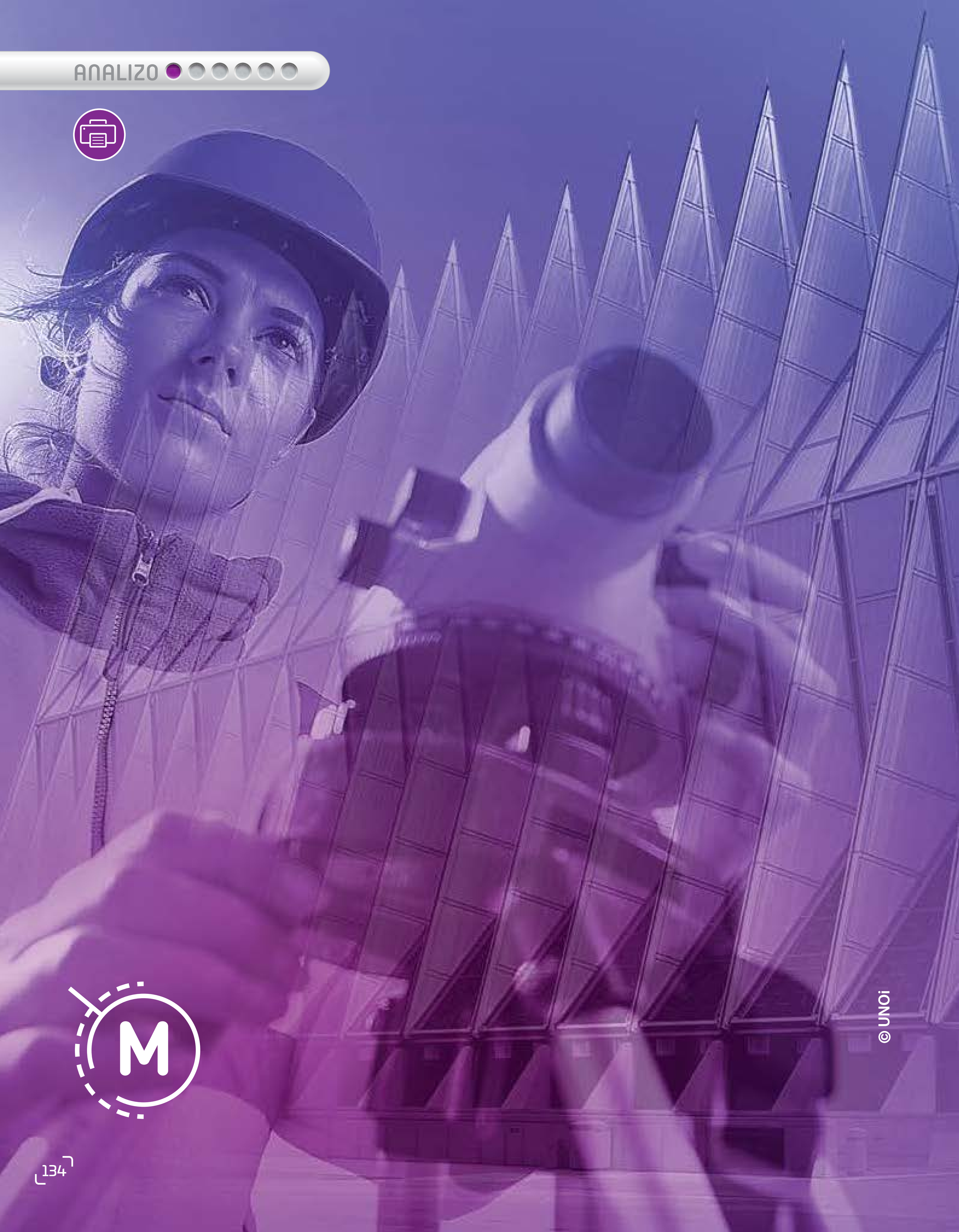


Esfera 7

¿Y quién es ese señor Pitágoras?

¿Un teorema es algo muy serio?

¿Todo en Matemáticas es exacto y preciso?

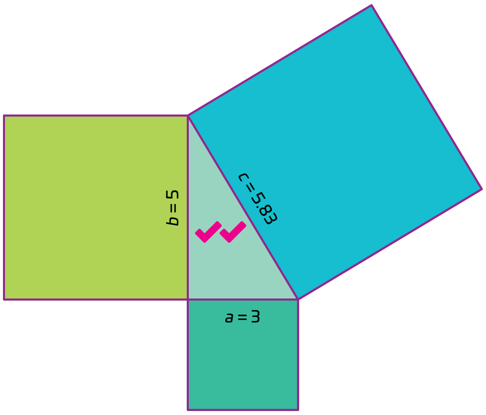
¡A construir un teorema!

Deduce y justifica el teorema de Pitágoras.

