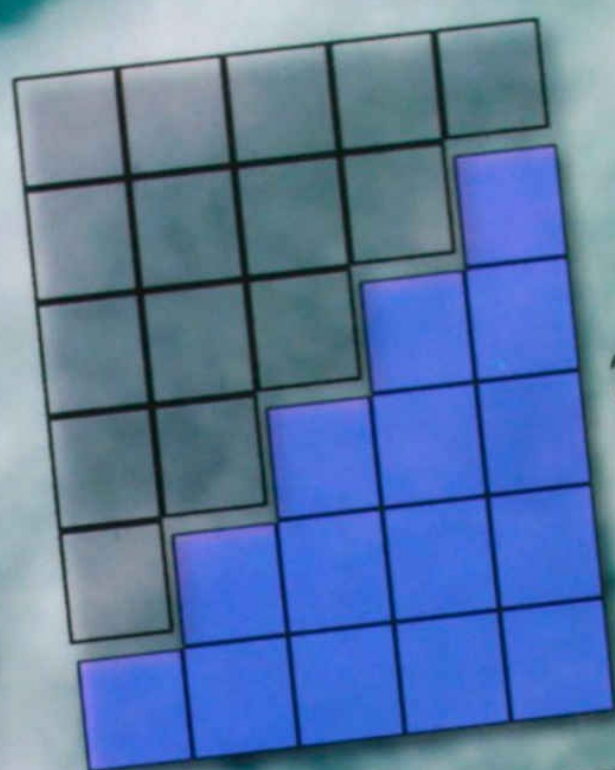




$n + 1$

$$\frac{n(n + 1)}{2}$$

EUNSA | Astrolabio

Retos matemáticos con soluciones

Juan Flaquer · David Puente



versión
digital

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación, total o parcial, de esta obra sin contar con autorización escrita de los titulares del Copyright. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Artículos 270 y ss. del Código Penal).

© Copyright 2015

Ediciones Universidad de Navarra, S.A. (EUNSA)

ISBN: 978-84-313-5553-1

Diseño y composición digital: Coffee Design (Dublín, Irlanda)

EUNSA Plaza de los Sauces, 1 y 2. 31010 Barañáin (Navarra) - España

Teléfono: +34 948 25 68 50 - Fax: +34 948 25 68 54 - E-mail: info@eunsa.es

Table of Contents

Introducción

Capítulo 1: Concurso Matenet 2000

Problema 1.1

Problema 1.2

Problema 1.3

Problema 1.4

Problema 1.5

Problema 1.6

Problema 1.7

Problema 1.8

Problema 1.9

Capítulo 2: Concurso Matenet 2001

Problema 2.1

Problema 2.2

Problema 2.3

Problema 2.4

Problema 2.5

Problema 2.6

Problema 2.7

Capítulo 3: Concurso Matenet 2002

Problema 3.1

Problema 3.2

Problema 3.3

Problema 3.4

Problema 3.5

Problema 3.6

Problema 3.7

Problema 3.8

Capítulo 4: Concurso Matenet 2003

Problema 4.1

Problema 4.2

Problema 4.4

Problema 4.5

Problema 4.6

[Problema 4.7](#)

[Problema 4.8](#)

[Capítulo 5: Concurso Berriak](#)

[Problema 5.1](#)

[Problema 5.2](#)

[Problema 5.3](#)

[Problema 5.5](#)

[Problema 5.6](#)

[Problema 5.7](#)

[Problema 5.8](#)

[Problema 5.9](#)

[Problema 5.10](#)

[Problema 5.11](#)

[Capítulo 6: Concurso ¡Aventúrate!](#)

[Problema 6.1](#)

[Problema 6.2](#)

[Problema 6.3](#)

[Problema 6.4](#)

[Problema 6.5](#)

[Problema 6.6](#)

[Problema 6.7](#)

[Problema 6.8](#)

[Problema 6.9](#)

[Problema 6.10](#)

[Problema 6.11](#)

[Bibliografía](#)

Introducción

Se recoge en este libro una colección de problemas, con sus respectivas soluciones, los cuales han surgido de tres fuentes diferentes: el antiguo concurso matemático Matenet¹, la antigua revista de Tecnun Berriak y la actual sección Aventúrate de Tecnun NEWS <http://www.tecnun.es>.

Estos problemas tienen como denominador común que ayudan a razonar desde el punto de vista matemático; el numerador lo forman temas seleccionados de dificultad variable, con una exigencia de conocimientos mínimos, que va desde un último curso de Bachillerato a un primer curso de Ingeniería o similar.

Se ha intentado que los problemas aportados sean originales, aunque ¡qué difícil es ser totalmente original! Todo nuevo problema suele tener una amplia colección de antiguos problemas que se relacionan con él, e incluso alguno de ellos puede ser equivalente al que se pretende sea nuevo.

Conscientes de esta realidad, no dudamos en presentar esta nueva colección de retos matemáticos, asequibles a una gran mayoría de personas, con la esperanza de que disfruten con ellos, como así ha sido nuestra experiencia desde el primer Concurso Matenet de 2000 (Año Mundial de las Matemáticas) hasta el presente.

En la redacción de este volumen se ha seguido el esquema Enunciado/Solución.

Consejos:

- a) Lectura atenta del enunciado.
- b) Situación del problema dentro de los conocimientos matemáticos.
- c) Elección del método más adecuado.
- d) No ceder hasta conseguir resolver el problema en un tiempo razonable... o, sin dejar de haberlo intentado, ver en la correspondiente solución cómo se podía haber resuelto.

El intento y/o logro de superación de estos retos matemáticos trae consigo una serie de indudables beneficios:

- a) Sirve de autoevaluación de los conocimientos y de la capacidad de resolver problemas matemáticos.

b) Aumenta la autoestima o al menos estimula la creatividad y forja la tenacidad en la consecución del objetivo propuesto.

c) Sirve para repasar los conocimientos adquiridos.

d) En todo caso, uno puede siempre disfrutar con la belleza de las Matemáticas.
¡Suerte!

Los autores

1. En la creación de algunos de los problemas del Concurso Matenet contribuyeron los profesores de Tecnun Manuel Pargada y José María Sarriegui.

Capítulo 1: Concurso Matenet 2000

Problema 1.1

En una finca, cuya planta tenía la forma de un trapecio $PQRS$ (ver figura, que no ha sido dibujada a escala), se enterró un tesoro exactamente bajo el poste (situado en el punto interior T) común a dos vallados internos, $AQTB$ y $TCDS$, de forma cuadrada y dispuestos como se indica en la figura.

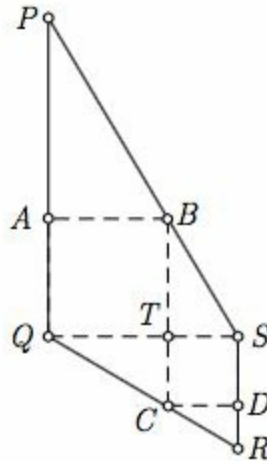


Figura 1.1: Planta de la finca.

Con el paso del tiempo y el abandono de la finca, sólo quedaron los postes situados en Q y S , cuya distancia entre ellos es de 100 metros. Todas las demás indicaciones habían desaparecido. Pero alguien recuerda que el área de la finca era de 12.500 metros cuadrados y que el tesoro estaba enterrado más cerca de S que de Q . ¿A qué distancia de Q en metros, se encuentra el tesoro escondido?

Solución

Notación: $a = QT$, $b = TS$, $f = PQ$, $h = RS$.

La distancia QS (100 m) puede expresarse como suma de las distancias QT y TS , esto es

$$100 = a + b. \quad (1.1)$$

El área de la finca (12.500 m²) puede calcularse en función de las bases del trapecio: las distancias PQ y RS y la altura QS

$$12.500 = \frac{1}{2}(f + h)100. \quad (1.2)$$

Los triángulos BTS y PQS son semejantes por ser los segmentos PQ y BC paralelos. Se tiene entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{f}{100}. \quad (1.3)$$

Análogamente, los triángulos QCT y QRS son también semejantes porque los segmentos QS y CD son paralelos, luego

$$\frac{a}{b} = \frac{100}{h}. \quad (1.4)$$

Iguando los segundos miembros de (1.3) y (1.4)

$$fh = 10.000. \quad (1.5)$$

Al resolver el sistema formado por (1.2) y (1.5), se obtienen dos soluciones:

a) $f_1 = 200$ y $h_1 = 50$. Sustituyendo en (1.3) ó (1.4), se obtiene que $a = 2b$. Y usando (1.1), se llega a que $a = \frac{200}{3}$.

b) $f_2 = 50$ y $h_2 = 200$. Con (1.3) ó (1.4), se tiene que $a = \frac{b}{2}$, que contradice la condición $a > b$ del enunciado.

Se concluye entonces que

$$a = QT = \frac{200}{3}$$

es la distancia de Q al tesoro, esto es, la solución del problema.

Problema 1.2

Dos amigos A y B salen de sus respectivas casas y se ponen a correr en el mismo instante, con sus relojes marcando en ese preciso momento exactamente las doce del mediodía. Ambos corren a velocidad constante, en línea recta, cada uno en la dirección de la casa del otro, con ánimo de encontrarse en un lugar intermedio.

Resulta que A corre a velocidad doble de la velocidad de B . Se encuentran media hora después de haber salido y en ese momento el reloj de A (que funciona bien) marca, como es lógico, las doce horas y treinta minutos, mientras que el reloj de B (que adelanta) marca las doce horas y treinta y un minutos. Después regresa cada uno a su propia casa.

Al día siguiente, A y B tratan de repetir la misma operación. B pone en hora su reloj, justamente a las doce horas del mediodía (de modo que los relojes de A y B en ese momento marcan otra vez lo mismo) y sale corriendo en ese instante en dirección de la casa de A , con la misma velocidad que el día anterior. Sin embargo A retrasa su salida 15 minutos y corre en dirección de la casa de B , en esta ocasión, a la mitad de la velocidad de B .

¿Qué hora marcará el reloj de B cuando A y B se encuentren?

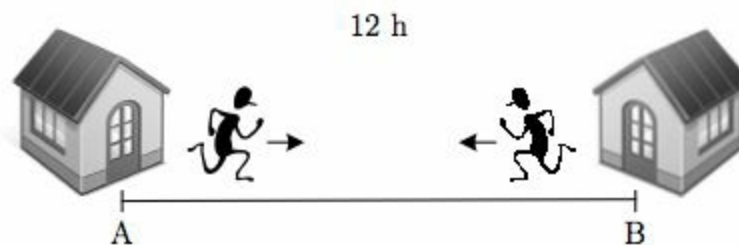


Figura 1.2: Los dos corredores.

Solución

Notación: d = distancia entre las casas de A y B , v = velocidad de B .

En la primera carrera, la distancia d se puede expresar como suma de las distancias recorridas por A y B , esto es,

$$d = v30 + (2v)30 \Rightarrow d = 90v. \quad (1.6)$$

En la segunda carrera, si t indica el tiempo (en minutos) que, a partir de las 12 horas, A y B tardan en encontrarse, resulta

$$d = vt + \frac{v}{2}(t - 15). \quad (1.7)$$

Resolviendo el sistema formado por (1.6) y (1.7), se obtiene $t = 65$ min.

De la primera carrera, se deduce que el reloj de B adelanta un minuto cada 30 minutos. Luego en 65 minutos habrá adelantado $65/30$ minutos, es decir, 2 minutos y 10 segundos. Por tanto, la hora marcada por B en el momento del encuentro con A será (13 horas y 5 min) + (2 min y 10 s) = 13 horas, 7 min y 10 s.

Problema 1.3

De una función real $y = f(x)$, de variable real,

$$f(x) = (x^2 - b)e^{-ax^2}, \quad (1.8)$$

con a y b parámetros racionales, $a > 0$, $b > 0$, se sabe que para

$$x = \sqrt{9 + 3\sqrt{6}},$$

la función tiene uno de sus puntos de inflexión. Hállese el cociente

$$\frac{M}{m}$$

entre los valores máximo M , y mínimo m , de $f(x)$.

Ayuda: De una identidad de la forma

$$p + \sqrt{q} = r + \sqrt{s},$$

donde p , q , r , s son números racionales, q y s positivos, y ambos miembros de la identidad números irracionales, se concluye necesariamente que $p = r$ y $q = s$.

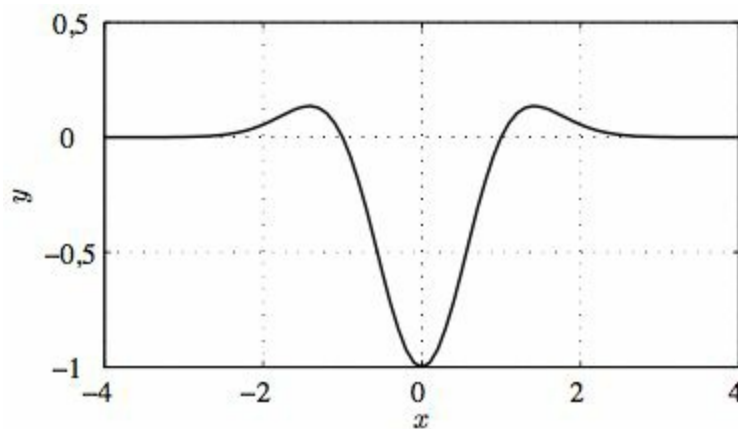


Figura 1.3: $f(x)$ en $[-4, 4]$ con $a = 1$ y $b = 1$.

Solución

La función $y = f(x)$ es

$$f(x) = (x^2 - b)e^{-ax^2}, \quad (1.8)$$

y tiene un punto de inflexión en

$$x = \sqrt{9 + 3\sqrt{6}}.$$

La derivada primera de $f(x)$ es

$$f'(x) = 2x(1 + ab - ax^2)e^{-ax^2}. \quad (1.9)$$

Y la derivada segunda

$$f''(x) = 2[1 + ab - (5a + 2ba^2)x^2 + 2a^2x^4]e^{-ax^2}. \quad (1.10)$$

La función tiene simetría par y el eje de abscisas es una asíntota horizontal como se observa en la figura siguiente, para el caso particular $a = 1$, $b = 1$.

Como la función es derivable para todo x real, los máximos y mínimos relativos, que son extremos relativos, cumplen por tanto $f'(x) = 0$. La función exponencial toma valores siempre mayores que 0, luego igualando (1.9) a 0, se obtiene, simplificando, la ecuación

$$x(1 + ab - ax^2) = 0, \quad (1.11)$$

de la que se deducen tres soluciones:

$$x_1 = 0, x_2 = \sqrt{b + \frac{1}{a}} \text{ y } x_3 = -\sqrt{b + \frac{1}{a}}.$$

La solución $x_1 = 0$ corresponde a un mínimo relativo de $f(x)$, pues sustituyendo en (1.10)

$$f''(0) = 2(1 + ab) > 0,$$

por ser $a > 0$ y $b > 0$.

Y con (1.8), evaluamos la función en el mínimo

$$f(0) = -b. \quad (1.12)$$

Los puntos de inflexión de la función se hallan resolviendo la ecuación $f''(x) = 0$.

Igualando (1.10) a 0 y simplificando, se obtiene la ecuación bicuadrada

$$1 + ab - (5a + 2ba^2)x^2 + 2a^2x^4 = 0,$$

que se puede resolver con el cambio de variable $u = x^2$, y da lugar a una ecuación de segundo grado. De las cuatro soluciones posibles para x , se identifica la que corresponde con el punto de inflexión en $x = \sqrt{9 + 3\sqrt{6}}$ (no puede ser otra), de modo que

$$\sqrt{9 + 3\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5 + 2ab + \sqrt{17 + 4(ab)^2 + 12ab}}{4a}}.$$

Elevando al cuadrado los dos miembros y operando

$$5 + 2ab + \sqrt{17 + 4(ab)^2 + 12ab} = 36a + 12a\sqrt{6}.$$

Usando la nota de ayuda del enunciado se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 5 + 2ab &= 36a \\ 17 + 4(ab)^2 + 12ab &= 864a^2, \end{aligned}$$

del que se obtiene como solución

$$a = \frac{1}{6} \text{ y } b = 3.$$

Luego las soluciones x_2 y x_3 de (1.11) son $x_2 = 3$ y $x_3 = -3$. Estos valores de x corresponden a dos máximos relativos de $f(x)$, pues en (1.10) se comprueba que $f''(x) < 0$. Para estos valores, la función vale

$$f(3) = f(-3) = 6e^{-\frac{3}{2}}. \quad (1.13)$$

Teniendo en cuenta la continuidad de $f(x)$, la localización de los extremos relativos y que para $x \rightarrow \pm\infty$, es $f(x) \rightarrow 0$, los tres extremos relativos son absolutos. Por tanto, de (1.12) y (1.13) se tiene que $m = -3$ y $M = 6e^{-\frac{3}{2}}$.

Luego el cociente $\frac{M}{m}$ es

$$\frac{M}{m} = \frac{6e^{-\frac{3}{2}}}{-3} = -2e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,446.$$

Problema 1.4

Se tienen dos recipientes abiertos R_1 y R_2 , cada uno de ellos con una mezcla homogénea de líquidos miscibles, de diferente naturaleza, entre los que se encuentra presente el agua. El volumen de líquido de cada recipiente es el mismo y se sabe que vale V . Se desconocen cuántos líquidos de naturaleza distinta del agua están presentes en las mezclas y sus cantidades.

Se realiza la siguiente operación: se llena con la mezcla de R_1 una cuchara de volumen V desconocido, $V < V$, y se vierte completamente su contenido en R_2 ; se homogeneiza la mezcla resultante de R_2 , y se vuelve a llenar la misma cuchara con la nueva mezcla de R_2 , se vierte completamente su contenido en R_1 , y se homogeneiza la mezcla resultante en R_1 .

Habiendo analizado las cantidades de agua en R_1 , antes y después de la operación, se ha observado que la cantidad de agua en R_1 ha aumentado un $\frac{100}{11}\%$. Análogamente, habiendo analizado las cantidades en R_2 , antes y después de la operación, se ha observado que la cantidad de agua en R_2 ha disminuido en un $\frac{50}{11}\%$.

¿Cuál es la capacidad V de la cuchara utilizada si el volumen V vale exactamente 0,123 litros?

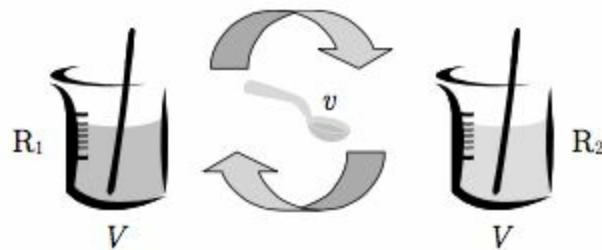


Figura 1.4: Los dos recipientes y la cuchara.

Solución

Sean x_1 y x_2 las cantidades de agua que hay, antes de la operación, en los recipientes R_1 y R_2 , respectivamente. Se denotan con x_1^n y x_2^n a las nuevas cantidades de agua, después de la operación, en los recipientes citados.

Al trasladar con la cuchara parte de la mezcla de R_1 a R_2 , el primer recipiente se queda con un volumen de líquidos $V - v$ y el segundo con un volumen $V + v$. Las cantidades x_1 y x_2 se habrán convertido en otras denotadas respectivamente por x_1^m , x_2^m y dadas por

$$x_1^m = x_1 - \frac{v}{V}x_1 \quad (1.14)$$

$$x_2^m = x_2 + \frac{v}{V}x_1. \quad (1.15)$$

Al trasladar con la cuchara parte de la mezcla de R_2 a R_1 , los dos recipientes vuelven a tener un volumen V de líquidos. Las cantidades x_1^m y x_2^m se habrán convertido respectivamente en x_1^n y x_2^n , dadas por

$$x_1^n = x_1^m + \frac{v}{V+v}x_2^m$$

$$x_2^n = x_2^m - \frac{v}{V+v}x_2^m.$$

Se pueden reescribir como

$$x_1^n = x_1^m + \frac{\frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}x_2^m$$

$$x_2^n = x_2^m - \frac{\frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}x_2^m.$$

Sea $c = \frac{v}{V}$. Se tiene que

$$x_1^n = x_1^m + \frac{c}{1+c}x_2^m$$

$$x_2^n = x_2^m - \frac{c}{1+c}x_2^m.$$

Sustituyendo x_1^m por (1.14) y x_2^m por (1.15) y operando se llega a que

$$x_1^n = \frac{x_1 + cx_2}{1+c} \quad (1.16)$$

$$x_2^n = \frac{x_2 + cx_1}{1+c}. \quad (1.17)$$

Los datos del problema permiten escribir

$$\begin{aligned} \frac{x_1^n}{x_1} &= 1 + \frac{\frac{100}{11}}{100} \\ \frac{x_2^n}{x_2} &= 1 - \frac{\frac{50}{11}}{100}. \end{aligned}$$

Sustituyendo x_1^n por (1.16) y x_2^n por (1.17) se llega a¹

$$\begin{aligned} \frac{1 + c\frac{x_2}{x_1}}{1+c} &= \frac{12}{11} \\ \frac{1 + c\frac{x_1}{x_2}}{1+c} &= \frac{21}{22}. \end{aligned}$$

Utilizando la variable auxiliar $r = \frac{x_2}{x_1}$ se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1+cr}{1+c} &= \frac{12}{11} \\ \frac{1+\frac{c}{r}}{1+c} &= \frac{21}{22}, \end{aligned}$$

que resuelto conduce a dos soluciones para c :

$$c_1 = \frac{1}{10} \text{ y } c_2 = -1.$$

La solución $c_2 = -1$ se rechaza pues no es posible que $c = \frac{v}{V}$ sea negativo (las dos cantidades V y v son positivas). En definitiva, $c = \frac{v}{V}$, de lo que se deduce $r = 2$. Del enunciado, se tiene que $V = 0,123 \text{ L}$ luego $v = cV = 0,0123 \text{ L}$.

¹. Las expresiones (1.16) y (1.17) se pueden reescribir matricialmente

$$\begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+c} & \frac{c}{1+c} \\ \frac{c}{1+c} & \frac{1}{1+c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

donde la matriz cuadrada es una matriz de Markov, doblemente estocástica.

Problema 1.5

Conocidos los valores s, t, u, V de las tangentes de los respectivos ángulos APS , BPT , UPC y VPD (ver figura), hállese el valor r de la tangente del ángulo RPW en función exclusivamente de s, t, u, v .

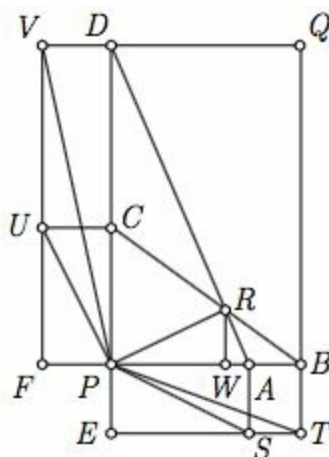


Figura 1.5: Construcción geométrica.

La figura ha sido construida del siguiente modo: primero los tres rectángulos $DPBQ$, $PETB$ y $VFPD$, con las longitudes de los lados TB y DV , valiendo cada una de ellas la unidad. Luego se han trazado dos segmentos: uno el segmento DA , donde A es un punto interior del segmento PB , y otro el segmento BC , donde C es un punto interior del segmento PD . El punto r es la intersección de los segmentos DA y BC . El punto u es el punto del segmento VF cuya proyección *ORTogonal* sobre el segmento PD es el punto C ; análogamente, el punto S es el punto del segmento ET cuya proyección *ORTogonal* sobre el segmento PB es el punto A . Finalmente, W es la proyección *ORTogonal* del punto r sobre el segmento PB . Los restantes segmentos son de construcción obvia.

Solución

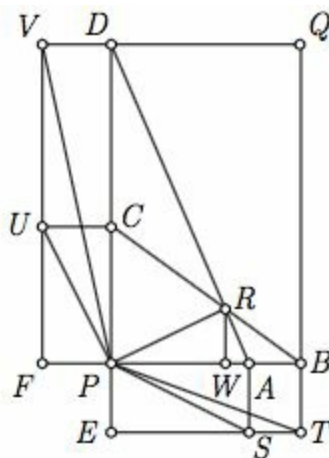


Figura 1.5: Construcción geométrica.

Notación: $r = \tan \angle RPW$, $s = \tan \angle APS$, $t = \tan \angle BPT$, $u = \tan \angle UPC$, $v = \tan \angle VPD$.

a, B, C, d denotan las longitudes de los segmentos PA, PB, PC, PD , respectivamente. Las tangentes de los ángulos indicados en el enunciado valen

$$s = \frac{1}{a}, \quad t = \frac{1}{b}, \quad u = \frac{1}{c}, \quad v = \frac{1}{d}, \quad r = \frac{y}{x}, \quad (1.18)$$

donde (x, y) son las coordenadas del punto r en el sistema de referencia cartesiano definido por las rectas que contienen los segmentos PB y PD .

En el citado sistema de referencia, las rectas que contienen los segmentos AD y BC , y que se cortan en el punto r vienen dadas por las ecuaciones

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{d} = 1$$

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1,$$

que puede expresarse en función de los valores de las tangentes de (1.18) como

$$\begin{aligned}sx + vy &= 1 \\ tx + uy &= 1.\end{aligned}$$

La resolución del sistema de ecuaciones lineales conduce a que

$$x = \frac{u - v}{su - tv}$$

$$y = \frac{s - t}{su - tv}.$$

Por consiguiente, la tangente del ángulo RPW vale

$$\frac{y}{x} = \frac{s - t}{u - v}.$$

Nota: El sistema de ecuaciones lineales que ha sido resuelto posee solución única para r , ya que, por construcción, las rectas AD y BC y que se cortan en r no pueden tener la misma dirección. Analíticamente, se traduce esto en que $su - tv$ sea distinto de 0.

Problema 1.6

Un orfebre trata de fabricar una pieza con forma de octaedro regular truncado (en los sucesivos *ORT*), partiendo de una esfera sólida de radio $\frac{3}{\sqrt{2}}$ cm, hecha de una material homogéneo (véase el *ORT* a trazo grueso en la figura).

Para ello, talla primera un octaedro regular inscrito en la esfera y a continuación lo corta convenientemente por seis planos perpendiculares a los tres ejes de simetría *OX*, *OY* y *OZ* (dos cortes por cada eje), de modo que se forman 8 caras hexagonales regulares y 6 caras cuadradas. Todas las aristas del citado *ORT* tienen la misma longitud.

