Esfera 3

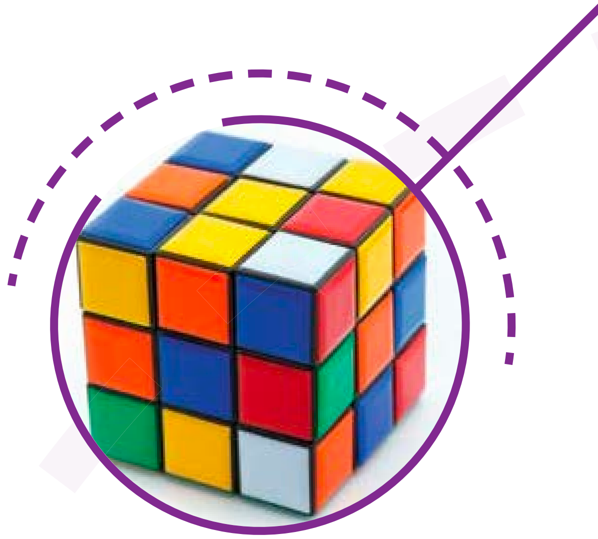
¿Cómo se diseña una escalera segura?

¿Existe otro algoritmo que no sea la suma, la resta, la multiplicación y la división?

¿Cómo se relaciona la raíz cuadrada con el binomio al cuadrado?

Directo a la raíz

Resuelve problemas de raíz cuadrada y aproximación de raíces.

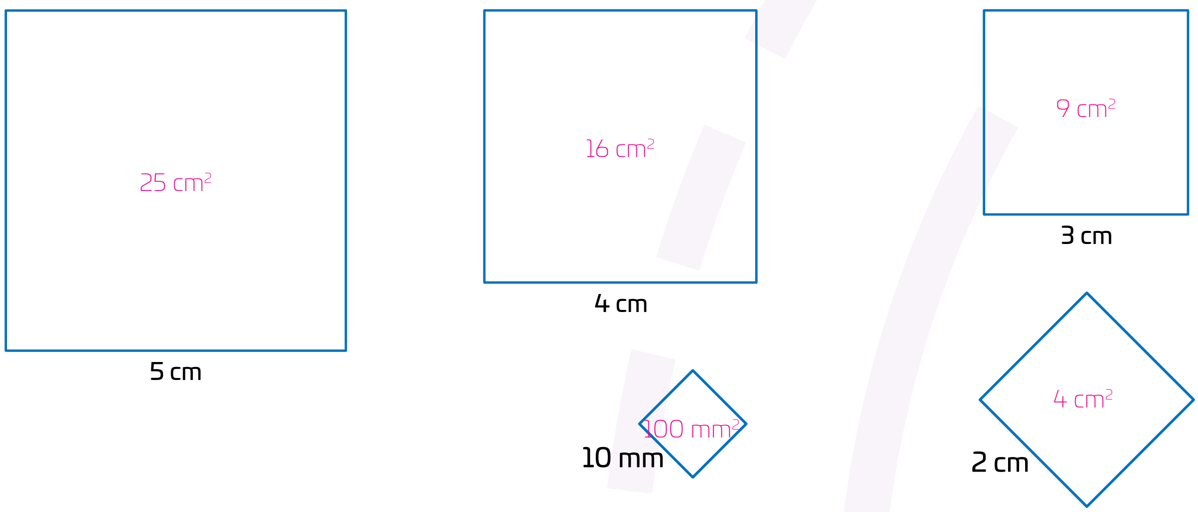


Comienza la Esfera de Exploración identificando qué actividades puedes responder con base en lo que ya sabes. No olvides resolverlas de nuevo en tu cuaderno al terminar. ¡Así descubrirás cuánto has avanzado!

01 Escribe los cuadrados de los siguientes números. +2

1^2 = 1	4^2 = 16	7^2 = 49
2^2 = 4	5^2 = 25	9^2 = 81
3^2 = 9	6^2 = 36	10^2 = 100

1.1 Dentro de cada cuadro, escribe la medida de su área.



02 Responde lo que se te pide. +4

¿Cuál es el número que, al multiplicarse por sí mismo, da 25? 5

¿Qué relación hay entre en número 7 y el 49?

