



Esfera 2



¿Cómo obtengo agua sólida y líquida a la vez?



¿Qué tan rápido puedo llegar a mi destino?



¿Cómo se relacionan las fuerzas físicas que nos rigen?

El Universo y sus fuerzas

Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

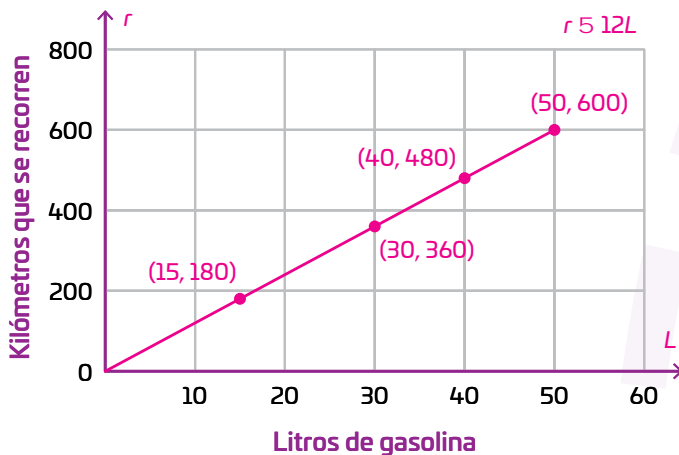
Comienza una nueva Esfera de Exploración. No olvides responder nuevamente las actividades en tu cuaderno cuando hayas terminado, ¡así descubrirás cuánto avanzaste!

01 Diego va de viaje a visitar a sus tíos. Sabe que 15 L de combustible le alcanzan para recorrer 180 km, con 30 L recorre 360 km y con 50 L puede recorrer 600 km. También sabe que a una rapidez constante de 80 km/h hace el recorrido de su casa a la casa de sus tíos en seis horas; manteniendo la rapidez en 120 km/h, lo hace en cuatro horas; y con rapidez constante de 160 km/h, llega en tres horas.

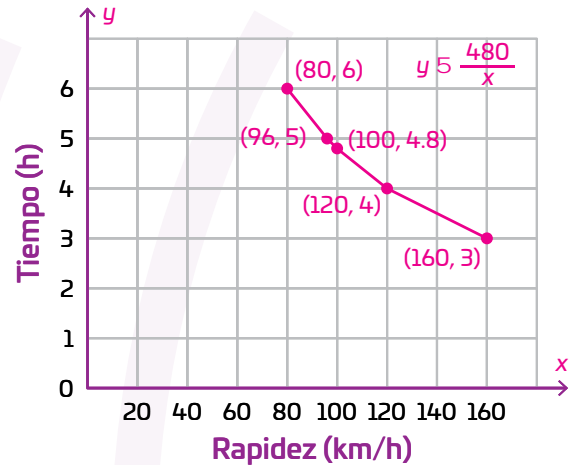
+4+

Establece la relación entre los litros de gasolina consumidos y los kilómetros que se recorren, traza la gráfica en el plano de la izquierda. Realiza, en el plano de la derecha la gráfica que relaciona el tiempo del viaje y la rapidez del transporte.

Distancia recorrida en relación con la cantidad de gasolina



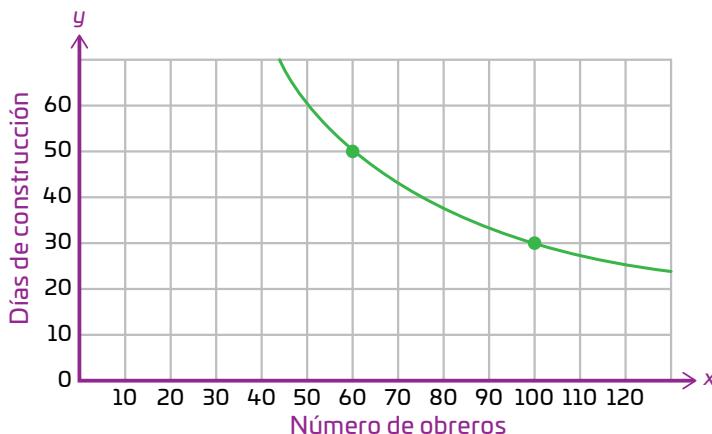
Tiempo de viaje en relación con la rapidez del transporte



