

Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 y 20

Sesión 1

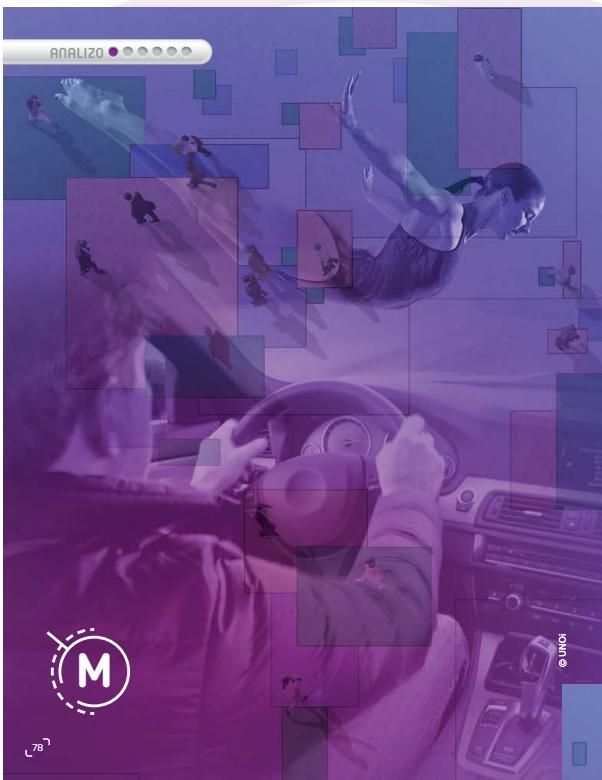
Propósito

Los estudiantes recordarán las potencias y áreas cuadradas y comenzarán a visualizar su relación con la raíz cuadrada en contextos de resolución de problemas cotidianos y exploración intuitiva.

Tip 1. En la sección **Analizo**, al presentar la pregunta sobre “cómo diseñar una escalera segura”, oriente la discusión hacia la necesidad de medidas precisas y proporciones, destacando cómo la raíz cuadrada puede surgir en cálculos reales (por ejemplo, determinar las dimensiones de un cuadrado). Esto ayudará a contextualizar el aprendizaje y despertar el interés de los estudiantes. Además, con las otras dos preguntas se espera que los estudiantes piensen en un posible algoritmo para el cálculo de raíces cuadradas y en la relación de este concepto con otros estudiados previamente.

Tip 2. En la sección **Reconozco**, **página 80**, al trabajar con las áreas de los cuadrados puede empezar a introducir el concepto de la raíz cuadrada preguntando qué harían si el dato que faltara no fuera el área sino la medida de sus lados.

Tip 3. Puede invitar a los estudiantes a construir una tabla a partir de cuadrados (lado - área) para identificar patrones y facilitar la búsqueda posterior de raíces cuadradas.



Esfera 3

- ¿Cómo se diseña una escalera segura?
- ¿Existe otro algoritmo que no sea la suma, la resta, la multiplicación y la división?
- ¿Cómo se relaciona la raíz cuadrada con el binomio al cuadrado?

Matemáticas

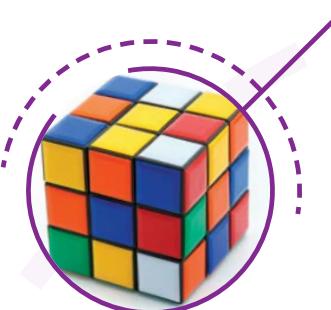
Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 y 20

RECONOZCO

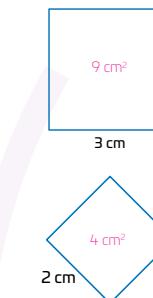
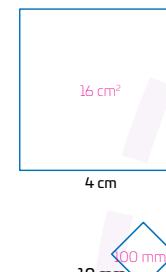
Comienza la Esfera de Exploración identificando qué actividades puedes responder con base en lo que ya sabes. No olvides resolverlas de nuevo en tu cuaderno al terminar. ¡Así descubrirás cuánto has avanzado!

01 Escribe los cuadrados de los siguientes números.

$$\begin{array}{lll} 1^2 = \underline{1} & 4^2 = \underline{16} & 7^2 = \underline{49} \\ 2^2 = \underline{4} & 5^2 = \underline{25} & 9^2 = \underline{81} \\ 3^2 = \underline{9} & 6^2 = \underline{36} & 10^2 = \underline{100} \end{array}$$



1.1 Dentro de cada cuadro, escribe la medida de su área.



02 Responde lo que se te pide.

¿Cuál es el número que, al multiplicarse por sí mismo, da 25?

