





**¿Y si las plantas  
tienen un crecimiento  
definido media te las  
matemáticas?**



**¿Cómo descubrirías el  
código de una caja fuerte?**



**¿Cómo crecen tus  
ahorros en el banco?**

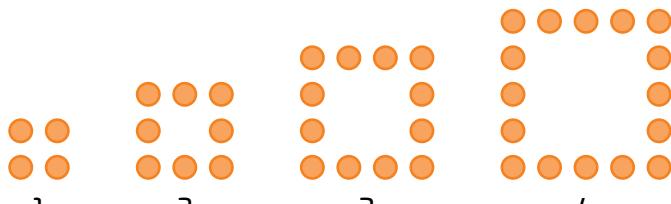
## Creciendo al ritmo de los números

Analiza la sucesión cuadrática de figuras y determina la expresión algebraica de la regla general.

Analiza la sucesión cuadrática numérica y determina la expresión algebraica de la regla general.

Comienza una nueva Esfera de Exploración. No olvides responder otra vez las actividades en tu cuaderno cuando hayas terminado la Esfera, ¡así descubrirás cuánto avanzaste!

01 Observa las figuras y escribe los términos y la regla para obtener su expresión general. +2



Término 25

100

Término 30

120

Término 50

200

Regla general:

$$a_n = 4 + 4(n - 1)$$

1.1. Observa las figuras y responde.

+4

Figura 1



Figura 2



Figura 3

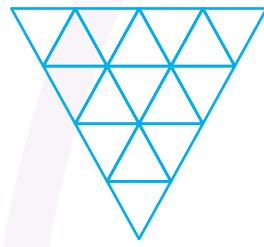


Figura 4

Escribe la sucesión de números que indica la cantidad de triángulos que tiene cada figura.

1, 4, 9, 16

¿Cuáles son los siguientes tres términos de la sucesión?

25, 36, 49

¿Cuál es la fórmula para obtener el número de triángulos de la figura  $n$ ?

 $n^2$ 

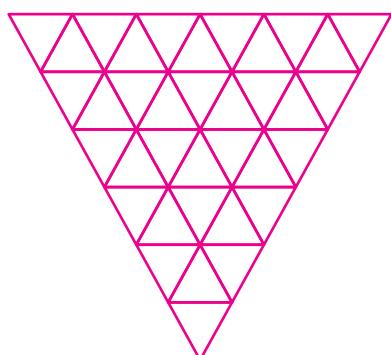
¿Qué figura tendrá 169 triángulos?

La figura 13

¿Habrá una figura con 440 triángulos? ¿Por qué?

No, 440 no es el cuadrado de un número natural.

Dibuja la figura 6.





## 02 Relaciona cada sucesión de números con su expresión general.

+1

 $-7, -4, -1, 2, \dots$  $28, 23, 18, 13, \dots$  $-3, -8, -13, -18, \dots$  $385, 370, 355, 340, \dots$  $-5n + 2$  $3n - 10$  $-5n + 33$  $400 - 15n$ 

¿Cómo dedujiste la expresión general?

R. M. Sustituyendo valores para  $n = 1, 2, 3, 4$ .

2.1. Completa la tabla con los términos que se indican de cada sucesión.

+3

Sucesión \ Término	5	12	21	30
$25x - 18$	107	282	507	732
$\frac{n-1}{n+1}$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{20}{22} = \frac{10}{11}$	$\frac{29}{31}$
$\frac{4n}{4n+3}$	$\frac{20}{23}$	$\frac{48}{51} = \frac{16}{17}$	$\frac{84}{87} = \frac{28}{29}$	$\frac{120}{123} = \frac{40}{41}$

Marca una  en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

Antes de la Esfera de Exploración

Al terminar la Esfera de Exploración

Sí      No

1. Reconozco el patrón de una sucesión cuadrática de figuras.



2. Reconozco el patrón de una sucesión cuadrática numérica.



Puntos obtenidos:



## INVESTIGO

**Aprendizaje esperado**

- › Analiza la sucesión cuadrática de figuras y determina la expresión algebraica de la regla general.
- › Analiza la sucesión cuadrática numérica y determina la expresión algebraica de la regla general.

