
160
180
200
220
240
260
280
300
320
340
S
SE
SW
W
NW
N
M

Esfera 7

¿Cómo se ubicaban los marinos?

¿Por qué en el futbol es importante el ángulo de tiro?

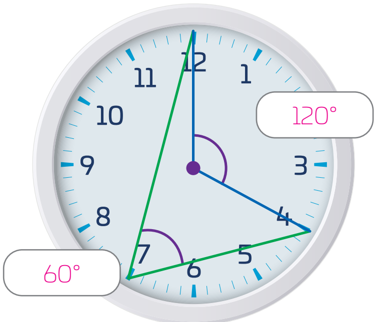
¿Qué es un arco de circunferencia?

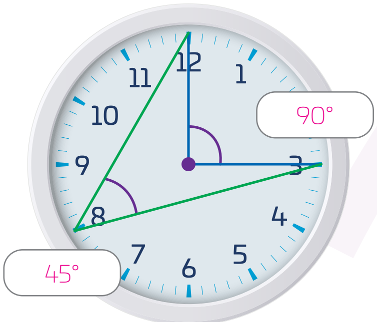
Entre ángulos y arcos

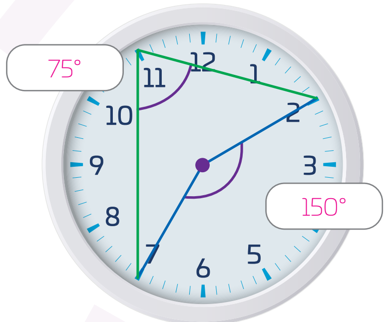
Traza y determina la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos de la circunferencia.

Comienza la Esfera de Exploración identificando cuáles de estos ejercicios puedes responder con base en lo que ya sabes y registra en la lista de cotejo cuántos puntos obtuviste (no importa que haya algo que no puedas resolver). Al terminar la Esfera, responde de nuevo las actividades en tu cuaderno para que reconozcas cuánto avanzaste.

01 **Escribe las medidas de los ángulos que se forman en cada reloj (puedes usar transportador) y responde.** +3



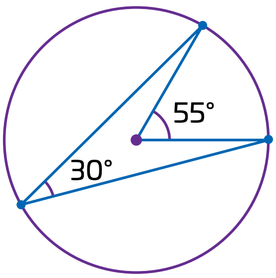


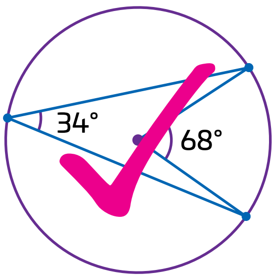


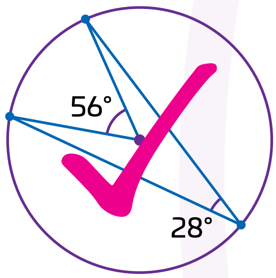
¿Cómo se relacionan los ángulos de cada reloj?

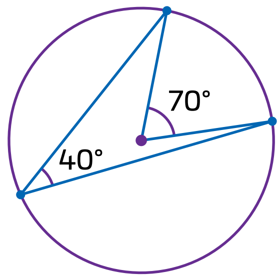
R. M. El ángulo central mide el doble de lo que mide el inscrito o que el inscrito mide la mitad de lo que mide el central.

02 **Coloca una ✓ sobre los pares de ángulos que mantienen la relación que encontraste en el ejercicio anterior.** +1

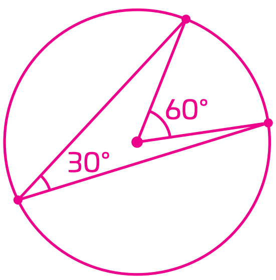


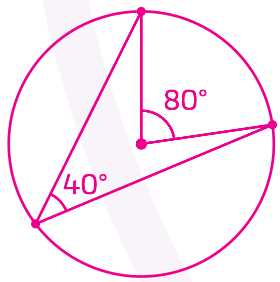




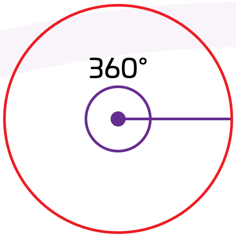


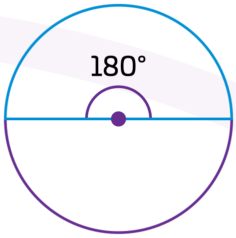
2.1. Traza de manera correcta con compás y transportador los ángulos que no marcaste en la actividad anterior. R. M. +2

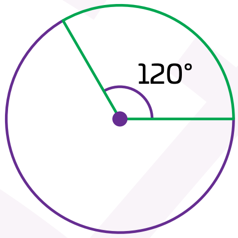




2.2. Observa las circunferencias y sus secciones marcadas, luego responde las preguntas. Supón que todas tienen de radio 1 unidad. +2







¿Cuál es el perímetro del círculo de color rojo?

