Esfera 4

¿Qué es lineal y qué no?

¿Cómo escribo o describo algo que no es recto?

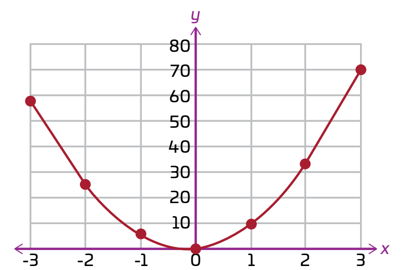
¿Puedo explicar fenómenos o eventos con dibujos de curvas?

Desalinea

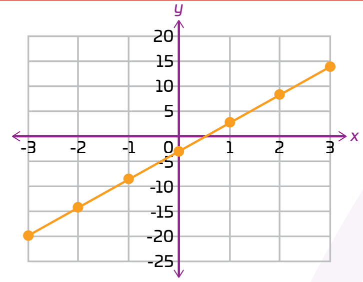
Diferencia entre variaciones lineales y no lineales a partir de sus representaciones gráficas y algebraicas.

Comienza la Esfera de Exploración identificando qué actividades puedes responder con base en lo que ya sabes. No olvides resolverlas de nuevo en tu cuaderno al terminar. ¡Así descubrirás cuánto has avanzado!

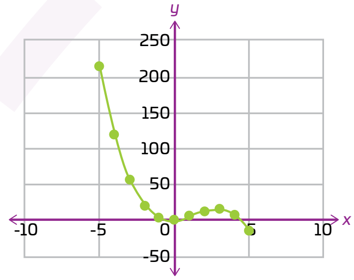
01 **Escribe debajo de cada gráfica si corresponde a una ecuación lineal o a una no lineal.** +5



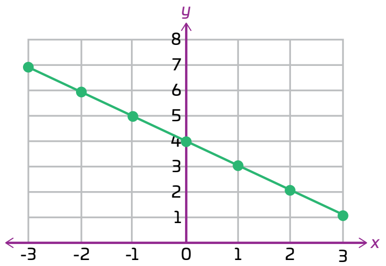
No lineal



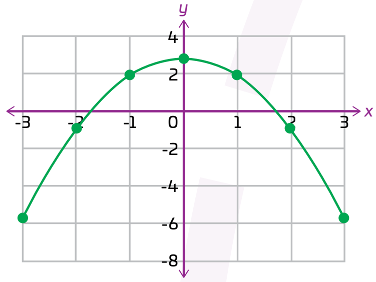
Lineal



No lineal



Lineal



No lineal

1.1 Rodea las ecuaciones que sean no lineales.

$y = 45x^2 + 2x + 3$

$y = 32$

$y = x^2$

$y = \frac{5}{7}x^2 - 3$

$y = 0.8x^2 - x + 4$

$y = 7 - x$

$y = \sqrt{\frac{7}{3}} - 2x$

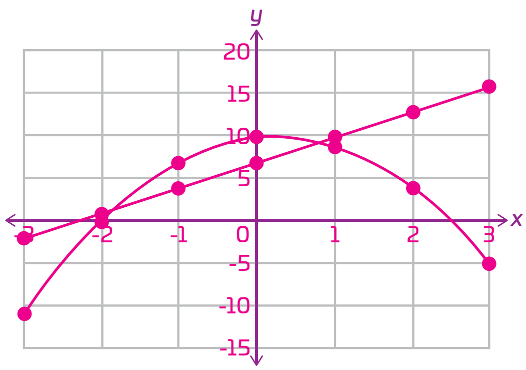
$y = 0.008x^2 + .312x + 1.1$

$y = -4x + \sqrt{56}$

$y = -2x^2 + 54$

02 **Completa la tabla. Luego, marca los puntos obtenidos en la gráfica de abajo y únelos con una línea suave.** +5

x	$y_1 = -2x^2 + x + 10$	$y_2 = 3x + 7$	Punto (x, y_1)	Punto (x, y_2)
-3	-11	-2	(-3,-11)	(-3,-2)
-2	0	1	(-2,0)	(-2,1)
-1	7	4	(-1,7)	(-1,4)
0	10	7	(0,10)	(0,7)
1	9	10	(1,9)	(1,10)
2	4	13	(2,4)	(2,13)
3	-5	16	(3,-5)	(3,16)



2.1 Observa la gráfica y contesta. R. M.

Nota que los ejes no usan la misma escala. ¿La gráfica curva tendría una forma diferente si los ejes tuvieran la misma escala?

No, pero luciría menos achatada, o más puntiaguda.

Y, en la misma situación, ¿qué pasaría con la recta?

La recta seguiría viéndose así, pero más inclinada hacia arriba.

Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

	Antes de la Esfera de Exploración		Al terminar la Esfera de Exploración	
	Sí	No	Sí	No
1. Identifico la diferencia entre variaciones lineales y no lineales, gráfica y algebraicamente.	○	○	○	○
2. Reconozco variaciones cuadráticas tabular, gráfica y algebraicamente.	○	○	○	○
Puntos obtenidos:				

INVESTIGO

Aprendizaje esperado

› Diferencia entre variaciones lineales y no lineales a partir de sus representaciones gráficas y algebraicas.