**Keys**

- Sucesión cuadrática de figuras y su expresión algebraica
- Sucesión cuadrática de números y su expresión algebraica





Observa la siguiente secuencia de figuras. Seguro te será muy familiar.

Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	... Caso $n$
Medida del lado	2	3	4	5	$n$
Número de cuadrados	4	9	16	25	$n^2$

¿Qué pasaría si cada uno de los términos correspondiera a la distancia en kilómetros que recorren un par de autos durante una carrera? ¿Quién sería el ganador? Por supuesto, quien ha recorrido más kilómetros en el mismo tiempo. ¿Consideras que los minutos serían una unidad de tiempo adecuada?

Tiempo (minutos)	Distancia auto 1 (km)	Distancia auto 2 (km)
1	1	1
2	2	4
3	3	9
4	4	16
5	5	25

En el primer caso, el auto recorrería 1 kilómetro por cada unidad de tiempo , es decir, si han pasado 5 unidades de tiempo, ha recorrido 5 kilómetros, es decir  $t(1)$  donde  $t$  representa el tiempo.

En el segundo caso observa cómo el comportamiento es cuadrático, por lo tanto, la distancia recorrida se puede calcular multiplicando  $t$  por sí mismo, es decir  $t \times t = t^2$ .

Cuando un auto recorre distancias iguales, como en el primer caso, su desplazamiento es constante o igual en cada unidad de tiempo. Nota nuevamente en su desplazamiento el avance de un kilómetro por cada minuto . En la segunda columna observa en sus desplazamientos lo contrario, es decir, no son uniformes. Durante el primer minuto recorre 1 km, en el segundo minuto, 4 km, durante el tercero, 9 km, y en el cuarto, 16 km. Significa que este auto va acelerando, es decir, recorre más kilómetros por cada minuto de avance. En la secuencia numérica que se forma 1, 4, 9, 16, ... podemos notar una diferencia cuadrática. Es decir, este auto está acelerando de manera uniforme, y su velocidad va aumentando de manera equitativa.

Existe un tipo de movimiento uniformemente acelerado muy popular, conocido con el nombre de *caída libre*. Si se deja caer un objeto desde una torre muy alta , se puede calcular el tiempo que tardaría en llegar al suelo a partir de la siguiente expresión algebraica:  $d = -\frac{1}{2}gt^2$ , la cual nos habla de la distancia recorrida mientras cae, partiendo desde el punto donde se suelta. En esta fórmula,  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ , es el valor de la fuerza de atracción ejercida por la gravedad de la Tierra sobre nosotros, es decir, es eso que hace caer a los objetos, atraídos por la fuerza gravitacional del planeta y que vayan acelerándose durante la caída.



En una tirolesa, si la pendiente es muy larga, se debe tener cuidado con la velocidad, pues cada vez se avanza más rápido.



Si te lanzaras en paracaídas ¿cómo caerías? Has escuchado que cuanto más tiempo estés en el aire más rápido caerías, pero ¿cuánto más rápido? ¿Qué velocidad podría alcanzar un cuerpo en caída libre?

La expresión algebraica mostrada, dado el exponente al cuadrado que la acompaña, indica que la caída libre es un movimiento uniformemente acelerado y el signo menos muestra que va en sentido negativo, en palabras simples, está cayendo. Si observamos el tiempo , te darás cuenta de que si un objeto cae por 1 segundo recorrerá alrededor de 4.9 metros. Si cae por 10 segundos, recorrería 490 metros. Si cae por medio minuto (30 segundos) recorrería casi 4.5 kilómetros, y si lo hace por 1 minuto (60 segundos) su recorrido sería de más de 17.5 kilómetros.

Otro movimiento que es uniformemente acelerado es el de un objeto que rueda o se desplaza en un plano inclinado. Piensa en un esquiador o incluso un patinador deslizándose sobre una rampa. Es este factor la razón por la cual el esquí y el skate se consideran deportes de alto riesgo. ¿Y a ti qué otros movimientos uniformemente acelerados se te ocurren?

