$ **31.** $a = -2, b = 0$ **33.** $AB = BA = I_2$ **35.** $\begin{bmatrix} -1 & 1.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

37. No tiene inversa. **39.** No tiene inversa. **41.** −14 **43.** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \end{bmatrix}$

45. a) La distancia de la ciudad X a la ciudad Y es la misma que la distancia de la ciudad Y a la ciudad X.

b) Cada entrada representa la distancia de la ciudad X a la ciudad X. **47. a)** [382 227.50] **49. a)** AB^T o BA^T **b)** $(A - C)B^T$

51. a) ≈ (1.37 0.37) **b)** ≈ (0.37 1.37) **55.** $A \cdot A^{-1} = I_2$ **57.** $[x \quad y]\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **59.** $[x \quad y]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

61. $[x \quad y]\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **63.** Falso. Puede ser negativo. Por ejemplo, el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ es -1. **65.** B **67.** D

71. a) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$ **c)** Es la inversa de A.
73. b) El término constante es igual a $-\det A$. **c)** El coeficiente de x^2 es el opuesto de la suma de los elementos de la diagonal principal de A.

SECCIÓN 7.3

Exploración 1

1. $x + y + z$ debe ser igual a 60 L.
3. El número de litros de la solución al 35% debe ser igual al doble del número de litros de la solución al 55%.

5. $\begin{bmatrix} 3.75 \\ 37.5 \\ 18.75 \end{bmatrix}$

Repaso rápido 7.3

1. 12.8 L **3.** 38 L **5.** $(-1, 6)$ **7.** $y = -z + w + 1$ **9.** $\begin{bmatrix} -0.5 & -0.75 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$

Ejercicios 7.3

1. $\left(\frac{25}{2}, \frac{7}{2}, -2\right)$ **3.** $(1, 2, 1)$ **5.** No hay solución

7. $\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}, 4, -\frac{15}{2}\right)$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 0 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **13.** R_{12} **15.** $(-3)R_2 + R_3$

Para los ejercicios del 17 al 20 se dan posibles respuestas.

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0 & 1 & -9.2 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 29 al 32, los nombres de las variables son arbitrarios.

29. $3x + 2y = -1$
$-4x + 5y = 2$

31. $2x + z = 3$
$-x + y = 2$
$2y - 3z = -1$

33. $(2, -1, 4)$; $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ **35.** $(-2, 3, 1)$

37. No hay solución. **39.** $(2 - z, 1 + z, z)$ **41.** No hay solución. **43.** $(z + w + 2, 2z - w - 1, z, w)$

45. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **47.** $3x - y = -1 \quad 2x + 4y = 3$ **49.** $(-2, 3)$ **51.** $(-2, -5, -7)$ **53.** $(-1, 2, -2, 3)$

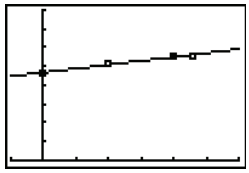
55. $(0, -10, 1)$

57. $(3, 3, -2, 0)$ **59.** $\left(2 - \frac{3}{2}z, -\frac{1}{2}z - 4, z\right)$ **61.** $(-2w - 1, w + 1, -w, w)$ **63.** $(-w - 2, -z + 0.5, z, w)$

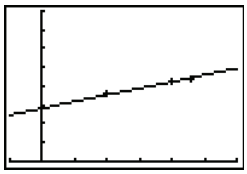
65. No hay solución.

67. $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ **69.** $f(x) = (-c - 3)x^2 + x + c$, para cualquier c.

71. a) $y = 2.0734x + 234.0268$ **b)** $y = 3.5302x + 141.7246$ **c)** 2043



[−3, 30] por [0, 400]



[−3, 30] por [0, 400]

73. 825 niños, 410 adultos, 165 ciudadanos de la tercera edad.

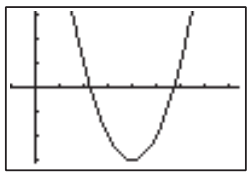
75. \$14,500 CD, \$5500 bonos, \$60,000 fondo de valores.

77. \$0 CD, \$38,983.05 bonos, \$11,016.95 fondos de valores.

79. 22 monedas de 5¢, 35 monedas de 10¢ y 17 monedas de 25¢.

81. (16/3, 220/3) **85.** Falso. El determinante de la matriz debe ser diferente de cero. **87.** D **89.** D

93. a) $C(x) = x^2 - 8x + 13$ **b)**



[−1, 8.4] por [−3.1, 3.1]

c) $4 \pm \sqrt{3}$ **d)** $\det A = C(0) = 13$ **e)** $a_{11} + a_{22} = (4 - \sqrt{3}) + (4 + \sqrt{3}) = 8$

SECCIÓN 7.4

Exploración 1

1. a) $3 = A_2$ **b)** $2 = A_1$

Repaso rápido 7.4

1. $\dfrac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3}$ **3.** $\dfrac{4x^2 + 6x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}$ **5.** $3x^2 - 2 + \dfrac{3}{x - 2}$ **7.** $(x + 1)(x - 3)(x^2 + 4)$ **9.** $A = 3, B = -1, C = 1$

Ejercicios 7.4

1. $\dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x - 2} + \dfrac{A_3}{x + 2}$ **3.** $\dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{A_3}{x^3} + \dfrac{A_4}{x - 1} + \dfrac{A_5}{(x - 1)^2} + \dfrac{B_1x + C_1}{x^2 + 9}$ **5.** $\dfrac{-3}{x + 4} + \dfrac{4}{x - 2}$ **7.** $\dfrac{3}{x^2 + 1} + \dfrac{2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$

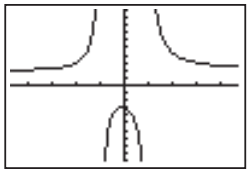
9. $\dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{2}{(x - 2)^2} + \dfrac{1}{(x - 2)^3}$ **11.** $\dfrac{2}{x + 3} + \dfrac{-1}{(x + 3)^2} + \dfrac{3x - 1}{x^2 + 2} + \dfrac{x + 2}{(x^2 + 2)^2}$ **13.** $\dfrac{1}{x - 5} + \dfrac{-1}{x - 3}$ **15.** $\dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{-2}{x + 1}$

17. $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{-1/2}{x + 2}$ **19.** $\dfrac{1}{x - 3} + \dfrac{-2}{x + 4}$ **21.** $\dfrac{-2}{x + 3} + \dfrac{5}{2x - 1}$ **23.** $\dfrac{2}{x^2 + 1} + \dfrac{3}{(x^2 + 1)^2}$ **25.** $\dfrac{2}{x} + \dfrac{-1}{x - 1} + \dfrac{2}{(x - 1)^2}$

27. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{2}{x - 3}$ **29.** $\dfrac{2x}{x^2 + 2} + \dfrac{-1}{(x^2 + 2)^2}$ **31.** $\dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{-x}{x^2 + x + 1}$

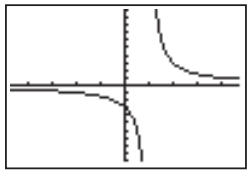
33. $2 + \dfrac{x + 5}{x^2 - 1}; \dfrac{3}{x - 1} + \dfrac{-2}{x + 1}$

Gráfica de $(2x^2 + x + 3)/(x^2 - 1)$:



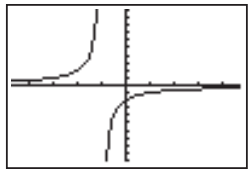
[−4.7, 4.7] por [−10, 10]

Gráfica de $3/(x - 1)$:



[−4.7, 4.7] por [−10, 10]

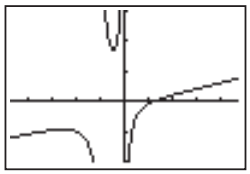
Gráfica de $-2/(x + 1)$:



[−4.7, 4.7] por [−10, 10]

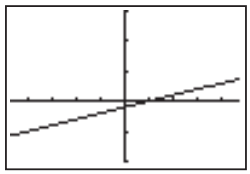
35. $x - 1 + \dfrac{x-2}{x^2+x}$; $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{-2}{x}$

Gráfica de $y = (x^3 - 2)/(x^2 + x)$:



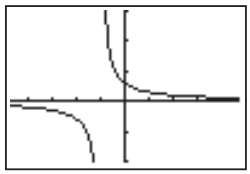
[−4.7, 4.7] por [−10, 15]

Gráfica de $y = x - 1$:



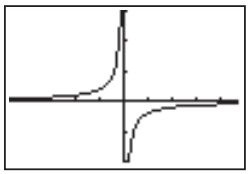
[−4.7, 4.7] por [−10, 15]

Gráfica de $y = 3/(x + 1)$:



[−4.7, 4.7] por [−10, 15]

Gráfica de $y = -2/x$:



[−4.7, 4.7] por [−10, 15]

37. (c) **39.** (d) **41.** (a) **43.** $\dfrac{-1}{ax} + \dfrac{1}{a(x-a)}$ **45.** $\dfrac{-3}{(b-a)(x-a)} + \dfrac{3}{(b-a)(x-b)}$

47. Verdadero. El comportamiento de f cerca de $x = 3$ es el mismo que el comportamiento de $y = \dfrac{1}{x-3}$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$.

49. E **51.** B **53.** **a)** $A = 3$ **b)** $B = -2, C = 2$ **55.** $b/(x-1)^2$

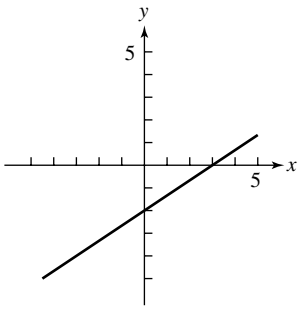
SECCIÓN 7.5

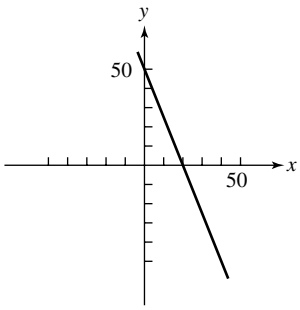
Repaso rápido 7.5

1. (3, 0); (0, −2)

3. (20, 0); (0, 50)

5. (30, 60) **7.** (10, 140) **9.** (3, 3)





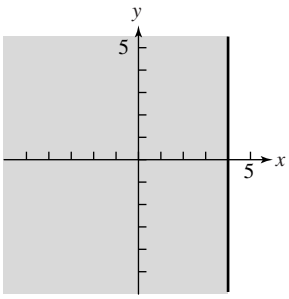
Ejercicios 7.5

1. Gráfica (c); frontera incluida.

3. Gráfica (b); frontera incluida.

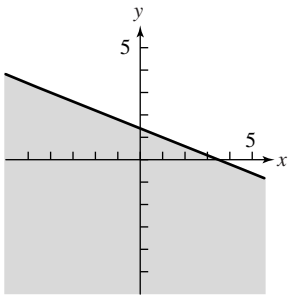
5. Gráfica (e); frontera incluida.

7.



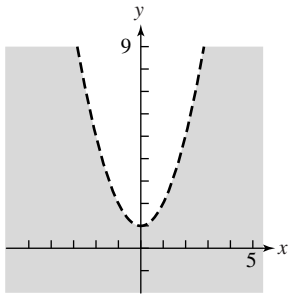
frontera $x = 4$ incluida

9.



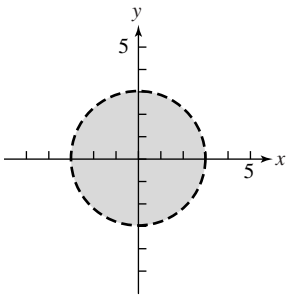
frontera $2x + 5y = 7$ incluida

11.



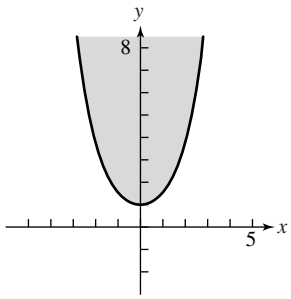
frontera $y = x^2 + 1$ no incluida

13.



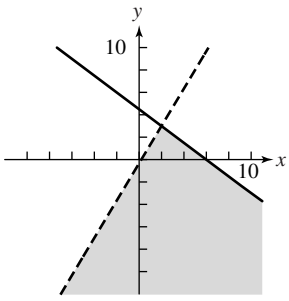
frontera $x^2 + y^2 = 9$ no incluida

15.



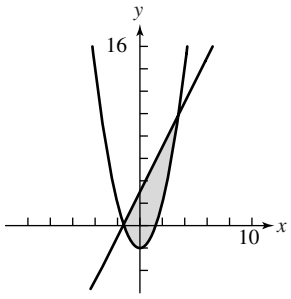
frontera $y = (e^x + e^{-x})/2$ incluida

17.

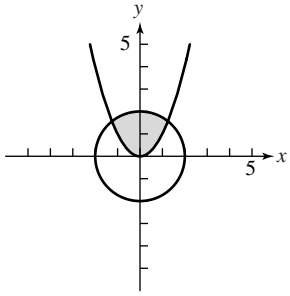


frontera $y = \text{sen } x$ no incluida

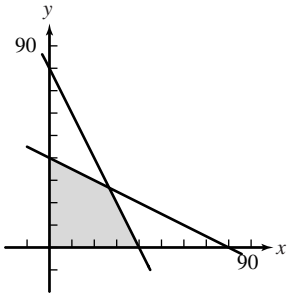
19.



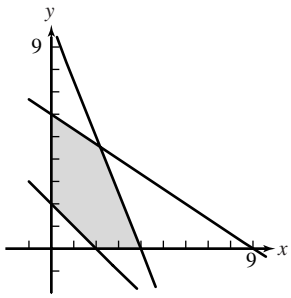
21.



23.



25.



27. $x^2 + y^2 \leq 4$
$y \geq -x^2 + 1$

29. $y \leq -\frac{1}{2}x + 5$
$y \leq -\frac{3}{2}x + 9$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

31. El mínimo es 0 en (0, 0); el máximo es 880/3 en (160/3, 80/3).

33. El mínimo es 162 en (6, 30); no hay máximo.

35. El mínimo es 24 en (0, 12); no hay máximo.

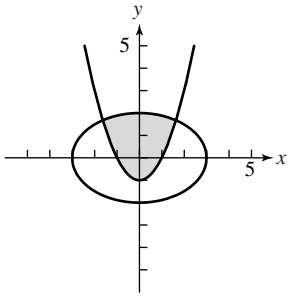
37. ≈13.48 toneladas de mineral R y ≈20.87 toneladas de mineral S; \$1926.20.

39. x operaciones en la refinería 1 y y operaciones en la refinería 2 tal que $2x + 4y = 320$ con $40 \leq x \leq 120$.

41. Falso. Es un semiplano. **43.** A **45.** D

49. $y_1 = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$; $y_2 = -2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$

51.



EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

1. a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} -7 & 11 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -3 & -7 & 11 \\ 0 & -12 & 24 \end{bmatrix}$; no es posible. **5.** [3 7]; no es posible.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $AB = BA = I_4$ **11.** $\begin{bmatrix} -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 10 & 24 & -27 & 4 \\ -3 & -7 & 8 & -1 \end{bmatrix}$ **13.** 20 **15.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **19.** (1, 2) **21.** No tiene solución. **23.** $(-z - w + 2, w + 1, z, w)$ **25.** No tiene solución.

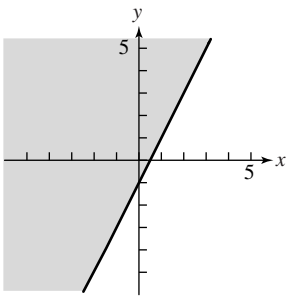
27. $(-2z + w + 1, z - w + 2, z, w)$ **29.** (9/4, −3/4, −7/4) **31.** No tiene solución. **33.** $(-w + 2, z + 3, z, w)$

35. (−2, 1, 3, −1) **37.** Curva de demanda ≈ (7.57, 42.71) Curva de oferta **39.** $(x, y) \approx (0.14, -2.29)$ **41.** $(x, y) = (-2, 1)$ o $(x, y) = (2, 1)$

43. $(x, y) \approx (2.27, 1.53)$ **45.** $(a, b, c, d) = (17/840, -33/280, -571/420, 386/35)$ **47.** $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-4}$

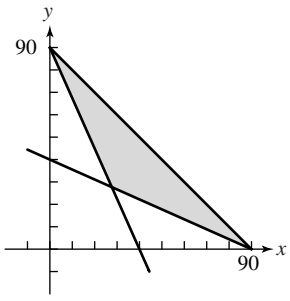
49. $\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$ **51.** $\frac{2}{x+1} + \frac{3x-4}{x^2+1}$ **53.** (c) **55.** (b)

57.



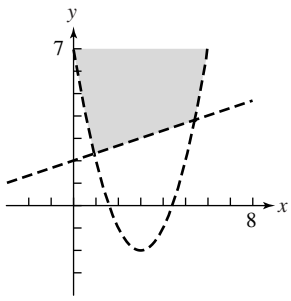
Esquinas en ≈(−1.25, 1.56) y ≈ (1.25, 1.56).
Fronteras incluidas

59.



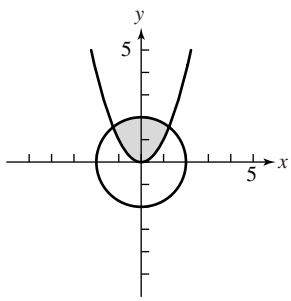
Esquinas en (0, 90), (90, 0), (360/13, 360/13).
Fronteras incluidas

61.



Esquinas en ≈(0.92, 2.31) y ≈ (5.41, 3.80).
Fronteras incluidas

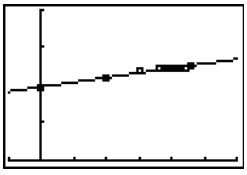
63.



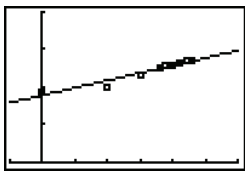
65. El mínimo es 106 en (10, 6); no hay máximo. **67.** El mínimo es 205 en (10, 25); el máximo es 292 en (4, 40).

69. a) ≈(2.12, 0.71) **b)** ≈(−0.71, 2.12)

71. a) $y = 12.2614x + 979.5909$ **b)** $y = 19.8270x + 893.9566$



[−5, 30] por [0, 2,000]



[−5, 30] por [0, 2,000]

c) 1991.

73. a) $N = [200 \quad 400 \quad 600 \quad 250]$
b) $P = [\$80 \quad \$120 \quad \$200 \quad \$300]$
c) $NP^T = \$259{,}000$

75. Las respuestas varían.

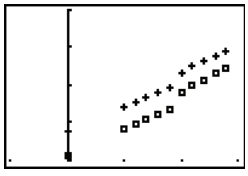
77. $160,000 al 4%, $170,000 al 6.5%, $320,000 al 9%.

79. Llave A: 15 horas; llave B: ≈5.45 horas; llave C: 12 horas.

81. n debe ser igual a p.

Capítulo 7 Proyecto

1.



[−5, 15] por [120, 160]

Hombres; $y \approx 1.7585x + 119.5765$

Mujeres: $y \approx 1.6173x + 126.4138$

3. Sí; no; no.

5. Hombres; $y \approx \frac{412.574}{1 + 10.956e^{-0.01539x}}$; Mujeres: $y \approx \frac{315.829}{1 + 9.031e^{-0.01831x}}$; (45, 64); esto representa el tiempo cuando la población de mujeres será mayor que la de hombres. (159, 212). Esto representa el tiempo cuando la población de hombres, nuevamente será mayor que la población de mujeres.

7. Aprox. 49.1% hombres y 50.8% mujeres.

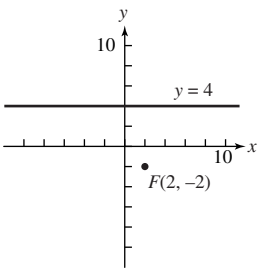
SECCIÓN 8.1

Exploración 1

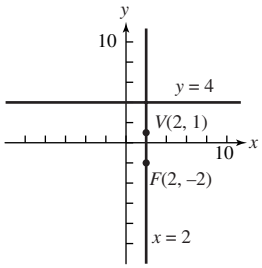
1. El eje de la parábola con foco (0, 1) y directriz $y = -1$ es el eje y, ya que es perpendicular a $y = 1-$ y pasa por (0, 1). El vértice está en este eje a la mitad de la directriz y el foco, por lo que el vértice es el punto (0, 0).
3. $\{(-2\sqrt{6}, 6), (-2\sqrt{5}, 5), (-4, 4), (-2\sqrt{3}, 3), (-2\sqrt{2}, 2), (-2, 1), (0, 0), (2, 1), (2\sqrt{2}, 2), (2\sqrt{3}, 3), (4, 4), (2\sqrt{5}, 5), (2\sqrt{6}, 6)\}$

Exploración 2

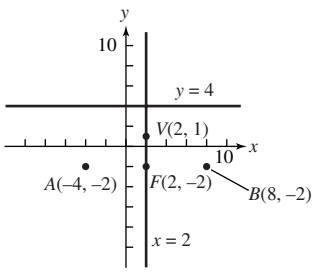
1.



3.



5.



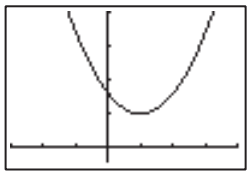
7. hacia abajo

Repaso rápido 8.1

1. $\sqrt{13}$ **3.** $y = \pm 2\sqrt{x}$ **5.** $y + 6 = -(x - 1)^2$

7. Vértice: (1, 5); $f(x)$ puede obtenerse a partir de $g(x)$ mediante un alargamiento de x^2 en un factor de 3, desplazando 5 unidades hacia arriba y desplazando una unidad hacia la derecha.

9. $f(x) = -2(x + 1)^2 + 3$



[−3, 4] por [−2, 20]

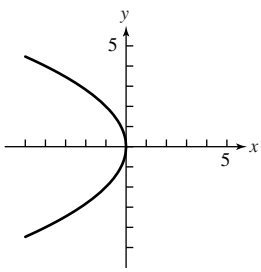
Ejercicios 8.1

1. Vértice: (0, 0); foco: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$; Directriz: $y = -\frac{3}{2}$ **3.** Vértice: (−3, 2); foco (−2, 2); directriz: $x = -4$; ancho focal: 4.

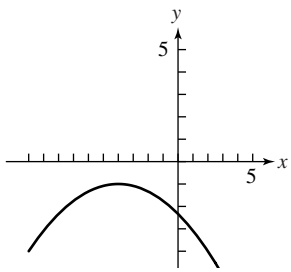
5. Vértice: (0, 0); foco: $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$; directriz: $y = \frac{1}{3}$; ancho focal: $\frac{4}{3}$ **7.** (c) **9.** (a) **11.** $y^2 = -12x$ **13.** $x^2 = -16y$ **15.** $x^2 = 20y$

17. $y^2 = 8x$ **19.** $x^2 = -6y$ **21.** $(y + 4)^2 = 8(x + 4)$ **23.** $(x - 3)^2 = 6(y - 5/2)$ **25.** $(y - 3)^2 = -8(x - 4)$

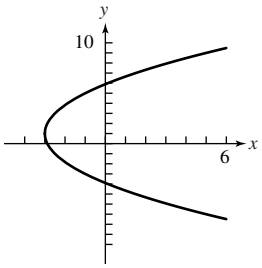
27. $(x - 2)^2 = 16(y + 1)$ **29.** $(y + 4)^2 = -10(x + 1)$ **31.**



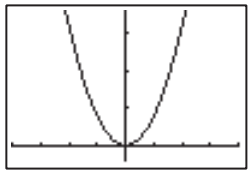
33.



35.

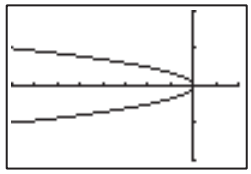


37.



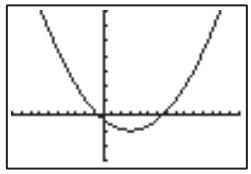
[−4, 4] por [−2, 18]

39.



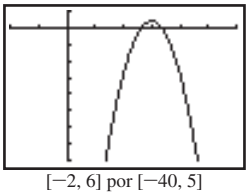
[−8, 2] por [−2, 2]

41.



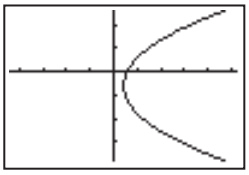
[−10, 15] por [−3, 7]

43.



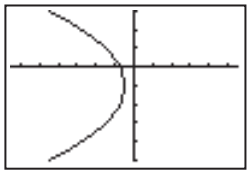
[−2, 6] por [−40, 5]

45.



[−22, 26] por [−19, 13]

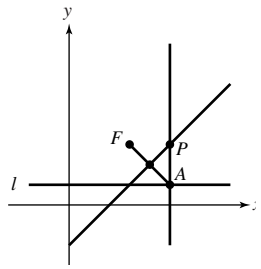
47.



[−13, 11] por [−10, 6]

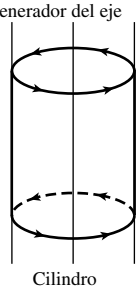
49. Completando el cuadrado, la ecuación se convierte en $(x + 1)^2 = y - 2$, una parábola con vértice $(-1, 2)$, foco $(-1, 9/4)$ y directriz $y = 7/4$. **51.** Completando el cuadrado, la ecuación se convierte en $(y - 2)^2 = 8(x - 2)$, una parábola con vértice $(2, 2)$, foco $(4, 2)$ y directriz $x = 0$. **53.** $(y - 2)^2 = -6x$ **55.** $(x - 2)^2 = -4(y + 1)$ **57.** La deducción sólo requiere que p sea un número real fijo. **59.** El filamento debe colocarse a 1.125 cm del vértice en el eje del espejo. **61.** El receptor electrónico está ubicado a 2.5 unidades del vértice en el eje del micrófono parabólico. **63.** Iniciando con la torre de más a la izquierda, las longitudes de los cables son: $\approx\{79.44, 54.44, 35, 21.11, 12.78, 10, 12.78, 21.11, 35, 54.44, 79.44\}$. **65.** Falso. Todo punto en una parábola está a la misma distancia de su foco y de su directriz. **67.** D **69.** B

71. a)–c)

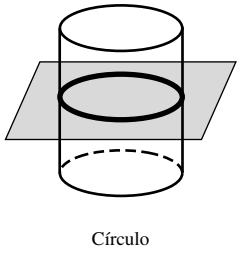


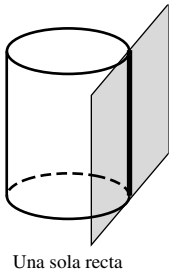
d) parábola

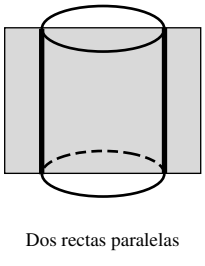
73. a)



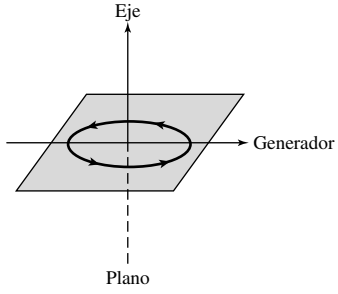
b)



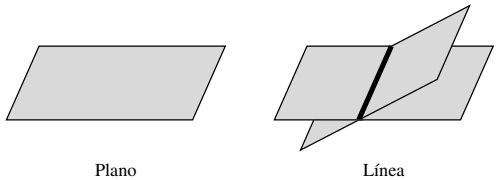




c)



d)



SECCIÓN 8.2

Exploración 1

1. $x = -2 + 3\cos t$ y $y = 5 + 7\operatorname{sen} t$; $\cos t = \dfrac{x+2}{3}$ y $\operatorname{sen} t = \dfrac{y-5}{7}$; $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ proporciona la ecuación $\dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y-5)^2}{49} = 1$.

3. Ejemplo 1: $x = 3\cos t$ y $y = 2\operatorname{sen} t$
Ejemplo 2: $x = 2\cos t$ y $y = \sqrt{13}\operatorname{sen} t$
Ejemplo 3: $x = 3 + 5\cos t$ y $y = -1 + 4\operatorname{sen} t$

5. Ejemplo 1: $x = 3\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$; $\cos t = \dfrac{x}{3}$, $\operatorname{sen} t = \dfrac{y}{2}$; $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ da $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, o $4x^2 + 9y^2 = 36$.

