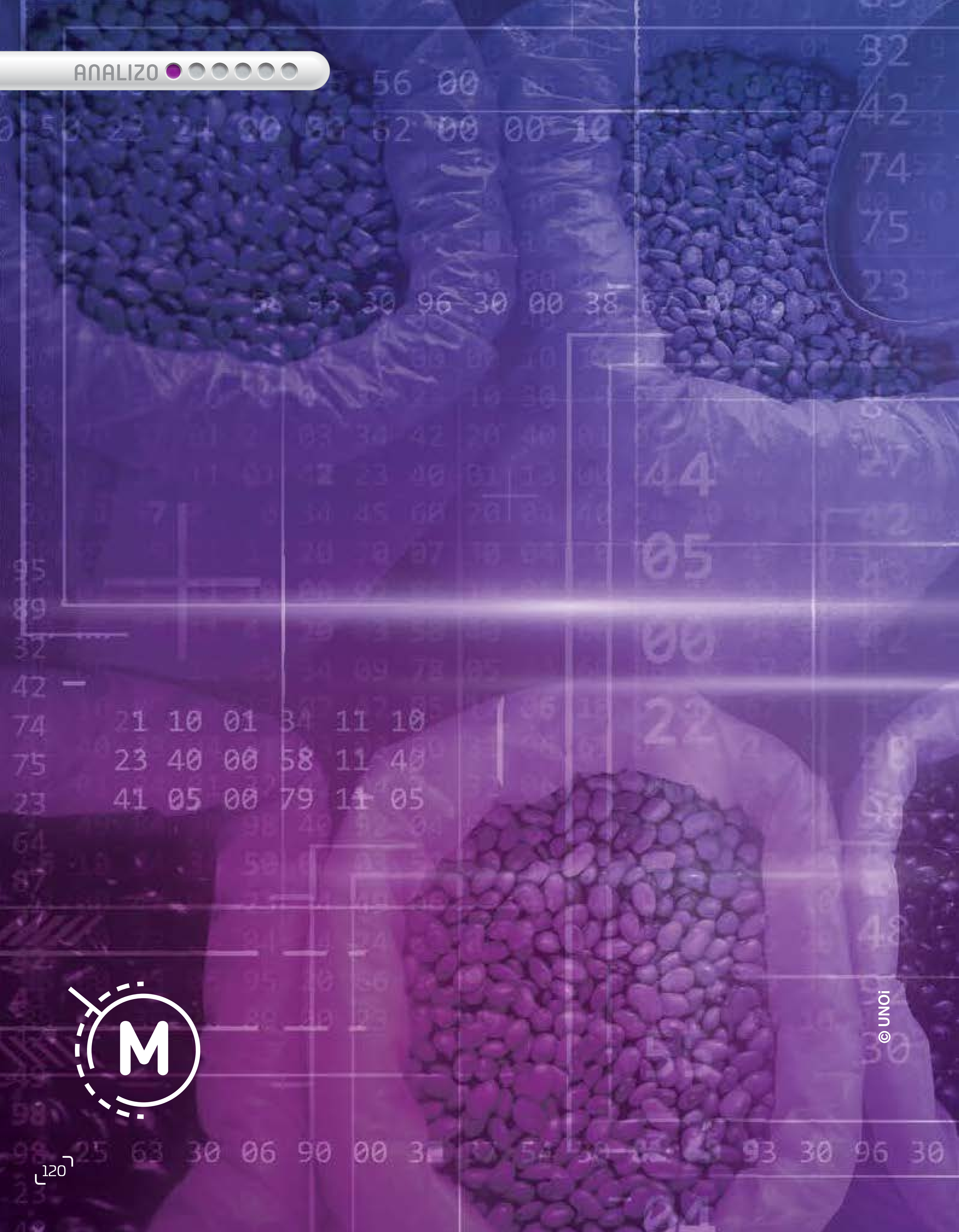


Esfera 6

¿Qué tan viejos son los métodos que usamos para resolver sistemas de ecuaciones?

¿Cuáles son los sistemas de $n \times n$?

¿Qué tiene que ver el álgebra con manojos de frijoles?

El punto de intersección

Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Comienza esta Esfera de Exploración. No olvides responder nuevamente los ejercicios en tu cuaderno cuando hayas terminado, ¡así descubrirás cuánto avanzaste!

01 **Resuelve cada problema usando sistemas de ecuaciones.** R. M.