$P = \pi d = \pi(2) = 2\pi$ unidades

¿Cuál es la longitud de arco azul?

$P = \frac{2\pi}{2} = \pi$ unidades

¿Cuál es la razón entre el ángulo de 180° y el de 360°?

Es de $\frac{1}{2}$, porque $\frac{180°}{360°} = \frac{1}{2}$.

¿Cuál es la longitud de arco verde?

$P = \frac{2\pi}{3}$ unidades

2.3. Si el radio de una glorieta es de 5 m, ¿cuál es la longitud de la fracción del perímetro delimitado por un ángulo inscrito de 45°? +2

Si el ángulo inscrito mide 45°, el central es de 90°. El perímetro de la glorieta es $P = \pi d = 10\pi$; además, como la longitud de arco correspondiente a 90° es la cuarta parte de la circunferencia, entonces la longitud de arco es: $\frac{10\pi}{4} = \frac{5}{2}\pi \approx 7.85$ m.

Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

	Antes de la Esfera de Exploración		Al terminar la Esfera de Exploración	
	Sí	No	Sí	No
1. Traza ángulos centrales e inscritos en una circunferencia.	◯	◯	◯	◯
2. Determina y calcula la medida de ángulos inscritos y centrales de una circunferencia, así como del arco de la circunferencia.	◯	◯	◯	◯
Puntos obtenidos:				

INVESTIGO

Aprendizaje esperado

› Traza y determina la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos de la circunferencia.

Keys

- Ángulos inscritos y centrales
- Arcos de circunferencia

Dentro de la aviación ✈️ y el entrenamiento militar se suele usar la frase “mira a tus seis” para indicar a alguien que debe vigilar su retaguardia. Otro ejemplo sería “tenemos enemigos a las diez”, para referirse a enemigos acercándose por la izquierda y ligeramente de frente. Si alguien te advierte que algo se acerca a ti a tus tres, ¿hacia dónde debes voltear?

Otra forma de indicar la ubicación de algo, esto en relación con las manecillas del reloj ⏰ y el sistema de grados utilizado en aviación y navegación, es la siguiente: Si comenzamos desde el 12 y le indicamos a alguien que algo se ubica a 90° grados en el sentido de las manecillas del reloj, ¿qué hora indicará? Si en el sentido contrario a las manecillas del reloj pedimos que estén alerta a 120°, ¿hacia dónde deberá mirar la persona para que no le tomen por sorpresa? 😮

La aviación aprovechó los sistemas de la navegación marítima, por lo que hay muchas similitudes en la forma de determinar posiciones y el establecimiento de rutas.

Como hemos visto, las divisiones en un reloj pueden tener varios usos más allá de su función horaria. Esto se debe a que nuestro sistema horario fue construido en torno a un modelo sexagesimal, donde cada hora tiene 60 minutos y cada minuto 60 segundos. Esta división se relaciona perfectamente con las 12 horas del reloj.

En el caso del minutero, cada vez que esta manecilla pase por la marca de una hora habrá pasado un minuto. De aquí que los ángulos también se pueden medir utilizando esta división en minutos y segundos 🤓. Este sistema de numeración de base 60 permite dividir la vuelta entera en una circunferencia de 360°, cada uno de estos grados se divide en 60 partes llamadas “minutos” y cada uno de estos minutos en otras 60 partes denominadas “segundos”. Por ejemplo, el ángulo 85° 18′ 43″ se refiere a un ángulo que mide 85 grados, 18 minutos y 43 segundos. Todo este tiempo nos hemos estado refiriendo a los ángulos centrales de una circunferencia, cuyos lados corresponden a dos radios y su vértice está en el centro.

Existe otro uso para los ángulos centrales que en la actualidad es muy común en la arquitectura. Desde las imponentes cúpulas de las iglesias antiguas, hasta los arcos y los teatros en la arquitectura griega y romana 🏛️, la geometría ha puesto a nuestro alcance la posibilidad de crear un diseño arquitectónico circular para nuestra propia casa.

