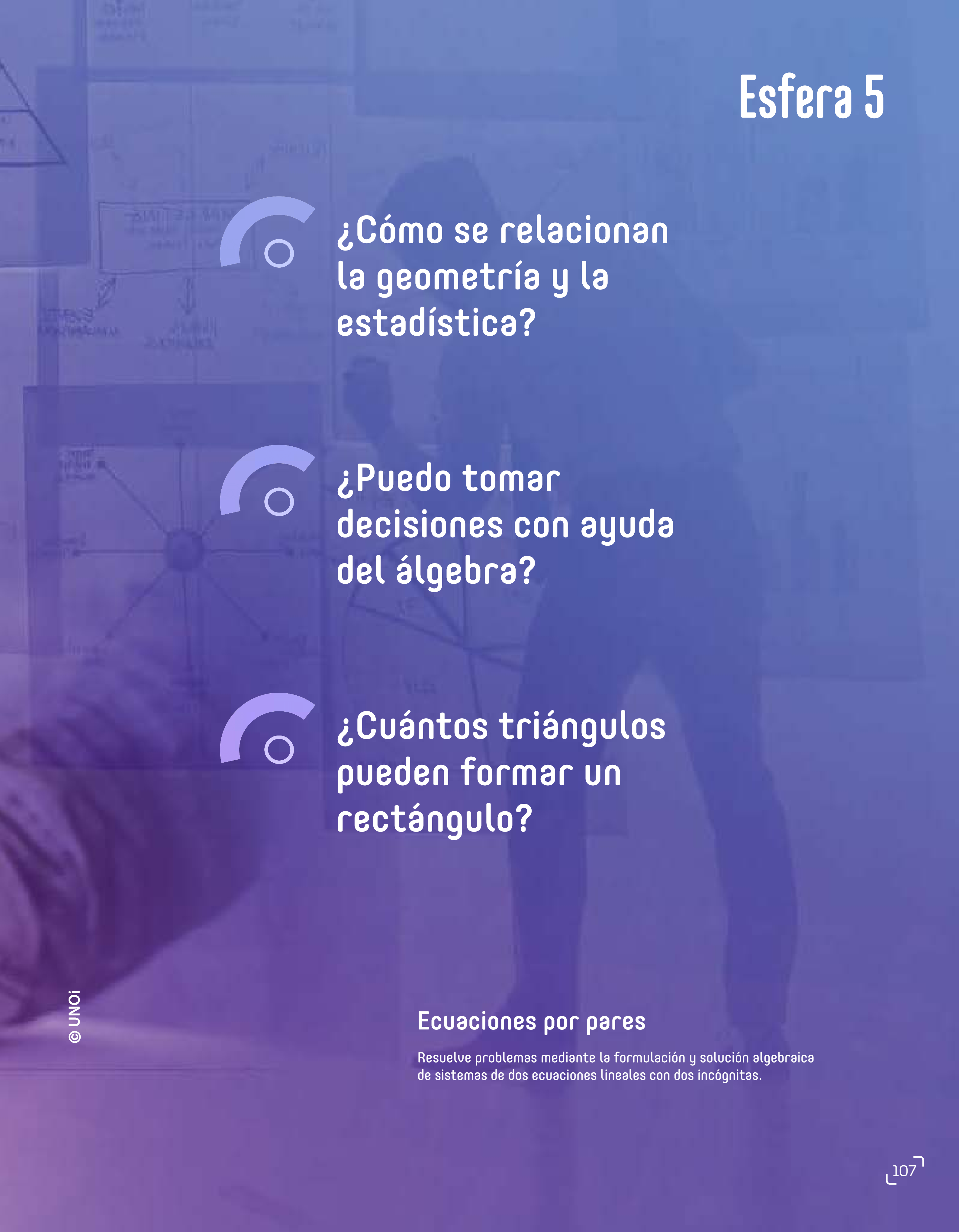


Esfera 5

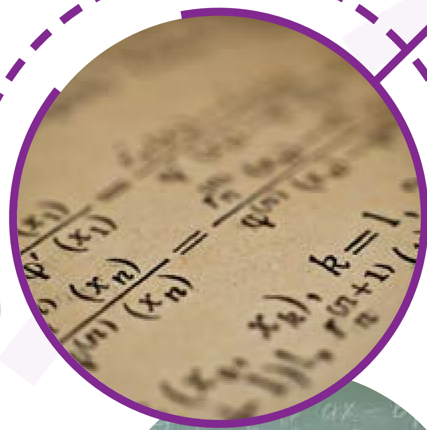
¿Cómo se relacionan la geometría y la estadística?