- A un concierto asistieron 10 000 personas, lo que representó un total de \$6 600 000 en ingresos por venta de boletos. Había boletos de dos precios de acuerdo con la proximidad al escenario: general (\$500) y preferente (\$1 300). ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron? +2

  Al nombrar con x el número de boletos en zona general y con y el número de boletos en zona preferente, se obtiene el sistema siguiente:

  $$\begin{cases} x + y = 10000 \\ 500x + 1300y = 6600000 \end{cases}$$

  Cuya solución es $x = 8\,000$, $y = 2\,000$; es decir, se vendieron 8 000 boletos en zona general y 2 000, en zona preferente.

- Se quiere construir una alberca rectangular cuyo perímetro sea de 150 metros y de modo que el ancho sea 75 % del largo. ¿Cuánto debe medir cada lado de la alberca? +2

  Al nombrar a y b, respectivamente, al ancho y al largo del rectángulo, se tiene el sistema siguiente:

  $$\begin{cases} 2a + 2b = 150 \\ a = 0.75b \end{cases}$$

  Cuya solución es $a = 32.14$ y $b = 42.85$, es decir, el ancho mide 32.14 m y el largo, 42.85 m.

- La edad de Sandra y la de su hermano mayor suman 26. La diferencia entre sus edades es de 2 años. Luis, por su parte, es tres veces mayor que su hermana, y la diferencia entre sus edades es de 8 años. ¿Cuánto suman las edades de Sandra y Luis? +2

  Se establecen dos sistemas, independientes, como sigue:

  $$\begin{cases} x + y = 26 \\ y - x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 3n \\ m - n = 8 \end{cases}$$

  Donde x es la edad de Sandra; y, la de su hermano; m, la edad de Luis y n, la de su hermana. Al resolverlos, se obtiene que Sandra y Luis tienen 12 años cada uno, así que sus edades suman 24.

1.1 Representa y resuelve cada situación con un sistema de ecuaciones. Anota tus operaciones en el espacio. Luego, traza la gráfica correspondiente para verificar la solución. R. M. +4

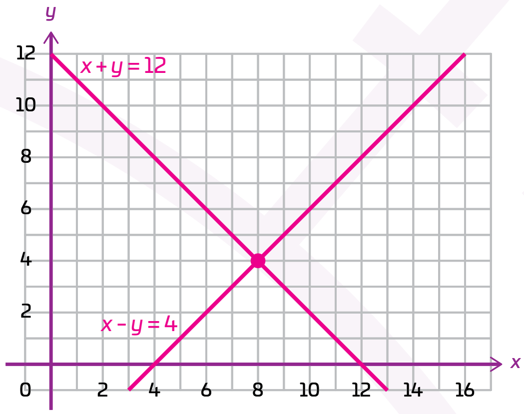
Dos números suman 12 y su diferencia es 4.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Solución:

$x = 8, y = 4$



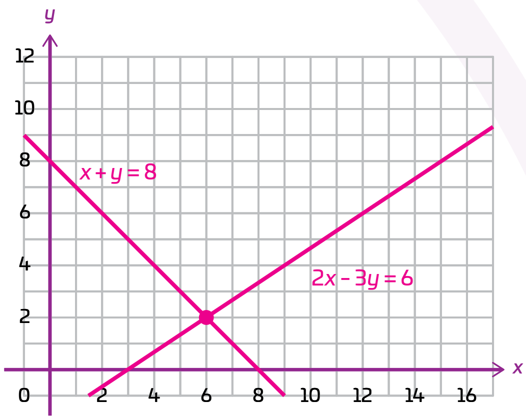
Dos números suman 8 y dos veces el primero menos tres veces el segundo es 6.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

Solución:

$x = 6, y = 2$



Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

	Antes de la Esfera de Exploración		Al terminar la Esfera de Exploración	
	Sí	No	Sí	No
1. Resuelvo problemas mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.				
Puntos obtenidos:				

INVESTIGO

Aprendizaje esperado

› Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Keys

- Comparación de métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2
- Problemas que se modelan con sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2

Al estudiar sistemas de ecuaciones con incógnitas estás entrando a un mundo increíble: el álgebra lineal. Los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas son solo el principio; en el álgebra lineal se resuelven sistemas de muchísimas ecuaciones e incógnitas, incluso sistemas de 1 000 ecuaciones con 1 000 incógnitas. ¿Lo imaginas? Por ejemplo, el siguiente es un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} 2w - 2x + 3y + z = -12 \\ w + x + y - z = -3 \\ -3w + x + 2y - z = 8 \\ -4w - x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

Cada ecuación es lineal porque todas las variables están elevadas al exponente 1 ($x^1 = x$). En este sistema, así como en los de dos ecuaciones y dos incógnitas, hay que encontrar los valores de w, x, y y z que sean solución de las cuatro ecuaciones: ¿creerías que estos son $w = -3$, $x = 2$, $y = -1$ y $z = 1$? ¡Compruébalo!