La navegación fue un avance importante para la comunicación entre pueblos muy distantes. Con la dirección y la velocidad, los marinos se orientaban. Para esto se usaba la brújula, que fue inventada en China.

Tales diseños pueden concebir habitaciones formadas por arcos de circunferencia, construidas a partir de un ángulo central. O incluso, por qué no, diseñar la ampliación para un espacio de televisión que parte de un ángulo inscrito. A lo largo del tiempo, la humanidad ha aprovechado la funcionalidad que puede proporcionar la geometría de las curvas para realizar construcciones de todo tipo.

En los teatros e iglesias ⛪, las formas curvas han permitido lograr una acústica adecuada para los oyentes del sermón o de un concierto. Actualmente, estas formas curvas pueden usarse también para disminuir ruidos del exterior.

En la construcción de la vivienda tradicional maya, podemos observar el uso de curvas para soportar el paso de los vientos y tormentas que ocurren con frecuencia en las zonas costeras. Esto solo por mencionar algunos ejemplos. ¿Cómo te imaginas que serán nuestras construcciones en cien años?

Guadalupe Simón

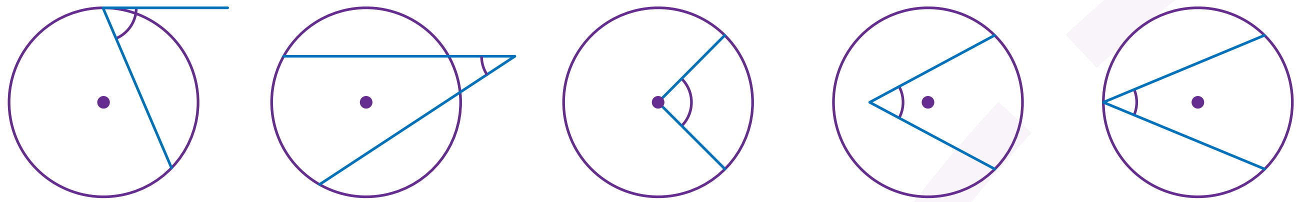
Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer y representa tus conclusiones.

Dibuja, resume, pega, ¡lo que quieras!

¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, anótalo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución.

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 **Observa si cada ángulo es central, inscrito o ninguno de estos. Escribe tu análisis para cada uno.** R. M.

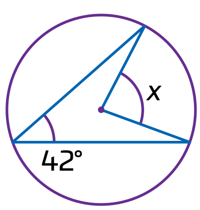


No es central porque su vértice está sobre la circunferencia, no es inscrito porque uno de sus lados no es una cuerda.	No es central porque su vértice está fuera del círculo, no es inscrito porque sus lados que lo definen no son cuerdas.	Es un ángulo central porque su vértice está en el centro y sus lados corresponden a radios.	No es central porque su vértice no está en el centro, no es inscrito porque los lados que lo definen no son cuerdas.	Es un ángulo inscrito porque su vértice está sobre la circunferencial y sus lados corresponden a cuerdas.

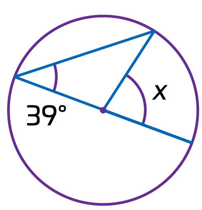
Si dos ángulos inscritos abarcan el mismo arco, ¿tienen la misma medida? ¿Por qué?

Sí, porque cualquier ángulo inscrito que abarque el mismo arco tendrá siempre la misma apertura angular, sin importar en qué punto de la circunferencia esté su vértice.

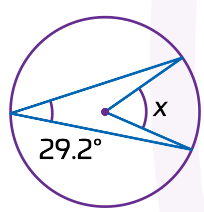
02 **Obtén la medida del ángulo *x* en cada caso.**



