



Exploratory  
Workshop  
Research  
Society  
Workshop  
Research  
Society  
Exploratory  
Workshop  
Research  
Society

ANALIZO



© UNOI



50



¿Desarrollo ecuaciones  
o me enrollo con ellas?



¿Sirve para algo tanta  
equivalencia?



¿Ecuación o, mejor,  
función?

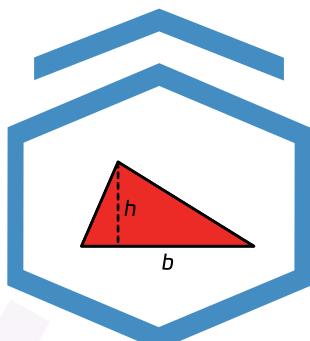
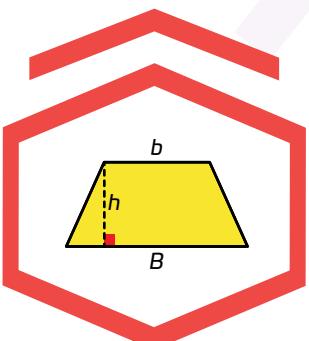
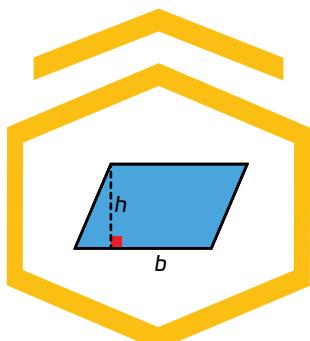
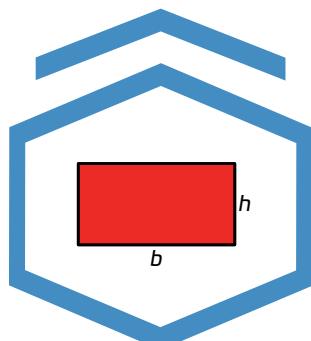
## Diversas maneras de expresar lo mismo

- › Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
- › Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.

Comienza la Esfera de Exploración en tu Diario de aprendizaje de Matemáticas identificando cuáles de estos reactivos puedes contestar con base en lo que ya sabes y registra en la lista de cotejo cuántos puntos obtuviste (no importa que haya algo que no puedas resolver). Al terminar la Esfera de Exploración, responde de nuevo los reactivos en tu cuaderno para que reconozcas cuánto avanzaste.



01 Une cada figura con la fórmula que permite calcular su área. +1

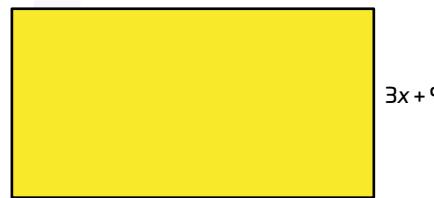
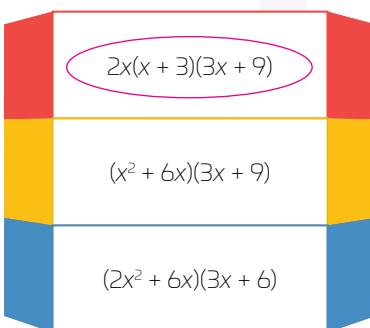
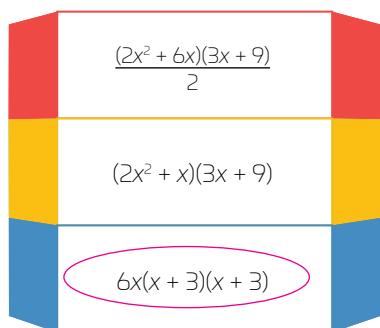


$$\frac{B+b}{2} h$$

$$\frac{bh}{2}$$

$$bh$$

1.1 Rodea las dos expresiones con las que puede calcularse el área del rectángulo. +2



1.2 Contesta ejemplificando con las expresiones anteriores. +2

¿Es posible expresar el área de una figura de dos o más formas? ¿Por qué?

