

# Matemáticas

## Esfera de Exploración 2 – Semanas 18 y 19

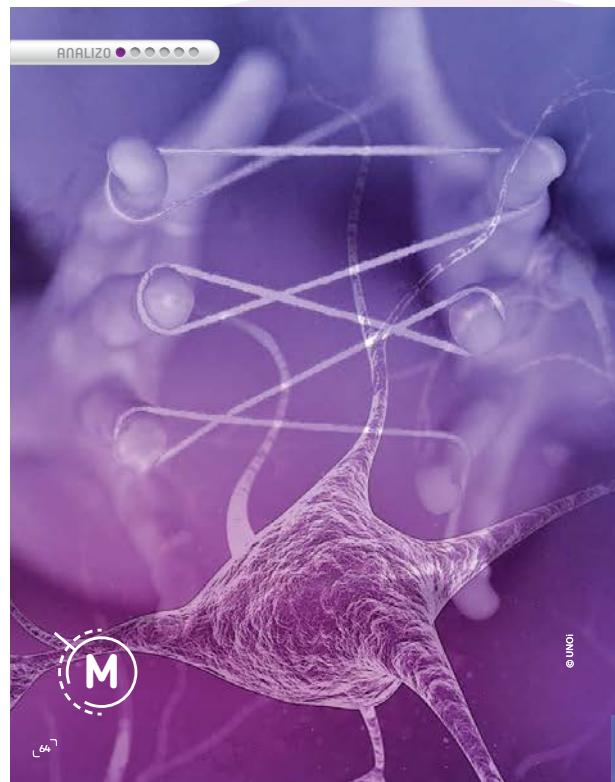
### Sesión 1

#### Propósito

Los estudiantes reflexionarán sobre la posibilidad de construir modelos matemáticos de diversas situaciones mediante ecuaciones cuadráticas y reflexionarán acerca del álgebra como un lenguaje especial muy potente.

**Tip 1.** En sesión grupal, invite a los estudiantes a describir la imagen de entrada de la sección **ANALIZO**, [página 64](#), a reflexionar y comentar sobre lo que representa. Guíelos a reconocer la idea central: una *red* como descripción de la conexión o relación entre objetos.

**Tip 2.** Organice a los estudiantes en parejas o tercias para que busquen respuestas a las preguntas planteadas en la [página 65](#) de la sección **ANALIZO**. Comente que no hay una respuesta única y verdadera a las preguntas, y mencione que la idea es que piensen en voz alta y escriban sus ideas, posteriormente las depuren y presenten al pleno.



### Esfera 2

¿Tengo que saber matemáticas para vivir?

¿Puedo hacer magia con los números?

¿Salen muchos hilos de una ecuación?

#### ¿Cuadrados o cuadráticos?

Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ .



## Sesión 1

**Tip 3.** Anime a los estudiantes a representar sus ideas en dibujos y organice una exposición donde presenten sus imágenes y sus explicaciones. Entre todos elegirán los tres que mejor expresan una idea o explicación.

**Tip 4.** Recuerde a los estudiantes que responder las **actividades 01 a 04** de la sección **RECONOZCO** en las **página 66** y **67** puede ser de inicio arduo y difícil, pero es necesario como medio para establecer un punto de partida del trabajo de los siguientes días.

**Tip 5.** Cuando hayan terminado de autoevaluarse, organice una sesión grupal en la que todos comenten cómo se sintieron y qué tanto recuerdan.

## RECONOZCO

Comienza esta Esfera de Exploración. No olvides responder nuevamente los reactivos en tu cuaderno cuando hayas terminado, así descubrirás cuánto avanzaste!

## 01 Une la situación con la ecuación que la representa.

¿Cuántos días debe trabajar Juan para asegurarse de no perder dinero? El papá de Juan le propuso ayudar en la tienda durante las vacaciones. Le dijo: "Por cada día que trabajes, te pagare  $(x - 5)$  pesos, siendo  $x$  el número de días trabajados. Tú me debes pagar  $x^2$  pesos si el resultado es positivo, y te devolveré, pero si es negativo, tú me pagas a mí". ¿Cuál es el mínimo número de días que debe trabajar Juan antes de hacer cuentas para asegurarse de que no tenga que pagarle a su papá?

Las diagonales de un polígono son segmentos de recta que unen a cada vértice con todos los otros vértices, con la única condición de que no sean los dos contiguos (porque si lo son, entonces el segmento de recta sería un lado del polígono). Es posible escribir una fórmula que indique cuántas diagonales tiene un polígono con  $x$  lados. ¿Cómo queda esa fórmula para saber cuántos lados tiene el polígono con cero diagonales?

Un cohete  se eleva verticalmente desde el piso a una velocidad de 1 m/s. La ecuación que modela la altura (en metros) que va alcanzando el cohete en el tiempo  $x$  (medido en segundos) es igual a cero. En el primer, la velocidad inicial es de 1 m/s, y en el segundo, la velocidad es constante. El efecto que provoca la aceleración de la gravedad (en el modelo más simplificado, se usa el valor de  $-5$ , por eso es una resta) por el cuadrado del tiempo. ¿En qué momento el cohete regresa al piso?

## 02 Resuelve las ecuaciones siguiendo los cuatro pasos. Si quieres omitir un paso, puedes hacerlo.

Pasos	$4x^2 - 24x + 50 = 50$	$7x^2 + 12x = x^2$	$100x - x^2 = 4x^2$
Organiza	$4x^2 - 24x + 50 - 50 = 0$	$7x^2 - x^2 + 12x = 0$	$-x^2 - 4x^2 + 100x = 0$
Simplifica	$4x^2 - 24x = 0$	$6x^2 + 12x = 0$	$-5x^2 + 100x = 0$
Factoriza	$4x(x - 6) = 0$	$6x(x + 2) = 0$	$-5x(x - 20) = 0$
Anota las soluciones	$x = 0, x = 6$	$x = 0, x = -2$	$x = 0, x = 20$

2.1 ¿Te gusta más resolver ecuaciones o analizar los problemas para llegar a ellas? Explica con ideas o ejemplos.