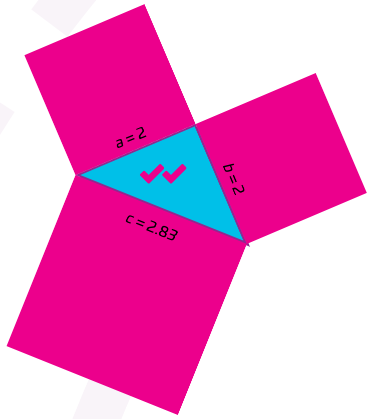
RECONOZCO

Comienza la Esfera de Exploración identificando qué actividades puedes responder con base en lo que ya sabes. No olvides responderlas de nuevo en tu cuaderno al terminar. ¡Así descubrirás cuánto has avanzado!

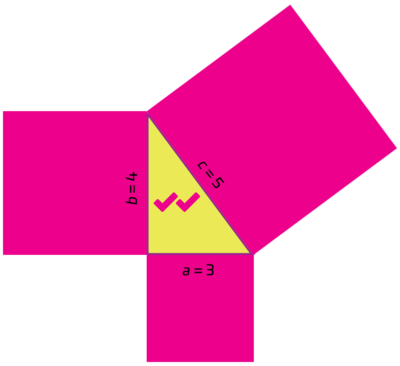
01 **Construye cuadrados en los lados de los triángulos y anota su área en la tabla, siguiendo el ejemplo. Usa *c* como la medida del lado mayor.** +5



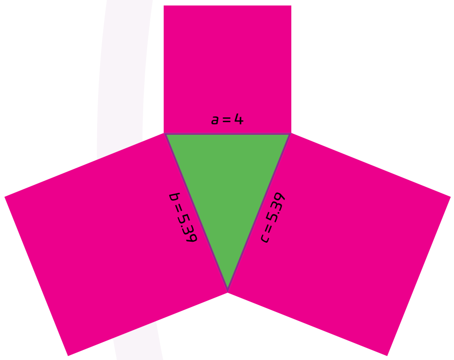
Área	Valor
a^2	9
b^2	25
c^2	33.9889



Área	Valor
a^2	4
b^2	4
c^2	8.0089



Área	Valor
a^2	9
b^2	16
c^2	25



Área	Valor
a^2	16
b^2	29.0521
c^2	29.0521

1.1 Dibuja una ✓ dentro de los triángulos rectángulos y marca otra ✓ si hay un único lado mayor en ellos.

02 **Completa la tabla utilizando los símbolos de las operaciones básicas (+,-,×,÷), los signos /,= o ›, y el valor de los cuadrados de la página anterior.** +5

Triángulo	Cuadrado del lado menor	Símbolo de operación	Cuadrado del lado intermedio	Signo	Cuadrado del lado mayor
Ejemplo	9	+	25	≈	33.9889
Azul	4	+	4	≈	8.0089
Amarillo	9	+	16	=	25
Verde	16	+	29.0521	≠	29.0521

2.1 Discute con dos compañeros cómo obtendrían el valor de un lado de los triángulos que sí cumplieron con la igualdad, exacta o aproximadamente, conociendo los otros dos lados. Anota las conclusiones.

R. M. El teorema de Pitágoras permite calcular la medida de un lado, conociendo los otros dos, sin necesidad de conocer previamente los ángulos internos del triángulo.

2.2 Conversa con tus compañeros acerca de la importancia de distinguir entre valor exacto y valor aproximado. Pueden usar ejemplos de la vida cotidiana y anota las conclusiones.

R. M. Es importante distinguir uno de otro porque, por ejemplo, si debo pagar el recibo de un servicio por un cargo exacto de 100.50 pesos, pero redondeo y pago solamente 100, esto me puede acarrear deudas y recargos.

Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

	Antes de la Esfera de Exploración		Al terminar la Esfera de Exploración	
	Sí	No	Sí	No
1. Establezco las relaciones entre los cuadrados que se forman sobre los lados de diversos triángulos, en particular sobre los triángulos rectángulos.				
2. Deduzco el teorema de Pitágoras.				
Puntos obtenidos:				

INVESTIGO

Aprendizaje esperado

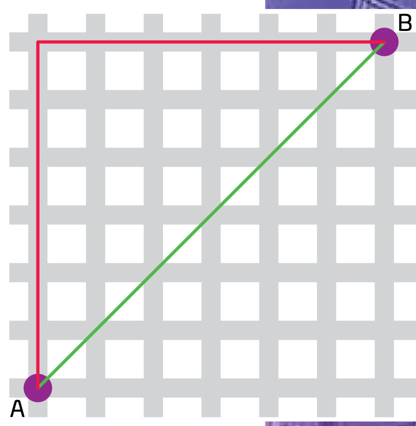
› Deduce y justifica el teorema de Pitágoras.