R. M. Sí, porque las diferentes expresiones son equivalentes.

Por ejemplo, en el caso del rectángulo, pueden obtenerse

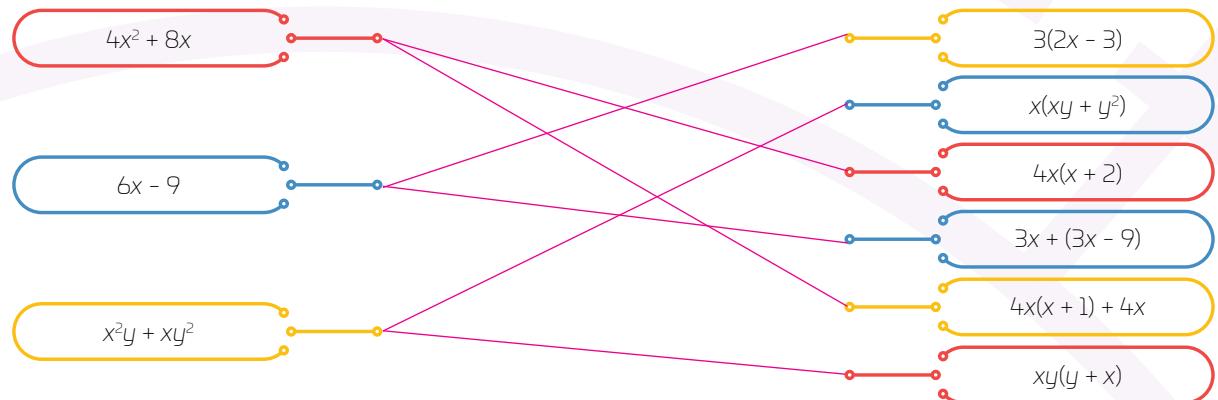
al factorizar la expresión que representa su base, su altura

o ambas.

¿Cómo verificarías que es correcta una fórmula, que no habías visto antes, para calcular un dato de una figura geométrica? Discútelo con dos compañeros.

R. L.

**02** Une cada expresión de la izquierda con sus dos equivalentes a la derecha. **+3**



**03** Rodea la oración que describe a una función. **+2**

- Una tabla donde un mismo número en la primera columna se asocia con varios números diferentes en la segunda columna.
- Una gráfica en la que un número en el eje horizontal tiene varios puntos diferentes en el eje vertical.
- Una relación donde los valores de una variable dependen de los valores de otra.

3.1 Comenta con tus compañeros: ¿serán las funciones más importantes que las ecuaciones?

R. L.

---



---



---

Marca una **✓** en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. **R. L.**

1. Elaboro equivalencias entre expresiones algebraicas mediante su desarrollo, apoyándome en figuras geométricas.
2. Utilizo equivalencias entre expresiones algebraicas mediante su factorización, apoyándome en figuras geométricas.
3. Identifico funciones y ecuaciones.

Antes de la Esfera de Exploración

<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Al terminar la Esfera de Exploración

<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Puntos obtenidos:

**INVESTIGO** ● ● ● ● ●

**Aprendizajes esperados**

- › Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
- › Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.

**Keys**

- Equivalencias mediante desarrollos
- Equivalencias mediante factorización
- Diferencia entre funciones y ecuaciones



¡Piratas! El transbordador de Boris, Juanilla y Blue ZE se ha averiado, pueden escapar hacia una lanzadera de emergencia, pero deben pasar frente a los despreciables piratas espaciales. Para lograrlo, nuestros intrépidos héroes pueden esconderse tras unos contenedores cúbicos que los villanos usan para transportar sus bienes ilegales. Boris es alto, Juanilla es mediana y Blue ZE es pequeño. Por eso, todos se preocuparon cuando Boris exclamó: —El tamaño de los contenedores es muy pequeño, ¡me descubrirán!

De repente, el más feo de los piratas camina hacia la pila de contenedores donde están escondidos Boris, Juanilla y Blue ZE. Instintivamente, los tres se quedan quietos y enmudecen como estatuas. El rufián se detiene , inhala profundamente y suelta una carcajada. —¡Aquí está! —exclama. El corazón de los escondidos da un brinco. La tapa del contenedor salta por los aires, al tiempo que una pasta viscosa y grisácea rezuma del mismo . Varios truhanes más se acercan mientras el primero engulle la materia ávidamente.

—No se empujen —grita el capitán con un vozarrón—. Hay suficiente para todos. —El grupo de malhechores da vuelta arrastrando el cubo metálico y derramando el contenido por el camino. Tras él, Boris, Juanilla y Blue ZE continúan con su discusión.