R. L.

© UNO*i*

## 03 Haz lo que se pide con las situaciones de la página anterior

En el caso de Juan , anota la parte del texto que...

Sirve para saber los términos que contienen a  $x$ . Por días que trabajes te daré  $(x - 5)$  pesos por día.

Indica a qué hay que igualar los términos que contienen a  $x$ .

¿Cuál es el mínimo de días que debe trabajar Juan antes de preguntar cuánto ha ganado para no pagarle a su papá?

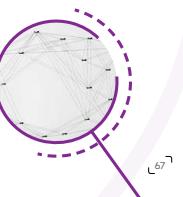
Cambia un solo signo en la expresión que indica lo que ganará Juan, para que sea ventajosa para él. Explica tu modificación con los días mínimos que debe trabajar.

R. M. Puede usar  $x(x + 5)$ , porque al igualar esto a cero queda  $x(x + 5) = 0$  y sus soluciones son  $x = 0$  y  $x = -5$ ; es decir, Juan comienza a ganar dinero el día 1.

Marca una  en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

1. Represento algebraicamente situaciones que se modelan con expresiones de la forma  $ax^2 + bx = 0$ .
2. Resuelvo ecuaciones de la forma  $ax^2 + bx = 0$  usando estrategias diversas.
3. Represento y resuelvo problemas que implican ecuaciones del tipo  $2x^2 + bx = 0$ .

Puntos obtenidos:



## INVESTIGO

**Aprendizaje esperado**

- Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas de la forma  $ax^2 + bx = 0$ .

**Keys**

- Modelado de situaciones mediante ecuaciones  $cx^2 + bx = 0$
- Resolución de ecuaciones  $cx^2 + bx = 0$
- Problemas con ecuaciones  $cx^2 + bx = 0$

© UNO*i*

L 67

# Matemáticas

## Esfera de Exploración 2 – Semanas 18 y 19

### Sesión 2

#### Propósito

Los estudiantes usarán la herramienta en línea Key para investigar cómo plantear ecuaciones cuadráticas de la forma  $ax^2 + bx = 0$  para modelar diversas situaciones realistas o recreativas y resolver problemas que llevan a ellas.

**Tip 1.** Invite a los estudiantes a trabajar en parejas para ampliar y profundizar sus saberes buscando información en la sección **Investigo** del **Key Modelado de situaciones mediante ecuaciones  $ax^2 + bx = 0$** , **Resolución de ecuaciones  $ax^2 + bx = 0$**  y **Problemas con ecuaciones  $ax^2 + bx = 0$** . Dé tiempo para explorar los temas en la plataforma y para resolver las cuatro actividades de ejercitación del recurso.

**Tip 2.** Recomiende a sus estudiantes que utilicen un cuaderno para ir apuntando conceptos o contenidos relevantes y practicando lo que van encontrando.

#### 03 Haz lo que se pide con las situaciones de la página anterior +4

- En el caso de Juan 🧑, anota la parte del texto que...

Sirve para saber los términos que contienen a  $x$ .

Por  $x$  días que trabajes te daré  $(x - 5)$  pesos por día.

Indica a qué hay que igualar los términos que contienen a  $x$ .

¿Cuál es el mínimo de días que debe trabajar Juan antes de preguntar cuánto ha ganado para no pagarle a su papá?

Cambia un solo signo en la expresión que indica lo que ganará Juan, para que sea ventajosa para él. Explica tu modificación con los días mínimos que debe trabajar.

R. M. Puede usar  $x(x + 5)$ , porque al igualar esto a cero queda  $x(x + 5) = 0$  y sus soluciones son  $x = 0$  y  $x = -5$ ; es decir, Juan comienza a ganar dinero el día 1.

- Anota **V** si es verdadero, o **F** si es falso, en el caso del cohete.

Si la velocidad fuera del doble, la ecuación a resolver sería  $2x - 10x^2 = 0$ .

Con una velocidad de 3 m/s, la ecuación a resolver es  $3x - 5x^2 = 0$ .

El término de la velocidad siempre es positivo, y el de la aceleración negativo.

El coeficiente del término lineal cambiará si el valor de la aceleración es más preciso.

- De las ecuaciones anteriores, resuelve la que sí modela correctamente el movimiento del cohete.

$$3x - 5x^2 = 0$$

$$x(3 - 5x) = 0$$

$$x = 0, x = \frac{3}{5}$$

Marca una **✓** en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

- Represento algebraicamente situaciones que se modelan con expresiones de la forma  $ax^2 + bx = 0$ .
- Resuelvo ecuaciones de la forma  $ax^2 + bx = 0$  usando estrategias diversas.
- Represento y resuelvo problemas que implican ecuaciones del tipo  $ax^2 + bx = 0$ .

Antes de la Esfera de Exploración	Al terminar la Esfera de Exploración
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Puntos obtenidos:

#### INVESTIGO ● ● ● ● ●

© UNOI

**Aprendizaje esperado**

- Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas de la forma  $ax^2 + bx = 0$ .

**Keys**

- Modelado de situaciones mediante ecuaciones  $ax^2 + bx = 0$
- Resolución de ecuaciones  $ax^2 + bx = 0$
- Problemas con ecuaciones  $ax^2 + bx = 0$



## Sesión 3

## Propósito

Los estudiantes conocerán un truco de magia, lo analizarán y descubrirán las matemáticas que hay detrás. Analizarán una situación que se modela con una ecuación de la forma  $ax^2 + bx = 0$ .

**Tip 1.** Dé tiempo a los estudiantes para que individualmente lean el texto de la sección **COMPRENDO**, página 68. Al terminar, invítelos a formar parejas y a hacer una tabla como la del mago en un pliego de cartoncillo. Pídale que en ella sigan todos los pasos indicados por el mago; cada intento lo deben realizar completo con plumón de un mismo color y cambiar a cada nuevo intento, analizando cada caso para identificar qué sucede.