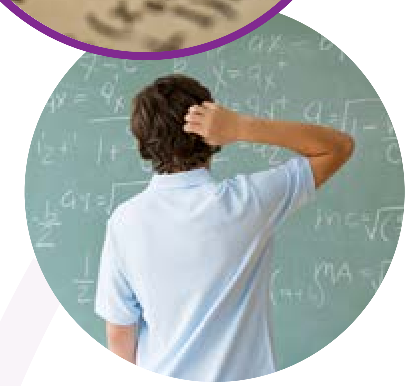
¿Puedo tomar decisiones con ayuda del álgebra?

¿Cuántos triángulos pueden formar un rectángulo?

Ecuaciones por pares

Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.





Comienza esta Esfera de Exploración identificando cuáles de estos ejercicios puedes contestar con base en lo que ya sabes y registra en la lista de cotejo cuántos puntos obtuviste. Al terminar la Esfera, responde nuevamente las actividades en tu cuaderno para que reconozcas cuánto avanzaste.

01 **Relaciona cada sistema de ecuaciones con su solución.** +2

$\begin{cases} 10x + 9y = -8 \\ 16x - 9y = -11 \end{cases}$	$x = \frac{11}{3}, y = -\frac{8}{3}$
$\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$	$x = -2, y = -1$
$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ x - 5y = 3 \end{cases}$	$x = -\frac{19}{26}, y = -\frac{1}{13}$
$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + y = 1 \end{cases}$	$x = \frac{22}{9}, y = -\frac{1}{9}$

1.1 Anota la estrategia que seguiste para resolver la actividad anterior. V

R. L.

1.2 Explica en qué consiste cada método para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas 😎. R. M. +2

Método de igualación

Se despeja la misma variable en ambas ecuaciones de modo que estas se puedan igualar. Luego, se obtiene el valor de la otra variable y, a partir de este, el valor de la primera variable.

Método de sustitución

Se despeja una de las variables en una de las ecuaciones y esta expresión se sustituye en la otra ecuación. Luego, se obtiene el valor de la otra variable y, a partir de este, el valor de la primera variable.

Método de suma y resta (reducción)

Se suman o restan las ecuaciones para eliminar una de las variables. Luego, se obtiene el valor de la otra variable y, a partir de este, el valor de la primera variable.

1.3 Anota los valores faltantes en los sistemas de ecuaciones de modo que la solución de cada uno sea la que se indica. +3

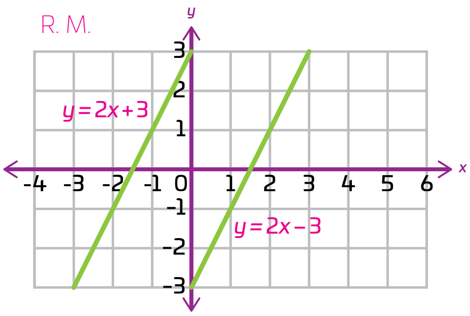
$\begin{cases} x - 1y = 5 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ — Solución: $x = 3$, $y = -2$

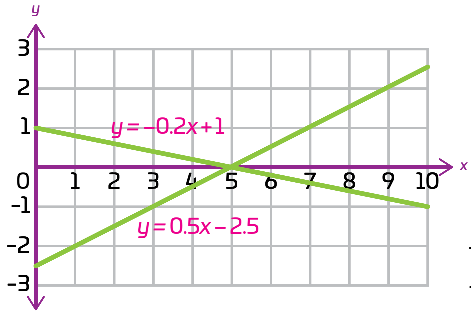
$\begin{cases} 4 + 1x = 2y \\ 2x - 1y = 1 \end{cases}$ — Solución: $x = 2$, $y = 3$

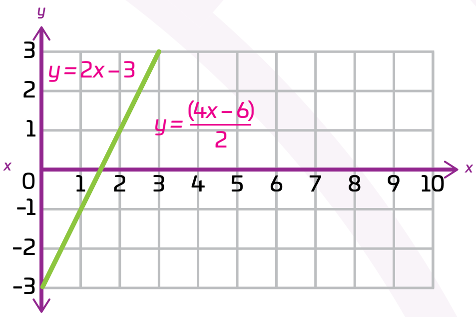
$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 1x + 1y = 1 \end{cases}$ — Solución: $x = \frac{8}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$

1.4 Escribe las ecuaciones de cada sistema y anota la solución de cada caso. +3

R. M.







$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

Solución: No hay solución.