Resolver los sistemas de ecuaciones que estudias no es algo precisamente nuevo. Los babilonios, que vivieron hace aproximadamente 5 000 años en Mesopotamia, una región del actual Irak, desarrollaron conocimientos matemáticos muy importantes: sabían resolver ecuaciones de primer y segundo grado, y conocían la manera de solucionar algunos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Los métodos que usaban para resolverlos han llegado a nosotros escritos en tablillas de barro, elaboradas hace unos 4 000 años.

Muchos años después, en un libro chino llamado *Nueve capítulos sobre el arte matemático* (siglos II y I a. n. e.) apareció el problema siguiente: Hay tres clases de granos dispuestos como sigue:

- Tres manojos de la primera clase de grano, dos de la segunda y uno de la tercera forman 39 medidas.
- Dos manojos de la primera, tres de la segunda y uno de la tercera hacen 34 medidas.
- Un manojo de la primera clase de grano, dos de la segunda y tres de la tercera forman 26 medidas.

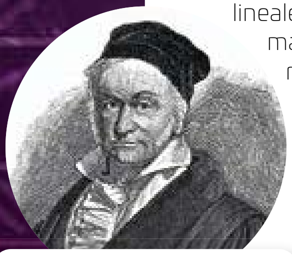
¿Cuántas medidas de cada grano hay en cada manojo? Si se traduce el problema a lenguaje algebraico se tiene el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646–1716.

En el libro viene la solución del problema y el método que se usa es justamente el método de reducción. Posteriormente, muchos matemáticos europeos que vivieron durante el Renacimiento trabajaron también en la búsqueda de métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales y en los siglos siguientes los sistemas de ecuaciones lineales empezaron a estudiarse de manera formal. Algunos de los matemáticos que más trabajaron en ello fueron Gottfried Leibniz y Gabriel Cramer.

Cramer, en particular, desarrolló el método de determinantes para resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, que luego se generalizó para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas (donde n es cualquier número entero positivo). Pero el método más importante para saber si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución fue desarrollado por Carl Friedrich Gauss. Después de haber estudiado todos los procedimientos que se habían usado a lo largo de la historia, Gauss desarrolló un método que hoy se conoce como método de reducción o... ¿cómo crees que también se llama el método? Pues claro, ¡el método de Gauss! ¡¿Te imaginas cómo era hacerlo a mano?! Hoy los sistemas con muchas ecuaciones e incógnitas se resuelven con computadoras y son fundamentales en casi todas las áreas de la ciencia, desde predecir el estado del tiempo hasta calcular cómo evitar el tráfico. ¿Para qué más se te ocurre que son útiles?



Carl Friedrich Gauss, 1777–1855.

Concha Ruiz Ruiz-Funes

Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer y representa tus conclusiones, para ello, inventa un problema utilizando un sistema de ecuaciones lineales. R. L.

› Intercambia tu problema con un compañero y resuélvanlo.

¿Te surgieron dudas al intentar resolver el problema de tu compañero? No te preocupes, anótalas aquí y al final de la Esfera regresa y dales solución. R. L.

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 **Reúnete con tres compañeros y jueguen "Manos libres".**

Manos libres

Material

- Cinta adhesiva
- Doce tarjetas blancas de 8 cm × 5 cm
- Un cronómetro

Procedimiento

Paso 1: Copien en las tarjetas los sistemas de ecuaciones siguientes, uno por tarjeta.

$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} a + 4b = 10 \\ 3a + 2b = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 5a - 5b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 4x + 3y = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases}$
$x = 1$, $y = 1$	$a = 2$, $b = 2$	$x = 1$, $y = 2$	$a = 2$, $b = 1$	$x = -1$, $y = 1$	$a = 1$, $b = -1$
$\begin{cases} 4m + 2n = -6 \\ 3m + 5n = -8 \end{cases}$	$\begin{cases} 4p + 3q = 0 \\ 2p - 3q = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} 3p + 2q = 3 \\ p + q = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2p + q = -9 \\ p + q = -6 \end{cases}$
$m = -1$, $n = -1$	$p = 0$, $q = 0$	$x = 3$, $y = 3$	$p = 3$, $q = -3$	$x = -3$, $y = 3$	$p = -3$, $q = -3$

Paso 2: Coloquen las tarjetas bocabajo y revuélvanlas. Cada uno elija una y, sin verla, coloque cinta adhesiva en la parte trasera para colocarse la tarjeta en la frente, de modo que los demás jugadores las vean, pero solo ellos.