5

¿Qué relación hay entre el número 7 y el 49?

El 49 es el cuadrado del 7.

Observa la figura de la derecha. ¿Cuántos puntos hay en total?

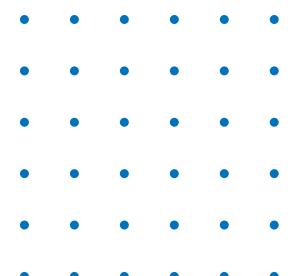
36

¿Cuántos puntos tiene cada lado?

6

¿Puedes representar esa relación con una expresión matemática?

R. M. Si, $36 = 6 \times 6$.



Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 y 20

Sesión 2

Propósito

Los estudiantes fortalecerán su comprensión de los cuadrados perfectos y su relación con las raíces cuadradas, desarrollando estrategias a partir de conocimientos previos para estimar raíces de números que son cuadrados perfectos. Además, mediante su indagación en los **Keys**, obtendrán los conceptos fundamentales para el desarrollo de la **Esfera de Exploración**.

Tip 1. Mientras los estudiantes unen números con sus cuadrados, observe sus errores y patrones (por ejemplo, confundir 7^2 con 42). Pueden discutir estos errores en grupo para reforzar la comprensión.

Tip 2. Algunos estudiantes tienden a confundir n^2 con $2n$. Puede pedirles que siempre formulen la definición verbalmente: el cuadrado de un número es ese número multiplicado por sí mismo.

Tip 3. Cuando se pregunte por el cuadrado más cercano a un número dado (por ejemplo, 90), guíe a los estudiantes a pensar qué cuadrados enteros (81 y 100) están próximos y cuál está más cerca. Enfatice el valor de la estimación como una habilidad útil cuando no hay resultados exactos.

Tip 4. Cuando estudien los **Keys** correspondientes, muestre ejemplos adicionales en el pizarrón. Además, señale que a pesar de las diferencias en los métodos para aproximar la raíz cuadrada, todos sirven funcionan para los cálculos y es necesario identificar cuál procedimiento es mejor de acuerdo al caso o problema que se tiene que solucionar.

2.1 Si el área de un cuadrado es 121 unidades cuadradas, ¿cuánto mide cada lado? Explica tu razonamiento.

R. M. Cada lado mide 11 unidades, porque al elevar 11 al cuadrado da 121.

2.2 Escribe el procedimiento que seguirías para encontrar la medida de cada lado de un cuadrado si el área es de 125 unidades cuadradas.

R. L.

03 Responde las preguntas. +4

¿Hay algún número entero que multiplicado por sí mismo dé 50? Explica tu razonamiento.

R. M. No, porque 7 al cuadrado es 49 y 8 al cuadrado es 64. Así que debe ser un número entre 7 y 8; por lo que no hay un número entero.

¿Qué dos cuadrados perfectos están más cerca de 30? 25 y 36

¿Cuál es el cuadrado de un número entero más cercano a 90? 81

Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo.

- Identifico el cuadrado perfecto de un número entero utilizando representaciones numéricas y geométricas.
- Determino la raíz cuadrada de un número.
- Aproximo la raíz de un entero que no es cuadrado perfecto.

Antes de la Esfera de Exploración

Sí No

Al terminar la Esfera de Exploración

Sí No

Puntos obtenidos:

INVESTIGO ● ● ● ● ●

= $\sqrt{5}$

Aprendizaje esperado
Resuelve problemas de raíz cuadrada y aproximación de raíces.

Keys
Cuadrados y raíz cuadrada
Aproximación de la raíz cuadrada



Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 y 20

Sesión 3

Propósito

En la sección **Comprendo**, los estudiantes conocerán el uso de los cuadrados perfectos en un contexto real y cercano como lo es un juego muy popular que seguro lo han jugado o alguien muy cercano lo ha jugado. Además, los estudiantes comprenderán una relación importante de los cuadrados perfectos que en adelante puede serles muy útil.