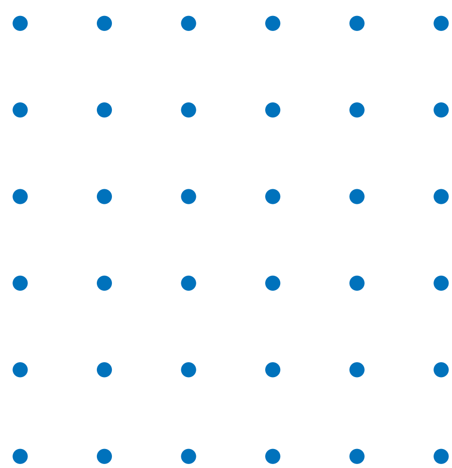
El 49 es el cuadrado del 7.

Observa la figura de la derecha. ¿Cuántos puntos hay en total? 36

¿Cuántos puntos tiene cada lado? 6

¿Puedes representar esa relación con una expresión matemática?

R. M. Sí, $36 = 6 \times 6$.



2.1 Si el área de un cuadrado es 121 unidades cuadradas, ¿cuánto mide cada lado? Explica tu razonamiento.

R. M. Cada lado mide 11 unidades, porque al elevar 11 al cuadrado da 121.

2.2 Escribe el procedimiento que seguirías para encontrar la medida de cada lado de un cuadrado si el área es de 125 unidades cuadradas.

R. L.

03 **Responde las preguntas.** +4

¿Hay algún número entero que multiplicado por sí mismo dé 50? Explica tu razonamiento.

R. M. No, porque 7 al cuadrado es 49 y 8 al cuadrado es 64. Así que debe ser un número entre 7 y 8; por lo que no hay un número entero.

¿Qué dos cuadrados perfectos están más cerca de 30? 25 y 36

¿Cuál es el cuadrado de un número entero más cercano a 90? 81

Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo.

	Antes de la Esfera de Exploración		Al terminar la Esfera de Exploración	
	Sí	No	Sí	No
1. Identifico el cuadrado perfecto de un número entero utilizando representaciones numéricas y geométricas.				
2. Determino la raíz cuadrada de un número.				
3. Aproximo la raíz de un entero que no es cuadrado perfecto.				
Puntos obtenidos:				

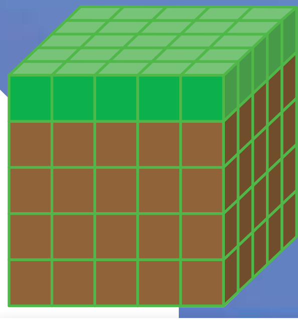
INVESTIGO

Aprendizaje esperado

... Resuelve problemas de raíz cuadrada y aproximación de raíces.

Keys

- Cuadrados y raíz cuadrada
- Aproximación de la raíz cuadrada



Por los colores seguro que identificas a qué juego nos referimos. ¿Lo has jugado? ¿qué has construido en este juego?

Mucho antes de que se creara un popular juego relacionado con pequeños cubos apilados formando toda clase de cosas en un mundo virtual, ya existían los cuadrados perfectos, los cuales son la base para estos bloques. Es decir, números que obtenemos multiplicando un número entero por sí mismo. Por ejemplo, este bloque de color café y verde visto desde la parte superior se puede ver como un cuadrado perfecto $5 \times 5 = 25$, compuesto por 25 bloques cuadrados ordenados en una configuración de 5 por 5. Lo mismo ocurrirá si vemos la figura desde cualquiera de sus caras.

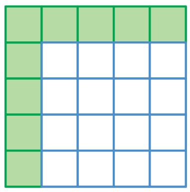
Si se desea construir una superficie más grande compuesta por este bloque básico, es suficiente con añadir más de estos cubos de manera ordenada. Y así, es posible construir desde prados planos hasta castillos medievales considerando las regularidades de figuras formadas por cuadrados perfectos.