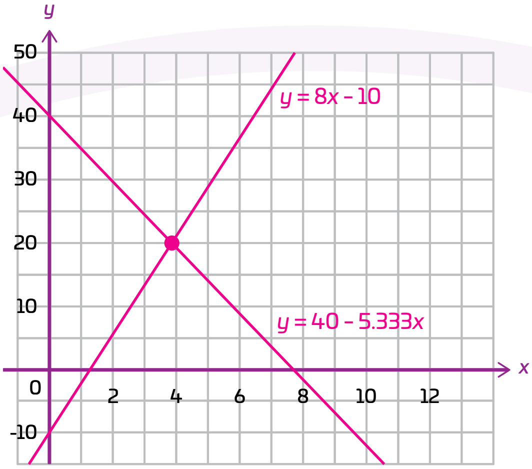
Paso 3: Decidan quién comenzará y, por turnos, hagan preguntas cerradas (de "sí" o "no") para adivinar cuál sistema de ecuaciones tienen en la frente. Hagan preguntas como: "¿La primera ecuación es una suma?", "¿El resultado es positivo?". Los demás compañeros responderán las preguntas; si la respuesta es "sí", sigue el turno del que preguntó, y si la respuesta es "no", es turno del siguiente jugador.

Paso 4: En el momento en que un jugador adivine cuál es el sistema de ecuaciones que tiene en la frente, validado por los demás compañeros, podrá quitarse el papel —para resolver el sistema de ecuaciones— y elegir al azar otro nuevo papel, para colocárselo de nuevo en la frente.

Paso 5: Si algún jugador resuelve un sistema, y entre todos revisan las respuestas, ese participante gana 2 puntos. Si la respuesta está mal, no gana nada. Gana el jugador que tenga más puntos cuando se resuelvan todos los sistemas.

Describe la estrategia que seguiste para jugar y compártela con el grupo. R. L.

02 Resuelve los problemas y contesta.



En un análisis hecho por una empresa para determinar las ganancias semanales obtenidas por agricultura y ganadería, se obtuvieron las ecuaciones siguientes:

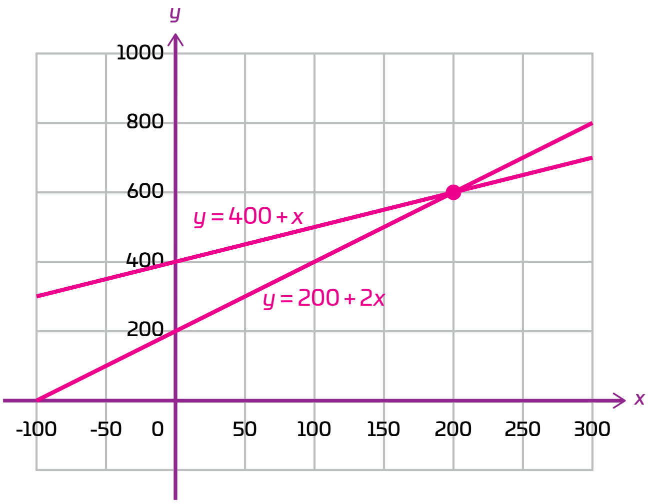
$$\begin{cases} 80x - 10y = 100 \\ 32x + 6y = 240 \end{cases}$$

donde x es el número de ventas y y, el número de pérdidas.

¿Cuáles deben ser los valores de x y y para satisfacer ambas ecuaciones?

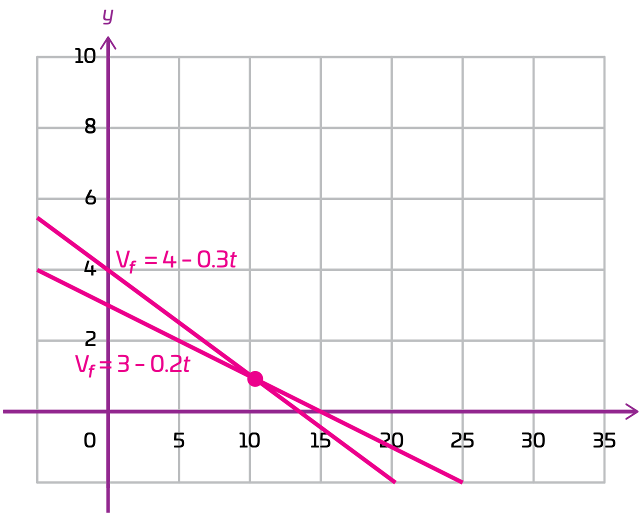
El valor de x debe ser 3.75 y el de y, 20.

¿Qué método utilizaste para hallar la solución? ¿Por qué? R. L.