Keys

- Variaciones lineales y no lineales
- Variación cuadrática

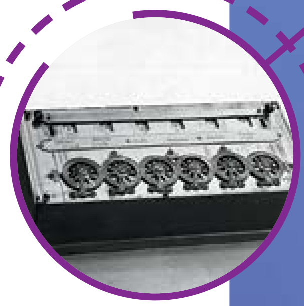
¿Tus papás entienden lo que escribes al chatear con tus amigos? Y tus profesores, ¿qué opinan de la forma en que redactas tus trabajos escolares? El lenguaje común está lleno de ambigüedades, esto lo dota de una imprecisión valorada según diferentes puntos de vista: aceptada en literatura; indeseable en la academia.

El lenguaje de las ciencias y las matemáticas, a diferencia del lenguaje común, anhela la precisión. Es deseable que todos entendamos igual los conceptos de la ciencia. También lo es disponer de un lenguaje muy expresivo, que con pocos símbolos o conceptos transmita mucha información. Por ello, este lenguaje ha evolucionado con el tiempo para hacerse más expresivo. Observa la siguiente tabla:

Comparación de simbología algebraica

Simbología hacia 1559		Simbología actual
Carácter cósico	**Nombre**	
n	número	x^0
co	cosa	x^1
ce	censo	x^2
cu	cubo	x^3

Fuente: Meavilla, V. (2013), *¿Cuánto vale la x?*, Amuzara, España.



Observa que la actual "*x*" de nuestras ecuaciones, la incógnita que aparece cuando convertimos un problema a lenguaje matemático y es la que se busca conocer, antes se conocía como "la cosa" y era representada por el símbolo "co" (aunque con la escritura del siglo XVI, no precisamente con la mostrada aquí, ¿has visto libros de esa época?). Como puedes notar, la simbología algebraica se ha tornado más sencilla al incorporar una notación en la que, por ejemplo, x^2 significa $x \cdot x$.

Otro ejemplo de la expresividad del lenguaje matemático está en el concepto de variación lineal, que ya has estudiado. Al decir que una cantidad *y* varía linealmente respecto a otra, *x*, indica que:

1) la gráfica de los datos *x* vs *y* es una línea recta;
2) la variación está gobernada por la ecuación $y = mx + b$.

Esto puede parecerte obvio, pero también considera que:

3) en un modelo lineal, solo necesitamos dos pares de valores, *m* y *b*, o dos coordenadas como (x_1, y_1) y (x_2, y_2), para conocer bien la variación; y, en consecuencia,
4) este modelo es el más sencillo, lo cual indica la simplicidad propia del fenómeno modelado.

En 1929, Edwin Hubble graficó las posiciones y velocidades de las galaxias cercanas a la nuestra y encontró que podían ajustarse a un modelo de variación lineal: la velocidad de una galaxia era proporcional a su distancia. Con base en este modelo se desarrolló la cosmología, la ciencia que estudia el nacimiento, evolución y composición del universo, y su consecuencia más famosa es la teoría del Big Bang o Gran Explosión. Sin embargo, mediciones más precisas de la distancia a las galaxias realizadas en 1998 mostraron que la ley de Hubble no es lineal. Esto cambió dramáticamente la situación. Al descartarse la sencillez del modelo también se descartó la simplicidad del fenómeno descrito, al grado que actualmente modelar la no linealidad de la ley de Hubble es el problema más importante de la cosmología. La razón es que una variación no lineal de la velocidad respecto a la posición de las galaxias implica la existencia de una fuerza a escala universal de la que no se tienen otras evidencias. Esta fuerza es llamada "energía oscura" y nadie sabe qué la origina.

Como ves, saber si una variación es lineal, o no, nos da una idea acerca de la complejidad del fenómeno modelado. Y esto es una virtud del lenguaje matemático. Desde tu punto de vista, ¿qué tan preciso y expresivo dirías que es el lenguaje que usas para comunicarte? Y tus actividades, ¿qué tan lineales crees que son (en tiempo, dinero o esfuerzo, por ejemplo)?

Ricardo Medel Esquivel

Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer, reflexiona sobre ello y realiza lo siguiente.

Dibuja cuatro actividades que realices (como correr, nadar, comer, mirar el cielo nocturno), dos que consideres lineales y otras dos que pienses que no lo son.
R. L.

Actividades lineales

Actividades no lineales

Clasifica en los recuadros tus conversaciones como "técnicas" (ya sea por el uso de modismos o el lenguaje particular de un área de estudio) o "normales" (que cualquiera puede entender). R. L.