Keys

- Relaciones en los lados de los triángulos rectángulos
- Deducción del teorema de Pitágoras

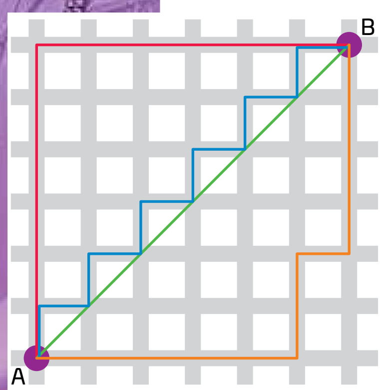
Se dice que $E = mc^2$, ecuación de la energía de Einstein, es la ecuación más famosa en la historia de la ciencia, ¿pero sabías que muy cerca de ella, en el *top ten* de la fama científica, está $a^2 + b^2 = c^2$? Sí, la ecuación del teorema de Pitágoras. En tu clasificación personal de expresiones científicas, ¿en qué lugar las ubicarías?

Desde mi punto de vista, su importancia y fama tienen la misma razón: nos dicen algo muy profundo acerca de cómo es nuestro universo. La ecuación de Einstein indica la existencia de una equivalencia entre la energía E que puede contener un cuerpo y su masa m, de manera que la masa puede convertirse en energía, y viceversa. Por su parte, el teorema de Pitágoras es la pieza clave para construir la geometría euclidiana y elaborar otras geometrías; y esto es así porque sirve para calcular la distancia entre dos puntos.



Veamos esto último con más calma. Considera que en la figura adyacente el entramado de líneas grises representa las calles de una ciudad y las zonas blancas son las cuadras, cubiertas de casas y edificios. Como la ciudad tiene un excelente trazo, todas las cuadras miden lo mismo y forman cuadrados perfectos (si vives o has estado en la ciudad de Puebla, México, tendrás una clara idea de calles perfectamente perpendiculares y a distancias iguales, aunque en su caso las cuadras son rectangulares). Entonces, si deseamos saber cuál es la distancia que separa al punto A del B, ambos sobre el cruce de dos calles, debemos calcular la longitud del segmento rectilíneo verde que los une. Al dibujar los segmentos mostrados en rojo podemos notar que estos forman un triángulo rectángulo con el segmento verde, así que el teorema de Pitágoras nos permite calcular la longitud del segmento verde, es decir, la hipotenusa del triángulo, midiendo primero los segmentos rojos. Esta longitud es la **distancia euclidiana entre A y B**.

De este modo el teorema de Pitágoras sirve para calcular distancias sobre el plano y es el elemento básico de la geometría plana, porque al contar con un modo de calcular la distancia entre dos puntos podemos también determinar perímetros y áreas. Una vez comprendido esto, ya podemos pensar en generalizaciones. Es decir, ¿cómo surgen las otras geometrías?



Volvamos a las calles. Ciertamente, con el teorema de Pitágoras puede calcularse la distancia entre A y B en el plano de la ciudad, pero ¿nos da la **distancia efectiva**? Es decir, si abordamos un taxi y realizamos el viaje de A a B, ¿la longitud recorrida por el taxi coincidirá efectivamente con la distancia que indica el teorema de Pitágoras? La respuesta es no, porque los edificios impiden el viaje en diagonal, lo cual obliga al taxi a moverse sobre las calles y, en ellas, puede seguir muchas trayectorias, como las mostradas en color azul, anaranjado e incluso sobre la línea roja (los catetos del triángulo anterior). Calcula las longitudes de esas líneas (imagina que cada cuadra mide una unidad de longitud, para simplificar), notarás que las tres trayectorias ¡tienen la misma longitud! De hecho, es la mínima longitud capaz de lograrse viajando sobre las calles de la línea roja. Esta longitud mínima (no la trayectoria única de la geometría euclidiana) es la *distancia Manhattan*, y es la base para una geometría conocida como la *geometría del taxista*.

Para resolver algunos problemas importantes de ingeniería y logística en las ciudades, suele ser más útil usar la geometría del taxista que la euclidiana, porque sus medidas corresponden mejor a los desplazamientos que se pueden efectuar en la ciudad.

Más allá de lo práctico, existen otras geometrías y actualmente los físicos no saben exactamente cuál de ellas describe mejor a todo nuestro universo. Interesante, ¿no? Lo notable es que la construcción de estas otras geometrías se logró tras comprender mejor las implicaciones del teorema de Pitágoras, luego de estudiarlo durante dos milenios. De allí su justa fama.

Ricardo Medel Esquivel

Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer, reflexiona sobre ello y realiza lo siguiente.

Dibuja un mapa de la zona que comprende tu casa y escuela. Usa todo el espacio disponible y considera que lo más importante es que las distancias guarden la escala y proporción adecuada respecto a la realidad, así que consulta un mapa impreso o apóyate en una aplicación para que logres un buen dibujo. R. L.

Ahora, estima cuál sería la distancia de tu casa a la escuela mediante el teorema de Pitágoras. Luego, usa la geometría del taxista para estimar dos trayectorias que sean la distancia Manhattan entre tu casa y escuela. Anota tus resultados, sin olvidar anotar las unidades de medida. R. L.