El coste del *ORT* es de 10 €/cm³ del volumen de dicho *ORT*. Además, el coste del posterior pulimentado de las caras del *ORT* es de 2 €/cm² y el coste del embellecimiento de sus aristas es de 1 €/cm de longitud.

Hallar cuánto vale en € el beneficio *B* obtenido al vender la pieza, teniendo en cuenta que se fija, de antemano, un precio de venta de 14 €/cm² de la superficie de la pieza vendida.

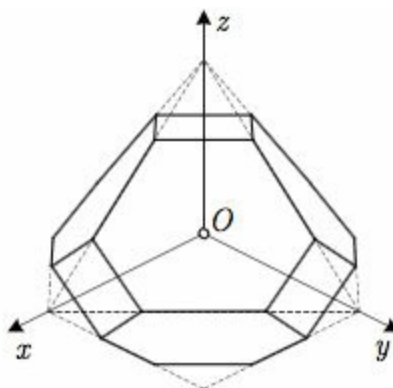


Figura 1.6: Octaedro regular truncado.

Nota: En la figura, están representados el octaedro regular (a trazo discontinuo) y el truncado (a trazo continuo). No se han representado las caras que no se ven en la perspectiva tomada.

Solución

Se va a designar respectivamente con V , A y L al volumen del ORT , al área de su superficie y a la suma de las longitudes de sus aristas.

Sea x la longitud de una arista cualquiera del ORT . El área A_h de una cara hexagonal se calcula como la suma de 6 triángulos equiláteros de lado x

$$A_h = 6 \frac{x}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} x = \frac{3}{2} \sqrt{3} x^2.$$

Y el área A_c de una cara cuadrada es

$$A_c = x^2.$$

Hay 8 hexágonos y 6 cuadrados, luego el área total A de la superficie del ORT vale

$$A = 8A_h + 6A_c = (12\sqrt{3} + 6)x^2. \quad (1.19)$$

Los cortes por los planos del enunciado quitan del octaedro regular seis pirámides de base cuadrada y caras laterales triángulos equiláteros. La semejanza de las citadas caras laterales con las caras del octaedro regular y el hecho de que el ORT tenga todas sus aristas de igual longitud x lleva necesariamente a que x valga un tercio de la arista b del octaedro regular. Aplicando el teorema de Pitágoras, la relación de b con el radio r de la esfera circunscrita al octaedro regular viene dada por $b = \sqrt{2}r$. Como $r = \frac{3}{\sqrt{2}}$ resulta que $b = 3$ cm, de donde $x = 1$ cm.

La altura común h de los seis pirámides suprimidas vale

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2} x.$$

Luego el volumen del ORT es la diferencia entre el volumen del octaedro regular y el volumen de las seis pirámides, esto es

$$V = 9\sqrt{2}x^3 - 6 \left(\frac{1}{3} x^2 \frac{\sqrt{2}}{2} x \right) = 8\sqrt{2}x^3. \quad (1.20)$$

Hay en total $\frac{8 \cdot 6 + 6 \cdot 4}{2} = 36$ aristas, por lo que la suma L de las longitudes de todas las aristas del ORT vale

$$L = 36x.$$

La función $B(x)$ de beneficio global es por tanto

$$B(x) = -10V + (14 - 2)A - 1L,$$

donde A viene dada por (1.19), V por (1.20) y L por (1.21). Luego

$$B(x) = -80\sqrt{2}x^3 + (144\sqrt{3} + 72)x^2 - 36x.$$

Como el beneficio pedido es el que corresponde a $x = 1$, se tiene finalmente

$$B(1) = -80\sqrt{2} + (144\sqrt{3} + 72) - 36 \approx 172,278 \text{ €}.$$

Problema 1.7

Dos niños A y B se disponen a jugar en una habitación oscura de planta rectangular $EFGH$ (ver figura). Toda la pared GH es un gran espejo.

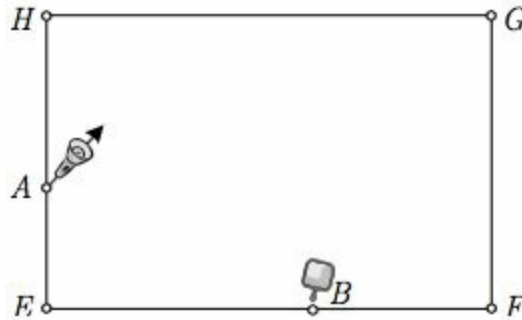


Figura 1.7: Habitación oscura.

El niño A lleva una linterna encendida que emite en todo momento un rayo paralelo al suelo hacia el gran espejo GH de modo que el rayo reflejado va directamente de la pared GH a la pared EF . El niño B lleva un pequeño espejo que lo mantiene siempre perpendicular al suelo. El niño A sólo se puede mover pegado a la pared HE mientras que el niño B sólo se puede mover pegado a la pared EF .

El juego consiste en que el niño B consiga recibir con su pequeño espejo el rayo que emite A , una vez reflejado en el gran espejo GH , y logre iluminar con él al niño A .

Se pregunta: ¿Cuál debe ser el ángulo θ en grados del pequeño espejo de B , con respecto a la pared EF en el dibujo en planta, para que cuando se cumpla el objetivo del juego las direcciones del rayo que A emite y del rayo que A recibe de B sean perpendiculares?

Nota: Las dimensiones tanto de los niños como de la linterna y del pequeño espejo se consideran despreciables.

Solución

Si se cumple el objetivo del juego, los haces forman el triángulo ABC y el ángulo $CAB = 90^\circ$ (ver figura).

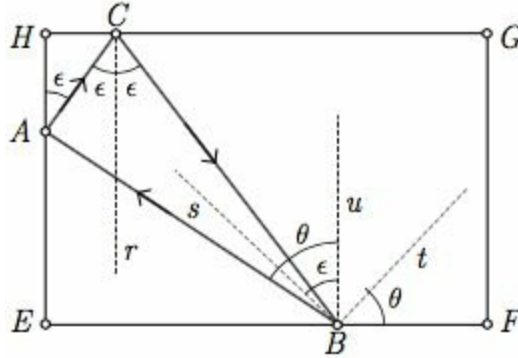


Figura 1.8: Habitación oscura.

Se toma el ángulo HAC , que forma el rayo emitido desde A con la recta HE , y que vale ϵ . Este ángulo es congruente con el que forma el segmento AC con la recta r ; y también con el que forma el segmento CB con la recta u , que es perpendicular a la recta que contiene al segmento EF por el punto B . Por la primera ley de Snell, el ángulo que forma el segmento BC con la recta r vale también ϵ . El ángulo ABC se calcula como

$$\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 2\epsilon = 90^\circ - 2\epsilon. \quad (1.22)$$

Por otro lado, el ángulo que forma la bisectriz del triángulo ABC en B con la recta u , paralela a r , es congruente con el ángulo θ del espejo en B respecto a la pared EF . Como el rayo en la dirección BA es el reflejado del rayo en la dirección CB , el ángulo ABC es el doble del ángulo que forma el segmento CB con la recta s . El ángulo θ se obtiene entonces con (1.22) como

$$\theta = \frac{\angle ABC}{2} + \epsilon = 45^\circ - \epsilon + \epsilon = 45^\circ.$$

Por tanto, el ángulo θ ha de ser de 45° , independientemente de la posición del jugador A , para cumplirse el objetivo del juego.

Problema 1.8

La forma geométrica de un helado de vainilla y chocolate es la de un sólido de revolución en torno a un eje e perpendicular al plano del plato circular y que pasa por su centro. En la figura, están representadas una sección S del helado y otra del plato. También se indican en la figura los ejes de un sistema de referencia cartesiano OXY , donde el eje OY es el eje e de revolución. La recta $y = h$ representa la sección paralela al plato que separa las zonas de vainilla y chocolate.

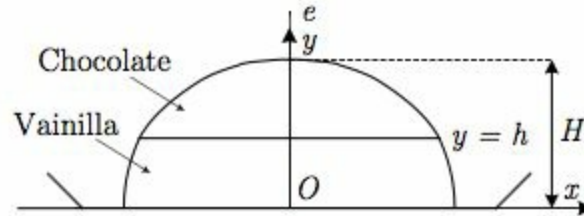


Figura 1.9: Helado de vainilla y chocolate.

La frontera C de la sección S del helado está formada por un segmento contenido en la recta $y = 0$ y por arcos de curvas, cuyas ecuaciones son:

a) Zona de vainilla ($0 \leq y < h$)

$$x^2 + y^2 = 100. \quad (1.23)$$

b) Zona de chocolate ($h \leq y \leq H$)

$$y = a - bx^2, \quad (1.24)$$

siendo a y b parámetros por determinar.

Sabiendo que la altura h del helado es $\frac{34}{3}$ cm, hállese el volumen de chocolate, en cm^3 , sabiendo que la parte curva de C es continua y que en los puntos de contacto entre las curvas, las tangentes a las mismas coinciden (continuidad de C').

Solución

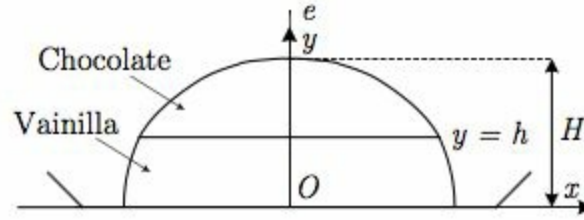


Figura 1.9: Helado de vainilla y chocolate.

La frontera C del helado verifica las siguientes ecuaciones en las distintas zonas:

a) Zona de vainilla ($0 \leq y < h$)

$$x^2 + y^2 = 100. \quad (1.25)$$

b) Zona de chocolate ($h \leq y \leq H$)

$$y = a - bx^2. \quad (1.26)$$

En $y = h$, se tiene que cumplir que la función de la frontera C sea continua y también su derivada (para que la recta tangente en ese punto tenga la misma dirección).

Despejando x de (1.25), se tiene

$$x = \pm \sqrt{100 - y^2}. \quad (1.27)$$

Imponiendo continuidad de las funciones de (1.25) y (1.26) en $y = h$ y sustituyendo x por (1.27) se tiene

$$h = a - b(100 - h^2). \quad (1.28)$$

Despejando y de (1.25)

$$y = \pm \sqrt{100 - x^2}.$$

Con $y > 0$, la derivada primera de esta función es

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}. \quad (1.29)$$

La derivada primera de la función de (1.26) es

$$y' = -2bx. \quad (1.30)$$

Imponiendo continuidad de las derivadas primeras en $y = h$ en (1.29) y (1.31)

$$-2b \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-\sqrt{100 - x^2}}{\sqrt{100 - (100 - x^2)}},$$

y sustituyendo x por (1.27), se deduce que

$$b = \frac{1}{2h}. \quad (1.31)$$

Y sustituyendo (1.31) en (1.28)

$$h = a - \frac{1}{2h}(100 - h^2),$$

con lo que

$$a = \frac{h^2 + 100}{2h}. \quad (1.32)$$

Según el enunciado, el helado tiene una altura $h = \frac{34}{3}$ cm. La altura máxima se da para $x = 0$. Con (1.26) y (1.33), se tiene

$$y(0) = a = \frac{h^2 + 100}{2h} = H = \frac{34}{3}.$$

Se tiene entonces la ecuación de segundo grado

$$h^2 - \frac{68}{3}h + 100 = 0.$$

Las soluciones son:

$$h_1 = 6 \text{ y } h_2 = \frac{50}{3}.$$

Se toma como solución

$$h = 6 \text{ cm}, \quad (1.33)$$

ya que la otra solución no es posible por ser mayor que H .

El volumen de chocolate V se obtiene como

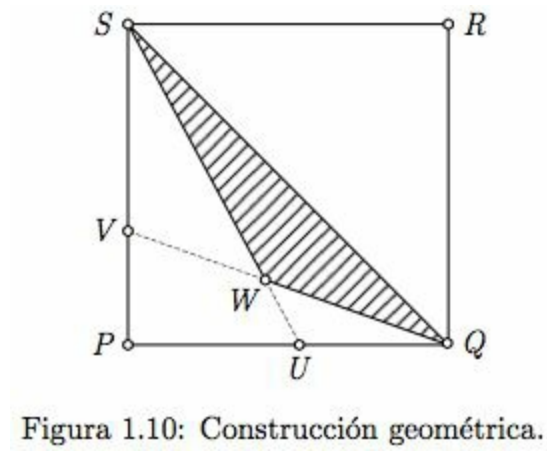
$$V = \int_h^H \pi \frac{a-y}{b} dy = \frac{\pi}{b} \left[a(H-h) - \frac{H^2 - h^2}{2} \right].$$

Sustituyendo b por (1.31), a por (1.32), $h = 34$ cm y H por (1.33), se tiene

$$V = \pi \frac{512}{3} \approx 536,17 \text{ cm}^3.$$

Problema 1.9

Hállese el área de zona sombreada de la figura



en función de los parámetros $a = PU$, $b = PQ$, $c = PV$ y $d = PS$.

Solución

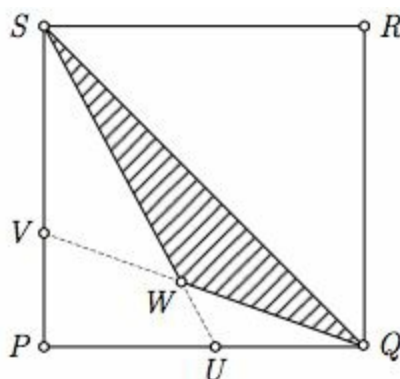


Figura 1.10: Construcción geométrica.

Se define un sistema de coordenadas cartesiano con origen en el punto P , con el eje OX según el vector $\vec{PQ}$ y el eje OY según el vector $\vec{PS}$. El punto de intersección W del segmento SU y el segmento QV es la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{d} &= 1 \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{c} &= 1. \end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$x_W = \frac{ab(c-d)}{ac-bd} \quad y_W = \frac{cd(a-b)}{ac-bd}. \quad (1.34)$$

El área pedida es la del triángulo SWQ y se puede obtener como la diferencia del área del triángulo SPQ con la del cuadrilátero $SPQW$, esto es

$$A_{SWQ} = A_{SPQ} - A_{SPU} - A_{VPQ} + A_{VPWU}. \quad (1.35)$$

Nótese que es necesario sumar el área del cuadrilátero $VPWU$ porque al restar el área de los triángulos SPU y VPQ , el área del cuadrilátero $VPWU$ se resta dos veces.

Las áreas de los triángulos SPQ , SPU y VPQ son, respectivamente,

$$A_{SPQ} = \frac{1}{2}bd \quad A_{SPU} = \frac{1}{2}ad \quad A_{VPQ} = \frac{1}{2}bc. \quad (1.36)$$

El área del cuadrilátero VPW puede obtenerse como la suma de las áreas de los triángulos VPW y WPU . Luego con (1.34), se tiene

$$\begin{aligned} A_{VPW} &= A_{VPW} + A_{WPU} = \frac{1}{2}cx_W + \frac{1}{2}ay_W = \\ &= \frac{1}{2} \frac{a^2cd + abc^2 - 2abcd}{ac - bd}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Sustituyendo (1.36) y (1.37) en (1.35) se tiene que el área pedida vale

$$A_{SWQ} = \frac{bd(a-b)(d-c)}{2(ac-bd)}.$$

Capítulo 2: Concurso Matenet 2001

Problema 2.1

Se conocen las longitudes de tres varillas de una estructura metálica plana, de la forma indicada en la figura, formada por seis varillas de espesor despreciable. La varilla AC mide $L = \frac{5}{3}$ metros, la varilla BD mide $M = \frac{5}{4}$ metros, y la varilla DA mide $N = \frac{1}{12}\sqrt{193}$ metros. Las varillas AB y CD son paralelas entre sí y perpendiculares a la varilla BC . Se pide hallar las longitudes de las otras varillas AB , BC y CD en metros.

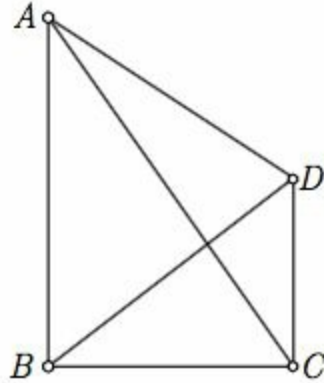


Figura 2.1: Estructura metálica.

Solución

Se denota con x la longitud en metros del segmento BC , con y la longitud del segmento CD y con z la longitud del segmento AB . Se aplica el teorema de Pitágoras en los triángulos DBC , ABC y AED , donde E es el pie de la perpendicular al segmento AB por el punto D . Se tiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$M^2 = x^2 + y^2 \quad (2.1)$$

$$L^2 = x^2 + z^2 \quad (2.2)$$

$$N^2 = x^2 + (z - y)^2. \quad (2.3)$$

De (2.1) y (2.2) se tiene respectivamente

$$y = \sqrt{M^2 - x^2} \quad (2.4)$$

$$z = \sqrt{L^2 - x^2}. \quad (2.5)$$

Introduciendo (2.4) y (2.5) en (2.3) se llega a la ecuación bicuadrada

$$3x^4 - 2(L^2 + M^2 + N^2)x^2 + 4L^2M^2 - (L^2 + M^2 - N^2)^2 = 0.$$

Realizando el cambio de variable $u = x^2$ se obtiene una ecuación de segundo grado con soluciones $u_1 = \frac{301}{308}$ y $u_2 = 1$. Se rechazan las soluciones negativas

para x (recuérdese que x es una longitud) y también la solución $x = \sqrt{\frac{301}{308}}$, porque x sería mayor que M , lo que no es posible. Por tanto, la única solución posible es $x = 1$. Sustituyendo $x = 1$ en (2.4) y (2.5), se obtiene que $y = \frac{3}{4}$ y $z = \frac{4}{3}$.

Problema 2.2

Una empresa de distribución de mercancías quiere tomar una decisión sobre cuál es el lugar más adecuado para construir uno de sus almacenes. Este almacén tiene que poder servir, con su único camión de transporte, a uno de sus tres clientes A , B y C , utilizando para ello una carretera circular de doble sentido de circulación, cuya longitud es de 16 kilómetros.

El cliente A está situado en el kilómetro 0 de la carretera, el cliente B en el kilómetro 3 y el cliente C en el kilómetro 9, con los kilómetros medidos en el sentido contrario a las agujas del reloj. Cada semana, el camión tiene que hacer 6 viajes para atender al cliente A , 5 viajes para atender al cliente B , y 4 viajes para atender al cliente C .

Si se denota con d la distancia recorrida por el camión en el reparto de la mercancía, teniendo en cuenta que una restricción del camión es que no puede utilizar el mismo viaje para atender a más de un cliente, se deberá contestar a las dos cuestiones siguientes:

- a) ¿En qué kilómetro de la carretera se deberá construir el almacén si la empresa lo que pretende es minimizar la distancia d ?
- b) ¿Para qué kilómetro de la carretera la distancia d es máxima?

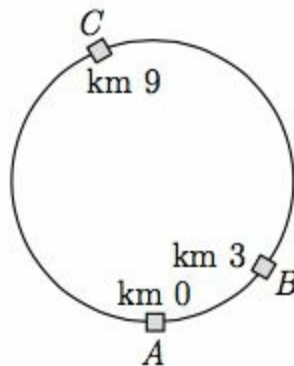


Figura 2.2: Carretera circular.

Solución

Se denota con $L = 16$ km a la longitud de la carretera circular, x la posición del almacén, y $a = 0$, $b = 3$, $C = 9$ las posiciones de los clientes A , B y C , respectivamente. La distancia mínima del almacén a cada cliente es el menor de los arcos de circunferencia que une el almacén con cada cliente. Se tiene entonces

$$d_a = \min(|x - a|, L - |x - a|) = \begin{cases} x & x \in [0, 8) \\ 16 - x & x \in [8, 16) \end{cases}$$

$$d_b = \min(|x - b|, L - |x - b|) = \begin{cases} 3 - x & x \in [0, 3) \\ x - 3 & x \in [3, 11) \\ 19 - x & x \in [11, 16) \end{cases}$$

$$d_c = \min(|x - c|, L - |x - c|) = \begin{cases} 7 + x & x \in [0, 1) \\ 9 - x & x \in [1, 9) \\ x - 9 & x \in [9, 16) \end{cases}.$$

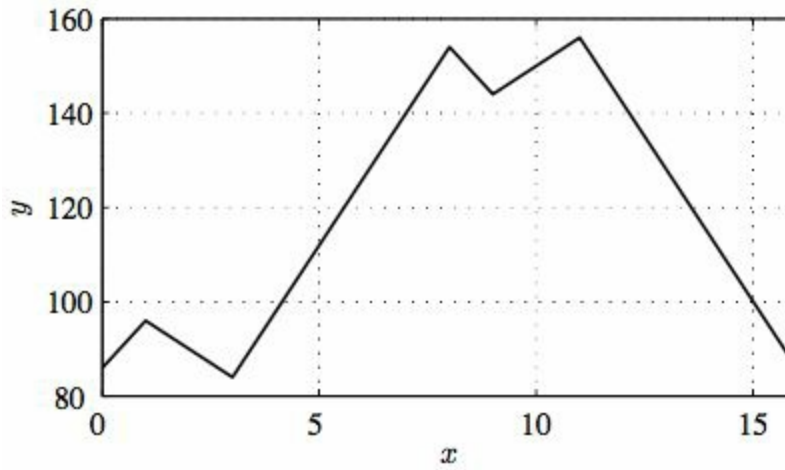


Figura 2.3: $f(x)$ en $[0, 16]$.

La función $y = f(x)$, de la que se debe estudiar el mínimo y el máximo absolutos, es

$$y = 2(6d_a + 5d_b + 4d_c),$$

donde se ha tenido en cuenta que los viajes del camión son de ida y vuelta, y que 6, 5 y 4 son los viajes semanales a los clientes A , B y C , respectivamente.

$f(x)$ es una función continua, que depende de x , cuya gráfica está formada por tramos de recta como se observa en la figura 2.3. Los valores de x de los extremos de los tramos

coinciden con las posiciones de los clientes o las complementarias a L , esto es: 0, 1, 3, 8, 9, 11. Ninguno de los seis tramos posibles: con x de 0 a 1, de 1 a 3, de 3 a 8, de 8 a 9, de 9 a 11 ó de 11 a 16 es horizontal, por lo que los máximos o mínimos locales de $f(x)$ se darán necesariamente en los valores de x que corresponden a los extremos de los tramos. En nuestro caso particular, los valores de x correspondientes a un máximo o un mínimo son: 0, 1, 3, 8, 9 y 11.

Por tanto, basta con evaluar la función $f(x)$ en estos seis valores de x , y quedarse con aquéllos con el mayor y menor valor de $f(x)$, que corresponderán al máximo y mínimo absolutos, respectivamente. Se tiene entonces que el mínimo absoluto se encuentra en $x = 3$ km, con $f(3) = 84$, y el máximo absoluto se halla en $x = 11$ km, con $f(11) = 156$.

Problema 2.3

Se tienen dos recipientes cerrados. Uno contiene cierta cantidad de un líquido A y otro cierta cantidad de un líquido B . Los líquidos ocupan todo el volumen del recipiente que los contiene.

Al abrir los recipientes al mismo tiempo, los líquidos A y B comienzan a evaporarse siguiendo leyes diferentes:

De una parte, el volumen ocupado por el líquido A , expresado en litros y denotado por V_A , sigue una ley exponencial decreciente del tipo

$$V_A = ae^{-bt},$$

siendo a y b parámetros reales y t el tiempo, en horas.

De otra parte, el volumen ocupado por el líquido B , expresado en litros y denotado por V_B , sigue una ley lineal decreciente del tipo

$$V_B = c - dt,$$

siendo C y d parámetros reales y t el tiempo, en horas.

Al medir los volúmenes V_A y V_B justo una hora después de haber abierto los recipientes, estos volúmenes son iguales.

La igualdad de los volúmenes V_A y V_B también se verifica al volver a medirlos una hora más tarde, es decir, exactamente dos horas después de haber abierto los recipientes. Además se observa que el líquido B desaparece totalmente por evaporación justo en el momento de cumplirse tres horas desde la apertura de los recipientes.

Por un descuido, se perdieron los valores de los volúmenes iniciales de los líquidos A y B , aunque se sabe que la suma de los mismos es exactamente un litro. Se pregunta: ¿Cuál era el volumen de cada uno de los líquidos en el instante inicial en que se abrieron los recipientes?

Solución

El volumen de los dos líquidos esta regido por las siguientes leyes:

$$\begin{aligned}V_A &= ae^{-bt} \\ V_B &= c - dt.\end{aligned}$$

Los volúmenes iniciales de los líquidos A y B se denotan como V_A^0 y V_B^0 , respectivamente. Corresponden a los valores de V_A y V_B para $t = 0$ horas, esto es

$$V_A^0 = ae^{-0} = a \quad (2.7)$$

$$V_B^0 = c - d0 = c. \quad (2.8)$$

Para $t = 1$ hora, $V_A = V_B$, luego

$$ae^{-b} = c - d. \quad (2.9)$$

Para $t = 2$ horas, $V_A = V_B$ implica

$$ae^{-2b} = c - 2d. \quad (2.10)$$

Para $t = 3$ horas, $V_B = 0$, entonces

$$c - 3d = 0. \quad (2.11)$$

Sustituyendo (2.14) en (2.12)

$$\frac{a}{2} = \frac{2}{3}c,$$

que con el dato del enunciado de que la suma de los volúmenes iniciales vale un litro, $a + C = 1$, permite obtener que $a = \frac{4}{7}$ l y $c = \frac{3}{7}$ l son los volúmenes iniciales de ambos recipientes.

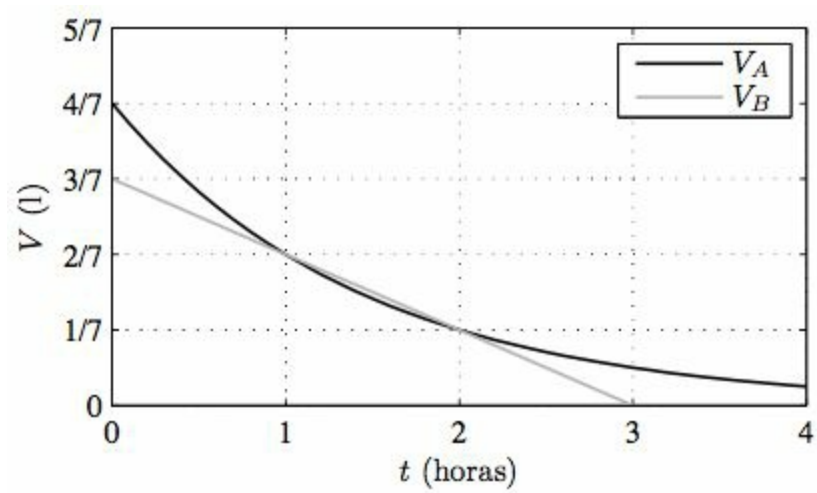


Figura 2.4: Curvas de evaporación.