02 Analiza la gráfica y determina la constante de proporcionalidad inversa. Luego, completa la tabla.

+2+

Constante de proporcionalidad inversa: 3000



Número de obreros	Días de construcción
60	50
70	42.86
80	37.5
90	33.33
100	30

2.1 Rodea las expresiones algebraicas que representan la situación anterior. +2

$$xy = 3000$$

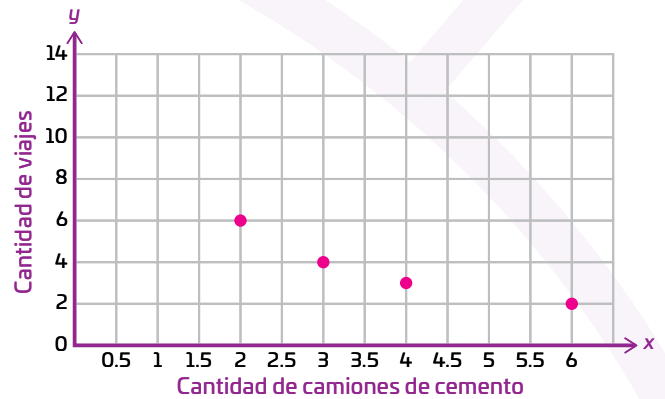
$$y = 3000x$$

$$y = \frac{3000}{x}$$

$$x = \frac{y}{3000}$$

2.2 Completa la tabla y ubica los puntos obtenidos en el plano cartesiano. +2

Cantidad de camiones de cemento	Cantidad de viajes
2	6
3	4
4	3
6	2



Marca una ☒ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

- Resuelvo problemas de variación lineal con el uso de gráficas, tablas y ecuaciones, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
- Resuelve problemas de proporcionalidad inversa con el uso de gráficas, tablas y ecuaciones, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Antes de la Esfera de Exploración

Sí

No

☐
☐
☐
☐

Al terminar la Esfera de Exploración

Sí

No

☐
☐
☐
☐

Puntos obtenidos:

INVESTIGO



Aprendizaje esperado

- Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica.
- Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

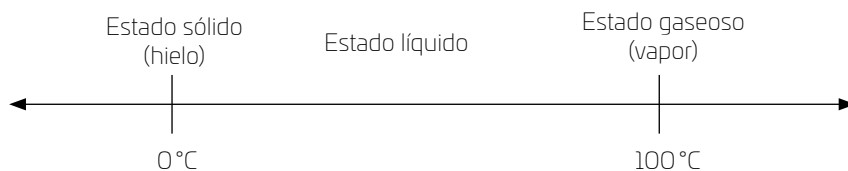
Keys

- Situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa (tablas y gráficas)
- Aplicación de la proporcionalidad inversa



¿Alguna vez te has preguntado qué es lo que pasa con el agua cuando cambia del estado sólido al líquido o al gaseoso? ¿De qué dependen esos cambios? ¿Sabes que existen otros estados de agregación de la materia además de líquido, gaseoso y sólido? ¿Cómo crees que se representan estos cambios?

Desde la Antigüedad se sabe que el agua y ciertos metales cambian su estado de agregación dependiendo de la temperatura y la presión. Por ejemplo, en condiciones específicas, el agua pasa de un estado a otro en las temperaturas que se muestran a continuación 🗨️:



Sin embargo, los conceptos que hoy conocemos de los estados de agregación de la materia no siempre fueron los mismos. En la Grecia antigua, ciertos filósofos como Tales (624-546 a. n. e.) consideraban el agua como uno de los cuatro elementos del mundo material (los otros tres eran el aire, el fuego y la tierra). Además, sabían que el agua se podía convertir en hielo ❄️, es decir, que puede tomar una forma sólida, como de “tierra”, lo que sin duda les causaba extrañeza, pues para ellos lo sólido, como el hielo, constituía un estado de materia completamente diferente del líquido.

La concepción griega de considerar cuatro elementos fundamentales perduró muchos años sin cuestionarse 😞. Uno de los primeros en hacerlo fue el padre de la química moderna, Lavoisier (1743-1794), —si bien Boyle (1627-1691) ya había establecido que, a temperatura constante, el volumen de una cantidad de gas varía de manera inversamente proporcional a la presión—. Posteriormente, el francés Gay-Lussac (1778-1850) y el italiano Avogadro (1776-1856) utilizaron el concepto de molécula para completar la ley de Boyle y describir otras propiedades de los gases. Específicamente, la ley de Gay-Lussac establece que, a presión constante, el volumen de un gas es proporcional a la temperatura, y el resultado de Avogadro establece que, dadas las mismas condiciones de presión y temperatura, dos volúmenes iguales de gases diferentes contienen el mismo número de moléculas.