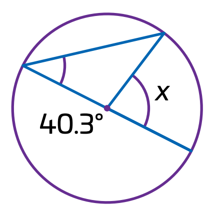
x = 84°



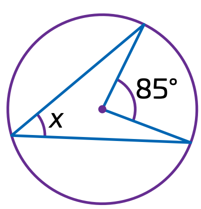
x = 78°



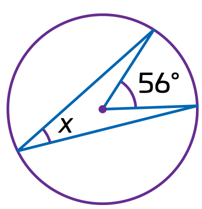
x = 58.4°



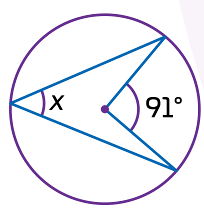
x = 80.6°



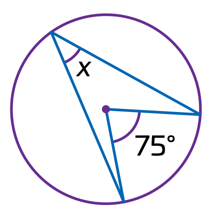
x = 42.5°



x = 28°

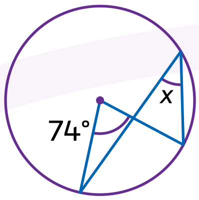


x = 45.5°

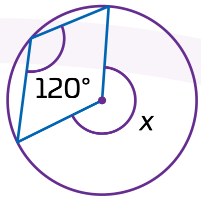


x = 37.5°

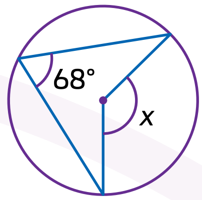
› Observa los trazos y calcula el valor del ángulo *x* en cada caso.



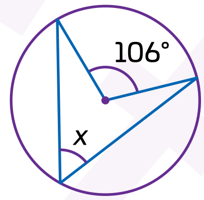
x = 37°



x = 240°

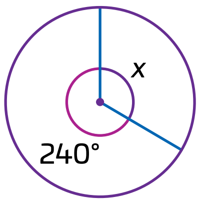


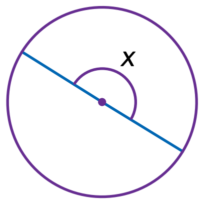
x = 136°

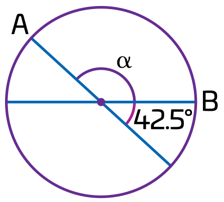


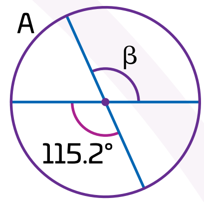
x = 53°

› Analiza cada trazo y obtén la medida del ángulo que se indica. Argumenta tu respuesta.









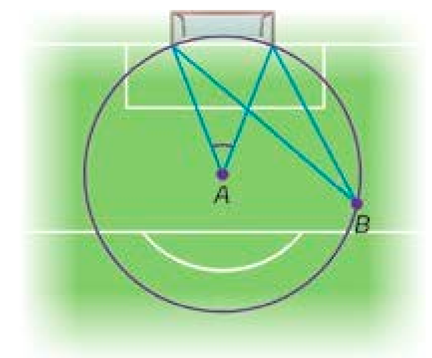
x = 120°, le resté a 360° el ángulo de 240°.

x = 180°, dado que es la mitad de la circunferencia.

α = 137.5° porque es suplementario de 180°.

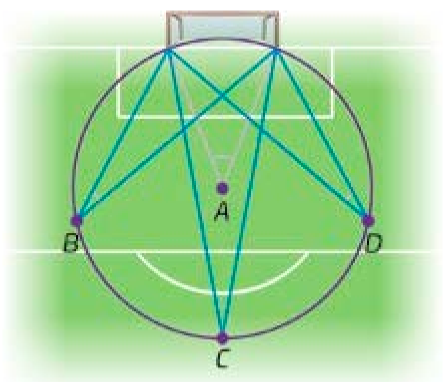
β = 115.2° porque es opuesto por el vértice.

03 **En el futbol es común que se realicen tiros a gol. Analiza cada situación y responde.**



Explica qué persona tiene un mayor ángulo de tiro, si el que está en el punto *A* en el manchón de penalti o en el punto *B* que está fuera del área.

Como un ángulo inscrito es la mitad de su ángulo central correspondiente el que tira desde el punto *B* tiene menor ángulo de tiro. El que tira desde el punto *A* tiene el doble del ángulo de tiro que el que tira desde el punto *B*.



¿Cuál de los tres puntos (*B*, *C*, *D*) proporciona un mejor ángulo de tiro?

Como los tres puntos comparten el mismo ángulo central en *A*, el ángulo deber ser el mismo y por lo tanto, en teoría, todos tienen el mismo ángulo de tiro.

¿Es posible tener un ángulo inscrito mayor que el ángulo central? Justifica tu respuesta.

No, un ángulo inscrito nunca puede ser mayor que el ángulo central que abarca el mismo arco, porque siempre mide la mitad de este.