Problema 2.4

Se considera que la distancia de seguridad d , medida en metros, que se exige entre dos vehículos que circulan, uno detrás del otro, a una misma velocidad V m/s, viene dada por una ley de la forma

$$d = cv^2,$$

siendo C un coeficiente real dado, constante y mayor que cero. La distancia se toma desde la parte posterior del vehículo delantero a la anterior del vehículo trasero.

Por otra parte, se llama flujo al número de vehículos que pasan, por unidad de tiempo, por un determinado punto de la carretera (trabajando en continuo, ese número - dependiendo de la unidad de tiempo empleada- puede resultar un número real, no necesariamente entero).

Se pregunta, suponiendo que todos los vehículos que circulan en el mismo sentido (en línea recta) tienen la misma longitud L , mayor que cero, ¿cuánto tiene que valer L , medida en metros, para que al circular todos los vehículos (uno detrás de otro, respetando la distancia de seguridad) a la misma velocidad, precisamente la que corresponde al flujo máximo, dicho flujo sea de un vehículo por segundo?

Para determinar el valor de C , tómese como dato adicional que si el coeficiente C fuera un 60% mayor de lo que realmente es, los vehículos deberían tener una longitud de dos metros y medio para que se lograra el flujo máximo citado de un vehículo cada segundo.

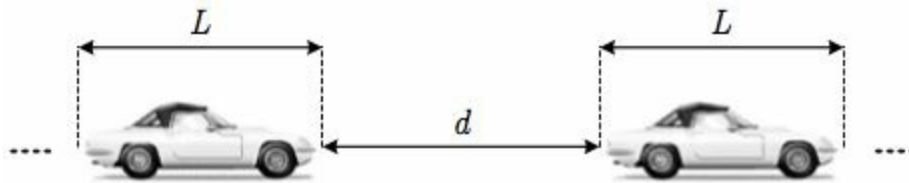


Figura 2.5: Flujo de coches.

Solución

La distancia de seguridad d entre dos vehículos que circulan a V m/s es

$$d = cv^2.$$

Si la longitud de los vehículos es de L metros, van a una velocidad de V m/s y guardan una distancia de separación de d m, entonces el tiempo t , en segundos, que tardan dos vehículos consecutivos en pasar por un mismo punto viene dado por

$$T = \frac{d + L}{v}.$$

El inverso de T , $y = \frac{1}{T} = \frac{v}{d+L}$, representa el flujo de vehículos por el citado punto, es decir, el número de vehículos por segundo que pasan por ese lugar. Hay que hallar el flujo máximo, que se logrará, con un determinado valor de L , cuando d toma el valor mínimo permitido, esto es, $d = cv^2$. Por consiguiente, el flujo máximo se alcanza para el valor de V que maximiza la función

$$y = \frac{v}{cv^2 + L}.$$

La derivada primera de y respecto a v es

$$y' = \frac{dy}{dv} = \frac{L - cv^2}{(cv^2 + L)^2},$$

que se anula para $v_m = \sqrt{\frac{L}{c}}$.

La derivada segunda de y respecto a v es

$$y'' = \frac{d^2y}{dv^2} = \frac{2c^2v^3 - 6Lcv}{(cv^2 + L)^3},$$

que en $v = v_m = \sqrt{\frac{L}{c}}$ toma un valor negativo

$$y'' \left(\sqrt{\frac{L}{c}} \right) = -\frac{c}{2L^2} \sqrt{\frac{L}{C}} < 0.$$

Luego en $v = v_m$, el flujo es máximo y vale

$$y_m = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{2L}.$$

El enunciado dice que el flujo máximo vale $y_m = 1$, luego de (2.15) se deduce que

$$4Lc = 1. \quad (2.16)$$

Además del enunciado se desprende que si C fuese $c' = 1,6c$, entonces L debería ser $L' = 2,5$ m. Estos valores llevados a (2.16), con L' en lugar de L y c' en lugar de C , conducen a

$$4 \cdot 2,5(1,6c) = 1,$$

de donde se deduce que $c = \frac{1}{16}$. Y sustituyendo este valor en (2.16), se obtiene que $L = 4$ m es la solución pedida.

Problema 2.5

Las antenas de dos estaciones base de telefonía móvil celular, situadas una en B y otra en D , vértices opuestos de la región cuadrada $ABCD$, (ver figura), tienen, cada una de ellas, una apertura de radiación de 60° , siendo $\angle RBC$ y $\angle QDC$ los ángulos respectivos de radiación.

Dentro del cuadrado $ABCD$, la señal D se recibe en la región $DQBC$ y la señal de B en la región $DRBC$. Se pregunta: ¿Qué tanto por ciento de área del cuadrado $ABCD$ no recibe ninguna señal, esto es, está fuera de cobertura?

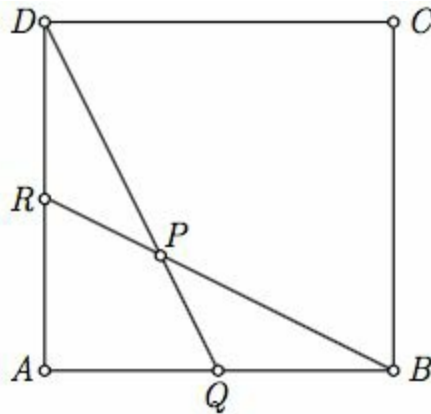


Figura 2.6: Construcción geométrica.

Solución

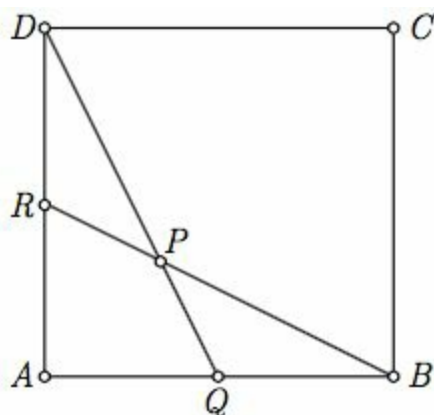


Figura 2.6: Construcción geométrica.

Datos: $\angle RBC = 60^\circ$, $\angle QDC = 60^\circ$.

Se denota con a la longitud del lado del cuadrado y con b la longitud de los segmentos AQ y RA . Los ángulos BRA y AQD son congruentes, respectivamente, con los ángulos RBC y QDC . Se tiene entonces que

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{a}{b},$$

de donde

$$a = \sqrt{3}b. \quad (2.17)$$

La rectas RB y DQ se pueden expresar, respectivamente, en el sistema de referencia cartesiano con origen en A , eje OX según el vector $\vec{AB}$ y eje OY según el vector $\vec{AD}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y &= 1 \\ \frac{1}{b}x + \frac{1}{a}y &= 1. \end{aligned}$$

Resuelto el sistema, se obtienen las coordenadas (x_P, y_P) del punto P intersección de los segmentos RB con DQ , denotado con el punto P , y que valen

$$x_P = y_P = \frac{ab}{a+b}. \quad (2.18)$$

El área S_{AQPR} que no recibe ninguna señal es la de la región $AQPR$, que es suma de las áreas de los triángulos APR y AQP . Por tanto, usando (2.18) se deduce que

$$S_{AQPR} = \frac{1}{2}bx_P + \frac{1}{2}by_P = \frac{ab^2}{a+b}. \quad (2.19)$$

Dividiendo el área obtenida en (2.19) por el área S_{ABCD} del cuadrado $ABCD$, que vale a^2 , y utilizando (2.17) se obtendrá el tanto por uno de área que no recibe ninguna señal

$$\frac{S_{AQPR}}{S_{ABCD}} = \frac{ab^2}{(a+b)a^2} = \frac{b^2}{a(a+b)} = \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

Y multiplicando el resultado por 100, se obtiene el tanto por ciento pedido

$$100 \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 21,13\%.$$

Problema 2.6

Una empresa ha construido para un cliente cuatro vallas para un campo, cuyas longitudes son términos consecutivos de una sucesión aritmética creciente; el producto de las citadas longitudes es conocido y vale P .

El cliente ha formulado a la empresa la siguiente cuestión: ¿Cuál es el área máxima de la superficie que se puede vallar, en función de p ?

La empresa ha trasladado esta cuestión a los finalistas de Matenet 2001.

Nota: Se sabe que el área S de un cuadrilátero cuyos lados tienen longitudes A, B, C y d , viene dada por la expresión

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c) - abcd \cos^2 \left(\frac{A+C}{2} \right)}, \quad (2.20)$$

siendo A y C ángulos opuestos cualesquiera y $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, el semiperímetro.

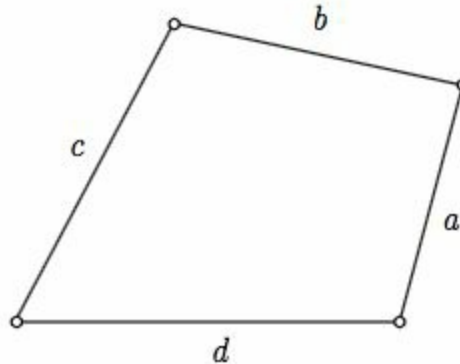


Figura 2.7: Vallas del campo.

Solución

La figura siguiente muestra el área vallada. Las longitudes de las vallas son A , $a + e$, $a + 2e$ y $a + 3e$, siendo e un valor desconocido.

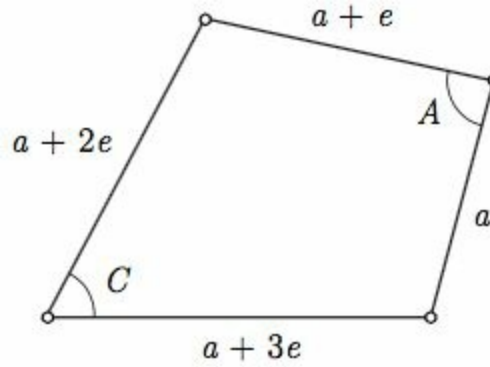


Figura 2.8: Vallas del campo.

El semiperímetro s vale

$$s = \frac{1}{2}[a + (a + e) + (a + 2e) + (a + 3e)] = 2a + 3e. \quad (2.21)$$

El área al cuadrado S^2 se calcula con (2.20) y (2.21) como

$$S^2 = (a + 3e)(a + 2e)(a + e)a - a(a + e)(a + 2e)(a + 3e) \cos^2 \left(\frac{A + C}{2} \right).$$

Como $p = a(a + e)(a + 2e)(a + 3e)$

$$S^2 = p - p \cos^2 \left(\frac{A + C}{2} \right).$$

Al ser $\cos^2 \left(\frac{A+C}{2} \right) \geq 0$, el valor máximo de S^2 se da cuando $\cos^2 \left(\frac{A+C}{2} \right) = 0$, de lo que se deduce $A + C = \pi$ ¹. Por tanto, el área máxima S_M es

$$S_M = \sqrt{p} = \sqrt{a(a + e)(a + 2e)(a + 3e)}.$$

Si las longitudes a , b , c , d de los 4 tramos de valla fueran conocidas, se tendría

$$S_M = \sqrt{abcd}.$$

1 Las posibles soluciones son del tipo $A + C = \pi + k2\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Como la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero es 2π , la única solución posible es $A + C = \pi$.

Problema 2.7

A un estudiante de ingeniería se le ocurrió la feliz idea de conectar dos puntos fijos de un terreno plano, que distan entre sí exactamente dos mil metros, con una varilla metálica de la misma longitud.

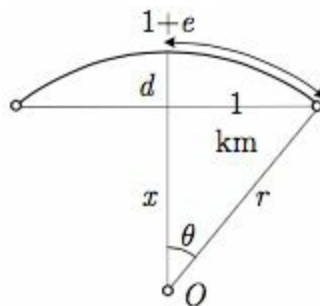
Un compañero suyo le argumentó, antes del intento, que si la longitud de la varilla fuera tan sólo dos milímetros mayor, lógicamente se deformaría al tratar de ajustar sus extremos a los dos puntos del terreno; le dijo además, que en este caso, suponiendo que la varilla tomara la forma de un arco de circunferencia, el arco distaría, en su centro, por lo menos de un metro de la línea recta que pasa idealmente por los dos puntos fijos del terreno. No quedó muy convencido ...

Se pide calcular, con las hipótesis anteriores, cuánto vale la citada distancia en metros, con al menos dos decimales correctos.

Nota: Siendo α el ángulo que corresponde al citado arco y $\theta = \frac{\alpha}{2}$ se debe tomar como valor aproximado del seno de θ la expresión

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}.$$

Se considera, además, que el área de la sección recta de la varilla vale cero.



Solución

El radio del arco de circunferencia puede calcularse como la suma de la distancia máxima d del arco a la recta que une los dos puntos y x , esto es

$$r = x + d. \quad (2.22)$$

Del triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud r y cateto de longitud x , se tiene

$$1 + x^2 = r^2. \quad (2.23)$$

El arco de circunferencia del ángulo θ vale $1 + e$, con lo que

$$r\theta = 1 + e, \quad (2.24)$$

con θ medido en radianes.

En seno de θ puede calcularse como

$$\sin \theta = \frac{1}{r}. \quad (2.25)$$

Y según el enunciado, se puede aproximar por

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}. \quad (2.26)$$

Igualando $\frac{1}{r}$ en (2.24) y (2.25), se tiene

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{1}{1 + e}, \quad (2.27)$$

y con (2.26) se puede poner $\frac{\sin \theta}{\theta}$ como

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{6}. \quad (2.28)$$

Igualando los segundos miembros de (2.27) y (2.28) se llega a

$$\theta^2 = \frac{6e}{1 + e},$$

con lo que

$$\theta = \sqrt{\frac{6e}{1+e}}.$$

Para $e = 10^{-6}$ km, θ es entonces

$$\theta(10^{-6}) = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-6}}{1 + 10^{-6}}} \approx 0,00244948851804 \text{ rad.}$$

Sustituyendo estos valores de e y θ en (2.24), se obtiene r

$$r = \frac{1+e}{\theta} \approx \frac{1+10^{-6}}{0,00244948851804} \approx 4,082489028364518 \cdot 10^2 \text{ km.}$$

x puede obtenerse de (2.23) como

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 - 1} \approx \sqrt{(4,082489028364518 \cdot 10^2)^2 - 1} = \\ &= 4,082476780915804 \cdot 10^2 \text{ km.} \end{aligned}$$

Y finalmente, d se calcula con (2.22) como

$$\begin{aligned} d &= r - x \approx 4,082489028364518 \cdot 10^2 - 4,082476780915804 \cdot 10^2 = \\ &= 0,00122474487127 \text{ km.} \end{aligned}$$

Luego se obtiene que $d \approx 1,22$ m, y se verifica que es superior a un metro.

Capítulo 3: Concurso Matenet 2002

Problema 3.1

Un operario, que trabaja seis horas diarias, produce piezas a una velocidad de 50 piezas a la hora. Algunas de las piezas que produce son buenas y otras defectuosas. El tanto por ciento δ de piezas defectuosas que produce al cabo del día depende de la fracción W del tiempo de trabajo diario que dedique al mantenimiento de la máquina con la que trabaja, según la relación

$$\delta = 30w^2 - 90w + 80.$$

¿Cuántas horas diarias debe dedicar el operario al mantenimiento para maximizar la producción de piezas buenas, suponiendo que el operario dedica las seis horas diarias o bien a producir piezas (buenas o defectuosas) o bien a mantener la máquina?



Figura 3.1: Operario y máquina.

Solución

El tanto por ciento δ de piezas defectuosas depende de la fracción de tiempo w dedicada al mantenimiento de la máquina según

$$\delta = 30w^2 - 90w + 80.$$

Se denota con p el número de horas diarias dedicadas a la producción y con m el número de horas dedicadas al mantenimiento. Se tiene

$$p + m = 6. \quad (3.1)$$

Sea b el número de piezas buenas y d el número de piezas defectuosas producidas en un día. Se tiene, teniendo en cuenta que el número total de piezas producidas es $50p$,

$$b + d = 50p. \quad (3.2)$$

El tanto por ciento δ de piezas defectuosas producidas es

$$\delta = 100 \frac{d}{50p} = \frac{2d}{p}, \quad (3.3)$$

y la fracción de tiempo dedicada al mantenimiento

$$w = \frac{m}{6}. \quad (3.4)$$

La relación del enunciado permite escribir

$$\delta = \frac{2d}{p} = 30w^2 - 90w + 80,$$

esto es

$$d = p(15w^2 - 45w + 40). \quad (3.5)$$

De (3.1) y (3.4), se obtiene que

$$p = 6(1 - w). \quad (3.6)$$

Sustituyendo (3.6) en (3.5)

$$d = (1 - w)(90w^2 - 270w + 240), \quad (3.7)$$

y con (3.2), (3.6) y (3.7) se llega a

$$b = 50p - d = 300(1 - w) - (1 - w)(90w^2 - 270w + 240),$$

esto es

$$\begin{aligned} b &= (1 - w)(300 - 240 + 270w - 90w^2) = \\ &= 30(1 - w)(2 + 9w - 3w^2) = 30(2 + 7w - 12w^2 + 3w^3). \end{aligned}$$

La derivada primera de b con respecto a w viene dada por

$$b' = 30(7 - 24w + 9w^2),$$

y la derivada segunda por

$$b'' = 30(-24 + 18w).$$

Igualando a cero la derivada primera y resolviendo la ecuación de segundo grado para w se obtiene $w_1 = \frac{7}{3}$ ó $w_2 = \frac{1}{3}$. La solución $w_1 = \frac{7}{3}$ se rechaza pues carece de significado (w no puede ser mayor que la unidad). La solución $w_2 = \frac{1}{3}$ está entre cero y uno, y es un máximo local pues b' es nulo y b'' negativo con $w_2 = \frac{1}{3}$. Definitivamente, el número de horas dedicadas al mantenimiento tiene que ser

$$m = 6w_2 = 2 \text{ horas.}$$

Nota: El máximo obtenido es absoluto en el intervalo $[0, 1]$ pues los valores que toma la función en los extremos son menores.

Problema 3.2

Un padre, aficionado a la geometría, les dijo a sus tres hijos que les iba a regalar a cada uno una parcela de un campo de su propiedad, del que les mostró un dibujo aproximado en el que había dibujado un sistema de referencia cartesiano (ver figura).

Les comentó que los segmentos rectilíneos AB , BD , CD y AC , junto con el arco de parábola de eje de simetría vertical que pasa por los puntos A , B y C , definen los contornos de las tres parcelas; el punto D está alineado con los puntos A y B , y los tres puntos A , D y C definen un triángulo rectángulo en D . Les hizo saber, además, que la longitud p del segmento AB es dos tercios de la longitud q del segmento AD .

Uno de los hermanos se dio cuenta de que la parcela (3) era la mayor de las tres y preguntó quién de los tres hermanos la recibiría. El padre contestó que la recibiría aquél que averiguara cuánto vale el cociente del área de la parcela mayor entre el área de cualquiera de las parcelas menores, que resultan ser iguales en área (como es muy fácil probar en este caso concreto).

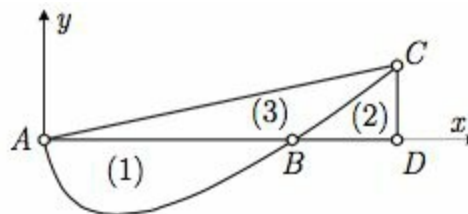


Figura 3.2: Parcelas de un campo.

Para ayudarles a resolver el problema, también les dijo que la parábola viene dada por una ecuación de la forma

$$y = ax(x - p),$$

donde p es la longitud del segmento AB y $a > 0$.

Obtégase justificadamente el valor del citado cociente.

Solución

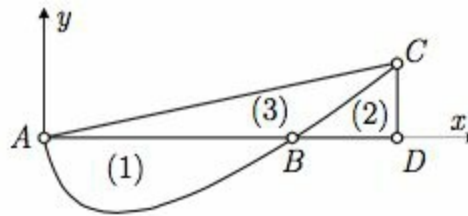


Figura 3.2: Parcelas de un campo.

Datos:

$$p = AB = \frac{2}{3} \underbrace{AD}_q, \quad a > 0.$$

La ecuación de la parábola es de la forma

$$y = ax(x - p).$$

Por el enunciado $p = \frac{2}{3}q > 0$, luego $q > p$. p es la abscisa del punto B y q la abscisa común de los puntos C y D . La ordenada del punto C es

$$aq(q - p) = \frac{1}{3}aq^2,$$

ya que el punto C pertenece a la parábola y tiene abscisa q .

El área A_{ADC} del triángulo ADC vale entonces

$$A_{ADC} = \frac{1}{2}q \frac{1}{3}aq^2 = \frac{1}{6}aq^3. \quad (3.8)$$

Siendo la ecuación de la parábola de la forma

$$y = ax(x - p), \quad \text{con } a > 0,$$

se puede calcular el área de la parcela (1) como la integral definida de 0 a p y cambiarla de signo, por ser la función negativa en este intervalo, como

$$A_{(1)} = - \int_0^p ax(x - p)dx = \frac{1}{6}ap^3 = \frac{1}{6}a \left(\frac{2}{3}q \right)^3 = \frac{4}{81}aq^3. \quad (3.9)$$

Por el enunciado, se tiene que el área de la parcela (1) es igual a la de la parcela (2). El

área de la parcela (3) se puede calcular como la diferencia entre las áreas del triángulo ADC , dada por (3.8), y la parcela (2), o la parcela (1) (valen lo mismo) dada por (3.9)

$$\begin{aligned} A_{(3)} &= A_{ADC} - A_{(2)} = A_{ADC} - A_{(1)} = \\ &= \frac{1}{6}aq^3 - \frac{4}{81}aq^3 = \frac{19}{162}aq^3. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Finalmente, con (3.9) y (3.10) se calcula la relación pedida como

$$\frac{A_{(3)}}{A_{(1)}} = \frac{\frac{19}{162}aq^3}{\frac{4}{81}aq^3} = \frac{19}{8}.$$

Nota: Aunque no se pide probar la igualdad de las áreas de las parcelas (1) y (2), se indica el modo de hacerlo

$$A_{(2)} = \int_p^q ax(x-p) = \frac{4}{81}aq^3 = A_{(1)}.$$

Problema 3.3

Se considera una tubería cilíndrica, de radio R , que continúa con una tubería en forma de tronco de cono, de altura H y radio r a la salida, tal como se indica en la figura. Por la tubería, desciende un volumen V de agua (zona en gris superior de la figura) de altura h_0 . Se pregunta: ¿Qué altura h toma el volumen de agua, en el instante mismo en el que el agua alcanza la salida (zona en gris inferior de la figura), si en ese momento todo el líquido está en el cono de salida? Se sabe además que $H = R - r$ y son datos numéricos del problema $h_0 = \frac{26}{81}$, $R = 1$, $r = \frac{1}{3}$ en metros.

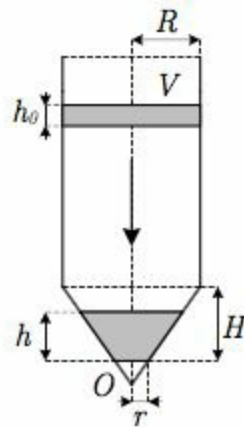


Figura 3.3: Tubería.

Notas:

- La altura h debe darse como un valor numérico concreto.
- La figura es puramente ilustrativa. El punto O denota el vértice del cono ideal del que procede el tronco de cono coloreado.
- Se recuerda que el volumen de un cono es un tercio del área de la base por la altura.

Solución

De los datos, se deduce que

$$H = R - r = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad (3.11)$$

$$V = \pi R^2 h_0 = \pi \frac{26}{81}. \quad (3.12)$$

El agua, justo antes de salir, toma la forma de un cono truncado de radio desconocido x para la base mayor, radio r conocido para la base menor y altura incógnita h .

Como el líquido está contenido en el cono de salida en ese momento, h tiene que ser menor o igual que H , tal como aparece en la figura.

Denotando con u la distancia de O a la base inferior del cono, se tiene entonces

$$\frac{u}{r} = \frac{u + H}{R},$$

por ser las tangentes del mismo ángulo.

De esta expresión se deduce

$$u = \frac{rH}{R - r}.$$

Pero por el enunciado $H = R - r$, luego

$$u = r. \quad (3.13)$$

Además x varía linealmente con la altura del líquido: $x = r$ cuando $h = 0$ y $x = R$ cuando $h = H$, con lo que la expresión de x como función de h es

$$x = r + h. \quad (3.14)$$

Por otra parte, el volumen del cono truncado tiene que ser V y es la diferencia entre los volúmenes de dos conos: el primero con vértice en O y con base la base superior del cono truncado, y el segundo con vértice en O y base, la base inferior del cono truncado, esto es

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2(u + h) - \frac{1}{3}\pi r^2 u. \quad (3.15)$$

Sustituyendo (3.13) y (3.14) en (3.15), se deduce que

$$V = \frac{1}{3}\pi(r+h)^2(r+h) - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi[(r+h)^3 - r^3].$$

De esta expresión, se despeja $r + h$ como

$$r + h = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi} + r^3},$$

de donde se despeja a su vez h como

$$h = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi} + r^3} - r.$$

Y sustituyendo por los valores numéricos del enunciado y V por (3.12) se tiene que

$$h = \sqrt[3]{\frac{3\pi \frac{26}{81}}{\pi} + \left(\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{1}{3} = \left(\frac{26}{27} + \frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

con lo que $h = H$, y el agua llena totalmente el cono truncado de la tubería.

Problema 3.4

Dos coches C1 y C2 se dirigen a un mismo lugar M , tratando de minimizar el tiempo empleado. El coche C1 sale de A y el coche C2 de B (ver figura). El punto M equidista de los puntos A y B , que son los extremos de una carretera rectilínea.

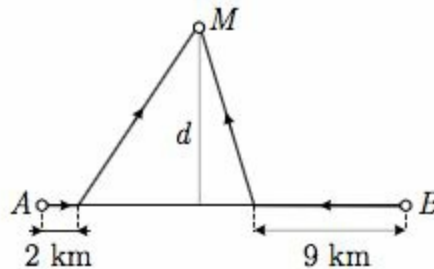


Figura 3.4: Trayectos de los dos coches.