Tip 1. Antes de la lectura, puede preguntar a los estudiantes si con solo mirar las imágenes saben de qué juego se habla en la sección **Comprendo**, página 82, y si ellos lo han jugado o conocen a alguien que lo juegue. También puede preguntar a los que lo han jugado qué tipo de construcciones han hecho y qué tipo de materiales han usado, esto con la intención de introducir a los estudiantes en el contexto, motivarlos y que expresen sus inquietudes sobre el juego.

Tip 2. Puede solicitar a los estudiantes que intenten determinar el valor por el que algunos números adicionales que no se encuentren en la sección son un cuadrado perfecto, estos pueden ir desde números sencillos hasta más complejos, como por ejemplo: 121, 144, 225, 441, 1 089, 2 500, etcétera.

Tip 3. Pida a los estudiantes que después de responder las actividades de la **página 83** expongan sus conclusiones y sus dudas. Con esta información se puede profundizar en esos aspectos a lo largo del resto de la **Esfera**.

COMPRENDO

Mucho antes de que se creara un popular juego relacionado con pequeños cubos apilados, demandaba la clase de los nobles y burgueses de Europa que los constructores perfeccionaran las casas para estos bloques. Es decir, números que obtenemos multiplicando un número entero por sí mismo. Por ejemplo, este bloque de color café y verde visto desde la parte superior se puede ver como un cuadrado perfecto $5 \times 5 = 25$, compuesto por 25 bloques cuadrados ordenados en una configuración de 5 por 5. Lo mismo ocurre si vemos la figura desde cualquiera de sus caras.

Si se desea construir una superficie cuadrada compuesta por este bloque básico, es suficiente con añadir más de estos cubos de manera ordenada. Y así, es posible construir desde prados planos hasta castillos medievales. Considerando las regulaciones de figuras formadas por cuadrados perfectos.

¿Cuántos cuadrados hay en una superficie cuadrada formada por 35 cuadrados de lado? Puedes sacar tu calculadora, pero también puedes realizar el cálculo de la siguiente manera: $35^2 = (30 + 5)^2 = 30^2 + (2 \times 30 \times 5) + 5^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$. Incluso es posible aplicar esta misma estrategia para calcular la diferencia de dos cuadrados: $36^2 - (30 - 4)^2 = 1600 - (2 \times 4 \times 4) + 16 = 1296$. ¿Cómo saber si un número es cuadrado perfecto?

Es muy sencillo encontrar un número cuadrado perfecto a partir de cualquier número entero. Por ejemplo, $9^2 = 9 \times 9 = 81$, de este modo 81 es un número cuadrado perfecto. En el sentido inverso, dado un número, para saber si se trata de un cuadrado perfecto es necesario obtener la raíz cuadrada de tal número. Hagamos una construcción más. Del cuadrado de lado 5 obtenemos el cuadrado perfecto $5^2 = 25$. El número 25 podemos descomponerlo en otros dos números cuadrados perfectos:

$$25 = 16 + 9 = 4^2 + 3^2$$

Podemos entender a la potencia y a la raíz como operaciones inversas. Si elevas un número al cuadrado y lo elevas un número al三次方, sacar la raíz, regresas al cuadrado original: $4^2 = 16$

Si multiplicas por 2 (o por cualquier otro número n) a cada uno de los números que generan un cuadrado perfecto, tendrás como resultado que la suma de los cuadrados perfectos generan otro cuadrado perfecto. Tomemos a los cuadrados perfectos de los números anteriores (5, 4 y 3) y multiplicaremos cada uno por 2:

$$\begin{aligned} 5 \times 2 &= 10 \quad 10 \times 10 = 10^2 = 100 \\ 4 \times 2 &= 8 \quad 8 \times 8 = 8^2 = 64 \\ 3 \times 2 &= 6 \quad 6 \times 6 = 6^2 = 36 \end{aligned}$$

Hagamos la suma de los cuadrados perfectos correspondientes:

$$10^2 + 8^2 + 6^2 = 100 + 64 + 36 = 200$$

Lo mismo sucederá si multiplicas, incluso por 11, $44^2 + 33^2 = 55^2$. Comprueba las operaciones. Esta relación entre los números cuadrados perfectos en el futuro te será muy útil.

En el juego que hemos mencionado, una disposición como la siguiente tiene como base para la construcción de sus caras delantera y trasera un cuadrado perfecto de $9^2 = 81$ bloques. Existen otros cuadrados perfectos útiles para su construcción. ¿Cuáles identificas?

