Sesión 1

Propósito

En la sección **Analizo**, los alumnos reflexionarán sobre la importancia de dar solución a diferentes tipos de problemas por medio de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, y discutirán acerca de la existencia de sistemas con *n* número de incógnitas y sus usos.

Tip 1. Pida al grupo que traten de responder las preguntas detonadoras de la sección **Analizo**, y solicite que busquen la relación entre las preguntas y los aprendizajes esperados. Promueva la diversidad de opiniones entre los alumnos a fin de enriquecer la conversación. Pida al grupo que observe la imagen de la **página 120** y pregunté cómo piensan que se relaciona con los contenidos de la **Esfera de Exploración** que están por comenzar; permita que expresen sus ideas al respecto.

Tip 2. Pregunte a los alumnos qué es un sistema de ecuaciones, esto con la finalidad de retomar sus aprendizajes previos. Una vez que los alumnos debatan sobre este concepto, pregunte qué implicaría tener un sistema de $n \times n$, tal como lo indica la segunda pregunta de la **página 121**. Agregue: *¿A qué creen que se refiere $n \times n$?*

Tip 3. Plantee un problema de dos ecuaciones con dos incógnitas para que los alumnos encuentren la edad de una persona. Cuestiónelos: *¿Qué elementos previos poseen para resolverlo?, ¿Podrían plantear un problema similar?*

Tip 4. Recuerde a los alumnos los métodos de solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, y enfatice que en esta **Esfera** lo fundamental será aprender a plantear el sistema de ecuaciones que darán solución a varios problemas.

Sesión 2

Propósito

En la sección **Reconozco**, los alumnos resolverán problemas con sistema de ecuaciones y lo harán con algún método que conozcan. En la sección **Investigo**, los alumnos conocerán estrategias para la resolución de dichos problemas.

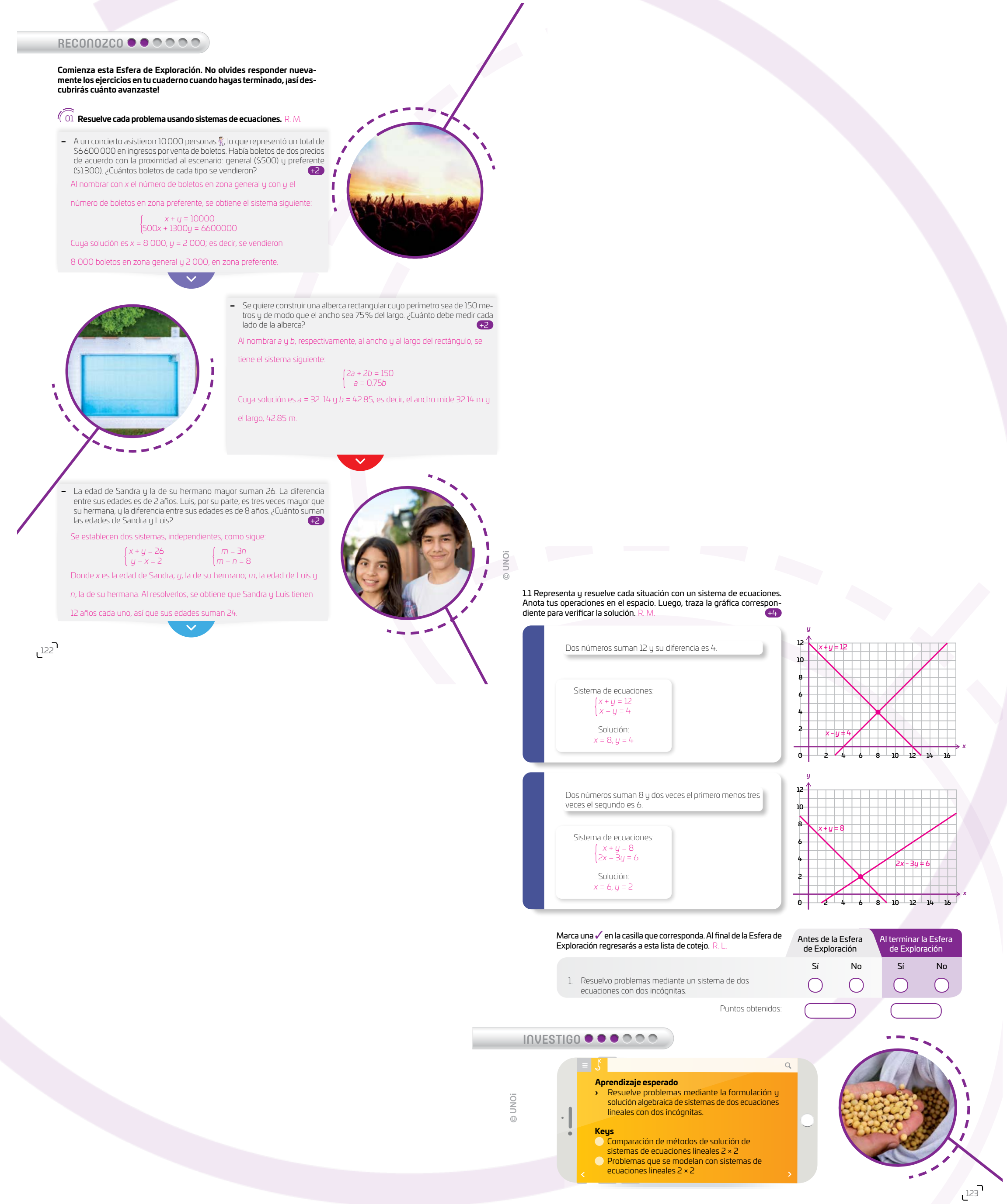
Tip 1. Organice al grupo en parejas para que completen la sección **Reconozco**. Cuando terminen, organice equipos y pídales que elijan el planteamiento que les parezcan más pertinente de cada problema y que los escriban y guarden para corroborar sus respuestas al final de la **Esfera.**

Tip 2. Al responder la lista de cotejo, pregunte a los alumnos sus dudas de los ejercicios y coménteles son únicamente de exploración, pero que su puntaje les da una idea de su nivel de conocimiento: si obtuvieron de 1 a 4 puntos, deben repasar estos temas; de 5 a 7, su dominio del tema es superficial, deben repasar algunos temas; de 8 a 10, su dominio del tema es profundo. Pida que apoyen a quienes tienen puntaje bajo, esto le ayudará a nivelar el conocimiento del grupo.

Tip 3. Para la sección **Investigo**, solicite a los estudiantes que indaguen sobre los contenidos que se abordarán. Pida que consulten los recursos **Key:** *Comparación de métodos de solución de sistemas 2 × 2* y *Problemas de solución de sistemas 2 × 2,* y resuelvan las cuatro actividades de cada recurso en la sección **Investigo**.

Tip 4. Aplique una encuesta grupal sobre su método de solución favorito para realizar sistemas de ecuaciones. Luego pregúnteles: *¿Por qué consideran que el método que eligieron es el más sencillo?, ¿En qué situaciones de la vida cotidiana lo pondrían en práctica?*

Tip 5. Como actividad alternativa para esta sesión, puede proponerle a los escolares que inventen de tarea un problema y su solución, así como los pasos que deberían seguir para establecer un sistema de ecuaciones.