Investiga por qué se le llama distancia Manhattan y coméntalo con tus compañeros, muéstrales también tu dibujo y las estimaciones que hiciste en él.

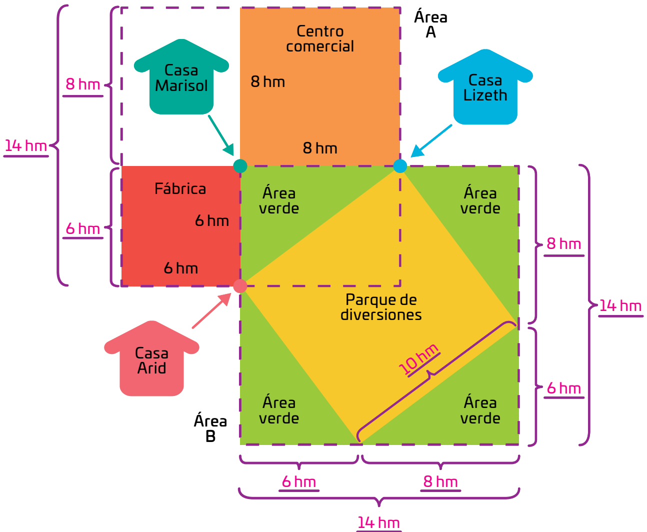
¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, escríbelo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución.

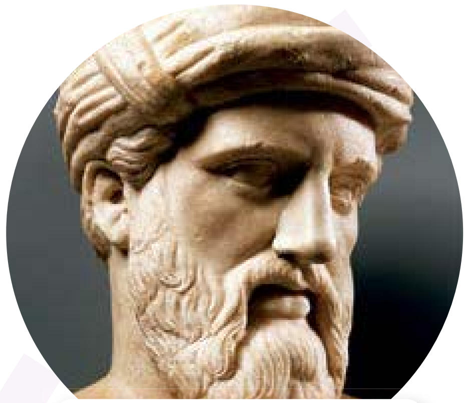
R. L.

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 Usa el esquema y la información para responder las preguntas sobre la región donde viven Marisol, Lizeth y Arid. R. M.

- Las áreas verdes están en triángulos rectángulos perfectos y son iguales.
- Las áreas designadas como A y B, indicadas en líneas punteadas, forman cuadrados exactos.
- También están en cuadrados perfectos el centro comercial, la fábrica y el parque de diversiones.





En la escuela fundada por Pitágoras, además de matemáticas se estudiaba también medicina, cosmología, ética y política.

Escribe las medidas que faltan en el esquema, en los lugares señalados. Sigue las indicaciones:

- Anota las medidas solicitadas en los cuadrados y en los lados de los triángulos que forman las áreas verdes.
- A continuación, calcula y anota la longitud de un lado del cuadrado que ocupa el parque de diversiones.
- Discute con tus compañeros lo que pasaría si las medidas del esquema no indicaran cuadrados perfectos o que los triángulos no fueran rectángulos exactos, pero casi lo fueran. ¿Aún así serviría el teorema de Pitágoras para analizar la situación y completar el esquema? Ejemplifiquen hasta qué punto sería aún útil el esquema.

- El área verde que tiene cuadrados en las regiones contiguas a sus lados, ¿cumple con el teorema de Pitágoras? Explica.

Sí cumple con el teorema de Pitágoras, porque el triángulo es rectángulo y puede comprobarse que $6^2 + 8^2 = 10^2$.

- De esa área verde, ¿el teorema de Pitágoras permite calcular el valor del área que ocupa, conociendo las áreas cuadradas contiguas? Argumenta tu respuesta.

No, el teorema de Pitágoras no indica qué relación tiene el área del triángulo con los cuadrados que se forman en sus lados.

- ¿Qué área es mayor, la que ocupa el parque de diversiones o la ocupada por la fábrica y el centro comercial juntos?

El área sumada de la fábrica con el centro comercial es igual al área ocupada por el parque de diversiones.

- ¿Qué medidas de los lados necesitarías conocer para averiguar si el parque de diversiones ocupa igual área que todas las áreas verdes juntas? Discute tus ideas con un compañero y anótalas.