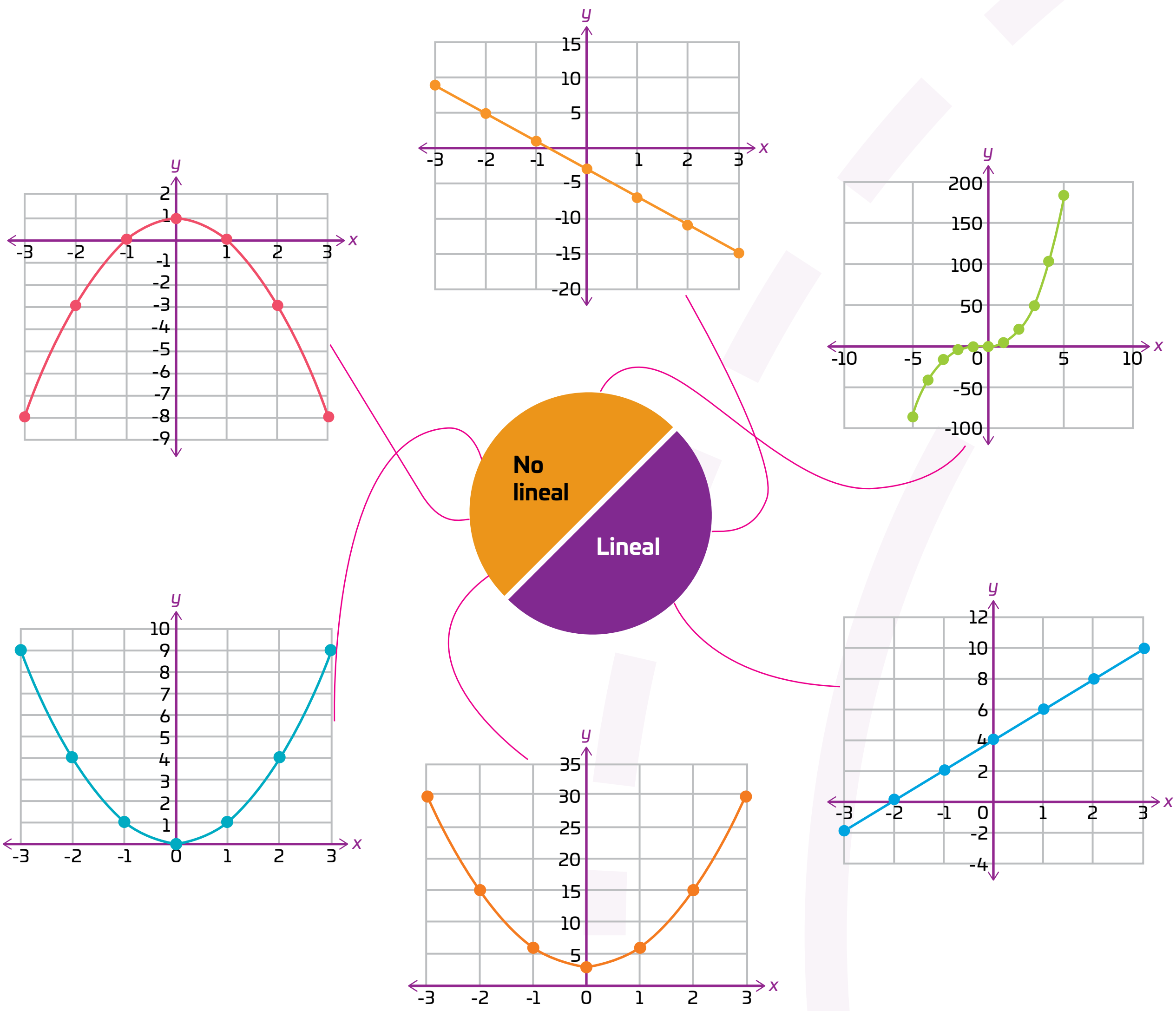
Conversaciones "técnicas"

Conversaciones "normales"

¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, escríbelo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución. R. L.

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 **Une las gráficas con el semicírculo central adecuado.**

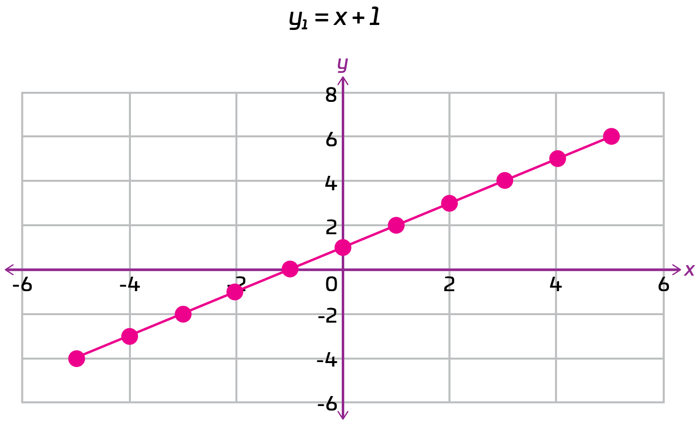


Marca con ✅ si estás o no de acuerdo con las aseveraciones sobre las gráficas anteriores. Discútelas con un compañero. R. M.