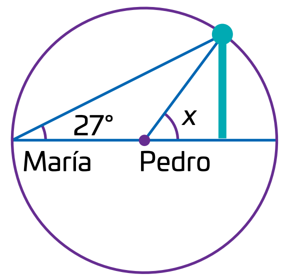
04 Coloca una ✓ en cada enunciado si es verdadero o falso, según corresponda.

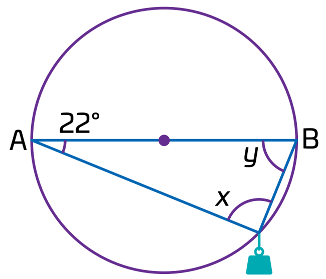
Enunciado	Verdadero	Falso
Si un ángulo central mide 190°, la medida de su ángulo inscrito correspondiente será de 380°.		✓
Si un ángulo central mide 45.5°, la medida de uno de sus ángulos inscritos es de 22.75°.	✓	
Si un ángulo inscrito mide 150°, la medida de su ángulo central es de 75°.		✓
Para un mismo ángulo central (que abarca un cierto arco), se pueden formar infinitos ángulos inscritos que también abarcan ese mismo arco.	✓	
Todos los ángulos inscritos que abarcan un semicírculo en una circunferencia miden 90°.	✓	

05 Analiza cada situación y responde.

María y Pedro necesitan asegurar una antena con dos cables, donde el extremo de uno inicia en el centro de una circunferencia y el otro en un extremo de un diámetro, como se muestra en la figura. Si el ángulo de inclinación del cable de María mide 27°, ¿cuánto debe medir el ángulo de inclinación del cable de Pedro?

$x =$ 2(27°) = 54°

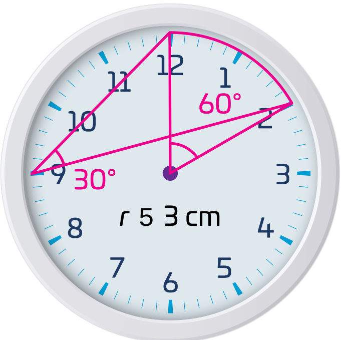




Se ha colgado un objeto pesado con dos cuerdas de distinto tamaño de los puntos A y B, como se muestra en la figura. Determina las medidas de los ángulos x y y. Argumenta tu respuesta.

Como x es un ángulo inscrito que corresponde al diámetro (ángulo central de 180°) x mide 90°. Además, como la suma de los ángulos interiores de un triángulo miden 180°, y = 180° – 22° – 90° = 68°.

06 Observa la figura y realiza lo que se pide. R. M.



- Traza sobre el reloj un ángulo central de 60° y un ángulo inscrito que abarque el mismo arco.
- Anota sobre los ángulos sus medidas y responde las preguntas:

¿Cuál es la razón entre la medida del ángulo central y el de 360°?

$\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$

¿Qué fracción de la circunferencia representa el arco que trazaste?

$\frac{1}{6}$

¿Cuál es el perímetro del círculo?

$P = \pi d = 6\pi \approx 18.8496$ cm

¿Cuál es la longitud de arco?

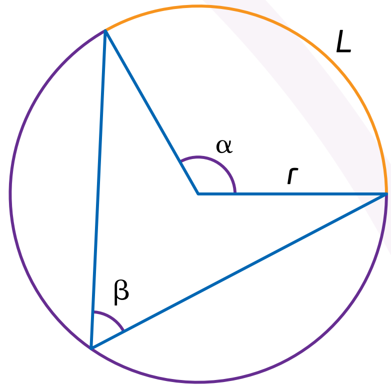
$\frac{6\pi}{6} = \pi \approx 3.1416$ cm

- Comenta con tus compañeros cómo obtener la longitud de arco a partir del ángulo inscrito.

Espacio procedimental

¿Cómo determinar la longitud de arco a partir del ángulo central o del inscrito?

Existe una relación entre la medida del ángulo central o del inscrito y la longitud del arco que comprende. En la actividad anterior, observaste que la longitud de arco que subtiende al ángulo central de 60° es $\frac{1}{6}$ del perímetro del círculo; también, que la razón entre el ángulo central de 60° y 360° es de $\frac{1}{6}$.