Guadalupe Simón

Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer y representa tus conclusiones. Dibuja, resume, pega, ciò que quieras!

Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, anótalo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución.

83

Sesión 4

Propósito

Los estudiantes relacionarán los cuadrados perfectos y sus raíces cuadradas, reconociendo su relación a través de ejercicios numéricos y geométricos, acotarán la raíz cuadrada de un número entre dos valores enteros consecutivos y conocerán un método algebraico propuesto por Perelman para aproximar raíces cuadradas cuando no son exactas, ampliando sus estrategias de resolución de problemas.

Tip 1. Al trabajar con áreas, en la **actividad 01**, página 84, de la sección **Práctico**, insista en que la raíz cuadrada responde a la pregunta “¿cuánto mide el lado de este cuadrado?”. Algunos alumnos pueden confundir aún las fórmulas de área y perímetro, explíquelas y señale las diferencias de ambos conceptos.

Tip 2. La **actividad 02**, página 85, se puede resolver por prueba y error realizando aproximaciones sucesivas. Remarque el hecho de que si se tiene un número mayor que otro, y ambos son positivos, entonces su cuadrado también es mayor que el cuadrado del otro número. Además, pida a los estudiantes verificar sus multiplicaciones para evitar errores.

Tip 3. Destaque en la **actividad 04**, página 85, la importancia de reconocer patrones en los cuadrados perfectos para agilizar el cálculo de raíces aproximadas. Proponga ampliar la tabla de la **actividad 03** y que esta sirva como herramienta de consulta rápida durante toda la **Esfera**.

PRACTICO

01 Reúnanse en parejas, hagan lo que se pide y respondan.

Escriban el cuadrado de cada número.

$3^2 =$	9	$11^2 =$	121	$19^2 =$	361	$77^2 =$	5929
$6^2 =$	36	$15^2 =$	225	$22^2 =$	484	$88^2 =$	7744
$4^2 =$	16	$13^2 =$	169	$60^2 =$	3600	$99^2 =$	9801

En cada caso, escriban el número que, al multiplicarse por sí mismo, da como resultado el número mostrado.

$100 =$	10	\times	10	$344 =$	12	\times	12	$49 =$	7	\times	7
$36 =$	6	\times	6	$4 =$	2	\times	2	$81 =$	9	\times	9
$16 =$	4	\times	4	$1 =$	1	\times	1	$196 =$	14	\times	14

Rodea en un círculo números que sean cuadrados perfectos.

49	164	144	81	99	121	93	124
73	24	65	52	11	25	95	191
169							

A partir del área de cada cuadrado determina cuánto miden sus lados.



Escribe las estrategias que seguires para encontrar los lados de cada cuadrado. R. L.



02 Dibuja un cuadrado cuya área sea de 5625 unidades cuadradas.

¿Cuánto mide de cada lado del cuadrado? ¿Qué procedimiento seguire?

75 unidades. R. L.

Dibuja un cuadrado cuya área sea de 5625 unidades cuadradas.

¿Qué relación hay entre la raíz cuadrada y el cuadrado de un número positivo?

R. M. Se pueden considerar operaciones inversas para los números positivos.

03 Completa la tabla.

a	22	29	31	35	43	47	54	59
a^2	484	841	961	1225	1849	2209	2916	3481

04 Entre qué números se encuentra la raíz cuadrada de:

130	Entre	11	y	12	673	Entre	25	y	26
280	Entre	16	y	17	1011	Entre	31	y	32
522	Entre	22	y	23					

Reúnanse en equipos y comparan las estrategias que utilizaron para responder los ejercicios 3 y 4, si son diferentes, describan la que les es más sencilla.

R. L.

Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 y 20

Sesión 4

Tip 4. Después de que hayan analizado el **Espacio procedimental**, **página 86**, presente otro ejemplo simple, como aproximar la raíz cuadrada de 200, mostrando el proceso paso a paso. Use colores o diagramas para que los estudiantes identifiquen cada parte de la estrategia algebraica. Aclare que **se trata de una aproximación**, no siempre es un resultado exacto.

Tip 5. Si al resolver la **actividad 05, página 86**, se equivocan al acotar la raíz de 50 entre dos enteros, señale que los enteros que buscan deben ser consecutivos y el cuadrado de uno será menor que 50 y el del otro mayor que 50.