- Pídale que, en caso de no obtener el resultado esperado, muestren su trabajo a un compañero, mencionándole dónde comenzó y el color usado, así podrán ver con claridad qué ruta siguieron.

**Tip 2.** Cuando los estudiantes hayan experimentado con su tabla, pídale que respondan la primera pregunta de la página 69 y, al terminar, guíelos para que trabajen con las fichas, luego que respondan la siguiente pregunta.

**Tip 3.** Pida a sus estudiantes que saquen los botones que tengan y que imaginen que representan personas, cada abrazo lo pueden representar por medio de un listón que une dos botones. Pregunte: ¿Qué pasa si hay dos personas? ¿Y si hay tres? Anímelos a que comenten en voz alta lo que descubren o lo que surge en su pensamiento. Algunos, quizás, preguntarán: *¿Un abrazo de dos personas se cuenta con un solo listón?* Guíelos mencionando: *Si tú y un compañero se dan un abrazo, ¿cuántas personas son?, ¿cuántos abrazos fueron?*

**Tip 4.** Guíe a los colegiales para que coloquen los listones que corresponden a tres o cuatro botones en un solo grupo. Esto será un excelente preámbulo al trabajo de las siguientes secciones, en las cuales necesitarán, por cierto, hilos, cartón y tachuelas, o elementos semejantes para que exploren las ecuaciones cuadráticas incompletas a través de un hilorama. Tome en cuenta esto para solicitarlo al área respectiva y saber qué pedir a los colegiales traer a la clase.

## COMPRENDO

Esta es una de las tantas historias del mago Abramacabri, un personaje que lo mismo soltaba números que descubría figuras o resolvía rompecabezas. Si no querías perder ni una fibra del hilo de la historia, ve haciendo lo que ocurre en ella por tu cuenta.

En cierta ocasión, con su voz profunda (porque era un gran mago), Abramacabri lanzó el siguiente reto: "Aquí les tengo una tabla con la cual advinare el último número que queden si ustedes siguen mis instrucciones. Por supuesto, no sé qué lo que hagan con la tabla". Dicho esto, el mago presentó la siguiente tabla mágica.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

De entre el público que se había reunido a la convocatoria, lanzó la invitación a una plaza pública, Abramacabri se dirigió a un al parecer ansioso espectador y le indicó: Elije un número de la tabla, y encíralo con un círculo. ¡Sin que yo lo vea!

Así lo hizo el voluntario, expectante a lo que ocurría. Y continuó el mago: "Tacha los números que se encuentran en la misma fila y el mismo renglón del número que elegiste". Tras lo cual, hizo una pausa y se quedó quieto, como para captar cualquier movimiento del voluntario. Quién, a su vez, realizó lo indicado con sigilo, como temiendo que el mago adviniera lo que haría si causaba algún ruido.

"Ahora", continuó el mago, "elige un segundo número de lo que quede en la tabla, y vuélvelo a encerrar con un círculo. ¡Sin que yo lo vea!", volvió a decir. Así lo hizo el voluntario por segunda vez. Abramacabri, incrédulo, le pidió de nuevo: "Tacha los números que se encuentran en la misma fila y el mismo renglón de este segundo número que elegiste, y encíralo con un círculo, ¡sin que yo lo vea!". Dijo esto, y el mago le respondió: "¡No olvides encerrarlo con un círculo! ¡sin que yo lo vea!" exclamó estas dos últimas instrucciones con una voz, como si le bragara del fondo de un pozo muy profundo.

Así lo hizo el voluntario, siguió fielmente las instrucciones. Abramacabri, le indicó finalmente: "Tacha los números que se encuentran en la misma fila y el mismo renglón del tercer número que elegiste"; tras lo cual, casi sin pausa, después de que el voluntario realizó lo indicado, dijo con voz de triunfo: "Ahora te queda un solo número. Encíralo ese número con un círculo". El voluntario obedeció a Abramacabri.

Después de una breve pausa, el mago con voz solemne dijo: "Aunque no he visto los cuatro números elegidos, sé que la suma es...". Ante la sorpresa del público que había esperado hasta el final el desenlace (porque algunos perdieron el hilo de las instrucciones y optaron, desesperados, por irse), y tomando un tono más frívolo, tachó al que mantuvo en vilo a su audiencia. Abramacabri invitó a los que distinguió del truco a dar un abrazo a los demás. Mientras esto ocurría, el mago los observaba distraídamente, pero sonriendo.

Cuando todos, jubilosos, terminaron de abrazarse, voltearon a ver cara al público al mago quien, sin inmutarse dijo: "Se dicen cuenta de que no los estuve viendo todo el tiempo? Y aún así, sé que en total fueron dados 276 abrazos".

Después de una breve pausa, el mago con voz solemne dijo: "Aunque no he visto los cuatro números elegidos, sé que la suma es...". Ante la sorpresa del público que había esperado hasta el final el desenlace (porque algunos perdieron el hilo de las instrucciones y optaron, desesperados, por irse), y tomando un tono más frívolo, tachó al que mantuvo en vilo a su audiencia. Abramacabri invitó a los que distinguió del truco a dar un abrazo a los demás. Mientras esto ocurría, el mago los observaba distraídamente, pero sonriendo.

Está vez alguien de la audiencia no pudo contenerse más y literalmente gritó: "¿Cómo lo supiste?", a lo que el gran mago simplemente respondió: "Para los no iniciados, no hay ruta accesible a la magia de los números".

Eugenio Diaz Barriga Arco

68

Algebra se le ve como un conjunto de métodos para reconstruir la información matemática de diversos problemas.

En un lado alternativo, el mago dice: "Calcula la cantidad de abrazos que se dieron con una ecuación de segundo grado". ¿Cuál será la respuesta?

En la otra parte, el mago dice: "Calcula la cantidad de abrazos entre todo su público, Abramacabri conocida (escríbela aquí con notación moderna) la expresión:  $\frac{n(n-1)}{2}$ ". Con ella y el número n de personas, se sabe cuántos abrazos en total puede darse un grupo.