Observa la figura de la derecha, dado que al aumentar el valor del ángulo central α también aumenta la longitud del arco L que lo subtiende en una circunferencia de radio r, se tiene una relación de proporción directa; es decir si 360° corresponde a la longitud de la circunferencia completa $2\pi r$, entonces, para cierto ángulo α le corresponde una longitud de arco L:

$$\frac{360°}{\alpha} = \frac{2\pi r}{L}$$

Despejando L se obtiene la fórmula:

$$L = \frac{\pi r \alpha}{180°}$$

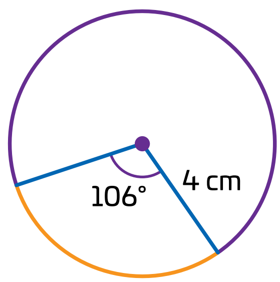
Por otra parte, si conoces la medida del ángulo inscrito β, puedes conocer la medida del ángulo central α pues $\alpha = 2\beta$. Sustituyendo esta expresión en la fórmula anterior se tiene:

$$L = \frac{\pi r(2\beta)}{180°} = \frac{\pi r \beta}{90°}$$

Las fórmulas anteriores también permiten obtener los valores del radio r o de los ángulos central e inscrito a partir de la longitud de arco L con solo despejar dichas variables.

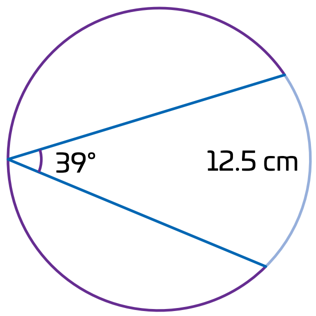
Por ejemplo:

Para obtener la longitud de arco que subtiende un ángulo central de 106° de una circunferencia de radio 4 cm, figura de la derecha, ¿qué ecuación te permite realizar dicho cálculo? ¿Cuánto mide la longitud del arco de la circunferencia?



$$L = \frac{\pi r \alpha}{180°} = \frac{(3.1416)(4)(106°)}{180°} \approx 7.4 \text{ cm}$$

Para calcular el radio de una circunferencia si se sabe que la longitud de arco es de 12.5 cm correspondiente a un ángulo inscrito de 39°, figura de la izquierda, ¿qué ecuación tienes que utilizar? ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?



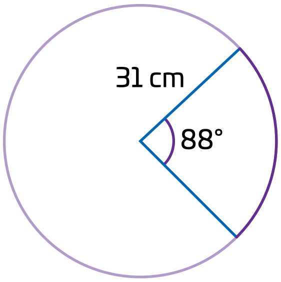
Primero se puede despejar la variable r de la fórmula: $L = \frac{\pi r \beta}{90°}$

Despejando r se obtiene: $r = \frac{90° L}{\pi \beta}$

Sustituyendo los valores se tiene el valor del radio:

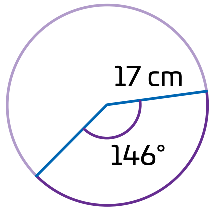
$$r = \frac{90° L}{\pi \beta} = \frac{90°(12.5)}{(3.1416)(39°)} \approx 9.18 \text{ cm}$$

07 **Analiza las figuras y determina la longitud de arco de cada circunferencia. Realiza las operaciones usando a pi como 3.1416.**