Fue así, con los descubrimientos anteriores, que el físico Johannes van der Waals (1837-1923) estableció varios de los conceptos que hoy conocemos acerca de los estados de los gases y líquidos, lo que de paso le hizo ganar el premio Nobel en 1910.

Es importante señalar que la relación entre las principales variables involucradas (volumen, presión y temperatura) es fundamental para las ecuaciones establecidas por Boyle, Gay-Lussac, Avogadro y Waals. (¿Piensas que esto hubiera sido posible sin una correcta representación y manipulación algebraica de las variables 🙋?)

Con estos conocimientos ahora es posible trazar gráficas —llamadas *diagramas de fase*— para representar el cambio de un estado a otro de acuerdo con la temperatura y la presión. Un diagrama de fase tiene tres líneas que describen las combinaciones de temperatura y presión y las transiciones de estado: sólido a líquido, líquido a gas y sólido a gas, y viceversa. Estas líneas se intersectan en un punto —llamado *punto triple*—, y en esa exacta combinación una sustancia puede asumir cualquiera de las tres fases. El punto triple para el agua es a una temperatura de 0.01 °C y a una presión de 611.7 pascuales (0.006 presión atmosférica). Dicho de otra manera, en esta combinación de temperatura y presión, ¿el agua puede existir como líquida o sólida 😊! ¿Sabías que eso era posible? ¿Crees que existan otros estados de agregación que no conozcamos, como al alcanzar el 0 Kelvin? ¿Qué otras situaciones físicas se podrían representar 🤔?



Viridiana P. Márquez

Contrasta la información que investigaste con la que leíste y haz un esquema para representar situaciones de tu vida que varíen de manera inversamente proporcional. R. L.



Large empty rectangular box for drawing or writing.

... Comparte tus esquemas con dos o tres compañeros. Comenten de qué otro modo podrían usar esquemas como el anterior para representar situaciones de su vida diaria.

¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, anótalo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución. #AhoraVuelvo 😊 R. L.

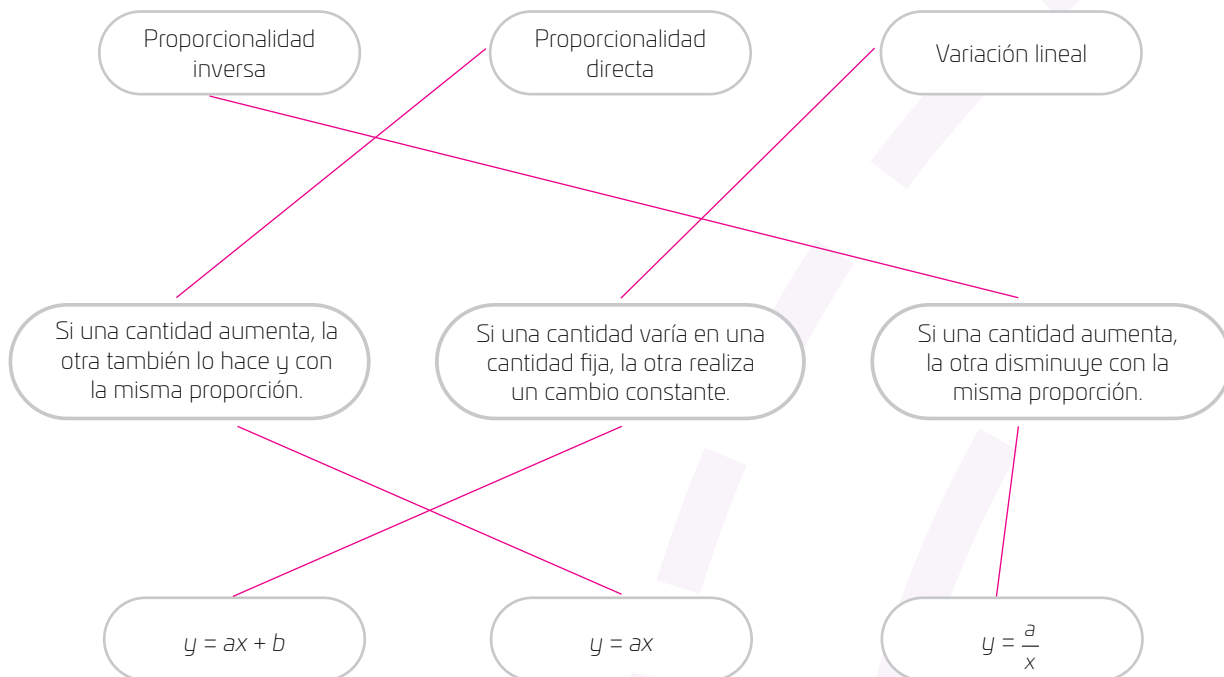
Five horizontal lines for writing.