$\begin{cases} y = -0.2x + 1 \\ y = 0.5x - 2.5 \end{cases}$

Solución: $x = 5$, $y = 0$

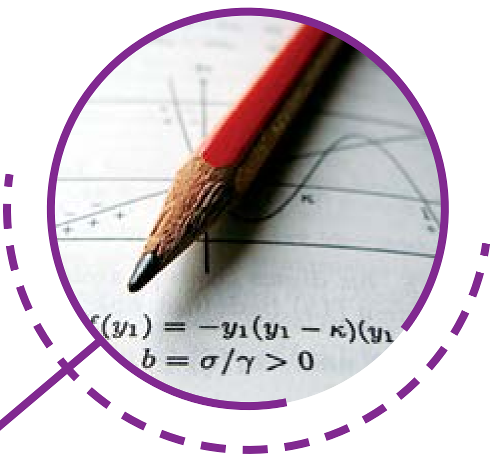
$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \frac{(4x - 6)}{2} \end{cases}$

Solución: Hay una infinidad de soluciones.

Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

	Antes de la Esfera de Exploración		Al terminar la Esfera de Exploración	
	Sí	No	Sí	No
1. Resuelvo sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas por diferentes métodos.	◯	◯	◯	◯
Puntos obtenidos:				

INVESTIGO



© UNOi

Aprendizaje esperado

› Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Keys

- Planteamiento de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas
- Solución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2
- Propiedades de la igualdad
- Solución algebraica de sistemas I (igualación, sustitución)
- Solución algebraica de sistemas II (suma y resta)

¿Solo hay sistemas de ecuaciones lineales? Hasta ahora, has visto que las ecuaciones que forman parte de los sistemas de ecuaciones son lineales, es decir, que representan dos rectas que se cruzan en un punto, no se cruzan o van una encima de la otra. Pero ¿será posible que una o ambas no describan una línea recta? Observa el siguiente sistema:

$$\begin{cases} xy = 4\,000\,000 \text{ cm}^2 \\ 2(x + y) = 10\,000 \text{ cm} \end{cases}$$

De la segunda ecuación, lo que tenemos es que $2(x + y) = 10\,000$. Dividiendo todo entre 2, tenemos que $x + y = 5000$, por lo que tenemos que $y = 5000 - x$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación, tenemos que $x(5000 - x) = 4\,000\,000$. Igualando a cero tenemos la siguiente ecuación por resolver: $5000x - x^2 - 4\,000\,000 = 0$, la cual es una ecuación cuadrática y al resolverla, resolveríamos también nuestro problema. Hasta ahora no sabemos si hay solución para nuestra ecuación en los números reales, pues ¿por qué habría de existir una?, ¿qué tal si existen muchas? Pero seguramente hay una forma para saberlo. De hecho, estas preguntas han invadido la historia de las matemáticas desde hace muchísimo tiempo. La historia de estas ecuaciones se puede remontar hasta la antigua Babilonia, es decir, dos mil años antes de nuestra era. En Mesopotamia, se escribieron sobre arcilla textos y problemas en sumerio para los cuales su solución dependía de resolver ecuaciones cuadráticas. En estos textos matemáticos se usaba un sistema de numeración sexagesimal, el cual seguimos utilizando en la medida del tiempo y los ángulos. Cabe señalar que este conocimiento tuvo como fuente su gran actividad económica y astronómica. Tiempo después, entre 127 y 141 d. n. e., este conocimiento fue utilizado en Alejandría por Ptolomeo para sus avances astronómicos.

En la Grecia antigua, a partir del año 100 a. n. e., también ya se resolvían las ecuaciones de segundo grado, pero con métodos geométricos, métodos que también utilizaban para resolver algunas ecuaciones de grado superior y al parecer fue Diofanto de Alejandría quien le dio un mayor impulso a las ecuaciones de segundo grado; sin embargo, la solución de las ecuaciones de segundo grado fue introducida en Europa por el matemático judeoespañol Abraham bar Hiyya, en su *Liber Embadorum*.