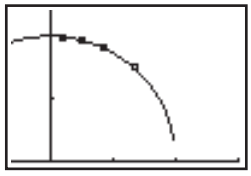
Ejemplo 2: $x = 2\cos t$, $y = \sqrt{13}\operatorname{sen} t$; $\cos t = \dfrac{x}{2}$, $\operatorname{sen} t = \dfrac{y}{\sqrt{13}}$; $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ da $\dfrac{y^2}{13} + \dfrac{x^2}{4} = 1$.

Ejemplo 3: $x = 3 + 5\cos t$, $y = -1 + 4\operatorname{sen} t$; $\cos t = \dfrac{x-3}{5}$, $\operatorname{sen} t = \dfrac{y+1}{4}$; $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ da $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$.

Exploración 2

3. $a = 8$ cm, $b \approx 7.75$ cm, $c = 2$ cm, $e = 0.25$, $b/a \approx 0.97$; $a = 7$ cm, $b \approx 6.32$ cm, $c = 3$ cm, $e \approx 0.43$, $b/a \approx 0.90$; $a = 6$ cm, $b \approx 4.47$ cm, $c = 4$ cm, $e \approx 0.67$, $b/a \approx 0.75$

5.



[−0.3, 1.5] por [0, 1.2]

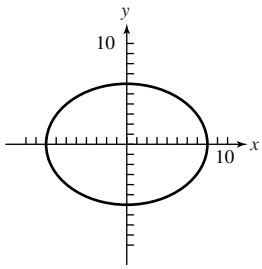
$b/a = \sqrt{1 - e^2}$

Repaso rápido 8.2

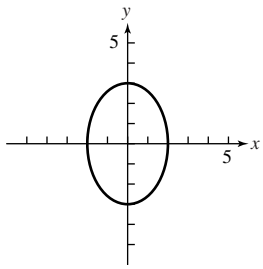
1. $\sqrt{61}$ **3.** $y = \pm\dfrac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$ **5.** $x = 8$ **7.** $x = 2, x = -2$ **9.** $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$

Ejercicios 8.2

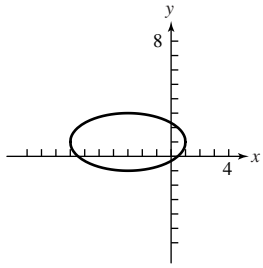
1. Vértices: (4, 0), (−4, 0); focos: (3, 0), (−3, 0) **3.** Vértices: (0, 6); (0, −6); focos: (0, 3), (0, −3) **5.** Vértices: (2, 0), (−2, 0); focos: (1, 0), (−1, 0) **7.** (d) **9.** (a) **11.**



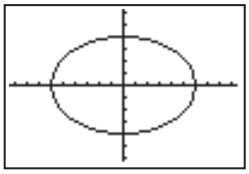
13.



15.

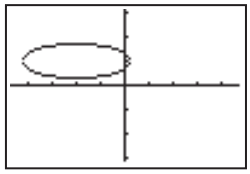


17.



[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

19.



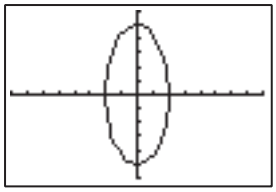
[−17, 4.7] por [−3.1, 3.1]

21. $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$ **23.** $x^2/25 + y^2/21 = 1$ **25.** $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$ **27.** $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{16} = 1$ **29.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

31. $\frac{(y-2)^2}{36} + \frac{(x-1)^2}{16} = 1$ **33.** $(x-3)^2/9 + (y+4)^2/5 = 1$ **35.** $(y+2)^2/25 + (x-3)^2/9 = 1$

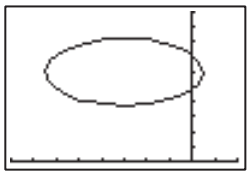
37. Centro: $(-1, 2)$; vértices: $(-6, 2)$, $(4, 2)$; focos: $(-4, 2)$, $(2, 2)$ **39.** Centro: $(7, -3)$; vértices: $(7, 6)$, $(7, -12)$; focos: $(7, -3 \pm \sqrt{17})$

41.



$[-8, 8]$ por $[-6, 6]$

43.



$[-8, 2]$ por $[0, 10]$

45. Vértices: $(1, -4)$, $(1, 2)$; focos: $(1, -1 \pm \sqrt{5})$; excentricidad: $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$x = 2 \cos t$, $y = 5 \operatorname{sen} t$

$x = 2\sqrt{3} \cos t - 3$,
$y = \sqrt{5} \operatorname{sen} t + 6$

47. Vértices: $(-7, 1)$, $(1, 1)$; focos: $(-3 \pm \sqrt{7}, 1)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{7}}{4}$ focos: $(4, -8 \pm \sqrt{3})$; excentricidad: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

49. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

53. $a = 237{,}086.5$, $b \approx 236{,}571$, $c = 15{,}623.5$, $e \approx 0.066$ **55.** ≈ 1347 Gm, ≈ 1507 Gm **57.** $a - c < 1.5(1.392) = 2.088$

59. $(\pm\sqrt{51.75}, 0) \approx (\pm 7.19, 0)$ **61.** $(-2, 0)$, $(2, 0)$

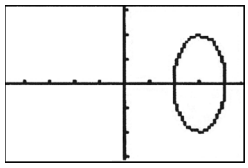
63. a) Soluciones aproximadas: $(\pm 1.04, -0.86)$, $(\pm 1.37, 0.73)$

b) $\left(\pm\frac{\sqrt{94 - 2\sqrt{161}}}{8}, -\frac{1 + \sqrt{161}}{16}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{94 + 2\sqrt{161}}}{8}, \frac{-1 + \sqrt{161}}{16}\right)$

65. Falso, la distancia es $a(1 - e)$. **67.** C **69.** B

71. a) Cuando $a = b = r$, $A = \pi ab = \pi rr = \pi r^2$ y $P \approx \pi(2r) \cdot (3 - \sqrt{(4r)(4r)}/(2r)) = \pi(2r) \cdot (3 - 2) = 2\pi r$. **b)** Las respuestas variarán.

73. a)



$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$

b) $y^2/4 + (x-3)^2 = 1$

SECCIÓN 8.3

Exploración 1

1. $x = -1 + 3/\cos t = -1 + 3 \sec t$ y $y = 1 + 2 \tan t$; $\sec t = \frac{x+1}{3}$ y $\tan t = \frac{y-1}{2}$; $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ dan la ecuación $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

3. Ejemplo 1: $x = 3/\cos t$, $y = 2 \tan t$; Ejemplo 2: $x = 2 \tan t$, $y = \sqrt{5}/\cos t$; Ejemplo 3: $x = 3 + 5/\cos t$, $y = -1 + 4 \tan t$; Ejemplo 4: $x = -2 + 3/\cos t$; $y = 5 + 7 \tan t$.

5. Ejemplo 1: $x = 3/\cos t = 3 \sec t$, $y = 2 \tan t$; $\sec t = x/3$, $\tan t = y/2$; $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ da $x^2/9 - y^2/4 = 1$, o $4x^2 - 9y^2 = 36$. Ejemplo 2: $x = 2 \tan t$, $y = \sqrt{5}/\cos t = \sqrt{5} \sec t$; $\tan t = x/2$, $\sec t = y/\sqrt{5}$; $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ da $y^2/5 - x^2/4 = 1$. Ejemplo 3: $x = 3 + 5/\cos t = 3 + 5 \sec t$, $y = -1 + 4 \tan t$; $\sec t = (x-3)/5$, $\tan t = (y+1)/4$; $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ da $(x-3)^2/25 - (y+1)^2/16 = 1$. Ejemplo 4: $x = -2 + 3/\cos t = -2 + 3 \sec t$, $y = 5 + 7 \tan t$; $\sec t = (x+2)/3$, $\tan t = (y-5)/7$; $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ da $(x+2)^2/9 - (y-5)^2/49 = 1$.

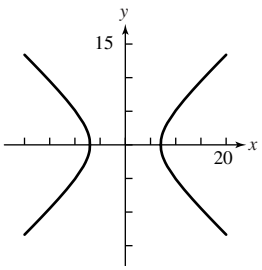
Repaso rápido 8.3

1. $\sqrt{146}$ **3.** $y = \pm\frac{4}{3}\sqrt{9 + x^2}$ **5.** no hay solución. **7.** $x = 2, x = -2$ **9.** $a = 3, c = 5$

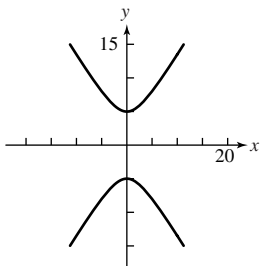
Ejercicios 8.3

1. Vértices: $(\pm 4, 0)$; focos: $(\pm\sqrt{23}, 0)$ **3.** Vértices: $(0, \pm 6)$; focos: $(0, \pm 7)$ **5.** Vértices: $(\pm 2, 0)$; focos: $(\pm\sqrt{7}, 0)$ **7.** (c) **9.** (a)

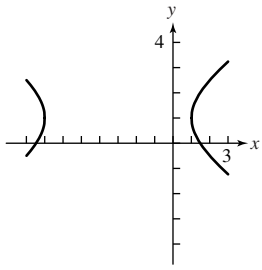
11.



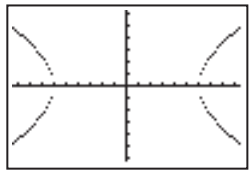
13.



15.

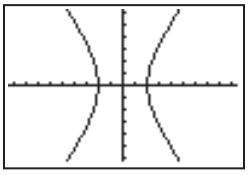


17.



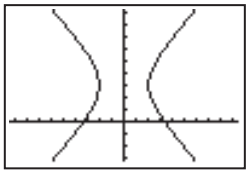
[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

19.



[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

21.



[−9.4, 9.4] por [−3.2, 9.2]

23. $x^2/4 - y^2/5 = 1$ **25.** $y^2/16 - x^2/209 = 1$ **27.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$

29. $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$ **31.** $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$

33. $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ **35.** $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

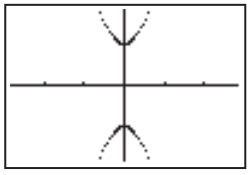
37. $\frac{(y-6)^2}{25} - \frac{(x+3)^2}{75} = 1$

(2, 5), (2, −11); Focos: $(2, -3 \pm \sqrt{145})$

39. Centro: (−1, 2); vértices: (11, 2), (−13, 2); Focos: (12, 2), (−14, 2).

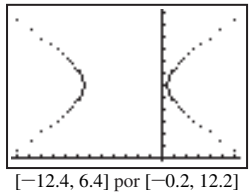
41. Centro: (2, −3); vértices:

43.



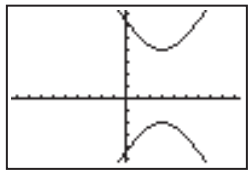
[−14.1, 14.1] por [−9.3, 9.3]

45.



[−12.4, 6.4] por [−0.2, 12.2]

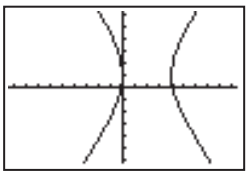
47.



[−9.4, 9.4] por [−5.2, 7.2]

Vértices: (3, −2), (3, 4);
Focos : $(3, 1 \pm \sqrt{13})$; $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$

49.



[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

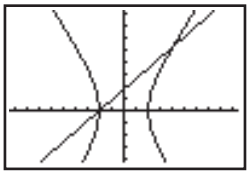
Vértices: (0, 1), (4, 1); Focos: $(2 \pm \sqrt{13}, 1)$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

51. $\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{16} = 1$

55. $a = 1440$, $b = 600$, $c = 1{,}560$, $e = 13/12$;
El Sol está centrado en (1,560, 0).

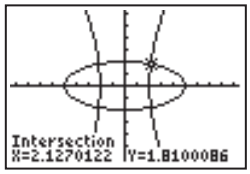
57. Un rumbo y distancia de alrededor de 40.29° y 1371.11 millas, respectivamente.

59. $(-2, 0), (4, 3\sqrt{3})$



[−9.4, 9.4] por [−4.2, 8.2]

61. a)



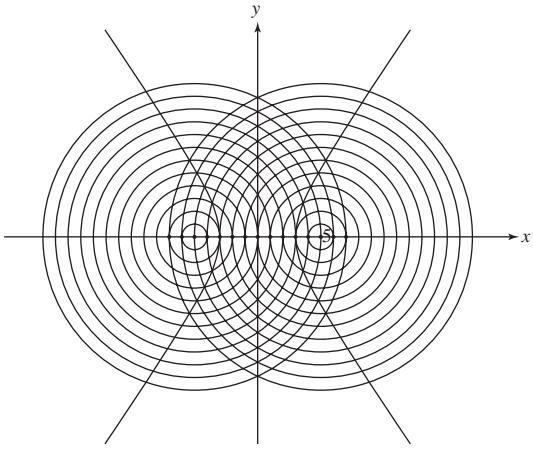
[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

Cuatro soluciones: $(\pm 2.13, \pm 1.81)$

b) $\left(\pm 10\sqrt{\frac{29}{641}}, \pm 10\sqrt{\frac{21}{641}}\right)$

63. Verdadero, ya que $c - a = ae - a$. **65.** B **67.** B

69. a–d)



e) $x^2/9 - y^2/16 = 1$

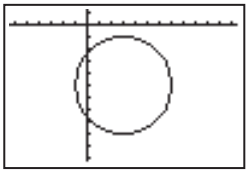
SECCIÓN 8.4

Repaso rápido 8.4

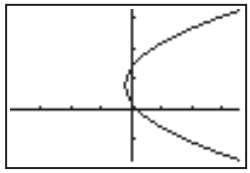
1. $\cos 2\alpha = 5/13$ **3.** $\cos 2\alpha = 1/2$ **5.** $\alpha = \pi/4$ **7.** $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$ **9.** $\operatorname{sen} \alpha = 1/\sqrt{12}$

Ejercicios 8.4

1. $y = -5 \pm \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$ **3.** $y = 4 \pm 2\sqrt{2x + 2}$

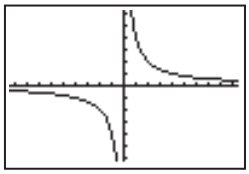


[−6.4, 12.4] por [−11.2, 1.2]

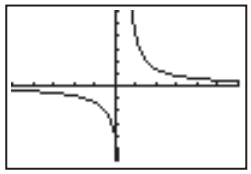


[−19.8, 17.8] por [−8.4, 16.4]

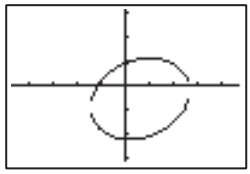
5. $y = 4/x$ **7.** $y = 8/(x - 1)$ **9.** $y = \frac{1}{6}(x - 4 \pm \sqrt{-23x^2 + 28x + 88})$



[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

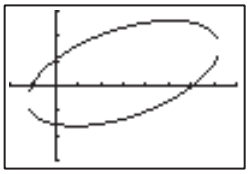


[−10, 12] por [−12, 12]



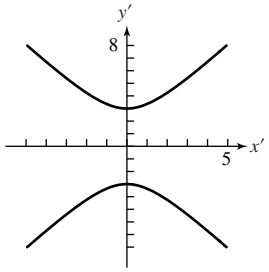
[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

11. $y = \frac{1}{4}(x - 1 \pm \sqrt{3(-x^2 + 6x + 9)})$ **13.** $x^2 = -4y$ **15.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **17.** $(x', y') = (4, -1)$ **19.** $(x', y') = (5, -3 - \sqrt{5})$

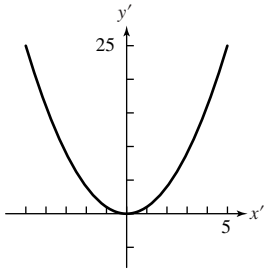


[−2, 8] por [−3, 3]

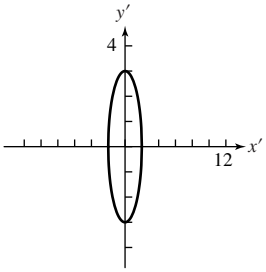
21. Hipérbola: $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1; \frac{(y')^2}{9} - \frac{(x')^2}{4} = 1$



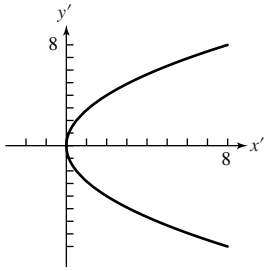
23. Parábola: $(x + 1)^2 = y - 2; (x')^2 = y'$



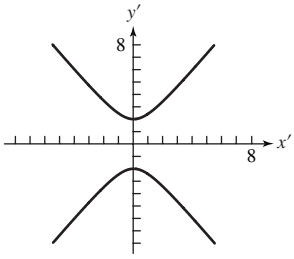
25. Elipse: $\frac{(y+2)^2}{9} + \frac{(x-1)^2}{4} = 1; \frac{(y')^2}{9} + \frac{(x')^2}{4} = 1$



27. Parábola: $(y - 2)^2 = 8(x - 2); (y')^2 = 8x'$



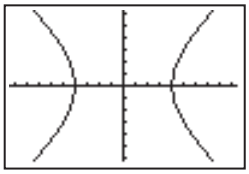
29. Hipérbola: $\frac{y^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{2} = 1; \frac{(y')^2}{4} - \frac{(x')^2}{2} = 1$

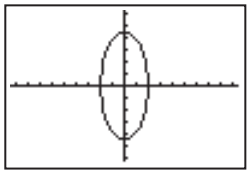


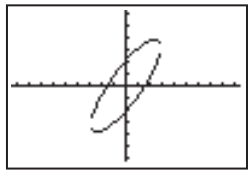
31. La distancia horizontal desde O a P es $x = h + x' = x' + h$, y la distancia vertical es $y = k + y' = y' + k$.

33. $(3\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/2)$ **35.** $\approx (-5.94, 2.38)$

37. Hipérbola: $\frac{(x')^2}{16} - \frac{(y')^2}{16} = 1$ **39.** Elipse: $\frac{(y')^2}{20} + \frac{(x')^2}{4} = 1$ **41.** Elipse: $y = \frac{10x \pm 2\sqrt{90 - 11x^2}}{9}$


[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]


[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]


[−9.4, 9.4] por [−6.2, 6.2]

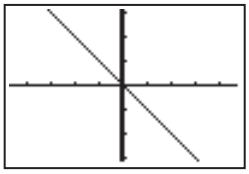
$\alpha \approx 0.954 \approx 54.65°$

43. $-24 < 0$; elipse. **45.** 0; parábola. **47.** $-48 < 0$; elipse. **49.** $12 > 0$; hipérbola. **51.** $-12 < 0$; elipse.

53. En el sistema de coordenadas "viejo", el centro es (0, 0), los vértices son $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, y los focos son (3, 3) y (−3, −3). **57.** Verdadero, ya que no hay término *xy*. **59.** B **61.** A

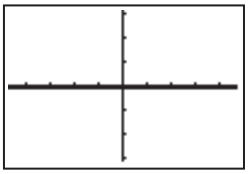
63. a) $y = \pm x$ **b)** $y = 2x + 3/2$, $y = (-1/2)x + 21/2$.

69. Rectas que se intersecan.


[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

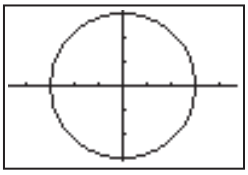
Un plano que contiene al eje de un cono interseca al cono.

Una recta:


[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

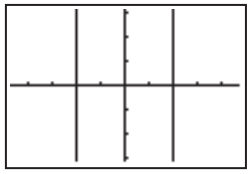
Un plano que contiene a un generador de un cono interseca al cono.

Circunferencia:


[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

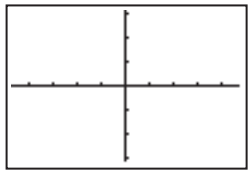
Un plano perpendicular al eje de un cono interseca al cono, pero no a su vértice.

Rectas paralelas:


[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

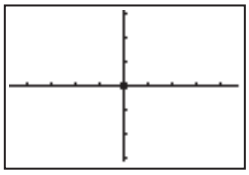
Un cono degenerado se crea mediante un generador que es paralelo al eje, produciendo un cilindro. Un plano paralelo a un generador del cilindro interseca al cilindro y su interior.

Sin gráfica:


[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

Un plano paralelo a un generador de un cilindro que no interseca al cilindro. También, un cono degenerado se crea mediante un generado que es perpendicular a su eje, produciendo un plano. Un segundo plano perpendicular al eje de este cono degenerado no lo interseca.

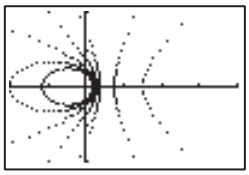
Punto:


[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

Un plano perpendicular al eje de un cono interseca al vértice del cono.

SECCIÓN 8.5

Exploración 1



[−12, 24] por [−12, 12]

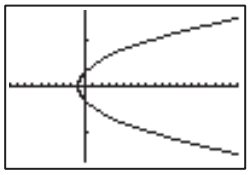
$e = 0.7$, $e = 0.8$: una elipse; $e = 1$: una parábola; $e = 1.5$, $e = 3$: una hipérbola. Las gráficas tienen un foco común, (0, 0) y una directriz común, la recta $x = 3$. Conforme e aumenta, las gráficas se alejan del foco y de la directriz.

Repaso rápido 8.5

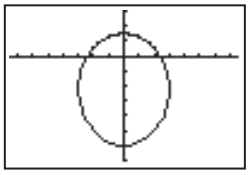
1. $r = -3$ **3.** $\theta = \frac{7\pi}{6}$, $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ **5.** El foco es (0, 4) y la directriz es $y = -4$. **7.** Focos: $(\pm\sqrt{5}, 0)$; vértices: $(\pm 3, 0)$
9. Focos: $(\pm 5, 0)$; vértices: $(\pm 4, 0)$

Ejercicios 8.5

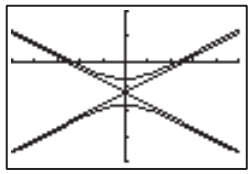
1. $r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$; Parábola **3.** $r = \frac{12}{5 + 3\operatorname{sen}\theta}$; Elipse **5.** $r = \frac{7}{3 - 7\operatorname{sen}\theta}$; Hipérbola



[−10, 20] por [−10, 10]



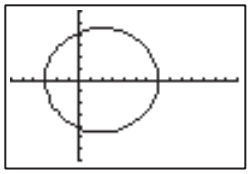
[−7.5, 7.5] por [−7, 3]



[−5, 5] por [−4, 2]

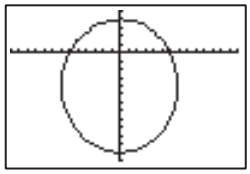
7. $e = 1$, Parábola; Directriz: $x = 2$ **9.** $e = 1$, parábola; directriz: $y = -\frac{5}{2} = -2.5$
11. $e = \frac{5}{6}$, elipse; directriz: $y = 4$. **13.** $e = \frac{2}{5} = 0.4$, elipse; directriz: $x = 3$.
15. (b); [−15, 5] por [−10, 10] **17.** (f); [−5, 5] por [−3, 3] **19.** (c);]−10, 10] por [−5, 10]
21. $r = \frac{12}{5 + 3\cos\theta}$ **23.** $r = \frac{3}{2 + \operatorname{sen}\theta}$ **25.** $r = \frac{15}{2 + 3\cos\theta}$
27. $r = \frac{12}{2 + 3\operatorname{sen}\theta}$ **29.** $r = \frac{6}{5 + 3\cos\theta}$

31.



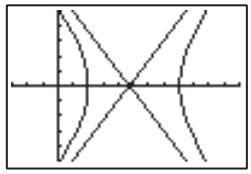
[−6, 14] por [−7, 6]

33.



[−13, 14] por [−13, 5]

35.



[−3, 12] por [−5, 5]

$e = 0.4$, $a = 5$, $b = \sqrt{21}$, $c = 2$ $e = \frac{1}{2}$, $a = 8$, $b = 4\sqrt{3}$, $c = 4$ $e = \frac{5}{3}$, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$

37. $\frac{9(y - 4/3)^2}{64} + \frac{3x^2}{16} = 1$ **39.** $y^2 = 4(x + 1)$

41. Distancia del perihelio ≈ 0.54 UA; distancia del afelio ≈ 35.64 UA. **43. a)** $v \approx 1{,}551$ m/seg = 1.551 km/seg. **b)** alrededor de 2 horas 14 minutos. **45.** Verdadero. Para una circunferencia, $e = 0$, por lo que la ecuación es $r = 0$, que se grafica como un punto.
47. D **49.** B

51. c)

Planeta	Distancia del perihelio (UA)	Distancia del afelio (UA)
Mercurio	0.307	0.467
Venus	0.718	0.728
Tierra	0.983	1.017
Marte	1.382	1.665
Júpiter	4.953	5.452
Saturno	9.020	10.090

d) La mayor diferencia es para Saturno.

55. $5r - 3r\cos\theta = 16 \Rightarrow 5r = 3x + 16$. Por lo que, $25r^2 = 25(x^2 + y^2) = (3x + 16)^2$. $25x^2 + 25y^2 = 9x^2 + 96x + 256 \Rightarrow 16x^2 - 96x + 25y^2 = 256$. Completando el cuadrado se obtiene $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, el resultado deseado.

SECCIÓN 8.6

Repaso rápido 8.6

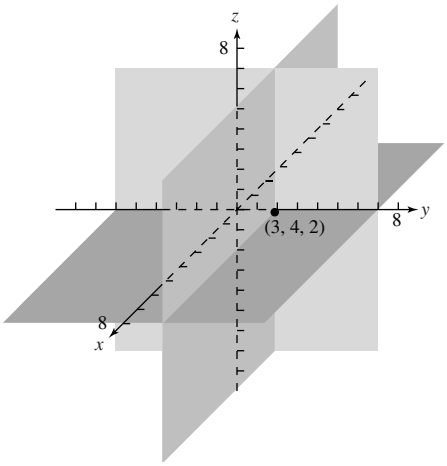
1. $\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$ **3.** P está en la circunferencia de radio 5 y con centro en $(2, -3)$.

5. $\left\langle \dfrac{-4}{\sqrt{41}}, \dfrac{5}{\sqrt{41}} \right\rangle$ **7.** Circunferencia de radio 5 con centro en $(-1, 5)$.

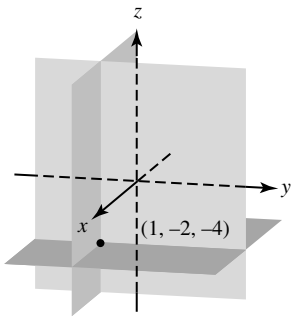
9. Centro: $(-1, 3)$; radio: 2.

Ejercicios 8.6

1.



3.



5. $\sqrt{53}$

7. $\sqrt{(a-1)^2 + (b+3)^2 + (c-2)^2}$

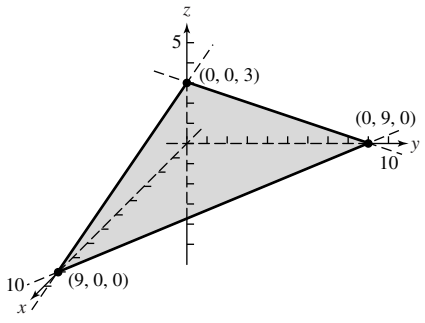
9. $(1, -1, 11/2)$

11. $(x - 1, y + 4, z + 3)$

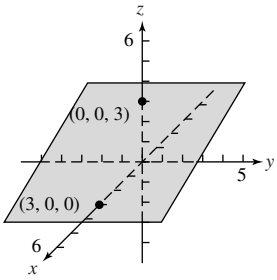
13. $(x-5)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 64$

15. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = a$

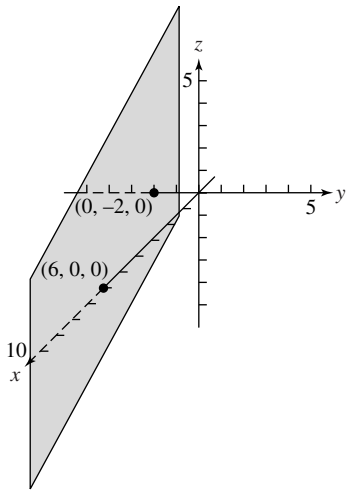
17.



19.



21.