© UNOi

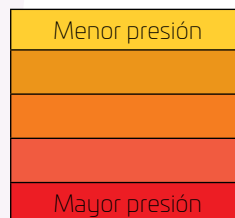


Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 Relaciona cada tipo de proporcionalidad con la situación que la ejemplifica. Luego, une cada situación con la expresión algebraica que le corresponde.



02 Usa la escala de colores para ordenar los objetos según la presión que ejercen cuando se les aplica una fuerza constante; observa el ejemplo.



- Escribe la fórmula que relaciona las magnitudes anteriores. Anota qué representa cada literal. R. M.

La expresión es $P = \frac{F}{A}$, donde P representa la presión que se ejerce, F , la fuerza que se aplica y A , el área sobre la que se aplica la fuerza.

- Explica qué tipo de proporcionalidad se presenta en la situación. R. M.

Es una proporcionalidad inversa porque, a medida que aumenta una magnitud, la otra disminuye de manera proporcional. Por ejemplo, con la misma fuerza y menor área, la presión es mayor.

- Comenta en grupo cuáles son las unidades que se usan en la expresión anterior y por qué es práctico omitirlas cuando se inicia la comprensión de un concepto nuevo.

¿Cómo se mide una variación inversa?

Propósito

En este **Espacio experimental** encontrarás la relación existente entre la temperatura y la presión de un gas.

Lee lo que te proponemos hacer y escribe qué resultado crees que obtendrás.

R. L.

Materiales

- ... Cinta métrica
- ... Plumón permanente
- ... Un frasco o un vaso de vidrio
- ... Un plato plano y hondo de vidrio
- ... Tres velas de diferente grosor
- ... Una botella de 500 mL con agua corriente (Debes dividirla en tres cantidades iguales)
- ... Un encendedor

Considera que...

- ... en cada uno de los experimentos deberás colocar la misma cantidad de agua.
- ... la altura que alcanzará el agua dentro del vaso se relaciona con la presión que exista dentro del vaso.



Procedimiento

Paso 1. Coloca en el plato la vela más delgada y agrega una tercera parte de agua.

Paso 2. Enciéndela y coloca encima de ella el frasco de vidrio.

Paso 3. Observa lo que ocurre dentro del vaso y una vez que la vela se apague marca con el plumón permanente la altura a la que llegó el agua.

Paso 4. Repite el mismo procedimiento con la vela mediana y, después, con la vela más ancha.

Paso 5. Anota tus resultados en la Tabla de registro y comprueba tus hipótesis. R. L.

Paso 6. Discute con tus compañeros los resultados del experimento:

- ... ¿Qué tipo de variación se presenta en esta situación?
- ... ¿Por qué es importante colocar la misma cantidad de agua en cada plato?
- ... ¿Qué otro experimento se podría realizar para comprobar empíricamente una proporcionalidad inversa?

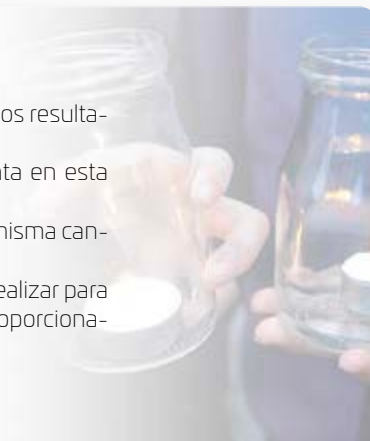


Tabla de registro

Díámetro de la vela

Altura del agua

Díámetro de la vela	Altura del agua

Compara tus resultados con la predicción que hiciste al principio y anota una conclusión.