Por otro lado, el matemático indio Brahmagupta (aprox. 628 d. n. e.), obtuvo un procedimiento para resolver la ecuación de la forma: $x^2 - 10x = -9$. Lo que propuso fue multiplicar el número absoluto, −9, por el [coeficiente del] cuadrado, 1; con lo que se tiene que el resultado es −9. Lo que quiere decir que tenemos dos valores posibles para nuestra x. Ahora, para obtener el o los valores de y, procedemos a sustituir estos valores de x en la ecuación del perímetro:

$$2(x + y) = 10\,000 \text{ si y solo si } 2(1\,000 + y) = 10\,000,$$
$$\text{si y solo si } 2\,000 + 2y - 10\,000 = 0,$$
$$\text{si y solo si } 2y = 10\,000 - 2\,000, \text{ es decir, } 2y = 8\,000, \text{ por tanto } y = 4\,000.$$

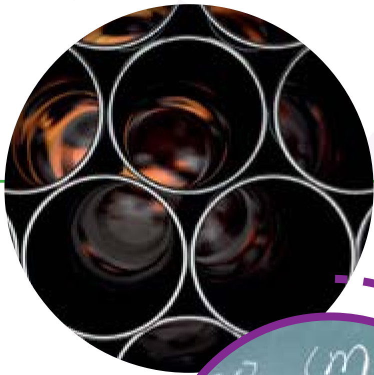
Sustituyendo el segundo valor de x tenemos que:

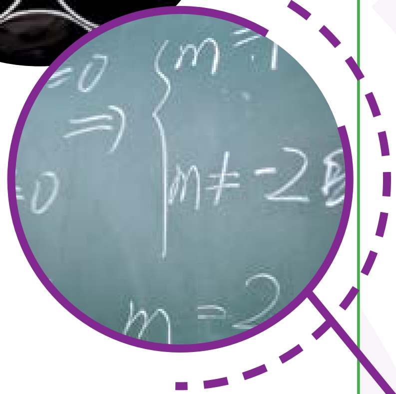
$$2(x + y) = 10\,000 \text{ si y solo si } 2(4\,000 + y) = 10\,000$$
$$\text{Si y solo si } 8\,000 + 2y = 10\,000$$
$$\text{Si y solo si } 2y = 10\,000 - 8\,000, \text{ es decir, } 2y = 2\,000, \text{ por tanto } y = 1\,000.$$

¿Sigues pensando que la geometría solo sirve para trazar figuras y cuerpos geométricos?¿Fue difícil? ¿Qué otras soluciones podrías proponer?

Viridiana P. Márquez

Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer y escribe un problema en el que utilices la geometría y el álgebra para resolverlo. R. L.





Dibuja, resume, pega, ¡lo que quieras!

Pide a un compañero que lo resuelva y que escriba la solución. Si aún no lo logra, pídele que vuelva a él cuando termine esta Esfera de Exploración.

¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, anótalo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución. R. L.

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 Une cada sistema con su solución.

$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

$x = 11, y = -2$

$x = 5, y = 1$

$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 7x - 6y = 8 \end{cases}$

$x = 1, y = 2$

$x = 2, y = 1$

$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -1x + 2y = 2 \end{cases}$

$x = 0.5, y = 0$

$x = 0, y = 1$

$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 1x + 2y = 8 \end{cases}$

$x = 2, y = 3$

$x = 0, y = 1.5$

› Escribe cómo elegiste la solución de cada sistema. R. L.

› Comenta en grupo por qué una pareja de valores puede satisfacer una de las ecuaciones de un sistema, pero no ambas.

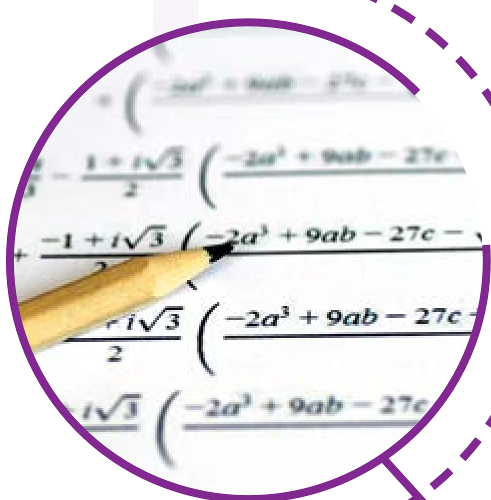
AGENDA UNOi HACIA EL FUTURO

CAMBIO CLIMÁTICO

¿Sabías que las **ecuaciones** podrían usarse para **contrarrestar el cambio climático**? Para analizar el clima se usan "**modelos generales de circulación**", que son **desarrollos matemáticos para representar de manera algebraica la atmósfera y los océanos**, que se basan en las ecuaciones Navier-Stokes (las cuales calculan el comportamiento termodinámico de fuentes de energía como la radiación y el calor latente).