Tiempo (segundos)	Distancia (metros)
1	4.9
2	19.6
10	490.0
30	4414.0
60	17640.0

Guadalupe Simón

**Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer y representa tus conclusiones.**

Dibuja, resume, pega, ¡lo que quieras!



¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, anótalo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución.

---

---

---

---

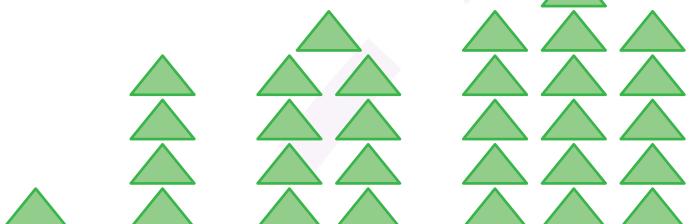
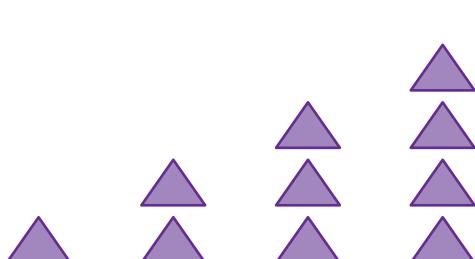
---



Lee y haz lo que se indica en cada actividad.



Coloca una **X** en las sucesiones de figuras que representen una sucesión cuadrática.



- Escribe la expresión general de cada una.

$n^2$  y  $n^2 + 3$ .



Observa la sucesión de figuras y responde.

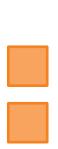


Figura 1

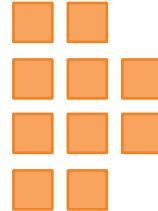


Figura 2

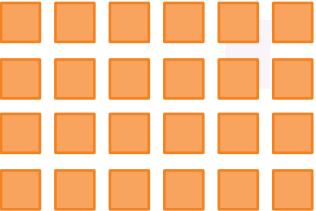


Figura 3

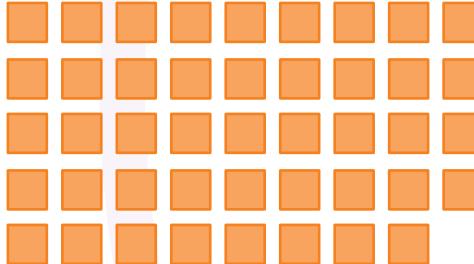


Figura 4

- Subraya la regla general que describe la sucesión de figuras:

$n^2 + 3$

$3n^2$

$2n^2 + n$

$3n^2 - n$

¿Cuántos cuadrados tiene el décimo término de la sucesión? Calcúlalo.

$3n^2 - n = 3(10)^2 - 10 = 290$ , es decir, la décima figura deberá tener 290 cuadrados.



**03** Completa la sucesión de puntos de tal manera que tenga como regla general  $n^2 + 3n$ .



¿La regla  $n(n + 3)$  también es regla de la sucesión anterior? ¿Es posible que esto ocurra? ¿Por qué?

R. M. Sí, es posible porque no son dos reglas diferentes, sino que son equivalentes.



**04** Los números que indican la cantidad de círculos de cada figura forman la sucesión de números pentagonales.

Figura 1



Figura 2

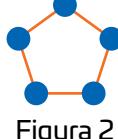


Figura 3

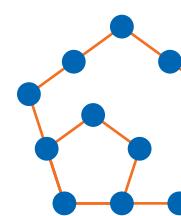
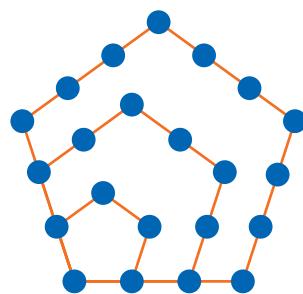


Figura 4



› Escribe los cuatro primeros números pentagonales.

1, 5, 12, 22

› Completa la tabla.