Inicialmente, los coches recorren, a velocidades constantes, no necesariamente iguales, sendos tramos de la carretera. A continuación, sin pasar del punto medio del segmento AB , giran instantáneamente y avanzan más lentamente, campo a través, en direcciones rectilíneas hacia M , también a velocidades constantes, no necesariamente iguales. Ir campo a través supone que las velocidades de los coches se reduzcan en sendos factores k , menores que la unidad (no necesariamente iguales); por lo que la velocidad en carretera es v , pasa a ser kv al dejarla.

Antes de salir, los pilotos determinan correctamente en qué punto de la carretera los coches deben dejarla para que cada uno de ellos haga su recorrido total en un tiempo mínimo.

Se pide averiguar cuánto vale, en km, la distancia d de M a la carretera, suponiendo ciertas las dos afirmaciones siguientes:

- a) El coche C1 deja la carretera a los 2 km de recorrido y tiene un factor de reducción de velocidad de $k_1 = 0,8$.
- b) El coche C2 deja la carretera a los 9 km de recorrido y tiene un factor de reducción de velocidad de $k_2 = 0,6$.

Solución

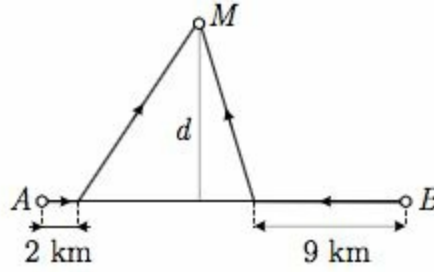


Figura 3.4: Trayectos de los dos coches.

Datos: El coche C1 deja la carretera a los 2 km, el coche C2 a los 9m, $k_1 = 0,8$ y $k_2 = 0,6$.

Se va a plantear el caso del coche que sale de A , aunque el razonamiento es totalmente análogo para el coche que sale de B . Se utilizan las siguientes variables:

a : distancia del punto A al pie de la perpendicular al segmento AB por el punto M que representa la carretera.

x : distancia en kilómetros del punto A al punto sobre la carretera en que un coche la deja. Según el enunciado, x puede tomar valores entre 0 y a .

v : velocidad en km/h de un coche en la carretera.

El tiempo en horas que tarda el coche que sale del punto A en llegar al punto M , con coeficiente de reducción de velocidad k , y que deja la carretera al cabo de x km viene dada dado por

$$t = \frac{x}{v} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + d^2}}{kv}, \quad (3.16)$$

donde d es la distancia del punto M al segmento AB .

El piloto elige el valor de x que minimiza el tiempo total del recorrido dado por (3.16). Se calcula el valor de x que anula la derivada primera de (3.16).

Se obtiene una ecuación de segundo grado. La única solución con sentido es la siguiente (x debe estar entre 0 y a).

$$x = a - \frac{kd}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Se puede comprobar que este valor es un mínimo local, pues la derivada segunda es

positiva para ese valor.

Si se aplica este resultado a los dos coches del problema con los datos del enunciado se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales en las incógnitas a y b

$$\begin{aligned}2 &= a - \frac{k_1 d}{\sqrt{1 - k_1^2}} = a - \frac{0,8d}{0,6} \\9 &= a - \frac{k_2 d}{\sqrt{1 - k_2^2}} = a - \frac{0,6d}{0,8},\end{aligned}$$

de donde se obtiene $a = 18$ y $d = 12$.

En definitiva, la distancia del punto M al segmento AB es $d = 12$ km.

Problema 3.5

Se considera un cuadrado $ABCD$ de lado unidad. Desde cada vértice se traza un segmento rectilíneo hasta el lado definido por los dos vértices inmediatamente siguientes, en el sentido de las agujas del reloj (ver figura). Los puntos de intersección P , Q , R y S de los segmentos citados entre sí definen el cuadrilátero $PQRS$. Se pide hallar el área del citado cuadrilátero, en función de a , b , c y d , siendo $a = AU$, $b = DZ$, $c = CW$, $d = BV$ distancias mayores o iguales que cero y menores que la unidad.

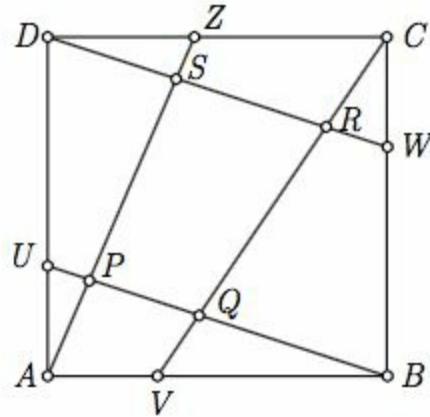


Figura 3.5: Construcción geométrica.

Solución

Se consideran los triángulos PAB , CQB , DRC y DAS . El área del cuadrilátero puede obtenerse como la diferencia del área del cuadrado $ABCD$ con el área de estos triángulos. Cada uno de los triángulos tiene uno de sus lados común con uno del cuadrado $ABCD$, de longitud 1, que se toma como base. Luego basta con conocer la altura sobre la base para calcular su área.

Se toma el triángulo PAB y se define un sistema de coordenadas cartesiano con origen en D , el eje OX según el vector $\vec{AB}$ y el eje OY según el vector $\vec{AD}$. La altura h_P sobre la base AB es la ordenada del punto en este sistema de coordenadas. El punto P puede obtenerse como la intersección de la recta que pasa por los puntos A y Z y la recta que pasa por los puntos U y B . Se tiene entonces este sistema de ecuaciones lineales

$$y = \frac{1}{b}x \quad (3.17)$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{a} = 1. \quad (3.18)$$

Resolviéndolo se obtiene la altura del triángulo PAB

$$h_P = y_P = \frac{a}{ab+1}.$$

Se puede proceder análogamente en el resto de los triángulos. Eligiendo convenientemente el sistema de coordenadas, de manera que el punto buscado sea intersección de dos rectas de la misma forma que (3.17) y (3.18). Luego el resto de alturas son

$$h_S = \frac{b}{bc+1} \quad h_R = \frac{c}{cd+1} \quad h_Q = \frac{d}{da+1}.$$

El área A_{PQRS} del cuadrilátero $PQRS$ es entonces

$$\begin{aligned} A_{PQRS} &= 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h_P - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h_S - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h_R - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h_Q = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{cd+1} + \frac{d}{da+1} \right). \end{aligned}$$

Problema 3.6

Se considera una circunferencia de radio R en el plano (ver figura). El mecanismo articulado $ABCDE$, de varillas de longitud $\frac{R}{2}$, se puede mover de modo que E describe la citada circunferencia y C se desliza al mismo tiempo por el diámetro horizontal FG de la misma, con la condición de que EC sea siempre perpendicular al segmento FG . Se denota con θ el ángulo que forman los segmentos AG y AE . ¿Cuánto vale la suma de las áreas de los triángulos ABC y CDE , cuando esta suma es máxima, estando E en el primer cuadrante?

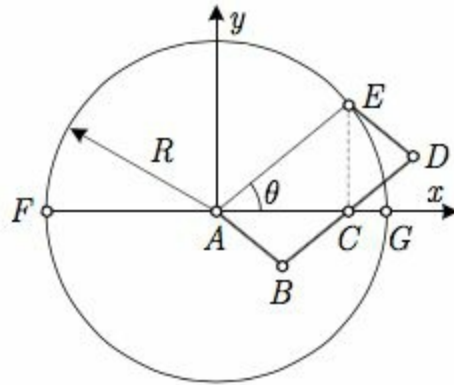


Figura 3.6: Construcción geométrica.

Solución

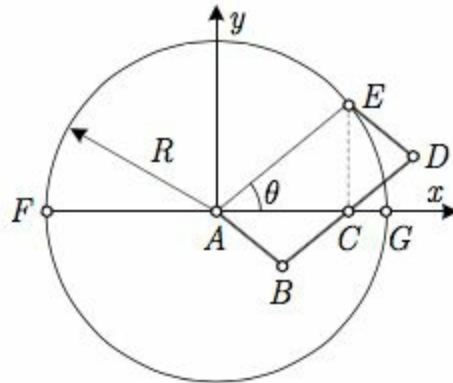


Figura 3.6: Construcción geométrica.

El movimiento del punto E , en un sistema de coordenadas con origen en el punto A , viene dado por

$$E \equiv \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta. \end{cases}$$

Como el punto C es el pie de la perpendicular trazada por el punto E al segmento FG , su abscisa coincide con la del punto E , con lo que

$$C \equiv \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = 0. \end{cases}$$

Las coordenadas del punto D son de la forma $(p + R \cos \theta, q)$, con p y q valores a determinar, donde $R \cos \theta$ es la longitud del segmento AC . Como las varillas CD y DE tienen misma longitud, q es igual a la ordenada del punto medio del segmento EC , es decir

$$q = \frac{R}{2} \sin \theta.$$

Para calcular el valor p , se considera el triángulo rectángulo CHD , donde el punto H es el pie de la perpendicular trazada por el punto D al eje de abscisas. p es entonces la longitud del segmento DH que puede resolverse por el teorema de Pitágoras como

$$p = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 \sin^2 \theta} = \frac{R}{2} \cos \theta.$$

Con lo que las coordenadas de D resultan

$$D \equiv \begin{cases} x = \frac{R}{2} \cos \theta + R \cos \theta \\ y = \frac{R}{2} \sin \theta. \end{cases}$$

Las coordenadas del punto B son de la forma (r, s) . La abscisa de B es igual a la del punto medio del segmento AC por tener las varillas AB y BC la misma longitud. Luego r es

$$r = \frac{R}{2} \cos \theta.$$

Para calcular la ordenada s de B , se considera el triángulo rectángulo ABI , donde I es el pie de la perpendicular al eje de abscisas por el punto B , por tanto

$$s = -\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cos^2 \theta} = -\frac{R}{2} \sin \theta.$$

Las coordenadas del punto B son entonces

$$B \equiv \begin{cases} x = \frac{R}{2} \cos \theta \\ y = -\frac{R}{2} \sin \theta. \end{cases}$$

La longitud de la base CA del triángulo ABC es la abscisa del punto C

$$\tilde{CA} = R \cos \theta. \quad (3.19)$$

Y la altura h_B del triángulo ABC tomada desde el vértice B se calcula como el valor absoluto de la ordenada del punto B mediante

$$h_B = \frac{R}{2} \sin \theta. \quad (3.20)$$

Con (3.19) y (3.20), el área de A_{ABC} del triángulo ABC es

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} R \cos \theta \frac{R}{2} \sin \theta = \frac{1}{8} R^2 \sin 2\theta. \quad (3.21)$$

Análogamente, en el triángulo CDE , se toma como base el lado EC . Su longitud es la ordenada de E

$$EC = R \sin \theta. \quad (3.22)$$

La altura h_D del triángulo CDE desde el vértice D es la diferencia de las abscisas de D y E

$$h_D = \frac{R}{2} \cos \theta. \quad (3.23)$$

El área A_{CDE} del triángulo CDE se calcula con (3.22) y (3.23) como

$$A_{CDE} = \frac{1}{2} R \sin \theta \frac{R}{2} \cos \theta = \frac{1}{8} R^2 \sin 2\theta. \quad (3.24)$$

La suma S de las áreas dadas en (3.21) y (3.23) es

$$S = \frac{1}{4} R^2 \sin 2\theta.$$

Para calcular los máximos relativos, se iguala a 0 la derivada

$$S' = \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{4} R^2 \sin 2\theta \right] = \frac{1}{2} R^2 \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0.$$

Como $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la única solución es que $2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

Se calcula la derivada segunda para comprobar que es un máximo relativo

$$S'' = -R^2 \sin 2\theta.$$

Para $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$S'' \left(\frac{\pi}{4} \right) = -R^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = -R^2 < 0.$$

Problema 3.7

Un cubo macizo de lado unidad es cortado por dos planos definidos por los triángulos PQR y UVW , respectivamente, de modo que se segregan de él las pirámides $OPQR$ y $XUVW$ (ver figura). ¿Cuánto vale la relación entre el volumen y el área lateral de lo que queda del cubo original, esto es, del poliedro definido por los seis vértices P, Q, R, U, V y W ?

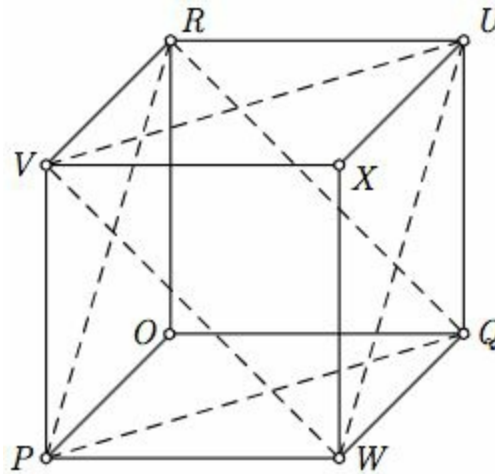


Figura 3.8: Cubo macizo.

Solución

El volumen puede obtenerse como la diferencia del volumen del cubo y el volumen de las pirámides $OPQR$ y $XUVW$. Se considera un sistema de coordenadas cartesiano con origen en O , el eje OX según el vector $\vec{OP}$, el eje OY según el vector $\vec{OQ}$ y el eje OZ según el vector $\vec{OR}$. Por la simetría de los cortes, las dos pirámides tienen el mismo volumen. El volumen de las pirámides puede obtenerse mediante el triple producto escalar (o producto mixto) de los vectores $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ y $\vec{OR}$ ¹ como

$$V_{OPQR} = V_{XUVW} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6},$$

donde las barras indican el determinante de la matriz que contienen, que por ser la identidad vale la unidad.

El volumen V es entonces

$$V = 1^3 - V_{OPQR} - V_{XUVW} = 1^3 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \quad (3.25)$$

La superficie del cubo truncado se puede descomponer como suma de la superficies de las caras: los triángulos PQR , UVW , PVW , QUW , VRU , PVR , RUQ y PQW . Por la simetría de los cortes, las caras PQR y UVW tienen el mismo área y se puede calcular mediante el módulo del producto vectorial de los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$ como

$$\begin{aligned} A_{PQR} = A_{UVW} &= \frac{1}{2} \|\vec{PQ} \times \vec{PR}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \|\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Las caras restantes tienen un área de $\frac{1}{2} \times$ (la mitad del área de la cara del cubo). Luego el área total A del cubo truncado es

$$A = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 6 \frac{1}{2} = \sqrt{3} + 3. \quad (3.26)$$

Con (3.25) y (3.26), se tiene finalmente que la relación pedida es

$$\frac{V}{A} = \frac{3 - \sqrt{3}}{9}.$$

Nota: Las dobles barras indican el módulo del vector que contienen.

[1](#) El valor absoluto del triple producto escalar es igual al volumen del paralelepípedo que formarían los tres vectores.

Problema 3.8

Sea la función

$$y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}.$$

Pruébese que no están alineados los tres puntos de la gráfica de esa función, para abscisas no negativas, donde se producen el mínimo, un punto de inflexión y un cero.

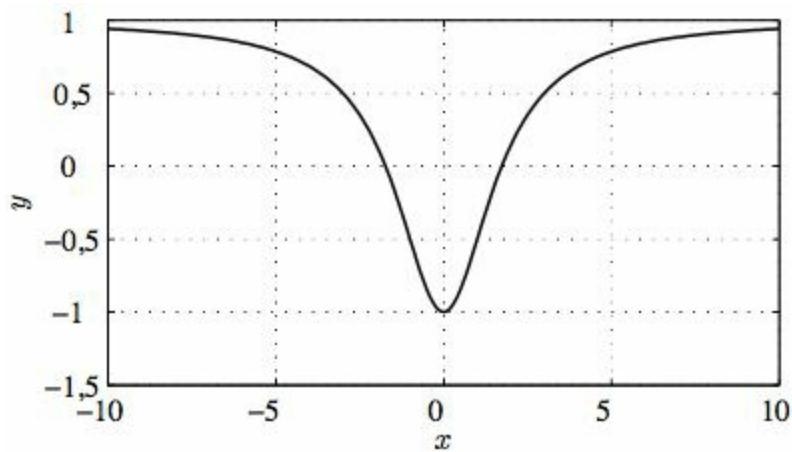


Figura 3.9: Gráfica de la función.

Solución

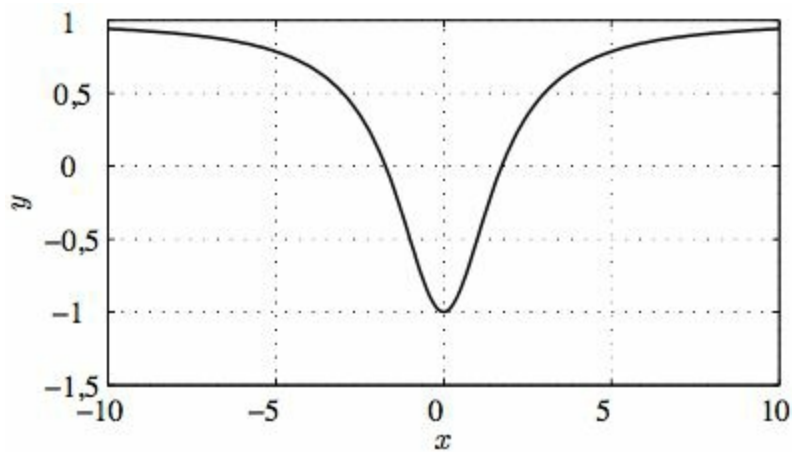


Figura 3.9: Gráfica de la función.

Se tiene la función $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}.$$

Los ceros de $f(x)$ son los que anulan el numerador

$$x^2 - 3 = 0.$$

La única solución para $x \geq 0$ es $x_1 = \sqrt{3}$.

Se calcula la derivada primero de $f(x)$ y se iguala a 0 para obtener los extremos relativos

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 3) - 2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2} = 0.$$

El único extremo relativo se da para $x_2 = 0$.

Se calcula la derivada segunda y se iguala a 0 para obtener los puntos de inflexión

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{12(x^2 + 3)^2 - 12x \times 2(x^2 + 3) \times 2x}{(x^2 + 3)^4} = \\ &= \frac{36(1 - x^2)}{(x^2 + 3)^3} = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

El único punto de inflexión para $x \geq 0$ está en $x_3 = 1$.

Se puede comprobar con (3.27) que el extremo relativo en $x_2 = 0$ corresponde a un mínimo relativo, puesto que $f''(0) < 0$. Se tiene entonces un cero en $A = (\sqrt{3}, 0)$, un mínimo relativo en $B = (0, -1)$ y un punto de inflexión en $C = (1, -\frac{1}{2})$. Estos puntos estarán alineados si pertenecen a la misma recta. Esto es equivalente a comprobar por ejemplo si A satisface la ecuación de la recta que pasa por B y C . Se puede resolver esta cuestión mediante un determinante como sigue

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \neq 0.$$

Como el determinante no es nulo, se verifica que los tres puntos no están alineados.

Capítulo 4: Concurso Matenet 2003

Problema 4.1

Dos máquinas A y B realizan el mismo proceso industrial, pero con velocidades distintas, siendo la máquina B más rápida que la máquina A . Se da la circunstancia de que los relojes que controlan el tiempo del proceso en cada una de las máquinas funcionan mal, pues el reloj de A se adelanta cinco minutos cada hora mientras que el reloj de B se retrasa cinco minutos cada hora. El operario, responsable de las máquinas, en un momento de su jornada laboral, detiene los relojes y los vuelve a poner en marcha a la misma hora que marca el reloj de la fábrica (que funciona bien), justamente en el mismo instante en que se produce el arranque de ambas máquinas. Cuando una máquina llega a la mitad de su proceso emite una señal acústica. El operario se da cuenta por el reloj de la fábrica que la diferencia entre ambas señales acústicas ha sido exactamente de 30 minutos. Cuando la máquina A termina su proceso el reloj adelantado de A marca las 12 horas y 10 minutos y cuando la máquina B termina su proceso el reloj atrasado de B marca las 10 horas y 55 minutos, ambas dentro de la misma jornada laboral que va desde las 8 de la mañana hasta las 2 de la tarde. ¿Cuáles son exactamente los tiempos verdaderos de la duración del proceso completo en ambas máquinas A y B , dados en minutos, y la hora verdadera en que el operario puso en marcha estas máquinas?



Figura 4.1: Las dos máquinas.

Solución

Sea H la hora, medida en minutos, en que se ponen en marcha los relojes de las dos máquinas.

El tiempo exacto t_A en minutos del proceso de la máquina A es

$$t_A = \frac{12 \cdot 60 + 10 - H}{\frac{60}{65}}, \quad (4.1)$$

donde se tiene en cuenta que el reloj se adelanta 5 minutos cada hora. El tiempo exacto t_B en minutos del proceso de la máquina B es

$$t_B = \frac{10 \cdot 60 + 55 - H}{\frac{60}{55}}, \quad (4.2)$$

donde se tiene en cuenta que el reloj se retrasa 5 minutos cada hora.

La máquina A tarda $\frac{t_A}{2}$ minutos en alcanzar la mitad de su proceso y la máquina B tarda $\frac{t_B}{2}$ minutos en alcanzar el mismo objetivo (un tiempo inferior por ser más rápida). La diferencia en minutos entre las señales acústicas será por tanto

$$\frac{t_A}{2} - \frac{t_B}{2} = 30. \quad (4.3)$$

Introduciendo (4.1) y (4.2) en (4.3) se despeja H que vale

$H = 600$ min, es decir 10 horas.

Sustituyendo el valor de h en (4.1) y (4.2) se obtiene que $t_A = 120$ min e $t_B = 60$ min.

Problema 4.2

Una escalera de mano, de longitud L , se apoya en uno de sus extremos en una pared vertical y en el otro extremo en el suelo. Se desea que la escalera también esté en contacto con una caja cúbica de arista exactamente un metro de longitud, una de cuyas caras está totalmente en contacto con la pared y otra totalmente en contacto con el suelo (en la figura, se representan en alzado la escalera, la caja, el suelo y la pared).

Se pide la altura H , en metros, que alcanza la escalera, desechando la otra solución posible en la que la escalera alcanza una altura menor, sabiendo que L vale, en metros

$$\frac{\sqrt{45}}{2}.$$

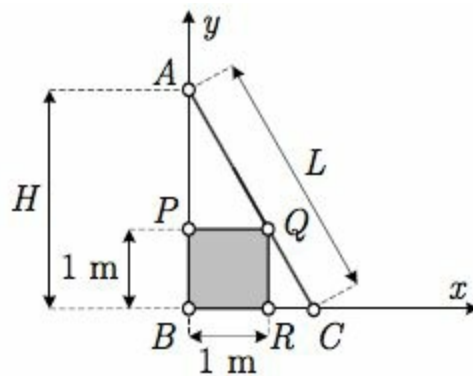


Figura 4.2: Escalera de mano.

Nota: Para simplificar los cálculos, se aconseja vivamente utilizar la identidad

$$(1+x)^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1,$$

y usar una sola vez el teorema de Pitágoras, además de los otros razonamientos que crea oportunos para la resolución del problema.

Solución

Se denota con x la longitud del segmento AP y con y la longitud del segmento RC .

Los triángulos QAP y CQR son semejantes porque los segmentos AP y QR son paralelos. Entonces los ángulos QAP y CQR son iguales y sus tangentes serán las mismas, con lo que

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{1},$$

de ahí que

$$y = \frac{1}{x}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ABC se tiene

$$(1+x)^2 + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{\frac{1}{x}}^2 = L^2. \quad (4.4)$$

Con la nota del enunciado, el primer miembro de (4.4) se puede poner como

$$(1+x)^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1,$$

y el segundo miembro de (4.4) vale $\frac{45}{4}$ según el valor de L dado en el enunciado. Por tanto, (4.4) resulta

$$\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \frac{45}{4},$$

de lo que se deduce que

$$1 + x + \frac{1}{x} = \frac{7}{2},$$

esto es, la ecuación de segundo grado

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{1}{2}$. Se toma como solución $x_1 = 2$ porque es la que conduce a un valor de H mayor, con lo que

$$H = 1 + x = 1 + 2 = 3 \text{ m.}$$

Problema 4.3

Se tienen cuatro recipientes. Los tres primeros completamente llenos de un mismo líquido y el cuarto completamente vacío. La forma del primero es una semiesfera de radio R ; la del segundo es un cilindro de radio R y altura H ; la del tercero es un tronco de cono de altura H , radio r en la base inferior y radio $r = \frac{R}{2}$ en la base superior. La forma del cuarto recipiente (ver figura) es un paraboloide de revolución de altura h , cuya sección circular en la parte superior es un círculo de radio R . Se pregunta cuánto vale el cociente $\frac{h}{H}$ para que se cumplan las tres condiciones siguientes:

- Que se puedan vaciar completamente los tres primeros recipientes en el cuarto, llenándolo completamente de líquido sin perder nada.
- Que el volumen total de líquido sea $\frac{16}{81}\pi R^3$ cm³.
- Que el área de la sección recta del cuarto recipiente, por un plano que contiene al eje de revolución, valga $\frac{32}{27}\pi R^2$ cm².

La figura muestra esta sección recta. La parte curva de la sección es una rama de parábola de ecuación $y = ax^2$, donde a es un parámetro cuyo valor tiene que ser hallado. El paraboloide de revolución, citado en el enunciado, se engendra al girar esta parábola en torno al eje vertical.

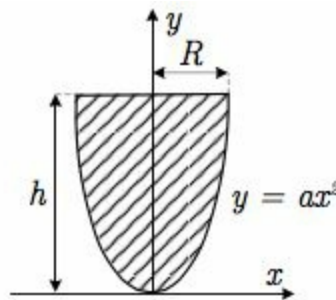


Figura 4.3: Sección recta del cuarto recipiente.

Solución

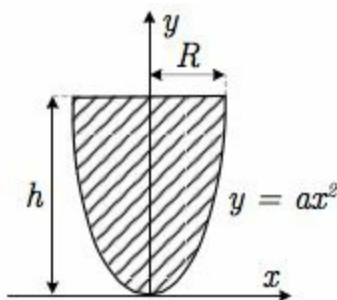


Figura 4.3: Sección recta del cuarto recipiente.