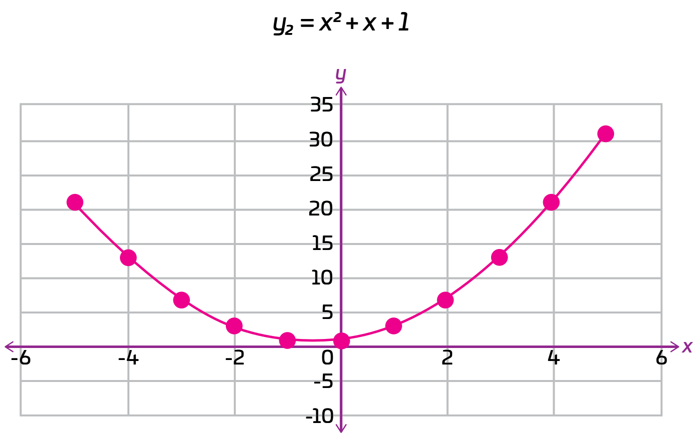
	De acuerdo	En desacuerdo
› La forma de las variaciones no lineales son todas parecidas entre sí.		✓
› Las variaciones lineales siempre están representadas por rectas, de ahí su nombre.	✓	
› Una variación no lineal puede identificarse porque los valores se verán como si fluctuaran, aumentando y disminuyendo.	✓	
› La forma de las variaciones lineales no se ve afectada por la escala.	✓	

02 **Completa la tabla de valores y marca los puntos en su sistema coordenado. Al terminar, une dichos puntos con una línea suave.**

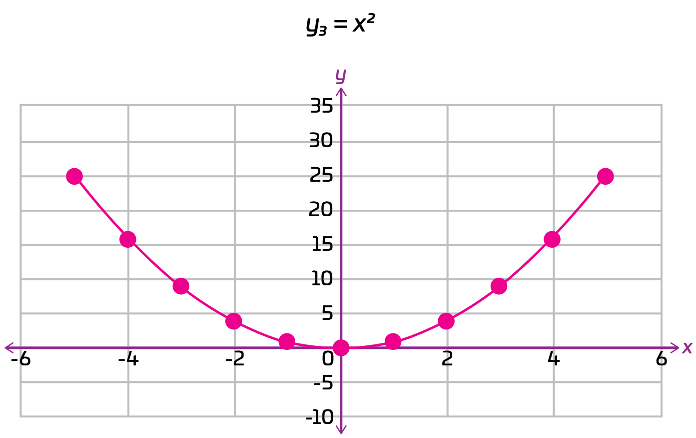
x	$y_1 = x + 1$
-5	$-5 + 1 = -4$
-4	$-4 + 1 = -3$
-3	$-3 + 1 = -2$
-2	$-2 + 1 = -1$
-1	$(-1) + 1 = 0$
0	$(0) + 1 = 1$
1	$(1) + 1 = 2$
2	$(2) + 1 = 3$
3	$(3) + 1 = 4$
4	$(4) + 1 = 5$
5	$(5) + 1 = 6$



x	$y_2 = x^2 + x + 1$
-5	$(-5)^2 + (-5) + 1 = 21$
-4	$(-4)^2 + (-4) + 1 = 13$
-3	$(-3)^2 + (-3) + 1 = 7$
-2	$(-2)^2 + (-2) + 1 = 3$
-1	$(-1)^2 + (-1) + 1 = 1$
0	$(0)^2 + (0) + 1 = 1$
1	$(1)^2 + (1) + 1 = 3$
2	$(2)^2 + (2) + 1 = 7$
3	$(3)^2 + (3) + 1 = 13$
4	$(4)^2 + (4) + 1 = 21$
5	$(5)^2 + (5) + 1 = 31$



x	$y_3 = x^2$
-5	$(-5)^2 = 25$
-4	$(-4)^2 = 16$
-3	$(-3)^2 = 9$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$(0)^2 = 0$
1	$(1)^2 = 1$
2	$(2)^2 = 4$
3	$(3)^2 = 9$
4	$(4)^2 = 16$
5	$(5)^2 = 25$



03 **Compara tus tablas y gráficas de la página anterior con las de dos compañeros 👫. Discutan las preguntas y anota las conclusiones y respuestas a las que llegaron con los argumentos que mejor te convenzan.** R. M.

- En cuanto a posición y forma ¿cuáles son las curvas más parecidas y cuál difiere?

Las gráficas y_2 y y_3 son más parecidas y son no lineales; en cambio, la gráfica y_1 es lineal.

- Compara las ecuaciones de las gráficas que se parecen, ¿cuál es el elemento que las diferencia de la otra?

El término x^2 es el que causa que las gráficas de las ecuaciones y_2 y y_3 sean parecidas, porque los coeficientes son los mismos, en los términos respectivos, y la otra ecuación carece del término cuadrático.

- Utilizando las tablas anteriores, ¿qué explicación dan a que aparezcan esas semejanzas y diferencias entre las gráficas?