RECONOZCO

Comienza esta Esfera de Exploración. No olvides responder nuevamente los ejercicios en tu cuaderno cuando hayas terminado, ¡así descubrirás cuánto avanzaste!

01 **Resuelve cada problema usando sistemas de ecuaciones.** R. M.

- A un concierto asistieron 10 000 personas, lo que representó un total de $6 600 000 en ingresos por venta de boletos. Había boletos de dos precios de acuerdo con la proximidad al escenario: general ($500) y preferente ($1 300). ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron? +2

  Al nombrar con x el número de boletos en zona general y con y el número de boletos en zona preferente, se obtiene el sistema siguiente:

  $$\begin{cases} x + y = 10000 \\ 500x + 1300y = 6600000 \end{cases}$$

  Cuya solución es $x = 8\,000$, $y = 2\,000$; es decir, se vendieron 8 000 boletos en zona general y 2 000, en zona preferente.

- Se quiere construir una alberca rectangular cuyo perímetro sea de 150 metros y de modo que el ancho sea 75 % del largo. ¿Cuánto debe medir cada lado de la alberca? +2

  Al nombrar a y b, respectivamente, al ancho y al largo del rectángulo, se tiene el sistema siguiente:

  $$\begin{cases} 2a + 2b = 150 \\ a = 0.75b \end{cases}$$

  Cuya solución es $a = 32.14$ y $b = 42.85$, es decir, el ancho mide 32.14 m y el largo, 42.85 m.

- La edad de Sandra y la de su hermano mayor suman 26. La diferencia entre sus edades es de 2 años. Luis, por su parte, es tres veces mayor que su hermana, y la diferencia entre sus edades es de 8 años. ¿Cuánto suman las edades de Sandra y Luis? +2

  Se establecen dos sistemas, independientes, como sigue:

  $$\begin{cases} x + y = 26 \\ y - x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 3n \\ m - n = 8 \end{cases}$$

  Donde x es la edad de Sandra; y, la de su hermano; m, la edad de Luis y n, la de su hermana. Al resolverlos, se obtiene que Sandra y Luis tienen 12 años cada uno, así que sus edades suman 24.

122

© UNOi

1.1 Representa y resuelve cada situación con un sistema de ecuaciones. Anota tus operaciones en el espacio. Luego, traza la gráfica correspondiente para verificar la solución. R. M. +4

Dos números suman 12 y su diferencia es 4.

Sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$$
Solución: $x = 8, y = 4$

Dos números suman 8 y dos veces el primero menos tres veces el segundo es 6.

Sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$
Solución: $x = 6, y = 2$

Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

	Antes de la Esfera de Exploración		Al terminar la Esfera de Exploración	
	Sí	No	Sí	No
1. Resuelvo problemas mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.				
Puntos obtenidos:				

INVESTIGO

© UNOi

Aprendizaje esperado

› Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Keys

- Comparación de métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2
- Problemas que se modelan con sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2

123

Sesión 3

Propósito

En la sección **Comprendo**, los alumnos reconocerán las aplicaciones del álgebra lineal, su historia y sus alcances gracias a la solución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

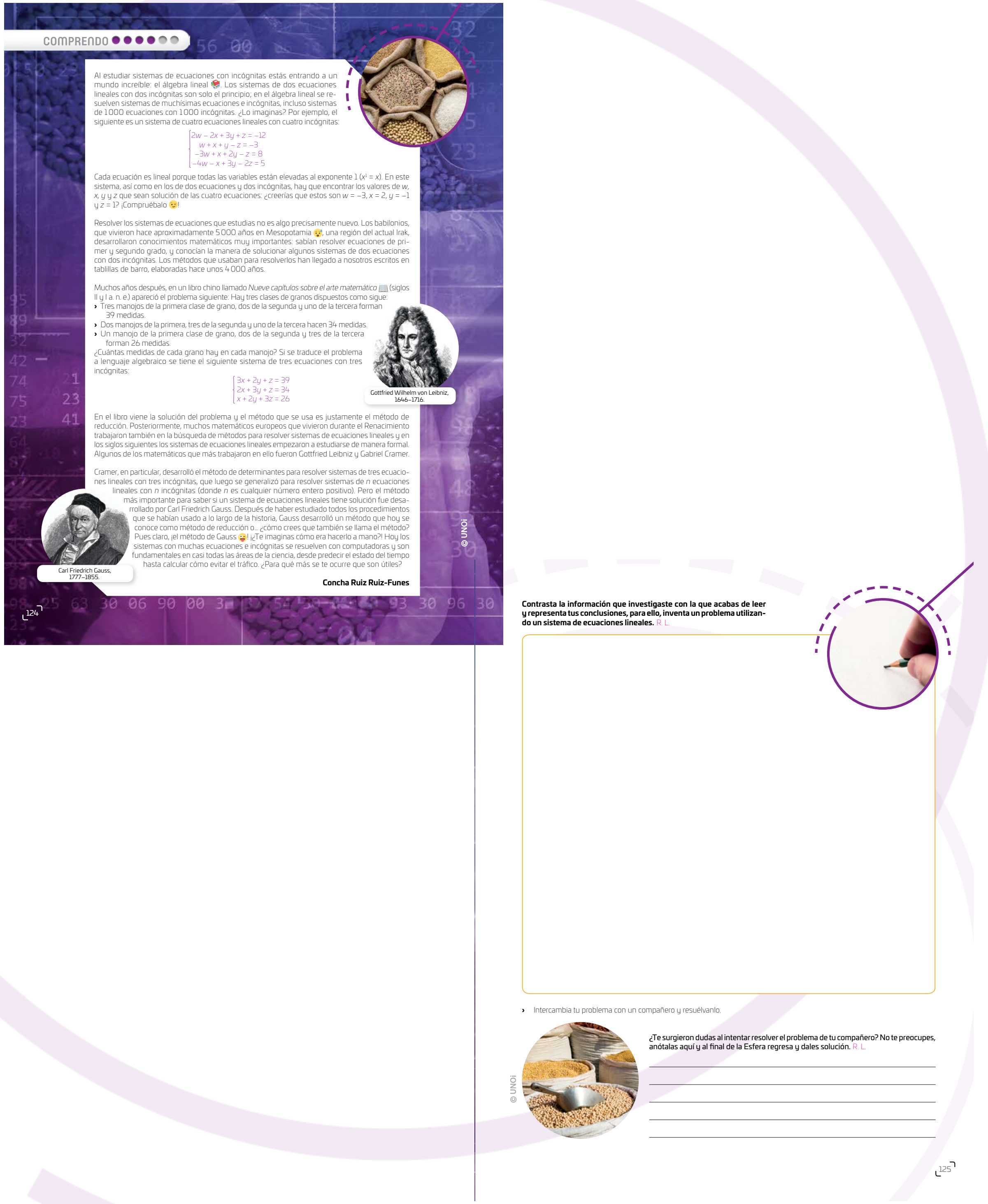
Tip 1. Pida que lean de manera individual la **página 124** de la sección **Comprendo** y que identifiquen las ideas principales del texto. Para resolver la primera actividad de la **página 125**, puede proponerles un contexto para el problema cercano o interesante para los estudiantes. Recuérdeles que lo que planteen en esta página podrán corroborarlo cuando terminen la **Esfera**, por lo que no deben preocuparse por detallarlo o llevarlo a sus últimas consecuencias.