Considera las siguientes rectas:
$400 + x = y$
$200 + 2x = y$

¿En qué punto se intersecan?
Se intersecan en el punto $t = 200$, $y = 600$



Dos recipientes se vacían de acuerdo con la siguiente expresión: $V_f = V_i$ – constante (tiempo).

El primer decantador se llena con 4 mL y se vacía con una constante de 0.3 mL por segundo. Mientras que el segundo decantador se llena con 3 mL y se vacía con una constante de 0.2 mL por segundo.

Plantea el sistema de ecuaciones que modela la situación descrita.

$$\begin{cases} V_f = 4 - 0.3t \\ V_f = 3 - 0.2t \end{cases}$$

¿Cuál es la solución del sistema? ¿Qué representa?

La solución es $t = 10$, $V_f = 1$, y representa que los dos contenedores tienen el mismo contenido en ese instante.

› Traza la gráfica de cada situación. Comenta en grupo cómo puedes verificar tu respuesta con cada recta ☑.

03 **Lee y haz lo que se indica.**

El coeficiente de dilatación térmica determina el cambio relativo de longitud o volumen de un cuerpo sólido o líquido a medida que varía su temperatura. La ecuación para la elongación lineal de materiales es la siguiente:

$$L_f = L_0\,(1 + \lambda t)$$

Donde L_f es la longitud final; L_0, la longitud inicial; λ (leída "lambda"), el coeficiente de dilatación y t, la temperatura.

› Calcula en cada caso la temperatura a la que las dos barras de metal tendrán la misma longitud. Anota el sistema de ecuaciones que uses. R. M.

La longitud inicial de la pieza 1 es 0.25 m y su coeficiente de dilatación lineal es 0.37 °C^{-1} (es decir, su variación de longitud por grado Celsius), mientras que la pieza 2 tiene una longitud inicial de 0.35 m y un coeficiente de dilatación lineal de 0.25 °C^{-1}.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} L_{f1} = 0.25(1 + 0.37t) \\ L_{f2} = 0.35(1 + 0.25t) \end{cases}$$

Solución:

Al igualar las ecuaciones, pues se quiere que los metales tengan la misma longitud, se tiene $0.35(1 + 0.25t) = 0.25(1 + 0.37t)$, de donde $t = 20$ °C; es decir, las barras deben estar a 20 °C para medir lo mismo.

La longitud inicial de la pieza *A* es de 2 m y su coeficiente de dilatación lineal es 0.02 °C^{-1}, mientras que la pieza *B* tiene una longitud inicial de 1 m y un coeficiente de dilatación lineal de 0.3 °C^{-1}.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} L_{fA} = 2(1 + 0.02t) \\ L_{fB} = 1(1 + 0.3t) \end{cases}$$

Solución:

Al igualar las ecuaciones, pues se quiere que los metales tengan la misma longitud, se tiene $2(1 + 0.02t) = 1(1 + 0.3t)$, de donde $t = 3.84$ °C; es decir, las barras deben estar a 3.84 °C para medir lo mismo.

› Comenta en grupo cómo se utilizan el coeficiente de dilatación y los sistemas de ecuaciones en ingeniería, como en la construcción de puentes.

AGENDA UNOi HACIA EL FUTURO

ESPACIO

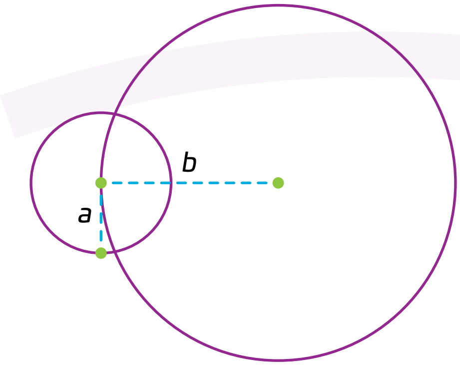
Moverse a la velocidad de la luz, atravesar agujeros negros, trazar rutas por galaxias distantes lejanas… **Los viajes intergalácticos plantean problemas matemáticos que no podemos resolver aún**, pero esto **podría cambiar con las computadoras cuánticas**.

Estas funcionan con unidades cuánticas, donde **no se considera si algo es de una forma o de otra, sino todas las posibilidades intermedias al mismo tiempo**. Así, mientras que una computadora calcularía, por ejemplo, el movimiento de los planetas alrededor del Sol como si este último estuviera fijo, una computadora cuántica consideraría que el Sol se mueve en una galaxia, que a su vez también se mueve, pues su capacidad de **establecer y resolver sistemas de ecuaciones con una gran cantidad de variables** es notoriamente superior.

Por ahora, las computadoras cuánticas todavía no hacen esto, pero todo indica que eventualmente lo harán. Sin embargo, **son tan caras que las aplicaciones espaciales que surjan de ellas podrían volverse un monopolio multimillonario**.