Con estos modelos se crean **complejas simulaciones de la atmósfera que permiten hacer predicciones sobre la evolución del clima**. Y, ya que estas son más precisas y acertadas según evoluciona la tecnología, todo parece indicar que eventualmente tendremos modelos exactos sobre el clima que nos permitan cambiarlo. Sin embargo, la **cantidad exorbitante de variables** involucradas en estos modelos hace pensar que lo anterior no sucederá tan pronto. Y aunque muchos consideran que esto se resolverá con el uso de **computadoras cuánticas**, todavía faltan desarrollos para comprobarlo.

¿**Qué consecuencias tendría en el mundo** que el cambio climático pudiera contrarrestarse con ecuaciones? ¿Qué otros problemas globales se podrían resolver con ecuaciones?



Espacio procedimental

¿Cómo resuelvo un sistema de ecuaciones con el método de igualación?

1. Despejo la misma variable en ambas ecuaciones.
2. Igualo las expresiones resultantes y despejo la variable; ese es uno de los resultados.
3. Sustituyo el resultado anterior en alguna de las ecuaciones iniciales para obtener el valor de la otra variable.

Por ejemplo, para $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

1. Despejo x en ambas ecuaciones:

$$x = 6 - 2y \qquad x = \frac{2+y}{2}$$

2. Igualo las expresiones y despejo y:

$$6 - 2y = \frac{2+y}{2}$$
$$y = 2$$

3. Sustituyo el resultado anterior y obtengo el valor de x:

$$x + 2y = 6$$
$$x = 6 - 2y = 6 - 4 = 2$$

La solución es $x = 2$, $y = 2$.

02 Analiza el siguiente sistema de ecuaciones y haz lo que se indica 🕵.

$$\begin{cases} 7x + 9y = 42 \\ 12x + 10y = -4 \end{cases}$$

1 Se despejan x y y:

$$y = \frac{42 - 7x}{9}$$
$$x = \frac{42 - 9y}{7}$$

2 Se despejan x y y:

$$y = \frac{-4 - 12x}{10}$$
$$x = \frac{-4 - 10y}{12}$$

3 Se igualan las ecuaciones:

$$\frac{42 - 7x}{9} = \frac{-4 - 10y}{12}$$
$$\frac{42 - 9y}{7} = \frac{-4 - 12x}{10}$$

› Anota cuál fue el error que se cometió al resolver el sistema de ecuaciones.

No se igualaron las expresiones correctas, se invirtieron.

› Haz el procedimiento correcto y obtén la solución.

$$\frac{42 - 7x}{9} = \frac{-4 - 12x}{10}$$
$$\frac{42 - 9y}{7} = \frac{-4 - 10y}{12}$$

Por tanto, la solución es $x = -12$; $y = 14$

03 Relaciona cada sistema de ecuaciones con su solución.

$3x + 2y = 4$
$2x + 2y = 2$

$8x + 4y = 12$
$8x - 4y = 4$

$x + y = 3$
$2x + y = 5$

$x = 2$
$y = -1$

$x = 2$
$y = 1$

$x = 1$
$y = 1$

$x + 2y = 6$
$2x + y = 6$

$x = 2$
$y = 2$

Espacio procedimental

¿Cómo resuelvo un sistema de ecuaciones con el método de sustitución?

1. Despejo una de las variables en una de las ecuaciones.
2. Sustituyo el valor obtenido en la otra ecuación y despejo la variable; ese es uno de los resultados.
3. Sustituyo el resultado anterior en alguna de las ecuaciones iniciales para obtener el valor de la otra variable.

Por ejemplo, para $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

1. Despejo x en la primera ecuación:

$$x = 6 - 2y$$

2. Sustituyo x en la segunda ecuación y despejo y:

$$2x - y = 2$$
$$2(6 - 2y) - y = 2$$
$$y = 2$$

3. Sustituyo el resultado anterior y obtengo el valor de x:

$$x + 2y = 6$$
$$x = 6 - 2y = 6 - 4 = 2$$

La solución es $x = 2$, $y = 2$.