Juanilla: —No necesitamos caber dentro de los cubos, solo ocultarnos detrás. ¡Decidámonos!, ¿área o volumen?

Juanilla y Blue ZE comienzan a girar los cubos que se encuentran frente a ellos, buscando la relación más adecuada entre posición y ubicación de la fuente de luz que los oculte con la sombra del cubo. —Resolver una ecuación sería una opción ahora —informa Blue ZE.

Boris: —¿Para qué giran los cubos? Su tamaño no cambia, al igual que yo no quepo.

Blue ZE: —Incorrecto —informa nuevamente y continúa—: al girar los cubos, la sombra proyectada cambia, porque esta es función de aquella. Observa este hecho moviendo el cubo que tienes frente a ti.

Juanilla: —Entonces, para escapar necesitamos identificar... ¡lo tengo! Ahora veo cómo es la función que relaciona todo. Necesitamos rotar los cubos. Blue ZE es pequeño, solo necesita una cara del cubo y su sombra, que es la más pequeña proyectada; para mí, basta con girar uno y así, con dos de sus lados, la sombra proyectada es un rectángulo en el que puedo esconderme; tú, Boris, gira el tuyo sobre dos esquinas opuestas, de esa forma el área de la sombra es la mayor posible y ahí podrás ocultarte.

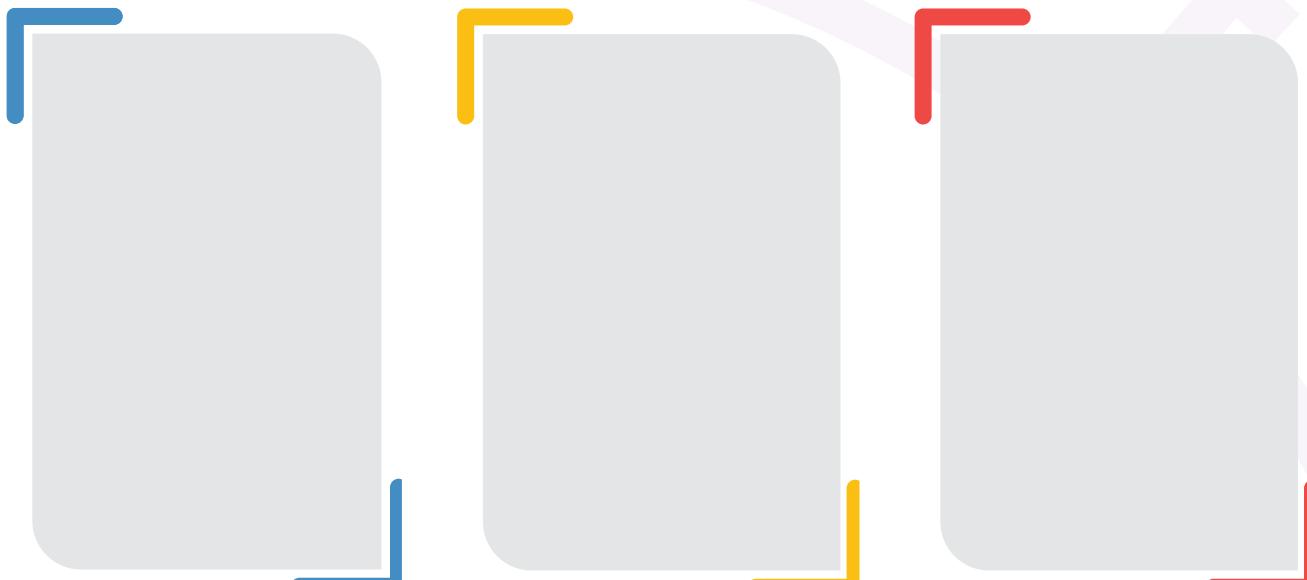
Y así, con ayuda de sus razonamientos geométricos, ocultos tras las sombras de los cubos (que, por cierto, pudieron orientar correctamente gracias a Blue ZE y sus prácticas cintas magnéticas), nuestros héroes se alejaron de los piratas espaciales en busca de una estación de control para reportar lo acontecido. ¿Habrían pasado desapercibidos de otra manera? ¿Habría aprendido Juanilla eso de las ecuaciones y funciones en la escuela? 