Tip 2. Para complementar la información que revisaron en el texto, muestre el video *Historia de las matemáticas* que se encuentra en https://esant.mx/ac_unoi/sumt2-009 específicamente del minuto 38 al 44:28. Cuestione a los alumnos: *¿Cómo con el paso del tiempo el avance de las matemáticas ha permitido el desarrollo social, económico y político?, ¿Por qué fue necesario la creación de ecuaciones?*

Tip 3. Organice equipos para que realicen una línea de tiempo de la historia de los sistemas de ecuaciones. Indique que coloquen en el año 2050 lo que creen que se podrá resolver en el futuro en términos de sistemas de ecuaciones. Pueden realizarla en papel rotafolio con plumones de colores u otro material que usted considere. Indique que compartan su línea del tiempo con el grupo. Este tipo de dinámicas ayuda a los alumnos a desarrollar habilidades comunicativas, de organización y planeación, además de fortalecer el trabajo colaborativo.

Tip 4. Comente cómo el uso de la tecnología y las matemáticas podría revolucionar la manera en la que vivimos. Pídales que propongan un problema que se podría solucionar con el uso de herramientas tecnológicas que trabajen con sistemas de ecuaciones con incógnitas.

Tip 5. Solicite al grupo que de tarea investiguen algunos problemas económicos en revistas o periódicos que podrían solucionarse con un sistema de ecuaciones.



Sesión 4

Propósito

En la primera página del **Practico**, los alumnos ejercitarán, mediante una actividad lúdico-pedagógica, los diferentes métodos de solución de sistema de ecuaciones de dos incógnitas que conocen hasta ahora.

Tip 1. Pídales con antelación el material requerido para la **actividad 01** de la **página 126** de la sección **Practico.** Una vez que los alumnos terminen el juego, observe el tipo de soluciones que dan.

Tip 2. Al finalizar proponga una autoevaluación de metacognición para que reconozcan las estrategias que siguieron para ganar el juego. Pídales que se pregunten: *¿Qué estrategias me fueron útiles?, ¿Cómo podría mejorar mi estrategia para asegurar ganar?, ¿Qué conceptos o métodos debo repasar para poder dar una solución correcta?*

Tip 3. Establezca con los alumnos un reto para establecer un problema matemático que se resuelva con alguna de las ecuaciones que resolvieron en el juego "Manos libres", o retome un problema de los que inventaron en la sesión 2 y pida que vuelvan a establecer el sistema de ecuaciones. Reflexione con los alumnos si los pasos que siguieron en esta sesión es apropiado o lo modificarían.

Tip 4. Mediante la resolución de los ejercicios durante esta sesión observe si los alumnos establecen las ecuaciones de manera adecuada, y verifique cuáles son los elementos conceptuales que deben reforzar a nivel individual y grupal.

PRACTICO

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 **Reúnete con tres compañeros y jueguen "Manos libres".**

Realidad Aumentada

Manos libres

Material

- Cinta adhesiva
- Doce tarjetas blancas de 8 cm × 5 cm
- Un cronómetro

Procedimiento

Paso 1: Copien en las tarjetas los sistemas de ecuaciones siguientes, uno por tarjeta.

$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ $x = 1$, $y = 1$	$\begin{cases} a + 4b = 10 \\ 3a + 2b = 10 \end{cases}$ $a = 2$, $b = 2$	$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$ $x = 1$, $y = 2$	$\begin{cases} 5a - 5b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases}$ $a = 2$, $b = 1$	$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 4x + 3y = -1 \end{cases}$ $x = -1$, $y = 1$	$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases}$ $a = 1$, $b = -1$
$\begin{cases} 4m + 2n = -6 \\ 3m + 5n = -8 \end{cases}$ $m = -1$, $n = -1$	$\begin{cases} 4p + 3q = 0 \\ 2p - 3q = 0 \end{cases}$ $p = 0$, $q = 0$	$\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$ $x = 3$, $y = 3$	$\begin{cases} 3p + 2q = 3 \\ p + q = 0 \end{cases}$ $p = 3$, $q = -3$	$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases}$ $x = -3$, $y = 3$	$\begin{cases} 2p + q = -9 \\ p + q = -6 \end{cases}$ $p = -3$, $q = -3$

Paso 2: Coloquen las tarjetas bocabajo y revuélvanlas. Cada uno elija una y, sin verla, coloque cinta adhesiva en la parte trasera para colocarse la tarjeta en la frente, de modo que los demás jugadores las vean, pero solo ellos.

Paso 3: Decidan quién comenzará y, por turnos, hagan preguntas cerradas (de "sí" o "no") para adivinar cuál sistema de ecuaciones tienen en la frente. Hagan preguntas como: "¿La primera ecuación es una suma?", "¿El resultado es positivo?". Los demás compañeros responderán las preguntas; si la respuesta es "sí", sigue el turno del que preguntó, y si la respuesta es "no", es turno del siguiente jugador.

Paso 4: En el momento en que un jugador adivine cuál es el sistema de ecuaciones que tiene en la frente, validado por los demás compañeros, podrá quitarse el papel —para resolver el sistema de ecuaciones— y elegir al azar otro nuevo papel, para colocárselo de nuevo en la frente.

Paso 5: Si algún jugador resuelve un sistema, y entre todos revisan las respuestas, ese participante gana 2 puntos. Si la respuesta está mal, no gana nada. Gana el jugador que tenga más puntos cuando se resuelvan todos los sistemas.

¡DALE CUERDA PARA QUE SE COLUMPIE!

Describe la estrategia que seguiste para jugar y compártela con el grupo. R. L.

Aprendizaje aumentado

Como alternativa para la **actividad 01** de la sección **Practico** de la **página 126** puede proponer el uso de la aplicación **Animal Safari AR - 3D Learning**; para ello organice al grupo en equipos y entregue un iPad a cada uno. Indique que cada equipo represente en la aplicación una granja con dos especies diferentes de animales, que de preferencia sean animales pequeños (gallinas, patos, conejos, etcétera). Pida a los alumnos abrir la aplicación, fijar el plano en el que se representaran los animales, elegir una cantidad de entre 1 y 10 animales de cada especie y tomar una fotografía de su granja. Es importante que los demás equipos no sepan la cantidad de cada especie que tiene cada granja.

Luego, solicite a cada equipo que formule dos ecuaciones a modo de pistas sobre los animales de su granja; por ejemplo: la cantidad total de pollos y gallinas es 20, la suma del doble de pollos más el número total de gallinas es 25. Cada equipo entregará a los demás estas pistas para que intenten obtener la cantidad de cada especie. Ganará el equipo que acierte primero los números de cada especie de cada granja. Para finalizar, pida a los equipos que muestren sus fotografías para corroborar los resultados. Los equipos pueden tomar como referencia el mapa mental realizado en sesiones anteriores.

PRACTICO

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 Reúnete con tres compañeros y jueguen "Manos libres".

Realidad Aumentada

Manos libres

Material

- Cinta adhesiva
- Doce tarjetas blancas de 8 cm × 5 cm
- Un cronómetro

Procedimiento

Paso 1: Copien en las tarjetas los sistemas de ecuaciones siguientes, uno por tarjeta.