¿Cuántos cuadrados hay en una superficie cuadrada formada por 35 cuadrados de lado? Puedes sacar tu calculadora, pero también podrías realizar el cálculo de la siguiente manera: $35^2 = (30 + 5)^2 = 30^2 + (2 \times 30 \times 5) + 5^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$. Incluso es posible aplicar esta misma estrategia para números que resultan de la diferencia de otros: $36^2 = (40 - 4)^2 = 1600 - (2 \times 40 \times 4) + 16 = 1296$. ¿Cómo saber si un número es cuadrado perfecto? Es muy sencillo encontrar un número cuadrado perfecto a partir de cualquier número entero.

Podemos entender a la potencia y a la raíz como operaciones inversas. Esto quiere decir que, si elevas un número, al sacar la raíz, regresas al número original: $4^2 = 16$ $\sqrt{16} = 4$

Por ejemplo, $9^2 = 9 \times 9 = 81$, de este modo 81 es un número cuadrado perfecto. En el sentido inverso, dado un número, para saber si se trata de un cuadrado perfecto es necesario obtener la raíz cuadrada de tal número. Hagamos una construcción más. Del cuadrado de lado 5 obtenemos el cuadrado perfecto $5^2 = 25$. El número 25 podemos descomponerlo en otros dos números cuadrados perfectos.

$$25 = 16 + 9 = 4^2 + 3^2$$



Si multiplicas por 2 (o por cualquier otro número n) a cada uno de los números que generan un cuadrado perfecto, tendrás como resultado que la suma de los cuadrados perfectos generan otro cuadrado perfecto. Tomemos a los cuadrados perfectos de los números anteriores (5, 4 y 3) y multipliquemos cada uno por 2.

$$5 \times 2 = 10 \text{ y } 10 \times 10 = 10^2 = 100$$
$$4 \times 2 = 8 \text{ y } 8 \times 8 = 8^2 = 64$$
$$3 \times 2 = 6 \text{ y } 6 \times 6 = 6^2 = 36$$

Hagamos la suma de los cuadrados perfectos correspondientes:

$$8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2$$

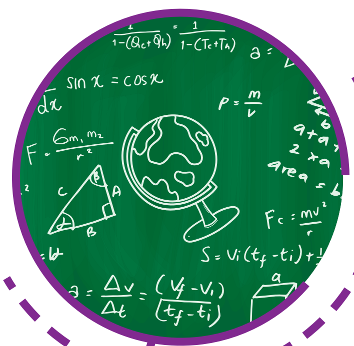
Lo mismo sucederá si multiplicas incluso por 11. $44^2 + 33^2 = 55^2$. Comprueba las operaciones. Esta relación entre los números cuadrados perfectos en el futuro te será muy útil.

En el juego que hemos mencionado, una disposición como la siguiente tiene como base para la construcción de sus caras delantera y trasera un cuadrado perfecto de $9^2 = 81$ bloques. Existen otros cuadrados perfectos útiles para su construcción ¿Cuáles identificas?

Guadalupe Simón

Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer y representa tus conclusiones.

Dibuja, resume, pega, ¡lo que quieras!



¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, anótalo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución.

01 Reúnanse en parejas, hagan lo que se pide y respondan.

› Escriban el cuadrado de cada número.

3^2 = 9	11^2 = 121	19^2 = 361	77^2 = 5929
6^2 = 36	15^2 = 225	22^2 = 484	88^2 = 7744
4^2 = 16	13^2 = 169	60^2 = 3600	99^2 = 9801

› En cada caso, escriban el número que, al multiplicarse por sí mismo, da como resultado el número mostrado.

100 = 10 × 10	144 = 12 × 12	49 = 7 × 7
36 = 6 × 6	4 = 2 × 2	81 = 9 × 9
16 = 4 × 4	1 = 1 × 1	196 = 14 × 14

› Rodea en un círculo números que sean cuadrados perfectos.

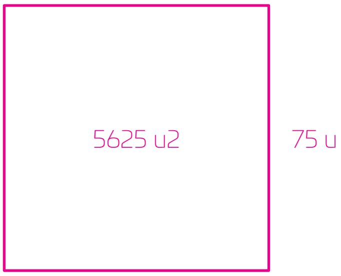
49 164 144 81 99 121 93 124
73 24 52 25 191
169 65 11 95

› A partir del área de cada cuadrado determina cuánto miden sus lados.