Algebra surge en la historia de las matemáticas, muy ligada a los juegos y actividades verbales y lógicas.

Abracabri se dirige a su público, invitándolo a un al parecer ansioso espectador y le indica: Elije un número de la tabla, y encíralo con un círculo. ¡Sin que yo lo vea!

Después de una breve pausa, el mago con voz solemne dice: "Aunque no he visto los cuatro números elegidos, sé que la suma es...". Ante la sorpresa del público que había esperado hasta el final el desenlace (porque algunos perdieron el hilo de las instrucciones y optaron, desesperados, por irse), y tomando un tono más frívolo, tachó al que mantuvo en vilo a su audiencia. Abramacabri invitó a los que distinguió del truco a dar un abrazo a los demás. Mientras esto ocurría, el mago los observaba distraídamente, pero sonriendo.

Después de una breve pausa, el mago con voz solemne dice: "Aunque no he visto los cuatro números elegidos, sé que la suma es...". Ante la sorpresa del público que había esperado hasta el final el desenlace (porque algunos perdieron el hilo de las instrucciones y optaron, desesperados, por irse), y tomando un tono más frívolo, tachó al que mantuvo en vilo a su audiencia. Abramacabri invitó a los que distinguió del truco a dar un abrazo a los demás. Mientras esto ocurría, el mago los observaba distraídamente, pero sonriendo.

Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer, reflexiona y realiza lo que se indica.

Sigue las indicaciones para descubrir cómo hace Abramacabri su primer truco.

Llena la tabla, ceida a ceida, sumando en cada caso el número de la cabecera de columna y el de la izquierda de su fila.

1	2	3	4
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Verifica que esta es la tabla que usó Abramacabri.

Fijate ahora que, al pedir seleccionar cuatro números, y que en cada caso se eliminan los restantes de la columna y la fila, siempre se obtiene la suma de dos elementos: de la columna a la izquierda, 0, 4, 8 y 12, con el respectivo en la fila superior, 1, 2, 3 y 4.

La suma de todos estos números es el que advinó el mago:  $0+4+8+12=1+2+3+4=24$ .

Ahora, para contar los abrazos entre todo su público, Abramacabri conocida (escríbela aquí con notación moderna) la expresión:  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Con ella y el número n de personas, se sabe cuántos abrazos en total puede darse un grupo.

Prueba la fórmula y completa la tabla. Si es posible, llévala a la práctica con tus compañeros.

Personas	Abrazos entre ellas
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15

Si el total de abrazos que calculó el gran mago fueron 276, anota la ecuación y una estrategia para averiguar cuántas personas presentaron el espectáculo de Abramacabri.

La ecuación es  $\frac{n(n-1)}{2} = 276$ .

R. M. Una estrategia para saber qué número de personas cumple con ella es ir sustituyendo números naturales en el lado izquierdo hasta encontrar aquel con el que se obtenga el número 276. Es decir 24 personas.

Es cierto lo que dijo el gran mago, que la fórmula es una expresión de segundo grado. Explica utilizando o manipulando los términos de la fórmula.

Si es una expresión de segundo grado, ó cuadrática, porque

al multiplicar los términos se llega a que

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

Es decir, la expresión de la derecha ya muestra con claridad que contiene un término cuadrático y, en este caso, uno lineal.

Cómo crees que hace Abramacabri las operaciones rápidamente, y sin usar nada más que su mente? Propón un procedimiento. R. L.

Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, escríbelo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución. R. L.

© UNO*i*



69

## Sesión 4

## Propósito

Los estudiantes construirán un hilorama y deducirán la cantidad de conexiones entre sus vértices modelando la situación mediante una ecuación cuadrática.

**Tip 1.** Al trabajar la **actividad 01** de la sección **PRACTICO** en la **página 70**, anime a los alumnos a dibujar otros hiloramás en el pizarrón, comenzando con uno de tres vértices y aumentándolos poco a poco. Recuerde a sus estudiantes algún procedimiento sencillo para dibujar polígonos regulares con ayuda de una circunferencia.

**Tip 2.** Sugiera a los escolares que hagan dibujos con colores, aumentando los vértices poco a poco, para visualizar el problema más general y las dificultades que pueden surgir en la construcción del hilorama, y así los salven para crear un diseño que les guste.

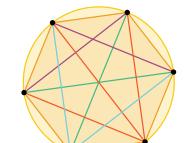
**Tip 3.** Al elaborar la **Zona Maker** de las **páginas 70 y 71**, recuerde a sus estudiantes que una vez trazado un hexágono, por ejemplo, y usando mediatrices se puede obtener el dodecágono y repitiendo el procedimiento llegar a un polígono de 24 lados. Puede recomendar este número de lados a sus alumnos para obtener un hilorama vistoso.

## PRACTICO

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 Lee con atención y contesta.

Para hacer un hilorama, como el de la imagen, se traza un círculo en un pedazo de madera y se localizan ahí los vértices de un hexágono regular. En cada vértice se coloca un clavo un poco salido. Después, se une con todos los clavos distintos a él mediante hilos de diferentes colores. El patrón formado también se puede enriquecer al usar colores específicos e, incluso, de materiales o tipos diferentes.



¿Cuántos hilos salen de cada clavo? Explica.  
De cada clavo salen 5 hilos, porque son 6 clavos.

¿Cuántos trozos de hilo se usaron en total? Ve marcando los hilos en el dibujo, para que puedas hacer el desarrollo de tu explicación.

Se tienen 6 clavos. De modo similar a  $6 \times 5 = 30$  los hilos por cerca hilos que salen de cada uno, pero solo del primero serán necesarios los cinco hilos, porque en el siguiente ya se tendrá puesto el que salió del clavo anterior, así del segundo clavo, solo saldrán cuatro hilos; del tercero, tres; del cuarto, dos; del quinto, uno; para el sexto clavo ya se tienen todos los hilos puestos.