$\begin{cases}2x+3y=5\\3x+2y=5\end{cases}$ $x=1$, $y=1$	$\begin{cases}a+4b=10\\3a+2b=10\end{cases}$ $a=2$, $b=2$	$\begin{cases}3x+2y=7\\4x-y=2\end{cases}$ $x=1$, $y=2$	$\begin{cases}5a-5b=5\\a+b=3\end{cases}$ $a=2$, $b=1$	$\begin{cases}3x+4y=1\\4x+3y=-1\end{cases}$ $x=-1$, $y=1$	$\begin{cases}2a+b=1\\3a+2b=1\end{cases}$ $a=1$, $b=-1$
$\begin{cases}4m+2n=-6\\3m+5n=-8\end{cases}$ $m=-1$, $n=-1$	$\begin{cases}4p+3q=0\\2p-3q=0\end{cases}$ $p=0$, $q=0$	$\begin{cases}2x+2y=12\\4x-y=9\end{cases}$ $x=3$, $y=3$	$\begin{cases}3p+2q=3\\p+q=0\end{cases}$ $p=3$, $q=-3$	$\begin{cases}x+3y=6\\3x+2y=-3\end{cases}$ $x=-3$, $y=3$	$\begin{cases}2p+q=-9\\p+q=-6\end{cases}$ $p=-3$, $q=-3$

Paso 2: Coloquen las tarjetas bocabajo y revuélvanlas. Cada uno elija una y, sin verla, coloque cinta adhesiva en la parte trasera para colocarse la tarjeta en la frente, de modo que los demás jugadores las vean, pero solo ellos.

Paso 3: Decidan quién comenzará y, por turnos, hagan preguntas cerradas (de "sí" o "no") para adivinar cuál sistema de ecuaciones tienen en la frente. Hagan preguntas como: "¿La primera ecuación es una suma?", "¿El resultado es positivo?". Los demás compañeros responderán las preguntas; si la respuesta es "sí", sigue el turno del que preguntó, y si la respuesta es "no", es turno del siguiente jugador.

Paso 4: En el momento en que un jugador adivine cuál es el sistema de ecuaciones que tiene en la frente, validado por los demás compañeros, podrá quitarse el papel —para resolver el sistema de ecuaciones— y elegir al azar otro nuevo papel, para colocárselo de nuevo en la frente.

Paso 5: Si algún jugador resuelve un sistema, y entre todos revisan las respuestas, ese participante gana 2 puntos. Si la respuesta está mal, no gana nada. Gana el jugador que tenga más puntos cuando se resuelvan todos los sistemas.

Describe la estrategia que seguiste para jugar y compártela con el grupo. R. L.

¡DALE CUERDA PARA QUE SE COLUMPIE!

Sesión 5

Propósito

Para continuar trabajando con la sección **Practico**, los alumnos resolverán problemas contextualizados en los que será necesario que establezcan el sistema de ecuaciones y usen diferentes métodos para su solución, incluyendo el método gráfico.

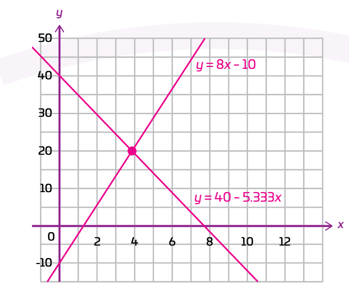
Tip 1. Solicite a los alumnos que resuelvan en parejas las **actividades 02 y 03**, **páginas 127 y 128**. Posteriormente, pídales que usen *GeoGebra* para encontrar las soluciones a los problemas de ambas páginas, ya sea dentro del aula o como tarea.

Tip 2. Entregue impreso por equipos o proyecte para el grupo el artículo “¿Qué es y para qué sirve una computadora cuántica?” en https://esant.mx/ac_unoi/sumt2-010 (consulta: 28 de agosto de 2025). Pídales que discutan en equipo cómo imaginan que estas computadoras podrán modificar la manera en la que convivimos, nos informamos y nos comunicamos en el futuro. Elija al azar a un integrante de cada equipo para que comparta las reflexiones a las que llegó con sus compañeros con el grupo.

Tip 3. Pida que lean la sección **Agenda UNOi hacia el futuro** y analicen y discutan el futuro de las matemáticas. Pregúnteles: *¿Qué se podría hacer para que este tipo de herramienta tecnológica esté al alcance de todas las personas?, ¿En qué aspectos o problemas se podría enfocar para que beneficie a la mayoría de las personas?*

Tip 4. Solicite que resuelvan los problemas de la **actividad 04** de la **página 129** de manera individual. Pueden apoyarse en *GeoGebra* para identificarlos gráficamente. Invítelos a reunirse en parejas para revisar y acordar sus respuestas. Si lo cree pertinente, propóngales algunos ejercicios que les permitan analizar gráficas con puntos de intersección entre dos rectas, entre tres rectas o rectas paralelas. Reflexione con los alumnos la solución en cada caso: *¿Cómo saber si hay o no una solución al observar el método gráfico?*

02 **Resuelve los problemas y contesta.**



En un análisis hecho por una empresa para determinar las ganancias semanales obtenidas por agricultura y ganadería, se obtuvieron las ecuaciones siguientes:

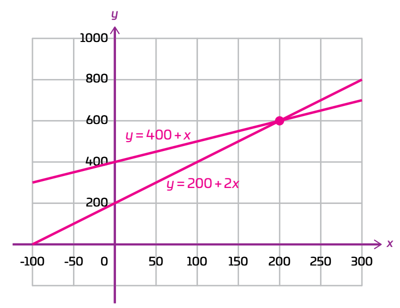
$$\begin{cases} 80x - 10y = 100 \\ 32x + 6y = 240 \end{cases}$$

donde x es el número de ventas y y, el número de pérdidas.

¿Cuáles deben ser los valores de x y y para satisfacer ambas ecuaciones?

El valor de x debe ser 3.75 y el de y, 20.

¿Qué método utilizaste para hallar la solución? ¿Por qué? R. L.



Considera las siguientes rectas:

$400 + x = y$

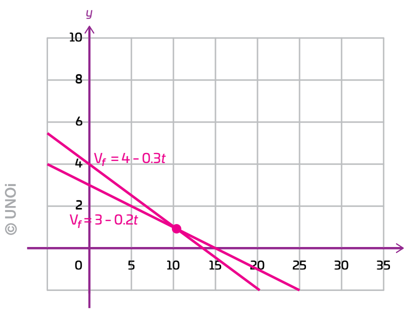
$200 + 2x = y$

¿En qué punto se intersecan?

Se intersecan en el punto $t = 200$, $y = 600$

Dos recipientes se vacían de acuerdo con la siguiente expresión: $V_f = V_i$ – constante (tiempo).

El primer decantador se llena con 4 mL y se vacía con una constante de 0.3 mL por segundo. Mientras que el segundo decantador se llena con 3 mL y se vacía con una constante de 0.2 mL por segundo.



Plantea el sistema de ecuaciones que modela la situación descrita.

$$\begin{cases} V_f = 4 - 0.3t \\ V_f = 3 - 0.2t \end{cases}$$

¿Cuál es la solución del sistema? ¿Qué representa?