Figura	Número de círculos de la figura	Diferencia entre el número de círculos de figuras consecutivas	Diferencia entre las diferencias consecutivas
1	1		
2	5	4	
3	12	7	3
4	22	10	3
5	35	13	3
6	51	16	3
7	70	19	3

# 1 Espacio 2 procedimental 3

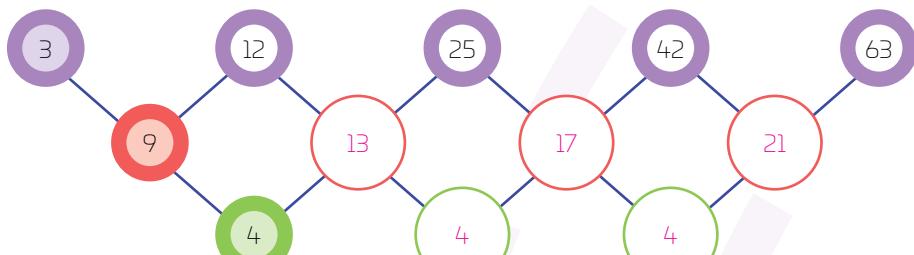
## ¿Cómo se puede determinar el término general de una sucesión cuadrada?

Toma en cuenta que la forma general del término  $n$  es  $an^2 + bn + c$ , pero ¿cómo se obtienen estos términos? Sigue las instrucciones y considera la sucesión:

3, 12, 25, 42, 63, ...

1. Completa el diagrama para analizar las diferencias de la sucesión

Términos:



Primera diferencia:

Segunda diferencia:

2. Completa la tabla con las diferencias que encontraste.

Término (n)	Sucesión $an^2 + bn + c$	Valor del término n	Diferencia de los términos	Valor de la primera diferencia	Diferencias de las diferencias	Valor de la segunda diferencia
1	$a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$	3				
2	$a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$	12	$4a + 2b + c - (a + b + c) = 3a + b$	$12 - 3 = 9$		
3	$9a + 3b + c$	25	$9a + 3b + c - (4a + 2b + c) = 5a + b$	13	$5a + b - (3a + b) = 2a$	$13 - 9 = 4$
4	$16a + 4b + c$	42	$7a + b$	17	$2a$	4
5	$25a + 5b + c$	63	$9a + b$	21	$2a$	4

3. Iguala las expresiones del mismo color.

$$a + b + c = 3$$

$$3a + b = 9$$

$$2a = 4$$

4. Resuelve la ecuación  $2a = 4$ .

$$a = 4 \div 2 = 2$$

5. Sustituye el valor de  $a$  en la ecuación  $3a + b = 9$  y resuélvela.

$$3(2) + b = 9$$

$$b = 9 - 6 = 3$$

6. Sustituye el valor de  $a$  y  $b$  en la ecuación  $a + b + c = 3$  y resuélvela.

$$2 + 3 + c = 3 \rightarrow c = 3 - 5 = -2$$

7. Sustituye los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en la fórmula general del término  $n$  en  $an^2 + bn + c$ .

$$2n^2 + 3n - 2$$

En el paso 7 encontraste el término general para la sucesión que analizaste, por lo tanto, puedes encontrar cualquier término de la sucesión, por ejemplo, ¿qué número hay en el término 12?

$$2(12)^2 + 3(12) - 2 = 322$$

05 **Encuentra el término general para la sucesión 8, 25, 50, 83, 124,...**  
Sigue los pasos que aprendiste en el Espacio procedimental.

Paso 1. Completa el diagrama para analizar las diferencias de la sucesión

Términos:



Primera diferencia:



Segunda diferencia:

Paso 2. Completa la tabla con las diferencias que encontraste.