**Daniel y David Herrera Pérez  
(en estricto orden de edad).**



**Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer, reflexiona y realiza lo siguiente. R. L.**

- ▶ Dibuja tres objetos que tengas a la mano y la sombra que se produce por la luz que reciben  Si es necesario, busca un lugar apropiado, o una buena fuente de luz para que observes con claridad las sombras.



- › Responde de acuerdo con tus dibujos 

¿La forma de la sombra de qué variables o elementos depende? ¿Y el área de la sombra también depende de esas mismas variables? R. L.



¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, escríbelo aquí y cuando termines la Esfera regresa y dale solución.

RJ

- Haz un dibujo de otro objeto mostrando que la forma de su sombra es función directa de su posición respecto a una fuente de luz.

(R. M. El estudiante dibuja, en ese orden, la sombra, el objeto y la fuente de luz como si fueran colineales.)

## PRACTICO

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

### 01 Analiza el texto, la imagen y completa las oraciones.

La figura muestra un pequeño detalle de una pintura al estilo de Mondrian, típicos rectángulos compuestos por formas rectilíneas menores. Otros artistas también han explotado el uso de las figuras geométricas y los colores en ellas para expresarse.

- De acuerdo con las medidas, la base del rectángulo mide  $x + b$ , y su altura es  $x + a$ . Así que su área es igual a  $(x + b)(x + a)$ .
- Completa la tabla con las áreas de las figuras interiores:

Figura	Área
Amarilla	$bx$
Azul	$ab$
Roja	$x^2$
Blanca	$ax$

- Debido a que la suma de las áreas de las figuras interiores es igual a la figura completa, la expresión que se obtiene al igualar ambas expresiones es:

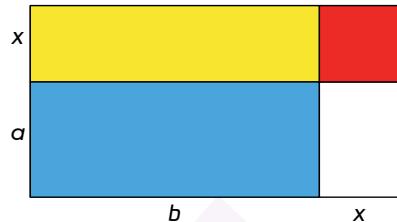
$$(x + b)(x + a) = bx + ab + x^2 + ax$$

- Comprueba que ambas expresiones son equivalentes, verificando que representan la misma cantidad. Utiliza los valores  $x = 1$ ,  $a = 3$  y  $b = 6$

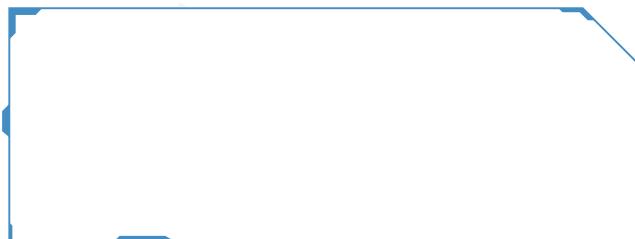
$$\begin{aligned}
 (x + b)(x + a) &= bx + ab + x^2 + ax \\
 (1 + 6)(1 + 3) &= 6 + 3(6) + (1)^2 + 3 \\
 (7)(4) &= 6 + 18 + 1 + 3 \\
 28 &= 28
 \end{aligned}$$

- ¿Crees que esos valores son los únicos que cumplen con la ecuación anterior? Discútelo con dos compañeros. Anota las ecuaciones o resultados que descubran juntos.

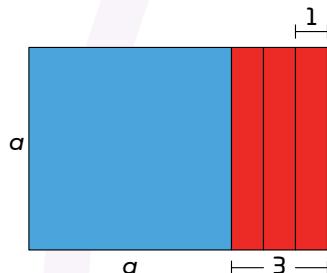
R. L.



- Discutan cómo aprovechar esa expresión para obtener una variación de la pintura. ¡Propongan una diferente cada uno! Haz tu bosquejo aquí. R. L.



### 02 Obtén el área de la siguiente composición de acuerdo con las indicaciones.



- Anota el área de la pintura a partir de sus lados:

El área de la pintura es  $a(a + 3)$ .

- Escribe el área de cada color por separado y el resultado sumando estas áreas:

El área de color azul tiene un valor de  $a^2$ .