La solución es $t = 10$, $V_f = 1$, y representa que los dos contenedores tienen el mismo contenido en ese instante.

› Traza la gráfica de cada situación. Comenta en grupo cómo puedes verificar tu respuesta con cada recta.

Matemáticas

Esfera de Exploración 6 - Semanas 24 y 25

03 Lee y haz lo que se indica.

Curaduría de Apps

El coeficiente de dilatación térmica determina el cambio relativo de longitud o volumen de un cuerpo sólido o líquido a medida que varía su temperatura. La ecuación para la elongación lineal de materiales es la siguiente:

$$L_f = L_0\,(1 + \lambda t)$$

Donde L_f es la longitud final; L_0, la longitud inicial; λ (leída "lambda"), el coeficiente de dilatación y t, la temperatura.

› Calcula en cada caso la temperatura a la que las dos barras de metal tendrán la misma longitud. Anota el sistema de ecuaciones que uses. R. M.

La longitud inicial de la pieza 1 es 0.25 m y su coeficiente de dilatación lineal es 0.37 °C^{-1} (es decir, su variación de longitud por grado Celsius), mientras que la pieza 2 tiene una longitud inicial de 0.35 m y un coeficiente de dilatación lineal de 0.25 °C^{-1}.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} L_{f_1} = 0.25(1 + 0.37t) \\ L_{f_2} = 0.35(1 + 0.25t) \end{cases}$$

Solución:

Al igualar las ecuaciones, pues se quiere que los metales tengan la misma longitud, se tiene $0.35(1 + 0.25t) = 0.25(1 + 0.37t)$, de donde $t = 20$ °C; es decir, las barras deben estar a 20 °C para medir lo mismo.

La longitud inicial de la pieza *A* es de 2 m y su coeficiente de dilatación lineal es 0.02 °C^{-1}, mientras que la pieza *B* tiene una longitud inicial de 1 m y un coeficiente de dilatación lineal de 0.3 °C^{-1}.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} L_{f_A} = 2(1 + 0.02t) \\ L_{f_B} = 1(1 + 0.3t) \end{cases}$$

Solución:

Al igualar las ecuaciones, pues se quiere que los metales tengan la misma longitud, se tiene $2(1 + 0.02t) = 1(1 + 0.3t)$, de donde $t = 3.84$ °C; es decir, las barras deben estar a 3.84 °C para medir lo mismo.

› Comenta en grupo cómo se utilizan el coeficiente de dilatación y los sistemas de ecuaciones en ingeniería, como en la construcción de puentes.

AGENDA UNOi HACIA EL FUTURO

ESPACIO

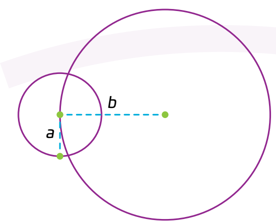
Moverse a la velocidad de la luz, atravesar agujeros negros, trazar rutas por galaxias distantes lejanas… **Los viajes intergalácticos plantean problemas matemáticos que no podemos resolver aún**, pero esto **podría cambiar con las computadoras cuánticas**.

Estas funcionan con unidades cuánticas, donde **no se considera si algo es de una forma o de otra, sino todas las posibilidades intermedias al mismo tiempo**. Así, mientras que una computadora calcularía, por ejemplo, el movimiento de los planetas alrededor del Sol como si este último estuviera fijo, una computadora cuántica consideraría que el Sol se mueve en una galaxia, que a su vez también se mueve, pues su capacidad de **establecer y resolver sistemas de ecuaciones con una gran cantidad de variables** es notoriamente superior.

Por ahora, las computadoras cuánticas todavía no hacen esto, pero todo indica que eventualmente lo harán. Sin embargo, **son tan caras que las aplicaciones espaciales que surjan de ellas podrían volverse un monopolio multimillonario**.

¿Cómo podría garantizarse que este tipo de avances matemáticos **beneficien a todos** en el futuro?

04 Resuelve los problemas. Justifica tu respuesta.

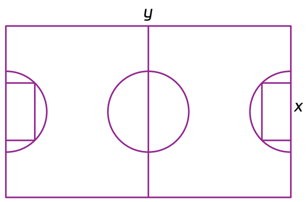


En un centro comercial se construirá un comedor con dos zonas circulares, como se muestra en la imagen. La suma de ambos perímetros es de 124.281 m, mientras que la diferencia de ambos radios es de 8.58 m. Encuentra la medida de radio de cada circunferencia.

Con un sistema de ecuaciones, se tiene lo siguiente:

$$\begin{cases} b - a = 8.58 \\ 2\pi a + 2\pi b = 124.281 \end{cases}$$

De donde, al resolver el sistema, se obtiene $a = 5.6$ m y $b = 14.17$ m.



Se quiere construir una cancha deportiva rectangular, que sea de 320 m de perímetro y cuyo largo sea 1.66 veces su ancho. ¿Cuánto debe medir de ancho y largo para cumplir con las especificaciones?

Perímetro total $= 2x + 2y = 320$ m; $y = 1.66x$

Teniendo estas ecuaciones se encuentra que: $x = 60.15$ m, $y = 99.84$ m.

Encuentra el valor del radio del círculo dentro de la cancha tomando en cuenta que el perímetro de esta equivale a $\frac{3}{2}$ del ancho.

Se tiene $2\pi a = \frac{3}{2}x$, sustituyendo el valor de x se tiene que $a = 14.36$ m.

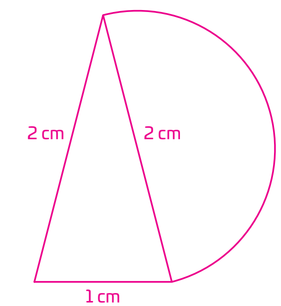
Un triángulo isósceles de perímetro de 5 cm, de lados iguales *a* y lado desigual *b*, tiene sobre uno de sus lados iguales una semicircunferencia.

› Considerando que el perímetro de la semicircunferencia es igual a π, encuentra el valor de *a* y *b*.
› Dibuja las figuras y comprueba tus resultados utilizando un pedazo de estambre.

Perímetro del triángulo $2a + b = 5$ — Ecuación 1

Perímetro de la semicircunferencia $\pi\left(\frac{a}{2}\right) = \pi$ — Ecuación 2

De la ecuación 2 se obtiene $a = 2$ cm, sustituyendo en la ecuación 1 se obtiene que $b = 1$ cm



Al sumar 1 al numerador y al denominador de una fracción se obtiene $\frac{5}{6}$. Además, si en lugar de sumar 1, se resta 7 al numerador y al denominador de la fracción, se obtiene $\frac{1}{2}$. ¿De qué fracción se trata?

Se trata de la fracción $\frac{9}{11}$.

Aprendizaje aumentado

Proponemos complementar la **actividad 03** de la sección **Practico** de la **página 128** con el uso de la aplicación *GeoGebra*. Indique a los alumnos que pueden apoyarse en la aplicación para graficar los problemas presentados en el **Diario de Aprendizaje.** Indique que pueden graficar colocando la ecuación en el desplegable del botón "Álgebra" de la parte superior izquierda**.** En el botón de ajustes (parte superior izquierda) puede elegir que se muestren o no los ejes y la cuadrícula.