Se muestra a continuación cómo calcular los volúmenes de los distintos recipientes¹:

Volumen de la semiesfera:	$V_1 = \frac{2}{3}\pi R^3.$
Volumen del cilindro:	$V_2 = \pi H R^2.$
Volumen del tronco de cono:	$V_3 = \frac{1}{3}\pi H (R + r^2 + Rr).$
Volumen del cuarto recipiente:	$V_4 = \frac{1}{2}\pi \frac{h^2}{a}.$

Del enunciado, se sabe que el volumen del líquido es $V = \frac{16}{81}\pi^4 \text{ cm}^3$ y el área de la sección recta A es dos veces la diferencia entre el área $A_1 = hR$ del rectángulo que encierra la rama de la parábola $y = ax^2$ contenida en el primer cuadrante y el área A_2 bajo la citada rama que vale

$$A_2 = \int_0^R ax^2 dx = a \frac{R^3}{3}.$$

Como el punto (R, h) pertenece a la parábola, se tiene que cumplir que $a = \frac{h}{R^2}$, luego

$$A_2 = \frac{hR}{3}.$$

En definitiva

$$A = 2(A_1 - A_2) = 2 \left(hR - \frac{hR}{3} \right) = \frac{4}{3}hR.$$

Como el área de la sección recta es $A = \frac{32}{27}\pi^2$, se tiene

$$\frac{32}{27}\pi^2 = \frac{4}{3}hR.$$

De ahí, se despeja h como

$$h = \frac{8}{9} \frac{\pi^2}{R}. \quad (4.5)$$

Otra condición del enunciado es que el volumen total de líquido V debe ser igual al del cuarto recipiente V_4 , luego

$$\frac{16}{81}\pi^4 = \frac{1}{2}\pi \frac{h^2}{a} = \frac{1}{2}\pi h R^2. \quad (4.6)$$

Con (4.5) y (4.6) se obtiene que

$$R = \frac{4}{9}\pi \quad (4.7)$$

$$h = 2\pi. \quad (4.8)$$

El volumen total de líquido V debe ser igual a la suma de los volúmenes de los tres primeros recipientes, V_1, V_2, V_3 , esto es

$$\frac{16}{81}\pi^4 = \frac{2}{3}\pi R^3 + \pi H R^2 + \frac{1}{3}\pi H \left[R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + R\frac{R}{2} \right]. \quad (4.9)$$

Introduciendo el valor de R de (4.7) en (4.9), se despeja H como

$$H = \frac{4}{9}\pi. \quad (4.10)$$

Finalmente, se calcula la relación $\frac{h}{H}$ pedida con (4.8) y (4.10)

$$\frac{h}{H} = \frac{9}{2}.$$

¹ El volumen del cuarto recipiente se obtiene por integración del siguiente modo: $V_4 = \int_0^h \pi \left(\frac{y}{a}\right) dy = \frac{1}{2}\pi \frac{h^2}{a}.$

Problema 4.4

Se considera un sistema de referencia cartesiano rectangular OXY . Hállese la ecuación de la recta que es tangente a las dos parábolas siguientes

$$y = -x^2 + 4$$
$$y = -(x - 2)^2,$$

así como las coordenadas de sus puntos de contacto con las citadas parábolas.

Se deben dar como resultados:

- a) La recta tangente, en la forma $y = mx + b$.
- b) Las coordenadas (x_1, y_1) del punto de contacto de la tangente con la primera parábola.
- c) Las coordenadas (x_2, y_2) del punto de contacto de la tangente con la segunda parábola.

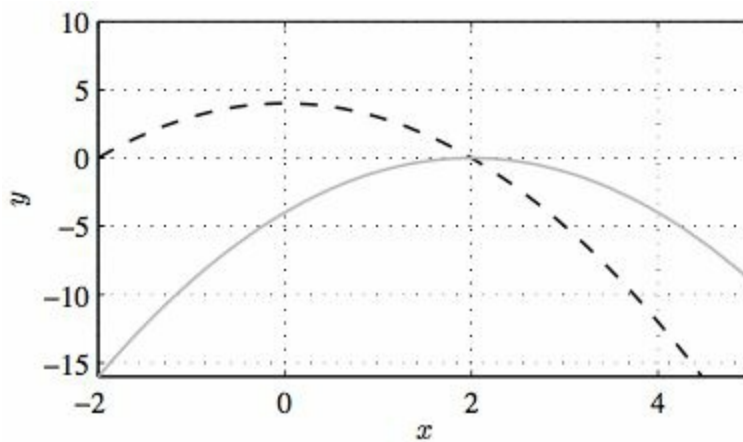


Figura 4.4: Las dos parábolas.

Solución

Las ecuaciones de las parábolas son

$$y = -x^2 + 4$$

$$y = -(x - 2)^2.$$

Primer procedimiento

En el punto (x_1, y_1) , la recta tangente tiene una pendiente m_1 que vale

$$m_1 = -2x_1. \quad (4.11)$$

En el punto (x_2, y_2) , la pendiente m_2 de la recta tangente es

$$m_2 = -2(x_2 - 2). \quad (4.12)$$

Estas pendientes deben ser iguales, luego $m_1 = m_2$, lo que implica que

$$x_2 - x_1 = 2. \quad (4.13)$$

La pendiente m de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) vale

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(x_2 - 2)^2 - (x_1^2 + 4)}{2},$$

y aplicando el resultado dado en (4.13), se tiene que

$$m = \frac{-x_1^2 - (-x_1^2 + 4)}{2} = \frac{-4}{2} = -2. \quad (4.14)$$

La pendiente m debe ser igual a m_1 . Igualando (4.11) con (4.14) se deduce que $x_1 = 1$ e introduciendo este valor en la ecuación de la primera parábola se obtiene que $y_1 = 3$.

Análogamente, la pendiente m debe ser igual a m_2 . Igualando (4.12) con (4.14) se deduce que $x_2 = 3$ e introduciendo este valor en la ecuación de la segunda parábola se obtiene que $y_2 = -1$.

La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - 3 = -2(x - 1).$$

Definitivamente, la ecuación de la recta tangente pedida es

$$y = -2x + 5.$$

Segundo procedimiento

La recta general $y = mx + b$ corta a la primera parábola en los puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}y &= mx + b \\y &= -x^2 + 4.\end{aligned}$$

Igualando los segundos miembros de las dos ecuaciones se obtiene una ecuación de segundo grado en x

$$x^2 + mx + (b - 4) = 0.$$

El punto de tangencia entre la recta y la parábola debe ser un punto doble, por lo que el discriminante de la ecuación de segundo grado debe valer cero, esto es

$$m^2 - 4(b - 4) = 0, \quad (4.15)$$

y

$$x_1 = \frac{-m}{2}. \quad (4.16)$$

Análogamente, la recta general $y = mx + b$ corta a la segunda parábola en los puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen el sistema no lineal

$$\begin{aligned}y &= mx + b \\y &= -(x - 2)^2.\end{aligned}$$

Igualando los segundos miembros, se tiene la ecuación de segundo grado en x

$$x^2 + (m - 4)x + (b + 4) = 0.$$

El punto de tangencia entre la recta y la parábola debe ser un punto doble, por lo que el discriminante de la ecuación de segundo grado debe valer cero, esto es

$$(m - 4)^2 - 4(b + 4) = 0, \quad (4.17)$$

y

$$x_2 = \frac{-(m - 4)}{2}. \quad (4.18)$$

Restando miembro a miembro (4.15) y (4.17), se llega a

$$8m + 16 = 0,$$

con lo que $m = -2$. Sustituyendo este valor de m en (4.16) y (4.18), se deduce que $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de las respectivas parábolas, se obtiene que $y_1 = 3$ e $y_2 = -1$. E introduciendo el valor de $m = -2$ en (4.15) ó (4.17) se obtiene que $b = 5$.

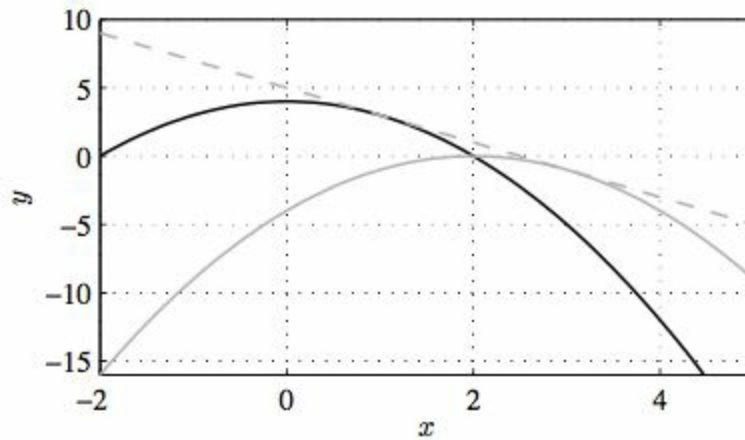


Figura 4.5: Las dos parábolas y la recta tangente.

Problema 4.5

Se considera la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, de la que se sabe que cumple las tres condiciones siguientes: pasa por el origen de coordenadas; la pendiente en el origen vale $m > 0$, y el máximo lo alcanza para $x = d > 0$.

Se considera también una recta que pasa por el punto de coordenadas $(-\frac{d}{25}, 0)$ y tiene de pendiente $\frac{m}{2}$.

Denotando con (x_1, y_1) , (x_2, y_2) las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con la parábola, pruébese que la diferencia $x_1 - x_2$ no depende de la pendiente m y hállese el valor de d para el que se cumple la identidad $x_1 - x_2 = 15$.

Solución

La ecuación de una parábola genérica es

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (4.19)$$

Para obtener los valores de a , b y c , se exige que se cumplan las condiciones dadas en el enunciado:

a) Pasa por el origen de coordenadas, luego $y(0) = 0$, con lo que

$$y(0) = c = 0. \quad (4.20)$$

b) La pendiente en el origen vale m . Se calcula la derivada primera de y

$$y' = 2ax + b.$$

Como $y'(0) = m$, se tiene que

$$y'(0) = b = m. \quad (4.21)$$

c) Hay un máximo en $x = d > 0$. Entonces la derivada primera ha de ser nula en $x = d$, es decir $y'(d) = 0$. Usando (4.21) se tiene

$$y'(d) = 2ad + \underbrace{b}_m = 0 \Rightarrow a = -\frac{m}{2d}. \quad (4.22)$$

Para comprobar que se trata de un máximo, se calcula la derivada segunda, que es una constante. Sustituyendo a por el valor de (4.22)

$$y'' = 2a = -\frac{m}{d} < 0.$$

Se verifica que $y'' < 0$ al ser $m > 0$ y $d > 0$ según el enunciado.

Sustituyendo (4.20), (4.21) y (4.22) en (4.19), se obtiene la ecuación de la parábola

$$y = -\frac{m}{2d}x^2 + mx. \quad (4.23)$$

Para que la recta cumpla las condiciones del enunciado, su ecuación ha de ser de la forma

$$y = \frac{m}{2} \left(x + \frac{d}{25} \right). \quad (4.24)$$

Igualando los segundos miembros de (4.23) y (4.24) se obtiene la ecuación de segundo grado siguiente

$$x^2 - dx + \frac{d^2}{25} = 0.$$

Las dos soluciones son $x_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4\frac{d^2}{25}}}{2}$ y $x_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4\frac{d^2}{25}}}{2}$, con lo que comprueba que $x_1 - x_2$ es

$$x_1 - x_2 = \sqrt{d^2 - 4\frac{d^2}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}}d,$$

con lo que comprueba que $x_1 - x_2$ no depende de la pendiente m .

Si $x_1 - x_2 = 15$, se tiene

$$15 = \sqrt{\frac{21}{25}}d \Rightarrow d = 25\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Problema 4.6

De todos es conocido que la expresión a^{b^c} es equívoca, pues en general se tiene que

$$a^{(b^c)} \neq (a^b)^c.$$

Pruébese que si a , b y c son tres números naturales estrictamente mayores que la unidad, la condición

$$\log b = \frac{\log c}{c-1},$$

implica la identidad

$$a^{(b^c)} = (a^b)^c.$$

Solución

Según el enunciado, se cumple

$$\log b = \frac{\log c}{c-1}.$$

Luego

$$(c-1) \log b = \log c.$$

El factor $c-1$ del primer miembro puede ponerse como exponente de b

$$\log b^{c-1} = \log c.$$

Igualando los argumentos de los logaritmos

$$b^{c-1} = c \Rightarrow b^c = bc.$$

Por tanto, se verifica que

$$a^{(b^c)} = a^{bc} = \left(a^b\right)^c.$$

Problema 4.7

Se tiene un recipiente abierto en forma de segmento esférico de radio r , con profundidad h y espesor despreciable. El centro de la esfera está en O (la figura muestra una sección recta). Se sabe que su volumen es $V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3}$ y el área de su superficie externa es $S = 2\pi r h$. Si se fija el valor de s , hallar cuándo deben valer r y h en función de S para que el volumen V sea máximo.

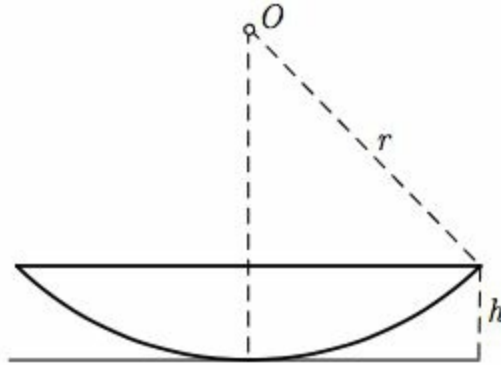


Figura 4.6: Recipiente abierto.

Solución

El volumen V de la vasija es

$$V = \pi h^2 \frac{3r - h}{3}, \quad (4.25)$$

y su área S

$$S = 2\pi r h. \quad (4.26)$$

Despejando r de (4.26) y sustituyendo en (4.25) se obtiene una expresión de V en función h y S . Luego hay que encontrar el máximo respecto a h de

$$V = \pi \frac{\frac{3S}{2\pi} - h^3}{3}. \quad (4.27)$$

Derivando (4.27) respecto a h e igualando a 0 (s se toma como parámetro)

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{3S}{2\pi} - 3h^2 \right) = 0.$$

Luego existe un extremo relativo en $h = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$.

Se calcula la derivada segunda de (4.27) para comprobar que se trata de un máximo relativo

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -2\pi h,$$

Particularizando en $h = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$.

$$\frac{d^2V}{dh^2} \left(\sqrt{\frac{S}{2\pi}} \right) = -2\pi \sqrt{\frac{S}{2\pi}} < 0,$$

por lo que efectivamente se trata de un máximo relativo.

Problema 4.8

Una empresa que fabrica un determinado producto obtiene un beneficio neto de 4 € por cada unidad que fabrica y vende. Para dar a conocer este producto, puede realizar una inversión en promoción, de tal manera que la cantidad u de unidades fabricadas y vendidas depende de la cantidad p de € invertidos en la promoción, según la función

$$u = \frac{16p}{p+1}.$$

¿Cuál es la cantidad que se debe invertir en la promoción del producto para obtener un beneficio máximo?

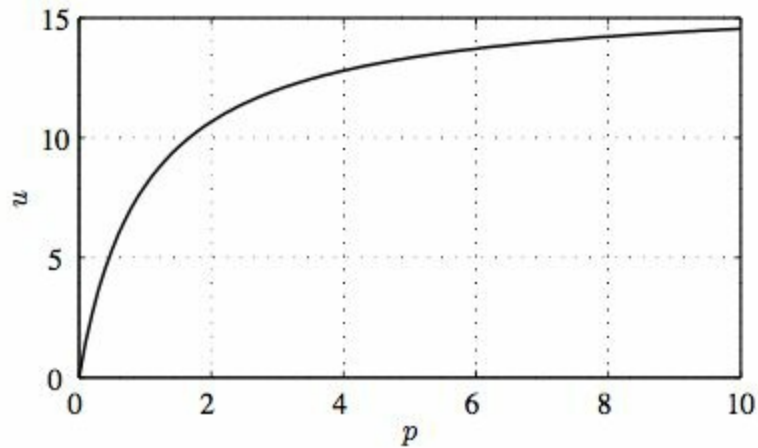


Figura 4.7: Cantidad de unidades fabricadas y vendidas en función del costo de producción.

Solución

El beneficio B se obtiene como diferencia de los ingresos I y los gastos G , esto es

$$B = \underbrace{4 \frac{16p}{p+1}}_I - \underbrace{p}_G = \frac{63p - p^2}{p+1}.$$

Para calcular el máximo de B , se deriva con respecto a P y se iguala a 0

$$B' = \frac{-p^2 - 2p + 63}{(p+1)^2} = 0 \Rightarrow p^2 + 2p - 63 = 0.$$

La única solución posible de la ecuación de segundo grado (la otra solución es negativa) es $p = 7$ €. Para comprobar que se trata de un máximo relativo, se calcula la derivada segunda de B

$$B'' = \frac{-128}{(p+1)^3},$$

y en $p = 7$

$$B''(7) = \frac{-128}{8^3} < 0.$$

Capítulo 5: Concurso Berriak

Problema 5.1

Dudeney halló, recién comenzado el siglo XX, la disección en cuatro partes de un triángulo equilátero para formar un cuadrado. Los segmentos GF , BE , EC , CD y DA son todos iguales a la mitad del lado del triángulo; EF es igual al lado del cuadrado de área equivalente; DJ y GK son perpendiculares a EF (ver figura).

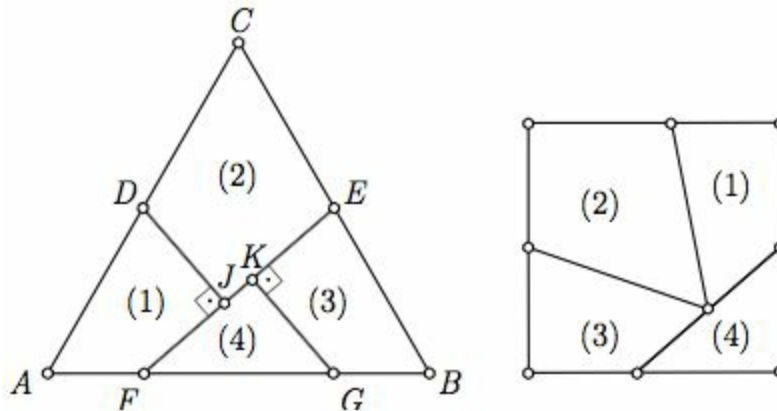


Figura 5.1: Puzzle.

Esta propiedad sugiere inmediatamente la posibilidad de diseñar una mesa cuya parte superior o tablero esté formada por los tableros más pequeños (1), (2), (3) y (4), de modo que al cambiarlos de lugar se pueda pasar de una mesa triangular a otra cuadrada, y recíprocamente. Se pregunta:

- ¿Dónde situar las articulaciones para que al desplegar girando en un sentido se logre el primer efecto y al girar en sentido contrario se logre el segundo?
- Suponiendo que el lado del triángulo vale 4 unidades, hallar el área de las regiones (1), (2), (3) y (4).

Solución

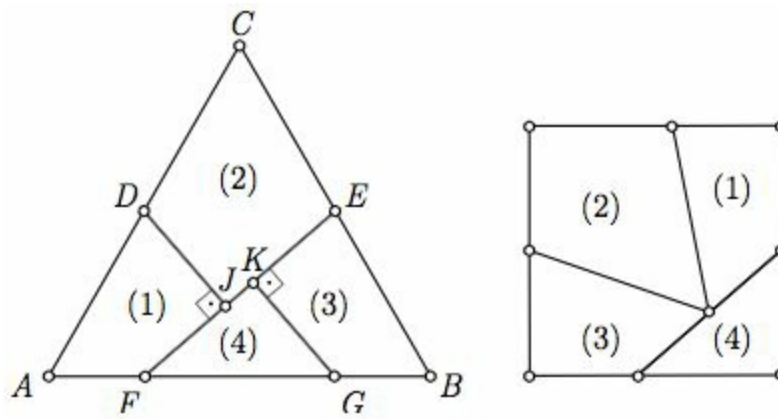


Figura 5.1: Puzzle.

Apartado a

Las articulaciones deben situarse en los puntos D , E y G . Si se fija la pieza (1) y se gira el conjunto de piezas (4)-(3)-(2) unido a ella, en sentido antihorario, el triángulo equilátero inicial ABC se lleva a la forma del cuadrado equivalente.

Apartado b

Según el enunciado, EF mide lo mismo que el lado del cuadrado equivalente, esto es

$$EF = \sqrt{\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC} = 2\sqrt[4]{3}. \quad (5.1)$$

Para obtener el área de la región (4), se considera el ángulo KFG , que es congruente con el ángulo EFB . Aplicando el teorema del seno en el triángulo EFB y utilizando (5.1)

$$\frac{\sin \angle FBE}{EF} = \frac{\sin \angle EFB}{BE} \Rightarrow \sin \angle EFB = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}. \quad (5.2)$$

El área de la región (4) es la del triángulo FGK , que es

$$\begin{aligned} A_{(4)} &= \frac{1}{2}FG \cos \angle EFB \cdot FG \sin \angle EFB = \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3}-3} \approx \\ &\approx 0,991. \end{aligned} \quad (5.3)$$

El área de la región (3) se puede calcular como la diferencia de la del triángulo FBE y la de la región (4). Para obtener el área del triángulo FBE , se toma como base el lado FB . FB puede calcularse con (5.1) y (5.2) como

$$FB = EF \cos \angle EFB + BE \cos \angle FBE = \sqrt{4\sqrt{3}-3} + 1.$$

El área del triángulo FBE es entonces

$$A_{FBE} = \frac{1}{2}FB \cdot BE \sin \angle FBE = \sqrt{3} \frac{\sqrt{4\sqrt{3}-3} + 1}{4}. \quad (5.4)$$

Con (5.3) y (5.4), se tiene que el área de la región (3) es

$$A_{(3)} = A_{FBE} - A_{(4)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{4\sqrt{3}-3} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 1,592. \quad (5.5)$$

El área de la región (2) puede obtenerse como la suma de las de los triángulos JED y CDE . El triángulo JED es igual que el triángulo KFG porque los ángulos GFE y FED son congruentes y los lados FG y ED miden lo mismo. El triángulo CDE es equilátero porque el ángulo DEC vale 60° y los lados CD y EC miden lo mismo. Su área es entonces

$$A_{CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot EC \sin \angle DEC = \sqrt{3}. \quad (5.6)$$

El área de la región (2) se obtiene con (5.3) y (5.6) como

$$A_{(2)} = A_{JED} + A_{CDE} = \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sqrt{4\sqrt{3} - 3} \approx 2,723. \quad (5.7)$$

Finalmente, el área de la región (1) se calcula como la diferencia de la del triángulo ABC y de las regiones (4), (3) y (2), dadas respectivamente por (5.3), (5.5) y (5.7)

$$\begin{aligned} A_{(1)} &= A_{ABC} - A_{(2)} - A_{(3)} - A_{(4)} = \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2} - \sqrt{4\sqrt{3} - 3} \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \approx 1,623. \end{aligned}$$

Problema 5.2

El mecanismo articulado que se presenta a continuación es realmente sorprendente. Se trata de cuatro varillas AB , AC , BD y CD de igual longitud, a las que se añaden dos varillas más largas PA y PD , de igual longitud, y una tercera varilla QB . Los puntos P y Q son fijos. El punto Q se sitúa inicialmente de modo que el punto B esté obligado a describir en su movimiento una circunferencia que pasa por el punto P . Obsérvese que cuando el punto B describe el arco BB' entonces el punto C describe el segmento lineal CC' . Se trata de una notable conversión de un movimiento circular en otro lineal o recíprocamente, según sea B o bien C el punto que gobierne el movimiento del conjunto. Esta conversión tiene interesantes aplicaciones prácticas. Demuéstrese matemáticamente lo que aquí se afirma.

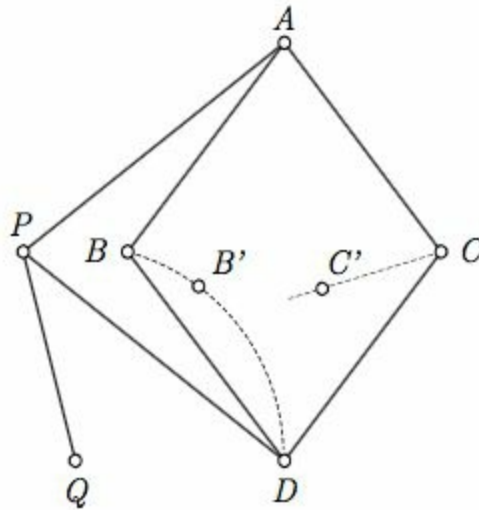


Figura 5.3: Mecanismo articulado.

Solución

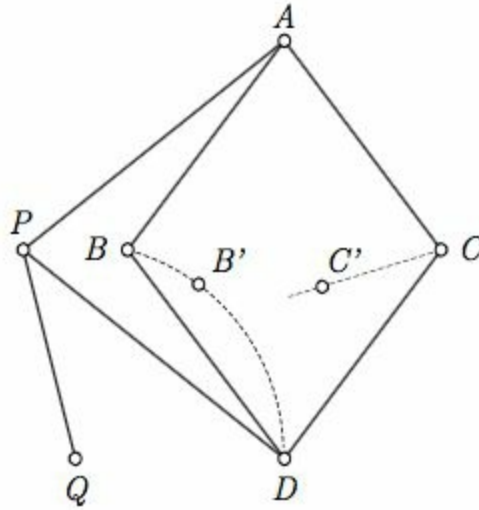


Figura 5.3: Mecanismo articulado.

El punto C es el inverso de B con centro de inversión en P y potencia $AP^2 - AB^2$ pues:

a) Los puntos P , B y C son colineales. En efecto, ya que los triángulos APD , ABD y ADC son triángulos isósceles y el lado desigual de estos es el mismo: el lado DA . Por tanto, los vértices P , B y C de estos triángulos pertenecen a la mediatriz del segmento DA .

b) El producto $PB \cdot PC$ es constante e igual a $AP^2 - AB^2$. Para probarlo, se considera una circunferencia con centro en el punto A y que pase por los puntos B y C (al tener las varillas AB y AC la misma longitud). La potencia del punto P respecto a esta circunferencia es

$$AP^2 - AB^2,$$

donde AP es la distancia del punto P al centro de la citada circunferencia y AB el radio de la circunferencia. La potencia del punto P respecto a la circunferencia es constante y no depende de la pendiente de cualquier recta que pase por P y corte a la circunferencia en dos puntos. Si en particular se toma la recta que pasa por los puntos P , B y C (estos puntos están alineados según se ha probado en el punto terior), se tiene

$$AP^2 - AB^2 = PB \cdot PC.$$

Se puede demostrar que la imagen de una circunferencia en una inversión con centro de inversión en la circunferencia es una recta. En nuestro caso, el punto P pertenece a la circunferencia que describe el punto B por el enunciado. Luego el punto C , que es el

inverso de B , estará contenido siempre en una recta.