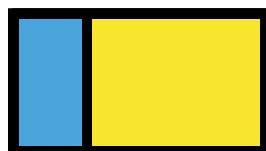
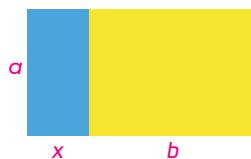
El área de color rojo es de  $3a$  unidades cuadradas. En total, el área de la pintura es  $a^2 + 3a$ .

- Indica la ecuación que se obtiene al igualar los dos resultados anteriores:

$$a(a + 3) = a^2 + 3a$$

### 03 Haz lo que se pide.

Una pintura más sencilla, pero no por ello menos interesante, se diseñó originalmente como se muestra en la primera figura. Después, se agregó un marco con líneas negras, el resultado es el diseño mostrado abajo. Sin embargo, algo no determinado aún son las medidas de cada parte de la obra.



- Anota, en el diseño original, letras que representen las tres medidas distintas. Usa  $x$ ,  $a$  y  $b$ , para la medida más corta, la mediana y la grande, respectivamente.
- Calcula su área, expresándola de dos formas diferentes. Apóyate en la forma y los colores, y escribe una ecuación reuniendo ambas expresiones.

El área total es  $a(x + b)$  o, también,  $ax + ab$ .

Así que,  $a(x + b) = ax + ab$

- Describe cómo afecta la inclusión del marco (líneas negras) el cálculo del área de toda la pintura.

R. M. Al incluir el marco, el área total aumenta y eso hace necesario que las expresiones anteriores se modifiquen al considerar el área, por pequeña que sea, que añade el marco.

- Imagina que el área de las líneas negras mide una unidad cuadrada. Discute con un compañero cómo calcular el área total de la obra y anota una expresión que permita hacerlo.

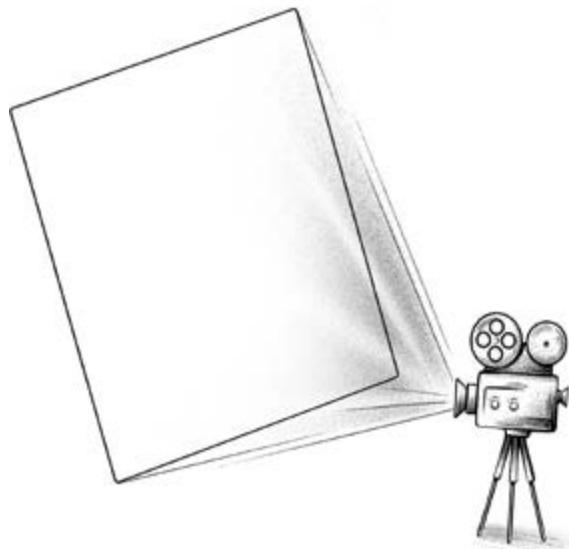
R. L.



Al Vantablack se le describe como el negro más negro. Su patente pertenece hoy en día al artista Anish Kapoor.

- Compara la última ecuación de la página anterior, con la primera que anotaste en esta página, ¿observas una distribución de términos a través de su multiplicación y suma? Discútelo con el grupo y anota las conclusiones que generen.

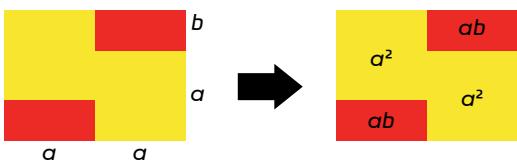
(El estudiante analiza la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma, en las ecuaciones  $a(a + b) = a^2 + 3a$  y  $a(x + b) = ax + ab$ )



EXAMINA EL COLOR EN TU VIDA.

## 04 Interpreta las obras artísticas a través de su geometría y las relaciones entre sus áreas.

- Completa la ecuación, escribiendo en cada lado una expresión para calcular el área de cada rectángulo. Luego, responde.

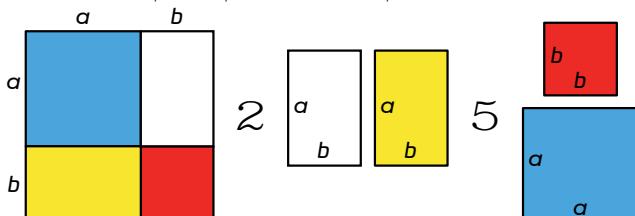


$$(a + a)(a + b) = a^2 + a^2 + ab + ab$$

¿Qué puedes simplificar a cada lado de la ecuación? Explica y escribe la ecuación que resulta.