23. $\langle -2, 4, -8 \rangle$

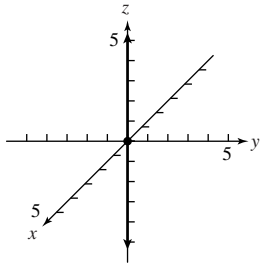
25. -84

27. -20

29. $\left\langle \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle$ **31.** $\langle -3, 4, -5 \rangle$ **33.** $\mathbf{v} = -195.01\mathbf{i} - 7.07\mathbf{j} + 68.40\mathbf{k}$ **35.** $\mathbf{r} = \langle 2, -1, 5 \rangle + t\langle 3, 2, -7 \rangle$; $x = 2 + 3t$, $y = -1 + 2t$, $z = 5 - 7t$ **37.** $\mathbf{r} = \langle 6, -9, 0 \rangle + t\langle 1, 0, -4 \rangle$; $x = 6 + t$, $y = -9$, $z = -4t$ **39.** $\sqrt{30}$ **41.** $\mathbf{r} = \langle -1, 2, 4 \rangle + t\langle 1, 4, -7 \rangle$

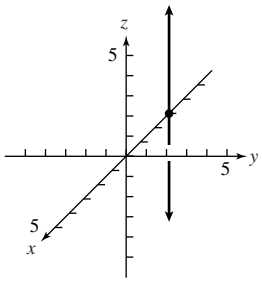
43. $x = -1 + 3t$, $y = 2 - 6t$, $z = 4 - 3t$ **45.** $x = \frac{1}{2}t$, $y = 6 - 7t$, $z = -3 + \frac{11}{2}t$ **47.** Escaleno.

49. a)



b) El eje z; una recta que pasa por el origen en la dirección $\mathbf{k}$.

51. a)



b) la intersección del plano xz ($y = 0$) y el plano $x = -3$; una recta paralela al eje z que pasa por $(-3, 0, 0)$.

53. $\mathbf{r} = \langle x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t, z_1 + (z_2 - z_1)t \rangle$

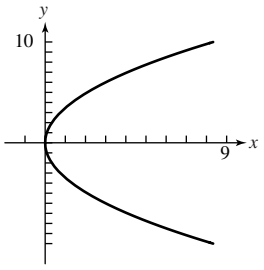
57. Verdadero. La ecuación puede verse como una ecuación con tres variables, donde el coeficiente de z es cero.

59. B **61.** C **65.** $\langle -1, -5, -3 \rangle$

67. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \langle 1, 0, 0 \rangle \times \langle 0, 1, 0 \rangle = \langle 0 - 0, 0 - 0, 1 - 0 \rangle = \langle 0, 0, 1 \rangle = \mathbf{k}$

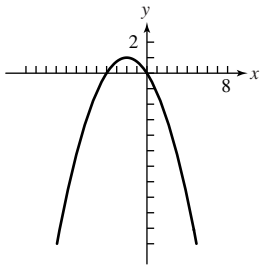
EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

1.



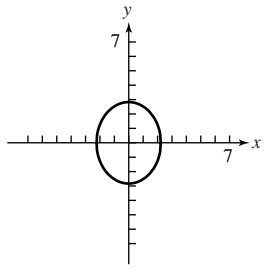
Vértice: (0, 0); foco: (3, 0); directriz: $x = -3$; ancho focal: 12

3.



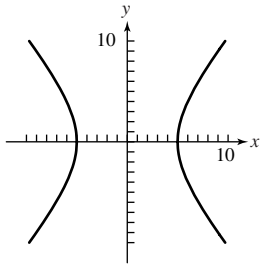
Vértice: $(-2, 1)$; foco: (2, 0); directriz: $y = 2$; ancho focal: 4

5.



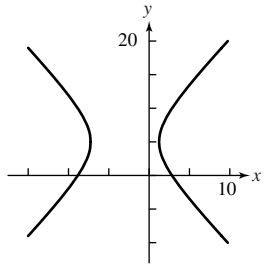
Elipse; centro: (0, 0); vértice: $(0, \pm 2\sqrt{2})$; focos: $(0, \pm\sqrt{3})$

7.



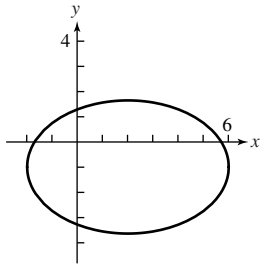
Hipérbola; centro: (0, 0); vértices: $(\pm 5, 0)$; focos: $(\pm\sqrt{61}, 0)$

9.



Hipérbola; centro: $(-3, 5)$; vértices: $(-3 \pm 3\sqrt{2}, 5)$; focos: $(-3 \pm \sqrt{46}, 5)$

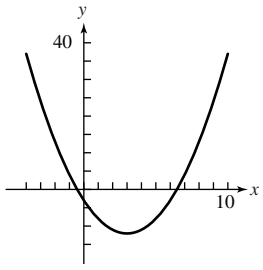
11.



Elipse; centro: $(2, -1)$; vértices: $(6, -1)$, $(-2, -1)$; focos: $(5, -1)$, $(-1, -1)$

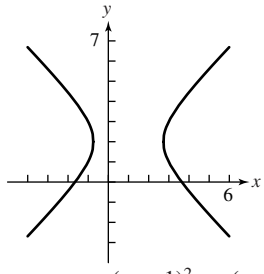
13. (b) **15.** (h) **17.** (f) **19.** (c)

21.



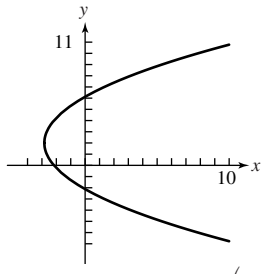
Parábola: $(x - 3)^2 = y + 12$

23.



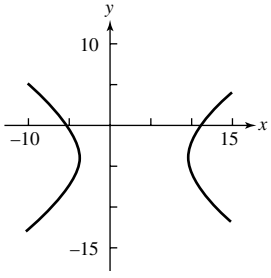
Hipérbola: $\dfrac{(x-1)^2}{3} - \dfrac{(y-2)^2}{3} = 1$

25.



Parábola: $(y - 2)^2 = 6\left(x + \dfrac{17}{6}\right)$

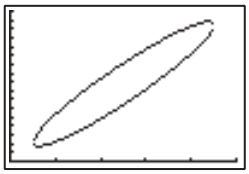
27.



Hipérbola: $\dfrac{(y+4)^2}{30} - \dfrac{(x-3)^2}{45} = 1$

29. Véase la demostración en la página 635.

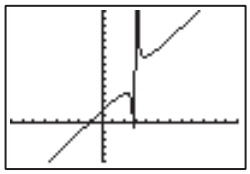
31.



[0, 25] por [0, 17]

Elipse: $y = \frac{1}{12}[8x + 5 \pm \sqrt{-8x^2 + 200x - 455}]$

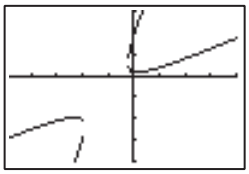
33.



[−8, 12] por [−5, 15]

Hipérbola: $y = \frac{3x^2 - 5x - 10}{2x - 6}$

35.



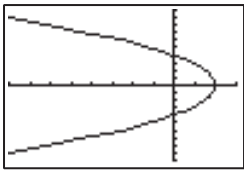
[−24, 20] por [−20, 15]

Hipérbola: $y = \frac{1}{4}[7x + 20 \pm \sqrt{25x^2 + 272x + 280}]$

37. $y^2 = 8x$ **39.** $(x + 3)^2 = 12(y - 3)$ **41.** $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ **43.** $x^2/9 + (y - 2)^2/5 = 1$

45. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1$ **47.** $\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y - 1)^2}{16} = 1$ **49.** $x^2/25 + y^2/4 = 1$ **51.** $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 1$ **53.** $x^2/9 - y^2/25 = 1$

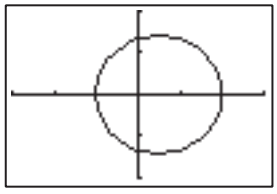
55.



[−8, 3] por [−10, 10]

Parábola: $y^2 = -8(x - 2)$

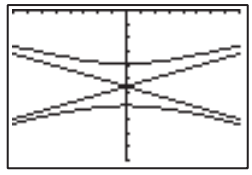
57.



[−3, 3] por [−2, 2]

Elipse: $\frac{4(x - 1/2)}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$

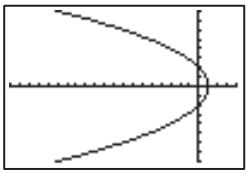
59.



[−8, 8] por [−11, 0]

Hipérbola: $\frac{81(y + 49/9)^2}{196} - \frac{9x^2}{245} = 1$

61.



[−20, 4] por [−8, 8]

Parábola: $y^2 = -4(x - 1)$

63. $\sqrt{69}$

65. $\langle 0, -3, -2 \rangle$

67. -13

69. $\langle 3/5, -4/5, 0 \rangle$

71. $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 16$

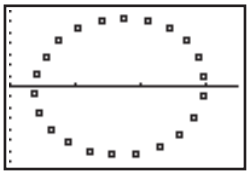
73. $\boldsymbol{r} = \langle -1, 0, 3 \rangle + t\langle -3, 1, -2 \rangle$

75. (0, 4.5) **79.** En el apogeo, $v \approx 2{,}633$ m/seg; en el perigeo, $v \approx 9{,}800$ m/seg.

Proyecto del capítulo 8

Las respuestas están basadas en los datos muestra que se proporcionan

1.

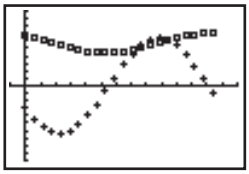


[0.4, 0.75] por [−0.7, 0.7]

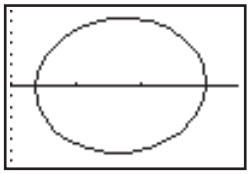
3. Con respecto a la gráfica de la elipse, el punto (h, k) representa el centro de la elipse.

El valor de a es el semieje mayor, b es el semieje menor.

5. Las ecuaciones paramétricas para los datos de muestra son $x_{1T} \approx 0.131 \operatorname{sen}(4.80T + 2.10) + 0.569$ y $y_{1T} \approx 0.639 \operatorname{sen}(4.80T - 2.65)$



[−0.1, 1.4] por [−1, 1]



[0.4, 0.75] por [−0.7, 0.7]

SECCIÓN 9.1

Exploración 1

1. 6 **3.** No.

Repaso rápido 9.1

1. 52 **3.** 6 **5.** 10 **7.** 11 **9.** 64

Ejercicios 9.1

1. 6 **3.** 120 **5.** 12 **7.** 362,880 (ALGORITM) **9.** 34,650 **11.** 1716 **13.** 24
15. 30 **17.** 120 **19.** Combinaciones.
21. Combinaciones. **23.** 19,656,000 **25.** 36 **27.** 2300
29. 17,296 **31.** 37,353,738,800 **33.** 41 **35.** 7776
37. 511 **39.** 12 **41.** 1024
43. Verdadero. Ambas iguales a $\dfrac{n!}{a!\,b!}$.
45. D **47.** B
51. a) 12 **b)** ¡Hay 12 factores de 5 en 50!, uno en 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40 y dos factores en 25 y 50. ¡Cada factor 5, cuando se aparean con uno de los 47 factores de 2, da un factor de 10 y en consecuencia un 0 al final de 50!
55. 3 **57.** ≈20,123 años

SECCIÓN 9.2

Exploración 1

1. 1, 3, 3, 1; éstos son (en orden) los coeficientes en el desarrollo de $(a + b)^3$.
3. {1, 5, 10, 10, 5, 1}; éstos son (en orden) los coeficientes en el desarrollo de $(a + b)^5$.

Repaso rápido 9.2

1. $x^2 + 2xy + y^2$ **3.** $25x^2 - 10xy + y^2$
5. $9s^2 + 12st + 4t^2$ **7.** $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$
9. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

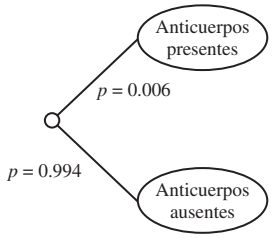
Ejercicios 9.2

1. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ **3.** $x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$ **5.** $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
7. $p^8 + 8p^7q + 28p^6q^2 + 56p^5q^3 + 70p^4q^4 + 56p^3q^5 + 28p^2q^6 + 8pq^7 + q^8$ **9.** 36 **11.** 1 **13.** 364 **15.** 126,720
17. $f(x) = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$ **19.** $h(x) = 128x^7 - 448x^6 + 672x^5 - 560x^4 + 280x^3 - 84x^2 + 14x - 1$
21. $16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$ **23.** $x^3 - 6x^{5/2}y^{1/2} + 15x^2y - 20x^{3/2}y^{3/2} + 15xy^2 - 6x^{1/2}y^{5/2} + y^3$
25. $x^{-10} + 15x^{-8} + 90x^{-6} + 270x^{-4} + 405x^{-2} + 243$
35. Verdadero. Los signos de los coeficientes se determinan mediante las potencias de $(-y)$.
37. C **39.** A
41. a) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 **b)** Aparecen en forma diagonal en el triángulo, iniciando con unos en el renglón 2.
43. $2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{0} 1^n 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} 1^2 + \cdots + \binom{n}{n} 1^0 1^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$

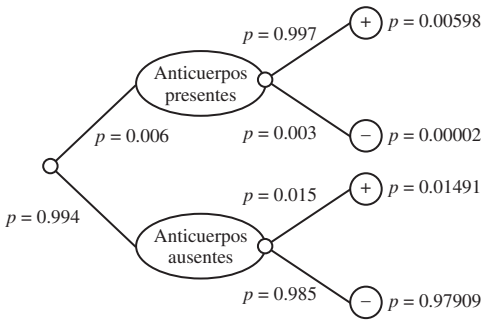
SECCIÓN 9.3

Exploración 1

1.



3.



5. ≈ 0.286

Repaso rápido 9.3

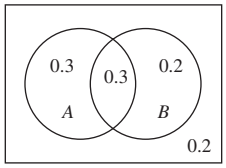
1. 2 **3.** 8 **5.** 2,598,960 **7.** 120 **9.** $\frac{1}{12}$

Ejercicios 9.3

1. 1/9 **3.** 5/12 **5.** 1/4 **7.** 5/12 **9. a)** No; los números no suman 1. **b)** Sí, suponiendo que el gerbo no puede estar en más de un compartimiento a la vez, las proporciones no pueden sumar más de 1.

11. 0.4 **13.** 0.2 **15.** 0.7 **17.** 0.09 **19.** 0.08 **21.** 0.64 **23.** 1/134,596 **25.** 5/3542

27. a)



b) 0.3 **c)** 0.2 **d)** 0.2 **e)** sí **29.** 0.64 **31.** 3/5 **33.** 19/30 **35. a)** 0.67 **b)** 0.33

39. a) 86/127 **b)** 91/127 **c)** 62/127 **41.** 1/36 **43.** 1/1024 **45.** 1/1024

47. 45/1024 **49.** 1023/1024 **51.** Falso. Un espacio muestral consiste de resultados, que no necesariamente son igualmente probables.

53. D **55.** A **57. a)**

Tipo de bagel	Probabilidad
Sencillo	0.37
Cebolla	0.12
Centeno	0.11
Canela pasas	0.25
Pasta fermentada	0.15

b) ≈ 0.051

59. a) ≈ 2 **b)** sí **c)** $\approx 1.913\%$

61. a) \$1.50 **b)** 1/3

SECCIÓN 9.4

Repaso rápido 9.4

1. 19 **3.** 80 **5.** 10/11 **7.** 2560 **9.** 15

Ejercicios 9.4

1. $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}; \frac{101}{100}$ **3.** 0, 6, 24, 60, 120, 210; 999,900 **5.** 8, 4, 0, −4; −20 **7.** 2, 6, 18, 54; 4374 **9.** 2, −1, 1, 0; 3

11. Diverge. **13.** Converge a 0. **15.** Converge a −1 **17.** Converge a 0. **19.** Diverge.

21. a) 4 **b)** 42 **c)** $a_1 = 6$ y $a_n = a_{n-1} + 4$ para $n \geq 2$ **d)** $a_n = 6 + 4(n - 1)$

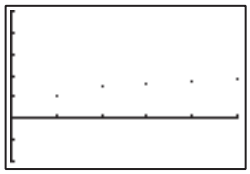
23. a) 3 **b)** 22 **c)** $a_1 = -5$ y $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n \geq 2$ **d)** $a_n = -5 + 3(n - 1)$

25. a) 3 **b)** 4374 **c)** $a_1 = 2$ y $a_n = 3a_{n-1}$ para $n \geq 2$ **d)** $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

27. a) −2 **b)** −128 **c)** $a_1 = 1$ y $a_n = -2a_{n-1}$ para $n \geq 2$ **d)** $a_n = (-2)^{n-1}$

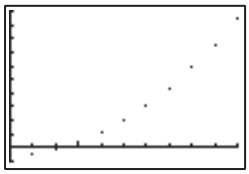
29. $a_1 = -20$; $a_n = a_{n-1} + 4$, para $n \geq 2$ **31.** $a_1 = \pm\frac{3}{2}$, $r = \pm 2$, y $a_n = 3(\pm 2)^{n-2}$

33.



[0, 5] por [−2, 5]

35.



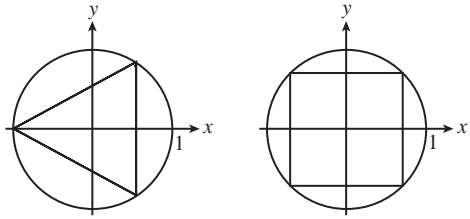
[0, 10] por [−10, 100]

37. 700, 702.3, 704.6, 706.9, . . . , 815, 817.3 **39.** 775 **41.** 9

43. Verdadero. La razón común r debe ser positiva, así que los signos del primer término determinan el signo de cada número en la sucesión.

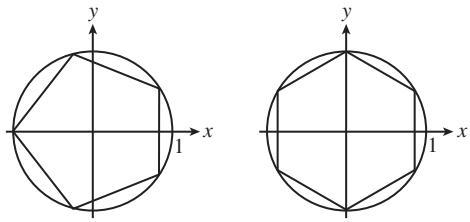
45. A **47.** E **49. b)** 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233

51. a)



a) b)

b) $a_n \to 2\pi$ cuando $n \to \infty$



c) d)

55. $a_1 = [1 \quad 1]$, $a_2 = [1 \quad 2]$, $a_3 = [2 \quad 3]$, $a_4 = [3 \quad 5]$, $a_5 = [5 \quad 8]$, $a_6 = [8 \quad 13]$, $a_7 = [13 \quad 21]$. Las entradas en los términos de esta sucesión son parejas sucesivas de términos de la sucesión de Fibonacci.

SECCIÓN 9.5

Exploración 1

1. 45 **3.** 1 **5.** $\frac{1}{3}$

Exploración 2

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$ **3.** 101

5. La suma en 4 incluye dos copias de la misma progresión, así que es el doble de la suma de la progresión. La respuesta es 5050.

Repaso rápido 9.5

1. 22 **3.** 27 **5.** 512 **7.** −40 **9.** 55

Ejercicios 9.5

1. $\sum_{k=1}^{11} (6k - 13)$ **3.** $\sum_{k=1}^{n+1} k^2$ **5.** $\sum_{k=0}^{\infty} 6(-2)^k$ **7.** 18 **9.** 3240 **11.** 975 **13.** 24,573 **15.** $50.4(1 - 6^{-9}) \approx 50.4$ **17.** 155

19. $\frac{8}{3}(1 - 2^{-12}) \approx 2.666$ **21.** −196,495,641 **23. a)** 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, 0.333333; convergente **b)** 1, −1, 2, −2, 3, −3; divergente

25. Sí; 12 **27.** No **29.** Sí; 1 **31.** 707/99 **33.** $-\frac{17{,}251}{999}$ **35. a)** 1.1 **b)** $20{,}000(1.1)^n$ **c)** \$370,623.34

37. a) 120; 1 + 0.07/12 **b)** \$20,770.18 **39.** ≈ 24.05 m

41. Falso. La serie bien podría divergir.

43. A **45.** C **47. a)** Área central: 19,237,759 personas; área sureste: 42,614,977 personas **b)** Área central: 517,825 millas^2; área sureste: 348,999 mi^2 **c)** Área central: ≈ 37.15 personas/milla^2; Área sureste: ≈ 122.11 personas/milla^2.

49.

n	F_n	S_n	$F_{n+2} - 1$
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	4	4
4	3	7	7
5	5	12	12
6	8	20	20
7	13	33	33
8	21	54	54
9	34	88	88

Conjetura: $S_n = F_{n+2} - 1$

SECCIÓN 9.6

Exploración 1

Si n es impar, inicie con la torre de más a la derecha, y si n es par con la torre del centro.

Exploración 2

1. Sí. **3.** Todos siguen siendo primos.

Repaso rápido 9.6

1. $n^2 + 5n$ **3.** $k^3 + 3k^2 + 2k$ **5.** $(k + 1)^3$ **7.** 5; $t + 4$; $t + 5$ **9.** $\frac{1}{2}$; $\frac{2k}{3k + 1}$; $\frac{2k + 2}{3k + 4}$

Ejercicios 9.6

1. P_n: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$. P_1 es verdadera: $2(1) = 1^2 + 1$. Ahora suponga que P_k es verdadera: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k^2 + k$. Sume $2(k + 1)$ a ambos lados: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) = k^2 + k + 2(k + 1) = k^2 + 3k + 2 = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k + 1)^2 + (k + 1)$, así que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n \geq 1$.

3. P_n: $6 + 10 + 14 + \cdots + (4n + 2) = n(2n + 4)$. P_1 es verdadera: $4(1) + 2 = 1(2(1) + 4)$.
Ahora suponga que P_k es verdadera: $6 + 10 + 14 + \cdots + (4k + 2) = k(2k + 4)$. Sume $4(k + 1) + 2 = 4k + 6$ a ambos lados; $6 + 10 + 14 + \cdots + /4k + 2) + [4(k + 1) + 2] = k(2k + 4) + 4k + 6 = 2k^2 + 8k + 6 = (k + 1)(2k + 6) = (k + 1)[2(k + 1) + 4]$, así que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n \geq 1$.

5. P_n: $a_n = 5n - 2$. P_1 es verdadera: $a_1 = 5 \cdot 1 - 2 = 3$. Ahora suponga que P_k es verdadera: $a_k = 5k - 2$. Para obtener a_{k+1}, sume 5 a a_k: es decir, $a_{k+1} = (5k - 2) + 5 = 5(k + 1) - 2$. Esto muestra que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadero para toda $n \geq 1$.

7. P_n: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. P_1 es verdadera: $a_1 = 2 \cdot 3^{1-1} = 2 \cdot 3^0 = 2$. Ahora suponga que P_k es verdadera: $a_k = 2 \cdot 3^{k-1}$. Para obtener a_{k+1}, multiplique a_k por 3; es decir, $a_{k+1} = 3 \cdot 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3k = 2 \cdot 3^{(k+1)-1}$. Esto muestra que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n \geq 1$.

9. P_1: $1 = \dfrac{1(1 + 1)}{2}$. P_k: $1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k + 1)}{2}$. P_{k+1}: $1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \dfrac{(k + 1)(k + 2)}{2}$.

11. P_1: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{1 + 1}$. P_k: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{k(k + 1)} = \dfrac{k}{k + 1}$.

P_{k+1}: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{k(k + 1)} + \dfrac{1}{(k + 1)(k + 2)} = \dfrac{k + 1}{k + 2}$.

13. P_n: $1 + 5 + 9 \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$. P_1 es verdadera: $4(1) - 3 = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)$. Ahora suponga que P_k es verdadera: $1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) = k(2k - 1)$. Sumar $4(k + 1) - 3 = 4k + 1$ a ambos lados: $1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) + [4(k + 1) - 3] = k(2k - 1) + 4k + 1 = 2k^2 + 3k + 1 = (k + 1)(2k + 1) = (k + 1)[2(k + 1) - 1]$, así que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n \geq 1$.

15. P_n: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. P_1 es verdadera: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$.

Ahora suponga que P_k es verdadera: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$.

Sume $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ a ambos lados: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$, de modo que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n\geq 1$.

17. P_n: $2^n\geq 2n$. P_1 es verdadera: $2^1\geq 2\cdot 1$ (de hecho, son iguales). Ahora suponga que P_k es verdadera: $2^k\geq 2k$. Entonces $2^{k+1}=2\cdot 2^k\geq 2\cdot 2k=2\cdot(k+k)\geq 2(k+1)$, así que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n\geq 1$.

19. P_n: 3 es un factor de n^3+2n. P_1 es verdadera: 3 es un factor de $1^3+2\cdot 1=3$. Ahora suponga que P_k es verdadera: 3 es un factor de k^3+2k. Entonces $(k+1)^3+2(k+1)=(k^3+3k^2+3k+1)+(2k+2)=(k^3+2k)+3(k^2+k+1)$. Como 3 es un factor de ambos términos, es un factor de la suma, así que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n\geq 1$.

21. P_n: La suma de los primeros n término de una sucesión geométrica con primer término a_1 y razón común $r\neq 1$ es $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$.

P_1 es verdadera: $a_1=\frac{a_1(1-r^1)}{1-r}$. Ahora suponga que P_k es verdadera de modo que $a_1+a_1r+\cdots+a_1r^{k-1}=\frac{a_1(1-r^k)}{(1-r)}$.

Sume a_1r^k ambos lados: $a_1+a_1r+\cdots+a_1r^{k-1}+a_1r^k=\frac{a_1(1-r^k)}{(1-r)}+a_1r^k=\frac{a_1(1-r^k)+a_1r^k(1-r)}{1-r}$

$=\frac{a_1-a_1r^k+a_1r^k-a_1r^{k+1}}{1-r}=\frac{a_1-a_1r^{k+1}}{1-r}$, así que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

23. P_n: $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$. P_1 es verdadera: $\sum_{k=1}^{1}k=1=\frac{1\cdot 2}{2}$. Ahora suponga que P_k es verdadera: $\sum_{i=1}^{k}i=\frac{k(k+1)}{2}$.

Sume $(k+1)$ a ambos lados y tenemos $\sum_{i=1}^{k+1}i=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$, así que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n\geq 1$.

25. 125,250 **27.** $\frac{(n-3)(n+4)}{2}$ **29.** $\approx 3.44\times 10^{10}$ **31.** $\frac{n(n^2-3n+8)}{3}$ **33.** $\frac{n(n-1)(n^2+3n+4)}{4}$

35. El paso inductivo no funciona para 2 personas. Sacándolas alternadamente se queda 1 persona en la habitación (y un tipo de sangre) cada vez, pero no podemos concluir que sus tipos de sangre sean *iguales entre ellas*.

37. Falso. La inducción matemática es utilizada para mostrar que una proposición P_n es verdadera para todos los enteros positivos.

39. E **41.** B

43. P_n: 2 es un factor de $(n+1)(n+2)$. P_1 es verdadera ya que 2 es un factor de (2)(3). Ahora suponga que P_k es verdadera, de modo que 2 es un factor de $(k+1)(k+2)$. Entonces $[(k+1)+1][(k+1)+2]=(k+2)(k+3)=k^2+5k+6=k^2+3k+2+2k+4=(k+1)(k+2)+2(k+2)$. Como 2 es un factor de ambos términos de esta suma, es un factor de la suma, y así que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

45. Dados cualesquiera dos enteros consecutivos, uno de ellos debe ser par. Por lo tanto, su producto es par. Ya que $n+1$ y $n+2$ son enteros consecutivos, su producto es par. Por lo tanto, 2 es un factor de $(n+1)(n+2)$.

47. P_n: $F_{n+2}-1=\sum_{k=1}^{n}F_k$. P_1 es verdadera ya que $F_{1+2}-1=F_3-1=2-1=1$, que es igual a $\sum_{k=1}^{1}F_k=1$.

Ahora, suponga que P_k es verdadera: $F_{k+2}-1=\sum_{i=1}^{k}F_i$. Entonces $F_{(k+1)+2}-1=F_{k+3}-1=F_{k+1}+F_{k+2}-1$

$=(F_{k+2}-1)+F_{k+1}=\left(\sum_{i=1}^{k}F_i\right)+F_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}F_i$, así que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n\geq 1$.