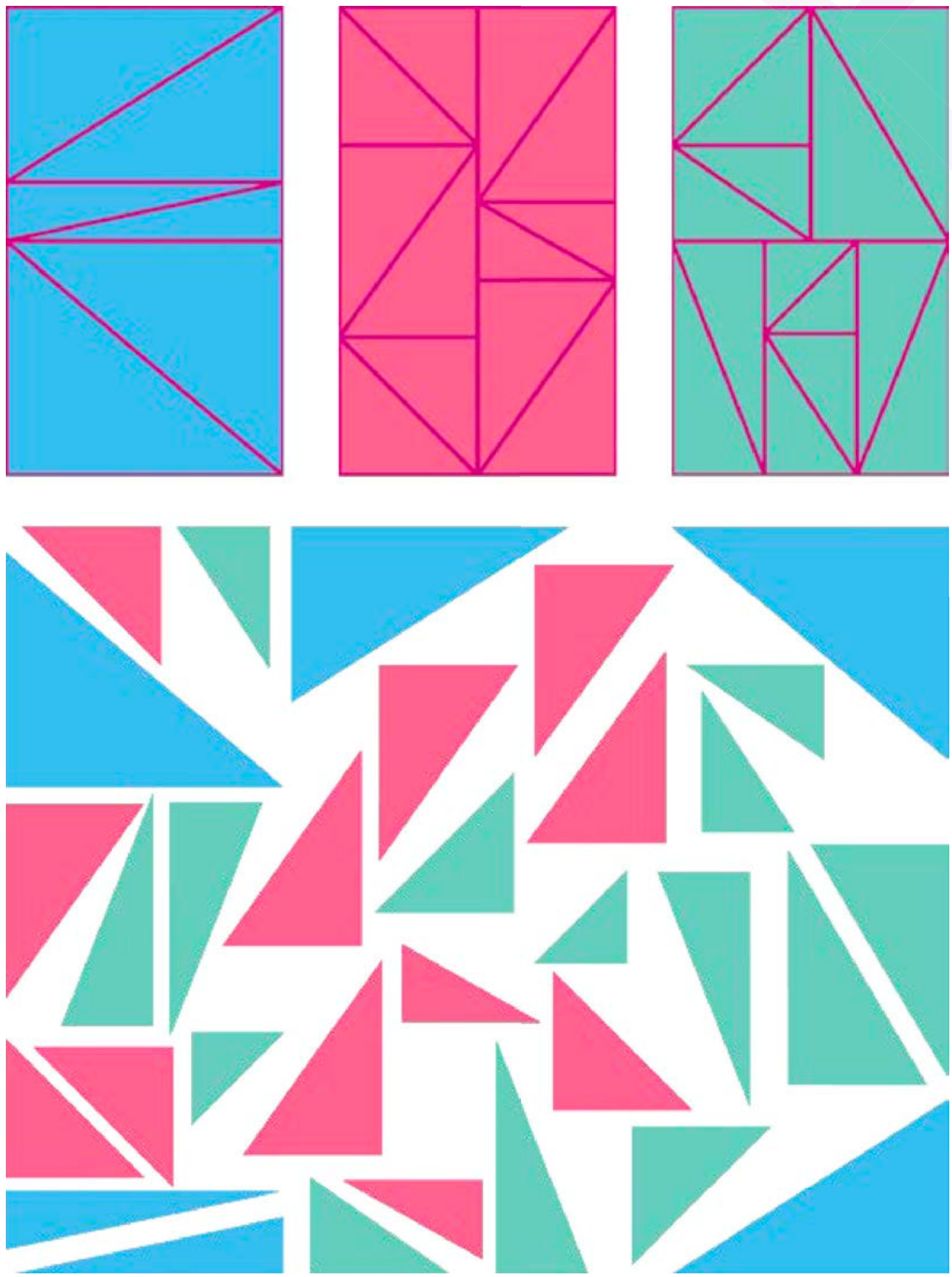
Para el área del parque de diversiones solo necesito conocer la medida de uno de sus lados. De las áreas verdes ya se puede calcular la superficie que ocupan.

02 Haz lo que se pide.

› Imagina que los rectángulos siguientes son puertas, y que al abrirlas se obtiene un premio. Para abrirlas, tendrás que localizar los triángulos rectángulos que forman cada puerta.

› Copia y recorta en cartulina los triángulos sueltos para que ensambles tus puertas y logres abrirlas. ¡Ve por los premios cuidando lo que mides y recortas! Pista: Los triángulos para cada puerta son del mismo color.

Premio 1 **Premio 2** **Premio 3**



03 **Lee con atención y realiza lo indicado.**

Al grupo de tres números naturales con los que puede dibujarse perfectamente un triángulo rectángulo se le llama terna pitagórica. La terna {3, 4, 5} puede considerarse la primera, por tener los números de menor valor, y se comprueba mediante la aplicación de la ecuación que se obtiene con el teorema de Pitágoras, es decir:

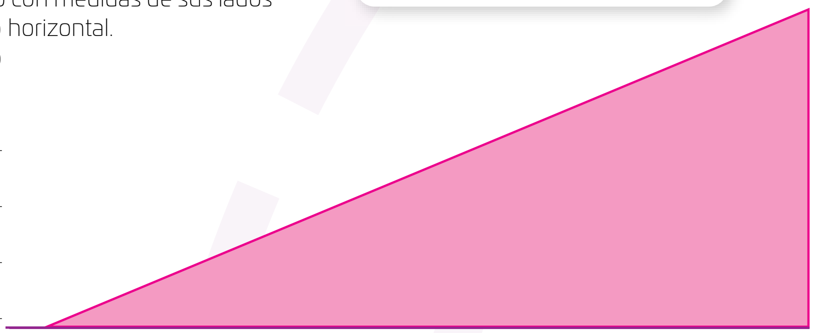
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Otra terna pitagórica es {5, 12, 13}. Para generar estas ternas existen varios métodos y Euclides, cerca del año 300 a.n.e., demostró que son infinitas. Por cierto, los múltiplos de una terna pitagórica también lo son; por ejemplo {6, 8, 10}, está formada por múltiplos (usando el mismo factor) de la primera terna pitagórica mencionada.