## DO



## Hiloramático

Un hilorama, al ser un trabajo manual, podría no requerir más matemáticas que el conteo de clavos e hilos necesarios en su construcción. En esta **Zona Maker** te proponemos construir un hiloramático, es decir, una de estas manualidades que incluye la información matemática posible, que está directamente relacionada con ella, como las fórmulas con las que se calcula el número de hilos y diagonales.

01 Realiza, o ve consultando, las actividades 01, 02 y 03 para construir tu hiloramático. Anota aquí, para qué puede servirte cada una.



02 Comenta con los compañeros 03 un procedimiento para calcular los hilos en un hilorama. Luego, haz lo que se solicita.

Describe el procedimiento y usa el hilrama del hexágono anterior para ejemplificar los datos. R. M.

Una forma de ver los hilos requeridos es con las siguientes parejas de números:

Vértice (clavo)	Hilos que salen de él
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
6	0

El total de hilos es la suma de la columna de la derecha. Se requiere un total de quince hilos. Que es igual a la mitad de la multiplicación del número de vértices por el número de hilos que saldrá de cada uno.  $\frac{1}{2} (6 \times 5) = 15$

Escribe cuántos vértices contiguos tiene cada vértice, y cuántos no contiguos.

Tiene dos, porque cada vértice conecta a dos lados. Y tiene tres, no contiguos, porque se descuenta el vértice mismo u los dos que tiene a su lado.  $6 - 3 = 3$

Ahora, escribe una fórmula para calcular el total de diagonales en ese hilorama.

$$\frac{(n-3)}{2}$$

03 Elige el tamaño, los materiales y las fórmulas o datos.

Anota lo que consideres necesario.

R. L.

04 Decide cuántos vértices tendrá tu hiloramático (al menos 10).

Registra tu decisión y expectativas.

R. L.

# Matemáticas

## Esfera de Exploración 2 – Semanas 18 y 19

### Aprendizaje aumentado

Proponemos adaptar en la **actividad 1** de la sección **Práctico** de la **página 70** el uso de la aplicación **Geoboard, by MLC**, la cual presenta al estudiante un tablero (hilorama) en el cual pueden formar diversas figuras geométricas. Pida a los estudiantes abrir la aplicación y elegir, en la parte inferior, el tablero rectangular grande o bien, el circular. Indique que tienen la libertad de crear el diseño que quieran. Para finalizar comparten las diferentes creaciones y voten por el mejor. Puede añadir también preguntas similares a las del Diario de Aprendizaje para el diseño ganador.



**BIG CHALLENGE**  
Los escolares están creando un *streaming* en Twitch. Recuérdoles trabajar en el diseño de su canal aquí, en **Matemáticas**.

### PRÁCTICO

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 Lee con atención y contesta.

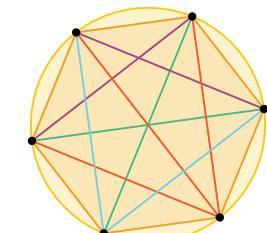
Para hacer un hilorama, como el de la imagen, se traza un círculo en un pedazo de madera y se localizan ahí los vértices de un hexágono regular. En cada vértice se coloca un clavo un poco salido. Después, se une con todos los clavos distintos a él mediante hilos de diferentes colores. El patrón formado también se puede enriquecer al usar colores específicos e, incluso, de materiales o tipos diferentes.

¿Cuántos hilos salen de cada clavo? Explica.

De cada clavo salen 5 hilos, porque son 6 clavos.

¿Cuántos trozos de hilo se usaron en total? Ve marcando los hilos en el dibujo, para que puedas hacer el desarrollo de tu explicación.

Se usaron quince. De inicio serían  $6 \times 5 = 30$  (seis clavos por cinco hilos que salen de cada uno), pero solo del primero ya serán necesarios los cinco hilos, porque en el siguiente ya se tendrá puesto el que salió del clavo anterior, así: del segundo clavo, solo saldrán cuatro hilos; del tercero, tres; del cuarto, dos; del quinto, uno; para el sexto clavo ya se tienen todos los hilos puestos.



DO

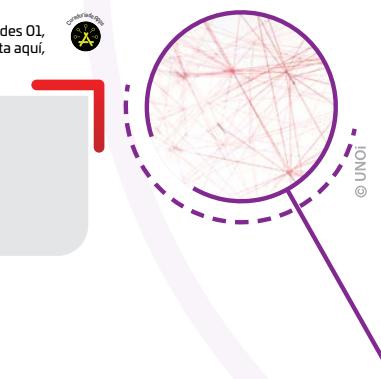
Hiloramático



Un hilorama, al ser un trabajo manual, podría no requerir más matemáticas que el conteo de clavos e hilos necesarios en su construcción. En esta **Zona Maker** te proponemos construir un hiloramático, es decir, una de estas manualidades con toda la información matemática posible, que esté directamente relacionada con ella, como las fórmulas con las que se calcula el número de hilos y diagonales.

01 Realiza, o ve consultando, las actividades 01, 02 y 03 para construir tu hiloramático. Anota aquí, para qué puede servirte cada una.

R. L.



L

70

## Sesión 5

## Propósito

Los estudiantes resolverán problemas recreativos de *magia matemática*, aplicando lo que han aprendido hasta el momento, inventarán sus propios trucos, y recordarán el procedimiento general de solución de las ecuaciones cuadráticas de la forma  $ax^2 + bx = 0$

**Tip 1.** Al terminar de leer la **Agenda UNOI hacia el futuro** de la página 72 invite a los estudiantes a que hablen sobre la paz mundial y su relación con el resguardo de la información, la criptología y los trucos de magia matemática.

**Tip 2.** Tras realizar individualmente el **Espacio procedural** de la página 73, pida a los alumnos que expresen sus dudas para despejar cualquier inquietud.