04 **Analiza y resuelve.**

a. Completa el paso que falta para resolver el sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución.

$$\begin{cases} 2x + y = 42 \\ 4x - 2y = 36 \end{cases}$$

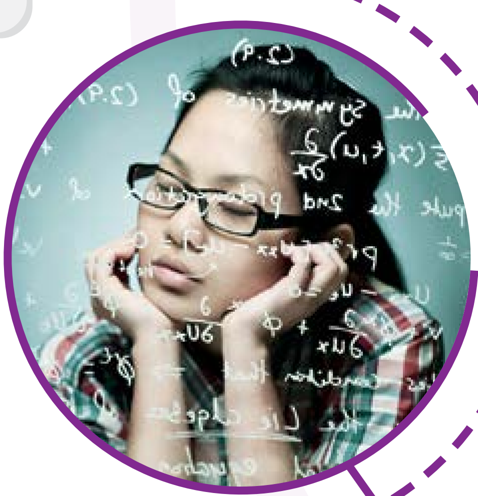
Al despejar de la ecuación 1 la variable y:
$2x + y = 42$
$y = 42 - 2x$

Al sustituir el resultado en la ecuación 2.
$4x - 2y = 36$
$4x - 2(42 - 2x) = 36$
$4x - 84 + 4x = 36$
$x = 15$

R. M. Al sustituir el valor de x en la ecuación de y encontrada en el primer paso: $y = 42 - 2x$. Dado que $x = 15$, $y = 42 - 2(15)$; $y = 12$

b. Compara el tiempo de la resolución de este sistema de ecuaciones usando el método de sustitución que con el método de igualación. Explica cuál te parece más práctico.

R. M. Utilicé menor tiempo con el método de sustitución, por eso me parece más práctico.



Espacio procedimental

¿Cómo resuelvo un sistema de ecuaciones con el método de suma + y resta — (Método de reducción)?

1. Determino cuál variable se eliminará al sumar o restar las ecuaciones (de ser necesario, multiplico ambos lados de una ecuación).
2. Sumo o resto las ecuaciones y despejo la variable; ese es uno de los resultados.
3. Sustituyo el resultado anterior en alguna de las ecuaciones iniciales para obtener el valor de la otra variable.

Por ejemplo, para $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

1. Para eliminar la variable y, multiplico la segunda ecuación por 2:

$$4x - 2y = 4$$

2. Sumo las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$5x + 0 = 10$$
$$x = 2$$

3. Obtengo el valor de y:

$$x + 2y = 6$$
$$y = (6 - 2) \div 2 = 2$$

La solución es $x = 2$, $y = 2$.

05 **Analiza los pasos y ordena de 1 a 5 el procedimiento.**

5 Suma ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -x - y = -2 \\ 2x + y = 5 \\ \hline x = 3 \end{array}$$

2 Elige la variable que deseas eliminar.

Para eliminar a la variable x necesitas multiplicar a la ecuación 1 por el factor (–2).

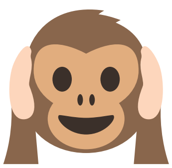
$$-2x - 2y = -4$$
$$2x + y = 5$$

4 Ahora elimina la variable faltante. Para hacerlo, multiplica la ecuación 1 por (–1):

$$-x - y = -2$$
$$2x + y = 5$$

1 Escribe el sistema de ecuaciones.

$$x + y = 2$$
$$2x + y = 5$$

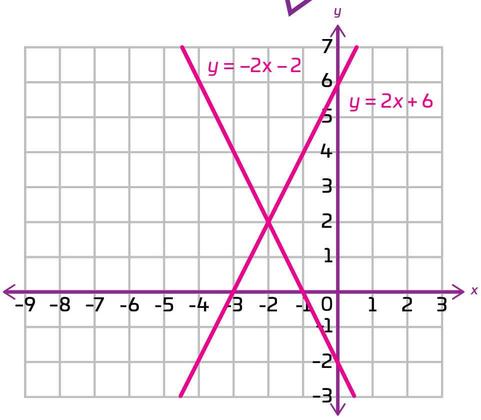


3 Suma ambas ecuaciones:

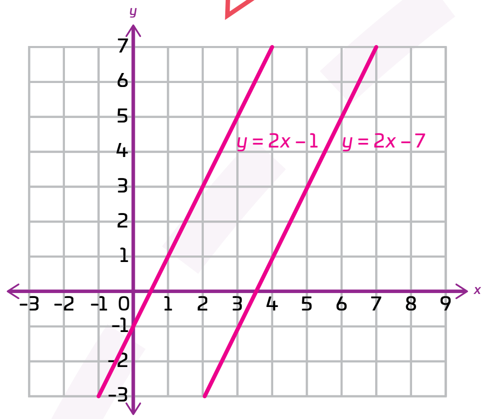
$$\begin{array}{r} -2x - 2y = -4 \\ 2x + y = 5 \\ \hline -y = 1 \\ y = -1 \end{array}$$