La tablilla Plimpton 322, que data del año 1800 a.n.e y fue elaborada por babilonios, contiene varias ternas pitagóricas.

- Dibuja en el espacio disponible un triángulo con medidas de sus lados los valores {5, 12, 13}. Usa la línea para un lado horizontal.
- Trata de construir con esos valores un triángulo que no sea rectángulo. Anota tus conclusiones.

R. L.



Espacio procedimental

¿Cómo creo una terna pitagórica?

1. Elijo un par de números naturales que serán p y q, donde $p > q$, por ejemplo $p = 6$ y $q = 1$.
2. Utilizo la fórmula $a = p^2 - q^2$ para identificar uno de los lados del triángulo. En nuestro caso:

$$a = (6)^2 - (1)^2 = 35$$

3. Uso la ecuación $b = 2pq$ para calcular la medida del otro lado:

$$b = 2(6)(1) = 12$$

4. Finalmente, haciendo $c = p^2 + q^2$, obtengo el valor del tercer lado:

$$c = (6)^2 + (1)^2 = 37$$

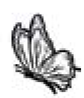
Los números así obtenidos cumplen con lo que dice el teorema de Pitágoras:

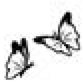
$$35^2 + 12^2 = 37^2$$

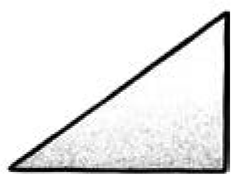
04 **Usa el procedimiento descrito para calcular las ternas pitagóricas con los datos propuestos.**

Terna	Valores para iniciar el desarrollo		
	$p = 5$ y $q = 2$	$p = 8$ y $q = 3$	$p = 7$ y $q = 6$
a	21	55	13
b	20	48	84
c	29	73	85

DIBUJA UNA TERNA IMPORTANTE EN TU VIDA.







Espacio experimental

¿De qué depende la exactitud al medir?

Propósito

En este **Espacio experimental** comprobarás, con la construcción de espirales de Teodoro, que la escala, la unidad de medida y los instrumentos empleados son elementos determinantes en las mediciones de longitud.

Lee lo que te proponemos hacer y escribe qué resultado crees que obtendrás.

R. L.

Materiales

- Cartulinas de colores
- Estuche geométrico
- Cinta adhesiva
- Calculadora

Considera que...

- lo mejor es trabajar con un compañero para hacer juntos el trazado y corte de las piezas, pero también para compartir materiales.
- la regla puede sustituirse por un flexómetro.

Procedimiento

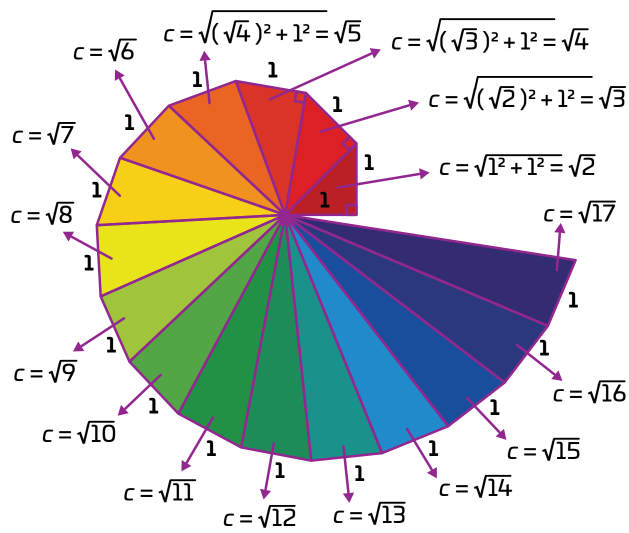
Paso 1. Considera que realizarás dos espirales de Teodoro: la primera, usando centímetros para los valores indicados en la figura; en tu segunda construcción, usarás esas mismas medidas, pero con un factor de 10, es decir, una unidad en la figura serán 10 cm.

Paso 2. Usa tu calculadora para aproximar los valores de la figura, puedes anotarlos debajo o arriba para que no los pierdas de vista.

Paso 3. Reproduce cada triángulo rectángulo de la figura en trozos de cartulina de distinto color. Tip: primero recorta rectángulos cuyos lados sean los lados menores de los triángulos, así tendrás dos piezas iguales y una se la puedes compartir a tu compañero.