Problema 5.3

Es sabido que si un proyectil es observado por tres estaciones de radar sincronizadas, situadas en los vértices A , B y C de un triángulo equilátero horizontal de lado L , el cuadrado de la altura H del proyectil, respecto del plano del triángulo y en un instante dado, viene expresado por

$$H^2 = W^2 - L^2 - \frac{(W^2 - a^2)^2}{4L^2} - \frac{(3W^2 - 2b^2 - a^2)^2}{12L^2},$$

donde a , b y c son las distancias al proyectil, medidas desde los radares A , B y C en ese instante, respectivamente, y

$$W^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Supóngase, para simplificar el problema que L vale un km. Salta a la vista en esta fórmula la falta de simetría en las tres variables a , b , c , lo que induce a pensar que, dependiendo del orden que se tome en las variables, se pueden obtener valores diferentes, debido principalmente a que los radares trabajan con una precisión limitada, no necesariamente la misma.

Se pide:

a) Obtener una fórmula para H^2 que sea simétrica en las variables A , B , C , esto es, al intercambiar dos variables cualesquiera entre sí no cambia la expresión de la fórmula (salvo el orden de los sumandos).

b) Expresar H^2 en función de σ_1 , σ_2 , σ_3 , siendo

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= a + b + c \\ \sigma_2 &= ab + ac + bc \\ \sigma_3 &= abc.\end{aligned}$$

Ayuda: $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

Solución

El cuadrado de la altura del proyectil H^2 depende de las distancias a los radares A , B y C , denotadas respectivamente como A , B y C , según

$$H^2 = W^2 - 1 - \frac{(W^2 - a^2)^2}{4} - \frac{(3W^2 - 2b^2 - a^2)^2}{12}, \quad (5.8)$$

con W dado por

$$W^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \quad (5.9)$$

y $L = 1$.

Apartado a

Para obtener una fórmula para H^2 que sea simétrica, basta con desarrollar la expresión (5.8) con (5.9) y comprobar que se verifica la condición de simetría. Se tiene

$$H^2 = \frac{1}{9}(-a^4 - b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 9), \quad (5.10)$$

manifiestamente simétrica en a , b y c .

Apartado b

Se van a utilizar las variables

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= a + b + c \\ \sigma_2 &= ab + ac + bc \\ \sigma_3 &= abc.\end{aligned}$$

y la ayuda dada

$$a^2 + b^2 + c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2. \quad (5.11)$$

Se cumple que

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \quad (5.12)$$

Sustituyendo (5.12) en (5.10) y usando (5.11) se tiene

$$\begin{aligned}H^2 &= \frac{1}{9}[3(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 + \\ &\quad + 3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 9],\end{aligned}$$

pero

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = (ab + ac + bc)^2 - 2(a^2bc + ab^2c + abc^2) = \sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1,$$

luego

$$\begin{aligned}H^2 &= \frac{1}{9}[3(\sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1) - (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 + 3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 9] = \\ &= -\frac{1}{9}\sigma_1^4 + \frac{1}{3}\sigma_1^2 - \frac{1}{9}\sigma_2^2 + \frac{4}{9}\sigma_1^2\sigma_3 - \frac{2}{3}\sigma_1\sigma_3 - \frac{2}{3}\sigma_2 - 1.\end{aligned}$$

Problema 5.4

La figura representa un cuadrado $ABCD$ de lado L descompuesto en nueve regiones por los segmentos AF , BG , CH y DE . Los puntos P , Q , R y S son puntos de intersección de pares de segmentos de la figura.

Se pide expresar analíticamente el área W del cuadrado $PQRS$ en función de L y X , siendo X la longitud común de los segmentos AE , BF , CG y DH .

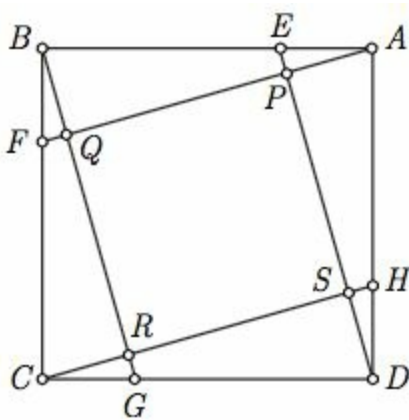


Figura 5.4: Construcción geométrica.

Solución

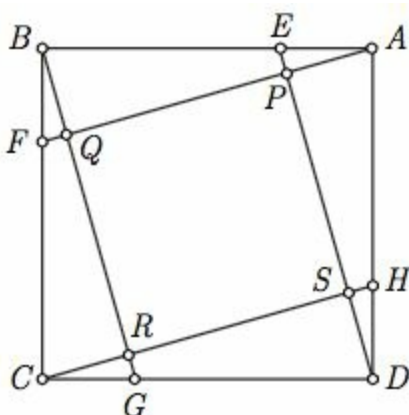


Figura 5.4: Construcción geométrica.

Notación: $X = AE = BF = CG = DH$, L = lado del cuadrado.

Para calcular el área del cuadrado $PQRS$, basta con calcular la longitud de uno de los lados; se toma por ejemplo el lado RQ . La longitud de éste se puede calcular como

$$RQ = BG - QB - GR. \quad (5.13)$$

El segmento CG mide x y el segmento CB mide L , por lo que BG se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras como

$$BG = \sqrt{L^2 + x^2}. \quad (5.14)$$

El triángulo BFQ es rectángulo y el ángulo QBF , que se denota como α , es congruente con el ángulo GBC . La tangente de α se puede calcular como

$$\tan \alpha = \frac{x}{L}.$$

y QB se obtiene como

$$QB = \underbrace{BF}_x \cos \alpha = x \cos \alpha. \quad (5.15)$$

Por trigonometría

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + x^2}}. \quad (5.16)$$

Sustituyendo (5.16) en (5.15)

$$QB = \frac{Lx}{\sqrt{L^2 + x^2}}. \quad (5.17)$$

El triángulo CGR también es rectángulo y el ángulo RCG es congruente con el ángulo QBF . GR resulta

$$GR = \underbrace{CG}_x \sin \alpha = x \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{x^2}{\sqrt{L^2 + x^2}}. \quad (5.18)$$

Sustituyendo (5.14), (5.17) y (5.18) en (5.13) se obtiene la longitud del lado del cuadrado $PQRS$

$$RQ = \sqrt{L^2 + x^2} - \frac{Lx}{\sqrt{L^2 + x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{L^2 + x^2}} = \frac{L^2 - Lx}{\sqrt{L^2 + x^2}}.$$

Y el área del cuadrado $PQRS$ es entonces

$$W = \left(\frac{L^2 - Lx}{\sqrt{L^2 + x^2}} \right)^2 = \frac{L^4 + L^2 x^2 - 2L^3 x}{L^2 + x^2}.$$

Problema 5.5

Un padre deja en herencia a sus cuatro hijos un terreno formado por parcelas (ver figura). La parcela central tiene forma de triángulo. Sus lados lo son de tres parcelas cuadradas que, con los segmentos que unen los vértices libres, permiten delimitar otras tres parcelas triangulares que no se solapan con las anteriores. Si cada uno de los hijos recibe una cuarta parte de cada parcela cuadrada y una parcela triangular, ¿se trata de un reparto equitativo? Justifíquese la contestación

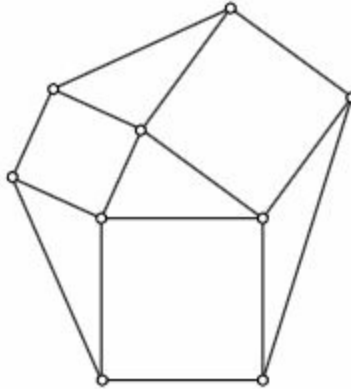


Figura 5.5: Construcción geométrica.

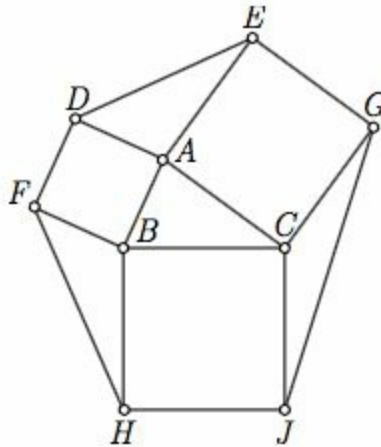


Figura 5.6: Construcción geométrica.

El área total de la parcela es suma del área de cuadrados y triángulos. El área de los cuadrados está distribuida equitativamente porque cada hijo recibe una cuarta parte de cada cuadrado. Por tanto, para determinar si el reparto es equitativo habrá que ver si el triángulo de cada hijo es igual al de los demás.

Se va a probar que el triángulo ABC tiene el mismo área que cualquiera de los otros tres. Se va a utilizar por ejemplo el triángulo DAE (la demostración es análoga para cualquier otro triángulo). Se denotan las distancias AB y CA con a y b , respectivamente. La distancia AD vale también a por ser DA un lado del cuadrado $BADF$. La distancia EA vale b por ser un lado del cuadrado $ACGE$.

El ángulo DAE , denominado α , es el suplementario del ángulo CAB pues

$$\angle DAE + \underbrace{\angle BAD}_{90^\circ} + \angle CAB + \underbrace{\angle EAC}_{90^\circ} = 360^\circ. \quad (5.19)$$

El área S_{ABC} del triángulo ABC puede obtenerse como

$$S_{ABC} = \frac{ab \sin \alpha}{2}.$$

Usando (5.19), el área S_{DAE} del triángulo DAE puede calcularse como

$$S_{DAE} = \frac{ab \sin(180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{ab \sin \alpha}{2}.$$

Se concluye que las áreas de los triángulos ABC y DAE son iguales, y por tanto el

reparto es equitativo.

Problema 5.6

Se tiene una caja de lados a , b y c . Se desea encerrarla en otra caja mayor, de caras paralelas y lados proporcionales, de modo que la diferencia de volúmenes del volumen de la segunda caja menos el de la primera sea la mitad del volumen de la caja original. Se desea hacer algo parecido con una tercera caja de caras paralelas y lados proporcionales, que encierre a las dos primeras, de modo que la diferencia de volúmenes de la tercera caja menos el de la segunda sea la cuarta parte del volumen de la caja original. Y así sucesivamente, de un modo consistente, esto es:

- a) La nueva caja encierra a las anteriores.
- b) Las cajas son de lados proporcionales y caras paralelas.
- c) La diferencia de volúmenes del volumen de la caja k -ésima y el volumen de la caja $(k-1)$ -ésima es $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ multiplicado por el volumen de esta caja.

Se pregunta: ¿Qué dimensiones tiene en el límite la caja más pequeña que encierra a todas y cuánto vale su volumen?

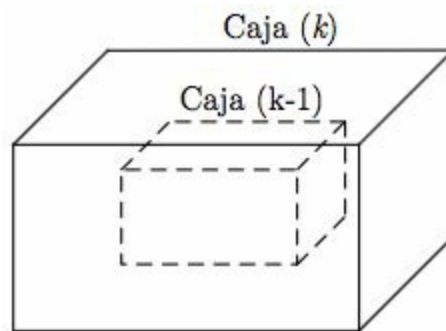


Figura 5.7: Sucesión de cajas.

Solución

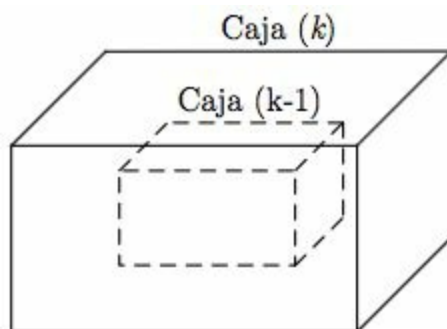


Figura 5.7: Sucesión de cajas.

Se va a relacionar el volumen de una caja con el volumen de la caja inmediatamente mayor a través de unas constantes $p_1, p_2, \dots, p_k$. Por ejemplo, si el volumen de la primera caja es ABC , el de la segunda será p_1ABC , el de la tercera p_1p_2ABC , y así sucesivamente. El volumen de la caja k -ésima es entonces

$$p_1p_2 \dots p_{k-1}abc = \left(\prod_{i=1}^{k-1} p_i \right) abc.$$

Según el enunciado, la diferencia de volúmenes entre la caja k -ésima y la caja $(k-1)$ -ésima cumple

$$\begin{aligned} p_1abc - abc &= \frac{1}{2}abc \\ p_1p_2abc - p_1abc &= \frac{1}{2^2}abc \\ &\vdots \\ \left(\prod_{i=1}^{k-1} p_i \right) abc - \left(\prod_{i=1}^{k-2} p_i \right) abc &= \frac{1}{2^{k-1}}abc. \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones y dividiendo por abc se tiene

$$\prod_{i=1}^{k-1} p_i - 1 = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i}.$$

Luego el producto de todas las constantes $p_1p_2 \dots p_{k-1}$ es igual a una serie geométrica de razón $1/2$

$$\prod_{i=1}^{k-1} p_i = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} = \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Por tanto, el volumen de la caja más grande - la caja k -ésima - es

$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} p_i \right) abc = \left(2 - \frac{1}{2^{k-1}} \right) abc.$$

Como todas las dimensiones de la caja k -ésima tienen la misma razón de proporcionalidad respecto a las dimensiones de la primera caja, las dimensiones de la caja k -ésima son $\sqrt[3]{2 - \frac{1}{2^{k-1}}}a$, $\sqrt[3]{2 - \frac{1}{2^{k-1}}}b$ y $\sqrt[3]{2 - \frac{1}{2^{k-1}}}c$.

Para obtener el volumen de la caja más grande, se calcula el límite del volumen cuando $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^{k-1}} \right) abc = 2abc.$$

Y sus dimensiones son $\sqrt[3]{2}a$, $\sqrt[3]{2}b$ y $\sqrt[3]{2}c$.

Problema 5.7

La figura representa un cubo inclinado cuyas caras son tangentes a una esfera de radio $R = \sqrt{14} \text{ cm}$, la mitad de ella llena de líquido.

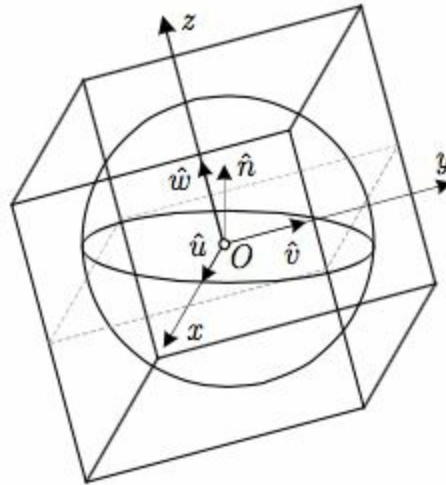


Figura 5.8: Cubo y esfera.

El cubo tiene solidario un sistema de referencia cartesiano local $[O, u, v, w]$, donde O es el centro de la esfera y $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ la base ortonormal que orienta a los semiejes positivos OX, OY, OZ , los cuales son, a su vez, perpendiculares a las correspondientes caras del cubo.

Si se proyecta la circunferencia del contorno de la superficie del líquido, perpendicularmente al plano que contiene los dos semiejes OX, OY , se obtiene una elipse, cuya ecuación, en el sistema de referencia cartesiano OXY del plano, resulta ser

$$10x^2 + 13y^2 + 4xy - 126 = 0.$$

Sabiendo que el vector normal $\hat{n}$ al plano de la superficie del líquido tiene componentes estrictamente positivas respecto a la base del sistema de referencia local, hallar las citadas componentes.

Solución

La proyección de la superficie del líquido sobre el plano con los semiejes OX y OY es una elipse de ecuación

$$10x^2 + 13y^2 + 4xy - 126 = 0.$$

Se puede probar que la ecuación de la elipse corresponde a una elipse centrada en $(0, 0, 0)$. Se van a considerar el centro de la elipse O y dos puntos arbitrarios pertenecientes a la elipse: $P = \left(0, \sqrt{\frac{126}{13}}, 0\right)$ y $Q = \left(\sqrt{\frac{126}{10}}, 0, 0\right)$.

Se va a calcular la proyección *ORTogonal* de la elipse al plano $z = 0$ en el plano que contiene a la superficie del líquido. Las proyecciones de P y Q sobre este plano se denominan P' y Q' , respectivamente. Como la esfera está llena hasta la mitad, este plano contiene al origen de coordenadas, $O' = O$.

Como los puntos P y Q pertenecen a la elipse, entonces P' y Q' son puntos de la circunferencia de la superficie del líquido, luego $OP' = OQ' = \sqrt{14}$. También se tiene que $OP = \sqrt{\frac{126}{13}}$ y $OQ = \sqrt{\frac{126}{10}}$. Por el teorema de Pitágoras, las longitudes de los segmentos PP' y QQ' se pueden calcular como

$$PP' = \sqrt{14 - \frac{126}{13}} = \sqrt{\frac{56}{13}}$$

$$QQ' = \sqrt{14 - \frac{126}{10}} = \sqrt{\frac{7}{5}}.$$

Los vectores $\vec{PP'}$ y $\vec{QQ'}$ sólo tienen componente en la dirección $\hat{w}$. Se desconoce el signo de $\vec{PP'}$ y $\vec{QQ'}$, luego hay cuatro posibilidades distintas. Para determinar su signo, se utiliza la condición del enunciado que establece que el vector normal $\hat{n}$ a la superficie del líquido únicamente tiene componentes positivas. Un vector proporcional a $\hat{n}$ se puede obtener mediante el producto vectorial de los vectores $\vec{O'Q'}$ y $\vec{O'P'}$ calculados como

$$\vec{QQ'} = \vec{O'Q'} - \vec{O'Q} \Rightarrow \vec{O'Q'} = \vec{QQ'} + \vec{O'Q}$$

$$\vec{PP'} = \vec{O'P'} - \vec{O'P} \Rightarrow \vec{O'P'} = \vec{PP'} + \vec{O'P}.$$

La única posibilidad que hace cumplir la condición del enunciado es que $\vec{O'Q'}$ y $\vec{O'P'}$ tengan sus componentes $\hat{w}$ negativas¹. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
 \vec{O'Q'} \times \vec{O'P'} &= \begin{vmatrix} \hat{u} & \hat{v} & \hat{w} \\ \sqrt{\frac{126}{10}} & 0 & -\sqrt{\frac{7}{5}} \\ 0 & \sqrt{\frac{126}{13}} & -\sqrt{\frac{56}{13}} \end{vmatrix} = \\
 &= \sqrt{\frac{882}{65}}\hat{u} + \sqrt{\frac{3.528}{65}}\hat{v} + \sqrt{\frac{7.938}{65}}\hat{w}.
 \end{aligned}$$

El vector unitario perpendicular a la superficie del líquido buscado es, dividiendo por el módulo,

$$\hat{n} = \frac{\sqrt{14}}{4}\hat{u} + \frac{\sqrt{14}}{7}\hat{v} + \frac{3\sqrt{14}}{4}\hat{w}.$$

¹ Se ha tomado $\vec{O'Q'} \times \vec{O'P'}$ para que el producto vectorial resultante tenga componentes positivas. Si se hubiera tomado $\vec{O'P'} \times \vec{O'Q'}$, se obtendría un vector en sentido opuesto, es decir con componentes negativas. En cualquier caso, sólo tomando los dos signos negativos se consigue que las componentes del producto vectorial sean todas positivas o todas negativas.

Problema 5.8

Se considera la elipse de la figura, de semiejes a y b , con a mayor o igual que b . Desde los puntos P y P' exteriores a la elipse y situados en el eje de simetría horizontal se dibujan sendas tangentes que contactan con la elipse en los puntos Q y Q' , respectivamente; a continuación por esos puntos de contacto se trazan las correspondientes normales a la elipse, que cortan al eje de simetría horizontal: la primera en el punto r y la segunda en el punto R' . Demuéstrese que

$$OP \cdot OR = OP' \cdot OR'.$$

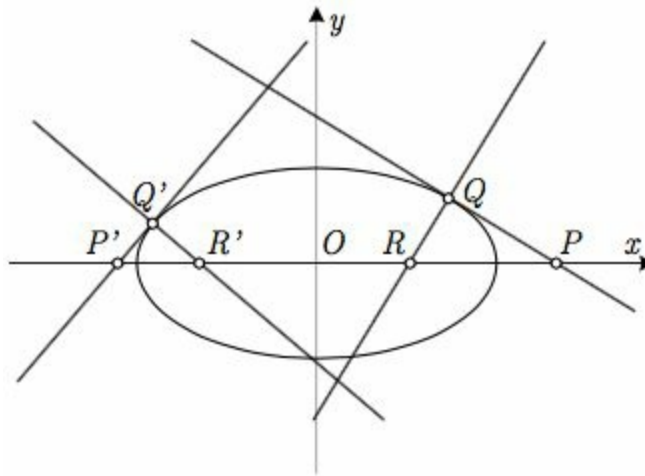


Figura 5.9: Elipse.

Solución

$$OP \cdot OR = OP' \cdot OR'.$$

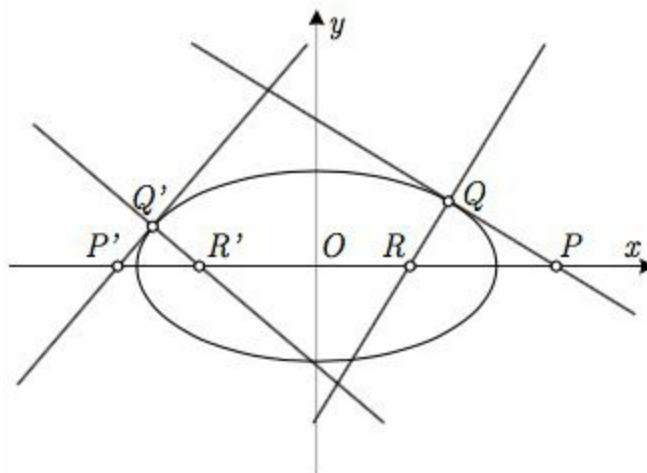


Figura 5.9: Elipse.

Se pide probar que

$$OP \cdot OR = OP' \cdot OR'.$$

Como los puntos P y P' se toman arbitrariamente, lo que se pide demostrar es equivalente a probar que el producto $OP \cdot OR$ no depende de las coordenadas del punto Q de contacto con la elipse.

Se va utilizar el triángulo QRP . El ángulo PQR es recto porque la recta que contiene al segmento QP es tangente a la elipse en el punto Q y la recta que contiene a Q y R es normal a la elipse en Q . Por tanto, el ángulo QRP es el complementario del ángulo RPQ , denominado α

$$\angle QRP = 90^\circ - \underbrace{\angle RPQ}_{\alpha}. \quad (5.20)$$

Sea el punto Q de coordenadas (x_Q, y_Q) . Se considera el punto s , que es el pie de perpendicular al eje OX por el punto Q . Teniendo en cuenta (5.20) se verifica

$$RS = \frac{y_Q}{\tan \alpha} \quad (5.21)$$

$$SP = \frac{y_Q}{\tan(90^\circ - \alpha)} = y_Q \tan \alpha. \quad (5.22)$$

El producto $OP \cdot OR$ se puede expresar con (5.21) y (5.22) como sigue

$$\begin{aligned} OP \cdot OR &= (x_Q + SP)(x_Q - RS) = \\ &= (x_Q + y_Q \tan \alpha) \left(x_Q - \frac{y_Q}{\tan \alpha} \right) = \\ &= x_Q^2 + x_Q y_Q \tan \alpha - \frac{x_Q y_Q}{\tan \alpha} - y_Q^2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Se puede expresar $\tan \alpha$ en función de la derivada $\frac{dy}{dx}$. Sin pérdida de generalidad, se considera la mitad de la elipse con $y > 0$, luego

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b \frac{x}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \quad (5.24)$$

Sustituyendo (5.24) en (5.23) se tiene

$$\begin{aligned} OP \cdot OR &= x_Q^2 - x_Q y_Q \frac{b^2 x_Q}{a^2 y_Q} + x_Q y_Q \frac{a^2 y_Q}{b^2 x_Q} - y_Q^2 = \\ &= x_Q^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) - y_Q^2 \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Como Q pertenece a la elipse

$$y_Q^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_Q^2}{a^2} \right). \quad (5.26)$$

Sustituyendo (5.26) en (5.25)

$$\begin{aligned} OP \cdot OR &= x_Q^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) - b^2 \left(1 - \frac{x_Q^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) = \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Como el producto es independiente de las coordenadas del punto Q , se cumple $OP \cdot OR = OP' \cdot OR' = a^2 - b^2$ para dos puntos cualesquiera P y P' de la elipse, con $a \geq b$.

Problema 5.9

Un corredor tiene en su casa un reloj de pared que da la hora correcta (ni se adelanta ni se atrasa) y lleva en su muñeca un reloj de pulsera que se adelanta. En el momento de salir de casa, observa que ambos relojes están parados: el primero porque se le ha agotado la cuerda y el segundo porque ha consumido las pilas.

Pone en marcha el reloj de pared y pone pilas nuevas al reloj de pulsera, que sigue adelantando, los cuales comienzan marchando a una misma hora que no es exacta; inmediatamente, el corredor comienza su carrera en dirección hacia la casa de un amigo suyo, que también tiene un reloj de pared en la entrada que da la hora correcta; descansa charlando con su amigo un cierto tiempo y regresa corriendo por el mismo camino hacia su casa, dándose cuenta de que ha tardado exactamente lo mismo en el camino de ida que en el de vuelta.

Con sólo la información del enunciado, el corredor al llegar de vuelta a su casa es capaz de poner en hora exacta sus dos relojes, el de pared y el de pulsera. Dar una explicación razonable.



Figura 5.11: Corredor.