03 **Lee y haz lo que se indica.**

Curaduría de Apps

El coeficiente de dilatación térmica determina el cambio relativo de longitud o volumen de un cuerpo sólido o líquido a medida que varía su temperatura. La ecuación para la elongación lineal de materiales es la siguiente:

$$L_f = L_0 (1 + \lambda t)$$

Donde L_f es la longitud final; L_0, la longitud inicial; λ (leída "lambda"), el coeficiente de dilatación y t, la temperatura.

› Calcula en cada caso la temperatura a la que las dos barras de metal tendrán la misma longitud. Anota el sistema de ecuaciones que uses. R. M.

La longitud inicial de la pieza 1 es 0.25 m y su coeficiente de dilatación lineal es 0.37 °C^{-1} (es decir, su variación de longitud por grado Celsius), mientras que la pieza 2 tiene una longitud inicial de 0.35 m y un coeficiente de dilatación lineal de 0.25 °C^{-1}.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} L_{f_1} = 0.25(1 + 0.37t) \\ L_{f_2} = 0.35(1 + 0.25t) \end{cases}$$

Solución:

Al igualar las ecuaciones, pues se quiere que los metales tengan la misma longitud, se tiene $0.35(1 + 0.25t) = 0.25(1 + 0.37t)$, de donde $t = 20$ °C; es decir, las barras deben estar a 20 °C para medir lo mismo.

La longitud inicial de la pieza A es de 2 m y su coeficiente de dilatación lineal es 0.02 °C^{-1}, mientras que la pieza B tiene una longitud inicial de 1 m y un coeficiente de dilatación lineal de 0.3 °C^{-1}.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} L_{f_A} = 2(1 + 0.02t) \\ L_{f_B} = 1(1 + 0.3t) \end{cases}$$

Solución:

Al igualar las ecuaciones, pues se quiere que los metales tengan la misma longitud, se tiene $2(1 + 0.02t) = 1(1 + 0.3t)$, de donde $t = 3.84$ °C; es decir, las barras deben estar a 3.84 °C para medir lo mismo.

› Comenta en grupo cómo se utilizan el coeficiente de dilatación y los sistemas de ecuaciones en ingeniería, como en la construcción de puentes.

AGENDA UNOi HACIA EL FUTURO

ESPACIO

Moverse a la velocidad de la luz, atravesar agujeros negros, trazar rutas por galaxias distantes lejanas... **Los viajes intergalácticos plantean problemas matemáticos que no podemos resolver aún**, pero esto **podría cambiar con las computadoras cuánticas**.

Estas funcionan con unidades cuánticas, donde **no se considera si algo es de una forma o de otra, sino todas las posibilidades intermedias al mismo tiempo**. Así, mientras que una computadora calcularía, por ejemplo, el movimiento de los planetas alrededor del Sol como si este último estuviera fijo, una computadora cuántica consideraría que el Sol se mueve en una galaxia, que a su vez también se mueve, pues su capacidad de **establecer y resolver sistemas de ecuaciones con una gran cantidad de variables** es notoriamente superior.

Por ahora, las computadoras cuánticas todavía no hacen esto, pero todo indica que eventualmente lo harán. Sin embargo, **son tan caras que las aplicaciones espaciales que surjan de ellas podrían volverse un monopolio multimillonario**.

¿Cómo podría garantizarse que este tipo de avances matemáticos **beneficien a todos** en el futuro?

128

Sesión 6

Propósito

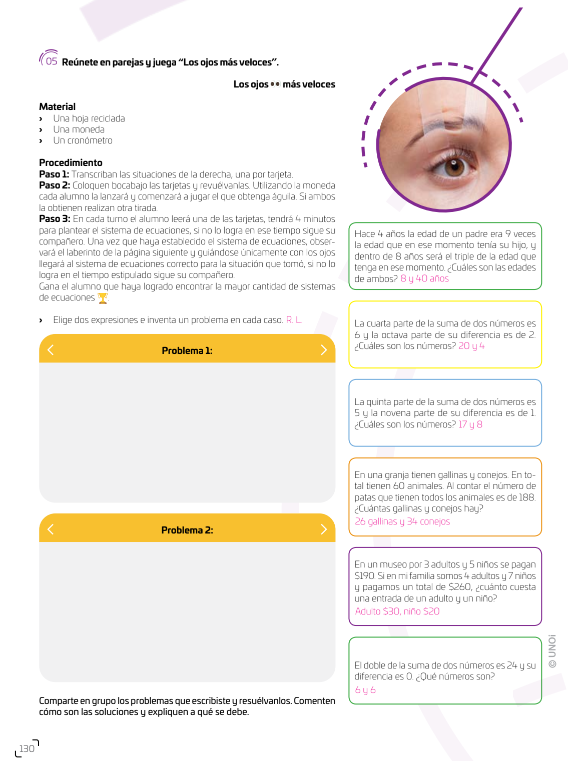
Mediante un juego lúdico-pedagógico, los alumnos seguirán practicando la resolución de problemas estableciendo sistemas de ecuaciones lineales.

Tip 1. Como alternativa para iniciar esta sesión, organice al grupo en dos equipos para que cada uno plantee un problema y lo escriban como reto para que lo resuelva el otro equipo. Comente que el equipo que logre resolverlo primero tendrá como premio un minuto más para solucionar la sección **Sube nivel.**

Tip 2. Pídales con antelación el material requerido para la **actividad 05** de la **página 130**. Organice a los alumnos para que jueguen “Los ojos más veloces”, observe cómo hacen el planteamiento de los problemas, brinde estrategias a aquellos que lo requieran y verifique los elementos conceptuales a reforzar. Si lo cree adecuado puede proyectar la imagen del laberinto de la **página 131** en el pizarrón para que lo vayan completando con plumones o gises de diferentes colores y todos puedan ver los caminos que se van trazando.

Tip 3. Pida a los escolares que autoevalúen su rendimiento en el juego, para que reflexionen los conceptos que no han consolidado y los avances que obtuvieron dentro de la **Esfera**. Puede considerar esta lista de cotejo:

- Atendió las instrucciones para la recepción de información.
- Participó en el ejercicio de manera activa.
- Entendió el objetivo de la actividad.
- Plantea trabajo individual, colaborativo y grupal.
- Reflexiona los resultados y el proceso del aprendizaje.
- Tiene actitud positiva.
- Muestra una mejora en el transcurso del ejercicio.
- Resolvió el problema adecuadamente.



05 **Reúnete en parejas y juega “Los ojos más veloces”.**

Los ojos más veloces

Material
- Una hoja reciclada
- Una moneda
- Un cronómetro

Procedimiento

Paso 1: Transcriban las situaciones de la derecha, una por tarjeta.
Paso 2: Coloquen bocabajo las tarjetas y revuélvanlas. Utilizando la moneda cada alumno la lanzará y comenzará a jugar el que obtenga águila. Si ambos la obtienen realizan otra tirada.
Paso 3: En cada turno el alumno leerá una de las tarjetas, tendrá 4 minutos para plantear el sistema de ecuaciones, si no lo logra en ese tiempo sigue su compañero. Una vez que haya establecido el sistema de ecuaciones, observará el laberinto de la página siguiente y guiándose únicamente con los ojos llegará al sistema de ecuaciones correcto para la situación que tomó, si no lo logra en el tiempo estipulado sigue su compañero.
Gana el alumno que haya logrado encontrar la mayor cantidad de sistemas de ecuaciones.