¿Cómo podría garantizarse que este tipo de avances matemáticos **beneficien a todos** en el futuro?

04 **Resuelve los problemas. Justifica tu respuesta.**

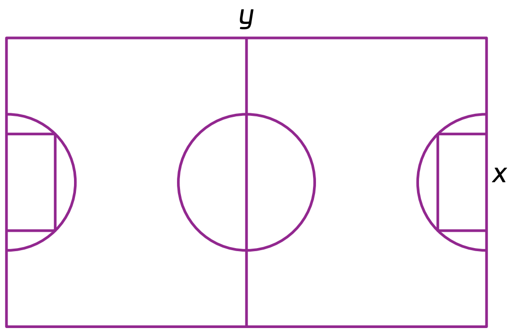


En un centro comercial se construirá un comedor con dos zonas circulares, como se muestra en la imagen. La suma de ambos perímetros es de 124.281 m, mientras que la diferencia de ambos radios es de 8.58 m. Encuentra la medida de radio de cada circunferencia.

Con un sistema de ecuaciones, se tiene lo siguiente:

$$\begin{cases} b - a = 8.58 \\ 2\pi a + 2\pi b = 124.281 \end{cases}$$

De donde, al resolver el sistema, se obtiene $a = 5.6$ m y $b = 14.17$ m.



Se quiere construir una cancha deportiva rectangular, que sea de 320 m de perímetro y cuyo largo sea 1.66 veces su ancho. ¿Cuánto debe medir de ancho y largo para cumplir con las especificaciones?

Perímetro total = $2x + 2y = 320$ m; $y = 1.66x$

Teniendo estas ecuaciones se encuentra que: $x = 60.15$ m, $y = 99.84$ m.

Encuentra el valor del radio del círculo dentro de la cancha tomando en cuenta que el perímetro de esta equivale a $\frac{3}{2}$ del ancho.

Se tiene $2\pi a = \frac{3}{2}x$, sustituyendo el valor de x se tiene que $a = 14.36$ m.

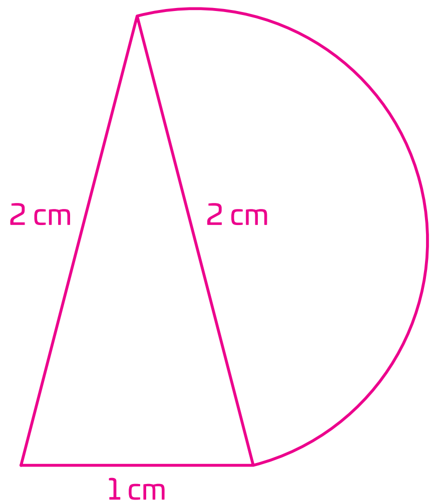
Un triángulo isósceles de perímetro de 5 cm, de lados iguales a y lado desigual b, tiene sobre uno de sus lados iguales una semicircunferencia.

- Considerando que el perímetro de la semicircunferencia es igual a π, encuentra el valor de a y b.
- Dibuja las figuras y comprueba tus resultados utilizando un pedazo de estambre.

Perímetro del triángulo $2a + b = 5$ Ecuación 1

Perímetro de la semicircunferencia $\pi\left(\frac{a}{2}\right) = \pi$ Ecuación 2

De la ecuación 2 se obtiene $a = 2$ cm, sustituyendo en la ecuación 1 se obtiene que $b = 1$ cm



Al sumar 1 al numerador y al denominador de una fracción se obtiene $\frac{5}{6}$. Además, si en lugar de sumar 1, se resta 7 al numerador y al denominador de la fracción, se obtiene $\frac{1}{2}$. ¿De qué fracción se trata?

Se trata de la fracción $\frac{9}{11}$.

05 **Reúnete en parejas y juega “Los ojos más veloces”.**

Los ojos 👀 más veloces

Material

- Una hoja reciclada
- Una moneda
- Un cronómetro

Procedimiento

Paso 1: Transcriban las situaciones de la derecha, una por tarjeta.
Paso 2: Coloquen bocabajo las tarjetas y revuélvanlas. Utilizando la moneda cada alumno la lanzará y comenzará a jugar el que obtenga águila. Si ambos la obtienen realizan otra tirada.
Paso 3: En cada turno el alumno leerá una de las tarjetas, tendrá 4 minutos para plantear el sistema de ecuaciones, si no lo logra en ese tiempo sigue su compañero. Una vez que haya establecido el sistema de ecuaciones, observará el laberinto de la página siguiente y guiándose únicamente con los ojos llegará al sistema de ecuaciones correcto para la situación que tomó, si no lo logra en el tiempo estipulado sigue su compañero.
Gana el alumno que haya logrado encontrar la mayor cantidad de sistemas de ecuaciones 🏆.