R. L.

La velocidad a la que se desplaza un cuerpo, de manera simple, es igual a la distancia recorrida entre el tiempo requerido. Es decir:

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}}$$

Cuando la distancia a recorrer es constante, las variables son el tiempo y la velocidad. En el plano cartesiano de abajo, las tres gráficas representan esta última situación para distintas velocidades.

- Completa las oraciones.

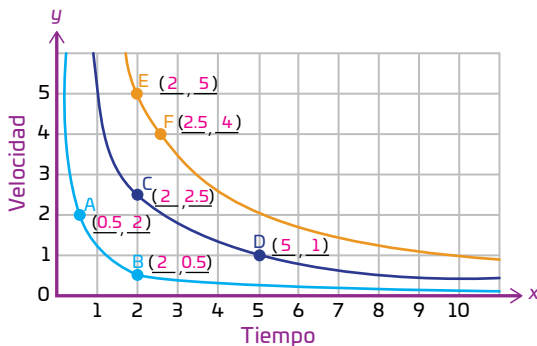
Cuando la distancia por recorrer es constante, se

trata de una relación de proporcionalidad inversa,

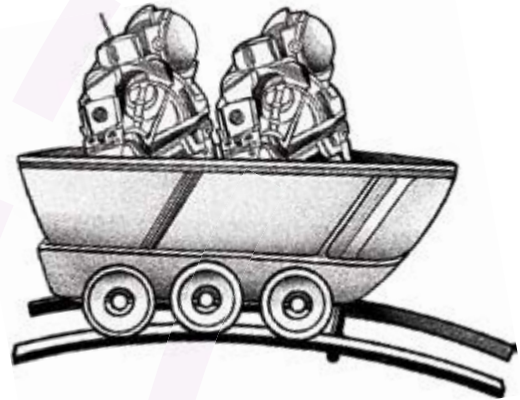
pues a medida que la velocidad aumenta,

el tiempo del recorrido disminuye con la misma proporción, y viceversa.

- Escribe las coordenadas de los puntos de las gráficas.



¡CONTINÚA LA MONTAÑA RUSA HASTA LA OTRA PÁGINA Y AYUDA A LOS ASTRONAUTAS A DESLIZARSE!



- Calcula el producto de las coordenadas de cada punto. Observa el ejemplo.

Punto A: $0.5 \times 2 = 1$

Punto B: $2 \times 0.5 = 1$

Punto C: $2 \times 2.5 = 5$

Punto D: $5 \times 1 = 5$

Punto E: $2 \times 5 = 10$

Punto F: $2.5 \times 4 = 10$

- Anota debajo de cada expresión algebraica el color de la gráfica que le corresponde.

$$y = \frac{10}{x}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{5}{x}$$

Anaranjado

Azul claro

Azul oscuro

- Analiza los resultados anteriores y escribe tus conclusiones.

R. M. Los productos obtenidos son, respectivamente, la constante de proporcionalidad inversa de la expresión algebraica que les corresponde.

La ley de gravitación universal establece que dos objetos con masa se atraen entre sí. La fuerza con la que se atraen, F , se obtiene como sigue:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

En esta expresión, F corresponde a la fuerza de atracción entre los cuerpos; G , a la constante de gravitación universal; m_1 y m_2 , a las masas de los dos cuerpos, y r , a la distancia que hay entre ellos. Por cuestiones de practicidad se omitieron las unidades (¡averígalas!). Además, si se consideran como constantes las masas de los cuerpos, podemos usar otra variable, es decir, si $M = Gm_1 m_2$, tenemos:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{M}{r^2}$$

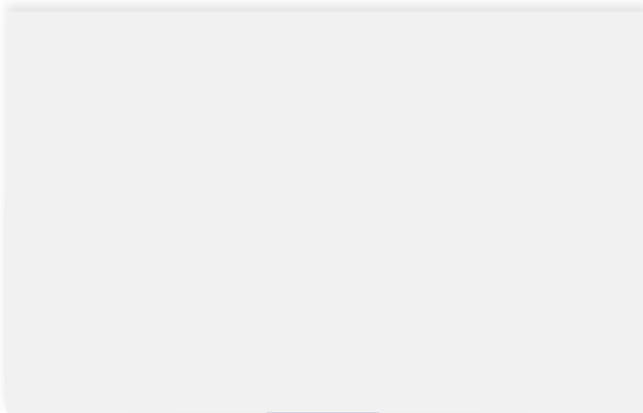
Por último, si igualamos $r^2 = R$, llegamos a esta expresión:

$$F = \frac{M}{R}$$

- Explica cuáles son la constante y las variables involucradas en la expresión anterior y por qué esta corresponde a una proporcionalidad inversa. **R. M.**