49. P_n: $a-1$ es un factor de a^n-1. P_1 es verdadera, ya que $a-1$ es un factor de $a-1$. Ahora suponga que P_k es verdadera de modo que $a-1$ es un factor de a^k-1. Entonces $a^{k+1}-1=a\cdot a^k-1=a(a^k-1)+(a-1)$. Ya que $a-1$ es un factor de ambos términos en la suma, es un factor de la suma, y así que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

51. P_n: $3n-4\geq n$, para $n\geq 2$. P_2 es verdadera ya que $3\cdot 2-4\geq 2$. Ahora suponga que P_k es verdadera: $3k-4\geq k$.
Entonces $3(k+1)-4=3k+3-4=(3k-4)+3\geq k+3\geq k+1$ es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n\geq 2$.

53. Utilice P_3 como el paso base y obtenga el paso inductivo representando cualquier eneágono como la unión de un triángulo y un polígono de $n-1$ lados.

SECCIÓN 9.7

Exploración 1

1. El promedio es alrededor de 12.8 **3.** Alaska, Colorado, Georgia, Texas y Utah.

Repaso rápido 9.7

1. ≈ 15.48% **3.** ≈ 14.44% **5.** ≈ 1723 **7.** $235,000 **9.** 1 millón.

Ejercicios 9.7

1.

0	5 8 9
1	3 4 6
2	3 6 8
3	3 9
4	
5	
6	1

3.

Hombres	
6	3 0
6	7 8 8 8
7	1 2 2 3 3 3
7	

5.

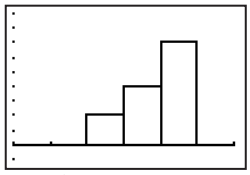
Hombres							Mujeres						
				3	0	6							
	8	8	8	7	6	5	8						
3	3	3	2	2	1	7	1	2					
						7	5	6	7	7	9	9	
						8	0	0					

61 es un dato extremos (*outlier*).

7.

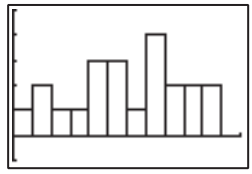
Expectativa de vida (años)	Frecuencia
60.0−64.9	2
65.0−69.9	4
70.0−74.9	6

9.



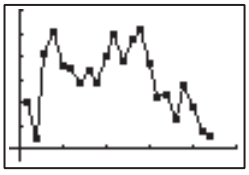
[50, 80] por [−1, 9]

11.



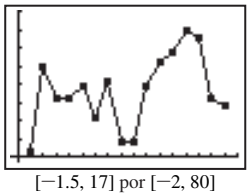
[0, 60] por [−1, 5]

13.



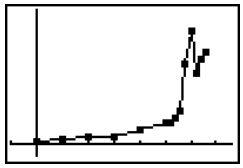
[−1, 25] por [−5, 60]

15.



[−1.5, 17] por [−2, 80]

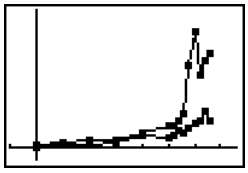
17.



[1965, 2008] por [−1,000, 11,000]

Los ingresos de los hombres con mayores ingresos parecen crecer de manera exponencial, con ingresos inusualmente altos en 1999 y 2000. Como las gráficas muestran sólo los ingresos del jugador que ganó más (en contraste con una media o mediana de todos los jugadores), puede comportarse de manera extraña si el jugador que gana más tiene un muy buen año, como sucedió en el caso de Tiger Woods en 1999 y 2000.

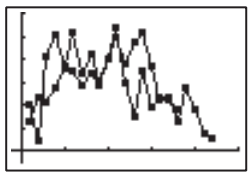
19.



[1965, 2008] por [−1,000, 11,000]

Después de aproximarse a la paridad en 1985, las ganancias de los jugadores de PGA que más ganaron han crecido mucho más rápido que las ganancias de las jugadoras de la LPGA que ganaron más, incluso si no se consideran para la tendencia los inusuales buenos años para Tiger Woods (1999 y 2000).

21.



[−1, 25] por [−5, 60]

Los dos bateadores disfrutaron de éxitos similares.

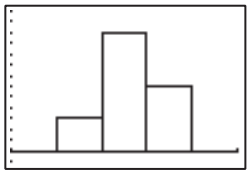
23. a)

28	2
29	3 7
30	
31	6 7
32	7 8
33	5 5 5 8
34	2 8 8
35	3 3 4
36	3 7
37	
38	5

b)

Intervalo	Frecuencia
25.0−29.9	3
30.0−34.9	11
35.0−39.9	6

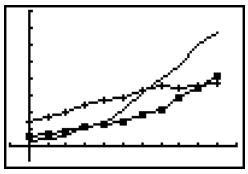
c)



[20, 45] por [−1, 13]

d) El tiempo no es una variable en los datos.

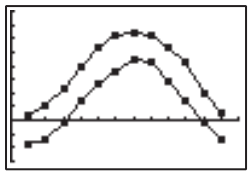
25.



[1890, 2010] por [−4, 40]

27. Falso. Las ramas vacías son importantes para la visualización de la distribución de los datos.

29. C **31.** A **35.**



[0, 13] por [−15, 40]

— = CA; + = NY, ■ = TX

SECCIÓN 9.8

Exploración 1

1. Figura b).

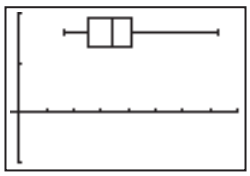
Repaso rápido 9.8

1. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ **3.** $\frac{1}{7}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$ **5.** $\frac{1}{5}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_5 - \bar{x})^2]$

7. $\sum_{i=1}^{8} x_i f_i$ **9.** $\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} (x_i - \bar{x})^2$

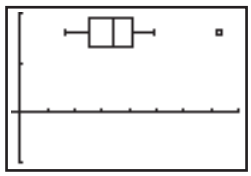
Ejercicios 9.8

1. a) Estadístico. **b)** Parámetro. **c)** Estadístico. **3.** 26.8 **5.** ≈ 60.12 **7.** 3.9 millones. **9.** ≈ 15.2 satélites. **11.** 2
13. 30 carreras/año; ≈ 29.8 carreras/año; Mays. **15.** Moda What2Next.
17. Mediana: 87.85; moda: ninguna. **19.** ≈ 3.61 **21. a)** ≈ 6.42°C **b)** ≈ 6.49°C **c)** El promedio ponderado es el mejor indicador.
23. Willie Mays: resumen de los cinco números: [4, 20, 31.5, 40, 52]; rango: 48; RIC: 20; no hay datos extremos;
Mickey Mantle: resumen de los cinco números: [13, 21, 28.5, 37, 54]; rango: 41; RIC: 16; no hay datos extremos.
25. [28.2, 31.7, 33.5, 35.3, 38.5]; 10.3; 3.6; no hay datos extremos.
27. a)



[−3, 80] por [−1, 2]

b)



[−3, 80] por [−1, 2]

29. 3/11 **31. a)** Mays. **b)** Mays. **33.** $\sigma \approx 9.08$; $\sigma^2 = 82.5$ **35.** $\sigma \approx 186.62$; $\sigma^2 \approx 34828.12$ **37.** $\sigma \approx 1.53$; $\sigma^2 \approx 2.34$
39. No. **41. a)** 68% **b)** 2.5% **c)** Un parámetro. **43.** Falso. La mediana es una medida resistente. **45.** A **47.** B
49. Hay muchas respuestas posibles; se dan ejemplos. **a)** {2, 2, 2, 3, 6, 8, 20} **b)** {1, 2, 3, 4, 6, 48, 48} **c)** {−20, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
51. No. **55.** 75.9 **57.** 5%

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 9

1. 792 **3.** 18,564 **5.** 3,991,680 **7.** 43,670,016 **9.** 14,508,000 **11.** 8,217,822,536 **13.** 26 **15.** 325

17. a) 5040; Meg Ryan. **b)** 778,377,600; Britney Spears. **19.** $32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$

21. $243x^{10} + 405x^8y^3 + 270x^6y^6 + 90x^4y^9 + 15x^2y^{12} + y^{15}$

23. $512a^{27} - 2304a^{24}b^2 + 4608a^{21}b^4 - 5376a^{18}b^6 + 4032a^{15}b^8 - 2016a^{12}b^{10} + 672a^9b^{12} - 144a^6b^{14} + 18a^3b^{16} - b^{18}$

25. -1320 **27.** {1, 2, 3, 4, 5, 6} **29.** {13, 16, 31, 36, 61, 63} **31.** {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

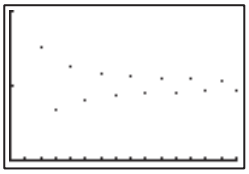
33. {HHH, TTT} **35.** 1/64 **37.** 1/4 **39.** 0.25 **41.** 0.24 **43.** 0.64 **45. (a)** 0.5 **(b)** 0.15 **(c)** 0.35 **(d)** ≈ 0.43

47. 0, 1, 2, 3, 4, 5; 39 **49.** -1, 2, 5, 8, 11, 14; 32 **51.** -5, -3.5, -2, -0.5, 1, 2.5; 11.5 **53.** -3, 1, -2, -1, -3, -4; -76

55. Aritmética con $d = -2.5$; $a_n = 14.5 - 2.5n$ **57.** Geométrica con $r = 1.2$; $a_n = 10 \cdot (1.2)^{n-1}$.

59. Aritmética con $d = 4.5$; $a_n = 4.5n - 15.5$. **61.** $a_n = 3(-4)^{n-1}$; $r = -4$ **63.** -4 **65.** -985.5 **67.** 21/8 **69.** 59,048

71. $3280.\overline{4}$ **73.**



[0, 15] por [0, 2]

75. \$27,441.91 **77.** Converge; 6. **79.** Diverge. **81.** Converge; 3

83. $\sum_{k=1}^{21} (5k - 13)$ **85.** $\sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1)^2$ o $\sum_{k=1}^{\infty} (2k - 1)^2$ **87.** $\dfrac{n(3n + 5)}{2}$ **89.** 4650

91. P_n: $1 + 3 + 6 + \cdots + \dfrac{n(n + 1)}{2} = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$. P_1 es verdadera: $\dfrac{1(1 + 1)}{2} = \dfrac{1(1 + 1)(1 + 2)}{6}$.

Ahora suponga que P_k es verdadera: $1 + 3 + 6 + \cdots + \dfrac{k(k + 1)}{2} = \dfrac{k(k + 1)(k + 2)}{6}$.

Sume $\dfrac{(k + 1)(k + 2)}{2}$ a ambos lados: $1 + 3 + 6 + \cdots + \dfrac{k(k + 1)}{2} + \dfrac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \dfrac{k(k + 1)(k + 2)}{6} + \dfrac{(k + 1)(k + 2)}{2}$

$= (k + 1)(k + 2)\left(\dfrac{k}{6} + \dfrac{1}{2}\right) = (k + 1)(k + 2)\left(\dfrac{k + 3}{6}\right) = \dfrac{(k + 1)((k + 1) + 1)((k + 1) + 2)}{6}$, así que P_{k+1} es verdadera.

Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n \geq 1$.

93. P_n: $2^{n-1} \leq n!$ P_1 es verdadera: $2^{1-1} \leq 1!$ (son iguales). Ahora suponga que P_k es verdadera: $2^{k-1} \leq k!$
Entonces $2^{(k+1)-1} = 2 \cdot 2^{k-1} \leq 2 \cdot k! \leq (k + 1)\,k! = (k + 1)!$, así que P_{k+1} es verdadera. Por lo tanto, P_n es verdadera para toda $n \geq 1$.

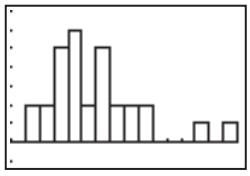
95. a)

9	1 2
10	6 7
11	4 5 5 7 7
12	0 2 4 6 7 7
13	5 6
14	1 6 7 7 8
15	4 8
16	1 4
17	0 6
18	
19	
20	
21	9
22	
23	4

b)

Precio	Frecuencia
90,000– 99,999	2
100,000–109,999	2
110,000–119,999	5
120,000–129,999	6
130,000–139,999	2
140,000–149,999	5
150,000–159,999	2
160,000–169,999	2
170,000–179,999	2
210,000–219,999	1
230,000–239,999	1

c)



[8, 24] por [−1, 7]

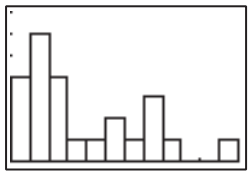
97. a)

12	0 0 4 4
13	1 1 2 6 7 9
14	0 3 4 8
15	6
16	3
17	7 9
18	0
19	0 1 7
20	2
21	
22	
23	0

b)

Longitud en seg	Frecuencia
120−129	4
130−139	6
140−149	4
150−159	1
160−169	1
170−179	2
180−189	1
190−199	3
200−209	1
210−219	0
220−229	0
230−239	1

c)

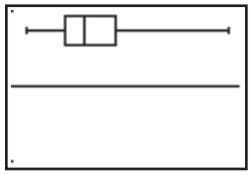


[120, 240] por [0, 7]

99. Resumen de los cinco números: {9.1, 11.7, 13.1, 15.4, 23.4}; rango: 14.3; RIC: 3.7; $\sigma \approx 3.19$, $\sigma^2 \approx 10.14$; datos extremos: 21.9 y 23.4.

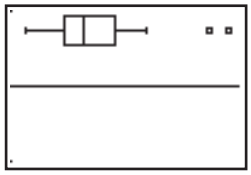
101. Resumen de los cinco números: {120, 131.5, 143.5, 179.5, 230}; rango: 110; RIC: 48; $\sigma = 29.9$, $\sigma^2 = 891.4$; no hay datos extremos.

103. a)



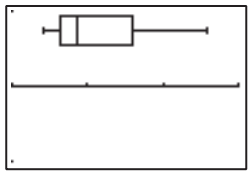
[8, 24] por [−1, 1]

b)



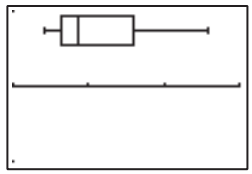
[8, 4] por [−1, 1]

105. a)



[100, 250] por [−1, 1]

b)



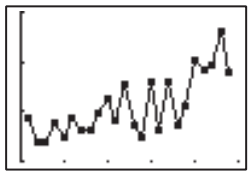
[100, 250] por [−1, 1]

107.

Primeras		Últimas
4 0 0	12	4
9 2 1	13	1 6 7
8 4 3 0	14	
	15	6
3	16	
7	17	9
	18	0
	19	0 1 7
	20	2
	21	
	22	
	23	0

Las canciones estrenadas en los primeros años tienden a ser más breves.

109.



[−1, 25] por [100, 250]

Otra vez, los datos muestran que las canciones que aparecieron al final tienden a ser más largas.

111. 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

113. a) ≈ 0.922 **b)** ≈ 0.075

Proyecto del capítulo 9

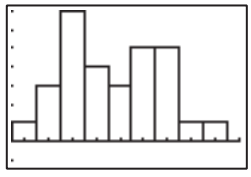
Las respuestas están basadas en los datos que se muestran en la tabla.

1.

5	
5	9
6	1 1 2 3 3 3 4 4 4 4
6	5 6 6 6 7 8 8 9 9 9
7	0 0 1 1 1 2 2 3
7	5

66 0 67 pulgadas.

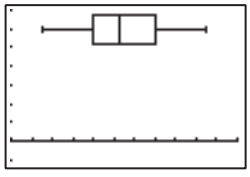
3.



[59, 78] por [−1, 7]

5. El conjunto de datos está bien distribuido y probablemente no tenga datos extremos.

7.



[56, 78] por [−1, 7]

SECCIÓN 10.1

Exploración 1

1. 3 **3.** No son iguales.

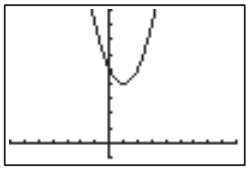
Repaso rápido 10.1

1. $-4/7$ **3.** $y = (3/2)x + 6$ **5.** $y - 4 = \frac{3}{4}(x - 1)$ **7.** $h + 4$ **9.** $-\frac{1}{2(h+2)}$

Ejercicios 10.1

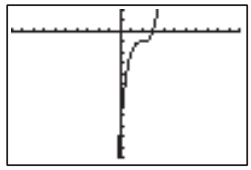
1. 12 millas por hora. **3.** 3 **5.** $4a$

7. 1 **9.** No tiene tangente. **11.** 4



[−7, 9] por [−1, 9]

13. 12



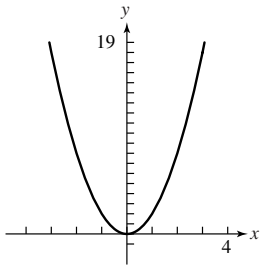
[−10, 11] por [−12, 2]

15. **a)** 48 **b)** 48 pies/seg.

17. **a)** -4

b) $y - 2 = -4(x + 1)$

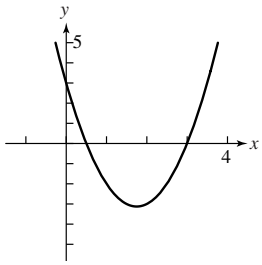
c)



19. **a)** 1

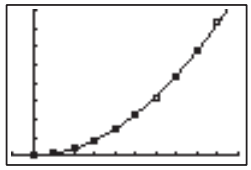
b) $y = x - 5$

c)



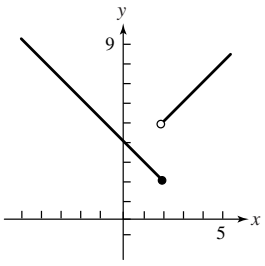
21. -1; 1; ninguna. **23.** -4 **25.** -12 **27.** No existe. **29.** -3

31. $6x + 2$ **33.** **a)** 9 pies/seg; 15 pies/seg. **b)** $f(x) = 8.94x^2 + 0.05x + 0.01$, x = tiempo en seg **c)** ≈ 35.9 pies



[−0.1, 1] por [−0.1, 8]

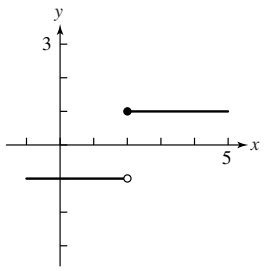
35. **a)**



b) Como la gráfica de la función no tiene una pendiente definida en $x = 2$, la derivada de f no existe en $x = 2$.

c) Las derivadas no existen en los puntos en donde las funciones tienen discontinuidades.

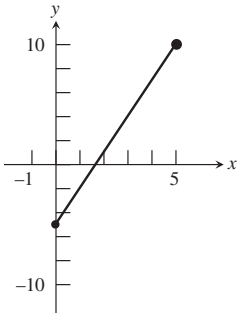
37. a)



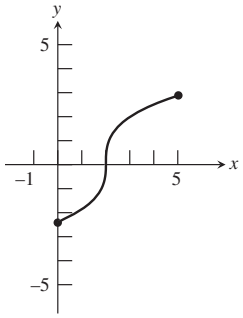
b) Como la gráfica de la función no tiene una pendiente definida en $x = 2$, la derivada de f no existe en $x = 2$.

c) Las derivadas no existen en puntos en donde las funciones tienen discontinuidades.

39. Posible respuesta:



41. Posible respuesta:

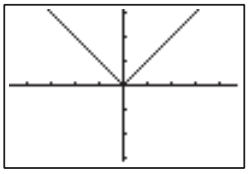


43. La pendiente de la recta es a; $f'(x) = a$.

45. Falso; la velocidad instantánea es un límite de las velocidades promedio. Es diferente de cero cuando la pelota se está moviendo.

47. D **49.** C

51.

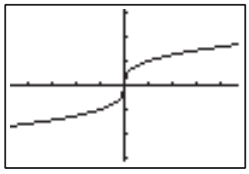


[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

a) No, no existe la derivada ya que la gráfica tiene una esquina en $x = 0$.

b) No

53.



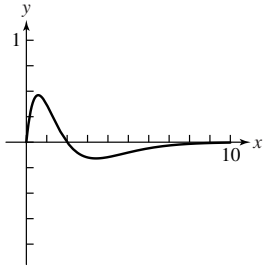
[−4.7, 4.7] por [−3.1, 3.1]

a) No, no hay derivada ya que la gráfica tiene una tangente vertical (no tiene pendiente) en $x = 0$.

b) Sí, $x = 0$.

55. a) 48 pies/seg **b)** 96 pies/seg

57.



SECCIÓN 10.2

Exploración 1

1. 0.1 galón; 1 galón. **3.** 0.000000001 galón; 1 galón.

Repaso rápido 10.2

1. $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}, 2, \frac{25}{8}, \frac{9}{2}, \frac{49}{8}, 8, \frac{81}{8}, \frac{25}{2}$ **3.** $\frac{65}{2}$ **5.** $\frac{505}{2}$ **7.** 228 millas **9.** 4,320,000 pies^3

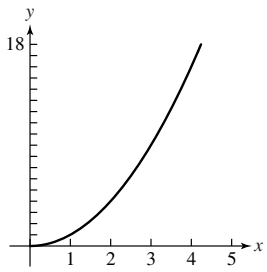
Ejercicios 10.2

1. 195 millas. **3.** 540,000 pies^3. **5.** 2,176 km. **7.** 13; Las respuestas varían. **9.** 13; Las respuestas varían. **11.** 32.5

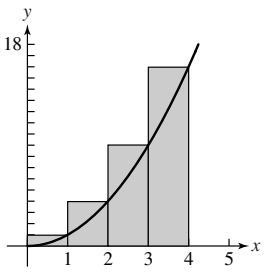
13. $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

15. $\left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right], \left[2, \frac{5}{2}\right], \left[\frac{5}{2}, 3\right], \left[3, \frac{7}{2}\right], \left[\frac{7}{2}, 4\right]$

17. a)

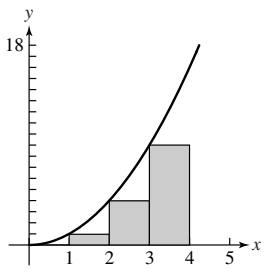


b)



MARD: 30

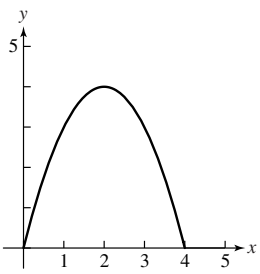
c)



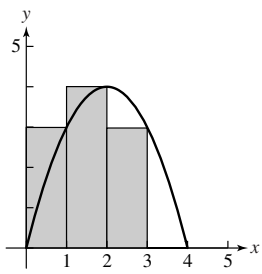
MARI: 14

d) Promedio: 22

19. a)

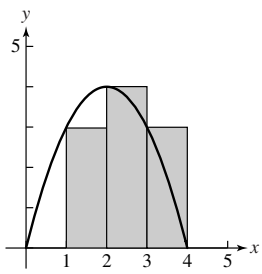


b)



MARD: 10

c)

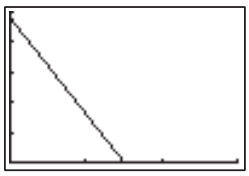


MARI: 10

d) Promedio: 10

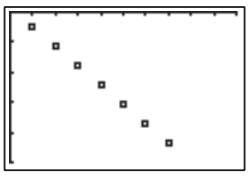
21. 20 **23.** 37.5 **25.** 16.5 **27.** 2π **29.** 2 **31.** 2 **33.** 1 **35.** 4 **37.** 4 **39.** $8k + 12$ **41.** $24 + 4k$ **45.** 64 pies

47. a)



[0, 3] por [0, 50]

49. a)



[0, 2] por [−50, 0]

b) $t = 1.5$ seg **c)** 36 pies. **b)** 33.86 pies

51. Verdadero; el área exacta está dada por el límite cuando $n \to \infty$. **53.** A **55.** C **57.** $\int_0^1 (x - 1)\, dx = -\frac{1}{2}$ **59.** Verdadero.

61. Falso. **63.** Falso.

SECCIÓN 10.3

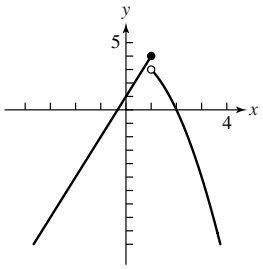
Exploración 2

1. 50; 0

Repaso rápido 10.3

1. a) $-\frac{3}{64}$ **b)** $\frac{1}{16}$ **c)** indefinido **3. a)** $x = -2$ y $x = 2$ **b)** $y = 2$ **5.** b) **7. a)** $[-2, \infty)$ **b)** Ninguno.

9.



Ejercicios 10.3

1. -4 **3.** 7 **5.** $\sqrt{7}$ **7.** 0 **9.** $a^2 - 2$ **11. a)** División entre cero. **b)** $-\frac{1}{6}$ **13. a)** División entre cero. **b)** 3

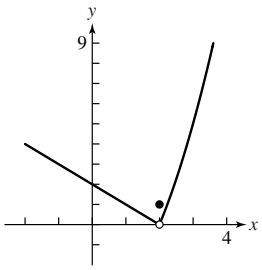
15. a) División entre cero. **b)** -4 **17. a)** La raíz cuadrada de números negativos no está definida en el plano real.
b) El límite no existe.

19. -1 **21.** 0 **23.** 2 **25.** $\ln \pi$

27. a) 3 **b)** 1 **c)** No existe. **29. a)** 4 **b)** 4 **c)** 4

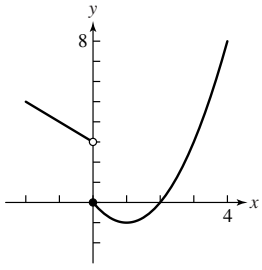
31. a) Verdadera. **b)** Verdadera. **c)** Falsa. **d)** Falsa. **e)** Falsa. **f)** Falsa. **g)** Falsa. **h)** Verdadera. **i)** Falsa.
j) Verdadera. **33. a)** ≈ 2.72 **b)** ≈ 2.72 **c)** ≈ 2.72 **35. a)** 6 **b)** -4 **c)** 16 **d)** -2

37. a)



b) 0; 0
c) 0

39. a)

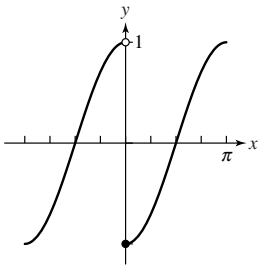


b) 0; 3
c) No existe; $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

41. 2 **43.** 0 **45.** 1 **47.** 0; 0 **49.** ∞; 1 **51. a)** ∞ **b)** $-\infty$ **53. a)** Indefinido. **b)** 0 **55.** $-\infty$; $x = 3$ **57.** ∞; $x = -2$

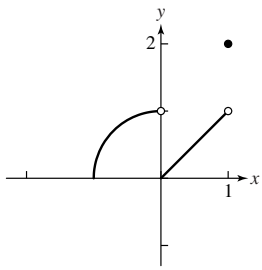
59. ∞; $x = 5$ **61.** 3 **63.** 1 **65.** ∞ **67.** 0 **69.** Indefinido. **71.** $\frac{1}{2}$ **73.** Falso; $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$ **75.** B **77.** C

79. a)



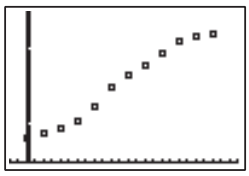
b) $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$
c) $x = \pi$
d) $x = -\pi$

81. a)



b) $(-1, 0) \cup (0, 1)$
c) $x = 1$
d) $x = -1$

83. a)

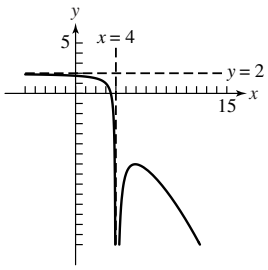


[−2, 25] por [0, 60]

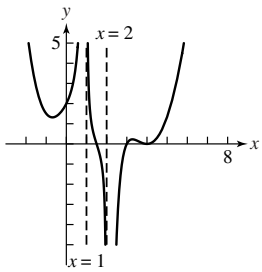
b) $f(x) \approx \dfrac{57.71}{1 + 6.39e^{-0.19x}}$, donde x = el número de meses; $\lim_{x \to \infty} f(x) \approx 57.71$

c) Es alrededor de 58,000.

85.



87.