1156 cm²	3600 cm²	62500 cm²	14400 cm²
l = 34 cm	l = 60 cm	l = 250 cm	l = 120 cm

Escribe las estrategias que seguiste para encontrar los lados de cada cuadrado. R. L.

02 Dibuja un cuadrado cuya área sea de 5 625 unidades cuadradas.



¿Cuánto mide de cada lado del cuadrado? ¿Qué procedimiento seguiste?

75 unidades. R. L.

¿Qué relación hay entre la raíz cuadrada y el cuadrado de un número positivo?

R. M. Se pueden considerar operaciones inversas para los números positivos.

03 Completa la tabla.

a	22	29	31	35	43	47	54	59
a^2	484	841	961	1225	1849	2 209	2 916	3 481

04 Entre qué números se encuentra la raíz cuadrada de:

130 Entre 11 y 12

280 Entre 16 y 17

522 Entre 22 y 23

673 Entre 25 y 26

1011 Entre 31 y 32

› Reúnanse en equipos y compartan las estrategias que utilizaron para responder los ejercicios 3 y 4, si son diferentes, describan la que les es más sencillo.

R. L.

Espacio procedimental

El método de Perelmán

¿Sabías que antes de las calculadoras, los matemáticos ya sabían calcular raíces cuadradas?

Los antiguos babilonios (hace más de 4 000 años) desarrollaron un método ingenioso que aún usamos en la actualidad.

Sin embargo, a lo largo de la historia se han estudiado procedimientos más cortos que el algoritmo tradicional y que no requieran calculadora, por ejemplo, el de Yákov Perelmán.

Perelmán fue un divulgador de matemáticas y física que desarrolló un método bastante ingenioso.

Sigue los pasos para calcular la $\sqrt{13}$.

1. Encuentra dos cuadrados perfectos entre los que esté el número.

Por ejemplo, para aproximar $\sqrt{13}$, los enteros más cercanos entre los que está son 3 y 4, ya que sus cuadrados son 9 y 16 respectivamente y el 13 está entre ambos.

El 3 es el número menor y el 4 el mayor.

2. Calcula la diferencia del número con el cuadrado menor:

Para este caso, $13 - 9 = 4$.

3. Divide esa diferencia entre el doble del número menor.

El doble de 3 es 6 y $4 \div 6 = 0.6666$

4. Suma ese resultado al número menor.

En este caso:
$3 + 0.6666 = 3.6666$

Por tanto, $\sqrt{13} \approx 3.66$

05 Calcula la $\sqrt{50}$ por el método de Perelmán. Síguelo paso a paso.

1. Encuentra dos cuadrados perfectos entre los que esté el número.

$7^2 = 49$
$8^2 = 64$

Entonces $\sqrt{50}$ está entre 7 y 8, 7 es el número menor y 8 el mayor.

2. Calcula la diferencia del número con el cuadrado menor.

$50 - 49 = 1$

3. Divide esa diferencia entre el doble del número menor.

El doble de 7 es 14, entonces:

$1 \div 14 \approx 0.071$

4. Suma ese resultado al número menor.

$7 + 0.071 = 7.071$

$\sqrt{50} \approx 7.071$

06 Reúnanse en equipos y hagan lo que se les pide y respondan.

› Escribe los enteros entre los que se encuentra cada una de las raíces cuadradas.

3 $< \sqrt{11} <$ 4

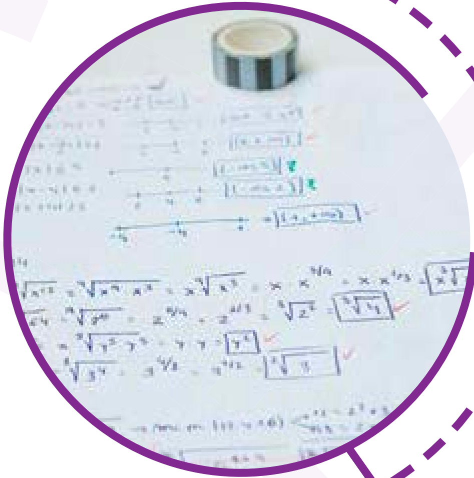
6 $< \sqrt{45} <$ 7

4 $< \sqrt{20} <$ 5

9 $< \sqrt{93} <$ 10

› ¿Qué número entero tiene una raíz cuadrada cercana a 6.3? ¿Qué método usaste para averiguarlo?