Del lado izquierdo puede simplificarse el primer término y del derecho hay dos parejas que pueden reducirse. Lo que queda es:  
 $(2a)(a + b) = 2a^2 + 2ab$

- Responde de acuerdo con los elementos de la siguiente obra, elaborada para representar una operación matemática.



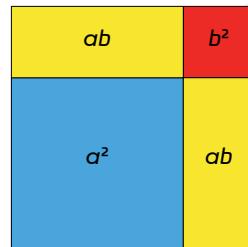
Usando las medidas de las figuras, ¿cómo queda la resta de la izquierda? Fíjate que tus expresiones representen las áreas de cada figura a ambos lados de la resta.

La resta de la izquierda sería  $(a + b)(a + b) - (ab + ab) = (a + b)(a + b) - 2(ab)$

¿Qué ecuación representa entonces la resta indicada en la obra? Anota dos opciones diferentes.

Una ecuación es:  $(a + b)(a + b) - (ab + ab) = a^2 + b^2$   
 Y otra ecuación es  $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$

- En la siguiente obra, si las áreas interiores son las indicadas, ¿cuál es el área total de la obra? Anótala y contesta.



$$a^2 + b^2 + 2ab$$

¿Cuáles son las medidas de los lados de la obra completa? ¿Es un rectángulo, o depende de  $a$  y  $b$ ?

Las medidas de los lados son las siguientes:  
 En horizontal,  $a + b$ .  
 En vertical,  $a + b$ .  
 Así que se trata de un cuadrado y esto no depende de los valores de  $a$  y  $b$ .

## 05 Discute lo siguiente con un compañero y haz lo que se indica.



En las pinturas de la actividad anterior, ¿a cuál le pondrías contornos negros más amplios? Haz un bosquejo indicando el grosor que emplearías. Luego, anota cómo calcularías el área de esta variación artística.

R. L.



La descomposición de una obra, artística o técnica, puede ayudar a su realización o interpretación. En esta **Zona Maker** te proponemos construir una obra artística como las que se encuentran en las páginas anteriores, analizándola a través de las medidas de sus lados y el área de las figuras que la componen.

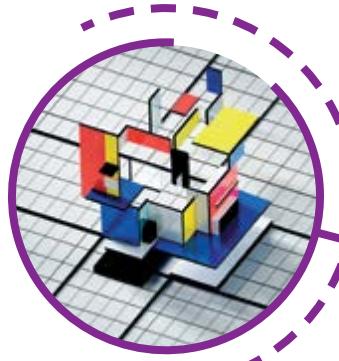
01 Decide la forma de tu obra, es decir, si será un cuadrado u otro polígono y su tamaño.

۲۱

 03 Construye tu obra. Usa el reverso para las ecuaciones. Así, cuando alguien te pregunte cuál es el álgebra de tu obra, ¡solo dale la vuelta! ¿Tuviste una mejor idea? Anótala aquí:

R. L.

02 Diseña el patrón de figuras que tendrá tu obra. ¡No te limites!, propón varias y que sean polígonos distintos. Solo asegúrate de saber bien qué medidas tienen. Haz un dibujo preliminar. R.L.

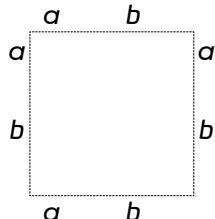


## 04 Describe a qué problemas te enfrentaste en la realización de tu obra álgebra-artística. R |

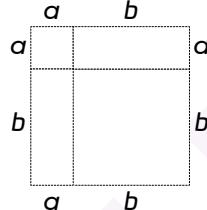
# 1 Espacio 2 procedimental 3

¿Cómo desarrollar expresiones semejantes a  $(a + b)^2$  para obtener los términos separados?