Término ( $n$ )	Sucesión $an^2 + bn + c$	Valor del término $n$	Diferencia de los términos	Valor de la primera diferencia	Diferencias de las diferencias	Valor de la segunda diferencia
1	$a + b + c$	8				
2	$4a + 2b + c$	25	$3a + b$	17		
3	$9a + 3b + c$	50	$5a + b$	25	$2a$	8
4	$16a + 4b + c$	83	$7a + b$	33	$2a$	8
5	$25a + 5b + c$	124	$9a + b$	41	$2a$	8

Paso 3. Iguala las expresiones del mismo color.

$$a + b + c = 8$$

$$3a + b = 17$$

$$2a = 8$$

Paso 4. Resuelve la ecuación  $2a = 8$ .

$$a = 8 \div 2 = 4$$

Paso 6. Sustituye el valor de  $a$  y  $b$  en la ecuación  $a + b + c = 8$  y resuélvela.

$$4 + 5 + c = 8 \rightarrow c = 8 - 9 = -1$$

Paso 5. Sustituye el valor de  $a$  en la ecuación  $3a + b = 17$  y resuélvela.

$$3(4) + b = 17$$

$$b = 17 - 12 = 5$$

Paso 7. Sustituye los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en la fórmula general del término  $n$  en:  $an^2 + bn + c$ .

$$4n^2 + 5n - 1$$

### 06 Reúnete en equipos de tres personas y contesten.

Observen la tabla de las diferencias del ejercicio anterior. ¿Las ecuaciones de las celdas marcadas son las únicas que permiten encontrar los valores necesarios para obtener la regla general? ¿Por qué?

R. M. No, se puede igualar otro par de términos de la misma columna y se obtienen los mismos resultados

Elijan otro par de términos de las mismas columnas y de las mismas filas. Calcúlen nuevamente los valores  $a$ ,  $b$  y  $c$ . ¿Llegaron a la misma expresión?

R. L.

### 07 Dada la sucesión 2, 5, 10, 17, ... responde.

¿Cuál es la sucesión de las primeras diferencias? \_\_\_\_\_

$$3, 5, 7, \dots$$

¿Cuál es la sucesión de las segundas diferencias? \_\_\_\_\_

$$2, 2, \dots$$

¿Cuál es la regla general de la sucesión? \_\_\_\_\_

$$n^2 + 1$$

¿En qué posición  $n$  se encuentra el término 226? Realiza las operaciones necesarias.

$$n^2 + 1 = 226 \rightarrow n^2 = 226 - 1 = 225 \rightarrow n = \sqrt{225} = 15. \text{ Está en la decimoquinta posición.}$$



## 08 Analiza cada situación y responde.

Una especie de planta trepadora produce hojas a medida que va creciendo. Los registros de un agricultor durante las primeras cuatro semanas fueron los siguientes:

Semana	1	2	3	4
Número de hojas	3	8	15	24



¿Cuál es la sucesión de las primeras y segundas diferencias?

Primeras diferencias: 5, 7, 9, ...

Segundas diferencias: 2, 2, 2, ...

¿Cuál es la expresión general de la sucesión de hojas? Justifica tu respuesta.

Como  $2\alpha = 2$ , entonces  $\alpha = 1$ . Luego, como  $3\alpha + b = 5$ , haciendo sustitución y despeje se obtiene que  $b = 2$ . Además, como  $\alpha + b + c = 3$ , haciendo operaciones se tiene que  $c = 0$ . Así que la expresión es  $n^2 + 2n$ .

Si la planta tiene su máxima cantidad de hojas hasta la semana 7 con este tipo de sucesión (después de esta semana, comienza a perder algunas hojas), ¿cuántas hojas tendrá?

En la semana 7 tendrá  $(7)^2 + 2(7) = 49 + 14 = 63$  hojas.

Don Luis inicia un sistema de ahorro con \$65 y lo puede incrementar mensualmente, como se muestra en los primeros cuatro meses:

Mes	1	2	3	4
Ahorro (\$)	65	230	495	860



¿Cuál es la sucesión de las primeras y segundas diferencias?

Primeras diferencias: 165, 265, 365, ...