R. M. 40. Se calcula el cuadrado de 6.3 y el entero más cercano al resultado.



07 Calcula las raíces cuadradas de los números por el método que se indica.

› Aproximación por tanteo

$\sqrt{200}$

14.1

$\sqrt{301}$

17.3

$\sqrt{386}$

19.6

› Método del promedio: estima $\sqrt{417}$ iniciando con 9 y 10.

20.42

› $\sqrt{521}$ por el método de bisección.

22.8

› $\sqrt{579}$ por el algoritmo clásico.

24.06

› $\sqrt{907}$ por el método de Perelmán.

30.11

08 **Reúnanse en equipos y concluyan ventajas y desventajas de los métodos que han aprendido para calcular las raíces cuadradas de números positivos.** R. L.

Método	Ventajas	Desventajas
Aproximación por tanteo		
Del promedio		
Bisección		
Algoritmo clásico		
Perelmán		

09 **Reúnanse en equipos y resuelvan los siguientes problemas.**

› El área de un terreno cuadrado es de 1300 m^2. ¿Cuánto mide aproximadamente cada lado? Redondea a dos cifras decimales.

R. M. 36.05 m

› El área de una parcela cuadrada es de 72.5 m^2. ¿Cuánto mide aproximadamente cada lado de la parcela? Redondea a una cifra decimal.

R. M. 8.5 m

› Una ventana cuadrada tiene área de 1500 cm^2. ¿Cuánto mide su lado, aproximadamente?, ¿es mayor o menor a 38.9 cm?

38.72 cm es menor a 38.9 cm

› Si una pantalla tiene un área visible de 98 cm^2 y forma un cuadrado, ¿qué tan grande es cada lado? Aproxima a una décima.

9.9 cm

› Estima $\sqrt{3000}$ a la décima más cercana. Justifica el procedimiento que seguiste.

54.77

› Comprueba todos tus resultados con la calculadora. ¿Qué tan exactos fueron tus cálculos?

R. L.

SUBE NIVEL

¡Pon a prueba tu destreza trazando desarrollos planos! Registra el tiempo que requieres para resolver este reto. ¡Hazlo lo más rápido que puedas!

01 **Un terreno cuadrado tiene una superficie de 315 m^2. El arquitecto quiere construir un camino diagonal de una esquina a la opuesta. ¿Cuánto medirá ese camino, aproximadamente? Ten en cuenta que la medida de la diagonal de un cuadrado es equivalente a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de su base y su altura.**

R. M. 25.09 m

Puntaje R. L.

02 **Estima la raíz cuadrada de 1 254 con una cifra decimal usando el método de Perelmán.**

35.4

Puntaje R. L.

03 **Identifica el número faltante en la sucesión y justifica por qué debe ir allí.**

81, 121, ?, 225, 289

169, la sucesión corresponde a los cuadrados de los números impares iniciando con el cuadrado de 9.

Puntaje R. L.

04 **Con base en los problemas anteriores, responde:**

¿Qué método es más rápido para aproximar la raíz cuadrada?, ¿por qué?

R. M. El método de Perelmán, porque no se basa en prueba y error.

¿Cómo lograste identificar el número faltante en la sucesión?

R. M. Porque noté que todos los números en la sucesión son cuadrados perfectos. Al ver la sucesión de sus raíces cuadradas el patrón fue claro.

Puntaje R. L.

Calcula tus puntos en cada ejercicio.

- Menos de 120 segundos (s): 15 puntos
- Entre 121 s y 240 s: 10 puntos
- Más de cuatro minutos: 5 puntos
- Cinco puntos adicionales por no cometer ningún error.

Tabla de registro de puntos	
Puntos totales	R. L.

Reflexiona sobre la pregunta de la sección ANALIZO. ¿Ya puedes contestarla? Escribe una respuesta. Considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R. L.

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve nuevamente la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

¡Regresa a la página 83 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!