- Elige dos expresiones e inventa un problema en cada caso. R. L.

Problema 1:

Problema 2:

Comparte en grupo los problemas que escribiste y resuélvanlos. Comenten cómo son las soluciones y expliquen a qué se debe.

Hace 4 años la edad de un padre era 9 veces la edad que en ese momento tenía su hijo, y dentro de 8 años será el triple de la edad que tenga en ese momento. ¿Cuáles son las edades de ambos? 8 y 40 años

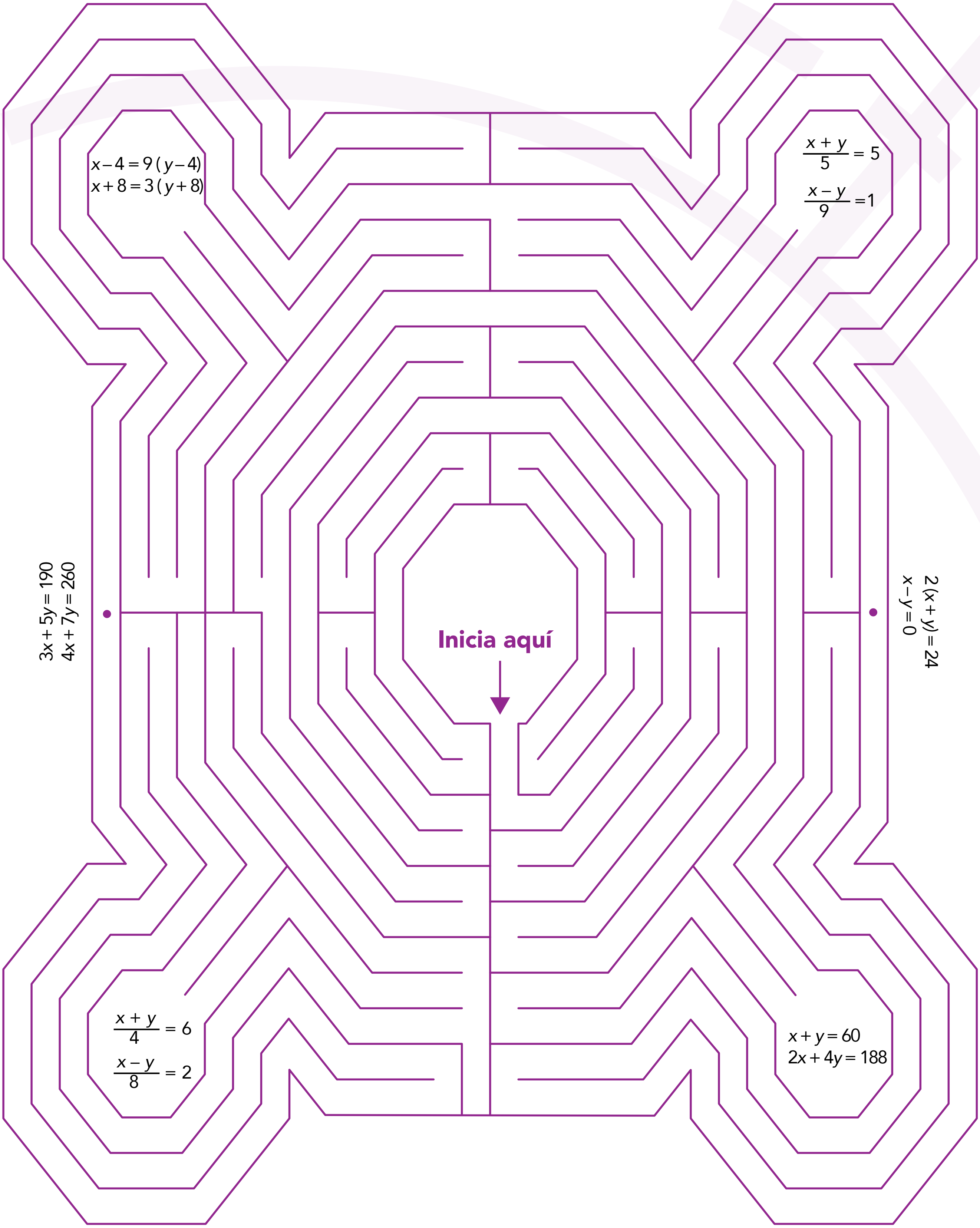
La cuarta parte de la suma de dos números es 6 y la octava parte de su diferencia es de 2. ¿Cuáles son los números? 20 y 4