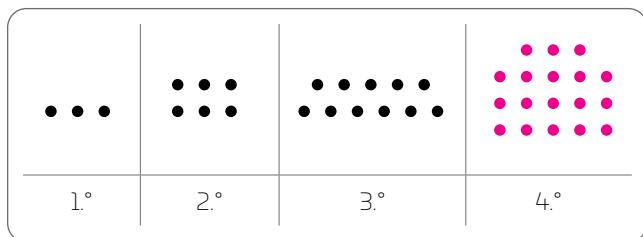
Segundas diferencias: 100, 100, ...

¿Cuál es la expresión general de la sucesión de ahorros? Justifica tu respuesta.

Como  $2\alpha = 100$ , entonces  $\alpha = 50$ . Luego, como  $3\alpha + b = 165$ , haciendo sustitución y despeje se obtiene que  $b = 15$ . Además, como  $\alpha + b + c = 65$ , haciendo operaciones se tiene que  $c = 0$ . Así que la expresión es  $50n^2 + 15n$ .

¡Pon a prueba tu destreza matemática! Registra el tiempo que requieres para resolver cada ejercicio, ¡hazlo lo más rápido que puedas!

01 Completa la sucesión de puntos que siguen una sucesión cuadrática y responde.



Escribe la sucesión de las primeras y de las segundas diferencias:

Primeras diferencias: 3, 5, 7, ...

Segundas diferencias: 2, 2, 2, ...

¿Cuál es la expresión general de la sucesión?

$n^2 + 2$

Tu tiempo (en segundos):

R. L.

02 Relaciona cada sucesión con su expresión general y responde.

8, 20, 40, 68, ...

$2n^2 - 3n + 5$

4, 7, 14, 25, ...

$4n^2 + 4$

3, 19, 45, 81, ...

$n^2 + 4n$

8, 15, 24, 35, ...

$5n^2 + n - 3$

¿Faltó alguna por relacionar? Obtén su expresión general correcta.

$n^2 + 4n + 3$

Tu tiempo (en segundos):

R. L.

03 Analiza la situación y responde.

Elena cultiva un tipo de planta que produce hojas que siguen una sucesión cuadrática. Registra el número de estas durante cuatro meses. El primer mes tiene 4 hojas, el segundo 7, el tercero 12 y el cuarto presenta 19 hojas.

¿Cuál es la expresión general de la sucesión de hojas?

$n^2 + 3$

¿Cuántas hojas tendrá la planta en el séptimo mes si justo al final de ese mes se le caen 7 hojas?

Tendrá  $(7)^2 + 3 = 52$  hojas, pero como pierde 7, le quedan 45 hojas a la planta.

Tu tiempo (en segundos):

R. L.

Enrique ahorra inicialmente \$124, al segundo mes \$156, al tercero \$196 y al cuarto mes \$244.

Escribe la sucesión de las primeras y de las segundas diferencias:

Primeras diferencias: 32, 40, 48

Segundas diferencias: 8, 8, ...

¿Cuál es la expresión general de la sucesión de ahorros?

$4n^2 + 20n + 100$

¿Cuánto ahorrará en el doceavo mes?

$4(12)^2 + 20(12) + 100 = 916$

Tu tiempo (en segundos):

R. L.

Calcula tus puntos en cada ejercicio.

- Menos de 2 minutos (s): 15 puntos
- Entre 2 y 4 min: 10 puntos
- Más de 4 min: 5 puntos
- Puntos por respuesta correcta: 1
- Puntos por respuesta incorrecta: -1

#### Tabla de registro de puntos

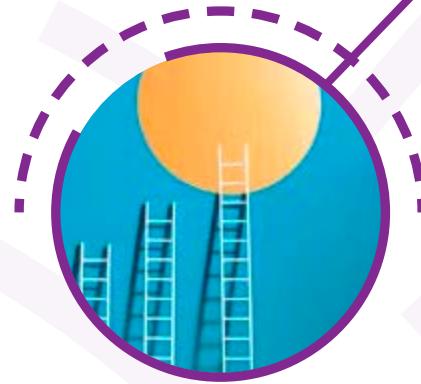
Puntos totales

R. L.

## APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección **ANALIZO**, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración

R. L.



¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

 ¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R. L.



¡Regresa de nuevo a la página 97 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!