La constante es M , que es el producto de las masas y la constante G . Las variables son F , que es la fuerza de atracción entre los cuerpos, y R , que representa la distancia entre los cuerpos al cuadrado.

- Haz un esquema para representar que la expresión anterior corresponde a una proporcionalidad inversa. **R. L.**


CAMBIO CLIMÁTICO

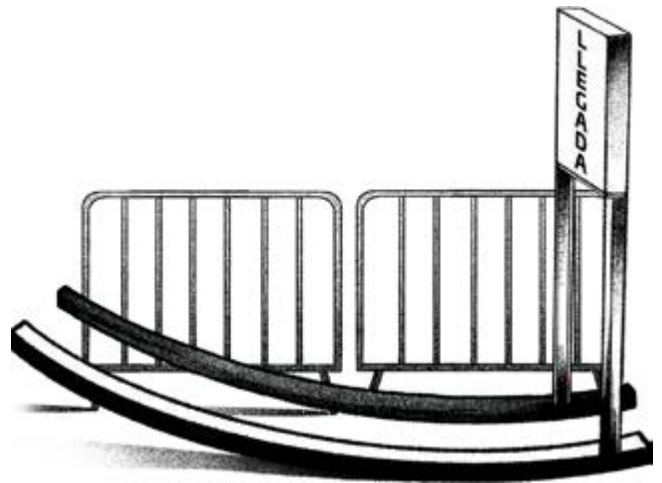
¿Te gustaría **combatir el cambio climático trabajando menos tiempo**? Pues no es tan disparatado. Las **oficinas e industrias producen grandes cantidades de contaminación**: transportes para llegar, edificios que consumen recursos (agua, luz y ventilación), envases de plástico para comer, computadoras generando gases y el camino de regreso... ¡Pfff!

Por ello, se contempla **reducir las jornadas laborales para trabajar seis horas al día, cuatro días a la semana** (en lugar de ocho horas diarias, cinco días) 🕒.

El problema es que, aunque ha habido **pruebas exitosas en Suecia** y otros países de Europa, **muchas empresas se niegan a implementar esto**, por **temor a que su productividad baje**. Sin embargo, matemáticamente no hay nada que temer: en las pruebas no ha habido reducción de productividad, pues **a menor tiempo laboral, mayor concentración y efectividad en la gente que trabaja**.

¿Cómo crees que sería el **futuro en cuanto a cambio climático** si se generalizara la jornada laboral corta 😊?

¡TERMINA AQUÍ LA MONTAÑA RUSA!



- Comenta en grupo las ventajas de simplificar expresiones, en contextos como la Física, para comprender lo que significan. También discute la importancia de identificar las unidades de medida involucradas en cualquier problema.

05 Utiliza GeoGebra y haz lo que se indica.

- Escribe en la barra de Entrada $y = \frac{1}{x}$, sin comillas, y aprieta Enter.
- Elige la herramienta Punto y haz clic sobre la curva que está en el primer cuadrante del plano cartesiano (o cuadrante I), es decir, en la curva que está arriba a la derecha. Obtendrás una construcción como la Figura 1.
- Selecciona y mueve el punto. Observa que solo se desplaza sobre la curva (en caso contrario, borra el punto y repite el paso anterior) y que, al moverlo, sus coordenadas cambian.

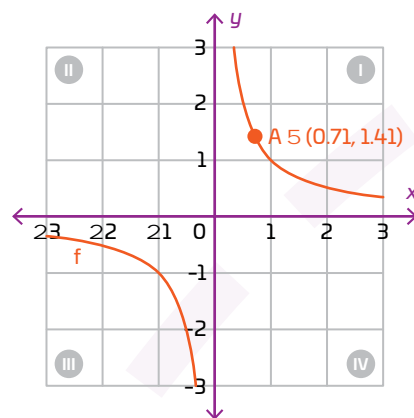


Figura 1

- Explica, con base en la gráfica, por qué se trata de una variación de proporcionalidad inversa.