89. d)

n	A
4	4
8	3.3137
16	3.1826
100	3.1426
500	3.1416
1,000	3.1416
5,000	3.1416
10,000	3.1416
100,000	3.1416

Sí, $A \to \pi$ cuando $n \to \infty$.

e)

n	A
4	36
8	29.823
16	28.643
100	28.284
500	28.275
1,000	28.274
5,000	28.274
10,000	28.274
100,000	28.274

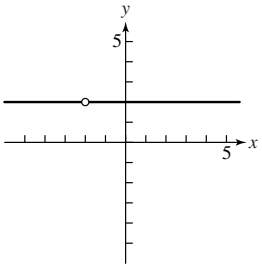
Cuando $n \to \infty$, $A \to 9\pi$.

f) Una posible respuesta:

$$\lim_{n \to \infty} A = \lim_{n \to \infty} nh^2 \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$
$$= h^2 \lim_{n \to \infty} n \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$
$$= h^2\pi = \pi h^2$$

Conforme el número de lados del polígono crece, la distancia entre h y el borde del círculo se hace progresivamente más pequeña. Cuando $n \to \infty$, $h \to$ radio del círculo.

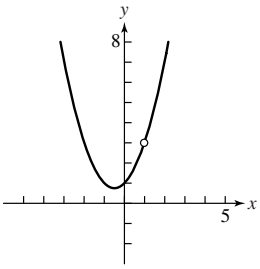
91. a)



b) $y = \dfrac{2x + 4}{x + 2} = \dfrac{2(x + 2)}{x + 2} = 2$

c) $y = 2$

93. a)



b) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$

$= x^2 + x + 1$

c) $y = x^2 + x + 1$

SECCIÓN 10.4

Exploración 1

1. 1.364075504 **3.** $\int_0^{\pi} \text{sen } x\,dx$; sum(seq(sen(0 + K*π/50)*π/50, K, 1, 50)) = 1.999341983; fnInt(sen(X), X, 0, π) = 2

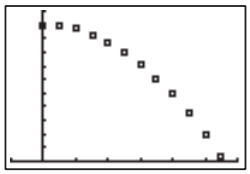
Repaso rápido 10.4

1. 5 **3.** 2/3 **5.** 3 **7.** ≈ 0.5403 **9.** ≈ 1.000

Ejercicios 10.4

1. -4 **3.** -12 **5.** 0 **7.** ≈ 1.0000 **9.** ≈ -3.0000 **11.** 64/3 **13.** 2 **15.** ≈ 0 **17.** 1 **19.** ≈ 3.1416 **21.** 106.61 mi

23. a) -50 pies/seg **b)**



[−1, 6] por [0, 550]

c) $s(t) = -16.08t^2 + 0.36t + 499.77$

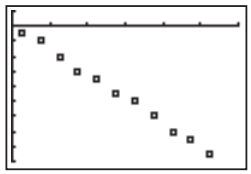
d) ≈ -47.88 pies/seg.

e) ≈ 179.28 pies/seg.

25. a)

Punto medio	$\Delta s/\Delta t$
0.25	−10
0.75	−20
1.25	−40
1.75	−60
2.25	−70
2.75	−90
3.25	−100
3.75	−120
4.25	−140
4.75	−150
5.25	−170

b)



[0, 6] por [−180, 20]

c) Aprox. −47.95 pies/seg; esto es cercano al resultado del ejercicio 23.

27. 100 pies.

31. b)

N	MARI	MARD	Promedio
10	15.04	19.84	17.44
20	16.16	18.56	17.36
50	16.86	17.82	17.34
100	17.09	17.57	17.33

c) fnInt proporciona 17.33; en N_{100}, el promedio es 17.3344.

33. b)

N	MARI	MARD	Promedio
10	7.84	11.04	9.44
20	8.56	10.16	9.36
50	9.02	9.66	9.34
100	9.17	9.49	9.33

c) fnInt proporciona 9.33; en N_{100}, el promedio es 9.3344.

35. b)

N	MARI	MARD	Promedio
10	98.24	112.64	105.44
20	101.76	108.96	105.36
50	103.90	106.78	105.34
100	104.61	106.05	105.33

c) fnInt proporciona 105.33; en N_{100}, el promedio es 105.3344.

37. b)

N	MARI	MARD	Promedio
10	7.70	8.12	7.91
20	7.81	8.02	7.91
50	7.87	7.95	7.91
100	7.89	7.93	7.91

c) fnInt proporciona 7.91, el mismo resultado que N_{100}.

39. b)

N	MARI	MARD	Promedio
10	1.08	0.92	1.00
20	1.04	0.96	1.00
50	1.02	0.98	1.00
100	1.01	0.99	1.00

c) fnInt proporciona 1, el mismo resultado que N_{100}.

41. b)

N	MARI	MARD	Promedio
10	0.56	0.62	0.59
20	0.58	0.61	0.59
50	0.59	0.60	0.59
100	0.59	0.60	0.59

c) fnInt = 0.59, el mismo resultado que N_{100}.

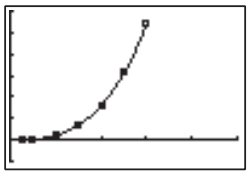
43. Verdadero; la notación NDER se refiere a un cociente de diferencia simétrica utilizando $h = 0.001$ **45.** B **47.** C

49. a) $4x + 3$ **b)** $3x^2$ **c)** 11.002, 11 **d)** El método simétrico proporciona una aproximación más cercana a $f'(2) = 11$. **e)** 12.006001; 12.000001; simétrica

51. Los valores de $f(0 + h)$ y $f(0 - h)$ son los mismos. **53. a)** 4 **b)** ≈ 19.67

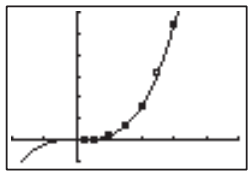
57. b)

x	$A(x)$
0.25	0.0156
0.5	0.125
1	1
1.5	3.375
2	8
2.5	15.625
3	27



[0, 5] por [−5, 30]

c) $y \approx x^3$



[−2, 5] por [−5, 30]

d) El valor exacto de $A(x)$ para cualquier x mayor que cero parece que será x^3.

e) $A'(x) = 3x^2$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 10

1. a) 2 **b)** No existe. **3. a)** 2 **b)** 2

5. -1 **7.** -7 **9.** 0 **11.** 0 **13.** $-\infty$ **15.** ∞

17. $-\frac{1}{4}$ **19.** f tiene asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = -5$; f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ **21.** -8 **23.** $-\frac{1}{9}$ **25.** -1

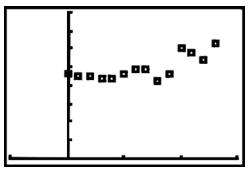
27. $y = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

29. -9 **31. a)** 8.01 **b)** 8

33. 1; $y = x - 1$ **35.** $10x + 7$

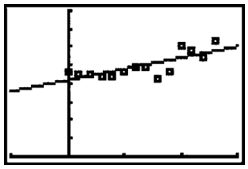
37. MARI: 42.2976; MARD: 40.3776; 41.3376

39. a)

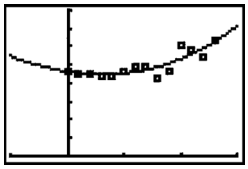


[−5, 15] por [0, 200]

b) 1990 a 1991: −24 centavos por año; 1997 a 1998: −17.5 centavos por año. **c)** 1999 a 2000 **d)** 1997 a 1998 **e)** $y = 3.0270x + 104.6700$ **f)** $y = 0.0048x^3 + 0.3659x^2 - 2.4795x + 116.2006$



[−5, 15] por [0, 200]

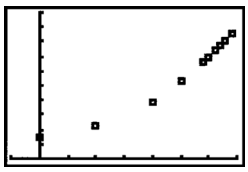


[−5, 15] por [0, 200]

g) 1997: 3.3; 1998: 4.3; 1999: 5.3; 2000: 6.3 **h)** 203.4 centavos por galón. Podría ser mayor.

Proyecto del capítulo 10

1.



[−5, 35] por [0, 2000000]

3. $y = 271661.8371 \cdot (1.0557797^t)$

5. Predicciones del modelo de regresión: 2,382,109; 4,099,161; 7,053,883. Las predicciones del sitio web probablemente son más razonables, ya que el diagrama de dispersión en la pregunta 1 de este proyecto sugiere que el crecimiento en años recientes ha sido casi lineal.

APÉNDICE A

Apéndice A.1

1. 9 o −9 **3.** 4 **5.** $\frac{4}{3}$ o $-\frac{4}{3}$ **7.** 12 **9.** −6 **11.** $-\frac{4}{3}$ **13.** 4 **15.** 2.5 **17.** 729 **19.** 0.25 **21.** −2 **23.** 1.3

25. 2.1 **27.** $12\sqrt{2}$ **29.** $-5\sqrt[3]{2}$ **31.** $|x|y^2\sqrt{2x}$ **33.** $x^2|y|\sqrt[4]{3y^2}$ **35.** $2x^2\sqrt[5]{3}$ **37.** $2\sqrt[3]{4}$ **39.** $\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$ **41.** $\frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{y}$

43. $(a + 2b)^{2/3}$ **45.** $2x^{5/3}y^{1/3}$ **47.** $\sqrt[4]{a^3b}$ **49.** $\sqrt[3]{x^{-5}} = 1/\sqrt[3]{x^5}$ **51.** $\sqrt[4]{2x}$ **53.** $\sqrt[8]{xy}$ **55.** $\sqrt[15]{a}$ **57.** $a^{-17/30}$

59. $3a^2b^2$ $(b \geq 0)$ **61.** $4x^4y^2$ **63.** $\frac{|x|}{x|y|}$ **65.** $3y^2/|x^3|$ **67.** $|x|\sqrt[4]{6x^2y^2}/2$ **69.** $\frac{2x\sqrt[3]{x}}{y}$ **71.** 0 **73.** $(x - 2|y|)\sqrt{x}$

75. < **77.** = **79.** > **81.** < **83.** ≈ 3.48 seg **85.** Si n es par, entonces hay dos raíces n-ésimas reales de a (cuando $a > 0$); $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$.

Apéndice A.2

1. $3x^2 + 2x - 1$; grado 2 **3.** $-x^7 + 1$; grado 7. **5.** No. **7.** Sí. **9.** $4x^2 + 2x + 4$ **11.** $3x^3 - x^2 - 9x + 3$ **13.** $2x^3 - 2x^2 + 6x$

15. $-12u^2 + 3u$ **17.** $-15x^3 - 5x^2 + 10x$ **19.** $x^2 + 3x - 10$ **21.** $3x^2 + x - 10$ **23.** $9x^2 - y^2$ **25.** $9x^2 + 24xy + 16y^2$

27. $8u^3 - 12u^2v + 6uv^2 - v^3$ **29.** $4x^6 - 9y^2$ **31.** $x^3 + 2x^2 - 5x + 12$ **33.** $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3$ **35.** $x^2 - 2$

37. $u - v$, $u \geq 0$ y $v \geq 0$ **39.** $x^3 - 8$ **41.** $5(x - 3)$ **43.** $yz(z^2 - 3z + 2)$ **45.** $(z + 7)(z - 7)$ **47.** $(8 + 5y)(8 - 5y)$

49. $(y + 4)^2$ **51.** $(2z - 1)^2$ **53.** $(y - 2)(y^2 + 2y + 4)$ **55.** $(3y - 2)(9y^2 + 6y + 4)$ **57.** $(1 - x)(1 + x + x^2)$ **59.** $(x + 2)(x + 7)$

61. $(z - 8)(z + 3)$ **63.** $(2u - 5)(7u + 1)$ **65.** $(3x + 5)(4x - 3)$ **67.** $(2x + 5y)(3x - 2y)$ **69.** $(x - 4)(x^2 + 5)$ **71.** $(x^2 - 3)(x^4 + 1)$

73. $(c + 3d)(2a - b)$ **75.** $x(x^2 + 1)$ **77.** $2y(3y + 4)^2$ **79.** $y(4 + y)(4 - y)$ **81.** $y(1 + y)(5 - 2y)$ **83.** $2(5x + 4)(5x - 2)$

85. $2(2x + 5)(3x - 2)$ **87.** $(2a - b)(c + 2d)$ **89.** $(x - 3)(x + 2)(x - 2)$ **91.** $(2ac + bc) - (2ad + bd) = c(2a + b) - d(2a + b) = (2a + b)(c - d)$; Ninguna de las agrupaciones $(2ac - bd)$ y $(-2ad + bc)$ tiene factores en común que se puedan sacar.

Apéndice A.3

1. $\frac{5}{3}$ **3.** $\frac{30}{77}$ **5.** $\frac{5}{6}$ **7.** $\frac{1}{10}$ **9.** Todos los números reales. **11.** $x \geq 4$ o $[4, \infty)$ **13.** $x \neq 0$ y $x \neq -3$ **15.** $x \neq 2$ y $x \neq 1$

17. $x \neq 0$ **19.** $8x^2$ **21.** x^2 **23.** $x^2 + 7x + 12$ **25.** $x^3 + 2x^2$ **27.** $(x - 2)(x + 7)$ se cancela durante la simplificación; la restricción indica que los valores de 2 y -7 no serían válidos en la expresión original. **29.** No se cancelan factores en la expresión. **31.** $(x - 3)$ termina en el numerador de la expresión simplificada; la restricción nos recuerda que inició en el denominador, de modo que el 3 no está permitido.

33. $\frac{6x^2}{5}, x \neq 0$ **35.** $\frac{x^2}{x-2}, x \neq 0$ **37.** $-\frac{z}{z+3}, z \neq 3$ **39.** $\frac{y+5}{y+3}, y \neq 6$ **41.** $\frac{4z^2+2z+1}{z+3}, z \neq \frac{1}{2}$ **43.** $\frac{x^2-3}{x^2}, x \neq -2$ **45.** $\frac{x+1}{3}, x \neq 1$

47. $-\frac{1}{x-3}, x \neq 1$ y $x \neq -3$ **49.** $\frac{2(x-1)}{x}$ **51.** $\frac{1}{y}, y \neq 5, y \neq -5$, y $y \neq \frac{1}{2}$ **53.** $\frac{2}{x}$ **55.** $\frac{3(x-3)}{28}, x \neq 0$ y $y \neq 0$

57. $\frac{x}{4(x-3)}, x \neq 0$ y $y \neq 0$ **59.** $\frac{2x-2}{x+5}$ **61.** $\frac{1}{3-x}, x \neq 0$ y $x \neq -3$ **63.** $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}, x \neq y, x \neq 0$, y $y \neq 0$

65. $\frac{x+3}{x-3}, x \neq 4$ y $x \neq \frac{1}{2}$ **67.** $-\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}, h \neq 0$ **69.** $a + b, a \neq 0, b \neq 0$, y $a \neq b$ **71.** $\frac{1}{xy}, x \neq -y$ **73.** $\frac{x+y}{xy}$

APÉNDICE C

Apéndice C.1

1. a) Proposición falsa. **b)** No es una proposición. **c)** Proposición falsa. **d)** No es una proposición. **e)** No es una proposición. **f)** No es una proposición. **g)** Proposición verdadera. **h)** No es una proposición. **i)** No es una proposición. **j)** No es una proposición. **3. a)** No hay número natural x tal que $x + 8 = 11$. **b)** Existe un número natural x tal que $x + 0 \neq x$. **c)** No existe natural x tal que $x^2 = 4$. **d)** Existe un número natural x tal que $x + 1 = x + 2$. **5. a)** El libro no tiene 500 páginas. **b)** Seis no es menor que ocho. **c)** $3 \cdot 5 \neq 15$ **d)** Ninguna persona tiene cabello rubio. **e)** Algunos perros no tienen cuatro patas. **f)** Todos los gatos tienen nueve vidas. **g)** Algunos cuadrados no son rectángulos. **h)** Todos los rectángulos son cuadrados. **i)** Existe un número natural x tal que $x + 3 \neq 3 + x$. **j)** Para todos los números naturales x, $3 \cdot (x + 2) \neq 12$. **k)** No, cada número de contero es divisible entre él mismo y 1. **l)** Todos los números naturales son divisibles entre 2. **m)** Para algunos números naturales x, $5x + 4x \neq 9x$. **7. a)** F **b)** V **c)** V **d)** F **e)** F **f)** V **g)** F **h)** F **i)** F **j)** F **9. a)** $R \cup S$ **b)** $Q \cap \overline{Q}$ **c)** $\overline{R} \cup \overline{Q}$ **d)** $P \cap (R \cup S)$ **11. a)** Las proposiciones $\sim(p \vee q)$ y $\sim p \wedge \sim q$ son equivalentes y las proposiciones $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \vee \sim q$ son equivalentes. **b)** Las correspondientes leyes de DeMorgan para conjuntos son $\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$ y $\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$. La analogía proviene de hacer que p signifique "x es un elemento de P" y haciendo que q signifique "x es un elemento de Q". Entonces, para la primera ley, $\sim(p \vee q)$ significa "x es elemento de $\overline{P \cup Q}$," que es equivalente a "x es un elemento de $\overline{P} \cap \overline{Q}$," lo cuál se traduce en $\sim p \wedge \sim q$.
13. a) Ahora no es miércoles o el mes no es junio. **b)** Yo no desayuné ayer, o yo no vi la televisión ayer. **c)** No es cierto que al mismo tiempo sea lluvioso y sea julio.

Apéndice C.2

1. a) $p \to q$ **b)** $\sim p \to q$ **c)** $p \to \sim q$ **d)** $p \to q$ **e)** $\sim q \to \sim p$ **f)** $q \leftrightarrow p$ **3. a)** Recíproca: Si usted es bueno en los deportes, entonces usted come Meaties; inversa: Si no come Meaties, entonces usted no es bueno en los deportes; contrapositiva: Si no es bueno en los deportes, entonces no come Meaties. **b)** Recíproca: Si no le gustan las matemáticas, entonces no le gusta este libro; inversa: Si le gusta este libro, entonces le gustan las matemáticas; contrapositiva: Si le gustan las matemáticas, entonces le gusta este libro. **c)** Recíproca: Si tiene caries, entonces no utiliza la pasta dental Ultra Brush. inversa: Si usted utiliza la pasta dental Ultra Brush, entonces no tiene caries; contrapositiva: Si no tiene caries, entonces no utiliza la pasta dental Ultra Brush. **d)** Recíproca: Si sus calificaciones son altas, entonces usted es bueno en lógica; inversa: Si usted no es bueno en lógica, entonces sus calificaciones no son altas; contrapositiva: Si sus calificaciones no son altas, entonces usted no es bueno en lógica. **5. a)** V **b)** V **c)** F **d)** F **e)** V **f)** F **7.** No. **9.** Si un número no es un múltiplo de 4, entonces no es un múltiplo de 8. **11. a)** p es falsa. **b)** p es falsa. **c)** q puede ser verdadera, y de hecho q es verdadera y p falsa hace que $p \to q$ sea verdadera y es la única forma para que $q \to p$ sea falsa. **13. a)** Helen es pobre. **b)** Algunos estudiantes de primer año son inteligentes. **c)** Si yo estudio para el examen final, entonces buscaré un empleo en la enseñanza. **d)** Existen triángulos que son isósceles. **15. a)** Si una figura es un cuadrado, entonces es un rectángulo. **b)** Si un número es un entero, entonces es un número racional. **c)** Si una figura tiene exactamente tres lados, entonces puede ser un triángulo. **d)** Si llueve, entonces está nublado.

Índice de aplicaciones

Nota: Los números entre paréntesis hacen referencia a los ejercicios en las páginas indicadas.

Biología y ciencia de la vida

Acción capilar, 405(65)
Análisis de estaturas, 790
Angioplastia, 122
Ciclos de sueño, 436(44)
Circulación de la sangre, 211(65)
Comparación de edades y pesos, 183(49), 185(67)
Conversión de temperatura, 136(34)
Crecimiento de bacterias, 288(57), 291, 297(39)
Expectativa de vida, 183(50), 768(3-8), 775 ff., 785(55, 56)
Experimento de gravedad de Galileo, 72
Fechado con carbono, 288(58), 297(40)
Fotografía satelital, 125(33)
Gasto del Instituto Nacional de Salud, 272(89)
Gasto en seguros médicos, 576(45), 628(70)
Globo sonda, 125(31)
Humedad, 169, 244
Identificación de datos falsos, 499(76)
Ingreso personal, 576(46)
Investigación biológica, 226(71)
Latitud y longitud, 359(63-70)
Medidas indirectas, 426, 494(35)
Migración del salmón, 501
Modelación de un rumor, 295
Pérdida de peso, 435(36)
Peso de polluelos recién nacidos, 779, 781, 782 (17)
Peso y pulso de algunos mamíferos, 198(55), 319(65)
Población promedio de ciervos, 493
Presión sanguínea, 394(76)
Propagación de gripe, 298(45), 346(76), 347(93)
Prueba de VIH, 729(38)
Prueba positiva para VIH, 725
Temperaturas de ciudades seleccionadas, 156
Tipo de sangre, 757(35)
Ubicación de un litotriptor, 651, 654(59, 60)
Uso de penicilina, 332(53, 54)
Velocidad de la luz, 39
Vida media, 740(38)

Construcción e ingeniería

Agrimensura de un cañón, 485(37), 4998(62)
Altura de una escalera, 51(60)
Caja con volumen máximo, 152, 161(33)
Caja sin tapa, 65(46), 211(66-68)
Cálculos de un topógrafo, 495(38)
Construcción de un edificio, 592(50)
Construcción de un patio, 740(40)
Construcción residencial, 161(34)
Contenedor para almacenar, 271(87)
Determinación de las dimensiones de una ventana normanda, 51(61)
Diseño arquitectónico, 433(23), 495(42)
Diseño de jardines, 184(57)
Diseño de un campo de béisbol, 494(36)
Diseño de un campo de softbol, 495(37)
Diseño de un disco satelital, 642(60)
Diseño de un jardín, 368(66)
Diseño de un puente colgante, 642(63)
Diseño de una caja, 207, 262, 265(59)
Diseño de una rueda de la fortuna, 485(42)
Diseño del arco de un puente, 642(64)
Diseño del espejo de una linterna, 642(59)
Diseño industrial, 272(94, 95)
Drenado de un tanque cilíndrico, 166(62-64)
Especificaciones de un edificio, 41(49)
Faros parabólicos, 642(62), 697(76)
Inclinación de una autopista, 41(48), 185(65), 436(49)
Ingeniería arquitectónica, 266(72), 271(86)
Ingeniería civil, 432(15), 433(21)
Ingeniería de la construcción, 495(39)
Medidas de un diamante de béisbol, 491
Mesa de billar elíptica, 697(77)
Micrófono parabólico, 640, 642(61), 697(75)
Pronóstico del clima, 485(38)
Protección de una antena, 153, 161(35)
Telescopio Cassegrain, 665(70)
Ubicación de un cañón, 664(58)
Volumen de una caja, 271(85)

Demografía de Estados Unidos

Análisis de la información del censo, 630
Aplicaciones de patentes, 185(65)
Ayuda federal per cápita, 762
Causas de muerte, 729(35), 759, 760
Compensación de trabajadores, 184(53)
Costo anual de vivienda, 266(64)
Estadísticas de empleo, 82(11-18)
Excedente agrícola, 21(33)
Exportaciones a Armenia, 21(34)
Exportaciones a Japón, 42(54)
Exportaciones a México, 14
Exportaciones agrícolas, 21(32)
Exportaciones de aluminio, 20(30)
Gasto de los estadounidenses, 42(51)
Importaciones de aluminio, 20(29)
Importaciones de petróleo crudo, 166(65)
Importaciones desde México, 21(31), 42(52)
Ingreso de los estadounidenses, 38, 41(50)
Ingreso per cápita, 266(63)
Mediana del ingreso familiar, 185(68)
Población en prisiones, 71
Porcentaje de mujeres de la población en prisiones, 71, 73
Presupuesto de educación, 12(53-56), 66(11)
Residentes de 65 años o más, 761
Salario mínimo por hora, 70
Salario promedio por hora, 163(50)
Viaje por aire, 82(24)

Finanzas

Anualidades, 338 ff., 342(49, 50), 344(69, 70), 347(83, 84, 97, 98), 750(37, 38), 788(75, 76)
Comparación de salarios, 769(23), 783(25)
Comparación entre interés simple y compuesto, 343(60), 347(99)
Conversión de divisas, 136(33)
Cuenta de ahorros, 750(35, 36)
Cuenta IRA, 342(47, 48)
Hipoteca de una casa, 342(53-56), 347(85, 86)
Índice de precios al consumidor, 69, 1559, 161(24)
Ingreso per cápita, 782(16)
Interés compuesto, 334 ff., 341(21-30), 346(63-65)
Inversiones, 606(75-77), 629(76)
Pago de un préstamo (hoja de cálculo), 343(67, 68)
Prestaciones de un trabajador, 162(48)
Préstamo automotriz, 342(51, 52)
Préstamos en negocios, 629(77)
Rendimiento porcentual anual (RPA), 337-338, 342(57, 58), 347(87, 88)
Salarios en las ligas mayores de béisbol, 83(25-28)
Suscriptores de teléfonos celulares, 85(63)
Tamaño de un continente, 782(10)
Tasa porcentual anual (TPA), 340
Valor futuro, 346(66), 746
Valor presente, 346(67, 68)
Ventas de comida rápida, 255(43)

Geometría

Área de un polígono regular, 489
Área de un sector, 359(71, 72)
Celdas de una colmena, 498(68)
Cómo inscribir un cilindro dentro de una esfera, 167(67)
Cómo inscribir un rectángulo bajo una parábola, 167(68)
Construcción de un cono, 265(60)
Determinación de las dimensiones de un campo rectangular de trigo, 577(50)
Determinación de las dimensiones de un jardín rectangular, 569, 577(49)
Determinación de las dimensiones de una pintura, 184(56)
Determinación de un perímetro mínimo, 251
Determinación del área máxima, 184(54)
Diagonales de un paralelogramo, 19
Diagonales de un polígono regular, 158
Diseño de rectángulos, 255(40)
Diseño de un pista de carreras, 354, 358(52)
Diseño de una lata de jugo, 252, 263, 265(61)
Diseño de una página, 255(36)
Diseño de una piscina, 255(38)
Diseño industrial, 255(37)
División de un segmento de recta en tres partes, 23(64)
División de un segmento de recta en una razón dada, 513(61)
Espejos, 369(75)
Maximización de volumen, 476(55)
Maximización del área de un trapecio inscrito, 498(67)
Medianas de un triángulo, 513(62)
Medición de un ángulo diedro, 491
Mesa de billar, 369(76)
Minimización de perímetro, 255(35)
Pila de granos en forma de cono, 154
Problema de túnel, 476(56)
Relación entre álgebra y geometría, 43(69-71), 84(50, 52), 187, 187(82-84), 265(57)
Tamaño de una llanta, 357(46)

Negocios

Acciones y matrices, 629(73)
Administración de la planeación, 184(58, 60)
Análisis de la publicidad, 706
Análisis de utilidades, 211(64)
Análisis del mercado de acciones, 84(61)
Apreciación de bienes inmuebles, 41(45)
Barra de ensaladas, 709(37)
Bates defectuosos de béisbol, 789(113)

Boletos de tren, 606(73)
Café Starbucks, 168
Calculadoras defectuosas, 729(34)
Códigos de área para teléfonos, 699
Comparación de precios, 71, 580
Compra de fertilizante, 621
Compra de un automóvil nuevo, 709(38)
Computadoras personales, 161(29, 30)
Control de calidad, 785(57, 58)
Costo de la fabricación de muñecas, 183(52)
Datos del Producto Interno Bruto, 832(24)
Depreciación de un inmueble, 37
Depreciación lineal, 183(51)
Diseño de interiores, 161(36)
Elección de representantes, 708(11)
Entrevistas de trabajo, 708(32)
Estimación de gastos personales con modelos lineales, 573
Explotación de minas, 624(37)
Fabricación, 162(47, 49), 606(74)
Fabricación de trajes de baño, 382(60)
Finanzas internacionales, 149(65)
Focos defectuosos, 789(114)
Formación de comités, 27
Gobierno de la ciudad, 708(12)
Ingredientes de pizza, 706, 709(39)
Ingreso máximo, 578(69, 70)
Ingreso total, 184(55, 59)
Inventario, 592(48)
Maximización de utilidades, 624(40)
Mezcla de nueces, 577(54)
Minimización de costos de operación, 622
Modelación de la depreciación, 173
Negocio de bebidas, 184(59)
Oferta y demanda, 225(57, 58), 606(81, 82)
Ofertas de trabajo, 161(28)
Paquete salarial, 577(58)
Pintado de casas, 728(4)
Planeación de flujo de caja, 64(39)
Planeación de la inversión, 41(46)
Planeación de una dieta, 624(38)
Planeación para las utilidades, 265(58)
Porcentaje de descuento, 72
Precio de equilibrio, 574
Precios de alimentos, 577(53)
Precios de venta, 161(27)
Precios promedio anuales de gasolina, 837(39)
Predicción de la comida de una cafetería, 729(30)
Predicción de la demanda, 176
Predicción del crecimiento económico, 412(72)
Predicción del ingreso, 179-180
Problemas de programación lineal, 620 ff., 628(65-68)
Producción de gasolina, 624(39)
Producción, 591(46), 47), 782(15)
Punto de equilibrio, 254(33), 272(90)
Reclamación dudosa de productos, 701
Rendimiento de una inversión, 161(38, 40)
Renta de automóviles, 729(33)
Renta de una camioneta, 577(57)
Salarios de una compañía, 265(56)
Utilidad, 592(49)
Valor de una inversión, 21(35, 36)
Ventas mensuales, 435(35)