Paso 4. Pega las piezas con sumo cuidado porque, además de las mediciones y cortes, de esto también depende la exactitud de tu construcción.

Paso 5. Registra en la tabla los errores más importantes que cometiste al construir tus espirales de Teodoro. R. L.



Espiral que inicia con un triángulo de lados de...	Errores cometidos
1 cm	
10 cm	

Compara tus resultados con la predicción que hiciste al principio y anota una conclusión.

R. L.

El teorema de Pitágoras en 3D

Al construir teoremas o resultados de la geometría puedes hacerlos más atractivos o sorprendentes. En esta **Zona Maker** te proponemos elaborar una construcción que verifique el teorema de Pitágoras, pero utilizando objetos cotidianos, es decir, más allá del lápiz, papel, regla y compás. Aunque, claro, no pierdas de vista que estos elementos mencionados son básicos para diseñar tu dispositivo.

01 Decide unas medidas para un triángulo rectángulo que construirás junto con los cuadrados que se forman en sus lados. Para ello, ten en cuenta lo siguiente:

- Fabricarás cajas con la forma del triángulo (es decir, un prisma triangular) y de los cuadrados (que serán entonces prismas cuadrangulares).
- Las cajas pueden tener tapas o no, dependiendo del resto del diseño. Lo mismo se aplica para decidir de qué material serán.
- La altura de las cajas debe ser la misma.
- Usa lo que aprendiste en el **Espacio experimental** anterior para realizar con cuidado las mediciones y cortes necesarios.

02 Considera lo siguiente para elegir los materiales con los que elaborarás tus cajas y el tamaño que tendrán.

- Rellenarás las cajas (por completo o a una altura que elijas) con algún elemento que puede ir desde agua hasta pelotas pequeñas (como canicas o un poco más grandes), pasando por arena y semillas o granos, por ejemplo.
- Lo que debe verificarse es que estos objetos ocupan por completo la caja mayor o exactamente el mismo espacio si se distribuyen en las dos cajas de menor tamaño.

03 Haz los cálculos necesarios, decidiendo primero el tamaño que tendrá el triángulo del que saldrán las medidas de las bases de las cajas. Usa la figura de esta página para indicar cuáles son esas medidas. Aquí anota la altura que tendrán las cajas, el material y demás datos relevantes.

R. L.

04 Describe a qué problemas te enfrentaste para lograr una construcción precisa y que, siendo así, muestra lo que implica el teorema de Pitágoras. También anota qué detalles surgieron durante la construcción y que no habías contemplado (como rigidez de los materiales, por ejemplo).

R. L.

05 **Presenta tu dispositivo a distintas personas, pueden ser tus mismos compañeros, profesores y familiares, para saber si comprenden su funcionamiento. Para ello, realiza lo siguiente.**

› Anota una descripción (que leerás o usarás de referencia) para presentarles tu dispositivo.

R. L.

› Elabora una breve encuesta para aplicarla después de que las personas vean tu dispositivo funcionando. Revisa estos ejemplos de preguntas (procura que sean al menos cinco). Puedes comenzar con un "Ahora..."

¿Comprendes de qué trata el teorema de Pitágoras? Sí / No
¿Imaginas algún uso del teorema en la vida cotidiana? Sí / No
¿Has visto alguna construcción parecida a esta? Sí / No

› Registra las respuestas en tu cuaderno y guárdalas porque las usarás en un trimestre posterior. Puedes iniciar los registros en la tabla. R. L.

Nombre	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5

› Discute con tu grupo si los dispositivos ayudaron a que las personas comprendieran el teorema de Pitágoras. Anota tus conclusiones.

R. L.

› Comenten qué dispositivos funcionaron mejor para explicar el teorema y por qué fue así. Describan el dispositivo que más les haya gustado.

R. L.

AGENDA UNOi HACIA EL FUTURO

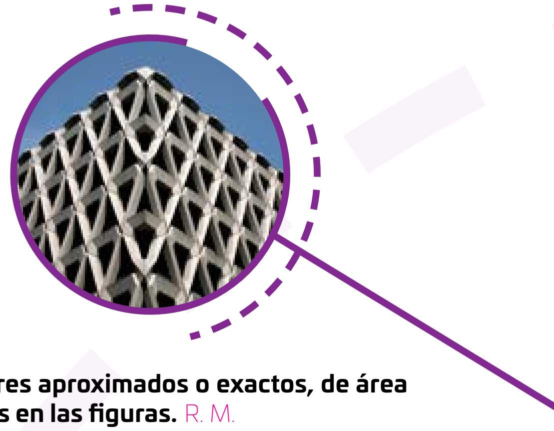
ENERGÍA

¿Cómo usarías las **puertas de las casas para ayudar a resolver los retos de energía** del futuro? Una posible respuesta sería: aplicándoles geometría.