La quinta parte de la suma de dos números es 5 y la novena parte de su diferencia es de 1. ¿Cuáles son los números? 17 y 8

En una granja tienen gallinas y conejos. En total tienen 60 animales. Al contar el número de patas que tienen todos los animales es de 188. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?
26 gallinas y 34 conejos

En un museo por 3 adultos y 5 niños se pagan $190. Si en mi familia somos 4 adultos y 7 niños y pagamos un total de $260, ¿cuánto cuesta una entrada de un adulto y un niño?
Adulto $30, niño $20

El doble de la suma de dos números es 24 y su diferencia es 0. ¿Qué números son?
6 y 6

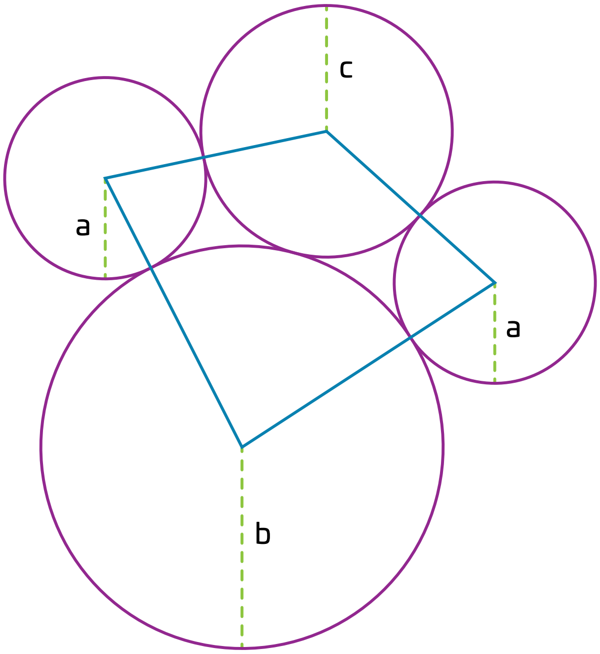

$x-4=9(y-4)$
$x+8=3(y+8)$
$\frac{x+y}{5}=5$
$\frac{x-y}{9}=1$
$3x+5y=190$
$4x+7y=260$
Inicia aquí
$2(x+y)=24$
$x-y=0$
$\frac{x+y}{4}=6$
$\frac{x-y}{8}=2$
$x+y=60$
$2x+4y=188$

SUBE NIVEL

¡Pon a prueba tu destreza matemática! Registra el tiempo que requieres para resolver cada ejercicio, ¡hazlo lo más rápido que puedas!

01 Lee y haz lo que se pide. R. M.

El paralelogramo siguiente tiene un perímetro de 84 cm. Además, el radio del círculo pequeño mide 8 cm y la diferencia entre el radio mediano y el mayor es 2 cm.



› Escribe un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con el que puedas calcular el radio de las circunferencias.

$$\begin{cases} 2(a+b)+2(a+c)=84 \\ a=8 \\ b-c=2 \end{cases}$$

› Resuelve el sistema anterior. Explica tu razonamiento.

Se sustituye $a = 8$ en la primera ecuación y se desarrolla:

$2(8 + b) + 2(8 + c) = 16 + 2b + 16 + 2c = 84$, y se simplifica:

$b + c = 26$. Luego, de la tercera ecuación se tiene

$b - c = 2$, que por reducción con el resultado anterior

$2b = 28$, es decir, $b = 14$ y, conocido esto, se calcula que $c = 12$.

Tu tiempo (en segundos): R. L.

02 Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes.

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ x-2y+2z=70 \\ -x+y-z=-60 \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 50$, $y = 20$ y $z = 30$.

$$\begin{cases} 2a-2b+3c+d=-12 \\ a+b+c-d=-3 \\ -3a+b+2c-d=8 \\ -4a-b+3c-2d=5 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = -3$, $b = 2$, $c = -1$ y $d = 1$.

Tu tiempo (en segundos): R. L.

03 Explica cómo se te ocurre comprobar gráficamente la solución de un sistema de tres ecuaciones. R. M.

La solución podría ser la intersección de tres planos.

Tu tiempo (en segundos): R. L.

Calcula mentalmente tus puntos en cada ejercicio.

› Menos de 60 segundos (s): 15 puntos
› Entre 61 s y 120 s: 10 puntos
› Más de dos minutos: 5 puntos
› Puntos por respuesta correcta: 1
› Puntos por respuesta incorrecta: –1

Tabla de registro de puntos	
Puntos totales	R. L.

APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección ANALIZO, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R. L.

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R. L.

¡Regresa de nuevo a la página 125 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!