El término cuadrático hace que todos los valores de y sean positivos, esto no sucede con la ecuación lineal.

04 **Identifica y anota 🕵️ cuáles ecuaciones son lineales (L) y cuáles no lineales (NL). Después, responde.**

$y = 5x^2 + 3x + 2$ NL	$y = -62$ L
$y = 8 - 7x^2$ NL	$y = -x^2 - 2$ NL
$y = x^4$ NL	$y = -12x + 6$ L

¿Qué tan rápido pudiste identificarlas? ¿Podrías hacerlo igual de rápido si aparecieran otras variables en lugar de x y y?

R. L.

AGENDA UNOi HACIA EL FUTURO

ENERGÍA

¿Qué tienen en común las **ecuaciones**, los **retos energéticos** del futuro y la **arquitectura**? La respuesta es **Cype** 🤔.

Cype es una **compañía de *software* que desarrolla programas para que arquitectos e ingenieros diseñen estructuras eficientes** 🌳, en términos de recursos. A partir de modelos matemáticos y ecuaciones, se puede asegurar que los espacios arquitectónicos y urbanísticos incorporen elementos bioclimáticos donde su consumo de energía sea muy reducido 👌.

Esto permitirá **desarrollar ciudades inteligentes desde su mismo diseño** 🌆. Sin embargo, este nivel de eficiencia solo es aplicable para nuevas construcciones, lo que **deja fuera a toda la arquitectura con la que ya contamos**. Además, se centra en cómo eficientar procesos y no en la **incorporación de nuevas fuentes de energía**, por ejemplo, por lo que muchos consideran esta herramienta como algo que **trabaja en la superficie del problema energético** ⚡, sin profundizar.

¿Cómo crees que podrían **aplicarse herramientas de este tipo** para resolver los retos de energía del futuro?

¿QUÉ TAN LINEAL ES TU VIDA?

SOBRE LA FLECHA DIBUJA CÓMO SIENTES QUE HA FLUCTUADO.