- Elige dos expresiones e inventa un problema en cada caso. R. L.

Problema 1:

Problema 2:

Comparte en grupo los problemas que escribiste y resuélvanlos. Comenten cómo son las soluciones y expliquen a qué se debe.

Hace 4 años la edad de un padre era 9 veces la edad que en ese momento tenía su hijo, y dentro de 8 años será el triple de la edad que tenga en ese momento. ¿Cuáles son las edades de ambos? 8 y 40 años

La cuarta parte de la suma de dos números es 6 y la octava parte de su diferencia es de 2. ¿Cuáles son los números? 20 y 4

La quinta parte de la suma de dos números es 5 y la novena parte de su diferencia es de 1. ¿Cuáles son los números? 17 y 8

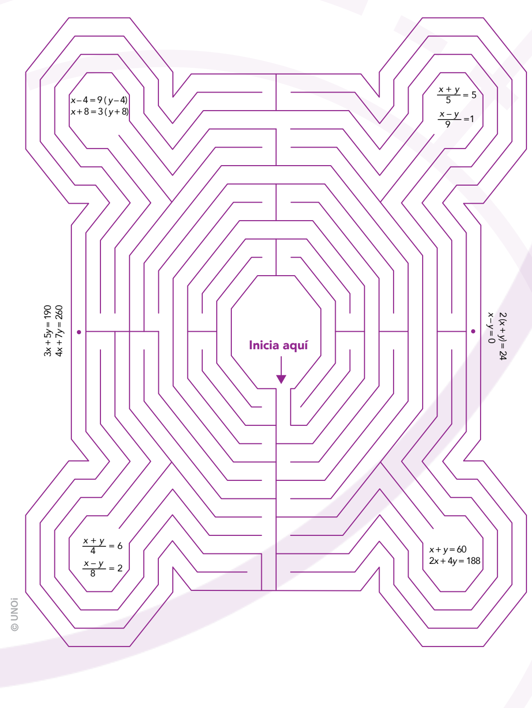
En una granja tienen gallinas y conejos. En total tienen 60 animales. Al contar el número de patas que tienen todos los animales es de 188. ¿Cuántas gallinas y conejos hay? 26 gallinas y 34 conejos

En un museo por 3 adultos y 5 niños se pagan $190. Si en mi familia somos 4 adultos y 7 niños y pagamos un total de $260, ¿cuánto cuesta una entrada de un adulto y un niño? Adulto $30, niño $20

El doble de la suma de dos números es 24 y su diferencia es 0. ¿Qué números son? 6 y 6

© UNOi

130



131

Sesión 7

Propósito

En la sección **Sube nivel** y **Aplico**, los alumnos pondrán en juego los conocimientos aprendidos sobre la solución de problemas que implican el establecimiento de sistema de ecuaciones con dos incógnitas. También contrastarán lo que aprendieron con los conocimientos que tenían inicialmente y reflexionarán sobre la trascendencia del uso de sistemas de ecuaciones para modelar y solucionar problemas que se presentan en diferentes contextos.

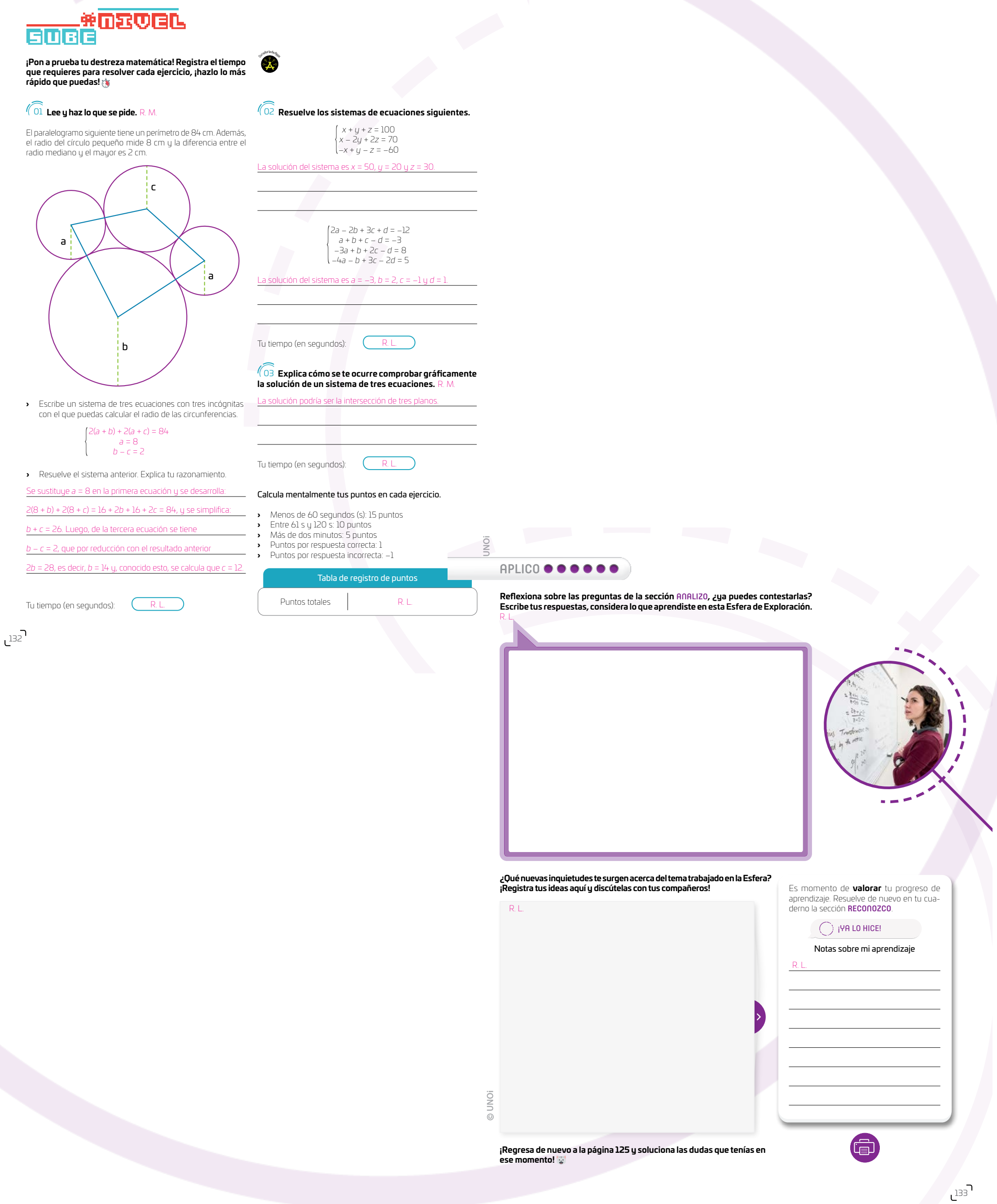
Tip 1. Pida que resuelvan de manera individual la actividad **Sube nivel** de la **página 132**, y que después compartan grupalmente las soluciones y las estrategias que usaron en la resolución.