06 **Grafica cada sistema de ecuaciones.**

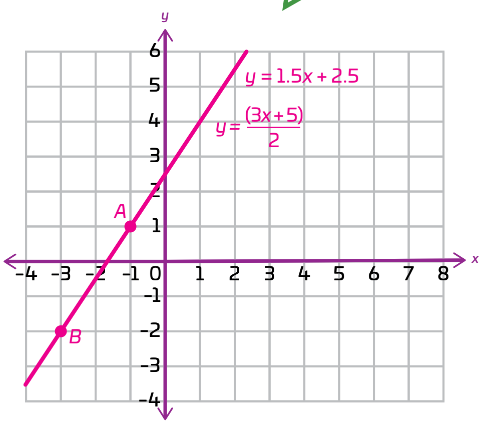
$$\begin{cases} y = -2x - 2 \\ y = 2x + 6 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 7 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = 1.5x + 2.5 \\ y = \dfrac{(3x + 5)}{2} \end{cases}$$



- Explica cómo se representa gráficamente cada tipo de solución. R. M.

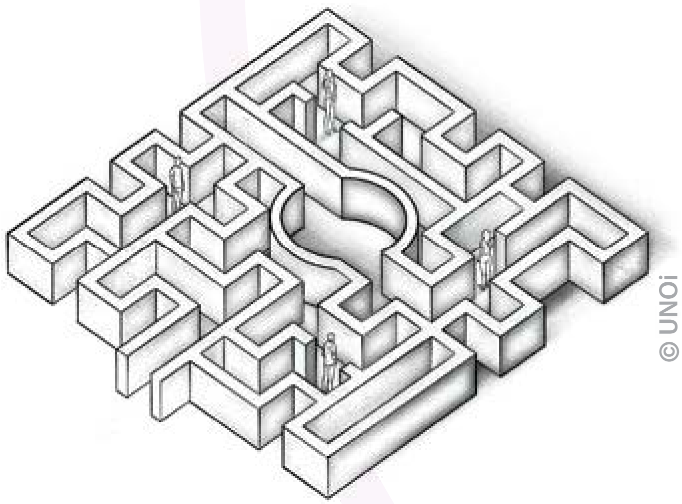
Cuando hay una sola solución, es de la intersección de dos rectas.

Cuando no hay solución, se trata de rectas paralelas.

Cuando hay una infinidad de soluciones, las dos rectas coinciden en todos sus puntos, es decir, son iguales.

- Comenta en grupo los tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones. Piensa en ejemplos de cada tipo y anota tus conclusiones. R. L.

¡ENCUENTRA DOS CAMINOS QUE SE CRUCEN!



07 **Haz lo que se indica.**

- Abre una nueva ventana de GeoGebra.
- Grafica las rectas $2x + 1 = 0$ y $3x - 2 = 0$. Obtendrás una imagen como la figura 1.
- Utiliza la función "Interseca" para obtener el punto de intersección.
- Escribe el punto que se obtiene.

Punto de intersección: (3, 7)

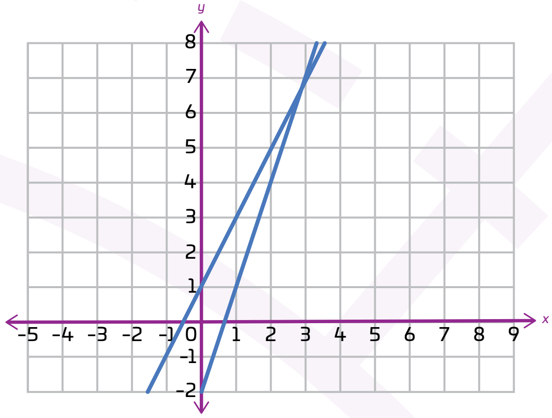


Figura 1

- Explica por qué ese punto es la solución del sistema siguiente: R. M.

$$2x + 1 = 0$$
$$3x - 2 = 0$$

Al evaluar el mismo valor de $x = 3$, se obtiene el mismo resultado. Es decir 7, que es el punto de intersección. Por lo que es la solución.