05 Reúnete con dos compañeros para jugar 😆.

Memoria de variaciones lineales y no lineales

Materiales

- Doce tarjetas iguales de cartón de 12 × 8 cm
- Un dado

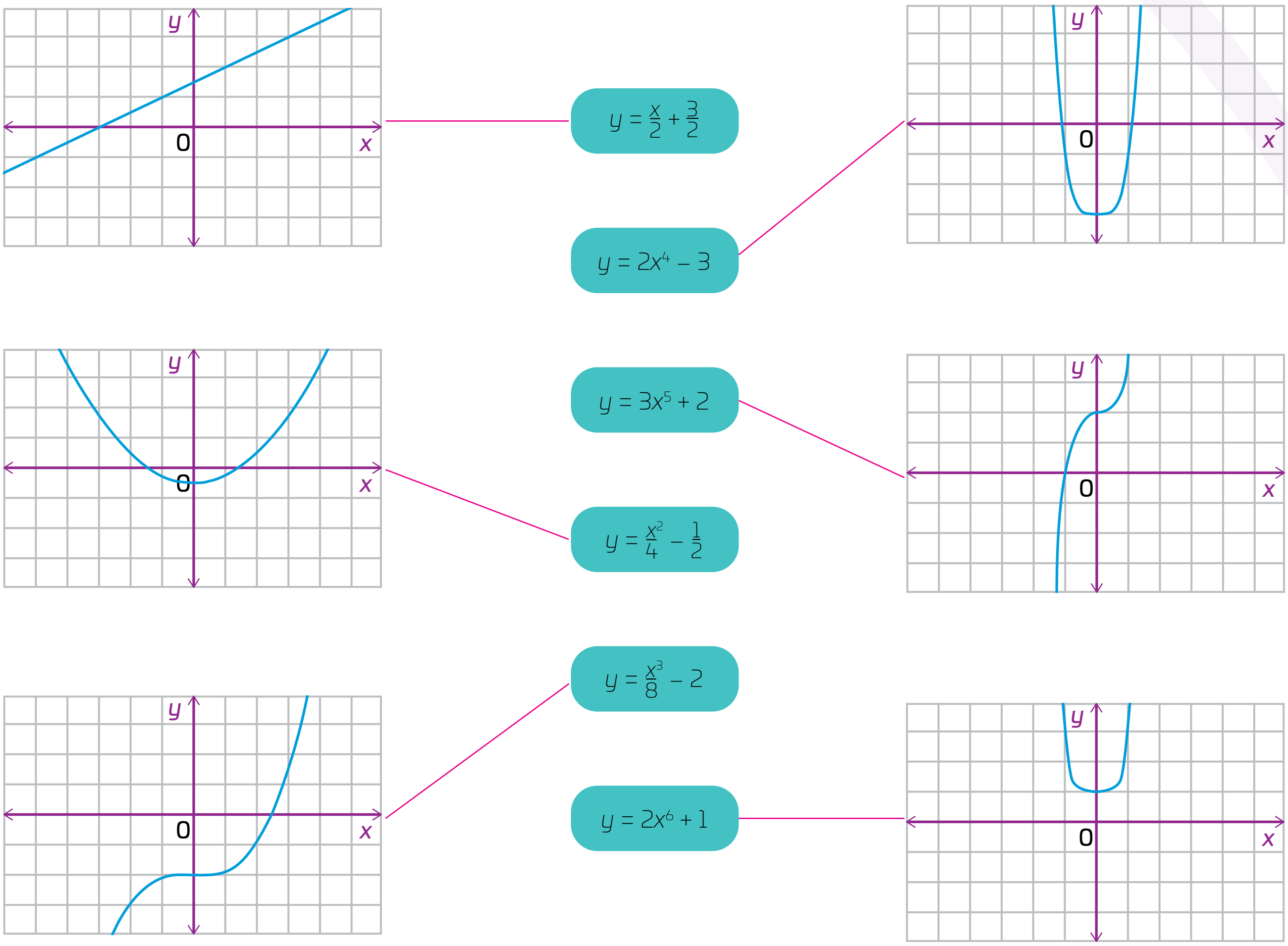
Procedimiento

Paso 1. Copien en las tarjetas las figuras y expresiones siguientes. En el caso de las figuras, los ejes coordenados van justo en el centro. La cuadrícula es de referencia, y la escala es igual en ambos ejes, considérenla 1:1.

Paso 2. Revuelvan las tarjetas y colóquenlas bocabajo, sin que queden encimadas.

Paso 3. Por turnos lancen el dado, si es número par, voltean tarjetas hasta encontrar una ecuación con exponente par o su gráfica.

Paso 4. El jugador tiene una oportunidad para descubrir la tarjeta que corresponde a la que volteó.



Paso 5. Si el jugador acertó, sigue volteando tarjetas; si no, el turno pasa a otro participante.

Paso 6. Si el número del dado sale impar, se sigue el mismo proceso, buscando en este caso una gráfica o ecuación que corresponda a un exponente impar.

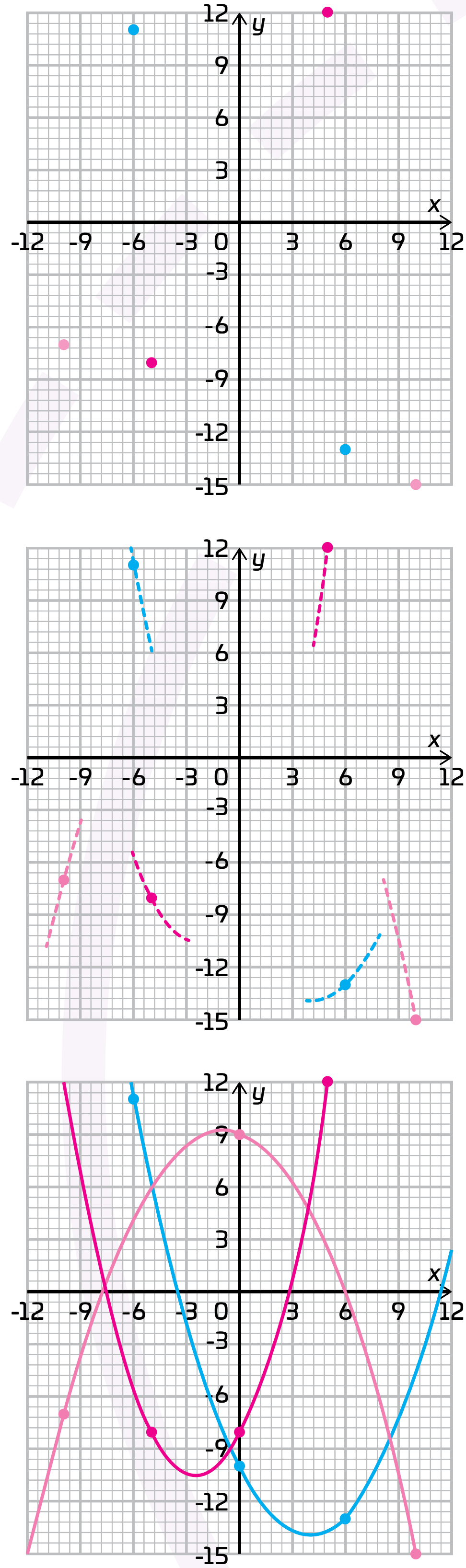
Paso 7. Gana quien acumule más tarjetas 👏.