## Aprendizaje aumentado



Proponemos adaptar en la actividad 5 de la sección **Práctico** en la página 72 con el uso de la aplicación **Geoboard, by MLC** con la cual los estudiantes podrán realizar el truco de magia de dicha actividad.

## 04 Lee con atención y haz lo que se pide.

La historia de ese día no acabó ahí, un asistente que se había mantenido a la sombra y alejado, bajo su sombrero de copa.

"Gran Abramacabri, en mi bolillo tengo cierta cantidad de monedas que obtuve en un juego lanzando una de mis monedas al aire y apostando. Si se triplica el resultado de multiplicar dicho número por si mismo, el resultado obtendré una igual que multiplicar 27 veces dicha cantidad. ¿Cuál es el número de monedas en mi bolillo?"

▶ Ayuda a nuestro mago a resolver el desafío realizando lo siguiente.

Elige una letra como variable, y escribe en lenguaje matemático la expresión "multiplicar dicho número por si mismo".

Si uso  $x$ , la expresión es equivalente a  $x^2$ .

Ahora haz lo propio con lo que dijo el mago retador al esperar "se triplica el resultado".

Eso se escribe como  $3x^2$ .

¿Y cómo se representa la expresión "multiplicar 27 veces dicho número"?

Se representa como  $27x$ , en este caso.

Debido a que las dos últimas expresiones son iguales, así lo dijo el personaje del sombrero de copa, ¿qué ecuación resulta?

Se obtiene la ecuación  $3x^2 = 27x$ .

Resuelve la ecuación e imagina lo que nuestro mago Abramacabri contestaría y anotalo.

R. L.

(De las dos soluciones de la ecuación, la buscada es  $x = 9$ . Y el estudiante debe anotarla en una frase que dirá el mago Abramacabri).



## 05 Invanta un "truco de magia" con tu hiloaramático. Ponlo a prueba con tus compañeros. Describelo aquí.

R. L.

## AGENDA UNOI HACIA EL FUTURO

## PAZ

¿Te llaman la atención los enigmas matemáticos? ¿Qué dirías sobre uno que pudiera evitar conflictos en el futuro?

En 1965, los matemáticos ingleses **Bryan Birch y Peter Swinnerton-Dyer** comunicaron una de las preguntas matemáticas más difíciles de comprobar: La **Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer** busca un criterio para definir cuándo ciertas ecuaciones de grado tres permiten un número finito o infinito de soluciones, cuyo cociente es un número racional. Resulta difícil comprobar información de modo que nadie pudiera robar datos, lo cual eliminaría lo que se considera que podría ser uno de los pilares bélicos del futuro.

Sin embargo, otros analistas consideran que esta conjectura no traerá paz, pues, aunque haya algoritmos que protejan la información, lo más importante es que **sus dueños originales no la usen en acciones que amenazan a otros**, como guerras y explotación.

¿Crees que haya alguna forma de usar los análisis matemáticos para evitar conflictos de manera efectiva?

## Espacio procedural

¿Cómo llega a una ecuación de la forma  $ax^2 + bx = 0$  y luego la resuelve mentalmente?

1. Primero, reconozco que esta expresión podría provenir de otra que puede verse muy diferente. Será necesario simplificarla al máximo. Quiero estar lo más cercano posible a la forma esperada, la ecuación que busco. Por ejemplo, en la ecuación  $7x^2 + 16x + 3 = 3x^2 + 9x + 3$  quedo los términos, dejando todo de lado de la ecuación:

$$7x^2 - 9x^2 + 16x - 12x + 3 - 3 = 0$$

2. Simplifico para ver si la ecuación queda de la forma  $ax^2 + bx = 0$ .

$$-2x^2 + 4x = 0$$

3. Si no quedó de la forma esperada, no es del tipo que pueda resolverse por este procedimiento. En este caso, si obtuve la forma buscada. Es decir, con esta expresión si puedo trabajar mentalmente. Solo tengo que imaginar que factorizo una  $x$  para obtener la forma  $x(ax + b) = 0$ , en el ejemplo quedaría:

$$x(-2x + 4) = 0$$

4. Por tanto, las soluciones de la ecuación simplificada son  $x = 0$  y  $x = \frac{4}{-2} = 2$ . Como una solución es siempre cero, entonces es un dato dado. La otra solución es el cociente negativo del coeficiente del término cuadrático entre el del término cuadrático (ambos, en la ecuación de la forma  $ax^2 + bx = 0$ ). En mi ejemplo, las soluciones son:

$$x = 0$$

$$x = \frac{4}{-2} = 2$$

5. Así tengo mentalmente las soluciones de la ecuación  $ax^2 + bx = 0$ : una es cero, la otra es  $-\frac{b}{a}$ .



Con internet, la idea de que estamos a seis grados de separación ha dejado de parecer tan cambiada. ¿Qué tan cerca te sientes de los otros?

06 Resuelve las ecuaciones empleando el procedimiento descrito. Muestra todo el desarrollo.

Simplifica primero la ecuación. Si tiene la forma adecuada, calcula mentalmente las soluciones.

$$15x + 12 = 36x - 3x^2 + 12$$

$$-21x + 3x^2 = 0$$

$$3x^2 - 21x = 0$$

$$3x(x - 7) = 0$$

Si tiene la forma buscada, así que las soluciones son:

$$x = 0$$

$$x = 7$$

$$3x^2 + 5x + 10 = 15x - 45x^2 + 10$$

$$3x^2 + 5x^2 + 5x - 15x + 10 = 0$$

$$48x^2 - 10x + 10 = 0$$

Esta ecuación tiene la forma buscada, así que se prosigue en la solución:

$$x(48x - 10) = 0$$

Las soluciones son:

$$x = 0$$

$$x = \frac{10}{48} = \frac{5}{24}$$

07



73

# Matemáticas

## Esfera de Exploración 2 – Semanas 18 y 19

### Sesión 5

**Tip 3.** Sugiera a los estudiantes usar una fotocopia del rompecabezas que aparece en la **actividad 07, página 74**, y recortarlo. Al terminar la actividad, propóngales comentar el significado de la frase del rompecabezas. Pregunte, ¿cómo la aplicarían en su vida escolar?