Tip 2. Solicite a los educandos que regresen a la sección **Reconozco** y resuelvan nuevamente los problemas. Invítelos a reflexionar sobre lo siguiente: *¿Cuál fue su avance? ¿Qué necesitarían para lograr un dominio completo del tema?* Después anímelos para que establezcan de manera grupal una frase en la que se englobe la importancia del tema estudiado de las ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Tip 3. Para cerrar esta **Esfera de Exploración**, puede proponerles que realicen un video tutorial sobre cómo resolver un problema con ecuaciones con dos incógnitas. Exhórtelos para que sean creativos y su tutorial sea divertido y claro.

Tip 4. Invite a los alumnos a volver a los recursos **Key:** *Comparación de métodos de solución de sistemas 2 × 2* y *Problemas de solución de sistemas 2 × 2,* para resolver las cuatro actividades de cada recurso en la sección **Practico más**.

Al final de la **Esfera** pregunte al grupo cómo se sienten respecto de su proceso de aprendizaje de estos temas, y si piensan que ya están listos para continuar con la siguiente **Esfera**. El nivel de entusiasmo del grupo le permitirá evaluar su método de enseñanza como docente y los aspectos en los que puede apoyar a los escolares.



SUBE #NIVEL

¡Pon a prueba tu destreza matemática! Registra el tiempo que requieres para resolver cada ejercicio, ¡hazlo lo más rápido que puedas!

01 **Lee y haz lo que se pide.** R. M.

El paralelogramo siguiente tiene un perímetro de 84 cm. Además, el radio del círculo pequeño mide 8 cm y la diferencia entre el radio mediano y el mayor es 2 cm.

- Escribe un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con el que puedas calcular el radio de las circunferencias.

$$\begin{cases} 2(a+b)+2(a+c)=84 \\ a=8 \\ b-c=2 \end{cases}$$

- Resuelve el sistema anterior. Explica tu razonamiento.

Se sustituye $a = 8$ en la primera ecuación y se desarrolla: $2(8 + b) + 2(8 + c) = 16 + 2b + 16 + 2c = 84$, y se simplifica: $b + c = 26$. Luego, de la tercera ecuación se tiene $b - c = 2$, que por reducción con el resultado anterior $2b = 28$, es decir, $b = 14$ y, conocido esto, se calcula que $c = 12$.

Tu tiempo (en segundos): R. L.

132

02 **Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes.**

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ x-2y+2z=70 \\ -x+y-z=-60 \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 50$, $y = 20$ y $z = 30$.

$$\begin{cases} 2a-2b+3c+d=-12 \\ a+b+c-d=-3 \\ -3a+b+2c-d=8 \\ -4a-b+3c-2d=5 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = -3$, $b = 2$, $c = -1$ y $d = 1$.

Tu tiempo (en segundos): R. L.

03 **Explica cómo se te ocurre comprobar gráficamente la solución de un sistema de tres ecuaciones.** R. M.

La solución podría ser la intersección de tres planos.

Tu tiempo (en segundos): R. L.

Calcula mentalmente tus puntos en cada ejercicio.

- Menos de 60 segundos (s): 15 puntos
- Entre 61 s y 120 s: 10 puntos
- Más de dos minutos: 5 puntos
- Puntos por respuesta correcta: 1
- Puntos por respuesta incorrecta: –1

Tabla de registro de puntos	
Puntos totales	R. L.

UNOi

APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección ANALIZO, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.
R. L.

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R. L.

¡Regresa de nuevo a la página 125 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!

© UNOi

133

Aprendizaje aumentado

Proponemos que al finalizar la sección **Sube nivel** de la **página 132** proponga a los alumnos usar de la aplicación **Microsoft Maths Solver** para verificar los resultados obtenidos en la **actividad 02**. Además, los alumnos pueden aprovechar la aplicación para analizar la forma en que se resuelven sistemas de ecuaciones de 3 × 3.

Pídales que abran la aplicación y seleccionen la opción "Escanear" (parte superior central). Indique que tomen una fotografía del sistema de ecuaciones de 4 × 4 de la **actividad 02**, es importante que en esta no aparezca la llave inicial. Elija a un estudiante cuya respuesta fue correcta que exponga al grupo cuál fue el método que usó para llegar a dicho resultado.

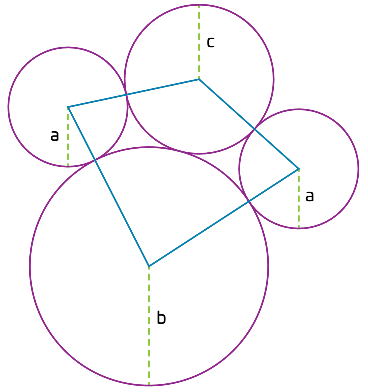
Solicite a los escolares sacar otra fotografía del sistema de ecuaciones de 3 × 3 de la **actividad 02** para verificar el resultado y, además, pulsar el botón "Ver los pasos de la solución". Pregúnteles si logran identificar el método de solución mostrado por la aplicación. Proponga un diálogo en la que se presenten los diferentes métodos que utilizaron y cómo, al utilizarlos de manera correcta, llegan al mismo resultado. Puede retomar el mapa mental realizado durante esta **Esfera**.

SUBE NIVEL

¡Pon a prueba tu destreza matemática! Registra el tiempo que requieres para resolver cada ejercicio, ¡hazlo lo más rápido que puedas!

01 Lee y haz lo que se pide. R. M.

El paralelogramo siguiente tiene un perímetro de 84 cm. Además, el radio del círculo pequeño mide 8 cm y la diferencia entre el radio mediano y el mayor es 2 cm.



- Escribe un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con el que puedas calcular el radio de las circunferencias.

$$\begin{cases} 2(a+b)+2(a+c)=84 \\ a=8 \\ b-c=2 \end{cases}$$

- Resuelve el sistema anterior. Explica tu razonamiento.

Se sustituye $a = 8$ en la primera ecuación y se desarrolla:
$2(8 + b) + 2(8 + c) = 16 + 2b + 16 + 2c = 84$, y se simplifica:
$b + c = 26$. Luego, de la tercera ecuación se tiene
$b - c = 2$, que por reducción con el resultado anterior
$2b = 28$, es decir, $b = 14$ y, conocido esto, se calcula que $c = 12$.

Tu tiempo (en segundos): R. L.

02 Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes.

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ x-2y+2z=70 \\ -x+y-z=-60 \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 50$, $y = 20$ y $z = 30$.

$$\begin{cases} 2a-2b+3c+d=-12 \\ a+b+c-d=-3 \\ -3a+b+2c-d=8 \\ -4a-b+3c-2d=5 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = -3$, $b = 2$, $c = -1$ y $d = 1$.

Tu tiempo (en segundos): R. L.

03 Explica cómo se te ocurre comprobar gráficamente la solución de un sistema de tres ecuaciones. R. M.

La solución podría ser la intersección de tres planos.

Tu tiempo (en segundos): R. L.

Calcula mentalmente tus puntos en cada ejercicio.

- Menos de 60 segundos (s): 15 puntos
- Entre 61 s y 120 s: 10 puntos
- Más de dos minutos: 5 puntos
- Puntos por respuesta correcta: 1
- Puntos por respuesta incorrecta: –1

Tabla de registro de puntos	
Puntos totales	R. L.