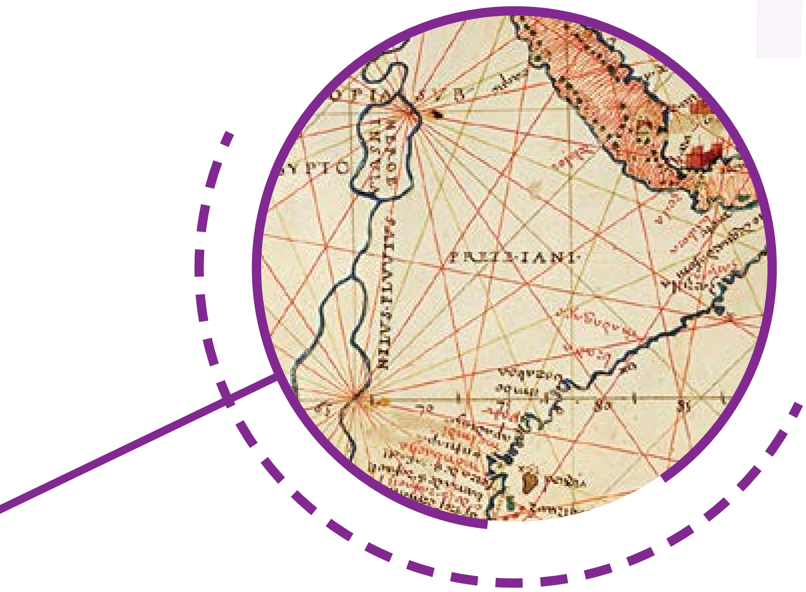
Después de jugar, y ya que se hayan familiarizado con las ecuaciones, discutan cómo puede ampliarse rápidamente la cantidad de tarjetas utilizando el término constante de cada ecuación. Comenten sus conclusiones con el resto del grupo 🗣👤.

Espacio Procedimental

¿Cómo puedo dibujar una ecuación cuadrática haciendo los menos cálculos posibles?

1. Primero me aseguro de que es una ecuación cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$. Es decir que *a*, *b* y *c* son los coeficientes, con *a* distinto de 0.
2. Ahorro tiempo en el dibujo al aprovechar la simetría de la parábola: una de sus ramas es el reflejo de la otra a partir de su eje de simetría.
3. Por ejemplo, en $y = 0.25x^2 - 2x - 10$ elijo un valor en el eje X y su simétrico como referencia inicial. Dicho valor dependerá de los coeficientes; en este caso no son muy grandes, así que uno adecuado es $x = 6$, y su simétrico es $x = -6$.
4. Evalúo ambos valores en la ecuación para completar los puntos. En este caso (−6,11) y (6,−13). Antes de representarlos, no debo olvidar que al hacer $x = 0$ obtengo otro punto fácilmente, en este caso (0,−10).
5. Elijo una escala adecuada. También depende de los coeficientes, si tomo en cuenta los puntos que calculé puedo hacer una buena propuesta.
6. Ahora sí, marco los primeros dos puntos. Hago trazos ligeros para indicar cómo imagino que da vuelta la parábola (solo puede hacerlo de arriba para abajo o viceversa). Agrego el punto con $x = 0$, para mejorar mi perspectiva.
7. Si es necesario, calculo un nuevo punto que aclare las dudas que me llegaran a surgir. A la derecha puedo ver en tres imágenes los pasos aquí descritos.
8. Este procedimiento no permite calcular con exactitud el vértice de la parábola, pero sí estimarlo adecuadamente. Para ello, debo recordar lo que indagué en Key.





06 Dibuja en las imágenes anteriores las siguientes parábolas con el procedimiento ahí indicado. Luego, discute con dos compañeros las preguntas y respóndelas.

R. M.

$$y = 0.4x^2 + 2x - 8$$

$$y = -0.2x^2 - 0.4x + 9$$

Antes de hacer cálculos, ¿qué harían para saber qué tan abierto o cerrado quedará el dibujo de cada parábola?

Conforme el coeficiente del término cuadrático sea más grande, la parábola será más cerrada.

¿Es posible mejorar el método anterior para hacer dibujos más rápidos y precisos?

Sí, si se calcula el vértice de la parábola con la fórmula $x = -b/(2a)$ se tiene un punto adicional, que dice además dónde está el eje de simetría de la parábola.

¿No has comentado cómo usar el signo del término cuadrático para hacer el dibujo? Hazlo aquí.

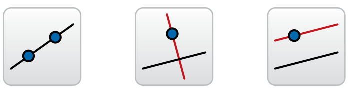
El signo del término cuadrático indica si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo, así que también es un dato que permite agilizar la elaboración del dibujo.

07 Abre GeoGebra y haz lo que se indica.

Con GeoGebra puedes trabajar con parábolas a la inversa de como lo hiciste en las actividades pasadas. Es decir, puedes generar una parábola a partir de un conjunto de datos.

Paso 1. Ya sea que uses la **versión web**, la **aplicación** (Geometría) o el programa para computadora (**GeoGebra Clásico 6**), primero registra un conjunto de datos sobre los que quieras generar una parábola que "pase cerca" de ellos. En la primera imagen se muestran ocho puntos, úsalos o propón algunos cercanos.