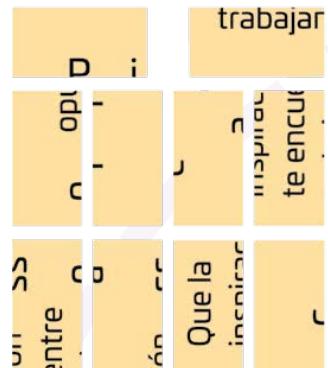
**Tip 4.** Al finalizar, organice un foro grupal para que los alumnos busquen relaciones entre los hilosramas, los trucos de magia matemática presentados y las ecuaciones estudiadas en las **páginas 72 a 74**.

#### 07 Resuelve el misterio.

En un lugar oscuro y poco frecuentado de una biblioteca, fue encontrada una caja, bastante maltrecha y vieja (por lo que se veía), y dentro de ella varios cartoncillos, no menos maltratados, con trazos que dejaban ver que alguien escribió algo, con letra tan cuidada que parecía tipografía de computadora (puedes observarlos en la imagen).

En un trozo de papel aparte se leen las siguientes indicaciones:

- » Esto es un cartel con un mensaje de suma importancia. Su largo tiene una unidad más que su ancho.
- » En él, fueron trazados cuadrados de lado  $\frac{x}{4}$ .
- » Pero no se recortaron esos cuadrados, sino los rectángulos que se forman al unir dos de ellos.
- » Si has llegado hasta aquí, debes tener en tus manos los diez rectángulos obtenidos por este procedimiento.
- » Ordénalos correctamente para que el mensaje te sea revelado.



Para develar la misteriosa frase, primero debes descubrir qué medidas se emplearon para elaborar el cartel. Haz lo que se indica para encontrarlas. Explica tus cálculos y propuestas.

Plantea una ecuación que indique cuál es el área del cartel. Considera que el ancho mide  $x$  unidades.

Con un ancho  $x$ , el largo es de  $(x + 1)$ , así que el área se obtiene al hacer:

$$x(x + 1)$$

Ahora escribe esa misma área, pero empleando los cuadrados que fueron trazados originalmente en el cartel.

Si se trazaron cuadrados de lado  $\frac{x}{4}$ , entonces el área de cada uno es de  $\frac{x}{4} \left(\frac{x}{4}\right) = \frac{x^2}{16}$ . Si se recortaron diez rectángulos formados por dos de estos cuadrados, el área del cartel es:

$$10(2) \left(\frac{x^2}{16}\right) = 20 \left(\frac{x^2}{16}\right) = \frac{5}{4} x^2$$

Escribe la ecuación que iguala el área del cartel con la suma de los cuadrados trazados en él.

La ecuación es:  
 $x(x + 1) = \frac{5}{4} x^2$

Resuelve la ecuación y anota las medidas del cartel.

$$\begin{aligned} x(x + 1) &= \frac{5}{4} x^2 \\ 4x^2 + 4x &= 5x^2 \\ 4x^2 - 5x^2 + 4x &= 0 \\ -x^2 + 4x &= 0 \\ x(-x + 4) &= 0 \\ x = 0, x &= 4 \end{aligned}$$

Con ese valor ya se pueden conocer las medidas del cartel, tiene cuatro unidades de ancho y cinco de largo.

Reproduce las piezas de arriba, usando los valores que descubriste, de tal modo que el mensaje ordenado queda en este marco:



## Sesión 6

## Propósito

Los estudiantes aprenderán a realizar un cambio de variable que permite resolver una ecuación de cuarto grado particular, reduciéndola a una ecuación de segundo grado, y luego pondrán a prueba su destreza y dominio de las técnicas estudiadas.

**Tip 1.** Proponga a los colegiales que en parejas realicen la **actividad 08** de la **página 75**. Sugiera que reproduzcan las oraciones y ecuaciones en papelitos del tamaño adecuado, para analizar cómo van mejor con el procedimiento de solución dado en la tabla.

**Tip 2.** Al terminar abra una discusión en la que externen lo que piensan sobre resolver ecuaciones de cuarto grado.

**Tip 3.** Utilice la **actividad 02** como punto de partida para la **Esfera** siguiente, en la que trabajarán con el caso general de la ecuación cuadrática. Sugiera reflexionar sobre la cuestión: ¿Cómo se resuelven las ecuaciones que no colorearon?

**Tip 4.** Utilice las preguntas al final de la **página 76**, actuando como moderador, para discernir qué dificultades podrían estar presentes.

## 08 Lee con atención y haz lo que se indica.

Algunas ecuaciones de grado mayor a dos pueden resolverse como si tuvieran la forma  $ax^2 + bx = 0$ . No es magia, solo la increíble Algebra.

Un caso así se presenta con las ecuaciones  $ax^4 + bx^2 = 0$ , que pueden simplificarse a una ecuación cuadrática si sustituyes una nueva variable para reducir la potencia de la variable original, por ejemplo,  $u = x^2$ . En este caso, llegas a la ecuación  $au^2 + bu = 0$ , que ya sabes resolver 😊.



## HAZ UN CAMBIO DE VARIABLE EN TU VIDA!

→ Ordena los pasos para resolver la ecuación  $x^4 - 16x^2 = 0$  con el cambio de variable indicado arriba.