Matemáticas

Ajuste de curvas, 605(67-70), 627(45, 46)
Ajuste de una parábola a tres puntos, 602
Ángulo de depresión, 425, 433(24)
Ángulo de elevación, 382(59), 433(22)
Aproximación y análisis de error, 383(77)
Cálculo de integrales definidas a partir de datos, 830-831
Cálculo del ángulo de visión, 420, 422(53)
Cicloide, 532(53)
Cobertura de televisión, 403(63)
Comprobación de desigualdades en una calculadora, 30(69)
Determinación de altitud, 365, 367(61, 62), 368(64), 426, 431(1, 2), 432(5-9, 11, 12, 14), 433(22), 440(95, 96, 101, 102), 485(40, 44), 498(63)
Determinación de derivadas a partir de datos, 830, 832(23)
Determinación de la altura de un poste, 483, 485(39, 43)
Determinación de la distancia a partir de una velocidad, 832(21, 22), 833(27, 28)
Determinación de la distancia recorrida como un área, 806, 809, 811(49), 828
Determinación de la distancia, 368(65), 431(3), 432(4, 13), 433(16, 19, 20, 24), 440(97, 98, 100), 485(38, 41, 45, 46), 498(64)
Determinación del área, 440(104)
Diagonales de un polígono regular, 710(52)
Distancia de un punto a una recta, 521(67)
Distribución normal, 333(67)
Epicicloide, 564(83)
Escalamiento de triángulos con matrices, 589
Fórmula de la distancia en coordenadas polares, 540(61)
Funciones hiperbólicas, 462(80)
Graficación de ecuaciones polares paramétricas, 540(67-71)
Hipocicloide, 532(54)
Límites y área de un círculo, 825(89)
Localización de un incendio, 482
Matrices simétricas, 591(45)
Parametrización de rectas, 525-526, 533(66)
Parametrización de una circunferencia, 524, 533(65)
Permutación de letras, 708(7, 9, 10)
Polinomio característico, 593(72, 73)
Polinomios de Taylor, 383(79, 80)
Reflexión de gráficas con matrices, 588
Relación de geometría y sucesiones, 740(51)
Resolución de triángulos, 479 ff., 489
Rotación con matrices, 588, 592(51), 628(69)
Serie armónica, 751(52)
Torres de Hanoi, 752-753
Transformaciones y matrices, 592(57-61)
Valor esperado, 731(61, 62)
Valores propios de una matriz, 607(93, 94)

Miscelánea

100 metros estilo libre para mujeres, 167(66)
Adoquines, 82(21)
Alberca, 629(79)
Alineaciones en el baloncesto, 710(58)
Arreglos florales, 583
Asientos en un estadio, 740(39)
Asistencia al baloncesto, 629(74)
Becas Pell, 271(88)
Bola de nieve derretida, 125(32)
Cadena de cartas, 710(53)
Calificaciones ACT, 784(42)
Calificaciones del examen AP de cálculo, 783(18, 19)
Calificaciones del SAT de matemáticas, 67 (33)
Calificaciones promedio en la escuela Baylor, 104(78), 137(50, 51)
Calificaciones SAT, 580, 784(41)
Cambio (dinero, morralla), 606(79)
Canciones de los Beatles, 788(97), 789(101, 105, 107-110)
Carrera de caballos, 787(46)
Cobertura de un faro, 402(45), 422(54)
Comparación de pasteles, 82(20)
Conversión a millas náuticas, 355
Crepúsculo astronómico, 477(63)
Cuadrangulares de Barry Bonds, 763, 783(22, 27)
Cuadrangulares de Hank Aaron, 765, 768(2, 16), 769(22), 773
Cuadrangulares de Mark McGwire, 763-764, 768(15), 769(22), 783(22, 26, 39)
Cuadrangulares de Mickey Mantle, 768(12), 768(14), 769(21), 782-783(13, 23, 31, 32)
Cuadrangulares de Roger Maris, 768(1,2), 772 ff.
Cuadrangulares de Willie Mays, 768(11), 768(13), 769(21), 782-783(13, 23, 31, 32)
Dimensiones de un campo de fútbol, 51(59)
Dinero para vacaciones, 606(80)
Drenado de una piscina, 255(41)
Duración de los días, 413(88)
Elección de chocolates, 721, 722
Elipse en la Casa Blanca, 631
Encuesta de graduados en un escuela, 729(39)
Envío por camiones, 629(75)
Escala de calificaciones, 137(47)
Finalistas en un desfile, 705
Golf LPGA, 769(18-20)
Golf PGA, 769(17, 19, 20)
Gráficas por computadora, 567
Imágenes por computadora, 125(34)
Indiana Jones y el examen final, 709(36), 729(40)
Investigación de un programa de atletismo, 731(60)
Lecciones de piano, 729(29)
Medición de un terreno en acres, 492
Modelación de la iluminación de la luna, 500
Modelación de la temperatura, 434(33), 440(105)
Modelación de una nota musical, 431
Número de bodegas, 256(44)
Número de casetes, 767, 783(36)
Número de CD, 766, 783(28, 35)
Números telefónicos, 707
Panel solar, 368(63)
Patada inicial en el fútbol, 495(41)
Pizza de pepperoni, 115(67)
Planeación de un viaje, 64(36)
Precio de inmuebles, 788(95), 789(99)
Problema de tiempo-velocidad, 255(42)
Prueba de reparto, 704, 710(53)
Rastreo de aeroplanos, 540(51)
Rastreo de barcos, 540(52)
Remodelación de una casa, 629(78)
Requisitos para la graduación, 730(41)
Restricciones en las placas para automóvil, 702, 708(23, 24)
Selección de números de lotería, 706
Sistema de rastreo por medio de un radar, 538
Sitios Web populares, 788(96), 789(100, 104)
Tiros libres, 727
Vaivenes de las mareas, 391, 393(75)
Velocidades del viento, 769(24), 783(24, 29, 30)
Visualización de una nota musical, 395(89)

Yahtzee, 709(35), 729(36)
Yardas por pase de Warren Moon, 789(98, 102, 106)

Movimiento
Aeroturbinas, 791, 800
Altura de una flecha, 563(79)
Ayuda humanitaria lanzada por aire, 531(39)
Banda del aire acondicionado, 358(55)
Bateo de una bola de béisbol, 528, 531(40), 531(40), 531(43-45, 49), 564(88)
Bloque que rebota, 394(77)
Bola que cae, 802(34)
Cálculo del efecto de la velocidad del viento, 509, 512(43, 44)
Cálculos de un piloto, 486(57)
Captura de la bandera, 530(38)
Carrera de bicicletas, 357(45), 359(74)
Corriente que afecta la ruta de un barco, 512(53)
Diseño de un automóvil, 357(44)
Diseño de una herramienta, 358(47)
Diseño mecánico, 434(27, 28)
Distancia de frenado, 210(63)
Domando a La Bestia, 441(106)
Globo de aire caliente, 403(46), 422(55)
Gol de campo, 564(86)
Ingeniería de jardines, 185(64)
Ingeniería mecánica, 358(53)
Juego de dardos, 531(47, 48), 564(90)
Lanzamiento de cohete, 801(16), 811(48)
Lanzamiento de dos pelotas de softbol, 531(46)
Lanzamiento de piedras, 271(84)
Lanzamiento de una pelota de béisbol, 564(84, 85)
Lanzamiento de una pelota en una rueda de la fortuna, 533(67, 68), 564(89)
Lanzamiento de una piedra, 532(63), 801(15), 811(47)
Máquina lanzadora, 184(62)
Movimiento armónico amortiguado, 382(57)
Movimiento armónico, 428-430, 470(74)
Movimiento de un proyectil, 63, 64(33, 34), 68(81)
Movimiento de una boya, 393(72)
Movimiento de una rueda de la fortuna, 393(73), 434(31, 32), 435(34)
Movimiento en caída libre, 82(22), 180, 184(61), 199(68), 803(55, 56)
Nado del salmón, 510
Navegación, 41(47), 68(82), 357(43), 358(48-51), 359(73, 427, 433(17, 18, 25, 26), 495(40), 496(53), 512(41, 42, 51, 52)
Olas de un tsunami, 393(74)
Paseo en una rueda de la fortuna, 528, 532(51), 563(80, 81), 564(82)
Pelota que rebota, 750(39)
Péndulo, 382(58), 440(103), 442
Péndulo de Foucault, 358(54)
Planeación de juegos pirotécnicos, 185(63)
Problema de dos ruedas de la fortuna, 533(69, 70)
Propulsión de un barco, 358(56)
Rapidez promedio, 802(33)
Roca que cae, 522, 833(27)
Rotación de una llanta, 155, 161(39)
Simulación de la carrera, 530(37)
Simulación de movimiento horizontal, 526, 530(37, 38)
Simulación del movimiento de un proyectil, 527
Tiempo de viaje, 161(25, 26)
Tiempo en el aire, 564(87)
Tiro de bolas de golf, 531(50)
Tiro de una balón de baloncesto, 512(45)
Tornamesa, 394(78)
Trayectoria de una bola de béisbol, 137(49)
Uso del sistema LORAN, 662, 664(57)
Velocidad de un aeroplano como vector, 508
Velocidad en el espacio tridimensional, 690, 693(33, 34)791, 800

Planetas y satélites
Análisis de la órbita de un cometa, 661
Análisis de la órbita planetaria, 680, 681
Análisis de la órbita terrestre, 650
Cobertura de televisión, 436(50), 499(69)
Cometa de Halley, 654(58), 682(41)
Cometa solitario, 664(55, 56)
Ícaro, 697(80)
Mercurio, 654(54)
Modelación de información planetaria, 194, 199(67)
Módulo lunar, 683(43)
Órbita de la Luna, 453(85), 654(53)
Órbitas elípticas, 649, 697(79)
Órbitas planetarias, 683(51)
Periodos de las órbitas, 315
Planetas bailarines, 654(52)
Satélite climático, 697(78)
Satélite de Marte, 683(44)
Satélites de los planetas, 782(9)
Saturno, 654(55)
Sungrazers, 654(57)
Tercera ley de Kepler, 315
Urano, 683(42)
Venus y Marte, 654(56)

Población
Alaska, 333(65)
Anaheim, CA, 606(72)
Anchorage, AK, 606 (72)
Arizona, 298(50), 577(47)
Austin, Texas, 287(51-54)
Columbus, OH, 287(51-54)
Comparación de poblaciones, 769(25, 26)
Corpus Christi, TX, 605 (71)
Crecimiento de la selva tropical, 740(37)
Crecimiento de población, 297(29-32)
Dallas, Texas, 285, 298 (48)
Densidad poblacional, 751(47)
Detroit, MI, 290
Disminución de población, 346(74, 75)
Estado de Nueva York, 288(56), 298(49)
Estimación de la tasa de crecimiento poblacional a partir de datos, 838
Florida, 294
Garland, TX, 605(71)
Guppies, 346(78)
Hawai, 333(66), 628(71)
Idaho, 628(71)
Illinois, 346 (72)
Los Ángeles, CA, 297(43)
Massachussets, 577(47)
México, 299(58)
Milwaukee, 309(62)
Ohio 288(55)
Pensilvania, 294
Phoenix, AZ, 297(44)
Población de ciervos, 272 (91), 298(46), 347(94)
Población de conejos, 346(77), 740(49), 824(83)
Población de Estados Unidos, 293, 298(47), 299(57, 58)
Población de osos, 254(34)
Población mundial, 42(53)
Población y matrices, 629(72)
San Antonio, 309(61)
San José, California, 285, 290
Temperaturas en Beijing, China, 770(35, 36), 783(20, 21)

Química y física
Absorción de drogas, 346(73)
Absorción de la luz, 309(60), 347(89)
Aceleración de un automóvil, 811(46)
Acidez química (pH), 325, 331(47, 48), 347(82)
Campos magnéticos, 470(75)
Combinación de fuerzas, 512(48-50), 563(76)
Decaimiento radiactivo, 292, 297(33, 34), 346(79, 80)
Determinación de una fuerza, 518, 520(45-47), 521(48), 563(77)
Determinación del efecto de la gravedad, 510
Diapasón, 434(30)
Energía potencial, 333(69)
Experimentos de física, 82(23)
Ingeniería de vuelo, 512(43, 44), 563(74, 75)
Intensidad de la luz, 247(72), 318(53, 54)
Intensidad de terremotos, 318(52), 324, 331(45, 46), 347(81)
Intensidad del sonido, 275, 307, 309(59), 318(51)
Ley de Boyle, 64(38), 198(51), 247(71)
Ley de Charles, 198(52)
Ley de enfriamiento de Newton, 163(51, 52), 326, 332(49-52), 347(95, 96)
Luz refractada, 382(55, 56)
Mezcla de soluciones, 161(31, 32), 603, 606(78)
Mezclas con ácido, 250-251, 254(31, 32), 272(93)
Movimiento de un objeto pesado, 512(46, 47)
Ondas sonoras, 349
Oscilación de un resorte, 410, 412(71), 434(29)
Potencia de un molino de viento, 198(54)
Presión atmosférica, 292, 297(41, 42)
Principio de Arquímedes, 226(69, 70)
Propiedad reflectante de la parábola, 639
Propiedad reflectante de una elipse, 651
Propiedad reflectante de una hipérbola, 661
Rapidez al remar, 577(51)
Rapidez de un aeroplano, 577(52)
Refracción de un diamante, 198(53)
Resistores, 255(39), 266(62), 272(92)
Temperatura, 394(79, 80)
Trabajo, 518-519, 521 (49-56), 563 (78), 811(50)
Velocidad angular, 354, 529(9, 10)
Velocidad de escape, 665(62)
Velocidad de la luz, 1

Recolector de datos (CBR™, CBL™)
Altura del rebote de una pelota, 273
Análisis del rebote de una pelota, 348
Caída libre de una bola, 181, 195, 811(45), 829 ff.
Diapasón, 435(43), 436(51)
Distancia al detector de movimiento, 225(62), 253(51, 52), 442
Elipses como modelos del movimiento de un péndulo, 565, 655(73, 74), 698
Intensidad de la luz, 198(57), 247(72)

Índice

A

Aceleración debida a la gravedad, 180
Afelio, 649
Ajuste de una recta a datos, 156
Alargamiento y compresión, 144-145
  función cuadrática, 176-177
  función tangente, 397
  sinusoidal, 387
Alargamiento y compresión horizontal, 144-145
  de una sinusoidal, 387
Alargamiento y compresión vertical, 144-145
  de una función cuadrática, 176-177
  de una función tangente, 397
Alejamiento (*zoom out*), 203
Algoritmo de la división para polinomios, 214
Amortiguamiento, 409
Amplitud, 386
Análisis de datos, 156
  regresión bicuadrática, 157
  regresión cuadrática, 157
  regresión cúbica, 157
  regresión exponencial, 157
  regresión lineal, 157
  regresión logarítmica, 157
  regresión logística, 157
  regresión potencia, 157
  regresión sinusoidal, 157
Ancho focal,
  de una hipérbola, 665
  de una parábola, 635
Ángulo
  agudo, 360
  central, 350
  complementario, 446
  conversión de grados a radianes, 353
  coterminal, 370
  de cuadrante, 375, 380
    en un círculo unitario con 16 puntos, 380
  de depresión, 425
  de dirección, 507
    de un vector, 507
  de elevación, 425
  de referencia, 373, 380
  de rotación, 370, 669
  diedro, 491-492
  dirigido, 534
  entre vectores, 515
  inicial y lados terminales, en el, 370
  medido en grados, minutos y segundos, 351
  medido en radianes, 351
  negativo, 370
  obtuso, 480
  posición estándar de, 360, 370
  positivo, 370
  positivo y negativo, 353
Anualidad, 338
  ordinaria, 338
  valor presente y futuro, 338-339
APOLONIO DE PERGA (cerca de 262-190 a. C.), 632
Arco intersecado, 353
Área, 805
  de un triángulo, 489
ARGAND, JEAN-ROBERT (1768-1822), 550
Argumento de un número complejo, 551
ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (287-212 a. C.), 490, 806, 807, 813, 819
Asíntota
  comportamiento en los extremos, 240
  de la hipérbola, 657
  horizontal, 99, 100
  inclinada, 241
  oblicua, 241
  vertical, 99, 100, 240
    de la función tangente, 396

B

Base, 8
  de un logaritmo natural, 303
  de una función exponencial, 276
  de una función logarítmica, 300
  fórmula de cambio de base, 313
  natural *e*, 281-282
Bel (B), 307
BELL, ALEXANDER GRAHAM (1847-1922), 307
BERNOULLI, JAMES (1654-1705), 502
Bicondicional, 870. Consulte también *Lógica*
Bicuadrática (cuártica)
  función polinomial, 200, 203
  regresión, 157
Binomios, 845
  productos especiales, 846
BLACKWELL, DAVID (1919), 719

C

Calculadora de campo (CBR™), 180
Calculadora de laboratorio (CBL™), 247
Caso
  ambiguo de un triángulo, 479-480
    ley de senos, 479-480
  base (inducción matemática), 753
CASSEGRAIN, G., 662
Centro
  de una circunferencia, 18
  de una elipse, 644
  de una esfera, 687
  de una hipérbola, 657
Cero de una función, 75-76
  conjugado complejo, 55, 230
  determinación de, 218-219, 230
  multiplicidad de, 205
  polinomios de grado superior, 218-219, 230
  racional e irracional, 218-219
  reales, 218-219
  repetido, 205
Ceros
  complejos conjugados, 230
  irracionales de polinomios, 218-219
  racionales de un polinomio, 218-219
  reales de un polinomio, 218-219. Consulte también *Cero de una función*
    ceros racionales e irracionales, 218-219
    criterio de la cota inferior, 220
    criterio de la cota superior, 220
  repetidos, 205
Cicloide, 532
Círculo unitario, 377
  con 16 puntos, 380
  raíces de la unidad, 555-558
  y funciones trigonométricas, 377
  y la función seno, 337
Circunferencia (círculo)
  ecuación de, 18
  ecuaciones paramétricas de la, 522
  sector de un, 496
  unitario, 377, 380
  y medida en radianes, 377
Cociente
  de funciones, 117
  de la diferencia simétrica, 826
  de números complejos, 55, 552
Coeficiente
  binominal, 711-712
  de correlación, 158, 174
  de determinación, 158
  de un término, 200
  principal de un polinomios, 200, 845
  principal de una función polinomial, 170
Cofactor, 585
Combinación lineal de vectores unitarios, 507
Combinaciones, 704-705
  de *n* objetos tomados de *r* en *r*, 704
Combinatoria, 700
  combinaciones, 700
  diagrama de árbol, 701

permutaciones, 702-704
principio de multiplicación para el conteo, 701
Complejo conjugado, 55, 230
Complemento (de un ángulo), 446
Completar el cuadrado, 46
Componente
de un vector, 503
horizontal de un vector, 507
vertical de un vector, 507
Comportamiento en los extremos (a la larga), 100
asíntota, 240
de funciones exponenciales, 280
de la función logarítmica, 300, 305
de un polinomio, 203-204
de una función racional, 241
de una sucesión, 733
Comportamiento oculto de una gráfica, 78
Composición (capitalización)
anual, 334
continua, 336-337
de funciones, 118
valor absoluto, 142
Conclusión, 869. Consulte también *Lógica*
Condicionales (implicaciones), 869. Consulte también *Lógica*
Conjugado, complejo, 55
Conjunción, 865. Consulte también *Lógica*
Conjunto
con n elementos, 702
conteo de subconjuntos de un, 706
ordenado, 3
solución de una desigualdad, 26
vacío, 720
Cono circular recto, 632
Constante, 6
de proporción, 188
de variación, 188
Conteo. Consulte *Combinatoria*
de subconjuntos de un conjunto con n elementos, 706
Continua en un punto, 90
Conversión, grados a radianes, 353
Coordenada x (abscisa), 13, 685
Coordenada y, 13, 685
Coordenada z, 685
Coordenadas
de un punto, 3, 13, 685
polares, 534
Correlación lineal, 157, 174
negativa, 174
positiva, 174
Corrimiento de fase, 386
Cota
inferior
criterios para ceros reales, 220
de función, 95
para ceros reales, 220
superior
criterios para ceros reales, 220
de una función, 95
Crecimiento
exponencial, 291
inhibido, 283
logístico, 276
y función de decaimiento, 283
no restringido, 276, 276
poblacional, 284-285
restringido, 276, 283
Criterio
de la recta horizontal, 130-131
de la recta vertical, 87
del discriminante para una ecuación de segundo grado con dos variables, 672
del término principal para el comportamiento a la larga de un polinomio, 204
Cuadrado
de una diferencia, 846
de una suma, 846
ventana de visualización, 35
Cuadrantes del plano, 13
funciones trigonométricas, 370-371
medida del ángulo, 371
Cuantificadores, 864. Consulte también *Lógica*
existenciales, 864. Consulte también *Lógica*
universales. Consulte *Lógica*
Cuartil, 775
Cubo(s)
diferencia de, 846, 848
suma de, 846, 848
Cuerda
de una cónica, 635, 657
focal de una parábola, 643
Curso, navegación, 351
Curva
cardioide, 545
de crecimiento, 279
de decaimiento, 279
de demanda, 574
de oferta, 574
gaussiana. Consulte *Curva normal*
gráfica de un *limaçon*, 546
lemniscata, 547
limaçon, 545-546
logística, 283
normal, 780
paramétrica, 522

D

d'ALEMBERT, JEAN LE ROND (1717-1783), 813
Datos. Consulte también *Estadística*
construcción de una función a partir de, 155
derivada a partir de, 829
despliegue de, 759
extremos (*outliers*), 777-778
integral definida a partir de, 830
DE MOIVRE, ABRAHAM (1667-1754), 554
Decaimiento radiactivo, 291
Decibel, 275, 307
Deducción, 755
Demostración, 142
de una identidad, estrategias, 454-457
producto punto de vectores, 516
refutar una no identidad, 455-456, 458
Denominador, 852
con factores cuadráticos, 611-612
con factores lineales, 609-610
expresiones racionales, 854-855
fracción compuesta, 854
racionalización, 841
mínimo común, 854
Derivada
de una función, 796-798
a partir de datos, 829
numérica, 826
en un punto, 797
NDER $f(a)$, 826
numérica, 826
de f en a, 826
Desarrollo de expresiones algebraicas, 7
DESCARTES, RENÉ (1596-1650), 53, 792
Descomposición
de función, 121
en fracciones parciales, 608
Descripciones verbales, funciones a partir de, 154
Desigualdad
con radicales, 262
con valor absoluto, 59
cuadrática, 60, 257
cúbica, 62
doble, 28
gráfica de, 27-28
lineal, 26-27
doble, 28
en x y y, 620
en x, 26
equivalente, 27
gráfica de, 619
gráfica en la recta numérica, 28
polinomial, 257
propiedad de la suma, 27
propiedades de, 27
racional, 260
radical, 262
símbolos, 4
sistema de, 619
valor absoluto, 59, 262
Desigualdades equivalentes, 27
Desviación estándar, 778
Determinante de una matriz, 585-586
Diagonal principal de una matriz, 584

Diagrama
adosado de tallos, 763
de árbol, 723
de barras, 760
de caja, 777
de dispersión, 14
de pastel, 760
de signos, 258-262
de tallo, 760
de tallo y hojas, 760
de tiempo, 765
de Venn, 723
dividido de tallos, 762
modificado de caja, 778
Diferencia
común de una sucesión, 734
de dos cuadrados, 457, 848
de dos cubos, 848
de funciones, 117
de sinusoidales, 407-408
identidad, 463-465
Diferenciable, 797
Dirección de un vector, 503, 504, 507
Directriz, 675
de una parábola, 634
Discontinuidad
de salto, 90, 91
infinita, 90, 91
removible, 90, 91
Discriminante
de una ecuación cuadrática en x, 51
de una ecuación de segundo grado en x y y, 671
invariante bajo rotación, 672
Dispersión de datos, 775
Distancia
a partir de velocidad constante, 804-805
a partir de velocidad variante, 805
dirigida, 534
Distribución
binomial, 726-727
de datos, 764
normal, 780
sesgada a la derecha, 777
sesgada a la izquierda, 777
simétrica, 777
normal, 780
simétrica, 777
Disyunción, 865. Consulte también *Lógica*
División, 6
de polinomios, 214
entre cero, 852
larga de polinomios, 214
sintética de polinomios, 217-218
Dominio
de la función inversa, 131
de una expresión algebraica, 852
de una función, 86
implicado, 88
relevante, 87, 88
dy/dx, 798-799

E

e, base, 281-282
Ecuación, 24
con valor absoluto, 49
de circunferencias, 18
de la elipse, 644, 648
de la parábola, 636
de primer grado (lineal) con tres variables, 689
general de segundo grado, 633
matricial, 601
para un plano en el espacio cartesiano, 689
para una esfera en el espacio cartesiano, 687
propiedad de la suma, 24
propiedades de, 24
racional, 248
solución algebraica, 24, 44, 75, 76
solución extraña, 249
solución gráfica, 47, 75-76
soluciones aproximadas, 47, 62
valor absoluto, 59
y relación, 122
Ecuación cuadrática, 46
(segundo grado) con dos variables, 636, 666
solución compleja de, 56
Ecuación de segundo grado, 633
con dos variables, 633, 666
en x y y, 633
término de producto cruzado, 695
Ecuación equivalente, 25
función logarítmica, 320
función seno inverso, 415
función tangente inversa, 417
polar, 541
Ecuación estándar
de un esfera, 687
de una circunferencia, 18
de una cónica (polar), 677
de una elipse, 644, 648
de una función cuadrática, 177
de una hipérbola, 656, 657, 659
de una parábola, 635
Ecuación lineal de primer grado, 24-25
con tres variables, 689
con tres o más variables, 594
en x, 24
en x y y, 34
en x, y y z, 685
equivalente, 24-25
forma general de, 33-34
forma punto pendiente, 32, 34
formas de, 34
intersección y, 33
pendiente de una recta, 31
rectas paralela y perpendicular, 35-36
verificación, 34
Ecuación para una recta en el espacio cartesiano, 292
forma paramétrica, 292
forma vectorial, 292
Ecuación paramétrica, 522
eliminación del parámetro, 523-524
graficación, 522-523
movimiento a lo largo de una línea, 526
movimiento de ruedas de la fortuna, 528
movimiento en el plano, 527
para rectas y segmentos de recta, 525-526
para una circunferencia, 522
para una recta en el espacio cartesiano, 292
y relaciones inversas, 129-130
Ecuación polar, 537
cardioide, 545
curva *limaçon*, 545-546
equivalente, 542
forma estándar, 677
gráfica de, 542-543
rosa, 544-545
simetría, 541-542
y cónicas, 677
Ecuación racional, 248
resolución, 248
solución extraña de, 249
Ecuación trigonométrica
factorización, 450
uso de identidades, 474
Ecuaciones de conversión
de coordenadas (polar), 535
grados-radianes, 353
Eje
conjugado de una hipérbola, 657
de un cono, 632
de una cónica, 633, 644, 656, 675
de una elipse, 617, 619
de una hipérbola, 657, 659
de una parábola, 177, 636
imaginario, 550
imaginario del plano complejo, 550
mayor de una elipse, 645
menor de una elipse, 645
polar, 534
real del plano complejo, 550
real, 550
transversal de una hipérbola, 657
x, 13, 685
x, y, y z, 13, 685
y, 13, 685
z, 685
Eje focal de una cónica, 675
elipse, 644, 647
hipérbola, 656, 659
Ejes transversales de reflexiones, 141
a lo largo de una recta, 141
de funciones cuadráticas, 176-17
Elemento
de una matriz, 579
de un conjunto, 2
Eliminación gaussiana, 594-595