Hace más de 20 años, **Klemens Torggler** diseñó una puerta metálica con paneles triangulares, la ***drehplattentür***. Esta puerta, además de **combinar diseño y funcionalidad**, aprovecha al máximo la **cinética**, así que para abrirla o cerrarla basta un pequeño toque para que los **paneles triangulares se muevan y formen una puerta convencional**, lo que en términos matemáticos sería una **comprobación pitagórica en movimiento**.

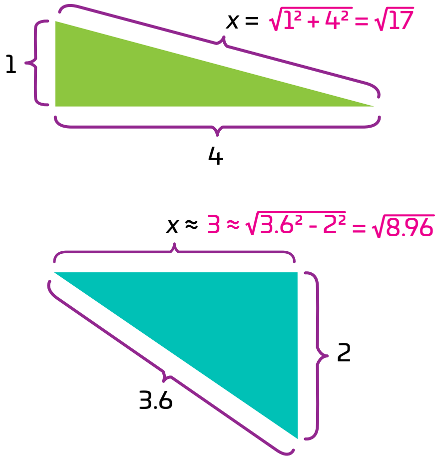
Siguiendo esta idea, hay varios **proyectos que buscan incorporar movimientos** basados en triángulos en fachadas de edificios y construcciones **para captar energía con paneles solares**, reduciendo así el consumo de electricidad. Aunque de momento esto es un mero prototipo y el diseño de Torggler sigue siendo solo **arte-objeto**, en el futuro podría convertirse en una **tendencia de diseño energético**. Imagina de qué otras formas podrían aplicarse cálculos geométricos para superar los retos del futuro.

SUBE NIVEL



¡Pon a prueba tu destreza matemática! Realiza lo que se indica, en tu cuaderno anota el procedimiento completo de solución, pero omite los pasos que para ti sean obvios y puedas hacer mentalmente.

01 Calcula y anota el valor del lado faltante.



Pasos empleados: R. L.

02 Comprueba si las siguientes ternas son pitagóricas, y pinta la casilla correspondiente.

{30, 12, 37}
Sí es | No es

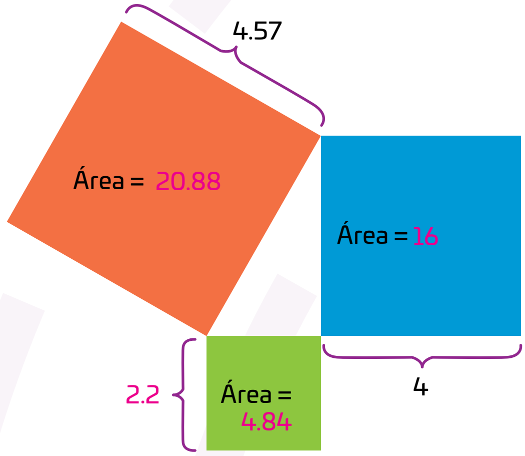
{8, 15, 16}
Sí es | No es

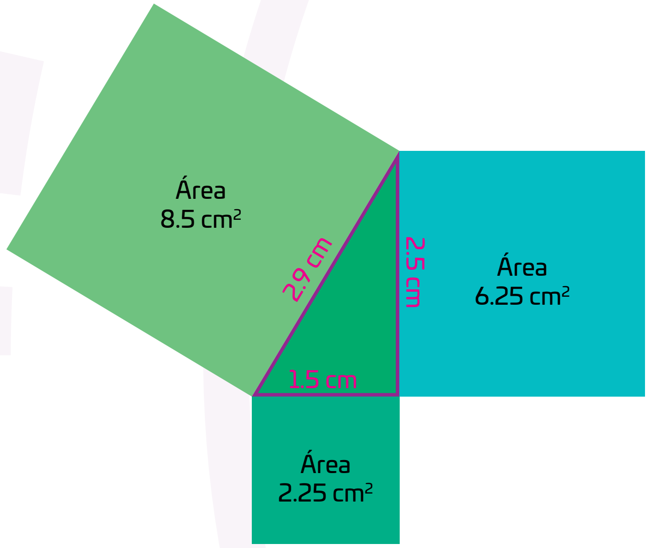
{29, 20, 21}
Sí es | No es

{41, 9, 40}
Sí es | No es

Pasos empleados: R. L.

03 Obtén los valores aproximados o exactos, de área y longitud, indicados en las figuras. R. M.





Pasos empleados: R. L.

Cada dos pasos te dan un punto.

Puntaje final: R. L.

› Compara tus resultados con dos compañeros que se sienten a tu lado, si tienes menos puntos que ellos, el reto es que revisen tus procedimientos para que verifiquen que los comprenden. ¡No dejes de ayudarles!

Reflexiona sobre las preguntas de la sección ANALIZO, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R. L.

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros! R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R. L.

¡Regresa a la página 139 y soluciona las dudas que tenías en ese momento! 😀