A medida que una variable aumenta, la otra disminuye, y

viceversa.

- Anota por qué el punto se colocó en la curva del cuadrante positivo, es decir, en el cuadrante I. R. M.

Se colocó en esa curva porque las situaciones de proporcionalidad inversa corresponden a valores positivos; por ejemplo, no

tiene sentido hablar de una cantidad negativa de empleados.

- Abre una ventana nueva de GeoGebra.
- Representa de manera gráfica la situación siguiente, cuando varía el número de mangueras: Un contenedor de agua se llena en seis horas si se usan cuatro mangueras con el mismo caudal. Para hacerlo, primero obtén la expresión algebraica correspondiente.
- Coloca un punto en la curva del cuadrante I y desplázalo para verificar que solo se mueva sobre la curva.
- Repite el paso anterior, pero ahora coloca el punto sobre la curva del cuadrante III.

- Desplaza el segundo punto que colocaste y completa la tabla siguiente. En la tercera columna, anota el producto de x por y .

x	y	xy
-2	-12	24
-3	-8	24
-4	-6	24

- Completa la tabla. Para ello, desplaza el punto A sobre la curva hasta obtener los valores que se muestran.

x	y
0.5	2
1	1
2	0.5
4	0.25
5	0.2

- Escribe la expresión algebraica correspondiente.

$$y = \frac{24}{x}$$

- Completa la tabla con apoyo del primer punto que localizaste.

Número de mangueras	Tiempo de llenado (horas)
2	12
3	8
4	6
6	4
8	3

- Analiza y comenta en grupo los productos obtenidos en la última tabla. Anota tus conclusiones.

El producto obtenido es la constante de proporcionalidad

inversa ya que a mayor número de mangueras, menor

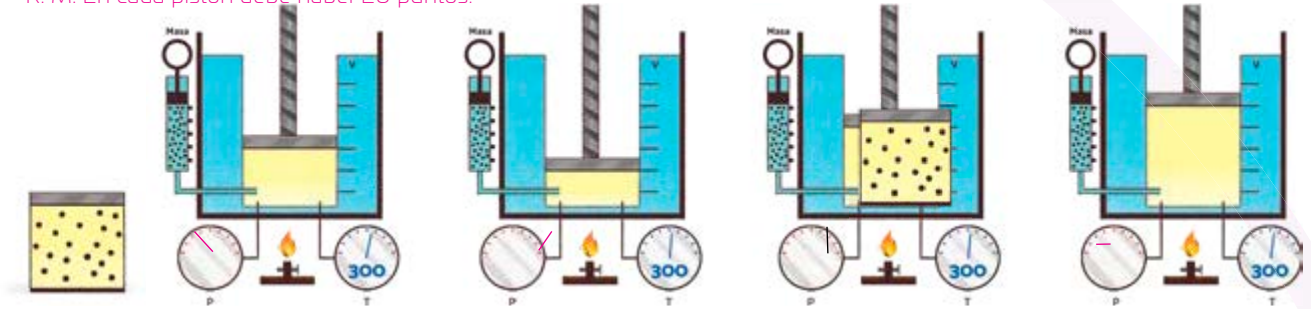
tiempo de llenado.

06 Lee y haz lo que se indica.

La ley de Boyle-Mariotte establece que a temperatura constante, el volumen de cierta cantidad de gas es inversamente proporcional a la presión que este ejerce. Es decir, $PV = T$, donde P es la presión, V , el volumen y T , la temperatura.

- Representa en los pistones la variación de la presión según varía el volumen. Observa el ejemplo. Considera la cantidad de gas que se muestra en el contenedor.

R. M. En cada pistón debe haber 20 puntos.



- Calcula el volumen del interior de un pistón cuya presión se redujo de 60 mmHg a 30 mmHg, y que al inicio tenía 200 mm³ de volumen. Considera que la temperatura y la masa del gas permanecen constantes.

El producto de la presión y el volumen es constante,

entonces se multiplican las cantidades y se divide entre la nueva presión: $60 \times 200 = 12000$, y $12000 \div 30 = 400$.

El volumen es 400 mm³.

- Calcula ahora la presión en el pistón anterior cuando el volumen es 75 mm³.

Como $12000 \div 75 = 160$, la presión es 160 mmHg.