Solución

Al salir de su casa, el corredor pone en marcha el reloj de pulsera con pilas nuevas (que seguirá adelantando) a una hora arbitraria t_0 . Cuando llega a casa de su amigo, el reloj de pulsera marca un tiempo t_1 y el de pared de su amigo un tiempo h_1 ; cuando sale de casa de su amigo, el reloj de pulsera marca un tiempo t_2 y el de pared de su amigo un tiempo h_2 . Estos tiempos le permiten saber cuánto adelanta por hora su reloj de pulsera. El factor de corrección $1 + e$ será

$$1 + e = \frac{t_2 - t_1}{h_2 - h_1}.$$

Cuando el corredor regresa a su casa, su reloj de pulsera marca un tiempo t_3 . La hora h exacta a la que llega se puede calcular sumando a h_2 la diferencia de tiempos $t_3 - t_2$ corregida esto es

$$h = h_2 + \frac{t_3 - t_2}{1 + e} = h_2 + \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}(h_2 - h_1).$$

Problema 5.10

Supóngase que tres planos π_1 , π_2 y π_3 (no necesariamente perpendiculares entre sí dos a dos) se cortan en un único punto O del espacio. Si P es otro punto cualquiera y denotamos con P_1 , P_2 , P_3 los tres puntos que resultan de proyectar P perpendicularmente sobre los planos π_1 , π_2 y π_3 , respectivamente, pruébese que los cinco puntos O , P , P_1 , P_2 y P_3 están situados en una misma superficie esférica.

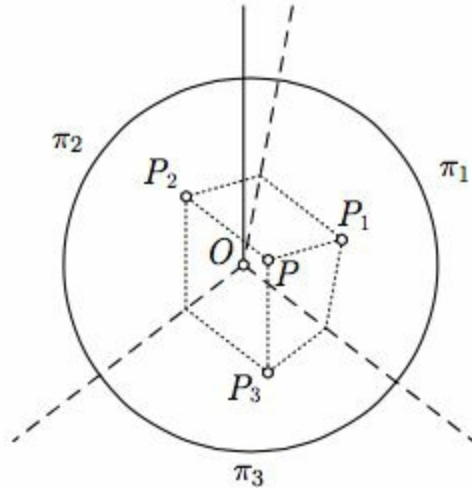


Figura 5.12: Construcción geométrica.

Solución

Los puntos P_1, P_2, P_3 son la proyección perpendicular del punto P sobre los planos π_1, π_2 y π_3 . Como el vector resultante de unir el punto P con su proyección sobre un plano, será perpendicular a cualquier vector contenido en dicho plano. Se tiene entonces:

Los vectores $\vec{OP}_1$ y $\vec{P_1P}$ son perpendiculares entre sí.

Los vectores $\vec{OP}_2$ y $\vec{P_2P}$ son perpendiculares entre sí.

Los vectores $\vec{OP}_3$ y $\vec{P_3P}$ son perpendiculares entre sí.

Por otro lado, se sabe que el arco capaz de 90° de un segmento es una circunferencia que tiene como diámetro dicho segmento. Se toma el segmento OP como diámetro de dicha circunferencia. Pero como se está en el espacio tridimensional, habrá infinitas circunferencias cuyo diámetro sea OP , es decir, todas las circunferencias pertenecen a una única esfera. Cada uno de los puntos P_1, P_2 y P_3 pertenece a esa esfera pues pertenecen a una circunferencia con diámetro OP al cumplirse $\angle OP_iP = 90^\circ$ con $i = 1, 2, 3$. Esta esfera tendrá su centro en el punto medio del segmento OP y radio

$$\frac{OP}{2}.$$

Problema 5.11

Un tiovivo gira a velocidad angular constante $\frac{\pi}{5}$ radianes por segundo. Dos 5 caballos de madera diametralmente opuestos, distantes entre sí 10 metros si estuvieran a la misma altura, oscilan en dirección vertical siguiendo leyes diferentes en el tiempo: el primero una senoidal y el segundo una cosenoidal. En un instante dado, el primero se halla en su posición intermedia y el segundo en su posición más alta. Si esta situación se repite cada segundo, se pregunta: ¿En qué instante a lo largo de una vuelta se encontrarán los dos caballos a la misma altura?



Figura 5.13: Tiovivo.

Solución

Datos: $\frac{\pi}{5}$ rad/s, el diámetro del tiovivo es de 10 m.

El movimiento en vertical del primer caballo viene dado por $y = \sin(\omega t + \theta)$, y el del segundo caballo por $y = \cos(\omega t + \theta)$.

Según el enunciado, en el instante $t = 0$ s (se puede tomar otro origen de tiempos), el primer caballo está en su posición intermedia y el segundo caballo en su posición máxima. Esto se cumple si $\theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Por simplicidad, se toma la solución $\theta = 0$ radianes. Si esta situación se repite cada segundo ($T = 1$ s), la frecuencia angular es $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ rad/s.

Cuando los dos caballos están a la misma altura se cumple

$$\sin(\omega t) = \cos(\omega t) \Rightarrow \tan(\omega t) = 1.$$

La solución a esta ecuación es $\omega t = \frac{\pi}{4} + k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$. Como $\omega t = 2\pi t$, se despeja el tiempo como

$$t = \frac{1}{8} + \frac{k}{2} \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

El tiovivo tarda $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$ s en dar una vuelta completa. El número de veces que los caballos están a la misma altura en una vuelta es el número de valores de k , con $k \in \mathbb{N}$, que cumplen la inecuación

$$t = \frac{1}{8} + \frac{k}{2} < 10.$$

El mayor valor de k que verifica la inecuación es $k = 19$. Luego en la primera vuelta los caballos están 20 veces a la misma altura. Nótese que como la velocidad angular del movimiento de los caballos 2π rad/s es múltiplo de la velocidad angular del tiovivo $\frac{\pi}{5}$ rad/s, el número de veces en que los caballos están a la misma altura en una vuelta será el mismo independientemente del número de vueltas que lleve el tiovivo.

Capítulo 6: Concurso ¡Aventúrate!

Problema 6.1

Se sitúan sobre el suelo, tal como se indica en la figura, tablas de madera de anchura unidad y longitud variable. Se tienen una tabla de longitud n ; dos tablas de longitud $n - 1$; tres tablas de longitud $n - 2$; y así sucesivamente, hasta n tablas de longitud unidad, donde n es un número natural cualquiera. Indíquese una fórmula lo más sencilla posible que permita obtener el área recubierta por todas las tablas en función de n . Justifíquese la contestación.

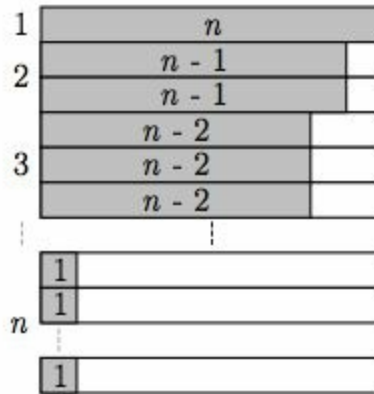


Figura 6.1: Tablas de madera.

Solución

Se puede inscribir la forma resultante en un rectángulo de área mínima cuyo lado menor vale $n + 1$ y lado mayor la suma de todos los anchos de las tablas, que es el número de tablas por la unidad, esto es

$$1 + 2 + \dots + n.$$

Este resultado es es una serie aritmética, cuya suma vale

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

El área A_r del citado rectángulo es

$$A_r = \frac{n(n+1)^2}{2}. \quad (6.1)$$

A este área hay que restarle las áreas que no pertenecen a las tablas. El área adyacente a la tabla de longitud n es 1^2 ; a las tablas de longitud $n-1$ es 2^2 , ... El área adyacente total es entonces

$$A_a = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2,$$

que es una serie de cuadrados perfectos, cuya suma es

$$A_a = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (6.2)$$

Por tanto, utilizando (6.1) y (6.2), el área pedida es

$$\begin{aligned} A_r - A_a &= \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

Problema 6.2

Un resultado sorprendente, pero muy sencillo de probar, si se tienen dos recipientes iguales, el primero conteniendo V litros de un líquido A y el segundo V litros de un líquido B , y si con una cuchara de volumen $v < V$ trasladamos v litros del segundo recipiente al primero, mezclamos perfectamente, y con la misma cuchara vacía trasladamos luego v litros de la mezcla del primer recipiente al segundo, entonces la proporción del líquido B en el primer recipiente es igual a la proporción de líquido B en el segundo.



Figura 6.2: Recipientes.

Solución

Se denomina al primer recipiente α , y al segundo recipiente β . Con α_A se indica el volumen del líquido A en el recipiente α , con interpretaciones análogas para α_B , β_A y β_B . Se construye una tabla que describe el proceso del enunciado

Rec.	1	2	3
α_A	V	$V - v$	$V - v + \frac{v^2}{V+v} = \frac{V^2}{V+v}$
α_B	0	0	$\frac{Vv}{V+v}$
β_A	0	v	$v - \frac{v}{v+V}v = \frac{Vv}{V+v}$
β_B	V	V	$V - \frac{V}{V+v}v = \frac{V^2}{V+v}$

Cuadro 6.1: Tabla del proceso.

Se calculan las relaciones

$$\frac{\alpha_B}{\alpha_A} = \frac{Vv}{V+v} \frac{V+v}{V^2} = \frac{v}{V}.$$

$$\frac{\beta_A}{\beta_B} = \frac{Vv}{V+v} \frac{V+v}{V^2} = \frac{v}{V}.$$

Por tanto, $\frac{\alpha_B}{\alpha_A} = \frac{\beta_A}{\beta_B}$.

Problema 6.3

Se tienen dos perfumes A y B que se evaporan en función del tiempo, siguiendo la ley de la exponencial decreciente, esto es, los volúmenes por separado V_A y V_B de cada perfume (medidos en centilitros) se pueden expresar en función del tiempo t (medido en horas) mediante

$$\begin{aligned}V_A &= 30e^{-at} \\ V_B &= 60e^{-bt},\end{aligned}$$

donde a y b son valores positivos y concretos desconocidos.

En experiencias anteriores, se ha descubierto que los perfumes A y B , al evaporarse por separado, tienden a igualar sus volúmenes a un mismo valor V cuando T tiende a $T = \ln 2$ horas. Se sabe además que si los líquidos A y B se mezclaran en las mismas condiciones iniciales, la mezcla al evaporarse llegaría a tener el volumen V anterior en el doble de tiempo.

Se pide hallar el volumen V .



Figura 6.3: Perfumes.

Solución

La ley de evaporación de los dos líquidos viene dada por

$$\begin{aligned}V_A &= 30e^{-at} \\ V_B &= 60e^{-bt}.\end{aligned}$$

Basta con calcular, por ejemplo, el valor de $e^{-b \ln 2}$. La primera condición establece que los dos recipientes tienen el mismo volumen V para $t = \ln 2$ horas, luego

$$V = 30e^{-a \ln 2} = 60e^{-b \ln 2} \Rightarrow e^{-a \ln 2} = 2e^{-b \ln 2}. \quad (6.3)$$

La otra condición exige que cuando se mezclan los dos recipientes, la mezcla alcanza el mismo volumen pero en el doble de tiempo, es decir para $t = 2 \ln 2$ horas. Se supone que al mezclar los dos recipientes las partes de la mezcla del recipiente A y el recipiente B se evaporan con la misma ley con que lo hacían por separado. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}30e^{-a2 \ln 2} + 60e^{-b2 \ln 2} &= \underbrace{30e^{-a \ln 2}}_V \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{-a \ln 2} \underbrace{30e^{-a \ln 2}}_V + e^{-b \ln 2} \underbrace{60e^{-b \ln 2}}_V &= V \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{-a \ln 2} + e^{-b \ln 2} &= 1.\end{aligned} \quad (6.4)$$

Sustituyendo (6.3) en (6.4) y despejando se tiene

$$e^{-b \ln 2} = \frac{1}{3}.$$

Llevando este resultado a (6.3), se obtiene que el volumen V es 20 cl.

Problema 6.4

Se considera una línea de autobuses, en sentido antihorario, con cuatro tramos rectos: AE , EB , DF y FC , de igual longitud, y dos tramos en forma de arco: BD y CA , de distinta longitud (ver figura esquemática). Las letras A , E , B , D , F y C denotan paradas. Las paradas A y C se hallan en el Norte de la ciudad y las paradas B y D en el Sur. Las paradas centrales E y F son igualmente accesibles por los pasajeros que estén esperando.

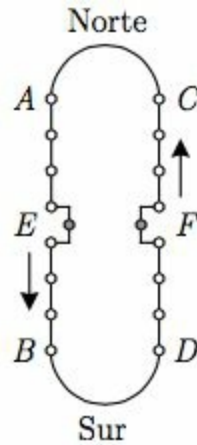


Figura 6.4: Línea de autobuses.

La compañía tiene sólo dos autobuses: 1 y 2. Se supone que salen diariamente exactamente a las 8 horas de la mañana y van en todo momento a la misma velocidad: el autobús 1 sale de F en el sentido FCA y el autobús 2 sale de E en el sentido EBD . Van dando vueltas al circuito, deteniéndose siempre el mismo tiempo en cada parada, tiempo que a efectos del problema se considera despreciable. Terminan el trabajo diario exactamente a las 8 de la tarde: el autobús 1 lo hace en F y el autobús 2 en E .

Un usuario habitual que vive en el centro tiene dos hermanos, uno en el Norte y otro en el Sur, a los que visita diariamente. Como llega a las paradas centrales en momentos aleatorios del día, toma la decisión de visitar un hermano u otro, subiendo al autobús que llegue primero a cualquiera de las dos paradas y alternando de autobús en los casos en que ambos lleguen simultáneamente. Al cabo de muchos días, se da cuenta de que ha ido a visitar un 40% de veces a su hermano del Sur y un 60% de veces a su hermano del Norte.

Sabiendo que el tiempo de recorrido de un autobús por el tramo curvo menor BD es el mismo que el invertido en cualquiera de los cuatro tramos rectos, se pide expresar la longitud L_m de ese tramo en función de la longitud L_M del tramo curvo mayor CA .

Solución

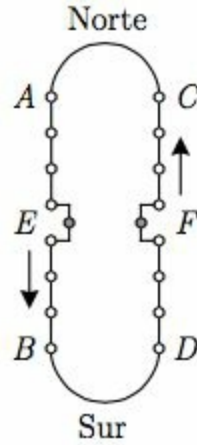


Figura 6.4: Línea de autobuses.

Datos: el 60% de veces el usuario visita a su hermano del Sur y el 60% de las veces a su hermano del Norte.

Cada vuelta completa, los dos autobuses vuelven a coincidir en la parada central. Por tanto, se puede estudiar el problema con sólo una vuelta. La figura siguiente muestra la evolución de la llegada de los dos autobuses a la parada central. Con N se simboliza a un autobús que va al Norte, y con S a uno que va el Sur.

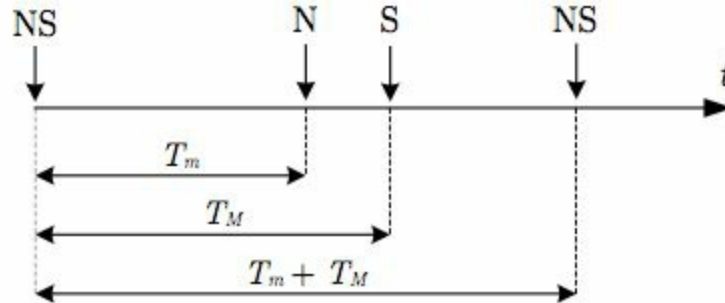


Figura 6.5: Llegada de los autobuses en el tiempo a la estación central.

Se denota con T_m el tiempo que tarda un autobús en recorrer el camino de E a F (tramo corto), y con T_M al que tarda de F a E (tramo largo). Se supone que el viajero llega a la parada con probabilidad uniforme, es decir, puede llegar con la misma probabilidad en el cualquier instante de tiempo.

La probabilidad de que el viajero vaya al Norte es que llegue a la parada central en los primeros T_m segundos. Además la mitad de las veces que llegue en un tiempo t , tal que $T_M < t < T_m + T_M$ también irá al Norte (cuando los dos autobuses llegan a la vez). Se puede razonar del mismo modo para los casos en que va al Sur. En consecuencia, la

probabilidad de que vaya al Norte, que es del 60%, se calcula como

$$\frac{6}{10} = \frac{T_m}{T_m + T_M} + \frac{1}{2} \frac{T_m}{T_m + T_M} = \frac{3}{2} \frac{T_m}{T_m + T_M}. \quad (6.5)$$

Si el autobús va a una velocidad constante v , el tiempo T_m viene dado por

$$T_m = \frac{2L_m + L_m}{v}, \quad (6.6)$$

y el tiempo T_M es

$$T_M = \frac{2L_m + L_M}{v}. \quad (6.7)$$

Sustituyendo (6.6) y (6.7) en (6.5)

$$\begin{aligned} \frac{6}{10} &= \frac{3}{2} \frac{\frac{2L_m + L_m}{v}}{\frac{2L_m + L_m}{v} + \frac{2L_m + L_M}{v}} = \frac{3}{2} \frac{3L_m}{5L_m + L_M} \Rightarrow \\ &\Rightarrow L_m = \frac{2}{5} L_M. \end{aligned}$$

Por tanto, la longitud del tramo pequeño L_m es $\frac{2}{5}$ veces la longitud del tramo mayor L_M .

Problema 6.5

Un restaurante original cocina a diario comidas con platos exquisitos. Para el primer plato ofrece tres opciones distintas: A1, A2 y A3; cinco para el segundo plato: B1, B2, B3, B4 y B5 y siete para los postres: C1, C2, C3, C4, C5, C6 y C7. El dueño propone ir cambiando de menú todos los días de modo que los dígitos de cada menú representen números en valor creciente, en base diez, comenzando con el menú A1, B1, C1, cuyos dígitos representan el número 111 (ciento once).

Ejemplo: Si un determinado día el menú es A2, B3, C7 al siguiente día sería A2, B4, C1, pues con los dígitos disponibles para cada plato, el siguiente número al 237 es el 241.

El restaurante comienza la siguiente experiencia un 1 de febrero, siendo el año no bisiesto. Ese día ofrece el menú de la comida por 1 €; el segundo día por 2 €; el tercer día por 3 €, y así sucesivamente; hay un día en que el cliente debe pagar el doble de lo que corresponde a ese día, continuando los demás días según la progresión prevista. Por ejemplo, si el día en que hay que pagar doble fuera el cuarto, los menús diarios valdrían 1, 2, 3, 8, 5, 6, 7, etc. €.



Figura 6.6: Restaurante.

Pues bien, un cliente se propone probar todos los menús posibles, comiendo a diario y acordando el pago al cumplir el objetivo. Pasado el tiempo, se encuentra con un amigo matemático que le pregunta cuánto tuvo que pagar en total y el cliente le contesta que no lo recuerda bien, pero que se trataba de un número capicúa, como por ejemplo 4.774. Al cabo de muy poco tiempo el matemático le dice exactamente cuánto tuvo que pagar, cuántos días estuvo comiendo en ese restaurante, la fecha del día que tuvo que pagar doble y cuál era el menú de ese día. ¿Podría averiguar el lector esos resultados?

Solución

El número de menús que pueden hacerse son: $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Por tanto, se van a utilizar 105 días en probar todos los menús. Uno de los días, el cliente paga el doble del término de la progresión aritmética que corresponde a ese día. En consecuencia, la cantidad desembolsada S se puede expresar como

$$S = 1 + 2 + \dots + 105 + x,$$

donde x es un número natural entre 1 y 105.

Por ser una serie aritmética, se puede obtener como

$$S = \frac{1 + 105}{2} 105 + x = 5.565 + x.$$

El número x ha de ser tal que S resulte un número capicúa. Como $x \leq 105$, la cifra de los millares de $5.565 + x$ será 5. Luego la cifra de las unidades de x es un 0. Eso da 10 posibilidades: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 y 100. El número buscado $x = 10y$ ha de ser tal que y sumado a 56 dé 66 para que se obtenga el número capicúa, es decir $y = 10 \Rightarrow x = 100$. Se concluye que el cliente desembolsa en total 5.665 € para probar todas las comidas, y pagó 200 € el día que le correspondía pagar según la progresión 100 €.

Para obtener el menú del día en que pagó doble, se puede tener en cuenta que el último menú A3, B5, C7 es el del día 105. Por tanto, el menú del día 100 será el A3, B5, C2.

Para obtener el día del año, se tiene en cuenta la sucesión de los días por mes desde febrero: 28, 31, 30, 31, ... Se observa que el día cae en 11 de mayo (los días de los meses anteriores suman 89).

Problema 6.6

La siguiente figura muestra una construcción geométrica plana, que posee propiedades interesantes: se parte de un triángulo ABC ; con los lados del citado triángulo se construyen los correspondientes cuadrados exteriores $AQRB$, $BSTC$ y $CUPA$, y estos a su vez permiten definir los triángulos BRS , CTU y APQ ; con los puntos medios X , Y y Z de los lados PQ , RS y TU , respectivamente, se construye un nuevo triángulo XYZ (en gris).

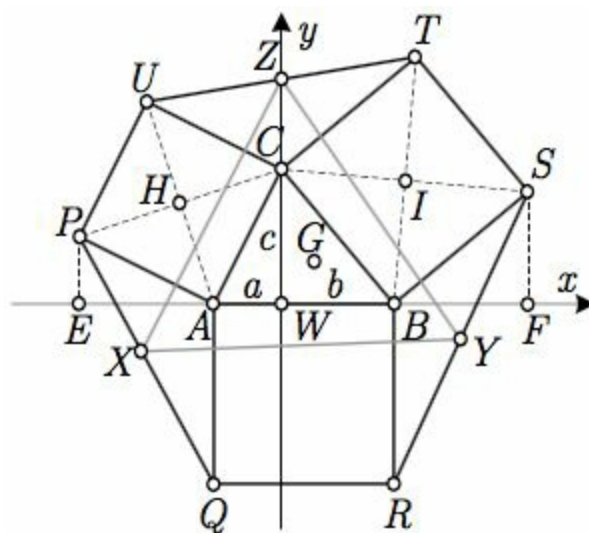


Figura 6.7: Construcción geométrica.

Siendo W el pie de la perpendicular al lado AB por el vértice C , y denotando con a , b y c las longitudes de los segmentos AW , WB y CW , respectivamente, se pide demostrar que el baricentro del triángulo ABC coincide con el baricentro del triángulo XYZ (punto G).

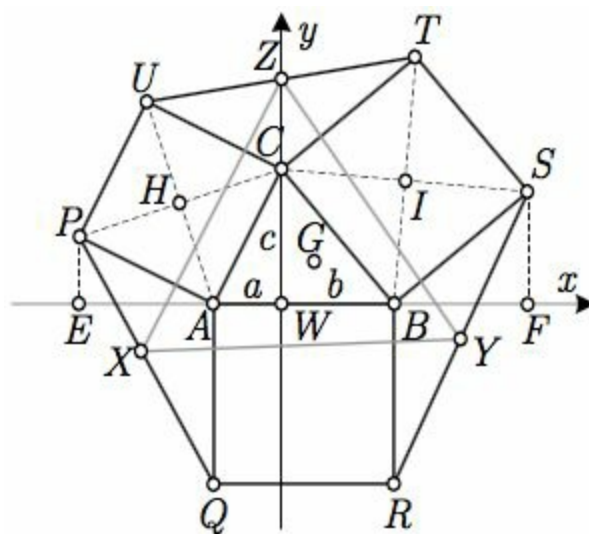


Figura 6.7: Construcción geométrica.

Solución

Se considera un sistema de coordenadas cartesiano con origen en W , el eje OX según el vector $\vec{WB}$ y el eje OY según $\vec{WC}$. Se han añadido a la figura unos puntos auxiliares que se van a utilizar: E y F son los respectivos pies de las perpendiculares al eje OX trazadas desde P y S . H e I son los puntos de corte de las diagonales de los cuadrados $BSTC$ y $CUPA$, respectivamente.

En el sistema de coordenadas tomado, se tiene $A = (-a, 0)$, $B = (b, 0)$ y $C = (0, c)$. El punto G se obtiene como

$$G = \frac{A + B + C}{3} = \frac{(-a, 0) + (b, 0) + (0, c)}{3} = \left(\frac{-a + b}{3}, \frac{c}{3} \right).$$

Se van a calcular las coordenadas de los puntos X , Y y Z para calcular después su centro de gravedad de la misma forma y comprobar que se obtiene el mismo punto.

Coordenadas del punto X

X es el punto medio de PQ . Se tiene que $Q = (-a, -a-b)$. La coordenada x del punto P es

$$x_P = -a - AP \cos \angle EAP, \quad (6.8)$$

donde $AP = CA = \sqrt{a^2 + c^2}$.

$\angle EAP$ es el ángulo complementario de $\angle WCA$. Por tanto

$$\cos \angle EAP = \sin \angle WCA = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}. \quad (6.9)$$

Sustituyendo (6.9) en (6.8)

$$x_P = -a - \sqrt{a^2 + c^2} \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = -a - c.$$

Y la coordenada y del punto P es

$$y_P = AP \sin \angle EAP = AP \cos \angle WCA = \sqrt{a^2 + c^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = a.$$

El punto X resulta

$$X = \frac{P + Q}{2} = \frac{(-a - c, a) + (-a, -a - b)}{2} = \left(\frac{-2a - c}{2}, \frac{-b}{2} \right).$$

Coordenadas del punto Y

Para el punto Y , el razonamiento es análogo, y se obtiene

$$Y = \frac{R+S}{2} = \frac{(b, -a-b) + (c+b, b)}{2} = \left(\frac{c+2b}{2}, \frac{-a}{2} \right).$$

Coordenadas del punto Z

Análogamente, se obtiene el punto Z , que resulta ser

$$Z = \frac{U + T}{2} = \frac{(-c, a + c) + (c, c + b)}{2} = \left(0, \frac{a + 2c + b}{2}\right).$$

El centro de gravedad J del triángulo XYZ se obtiene como

$$\begin{aligned} J &= \frac{X + Y + Z}{3} = \frac{\left(\frac{-2a-c}{2}, \frac{-b}{2}\right) + \left(\frac{c+2b}{2}, \frac{-a}{2}\right) + \left(0, \frac{a+2c+b}{2}\right)}{3} = \\ &= \left(\frac{b-a}{3}, \frac{c}{3}\right) = G, \end{aligned}$$

que coincide con G .

1 Se debe a que

$$\angle EAP + \underbrace{\angle PAC}_{90^\circ} + \angle WCA = 180^\circ.$$

Problema 6.7

Hallar el perfil de una función de la clase

$$y(x) = ae^{-bx^2}(x^2 - c),$$

donde a , b y c son parámetros de valores enteros y positivos. Se imponen las condiciones siguientes: que el mínimo absoluto de la función valga $m = -1$ y los máximos absolutos se den en $x = \pm\sqrt{2}$ y valgan $M = \frac{1}{e^2}$, donde el número e es la base de los logaritmos neperianos.

Se pide hallar los valores de a , b y c .