Tip 6. Al trabajar raíces exactas y aproximadas, señale que se busca el número que multiplicado por sí mismo da el original, no la mitad del número. Muestre con un ejemplo distinto de 4 la diferencia entre la raíz cuadrada de un número y su mitad.

1 Espacio 2 procedimental 3

El método de Perelmán

¿Sabías que antes de las calculadoras, los matemáticos ya sabían calcular raíces cuadradas?

Los antiguos babilonios (hace más de 4 000 años) desarrollaron un método ingenioso que aún usamos en la actualidad.

Sin embargo, a lo largo de la historia se han estudiado procedimientos más cortos que el algoritmo tradicional y que no requieren calculadora, por ejemplo, el de Yákov Perelmán.

Perelmán fue un divulgador de matemáticas y física que desarrolló un método bastante ingenioso.



05 Calcula la $\sqrt{50}$ por el método de Perelmán.
Síguelo paso a paso.

- 1 Encuentra dos cuadrados perfectos entre los que está el número.

$$7^2 = 49$$

$$8^2 = 64$$

Entonces $\sqrt{50}$ está entre 7 y 8, 7 es el número menor y 8 el mayor.

Sigue los pasos para calcular la $\sqrt{13}$.

- 1 Encuentra dos cuadrados perfectos entre los que está el número.

Por ejemplo, para aproximar $\sqrt{13}$, los enteros más cercanos entre los que está son 3 y 4, ya que sus cuadrados son 9 y 16 respectivamente y el 13 está entre ambos.

El 3 es el número menor y el 4 el mayor.

- 2 Calcula la diferencia del número con el cuadrado menor:

Para este caso, $13 - 9 = 4$.

- 3 Divide esa diferencia entre el doble del número menor.

El doble de 3 es 6 y $4 \div 6 = 0.6666$

- 4 Suma ese resultado al número menor.

En este caso:
 $3 + 0.6666 = 3.6666$

Por tanto, $\sqrt{13} \approx 3.66$

$$50 - 49 = 1$$

$$1 + 14 \approx 0.071$$

$$7 + 0.071 = 7.071$$

$$\sqrt{50} \approx 7.071$$

Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 y 20

Sesión 5

Propósito

Los estudiantes aplicarán distintos métodos para aproximar raíces cuadradas de números que no son cuadrados perfectos, comprendiendo la relación entre raíces exactas y aproximadas, reforzando la habilidad de estimar y calcular valores decimales con sentido numérico.

Tip 1. Oriente al alumnado para conformar los equipos de trabajo y resolver la **actividad 06, página 87**. Dé tiempo para que comenten sus respuestas, que luego comentarán ante el grupo, el objetivo de la actividad es analizar la claridad de los estudiantes al reconocer enteros en los que se encuentra una raíz para poder dar paso a la práctica y comparación de los métodos estudiados en los **Keys**.

Tip 2. Pida a la clase que repase el contenido del **Key Aproximación de la raíz cuadrada**. Complemente resolviendo las dudas y profundizando sobre los métodos para obtener raíces cuadradas tratados en el **Key**, esto les permitirá repasar los métodos y hacer sus anotaciones sobre sus características y procedimientos.

Tip 3. Al resolver la **actividad 08, página 88**, anime a los alumnos a discutir qué método les pareció más rápido, cuál más preciso y en qué situación usarían cada uno. Esto promoverá el pensamiento crítico y no solo la aplicación mecánica.

Tip 4. Aclare que una raíz cuadrada aproximada no es “incorrecta” siempre que esté dentro del rango y cercana al valor real. Destaque que en matemáticas muchas veces se requieren aproximaciones para trabajar con números irracionales o raíces no exactas.

Método	Ventajas	Desventajas
Aproximación por tanteo		
Del promedio		
Bisección		
Algoritmo clásico		
Perelman		

Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 y 20

Sesión 6

Propósito

Los estudiantes aplicarán lo aprendido sobre raíces cuadradas exactas y aproximadas para resolver problemas contextualizados, desarrollando habilidades para interpretar situaciones reales, seleccionar el método de cálculo adecuado y verificar la coherencia de sus respuestas. Además, fortalecerán su razonamiento matemático enfrentando desafíos de mayor complejidad en la sección **Sube nivel**.

Tip 1. Recuerde a los estudiantes que pueden elevar al cuadrado cada resultado para comprobar si se acerca al valor original. Este hábito les ayudará a detectar errores de cálculo o de posicionamiento decimal.