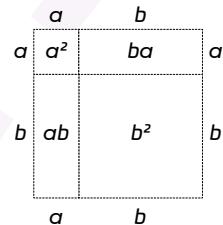
1. Dibujo un cuadrado cuyos lados midan  $a + b$ . El área de este cuadrado es  $(a + b)^2$ . El cuadrado que tiene lados de medida  $a + b$ , se vería así:



2. Trazo perpendiculares a los lados, para que la figura quede descompuesta en segmentos de longitudes  $a$  y  $b$ .



3. Calculo el área de cada elemento obtenido.



4. Igualo la suma de las áreas de todos los elementos que componen la figura con el área del cuadrado completo. Es decir:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

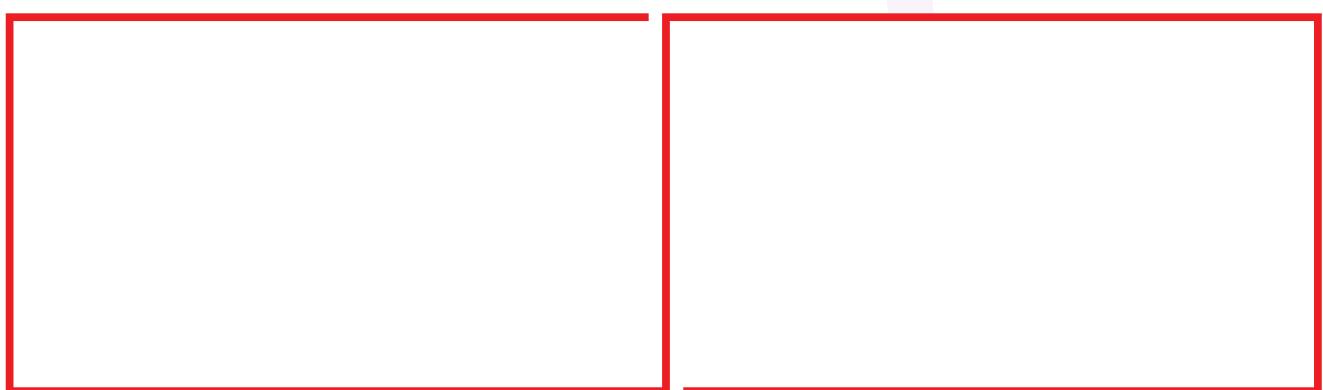
06 Aplica el procedimiento anterior en los siguientes cuadrados para descomponerlos como se indica en la expresión que los acompaña. Completa las igualdades.

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$(2y + 1)^2 = 4y^2 + 4y + 1$$

$$(3z + 5)^2 = 9z^2 + 30z + 25$$

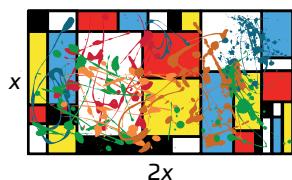
07 Discute con dos compañeros cómo desarrollar  $(a + b + c)^2$  usando el procedimiento anterior. Haz un dibujo y a un lado las operaciones necesarias R. L.





## 08 Analiza y completa la información.

Un grupo de amigos que también realizó una actividad maker sobre obras artísticas analizó las composiciones desde otro punto de vista. Luis, en su peculiar diseño, razonó lo siguiente:

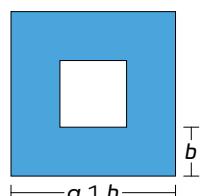


- El área,  $A$ , de mi obra puede expresarse algebraicamente como:  $A = \underline{\hspace{2cm}} 2x^2$
- Para hacerlo más grande, solo tengo que sustituir distintos valores de  $x$ , por ejemplo, en una tabla:

<b><math>x</math></b>	<b><math>A</math></b>
3	$2(3)^2 = 18$
5	$2(5)^2 = 50$
10	$2(10)^2 = 200$
20	$2(20)^2 = 800$

- Anota cómo podría explicar Luis, a su grupo, que no está resolviendo ecuaciones, sino trabajando con funciones.

R. L.



- Abigail y Andrea trabajaron juntas. La interpretación algebraica que propusieron se muestra a continuación:

- Para analizar el área, Abigail propone la expresión  $A = 4ab$ ; en cambio, Andrea piensa que es mejor:  $A = (a + b)^2 - (a - b)^2$ . ¿Qué tienen en común estas expresiones? ¿Qué las hace parecidas con la de Luis? Anota tus conclusiones.

R. M. Desarrollando la expresión de Andrea  
 $(a + b)(a + b) - (a - b)(a - b)$   
 $a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$   
 $4ab$



Seguro tienes muy presente que el ejercicio y una buena alimentación son **estrategias certeras para mantener-te sano** y que esto, a nivel global, evitaría enfermedades que aquejan a la población mundial.