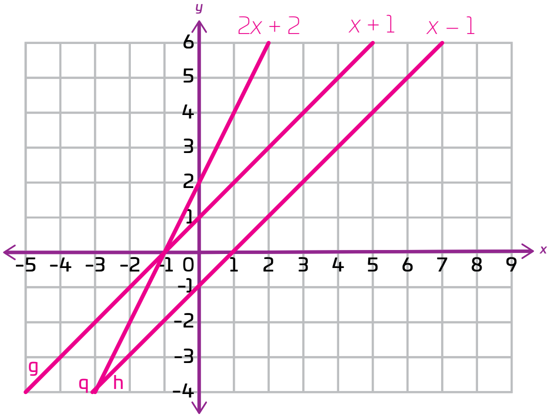


Figura 2

- Grafica en Geogebra las rectas siguientes:

$$x + 1 = 0,\ 2x + 2 = 0,\ \frac{(2x + 2)}{2} = 0,\ x - 1 = 0.$$

- Obtén la intersección de cada par de rectas con la función "Interseca". Traza las gráficas en la figura 2.
- Escribe otros pares de expresiones para verificar los resultados anteriores.

- Explica qué significa la intersección de las rectas en cada caso. R. M.
Hay tres casos: una solución única, una infinidad de soluciones y ninguna solución.

- Inventa un problema con algunas de las rectas anteriores.
R. L.

- Explica por qué para comprobar que un sistema de dos ecuaciones tiene una infinidad de soluciones, basta comprobar que dos pares de puntos cumplen las ecuaciones del sistema. R. M.
Porque dos puntos definen una recta y si las rectas coinciden quiere decir que hay una infinidad de soluciones.

- Comparte tu problema con un compañero. Anota cómo lo resolvió. R. L.

SUBE NIVEL

¡Pon a prueba tu destreza matemática! Registra el tiempo que requieres para resolver cada ejercicio, ¡hazlo lo más rápido que puedas!

01 Lee y haz lo que se te pide.

a) Resuelve el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 8 \\ 3x + 4y + 2z = -1 \\ 2x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

Utilizando el método de reducción entre la ecuación 1 y la 2.

Eliminar y:

$-8x - 4y - 6z = -16$ Ecuación 1
$3x + 4y + 2z = -1$ Ecuación 2
$-5x + 0 - 4z = -17$

Utilizando el método de reducción entre la ecuación 2 y la 3.

Eliminar y:

$8x - 4y + 20z = 12$ Ecuación 3
$3x + 4y + 2z = -1$ Ecuación 2
$11x + 0 + 22z = 11$

Utilizar el método de reducción con las nuevas ecuaciones encontradas.

$-5x + 0 - 4z = -17$
$11x + 0 + 22z = 11$
$66z = -132$
$z = -2$

Sustituir el valor de la variable z en una de las ecuaciones encontradas.

$-5x + 0 - 4z = -17$
$-5x - 4(-2) = -17$
$x = 5$

Sustituir el valor de la variable x dentro de una de las ecuaciones iniciales.

$2(5) - y + 5(-2) = 3$
$y = -3$

Tu tiempo (en minutos) R. L.

02 Realiza lo que se solicita.

a) Determina cuál de los sistemas de ecuaciones no tiene solución.

1
$2x - y = 2$
$4x - 2y = 5$

2
$x + 3y = 7$
$2x - y = 0$

No tiene solución el sistema 1 ya que no hay valores para x e y que cumplan con ambas ecuaciones.

b) Subraya el tipo de gráficas que corresponden a un sistema de ecuaciones de dos incógnitas que no tiene solución.

Líneas paralelas

Líneas no paralelas, pero sin intersección

Líneas que se intersectan en un punto

Tu tiempo (en minutos) R. L.

Calcula mentalmente tus puntos en cada ejercicio.

- Menos de 5 minutos: 15 puntos
- Entre 5 minutos y 8 minutos: 10 puntos
- Más de 9 minutos: 5 puntos
- Puntos por respuesta correcta: 1
- Puntos por respuesta incorrecta: –1
- Cinco puntos adicionales por cada procedimiento o estrategia correcta.

Tabla de registro de puntos	
Puntos totales	R. L.

Reflexiona sobre las preguntas de la sección ANALIZO, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R. L.

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R. L.

¡Regresa de nuevo a la página 111 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!