Solución

La función a determinar es de la forma

$$y(x) = ae^{-bx^2}(x^2 - c).$$

Para obtener los parámetros a , b y c , basta con utilizar la condición de que sean números enteros positivos y que $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{e^2}$. Particularizando $y(x)$ en $x = \sqrt{2}$, se tiene

$$y(\sqrt{2}) = ae^{-2b}(2 - c) = \frac{1}{e^2}.$$

Como a y c son números enteros, $a(2 - c) \in \mathbb{Z}$. Para que el producto de un número entero por e^{-2b} dé e^{-2} , b tiene que ser 1 por ser e^{-2} un número irracional. Luego se tiene que cumplir también

$$a(2 - c) = 1.$$

Existen dos posibilidades: $a = 1$, $b = 1$ ó $a = -1$, $c = 3$. Como además tienen que ser números positivos, la única opción posible es $a = 1$ y $b = 1$. Por tanto, la función pedida es

$$y(x) = e^{-x^2}(x^2 - 1).$$

Se pueden comprobar el resto de condiciones del enunciado que no se han utilizado para calcular a , b y c . Se calcula la derivada primera

$$y'(x) = 2xe^{-x^2}(1 - x^2) + 2xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(2 - x^2).$$

Hay dos puntos críticos en $x = \pm\sqrt{2}$ y $x = 0$. Se calcula la derivada segunda

$$y''(x) = (2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2})(2 - x^2) - 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^4 - 7x^2 + 2).$$

$x = 0$ es un mínimo relativo pues

$$y''(0) = 4 > 0.$$

$x = \pm\sqrt{2}$ es un máximo relativo ya que

$$y''(\sqrt{2}) = -\frac{8}{e^2} < 0.$$

Los extremos relativos hallados son también absolutos porque para $x \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow -\infty$, $y(x) \rightarrow 0$.

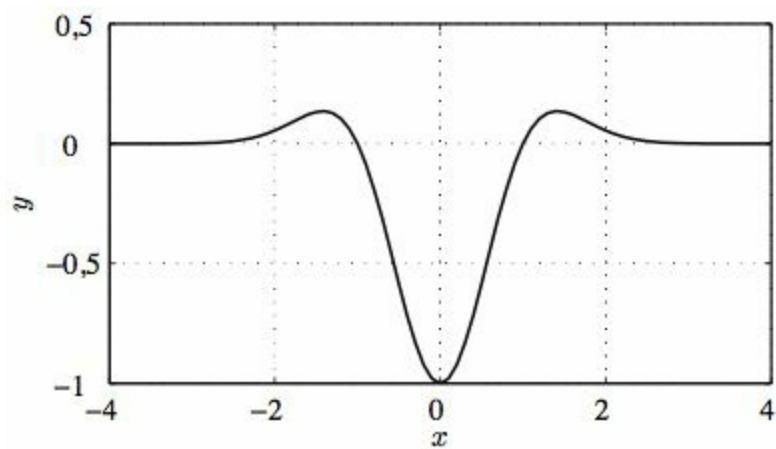


Figura 6.8: $f(x)$ en $[-4, 4]$.

Problema 6.8

Se consideran dos rectas r_1 y r_2 del plano (en color negro) que se cortan en el punto P y otras dos rectas s_1 y s_2 (también en color negro) que se cortan en el punto S , de modo que r_1 y s_1 sean perpendiculares con punto de corte P_1 , y r_2 y s_2 sean perpendiculares con punto de corte P_2 .

Si Q_1 y Q_2 son los inversos de P_1 y P_2 , respectivamente, con centro de inversión S , y R_1 y R_2 son los inversos de P_1 y P_2 , respectivamente, con centro de inversión P , pruébese que:

- Las dos rectas (en color gris claro) definidas: la primera por los puntos de paso Q_1 y Q_2 y la segunda por los puntos de paso R_1 y R_2 , tienen la misma dirección, y
- La citada dirección es perpendicular a la dirección de la recta (en color gris) definida por los dos puntos de paso P y S .

Nota: Se toma como radio de inversión la unidad, esto es, el inverso del punto B con centro de inversión A , con B distinto de A , es el punto C tal que el vector $\vec{AC}$ viene dado por $\vec{AC} = \frac{1}{|\vec{AB}|} \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$, donde $|\vec{AB}|$ denota el módulo del vector $\vec{AB}$.

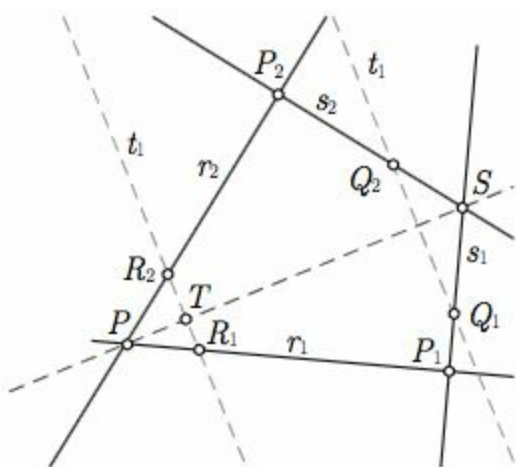


Figura 6.9: Construcción geométrica.

Solución

Para probar los apartados a y b, basta con demostrar que las rectas t_1 y t_2 (rectas en gris claro) son perpendiculares a la recta PS . Se va a demostrar que para cualquier punto P_1 con las condiciones del enunciado, el pie de la perpendicular T a la recta PS por el punto R_1 es una invariante, es decir, el mismo punto (e ídem para R_2). Por tanto, los dos puntos R_1 y R_2 estarán alineados por una recta perpendicular al segmento PS . La demostración es análoga para los los puntos Q_1 y Q_2 .

Sin pérdida de generalidad, se toma el punto R_2 que es el inverso del punto P_2 con radio de inversión 1. Se tiene entonces

$$P\vec{R}_2 = \frac{1}{|P\vec{P}_2|} \frac{P\vec{P}_2}{|P\vec{P}_2|}. \quad (6.10)$$

Tomando el módulo de ambos miembros, se tiene

$$|P\vec{R}_2| = \frac{1}{|P\vec{P}_2|}. \quad (6.11)$$

Nótese que para el dibujo sea coherente con el radio de inversión $|P\vec{P}_2| > 1$, es decir mayor que el radio de inversión.

El punto P_2 (y también P_1) pertenece al arco capaz de 90° del segmento PS (la circunferencia con diámetro PS). Se consideran los triángulos PSP_2 y PTR_2 , que son rectángulos y con el ángulo R_1PR_2 común. Por tanto, estos dos triángulos son semejantes y verifican

$$\frac{|P\vec{T}|}{|P\vec{P}_2|} = \frac{|P\vec{R}_2|}{|P\vec{S}|}. \quad (6.12)$$

Sutituyendo (6.11) en (6.12)

$$\frac{|P\vec{T}|}{|P\vec{P}_2|} = \frac{1}{|P\vec{P}_2||P\vec{S}|} \Rightarrow |P\vec{T}| = \frac{1}{|P\vec{S}|}.$$

Luego $|P\vec{T}|$ sólo depende de $|P\vec{S}|$ y no depende del punto P_2 . Luego para cualquier punto del arco de capaz de 90° del segmento PS , se obtiene el mismo punto T . Con lo que la recta que une los puntos R_1 y R_2 es perpendicular al segmento PS . La demostración es análoga para los

puntos Q_1 y Q_2 y la recta que los une será perpendicular también a PS .

2 Probar el apartado b implica que el apartado a es cierto (el recíproco no es cierto).

Problema 6.9

Se sabe que una jarra de un litro de leche necesita 5 minutos para ser calentada a su temperatura óptima de $T_{\text{ópt}}$ °C en un determinado microondas. Se tienen dos jarras de un litro de leche cada una. Se pone a calentar la primera, pero al cabo de t_1 minutos ($t_1 < 5$ minutos) se introduce inmediatamente en el microondas la segunda jarra. Al cabo de 10 minutos justos desde que se introdujo la primera jarra, se saca ésta inmediatamente del microondas y queda la segunda jarra calentándose. Se pregunta: ¿Cuánto debería valer la velocidad de enfriamiento de la primera jarra (en grados centígrados por minuto y en función de lo que valga t_1 , suponiendo un enfriamiento lineal) para que al sacar la segunda jarra ambas tengan en ese momento la misma temperatura óptima $T_{\text{ópt}}$?



Figura 6.10: Microondas.

Solución

Datos: la primera jarra se saca del microondas 10 minutos después de haberla metido.

Se denota t_1 al instante de tiempo en que se introduce la segunda jarra en el microondas y t_2 al instante en que la segunda jarra se saca. Sin pérdida de generalidad, se va a considerar que la temperatura ambiente es 0°C . Se asume también que el calentamiento es lineal con el tiempo.

En $0 \leq t \leq t_1$, la temperatura $T_1(t)$ de la primera jarra viene dada por

$$T_1(t) = \frac{t}{5} T_{\text{ópt}},$$

donde t es el tiempo transcurrido en minutos desde que se introduce la primera jarra en el microondas y $T_{\text{ópt}}$ la temperatura óptima.

En $t = t_1$, la temperatura de la primera jarra es

$$T_1(t_1) = \frac{t_1}{5} T_{\text{ópt}}.$$

Para $t_1 < t \leq 10$, la temperatura de la primera jarra se calcula como

$$\begin{aligned} T_1(t) &= T_1(t_1) + \frac{1}{2} \frac{(t - t_1)}{5} T_{\text{ópt}} = \frac{t_1}{5} T_{\text{ópt}} + \frac{1}{2} \frac{(t - t_1)}{5} T_{\text{ópt}} = \\ &= \frac{t_1}{10} T_{\text{ópt}} + \frac{t}{10} T_{\text{ópt}}, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que al introducir la segunda jarra la velocidad de calentamiento se divide por 2.

En $t = 10$, la temperatura de la primera jarra es

$$T_1(10) = \frac{t_1}{10} T_{\text{ópt}} + T_{\text{ópt}}. \quad (6.13)$$

En $t_1 < t \leq 10$, la temperatura de la segunda jarra $T_2(t)$ es

$$T_2(t) = \frac{1}{2} \frac{(t - t_1)}{5} T_{\text{ópt}}.$$

En $t = 10$, la temperatura de la segunda jarra es

$$T_2(10) = \frac{1}{2} \frac{(10 - t_1)}{5} T_{\text{ópt}}.$$

Para $t > 10$, la temperatura de la segunda jarra viene dada por

$$T_2(t) = T_2(10) + \frac{(t - 10)}{5} T_{\text{ópt}} = \frac{1}{2} \frac{(10 - t_1)}{5} T_{\text{ópt}} + \frac{(t - 10)}{5} T_{\text{ópt}}.$$

Se calcula el instante t_2 en que se cumple $T_2(t_2) = T_{\text{ópt}}$

$$\begin{aligned} T_2(t_2) &= \frac{1}{2} \frac{(10 - t_1)}{5} T_{\text{ópt}} + \frac{(t_2 - 10)}{5} T_{\text{ópt}} = \\ &= T_{\text{ópt}} \Rightarrow t_2 = 10 + \frac{t_1}{2}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Si se supone que el enfriamiento es también lineal, la velocidad de enfriamiento v se obtiene como

$$v = \frac{\Delta T}{\Delta t}, \quad (6.15)$$

donde ΔT y Δt se calculan, respectivamente, con (6.13) y (6.14) como

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_1(10) - T_{\text{ópt}} = \frac{t_1}{10} T_{\text{ópt}} + T_{\text{ópt}} - T_{\text{ópt}} = \frac{t_1}{10} T_{\text{ópt}}, \\ \Delta t &= t_2 - 10 = 10 + \frac{t_1}{2} - 10 = \frac{t_1}{2}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Sustituyendo (6.16) en (6.15), se tiene que V resulta

$$v = \frac{t_1}{10} T_{\text{ópt}} \frac{2}{t_1} = \frac{T_{\text{ópt}}}{5} \text{ } ^\circ\text{C/min.}$$

Nótese que la velocidad de enfriamiento requerida no depende del instante de tiempo t_1 en que se introduce la segunda jarra.

Problema 6.10

El dibujo en planta de la figura representa dos esferas de radio R , unidas en la parte superior por una varilla de longitud L , en color rojo. Estas esferas deslizan, cada una por su guía, de modo que se mantiene constante la distancia L entre centros. Cuando una esfera llega al tope de su guía, invierte el sentido del movimiento. Las citadas guías forman una cruceta, son de ancho $2R$ y permiten un desplazamiento máximo de longitud $2L$ para cada esfera. El movimiento del conjunto de las dos esferas con su varilla está relacionado con el giro de la cruceta en torno del eje vertical que pasa por el centro de la misma.

Nota: Siendo δ el ángulo de giro de la cruceta, entre 0 y 2π , la distancia del centro de una esfera a uno de los extremos de su guía viene dada por $R + L(1 - \cos \delta)$ y la distancia del centro de la otra esfera a uno de los extremos de su guía viene dada por $R + L(1 - \sin \delta)$

Se pide demostrar:

- Que las dos esferas describen una circunferencia, tal como la indicada en la figura.
- Que el centro de esa circunferencia es un punto fijo.

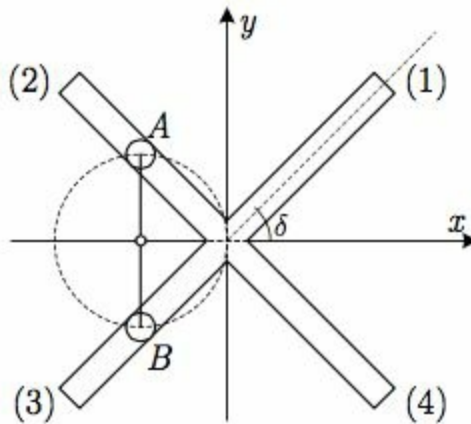


Figura 6.11: Cruceta giratoria.

Solución

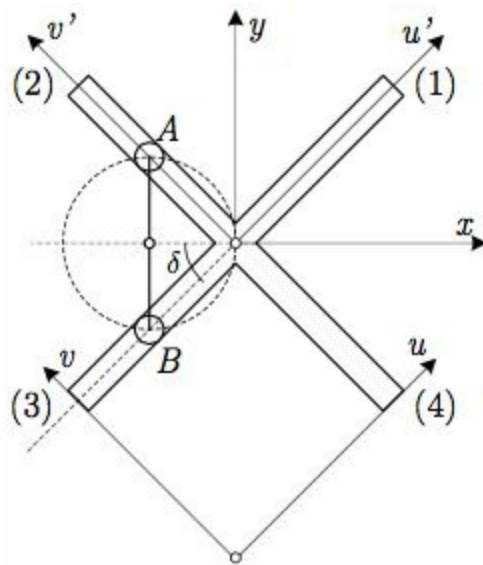


Figura 6.12: Cruceta giratoria.

Es suficiente con demostrar el apartado b para probar también el apartado a. Si el centro de la varilla es un punto fijo, los centros de las esferas describirán una circunferencia con centro situado en el punto medio de la varilla.

Se definen tres sistemas de coordenadas cartesianos sobre la figura:

a) Coordenadas (u', v') : es móvil, tiene origen en el centro de la cruceta.

y ejes u' y v' orientados según los brazos de la cruceta.

b) Coordenadas (u, v) : es móvil, tiene origen en el punto $(-L, -L)$ según el sistema de coordenada (u', v') y ejes u y v orientados también según la dirección de los brazos de la cruceta.

c) Coordenadas (x, y) : con origen en el centro de la cruceta.

Denotamos con P_1 y P_2 a los centros de las esferas que se deslizan por la guía. Las coordenadas (u', v') de estos dos puntos son

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv (L(1 - \cos \delta), L) \\ P_2 &\equiv (L, L(1 + \sin \delta)). \end{aligned}$$

El punto medio de la varilla, denotado como M , en las coordenadas (u, v) es

$$M \equiv \frac{1}{2}L(2 - \cos \delta, 2 + \sin \delta). \quad (6.17)$$

Para probar que M es un punto fijo, realizamos un cambio de base para calcular sus coordenadas (x, y) . Las coordenadas (u, v) están relacionadas con las coordenadas (u', v') a través de una traslación dada por

$$\begin{cases} u = u' + L \\ v = v' + L \end{cases} \quad (6.18)$$

Y las coordenadas (u', v') son una rotación de las coordenadas (x, y) según

$$\begin{cases} x = u' \cos \delta - v' \sin \delta \\ y = u' \sin \delta + v' \cos \delta \end{cases} \quad (6.19)$$

Sustituyendo (6.18) en (6.19)

$$\begin{cases} x = (u - L) \cos \delta - (v - L) \sin \delta \\ y = (u - L) \sin \delta + (v - L) \cos \delta \end{cases} \quad (6.20)$$

Introduciendo (6.17) en (6.20), se tiene que las coordenadas (x_M, y_M) del punto M son

$$\begin{cases} x_M = -\frac{L}{2} \cos^2 \delta - \frac{L}{2} \sin^2 \delta = -\frac{L}{2} \\ y_M = -\frac{L}{2} \sin \delta \cos \delta + \frac{L}{2} \sin \delta \cos \delta = 0 \end{cases}$$

Se verifica por tanto que el punto medio de la varilla es un punto fijo y en consecuencia que los centros de las esferas describen una circunferencia con centro en el citado punto.

Problema 6.11

Es muy conocido el hecho de que si N jugadores tienen que adivinar un número del 1 al N , y gana quien lo adivina primero, diciendo el número pensado en voz alta, no importa el orden que se establezca para hablar (supuesto que lo que dice uno lo oyen los demás y, caso de que si alguien no acierta, queda eliminado); en esas condiciones todos los jugadores tienen la misma probabilidad $\frac{1}{N}$ de ser los primeros en acertar.

Se trata en este nuevo problema de un caso diferente: N jugadores, con $N > 1$, tienen que adivinar un número natural p , de 1 a 2^{N-1} , diciendo en voz alta en qué mitad (derecha o izquierda) piensan está el citado número. Si un jugador no acierta con la mitad donde está el número p , queda eliminado y cede turno al siguiente jugador; en caso de acertar la mitad donde está el número p , sigue eligiendo mitad de aquella mitad, así sucesivamente, hasta que, o bien se equivoca de mitad y queda eliminado cediendo el turno al siguiente jugador, o bien se queda con una mitad con un solo número, que evidentemente sería p , y por tanto habría ganado el juego.

Se plantea la cuestión de si, como en el ejemplo del párrafo anterior, es irrelevante o no el orden inicial de los jugadores.



Figura 6.13: Juego.

Solución

Con la técnica propuesta en el enunciado, se necesitan siempre $N - 1$ preguntas para hallar cualquier número entre 1 y 2^{N-1} . No se considera la primera pregunta de un jugador tras el fallo del jugador anterior, porque obviamente dirá la opción contraria para acertar.

Para que gane el primer jugador, tiene que acertar las $N - 1$ preguntas que tiene que formular. La probabilidad P_1 de que esto ocurra es

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}.$$

Si el juego fuera equitativo, todos los jugadores tendrían la misma probabilidad de ganar, es decir, la probabilidad P_1 . Se tiene que cumplir que la suma de la probabilidad de ganar de todos los jugadores sea la unidad. Se tiene entonces

$$P_1 + P_2 + \dots + P_N = N \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} = 1.$$

Esto no es cierto en general (sólo para $N = 1$ y $N = 2$). El caso $N = 1$ no lo contempla el enunciado. Para probar esto, se parte de la ecuación

$$x \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 1 \Rightarrow x - 2^{x-1} = 0. \quad (6.21)$$

La función $f(x) = x - 2^{x-1}$ se anula evidentemente para los valores enteros $x = 1$ y $x = 2$. La derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = 1 - 2^{x-1} \ln 2,$$

que se anula para $x_M = \frac{\ln 2 - \ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx 1,52877$, comprendido entre $x = 1$ y $x = 2$.

La derivada segunda de $f(x)$ es

$$f''(x) = -2^{x-1} \ln^2 2 = -\frac{1}{2} 2^x \ln^2 2.$$

$f''(x)$ es menor que 0 para todo valores de x , por lo que la función tiene un máximo en x_M y es convexa para todo x . En definitiva, los únicos ceros de $f(x)$ están en $x = 1$ y $x = 2$. Por tanto, se concluye que el juego planteado no es equitativo porque no se cumple

(6.21) para cualquier número de jugadores. Nótese que se ha probado que el juego no es equitativo para $N \geq 3$. El hecho de que (6.21) se cumpla para $x = 2$ no es condición suficiente para que el juego sea equitativo para $N = 2$.

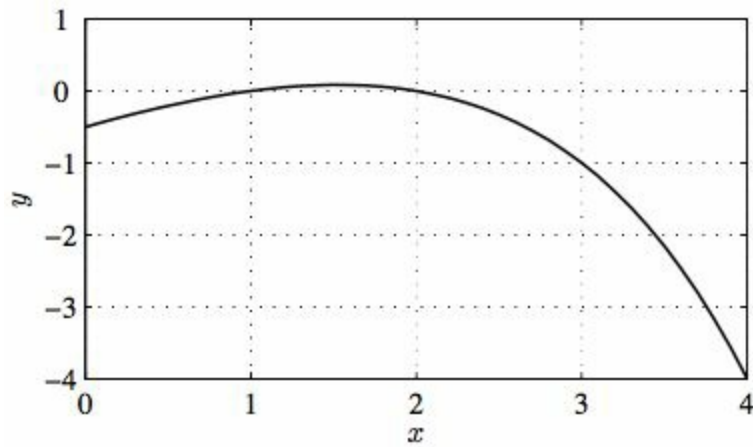


Figura 6.14: $f(x)$ en $[0, 4]$.

Bibliografía

- [1] Barbeau, E. J., Klamkin, M. S., Moser, W. O. J., *Five hundred mathematical challenges*. The Mathematical Association of America, 1995, 228 pp.
- [2] Coxeter, H. S. M., *Fundamentos de Geometría*. Limusa-Wiley, s. A., 1971, 518 pp.
- [3] Deulofeu, J., *Una recreación matemática: historia, juegos y problemas*. Planeta, s. A., 2001, 266 pp.
- [4] Dunn, A., *Desafíos Matemáticos*. RBA Libros, s. A., 2008, 168 pp.
- [5] Halmos, P. r., *Problems for mathematicians young and old*. The Mathematical Association of America, 1991, 318 pp.
- [6] Rektorys, K., *Survey of applicable mathematics*. The M.I.T. Press, 1969, 1370 pp.
- [7] Zawaira, A., Hitchcock, G., *A primer for mathematics competition*. Oxford University Press, 2009, 344 pp.
- [8] Zwillinger, D., *Standard mathematical tables and formulae*. CRC Press, 1996, 812 pp.

EDICIÓN
LATINOAMERICANA

SANTOS EVANGELIOS

UNIVERSIDAD
DE NAVARRA



FACULTAD DE TEOLOGÍA

EUNSA

Santos Evangelios

Universidad de Navarra

9788431355678

1526 Páginas

[Cómpralo y empieza a leer](#)

———— EDICIÓN LATINOAMERICANA ———— Edición digital de la Santos Evangelios a cargo de la Universidad de Navarra. – Introducción a cada Evangelio. – Comentarios a todos los pasajes. – Apéndice con las referencias del antiguo Testamento en el Nuevo, glosario de medidas, pesos y monedas, las fiestas del calendario judío, etc. – Anexo con la relación de autores, documentos y obras citadas en los comentarios. – Para encontrar rápidamente cualquier pasaje dispone de un Índice Rápido, un Índice General y enlaces a los capítulos de cada libro. – Mapas a todo color. – Este ebook contiene más de 2.000 enlaces internos para facilitar la navegación.

[Cómpralo y empieza a leer](#)

EDICIÓN
LATINOAMERICANA

SAGRADA
BIBLIA
UNIVERSIDAD
DE NAVARRA



FACULTAD DE TEOLOGÍA

EUNSA

Sagrada Biblia

Universidad de Navarra

9788431355630

6612 Páginas

[Cómpralo y empieza a leer](#)

Reúne en un sólo libro digital la edición en cinco volúmenes del Antiguo Testamento y del Nuevo Testamento: más de 6.000 páginas impresas. Edición latinoamericana. Edición digital de la Sagrada Biblia de la Universidad de Navarra. – Introducción a cada libro de la Biblia. – Comentarios a todos los pasajes. – Índice de materias con más de mil voces ordenadas alfabéticamente. – Apéndice con las referencias del antiguo Testamento en el Nuevo, glosario de medidas, pesos y monedas, las fiestas del calendario judío, etc. – Anexo con la relación de autores, documentos y obras citadas en los comentarios. – Para encontrar rápidamente cualquier pasaje dispone de un Índice Rápido, un Índice General y enlaces a los capítulos de cada libro. – Cuatro mapas a todo color. – Este ebook contiene más de 38.000 enlaces internos para facilitar la navegación. – Disponible en dos versiones: española y latinoamericana. Por favor, busque y descargue la que sea de su interés.

[Cómpralo y empieza a leer](#)

Índice

Introducción	5
Capítulo 1: Concurso Matenet 2000	7
Problema 1.1	8
Problema 1.2	11
Problema 1.3	13
Problema 1.4	16
Problema 1.5	19
Problema 1.6	22
Problema 1.7	25
Problema 1.8	27
Problema 1.9	31
Capítulo 2: Concurso Matenet 2001	34
Problema 2.1	35
Problema 2.2	37
Problema 2.3	40
Problema 2.4	43
Problema 2.5	46
Problema 2.6	49
Problema 2.7	52
Capítulo 3: Concurso Matenet 2002	55
Problema 3.1	56
Problema 3.2	59
Problema 3.3	62
Problema 3.4	65
Problema 3.5	68
Problema 3.6	70
Problema 3.7	74
Problema 3.8	77
Capítulo 4: Concurso Matenet 2003	80
Problema 4.1	81
Problema 4.2	83
Problema 4.4	88

Problema 4.5	93
Problema 4.6	96
Problema 4.7	98
Problema 4.8	100
Capítulo 5: Concurso Berriak	102
Problema 5.1	103
Problema 5.2	108
Problema 5.3	111
Problema 5.5	118
Problema 5.6	121
Problema 5.7	124
Problema 5.8	127
Problema 5.9	130
Problema 5.10	132
Problema 5.11	134
Capítulo 6: Concurso ¡Aventúrate!	136
Problema 6.1	137
Problema 6.2	139
Problema 6.3	141
Problema 6.4	143
Problema 6.5	146
Problema 6.6	148
Problema 6.7	153
Problema 6.8	156
Problema 6.9	159
Problema 6.10	162
Problema 6.11	165
Bibliografía	168