Elipse, 644, 675
centro y foco, 644, 647
directriz de, 675
ecuación, 644
ecuación paramétrica de, 649
eje focal, 644
excentricidad de, 649-650
forma estándar de, 645, 647
gráfica de, 645, 646-647
relación pitagórica, 645, 647
semieje mayor y semieje menor de, 645, 647
transformaciones de, 647
vértices, 644, 646, 647
Elipsoide de revolución, 651
Entero, 2
no negativos, 2
ERATÓSTENES DE CIRENE (276-194 a. C.), 350
Escala de Richter, 318
Escalar, 504
Esfera, 687
Espacio
muestral, 718
tridimensional, 685
Espiral de Arquímedes, 546
Estadística, 771
categórica, 759
descriptiva, 771
diagrama de caja, 777
diagrama de tallo, 760
diagrama de tiempo, 765
diagrama dividido de tallos, 762
histograma, 764
inferencial, 771
media ponderada, 774
media, 771-772
mediana, 771-772
moda, 772, 773
resumen de los cinco números, 775
EULER, LEONHARD, 86, 107, 281
Evento, 718
dependiente, 724
independiente, 722
principio de multiplicación, 722
Excentricidad de cónicas
elipse, 649-650
hipérbola, 660-661
y coordenadas polares, 675
Exponente, 8
base, 8
de números complejos, 554
positivo y negativo, 8
propiedades, 8
racional, 841
Expresión algebraica, 6
constantes y variables, 6
desarrollo y factorización, 7
dominio de, 852
propiedades de, 7
Expresión racional, 852
compuesta, 854
dominio de, 852
equivalente, 853
multiplicación, 853
reducción de, 852
suma, 845
Expresión trigonométrica
factorización, 448
simplificación, 447-448
sinusoide, 386
Expresiones
algebraicas factorizadas, 7
fraccionarias, 852
Extracción de raíces cuadradas, 45
Extremo local, 96
Extremos de un intervalo, 5

F

Factor, 849
de amortiguamiento, 410
de crecimiento, 279
exponencial, 291
de decaimiento, 279
exponencial, 291
Factores
cuadráticos, irreducibles, 232
de conversión, 155
lineales
de polinomios, 228
y la descomposición en fracciones parciales, 609-610
Factorial cero, 703
Factorización de polinomios, 847
completamente factorizado, 847
factores comunes, 847
factores lineales, 228
formas especiales, 847-849
grado más alto, 205
por agrupación, 850
propiedad del factor cero, 46
trinomios, 845
y división larga, 214
FERMAT, PIERRE DE (1601-1665), 719, 796
Figuras geométricas semejantes, 360
Flecha. Consulte *Segmento dirigido de recta*
Foco, 675
de una elipse, 644
de una hipérbola, 656, 659
de una parábola, 634
Forma
de componentes de un vector, 503, 690
decimal de un número racional, 2
escalonada por renglones, 597, 598, 599
general de un ecuación lineal, 33-34
pendiente intersección, 33
polar de un número complejo, 551
punto pendiente, 32
reducida de una fracción, 852
triangular de sistemas lineales, 594-596
trigonométrica de un número complejo, 551
vectorial de la ecuación para una recta en el espacio cartesiano, 292
Forma estándar
de la ecuación cuadrática, 177
de la ecuación polar para cónicas, 677
de un número complejo, 53
de un polinomio, 200, 845
de una elipse, 645, 647
de una hipérbola, 657, 659
de una parábola, 635
Fórmula
cuadrática, 46
de cambio de base, 313
de la distancia en polares, 540
de reducción, 466
para la longitud de un arco, 353
recursiva, 279
Fórmula de distancias
en el espacio, 686
en el espacio cartesiano, 686
en el plano coordenado, 16
en la recta numérica, 14-15
Fórmula de Herón, 490
área del triángulo y, 489
Fórmula del punto medio
en coordenadas cartesianas, 687
en el plano coordenado, 17
recta numérica, 17
Fórmulas
de rotación, 588, 669
de sumas a productos, 499
de traslación, 668
Fracción
compleja, 854
compuesta, 854
Fracciones parciales, 608
con factores cuadráticos, 609-610
descomposición en, 608
Fracciones
complejas/compuestas, 854
forma reducida de, 852
iguales, 853
operaciones con, 852, 853
parciales, 608
Frecuencia
de observaciones, 764
de oscilaciones, 388, 428
de una sinusoidal, 388
distribución de, 764
Frontera de una región, 618
Función, 86. (V*ea también la función específica que busca*)
a partir de datos, 155
a partir de fórmulas, 151
a partir de gráficas, 151
a partir de una descripción verbal, 154
acotada en un intervalo, 95
acotada por abajo, 95
acotada por arriba, 95

algebraica, 276
arccos, 416
arcsen, 414
arctan, 417
bicuadrática, 200
ceros de, 75-76, 218-219, 229
cociente de, 117
cociente de la diferencia simétrica de, 826
combinación, 117
comportamiento en los extremos, 100
composición, 118
constante en un intervalo, 92, 93
constante sobre un intervalo, 92, 93
continúa, límite de, 816
cota inferior, 95
cota superior, 95
creciente en un intervalo, 92, 93
creciente y decreciente en un intervalo, 92, 93
cuadrática, 176
cúbica, 107, 191
de dos variables, 690
decreciente en un intervalo, 92, 93
definida implícitamente, 123
definida por partes, 111
derivada de, 796-798
derivada numérica de, 826
descomposición, 121
diferenciable, 797
diferencias de, 117
dominio, 86
envolvente, 377
escalonada, 108
evaluación, 86
gráfica de, 87
identidad, 106, 186
impar, 98
integrable, 808
integral definida de, 808
integral numérica de, 827
intersección *y*, 33, 240
inversa, 130-131
lineal, 171
logaritmo natural, 305
logística, 112, 283
máximo y mínimo, 96
monomial, 190
notación, 86
objetivo, 620
par e impar, 97-98
periódica, 379
potencia, 188
probabilidad, 719, 720
producto de, 117
punto de discontinuidad, 91-92
raíz cuadrada, 107, 193
rango de, 86, 87
recíproca, 238
recta tangente de, 797
relación inversa, 129-130
suma de, 117
tasa instantánea de cambio de, 796
tasa promedio de cambio de, 796
TRACE, 108
trascendental, 276
uno a uno (inyectiva), 131
valor absoluto, 108
Función acotada
en un intervalo, 95
por abajo, 95
por arriba, 95
Función continua, 109
límite de, 816
Función cosecante, 360, 399
de ángulo agudo, 360
de ángulos especiales, 361
de cualquier ángulo, 373
gráfica de, 399
Función coseno, 360, 386
ángulos especiales, 361
de ángulos agudos, 360
de cualquier ángulo, 373
de una identidad de diferencia, 463-464
de una identidad de suma, 464
gráfica de, 386
hiperbólico, 299
identidades de cofunción, 487
inversa, 416
ley de coseno, 487-489
movimiento armónico, 428
periodo de, 386, 387
Función cotangente, 360, 397
de ángulos agudos, 360
de ángulos especiales, 361
de cualquier ángulo, 373
gráfica de, 397, 398
Función cuadrática, 176, 186
ecuación de regresión, 157
forma del vértice de, 177, 178
graficación, 176-178
irreducible, 232
irreducible en los reales, 55
modelación de datos, 157
naturaleza de, 179
que abre hacia arriba o hacia abajo, 177
recta de simetría, 177
transformaciones de, 176-178
Función exponencial, 276, 279
base de, 276, 281-282
comportamiento en los extremos, 279, 280
crecimiento y decaimiento logístico, 283-284
curva de crecimiento y de decaimiento, 279
ecuación de regresión, 157
graficación, 279
inversa de, 320
natural, 280
resolución de ecuaciones, 321
uno a uno (inyectiva), 320
Función impar, 98
trigonométrica, 447
Función logarítmica. Consulte también *Función exponencial*
comportamiento en los extremos, 300, 305
con base 10, 302
con base *b*, 300
ecuación de regresión, 157
gráfica de, 300, 305
logaritmo común, 302
logaritmo natural, 303
modelación de datos con, 157
propiedades de, 301
regla de la potencia, 310
regla del cociente, 310
regla del producto, 310
regla inversa, 300, 302
regla uno a uno, 320
resolución de ecuaciones, 321
transformación de, 306-307
Función par, 97
trigonométrica, 447
Función polinomial, 170
algoritmo de la división, 214
bicuadrático, 200
ceros de, 218-219, 229
cociente, 214
coeficiente y término principal, 200, 845
combinación con funciones trigonométricas, 405
comportamiento en los extremos (a la larga), 203-204
con coeficientes reales, 232
conjugado complejo, 55
cuadrático, 176
cúbicos, 200, 202
de grado impar, 233
de grado superior, 203-204
de regresión, 157
división larga, 214
división sintética, 217-218
factores lineales, 228
grado de, 170
interpolación, 208
residuo, 214
teorema de la factorización lineal, 228
teorema del factor, 216
teorema del residuo, 215
teorema del valor intermedio, 206
teorema fundamental del álgebra, 228
Función polinomial cúbica, 200
graficación, 202
regresión, 157
Función polinomial de grado superior, 170
ceros de, 218-219, 229
comportamiento en los extremos, 203-204
extremo (mínimo/máximo) local, 202

Función potencia, 188
ecuación de regresión, 157
identificación de la gráfica, 193
Función racional, 237. Consulte también *Polinomio*
asíntota del comportamiento en los extremos, 240
asíntota horizontal, 240
asíntota oblicua, 240
asíntota vertical, 240
función recíproca, 238
intersecciones x y y, 240
transformación de, 238
y fracciones parciales, 608
Función secante, 360, 398
de ángulos especiales, 361
de cualquier ángulo, 373
de un ángulo agudo, 360
gráfica de, 398
Función seno, 360, 384
de ángulos agudos, 360
de ángulos especiales, 361
de cualquier ángulo, 373
gráfica de, 384
hiperbólico, 299
identidad de suma y diferencia, 465-466
identidades de cofunción, 446-447
inverso, 415
ley de los senos, 478-480
movimiento armónico, 428
periodos de, 348
Función tangente, 360, 396
de ángulos agudos, 360
de ángulos especiales, 361
de cualquier ángulo, 373
gráfica de, 396
hiperbólica, 299
inversas, 416-417
Función trigonométrica, 360, 370, 375. Consulte también *Función trigonométrica inversa; Función cosecante; Función coseno; Función cotangente; Función secante; Función seno; Función tangente*
amplitud, 386
ángulos de cuadrante, 375, 380
combinación con inversas, 418-419
combinación con polinomios, 405
corrimiento de fase, 386
de ángulos agudos, 360
de ángulos especiales, 361
de cualquier ángulo, 370
de números reales, 378
dominio, 386, 396, 400
frecuencia, 386
inversas, 416-419
mediante la calculadora, 363-364
par e impar, 447
propiedades de, 386, 396, 400
rango, 386, 396, 400
signos de, 373
sinusoides, 386, 389
triángulo de referencia, 373
uno a uno, 416-417
y números complejos, 551
y triángulos rectángulos, 360
y vectores, 507
Función trigonométrica inversa
coseno, 416
gráfica de, 414, 416-417
seno, 414
tangente, 416-417
Función uno a uno, 131
exponencial, 320
logarítmica, 320
trigonométrica, 414
Funciones
circulares, 378
trigonométricas hiperbólicas, 299, 462
Funciones básicas
función coseno, 108, 386
función cuadrática, 106, 186
función cúbica, 107, 281
función exponencial, 108
función identidad, 106, 186
función logaritmo natural, 107, 191
función logística, 108, 112
función máximo entero, 108
función raíz cuadrada, 107, 193
función recíproca, 107
función seno, 107, 384
función valor absoluto, 108, 142

G

Galería de murmullos, 651
GALILEI, GALILEO (1564-1642), 72, 180, 792
GAUSS, CARL FRIEDRICH (1777-1855), 53, 594, 742
Generador de un cono, 632
Grado de un ángulo, 351
Grado, 351
de un polinomio, 845
de una función polinomial, 170
impar, función polinomial de, 233
Gráfica, 87. Consulte también *Función*
a partir de funciones, 152
circular, 760
comportamiento oculto, 78
composiciones con valor absoluto, 142
con imágenes, 760
de cónicas, 677
de ecuaciones paramétricas, 522-523
de funciones racionales, 240
de la curva *limaçon*, 546
de la elipse, 645, 646-647
de la función cosecante, 399
de la función coseno, 386
de la función cotangente, 397, 398
de la función cúbica, 200
de la función logarítmica, 300, 305
de la función secante, 398
de la función seno, 384
de la función tangente, 397
de la inversa, 133
de líneas, 765
de la recta de números reales, 3
de polinomios, 200
de relación, 122
de rosas, 545
de un diagrama de tallo, 760
de un diagrama de tiempo, 764
de un histograma, 764
de un sistema de desigualdades, 619
de un sistema de ecuaciones lineales, 570
de una desigualdad, 27-28, 617
de una ecuación, 34
de una ecuación de segundo grado, 696
de una ecuación en x y y, 34
de una ecuación lineal, 34
de una ecuación polar, 542-543
de una función, 87
de una función bicuadrática 200
de una función cuadrática, 176
de una función exponencial, 279-281
de una hipérbola, 656, 659
de una parábola, 635
de una sucesión, 373
del crecimiento logístico, 283, 284
del término principal de un polinomio, 204
discontinuidad, 90-91
máximo y mínimo local, 96
método del trazado de puntos, 34-35
simetría, 96-97
Graficadora, 34-35
aproximación de ceros, 75-76
característica ANS, 303, 738
comportamiento oculto, 78
evaluación de una función, 86
fallas de, 78
modo de sucesión, 737
modo paramétrico, 128
NDER $f(a)$, 826
NINT($f(x)$, x, a, b), 827
notación científica, 10
números complejos, 54
pendiente, 31-32, 40
simulación de movimiento con, 526
suma de sucesiones, 742
tablas, 47-48
Gravedad, aceleración debida a la, 180
GUERRERO, VERONICA, 785

H

HEINE, HEINRICH EDUARD (1821-1881), 813
HERRMAN, ALIX KAMAKAOKALANI, 267
HIPARCO DE NICEA (190-120 a. C.), 350
Hipérbola, 656, 675
  asíntotas de, 65
  centro y foco, 656, 659
  ecuaciones paramétricas para, 660, 664
  eje focal, 656, 659
  forma estándar de, 657, 659
  propiedad reflectora de, 661-662
  ramas de, 656
  relación pitagórica, 657, 659
  semieje conjugado, 657, 659
  semieje transversal, 657, 659
  transformación de, 659
  vértices, 656, 659
Hipérbolas conjugadas, 665
Hiperboloide de revolución, 661
HIPÓCRATES DE QUIOS
    (cerca de 470-410 a. C.), 350
Hipotenusa, 360
Hipótesis, 869. Consulte *Lógica*
  inductiva, 755
Histograma, 764
Hoja de un diagrama de tallo, 760

I

Idéntico multiplicativo
  de expresiones algebraicas, 6
  de números complejos, 55
Identidad
  cociente, 445
  del ángulo doble, 47
  del medio ángulo, 473
  para reducir potencias, 471-472
  par-impar, 447
Identidad de la suma
  de expresión algebraica, 7
  matriz, 581
  número complejo, 54
Identidad trigonométrica, 444
  cociente, 445
  cofunción, 44-447
  de reducción de potencia, 471-472
  del ángulo doble, 471
  del medio ángulo, 473
  demostración, 455-456
  dominio de validez, 444
  en cálculo, 459
  estrategias de demostración, 454-457
  impar-par, 447
  pitagóricas, 445-446
  recíproca, 445
  suma y diferencia, 463-465
Identidades
  de cofunciones, 446-447
  pitagóricas, 445-446
  recíprocas, 445
Implicaciones (condicionales), 869. Consulte
    también *Lógica*
Índice
  de la suma (sumatoria), 742
  de un radical, 839
Individuo, 759
Inducción
  matemática, 753, 755
    hipótesis inductiva, 753
    principio de, 753
    principio extendido de, 758
  por enumeración, 755
Integral
  definida, 808, 830
    a partir de datos, 830
  numérica, 827
Interés
  anualidad, 338
  compuesto, 334
    (capitalizable) anualmente,
      338-339
    continuamente, 336-337
    k veces por año, 335
    valor de la inversión, 337
  rendimiento porcentual anual, 340
  tasa de, 336
  tasa porcentual anual (TPA), 340
  valor de una inversión, 337
Interpolación polinomial, 208
Intersección *x*, 32, 75, 76-240
  de una función racional, 240
Intersección *y*, 33, 240. Consulte también
    Función
  función racional, 240
Intersección *z*, 685
Intervalo
  abierto, 5
  cerrado, 5
  del parámetro, 522
  no acotado, 5
Intervalo(s) de números reales, 5
  abierto, 5
  acotado, 5
  cerrados, 5
  extremos, 5
  no acotado, 5
  semiabierto, 5
Intervalos acotados, 5
Invariante bajo rotación, 672
Inverso aditivo, 6
  de expresión algebraica, 6
  de matriz, 581
  de número complejo, 54
  de número real, 6
  propiedades de, 7
Inverso multiplicativo, 6
  de matrices, 584
  de números complejos, 55
  de números reales, 6

J

JAY, JOHN, 164
Joule, 519

K

KEPLER, JOHANNES (1571-1630), 193,
    632
k-ésimo término de una sucesión, 732

L

Lado
  inicial de un ángulo, 370
  recto de una parábola, 643
  terminal de un ángulo, 370
LEIBNIZ, GOTTFRIED (1646-1716), 86,
    792, 793, 798, 806, 808, 813
LEONARDO DE PISA
    (cerca de 1170-1250), 738
Ley
  de enfriamiento de Newton, 326
  de la separación (modus ponens), 873.
    Consulte también *Lógica*
  de los cosenos, 487
    producto de vectores, 516
  de los senos, 478-480
    caso ambiguo, 479-480
Leyes de Kepler, 193, 315-316, 655, 661
  primera ley de Kepler, 649
  tercera ley de Kepler, 193
Libra-pie, 519
Límite, 91. Consulte también *Asíntota*; *Función
    continua*; *Comportamiento en los
    extremos*
  de función continua, 816
  definición informal de, 813
  del crecimiento, 283
  en infinito, 805-806, 819
  en un punto, 794, 817
  infinito, 819
  lateral, 818
  por la derecha, 817
  por la izquierda, 817
  por los dos lados, 818
  propiedades de, 815
Límites
  de sucesiones infinitas, 733
  por los dos lados, 818
Línea de visión, 425
Litotriptor, 652, 654
Logaritmo
  común, 302
  natural, 303
Lógica
  bicondicional, 870
  conclusión, 869
  condicionales (implicaciones), 869
  conjunción, 865
  cuantificadores existenciales, 864
  cuantificadores universales, 864
  cuantificadores, 864
  disyunción, 865
  hipótesis, 869
  implicaciones (condicionales), 869
  ley de la separación (*modus ponens*),
    873

lógicamente equivalentes, 867
modus ponens (ley de la separación), 873
negación, 863
proposición compuesta, 865
proposición, 863
razonamiento directo, 873
razonamiento indirecto (*modus tollens*), 874
razonamiento válido, 871-872
regla de la cadena, 875
tabla de verdad, 865
tautología, 871
Longitud
de arco, 503
focal de una parábola, 635
(magnitud) de un segmento dirigido de recta, 502-503
(módulo) de un vector, 502-503
Lugar(es) geométrico(s), 634

M

Magnitud
de un número real. Consulte *Valor absoluto*
de un vector, 503, 504
Manto de un cono, 632
MARD (método de aproximación por rectángulos por la derecha), 808
MARI (método de aproximación mediante rectángulos por la izquierda), 808
Matrices iguales, 579
Matriz (matrices), 579. Consulte también *Resolución de sistemas de ecuaciones*
aumentada, 596
cero (nula), 581
cuadrada, 579
determinante de, 585-586
de coeficientes, 597
determinante de, 585-586
ecuación, 601
forma escalonada
por renglones, 597, 598
reducida por renglones, 599
idéntico multiplicativo, 584
identidad multiplicativa, 584
inversa, 584
inverso multiplicativo, 584
invertible, 601
multiplicación de, 581-582
múltiplo escalar de, 580
no singular, 584
operaciones elementales por renglón, 596-598
propiedades de, 587
simétrica, 591
singular, 584
suma y resta de, 579-580
transpuesta, 583
Máxima población sustentable, 294
Máximo
absoluto, 96
local, 96
y mínimo relativo. Consulte *Máximo y mínimo local (relativos)*
Máximo común denominador (MCD), 854
expresiones racionales, 853-854
fracción compuesta, 854
Máximo y mínimo local (relativo), 96
de polinomios de grado superior, 202
MAYUMA, NGAO, 625
Media, 771-772
ponderada, 774
Mediana, 771-772
Medición de un ángulo en grados-minutos-segundos (GMS), 351
Medida
de dispersión, 775
de tendencia central, 771-772
de tendencia central resistente, 772
de un ángulo, 370
Mejor ajuste, recta de, 187. Consulte *Recta de mejor ajuste*
Menor de una matriz, 585
Método
de eliminación, 571
de graficación por puntos, 35
de rotación (inversa), 133
del espejo (inversa), 132
PIES, 845
Método de aproximación por rectángulos por la derecha (MARD), 808
Método de aproximación rectangular por la izquierda (MARI), 808
Milla
náutica, 354
terrestre, 355
Mínimo
absoluto, 96
local, 96
Minuto (de ángulo), 351
Moda, 772, 773
Modelación de datos, 156-157
con funciones bicuadráticas, 157
con funciones cuadráticas, 157
con funciones cúbicas, 157
con funciones exponenciales, 157
con funciones logarítmicas, 157
con funciones logísticas, 157
con funciones potencia, 157
con funciones sinusoidales, 157
recta de mejor ajuste, 156
Modelación matemática, 70
Modelo
de regresión lineal, 157
gráfico, 72
matemático, 70, 77
numérico, 70
Modelos algebraicos, 71
Módulo de un número complejo, 551
Modus ponens (ley de separación), 873
Modus tollens (razonamiento indirecto), 874
Monomios, 845
Movimiento
armónico, 428
armónico simple, 428
caída libre vertical, 180
de un proyectil, 63, 527-528
en caída libre, 180
vertical en caída libre, 180
Multiplicidad de ceros de una función, 205
Múltiplo escalar
de un vector, 505
de una matriz, 580

N

n factorial, 702
NAPIER, JOHN (1550-1617), 300
Navegación, 351
de rango amplio (LORAN), 662
${}_NC_r$, 704
NDER $f(a)$, 826
Negación, 863. Consulte también *Lógica*
NEUMANN, JOHN VON (1903-1957), 719
NEWKIRK, ERNEST, M.D., 496
NEWTON, ISAAC (1642-1727), 180, 792, 793, 806, 813
Newton-metros, 519
NINT($f(x)$,*a, a, b*), 827
No identidad, refutar, 458
Notación
científica, 9
de construcción de conjuntos, 2
de Leibniz, 798
de suma (sumatoria), 742
exponencial, 8
factorial, 714
${}_NP_r$, 703
Nudo (velocidad), 427
Numerador, 852
Número complejo, 53
argumento de, 551
ceros de una función, 229, 230
conjugados, 55
exponentes, 54
forma decimal, 2
forma trigonométrica, 551
formas estándar, 53
imaginario, 53
módulos, 551
multiplicación y división, 54-55, 552-553
natural, 2
negativo, 3
positivo, 3
racional, 2

raíz *n*-ésima, 555-556
suma y resta, 53
triangular, 716
valor absoluto de, 551
y ecuaciones cuadráticas, 56
y el plano coordenado, 53
y raíces, 555-558
y vectores, 551
Número real, 2. Consulte también *Expresión algebraica*; *Expresión racional*
coeficientes de polinomios, 200
desigualdades, 4
enteros, 4
fórmulas de distancia y del punto medio, 15-16
funciones trigonométricas de, 378
intervalos acotados, 5
intervalos de, 5
números irracionales, 2
números naturales y enteros no negativos, 2
orden en los, 4
positivo y negativo, 3
valor absoluto, 14
Números
complejos iguales, 53
de Fibonacci, 738
irracionales, 2

O

Octantes, 685
Operaciones elementales por renglones, 596-598
Operaciones para ecuaciones equivalentes, 25
Opuesto algebraico, 6
Órbita planetaria, 680
Orden
de magnitud, 323
(tamaño) de una matriz, 579
Origen
del espacio, 685
plano coordenado, 13
recta numérica, 3
Oscilación amortiguada, 409-410

P

Par ordenado
de números reales, 13
solución de ecuación, 24
y relación, 122
y relación inversa, 129-130
Parábola, 106, 524, 634, 676
ancho focal, 635
con vértice, 636, 637
cuerda focal de, 634
directriz, 634
eje de, 177, 634
foco de, 634, 635
forma estándar de, 635
lado recto de, 643
longitud focal, 635
propiedad reflectora de, 639-640
transformaciones de, 639
traslaciones de, 636-637
Paraboloide de revolución, 639
Paralelogramo, 505
Parametrización de una curva, 522
Parámetro, 117, 522, 771
Parte imaginaria de un número complejo, 53
Parte real de un número complejo, 53
PASCAL, BLAISE (1623-1662), 712
Paso inductivo, 755
Pendiente de una recta, 31
Péndulo de Foucault, 358
Perihelio, 649
Periodo, 379
de la función tangente, 397
de una sinusoidal, 387
Permutaciones, 702-704
de *n* objetos tomados de *r* en *r*, 703
distinguibles, 703
Peso, 774
pH, 325
Plano
complejo, 550
en el espacio, 689
xy, 685
xz, 685
yz, 685
Plano coordenado,
cartesiano, 13
complejo, 53
cuadrantes del, 14
polar, 534
Planos coordenados (espacio)
plano *xy*, 685
plano *xz*, 685
plano *yz*, 685
Polinomio
característico, 593
cero, 170-171
cociente, 214
cociente y función racional, 608
factorizado completamente, 847
primo, 847
residuo, 214
Polinomio(s), 845. Consulte también *Función racional*
característico, 593
desigualdad, 257
factorización, 232, 874
forma estándar, 845
grado de, 845
multiplicación, 845
primo, 847
producto de binomios, 845
suma y resta, 845
términos de, 200, 845
Polo, 534
POLYA, GEORGE (1887-1985), 76
Posición estándar de un ángulo, 360, 370
Potencia *n*-ésima, 8
Precio de equilibrio, 574
Presión atmosférica, 292
Primer
cuartil, 775
octante, 685
Principio
de inducción matemática, 753
de multiplicación para conteo, 701
de reflexión de la inversa, 132
extendido de inducción matemática, 758
Probabilidad, 719
binomial, 726-727
condicional, 724
de eventos independientes, 722
de un evento, 718
distribución de, 719
empírica, 730
espacio muestral, 718
estrategias, 721
función de, 719, 720
valor esperado, 731
Problema
de los dos cuerpos, 680
del área, 806-807
Proceso de resolución de problemas, 76-77
modelación de datos, 156
recta de regresión lineal, 157
Producto
de binomios, 846
de dos matrices, 582
de escalar y vector, 505
de funciones, 117
de números complejos, 54, 552
de una suma y diferencia, 848
Producto punto o interno, 514, 690
en una calculadora, 515
propiedades de, 514, 690
Programación lineal, 620
Propiedad
de la tricotomía, 4
del factor cero, 80
del idéntico, 7
del inverso, 7
reflectora de una elipse, 651-652
reflectora de una hipérbola, 661-662
reflectora de una parábola, 639-640
reflexiva, 24
simétrica, 24
Propiedad asociativa
expresión algebraica, 7
números complejos, 53
Propiedad conmutativa
de expresiones algebraicas, 7
números complejos, 53
Propiedad de la multiplicación
para desigualdades, 27
para igualdades, 24
Propiedad de la suma
de desigualdades, 27
de la igualdad, 24

Propiedad distributiva
de expresiones algebraicas, 7
de números complejos, 53
Propiedad transitiva
de desigualdades, 27
de ecuaciones, 24
Propiedades
de desigualdades, 27
de exponentes, 8
de expresiones algebraicas, 7
de la igualdad, 24
de límites, 815
de logaritmos, 304, 310
de matrices, 587
de radicales, 840
del inverso aditivo, 7
del producto punto, 514
del valor absoluto, 14
Proposición, 863. Consulte también *Lógica*
compuesta, 865
Proyección de *u* sobre *v*, 517
Punto
de discontinuidad, 91-92
de equilibrio, 574
de intersección, 49
esquina (vértice), 620
factible, 620
inicial
de un segmento dirigido de recta, 503
de un vector, 502
terminal
de un segmento dirigido de recta, 503
de un vector, 503