Pero ¿y qué hay del dicho: **mente sana en cuerpo sano**? Será que alimentando al cerebro con buena cultura y arte se pueden evitar enfermedades o desórdenes de la salud? Todo indica que así es. La OMS (Organización Mundial de la Salud), después de publicar un **estudio en el que relaciona positivamente a las actividades culturales con el estado de salud de las personas que las practican**, ha llamado a los gobiernos para lograr una mejor vinculación entre los sectores sanitarios y artísticos. ¿Qué se requiere fomentar y con qué objetivo? Bueno, hay de todo, desde danza para aliviar los dolores de quienes padecen la enfermedad de Parkinson, hasta escuchar música para reducir los efectos secundarios de los tratamientos contra el cáncer.

Analiza qué oportunidades observas en tu entorno inmediato (casa, escuela, comunidad) para **involucrarte activamente en el fomento de actividades artísticas permanentes**.



## 09 Realiza lo que se indica.

- Reflexiona sobre la dependencia de datos o variables en la historia de la intrépida Juanilla, Boris y Blue ZE. Apóyate en lo que has visto hasta el momento para describir de qué depende la sombra proyectada.
- Usa objetos concretos como una hoja de papel o una lata, por ejemplo. ¡Haz dibujos!

(El estudiante describe cómo la sombra depende de la orientación de los objetos y la ubicación de la fuente de luz, tanto su distancia como inclinación respecto al plano o superficie donde aparece la sombra proyectada.)

# ¡SUBE NIVEL

¡Pon a prueba tu destreza matemática! Cuenta las veces que tuviste que borrar para corregir o verificaste algo con algún compañero.



01 Anota ✓ si la expresión corresponde a una ecuación o a una función.

Expresión	Ecuación	Función
$4(x^2 + 5) = 20$	✓	
$V = x^2(x + 2)$		✓
$y = 10x$		✓
$x = 2$	✓	
$3 + 2x = 5$	✓	

Correcciones o verificaciones hechas:

R. L.

02 Escribe una expresión equivalente. R. M.

Expresión original	Expresión equivalente
$10x^2 + 5x$	$5x(2x + 1)$
$2y - 6y^2$	$2y(1 - 3y)$
$a^2 + ab$	$a(a + b)$
$5x + 25$	$5(x + 5)$
$m^2 n + 5mn^2$	$mn(m + 5n)$

Correcciones o verificaciones hechas:

R. L.

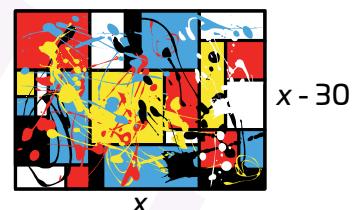
Bono de -2 puntos. Describe cómo es el procedimiento en esos casos para encontrar expresiones equivalentes.

R. L.



Las inicialmente controversiales obras de Jackson Pollock cada vez son mejor apreciadas, incluso por la ciencia.

03 Escribe lo que se pide, según los datos de la obra.



El área,  $A$ , de la obra, en función de  $x$ , es:

$$A = x(x - 30)$$

¿La variable  $x$  puede tomar cualquier valor o hay alguna restricción? Explica. R. M.

Los valores que no puede tomar  $x$  son los menores a 30, porque a partir de ahí la altura sería negativa. También, si  $x = 30$ , la altura sería cero y, por tanto, el área tendría el mismo valor.

Correcciones o verificaciones hechas:

R. L.

Bono de -1 punto. Escribe una expresión equivalente a la anterior, para calcular el área de la obra en función de ella.

$$A = x^2 - 30x$$

Cada dos correcciones o verificaciones te dan un punto. Tu nivel es bueno si tienes pocos puntos.

Puntos totales:

R. L.

¿Te ayudaron los bonos a reducir puntos? ¿Cómo ayudarías a los demás a reducirlos? Discute con dos compañeros cuáles son sus fortalezas y debilidades en el trabajo que realizaron.

**Reflexiona sobre las preguntas de la sección ANALIZO, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.**

R. L.



**¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros! R. L.**

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.



## Notas sobre mi aprendizaje

R. L.

**¡Regresa a la página 55 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!**