Paso 2. Dibuja una recta horizontal (llámala directriz). Tienes dos opciones: Marca primero dos puntos (a la misma altura) y usa el comando **Recta**; o usa los comandos **Perpendicular** o **Paralela**, que requieren también que marques un punto y elijas el eje Y o el eje X, respectivamente. Mira los iconos de esos comandos:

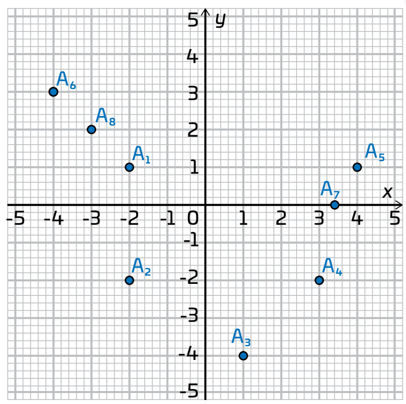


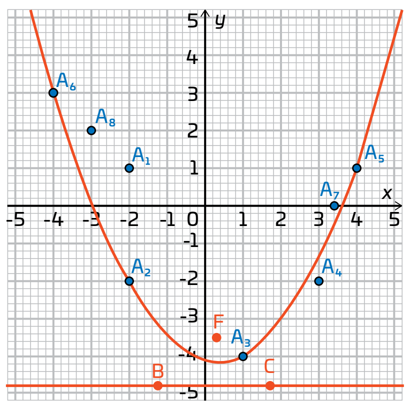
Paso 3. Marca otro punto y edita su nombre para llamarlo Foco o **F**. Estudiarás este elemento y la directriz más adelante. Aquí solo los usaremos para obtener una parábola semejante a las que has trabajado. Tanto el foco como la recta horizontal se muestran en anaranjado en la segunda imagen.

Paso 4. Selecciona el comando **Parábola**. Tienes que buscarlo dentro de los iconos adicionales. Mira aquí cuál es para que puedas localizarlo:

Paso 5. Con el comando activo, marca la directriz y el foco para ver la parábola.

Paso 6. Manipula el foco o la directriz (sin que deje de ser horizontal) para generar una parábola que pase cerca de los puntos deseados.





SUBE NIVEL

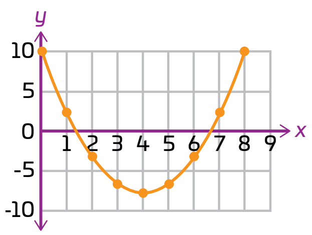
¡Pon a prueba tu destreza matemática! Realiza lo que se indica y anota cuántos pasos, ya sean cálculos o razonamientos diferentes, utilizaste 😛.

01 Anota V si la afirmación es verdadera, o F si es falsa.

Afirmación	V/F
Las gráficas de las variaciones lineales son solo rectas.	V
Las gráficas de las variaciones no lineales pueden ser rectas o curvas.	F
Solo se puede verificar si una variación es lineal o no, observando su gráfica.	F
La ecuación de la parábola se generaliza con la expresión: $y = ax^2 + bx + c$.	V
El signo del coeficiente b indica si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.	F
Toda parábola es descrita mediante una ecuación cuadrática.	V

Pasos empleados: R. L.

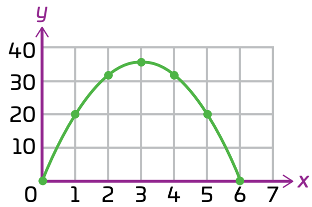
02 Anota si la gráfica o ecuación es lineal o no lineal.



No lineal

Lineal

Ecuación: $y = 9 - 4x$



No lineal

Pasos empleados: R. L.

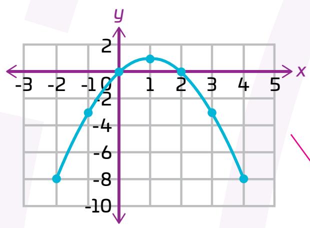
03 Une cada concepto con el valor que le corresponde, de acuerdo con la ecuación $y = x^2 - 6x + 9$.

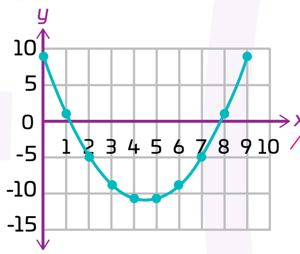
Concepto
Valor de a
Valor de b
Valor de c
Coordenada de x en el vértice
Coordenada de y en el vértice
Vértice
La parábola abre hacia

Valores
-6
arriba
1
3
(3,0)
abajo
0
9

Pasos empleados: R. L.

04 Une con una línea, cada gráfica con su ecuación.





$y = x^2 - 9x + 9$

$y = -x^2 + 2x$

Pasos empleados: R. L.

Cada dos pasos empleados equivalen a un punto. Tienes buen nivel si hiciste pocos puntos.

Puntaje: R. L.

¿Qué ventajas y desventajas tiene el que requieras menos o más pasos que los demás? Discútelo con la clase. ¿Qué reconocimiento darías al que menos puntos hizo? ¿Necesariamente está mal quien hizo más puntos?

APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección ANALIZO, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.
R. L.

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R. L.

¡Regresa a la página 97 y soluciona las dudas que tenías en ese momento! 😀