- Rodea las expresiones que representan la situación anterior.

$$y = 12000x$$

$$y = \frac{12000}{x}$$

$$xy = 12000$$

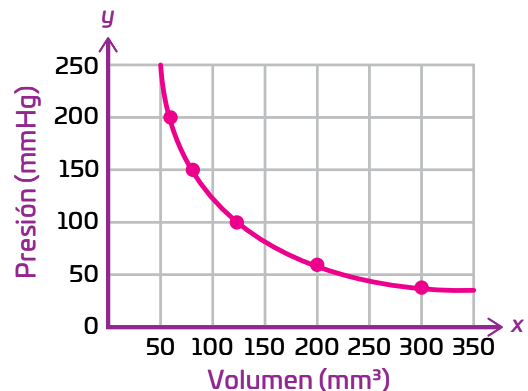
$$x = \frac{y}{12000}$$

- Regresa a la actividad 02 y comenta en grupo la relación entre la fórmula de esa página y la fórmula anterior.

- Completa la tabla con algunas parejas de valores.

Presión (mmHg)	Volumen (mm ³)

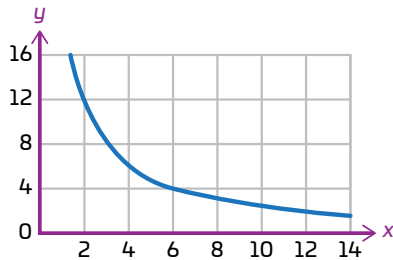
- Ubica las parejas anteriores como puntos en el plano cartesiano y bosqueja la gráfica que representa la situación.



¡Pon a prueba tu destreza matemática! Registra el tiempo que requieres para resolver cada ejercicio, ¡hazlo lo más rápido que puedas!

01 Haz lo que se pide.

- Obtén la expresión algebraica de la gráfica siguiente.



Expresión algebraica: $y = \frac{24}{x}$

- Inventa un problema para la gráfica anterior y resuélvelo. R. M.

Cuatro robots producen 10 pares de audífonos en seis horas.

¿Cuántos robots se necesitan para producirlos en dos horas?

Tu tiempo (en segundos):

R. L.

02 Rodea las tablas que no corresponden a una relación de proporcionalidad inversa.

x	y
2	4
3	6
4	8

x	y
1	10
2	5
3	3.3

x	y
0.5	20
0.6	16.66
0.7	14.28

x	y
1	6
2	4
3	2

Tu tiempo (en segundos):

R. L.

03 Lee los problemas e identifica el que corresponda a una situación de proporcionalidad inversa, resuélvelo y exprésalo algebraicamente. Explica tu respuesta. R. M.

a

En una fábrica automovilística, una máquina coloca 1245 tornillos en una jornada de ocho horas. ¿Cuántos tornillos coloca en tres horas?

b

En una fábrica, tres máquinas producen 12 000 botones en una jornada de ocho horas. ¿Cuántas horas tardarán en realizar el mismo trabajo si se compran 2 máquinas más?

c

Si 3 jornaleros realizan el trabajo en 6 horas, ¿en cuántas horas de trabajo terminan 6 jornaleros? Si cada jornalero cobra por cada hora de trabajo \$700, ¿cuánto se pagará por las horas trabajadas de los 6 jornaleros?

El problema b es de proporcionalidad inversa. La constan-

te de proporcionalidad inversa es $3 \times 8 = 24$, así que tres

máquinas más, es decir cinco, tardarían $24 \div 5 = 4.8$ horas.

La expresión es $y = \frac{4.8}{x}$, donde y es la cantidad de máquinas

y x, la cantidad de horas que deben trabajar.

Tu tiempo (en segundos):

R. L.

Calcula mentalmente tus puntos en cada ejercicio.

- Menos de 60 segundos (s): 15 puntos
- Entre 61 s y 120 s: 10 puntos
- Más de dos minutos: 5 puntos
- Puntos por respuesta correcta: 1
- Puntos por respuesta incorrecta: -1

Tabla de registro de puntos

Puntos totales

R. L.

Reflexiona sobre las preguntas de la sección **ANALIZO**, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R. L.



El vidrio no es un estado de agregación sólido, sino líquido.



¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R. L.

¡Regresa de nuevo a la página 69 y soluciona las dudas que tenías en ese momento! 🐼