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

Con  $u = 0$  se tienen dos soluciones iguales para  $x$ .

$$x_3 = -4, x_4 = 4$$

$$u^2 - 16u = 0$$

$$Se identifican los coeficientes a y b.$$

$$u^2 - 16u^2 = 0$$

$$u = 0, u = 16$$

## Procedimiento ordenado

## Explicación      Expresión que resulta

Simplificar para saber si se presenta la forma  $ax^2 + bx = 0$

$$x^4 - 16x^2 = 0$$

Se identifican los coeficientes  $a$  y  $b$ .

$$a = 1, b = -16$$

Hacer el cambio de variable  $u = x^2$

$$u^2 - 16u = 0$$

Se anotan las soluciones de la ecuación cuadrática

$$u = 0, u = 16$$

Con  $u = 0$  se tienen dos soluciones iguales

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

Si la otra solución es positiva, sustituir de nuevo  $u = x^2$

$$u = x^2 = 16$$

Se resuelve la ecuación para  $x$ , para obtener dos soluciones más,

$$x_3 = -4, x_4 = 4$$

→ Reúnete con dos compañeros y resuélvanlo

La ecuación  $-2x^2 + 6x^2 = 0$  utilizando el menor número de pasos posibles

R. M. Sustituyendo  $u = x^2$  se obtiene:

$$-2u^2 + 6u = 0$$

$$u = 0, \quad u = 3$$

Sustituyendo de nuevo el cambio de variable:

$$x^2 = 0, \quad x^2 = 3$$

Así las soluciones para  $x$  son:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -\sqrt{3}, x_4 = \sqrt{3}$$

Considera que en matemáticas hay procedimientos, fórmulas o hechos mágicos? Anota algunas ideas.  
R. L.

## #NIVEL SUBE

¡Pon a prueba tu destreza matemática! Realiza lo que se indica, trata de hacerlo por ti mismo. Puedes preguntar a tus compañeros, aunque no se vale pedir la solución 😊.

01 Une las ecuaciones entre columnas que tienen las mismas soluciones y anota debajo de cada ecuación su forma factorizada. R. M.

$$4x^2 = 14x$$

$$4x(x - 3.5) = 0$$

$$4x = 0 \quad x = 3.5$$

$$20x^2 - 120x = 0$$

$$20x(x - 6) = 0$$

$$20x = 0 \quad x = 6$$

$$3x^2 - 14x - 20 = x^2 - 2(x + 10)$$

$$3x^2 - 14x - 20 = x^2 - 2x - 20$$

$$2x^2 - 12x = 0$$

$$2x(x - 6) = 0$$

$$2x = 0 \quad x = 6$$

$$-2x^2 - 4x = 0$$

$$-2x(x + 2) = 0$$

$$-2x = 0 \quad x = -2$$

$$6x^2 + 12x = 0$$

$$6x(x + 2) = 0$$

$$6x = 0 \quad x = -2$$

$$5x^2 + 75x = 0$$

$$5x(x + 15) = 0$$

$$5x = 0 \quad x = -15$$

$$11x^2 + 3x + 10 = 6x^2 - 18(4x - 1)$$

$$5x^2 + 21x + 10 = 0$$

$$5x(x + 2) + 10 = 0$$

$$5x = -10 \quad x = -2$$

$$x^2 - 3.5x = 0$$

$$x(x - 3.5) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 3.5$$

Preguntas hechas: R. L.

Puntaje final: R. L.



Compara tus puntos con tus compañeros. ¿De quién están más lejos en puntos? ¿Qué tan bueno es eso para tí? Por otro lado, ¿los puntos sirven para saber quién es mejor en estos temas? Discútelo con el grupo.

# Matemáticas

## Esfera de Exploración 2 – Semanas 18 y 19

### Sesión 7

#### Propósito.

Los estudiantes pondrán a prueba sus conocimientos recién adquiridos y volverán a las preguntas del inicio de la esfera para responderlas de nuevo, a la luz de lo que han aprendido.

**Tip 1.** Dé tiempo a que pasen a la sección **APLICO** de la **página 77** y a que vuelvan a la sección **ANALIZO** de las **páginas 66 y 67**.

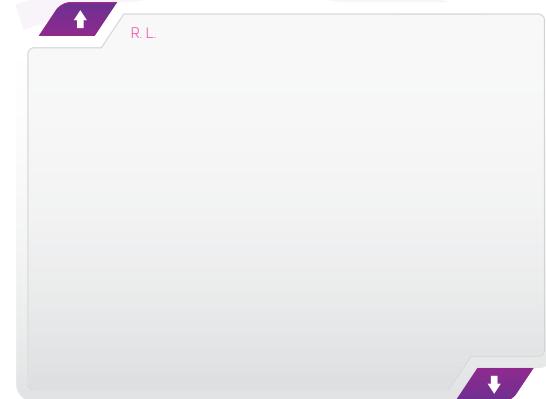
**Tip 2.** Cuando terminen, en sesión grupal permita que aquellos que así lo quieran, comenten sobre su aprendizaje y sobre su experiencia con esta **Esfera** en particular.

**Tip 3.** Anime a sus alumnos a resolver las cuatro actividades de los **Key: Modelado de situaciones mediante ecuaciones  $ax^2 + bx = 0$ , Resolución de ecuaciones  $ax^2 + bx = 0$  y Problemas con ecuaciones  $ax^2 + bx = 0$** , en la sección **Práctico más**, donde encontrarán actividades retadoras que los llevarán al siguiente nivel taxonómico del aprendizaje.

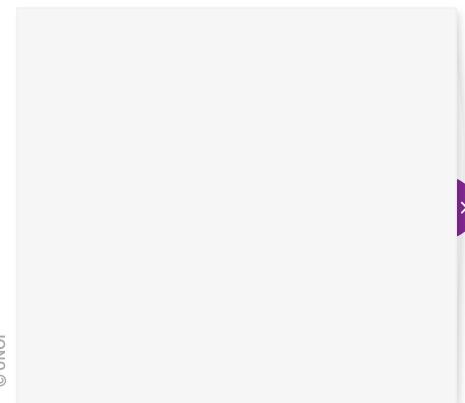
**Tip 4.** Para finalizar la **Esfera**, pida que realicen el imprimible **Maths Mastery T2\_3**, que permitirá ejercitarse el tema aprendido.

#### APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección **ANALIZO**, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.



¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera?  
¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros! R.L.



Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R.L.

¡Regresa a la página 69 y soluciona las dudas que tenías en ese momento! 📚