Tip 2. Pida a los alumnos que para los problemas de la **actividad 09, página 89**, expliquen si se requiere un valor exacto o basta una aproximación. Esto les ayudará a reconocer situaciones donde solo una estimación es posible o suficiente, desarrollando su criterio matemático.

Tip 3. Permita que para la sección **Sube nivel, página 90**, los estudiantes discutan en parejas o grupos pequeños distintos métodos para resolver los problemas. Al terminar, comparan procedimientos en grupo para valorar la diversidad de enfoques y no solo la respuesta final.

Tip 4. Algunos estudiantes pueden quedarse en el plano verbal del problema y no pasar a la representación matemática. Proporcione esquemas, dibujos o diagramas para visualizar la situación antes de escribir las raíces cuadradas que se necesitan calcular.

Reúnanse en equipos y resuelvan los siguientes problemas.

- El área de un terreno cuadrado es de 1300 m². ¿Cuánto mide aproximadamente cada lado? Redondea a dos cifras decimales.
- El área de una parcela cuadrada es de 72.5 m². ¿Cuánto mide aproximadamente cada lado de la parcela? Redondea a una cifra decimal.

R. M. 36.05 m

R. M. 8.5 m

- Una ventana cuadrada tiene área de 1500 cm². ¿Cuánto mide su lado, aproximadamente? ¿Es mayor o menor a 38.9 cm?

38.72 cm es menor a 38.9 cm

99 cm

- Estima $\sqrt{5000}$ a la décima más cercana. Justifica el procedimiento que segustés.

54.77

- Comprueba todos tus resultados con la calculadora. ¿Qué tan exactos fueron tus cálculos?

R. L.

#SUBE NIVEL

Identifica el número faltante en la sucesión y justifica por qué debe ir allí.

81, 121, ?, 225, 289

169, la sucesión corresponde a los cuadrados de los números impares iniciando con el cuadrado de 9.

Puntaje R. L.

Con base en los problemas anteriores, responde:

¿Qué método es más rápido para aproximar la raíz cuadrada? ¿Por qué?
R. M. El método de Perelmán, porque no se basa en prueba y error.

¿Cómo lograste identificar el número faltante en la sucesión?
R. M. Porque note que todos los números en la sucesión son cuadrados perfectos. Al ver la sucesión de sus raíces cuadradas el patrón fue claro.

Puntaje R. L.

Estima la raíz cuadrada de 1254 con una cifra decimal usando el método de Perelmán.

354

Cálcula tus puntos en cada ejercicio.

Menos de 120 segundos (3) 15 puntos
Entre 121 y 240 (5) 10 puntos
Más de cuatro minutos. 5 puntos
Cinco puntos adicionales por no cometer ningún error.

Tabla de registro de puntos

Puntos totales R. L.

Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 y 20

Sesión 7

Propósito

Los estudiantes consolidarán y evidenciarán sus aprendizajes sobre cuadrados perfectos y raíces cuadradas exactas y aproximadas, reflexionarán sobre su proceso de comprensión, resolverán dudas pendientes y enfrentarán ejercicios de mayor desafío para poner en práctica lo aprendido en contextos diversos.

Tip 1. En la sección **Aplico**, página 91, los alumnos ya deberían contar con el conocimiento necesario para responder a las preguntas de **Analizo**, página 79, resolver correctamente las actividades de la sección **Reconzco**, páginas 80 y 81, así como las dudas que registraron en la **página 83**.

Tip 2. Organice pequeñas discusiones en parejas o equipos para que expliquen cómo resolvieron algunos ejercicios durante la **Esfera de exploración**. Escuchar otras estrategias refuerza la comprensión y da confianza a los estudiantes.

Tip 3. Pida a los alumnos que resuelvan las cuatro actividades, en la sección **Practico más**, de los **Keys: Cuadrados y raíz cuadrada y Aproximación de la raíz cuadrada**.

Tip 4. Para finalizar la esfera, pida que realicen el imprimible **Maths Mastery T2_4**, que permitirá ejercitarse el tema aprendido.

APLICO ● ● ● ● ●

Reflexiona sobre la pregunta de la sección **ANALIZO**. ¿Ya puedes contestarla? Escribe una respuesta. Considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R.L

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R.L

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve nuevamente la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

© UNOI

¡Regresa a la página 83 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!