R

Racionalización del denominador, 841
Radián, 531
conversión de grados a radianes, 353
en navegación, 351
fórmula de longitud de arco, 353
Radical(es), 839
exponentes racionales, 841
propiedades de, 840
racionalización del denominador, 841
simplificación, 840, 842
Radicando, 839
Radio
de una circunferencia, 18
de una esfera, 687
Raíz, 76. Consulte también *Radical*; *Ceros reales de un polinomio*; *Cero de una función*
cuarta, 556
cúbica, 557, 839
de la unidad, 555-558
de un número complejo, 555-558
media de las desviaciones al cuadrado, 778
n-ésima, 555-556, 839
octava, 558
Raíz cuadrada, 839
extracción, 45
Raíz *n*-ésima, 839
de la unidad, 555
de un número complejo, 555-556
principal, 839
Ramas de una hipérbola, 656
Rango
de datos, 775
de la función inversa, 130-13
de una función, 86, 87
intercuartílico, 775
Rapidez, 508
Razón común de una sucesión, 735
Razonamiento
deductivo, 80
directo, 873. Consulte también *Lógica*
indirecto, 874. Consulte también *Lógica*
inductivo, 755
válido, 871-872. Consulte también *Lógica*
Recíproco, algebraico, 6
Recta
de cuadrado mínimo, 187
de mínimos cuadrados, 187
de regresión lineal, 157
de simetría, 96-97
función cuadrática, 179
de trayectoria, 351
inclinada, 171
numérica, 3
real, 3
secante, 796
tangente, 795-796
de una función, 796
de una parábola, 643
Recta de mejor ajuste, 156, 187
correlación lineal, 157
diagrama de dispersión, 14
modelación de datos, 156
regresión lineal, 157
Rectas
paralelas, 35-36
perpendiculares, 35-36
Regla 68-95-99.7, 780
de composición inversa, 133
de la cadena, 875, Consulte también *Lógica*
de los signos de Descartes, 226
del cociente para logaritmos, 310
del producto para logaritmos, 310
terminal menos inicial (TMI), 503
Reglas de la potencia para logaritmos, 310
Regresión
análisis, 176
bicuadrática, 157
cuadrática, 157
cúbica, 157
de logaritmo natural, 157
de una recta, 156
exponencial, 157
lineal, 157
logística, 157
potencia, 157
selección de un modelo, 156
sinusoidal, 157
Relación, 122
definida en forma paramétrica, 127
inversa, 129-130
Relación inversa, 129-130
gráfica de, 133
Relación pitagórica
en elipse, 645, 648
en la hipérbola, 657, 659
Rendimiento porcentual anual (RPA), 338
Representación
cola a cabeza (regla del triángulo), en operaciones con vectores, 505
estándar de un vector, 503
Residuo, 187
Resolución
algebraica, gráfica, numérica, 77
del vector, 507
Resolución de desigualdades, 26
doble, 28
valor absoluto, 59-60
Resolución de ecuaciones, 44-49, 74-78
completando el cuadrado, 46
con intersecciones, 49
con valor absoluto, 49
de forma algebraica, 62
discriminante, 51
en forma gráfica, 44
exponencial, 320-321
intersecciones *x*, 44
mediante factorización, 47
mediante la extracción de raíces cuadradas, 45
mediante la fórmula cuadrática 46
racional, 248
trigonométrica, 449, 474
Resolución de sistemas de ecuaciones
con matrices, 596-597
con matrices inversas, 600-601
gráficamente, 570-571
mediante intersecciones, 570
no lineales, 569-570
por eliminación, 571
por eliminación gaussiana, 594-595
por sustitución, 568
Resolución de triángulos, 364, 479
áreas, 489
caso ambiguo, 479-480
ley de cosenos, 487-489
ley de senos, 478-480
número de triángulos, 487
rectángulo, 365, 425
Restricciones, 620

Resultados igualmente probables, 718
Resumen de cinco números, 775
RIEMANN, GEORG (1826-1866), 808
Rosa, 544-545
  gráfica, 545
Rotación de ejes, 669
Rotación de una cónica, 670
Rumbo, en navegación, 351

S

Sección cónica (cónica), 632
  criterios del discriminante, 671
  definida como una razón, 675
  elipse, 644
  foco que coincide con el polo, 676
  forma estándar de, 636, 645, 656
  hipérbola, 656
  identificación, 672
  parábola, 633
  rotación de, 670
  y ecuaciones de segundo grado, 633
  y ecuaciones polares, 676
  y transformaciones, 636-637, 647, 659
Sección cónica degenerada, 632
Segmento
  dirigido de recta, 502-503
  de un círculo, 496
Segmentos dirigidos de recta (flechas) equivalentes, 503
Segundo
  (de ángulo), 351
  cuartil, 775
Semieje
  conjugado de una hipérbola, 657, 659
  mayor de una elipse, 645, 647
  menor de una elipse, 645, 647
  transversal de una hipérbola, 657, 659
Semiperímetro de un triángulo, 490
Semiplano, 618
Señal de radio, 662
Serie
  aritmética, finita, 734
  convergente, 733, 747
  divergente, 733, 747
  finita
    aritmética, 732
    geométrica, 735
  geométrica
    finita, 745
    infinita, 748
Serie(s), 746-747
  aritmética, 743
  geométrica, 747
  geométrica infinita, 748
  notación de suma, 742
  suma de, 747
Sesgada
  a la derecha (distribución), 777
  a la izquierda (distribución), 777
Simetría
  con respecto al eje *x*, 97, 541
  con respecto al eje *y*, 97, 541
  con respecto al origen, 96, 541
  de gráficas polares, 541-542
Simplificación de radicales, 840, 842
Sinusoide(s), 386
  amplitud de, 386
  combinación de transformaciones de, 407-408
  corrimiento de fase, 386, 388
  frecuencia de, 388
  máximo y mínimo, 386
  movimiento armónico, 428
  periodo, 387
  regresión, 157
  sumas y diferencias, 407-408
Sistema
  cuadrado de ecuaciones, 601
  de coordenadas de mano derecha, 685
  de coordenadas rectangulares. Consulte *Sistema de coordenadas cartesianas*
  de desigualdades, 619
  de ecuaciones no lineales, 569-570
  de ecuaciones, 568. Consulte también *Resolución de sistemas de ecuaciones*
  de rastreo por medio del radar, 538
  lineal invertible, 601
  LORAN (navegación de rango amplio), 662
Sistema de coordenadas cartesianas, 13, 685
  circunferencia, 18
  conversión con coordenadas polares, 535
  fórmula de distancia, 17, 687
  fórmula del punto medio, 13
  tridimensional (espacio cartesiano), 685
Sistema de coordenadas polares, 534
  determinación de distancia, 538
  ecuaciones para transformación de coordenadas, 537
  verificación, 534
Sistema de ecuaciones lineales, 685
  eliminación gaussiana, 594-595
  forma triangular, 594
  gráficas de, 570
  matrices, 596-597, 601
  sustitución, 568
Sistemas de ecuaciones equivalentes, 594
Solución
  aproximada
    con la característica Tabla, 47-48
    desigualdades, 62
    de una ecuación en *x*, 24
    de un sistema de desigualdades, 619
    de un sistema de ecuaciones, 568
    de una desigualdad en *x*, 26
    de una desigualdad en *x* y *y*, 617
    de una ecuación en *x* y *y*, 617
    extraña, 249
Subíndice
  de columna (matriz), 579
  de un renglón (matriz), 579
Sucesión, 732
  aritmética, 734
  de Fibonacci, 738
  definida de forma recursiva, 713
  definida explícitamente, 732
  finita, 732
Sucesión geométrica, 735
  aritmética, 734
  comportamiento en los extremos (a la larga), 733
  convergencia/divergencia de, 733
  de Fibonacci, 738
  de sumas parciales, 747
  definida de forma recursiva, 732
  definida explícitamente, 732
  finita e infinita, 732
  geométrica, 735
  límite de, 733
  y series, 747
Suma
  de dos cubos, 848
  de funciones, 117
  de Riemann, 808, 830
  de sinusoides, 407-408
  de vectores, 505
  identidad de la, 463-465
  trinomio cuadrado perfecto, 848
Suma de una serie, 747
  aritmética finita, 743
  geométrica finita, 745
  geométrica infinita, 748
  sumas parciales, 747
Sumas parciales, sucesión de, 747
Sungrazer, 654
Superficies cuádricas, 690
Sustracción, 6

T

Tabla
  de frecuencias, 764
  de verdad, 865. Consulte también *Lógica*
Tallo, 760
Tangente de una suma o diferencia de ángulos, 467
Tasa
  de porcentaje constante, 290
  instantánea de cambio, 796
  porcentual anual (TPA), 340
  promedio de cambio, 172, 795
Tautología, 871. Consulte también *Lógica*

Telescopio
Cassegrain, 665
de reflexión, 661-662
espacial Hubble, 661
Teorema
de factorización lineal, 228, 232
de Moivre, 554
de Pitágoras, 16
del binomio, 714
del factor, 216
del residuo, 215
del valor intermedio, 206
fundamental del álgebra, 228
Tercer cuartil, 775
Término
constante de un polinomio, 173
cruzado, en un producto, 695
principal de una función polinomial, 200
Términos
de un polinomio, 200
de una sucesión, 732
semejantes de polinomios, 845
Tetraedro, 491
Torre de Hanoi, 752-753
Trabajo, 518-519
Transformación, 86, 138
alargamiento y compresión, 144-145
combinación, 145-146
de datos, 314
de elipse, 647
de función cuadrática, 176-178
de función logarítmica, 306-307
de función recíproca, 238
de funciones exponenciales, 280-281
de hipérbola, 659
de parábola, 636-637
de sinusoide, 389
logarítmica de datos, 328
no rígida, 138
paramétrica de circunferencias, 533
recíproca, 238
reflexión, 141
rígida, 138
traslación, 138-139
Transformaciones no rígidas, 138
Transpuesta de una matriz, 583
Traslación
de ejes, 667-668
de función cuadrática, 176-178
de función tangente, 397
de parábola, 636-637
de sinusoide, 388
Traslación horizontal, 138-139
de una función cuadrática, 177-178
de una función tangente, 397
de una sinusoidal, 386
identidades de cofunción, 446-447
Traslación vertical, 138-139
de una función cuadrática, 176-177
de una función tangente, 397
de una sinusoide, 389
Triángulo
acutángulo, 480
área de un, 489
de Pascal, 712-713
de referencia, 373
en un círculo unitario con 16 puntos, 380
obtusángulo, 480
rectángulo, 360 Consulte también *Resolución de triángulos*; *Función trigonométrica*
isósceles, 361
determinación, 36-425
resolución, 364, 425
Trigonometría plana. Consulte *Función trigonométrica*
Trinomio, 845
cuadrado perfecto, 848

U

Unidad imaginaria *i*, 53
Unión de dos conjuntos, 60
Utilería gráfica. Consulte *Graficadora*

V

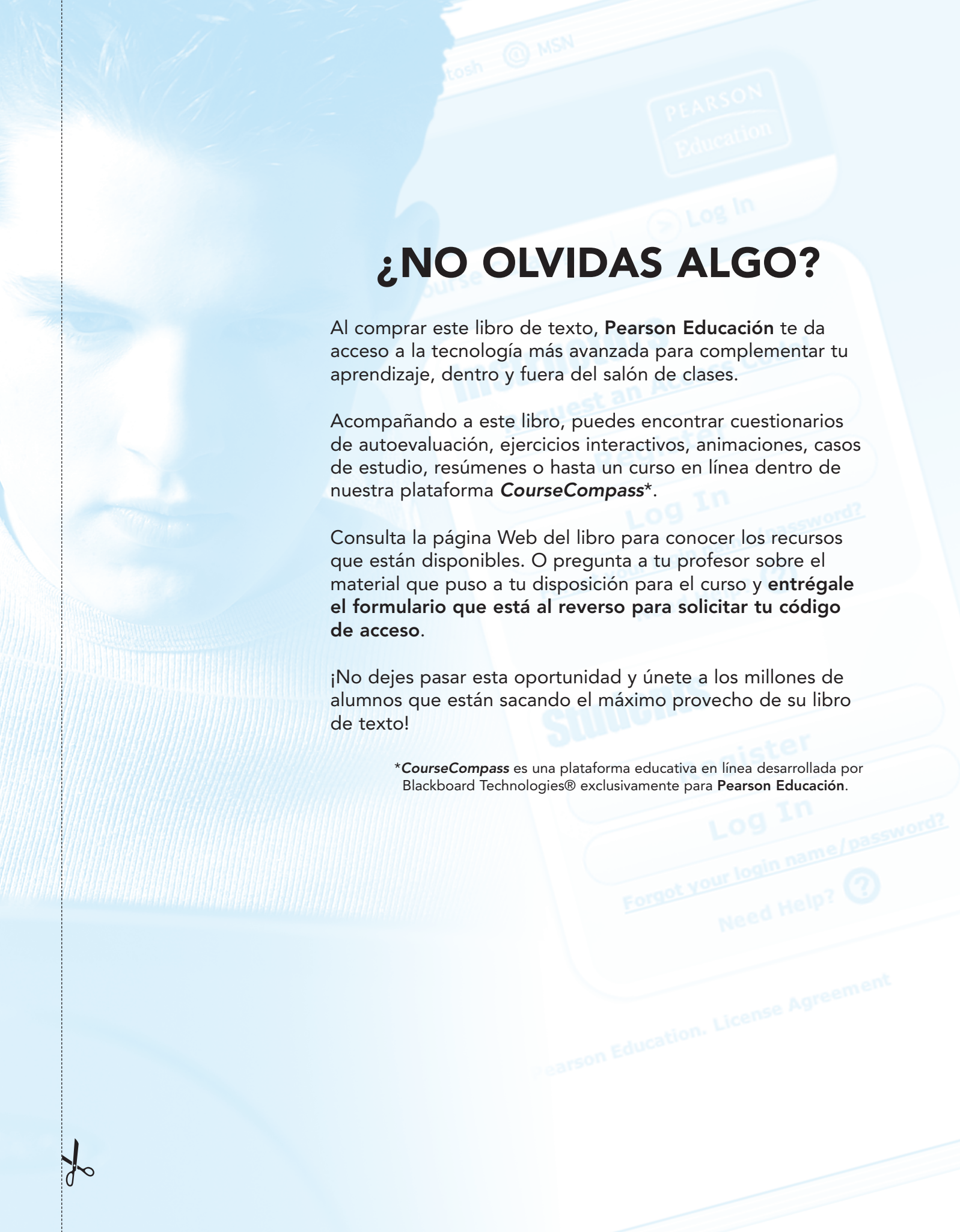
Valor
de una anualidad, 338-339
de una inversión, 337
esperado, 731
futuro de una anualidad, 339
inicial de una función, 173
máximo de *r*, 542-543
máximo local de una función, 96
mínimo local de una función, 96
presente de una anualidad, 340
Valor absoluto
desigualdad que incluye, 262
número complejo, 551
número real, 14
propiedades, 14
Valores propios, 607
Variable, 6
categórica, 759
cuantitativa, 759
dependiente, 86
independiente, 86
Variación
conjunta, 193
directa, 188
inversa, 188
Varianza, 778
Vector
cero (nulo), 503, 690
de dos dimensiones, 502-503
de posición, 506
dirección de una recta, 292
unitario, 506, 690
estándar, 507, 514, 690
en la dirección de *v*, 506
Vectores, 690
ángulo de dirección, 507
cero (nulo), 503, 690
combinación lineal, 507
de dos dimensiones, 502-503
dirección de, 503, 504
forma de componentes de, 503, 690
forma trigonométrica de, 551
iguales, 503, 690
longitud/magnitud, 690, 503
magnitud de, 504
ortogonales, 516
producto punto, 514, 690
puntos inicial y terminal de segmentos dirigidos de recta, 503, 690
regla terminal menos inicial (TMI), 503
resolución, 507
suma y multiplicación por escalar, 505, 690
unitario, 506, 690
y números complejos, 551
Velocidad, 508
angular, 354
cambiante, 805
constante, 804-805
de escape, 665
instantánea, 793-794
lineal, 354
promedio, 792
VENN, JOHN (1834-1923), 723
Ventana de visualización, graficadora, 35
cuadrada, 35
pendiente en, 40
Vértice
de un cono circular recto, 632
de una ángulo, 370
de una elipse, 644, 647
de una hipérbola, 656, 659
de una parábola, 177, 178, 634
parábola con, 636, 637
Vida media, 291

W

WEIERSTRASS, KARL (1815-1897), 813
WESSEL, CASPAR (1745-1818), 550

Z

ZENÓN DE ELEA (490-425 a. C.), 805



¿NO OLVIDAS ALGO?

Al comprar este libro de texto, **Pearson Educación** te da acceso a la tecnología más avanzada para complementar tu aprendizaje, dentro y fuera del salón de clases.

Acompañando a este libro, puedes encontrar cuestionarios de autoevaluación, ejercicios interactivos, animaciones, casos de estudio, resúmenes o hasta un curso en línea dentro de nuestra plataforma ***CourseCompass****.

Consulta la página Web del libro para conocer los recursos que están disponibles. O pregunta a tu profesor sobre el material que puso a tu disposición para el curso y **entrégale el formulario que está al reverso para solicitar tu código de acceso**.

¡No dejes pasar esta oportunidad y únete a los millones de alumnos que están sacando el máximo provecho de su libro de texto!

CourseCompass* es una plataforma educativa en línea desarrollada por Blackboard Technologies® exclusivamente para **Pearson Educación.

SOLICITUD DE CÓDIGO DE ACCESO PARA *COURSECOMPASS*

DATOS DEL ALUMNO

Nombre completo

e-mail

DATOS DE LA INSTITUCIÓN

Nombre de la institución

Campus o Facultad

Dirección

Ciudad y estado

País

Nombre del profesor

e-mail del profesor

Nombre de la materia

Grado (Nº semestre, trimestre, etc.)

Nombre de la carrera

DATOS DEL LIBRO

Título

Edición

Autor

ISBN

¿Es el texto principal? Sí ○ No ○

¿Dónde adquiriste el libro?

¿Consideras adecuado el precio? Sí ○ No ○

¿Cuentas con una computadora propia? Sí ○ No ○

¿Cuentas con acceso a Internet? Sí ○ No ○

¿Cuentas con laboratorio de cómputo en tu escuela? Sí ○ No ○

¿Has utilizado anteriormente esta u otra plataforma en línea? Sí ○ No ○

¿Cuál?

¿Ayudó a mejorar tu desempeño? Sí ○ No ○

¿Por qué?

¿Utilizas actualmente algún otro libro de Pearson Educación? Sí ○ No ○

¿Cuáles?

1. Título

edición

Autor

Materia

Profesor

¿CourseCompass? Sí ○ No ○

2. Título

edición

Autor

Materia

Profesor

¿CourseCompass? Sí ○ No ○

PARA LLENAR POR EL PROFESOR

(Llenar una sola por grupo y entregar al frente con el resto de las solicitudes)

Clave del curso (Course ID)[1]

ISBN del curso[1]

Fecha de inicio del curso

Culminación

Límite para registro de alumnos[2]

Número de códigos solicitados

Total de alumnos en el grupo

Teléfono de contacto

¿Existe el libro en biblioteca? Sí ○ No ○

Fecha de entrega de solicitudes

¿Le gustaría recibir información sobre otros materiales de Pearson Educación? Sí ○ No ○

[1] Entre a la sección **Course List** haciendo clic en la pestaña **Courses** de CourseCompass. La información aparece debajo de cada curso de su lista.

[2] En la sección **Course List**, hacer clic en el botón **Course Settings** de este curso y luego en la liga **Course Dates**. La fecha límite para inscripción aparece como **Enrollment End Date**.

Para mayor información, entre a **www.pearsoneducacion.net/coursecompass**
o escríbanos a **editorialmx@pearsoned.com**

Fórmulas de trigonometría (continuación)

Identidades impar-par

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \csc(-x) = -\csc x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sec(-x) = \sec x$$

$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \cot(-x) = -\cot x$$

Identidades de suma y diferencia

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

Identidades de cofunción

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Identidades del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u \\ &= 2\cos^2 u - 1 \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 u\end{aligned}$$

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$$

Identidades para reducir potencias

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

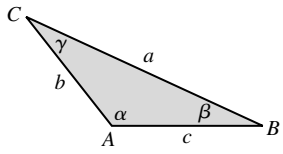
Identidades del ángulo medio

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\begin{aligned}\tan\frac{u}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}} \\ &= \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}\end{aligned}$$

Triángulos



Ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Ley de los cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Área:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{2}bc\operatorname{sen} A \\ &= \frac{1}{2}ac\operatorname{sen} B = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C\end{aligned}$$

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{donde } s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

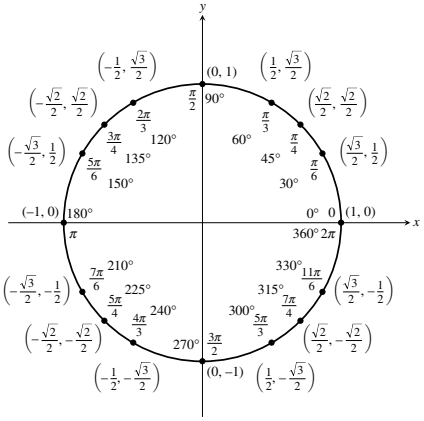
Forma trigonométrica de un número complejo

$$\begin{aligned}z = a + bi &= (r\cos\theta) + (r\operatorname{sen}\theta)i \\ &= r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\end{aligned}$$

Fórmulas de trigonometría (continuación)

Teorema de Moivre

$z^n = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n$
$= r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$



Fórmulas de geometría analítica

Fórmulas básicas

Distancia d entre puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$:
$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Punto medio: $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Pendiente de una recta: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Condición para rectas paralelas: $m_1 = m_2$

Condición para rectas perpendiculares: $m_2 = \dfrac{-1}{m_1}$

Ecuaciones de una recta

La forma punto pendiente, pendiente m y pasa por (x_1, y_1):

$y - y_1 = m(x - x_1)$

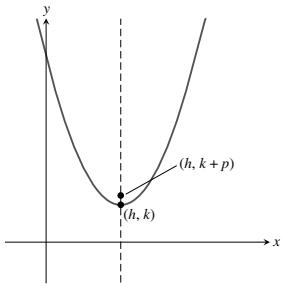
La forma pendiente intersección, pendiente m e intersección y igual a b: $y = mx + b$

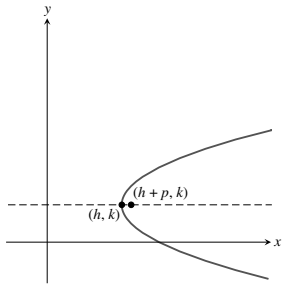
Ecuación de una circunferencia

La circunferencia con centro (h, k) y radio r:
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Parábolas con vértice en (h, k)

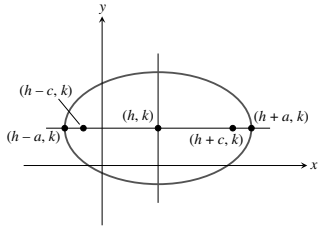
Ecuación estándar	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$
Abre	Hacia arriba o hacia abajo	A la derecha o a la izquierda
Foco	$(h, k + p)$	$(h + p, k)$
Directriz	$y = k - p$	$x = h - p$
Eje	$x = h$	$y = k$

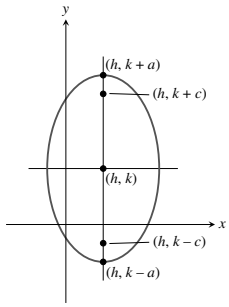




Elipses con centro en (h, k) y $a > b >$ o

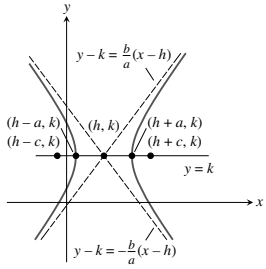
Ecuación estándar	$\dfrac{(x - h)^2}{a^2} + \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(y - k)^2}{a^2} + \dfrac{(x - h)^2}{b^2} = 1$
Eje focal	$y = k$	$x = h$
Focos	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
Vértices	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
Relación pitagórica	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$

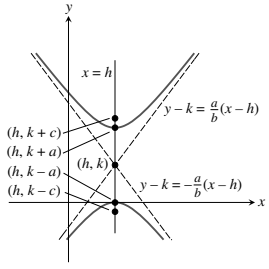




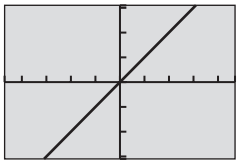
Hipérbolas con centro en (h, k)

Ecuación estándar	$\dfrac{(x - h)^2}{a^2} - \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(y - k)^2}{a^2} - \dfrac{(x - h)^2}{b^2} = 1$
Eje focal	$y = k$	$x = h$
Focos	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
Vértices	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
Relación pitagórica	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
Asíntotas	$y = \pm\dfrac{b}{a}(x - h) + k$	$y = \pm\dfrac{a}{b}(x - h) + k$



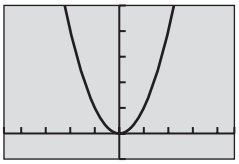


Galería de funciones básicas



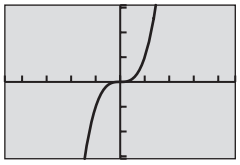
[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

Función identidad
$f(x) = x$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= (-\infty, \infty)$



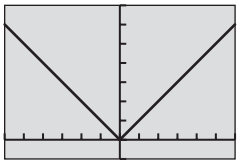
[–4.7, 4.7] por [–1, 5]

Función cuadrática
$f(x) = x^2$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= [0, \infty)$



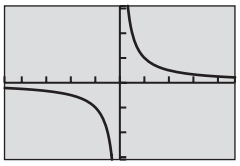
[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

Función cúbica
$f(x) = x^3$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= (-\infty, \infty)$



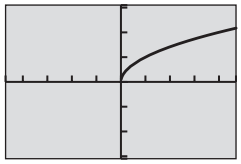
[–6, 6] por [–1, 7]

Función valor absoluto
$f(x) = |x| = \text{abs}\,(x)$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= [0, \infty)$



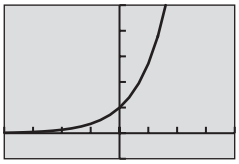
[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

Función valor absoluto
$f(x) = \dfrac{1}{x}$
Dominio $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Rango $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



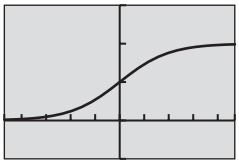
[–4.7, 4.7] por [–3.1, 3.1]

Función raíz cuadrada
$f(x) = \sqrt{x}$
Dominio $= [0, \infty)$
Rango $= [0, \infty)$



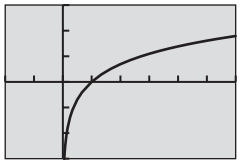
[–4, 4] por [–1, 5]

Función exponencial
$f(x) = e^x$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= (0, \infty)$



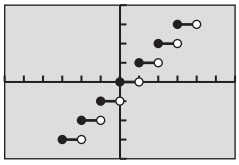
[–4.7, 4.7] por [–0.5, 1.5]

Función logística
$f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= (0, 1)$



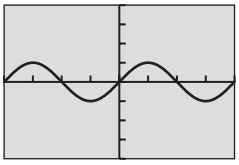
[–2, 6] por [–3, 3]

Función logaritmo natural
$f(x) = \ln x$
Dominio $= (0, \infty)$
Rango $= (-\infty, \infty)$



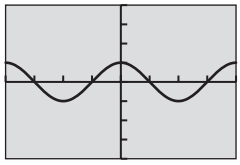
[–6, 6] por [–4, 4]

Función máximo entero
$f(x) = \text{int}\,(x)$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango = Todos los enteros



$[-2\pi, 2\pi]$ por [–4, 4]

Función seno
$f(x) = \text{sen}\,(x)$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= [-1, 1]$



$[-2\pi, 2\pi]$ por [–4, 4]

Función coseno
$f(x) = \cos\,(x)$
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= [-1, 1]$