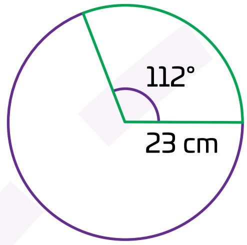
$L = \dfrac{(3.1416)(31)(88°)}{180°}$

$L \approx 47.61$ cm



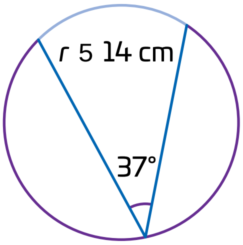
$L = \dfrac{(3.1416)(17)(146°)}{180°}$

$L \approx 43.32$ cm



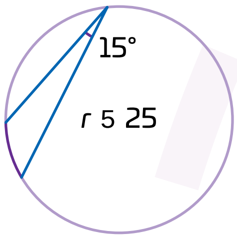
$L = \dfrac{(3.1416)(23)(112°)}{180°}$

$L \approx 44.96$ cm



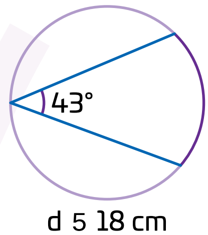
$L = \dfrac{(3.1416)(14)(37°)}{90°}$

$L \approx 18.08$ cm



$L = \dfrac{(3.1416)(25)(15°)}{90°}$

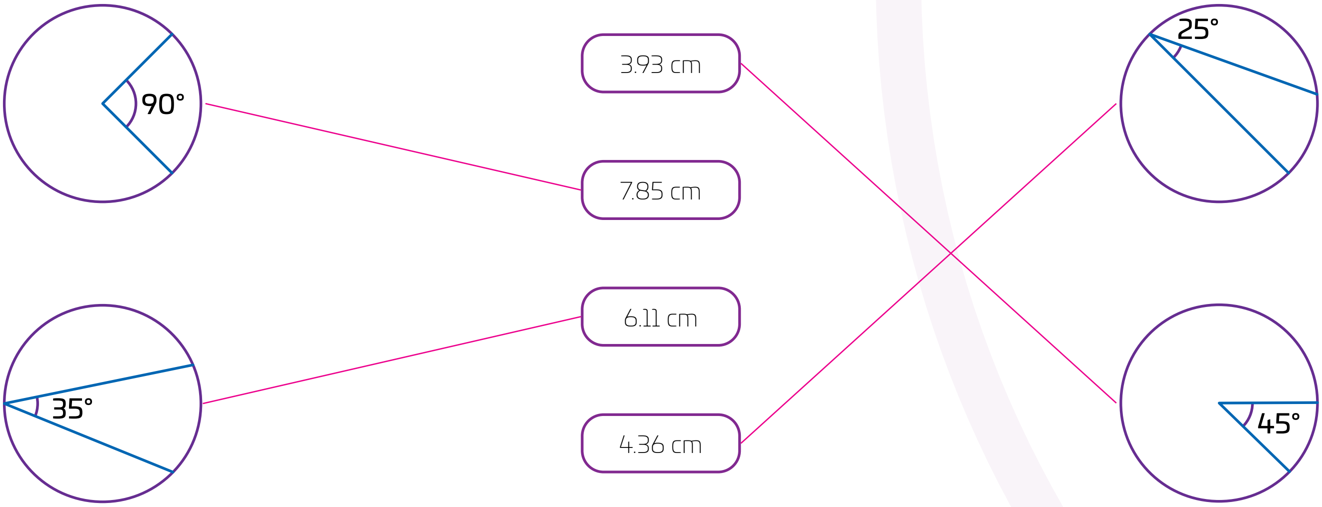
$L \approx 13.09$ cm



$L = \dfrac{(3.1416)(9)(43°)}{90°}$

$L \approx 13.5$ cm

› Relaciona cada arco con su medida tomando en cuenta que todas las circunferencias tienen 5 cm de radio.



08 Complea la tabla con la información necesaria.

Caso	Despeje	Operaciones y resultado
Si la longitud de un arco es de 35.7 cm en una circunferencia de radio 13 cm, ¿cuánto mide el ángulo central que abarca dicho arco?	$\alpha = \frac{180°L}{\pi r}$	$\alpha = \frac{180°(35.7)}{(3.1416)(13)} \approx 157.34°$
Un arco de 25.12 cm corresponde a un ángulo central de 72°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia?	$r = \frac{180°L}{\pi\alpha}$	$r = \frac{180°(25.12)}{(3.1416)(72°)} \approx 19.98$ cm
Si la longitud de un arco es de 15.8 cm y el radio de la circunferencia es 9 cm, ¿cuánto mide el ángulo inscrito que abarca ese arco?	$\beta = \frac{90°L}{\pi r}$	$\beta = \frac{90°(15.8)}{(3.1416)(9)} \approx 50.29°$
Un arco de 18.84 cm corresponde a un ángulo inscrito de 28.5°. ¿Cuál es el diámetro de la circunferencia?	$r = \frac{90°L}{\pi\beta}$ $d = 2r$	$r = \frac{90°(18.84)}{(3.1416)(28.5°)} \approx 18.93$ cm $d = 2(18.93 \text{ cm}) \approx 37.86$ cm

09 Analiza cada situación y realiza las operaciones necesarias para responder.

a. Un automóvil recorre 26.48 m sobre el borde de una glorieta circular. Si el radio de esta es de 15 m, ¿cuánto mide el ángulo inscrito que corresponde a ese recorrido?

$$\beta = \frac{90°(26.48)}{(3.1416)(15)} \approx 50.57°$$

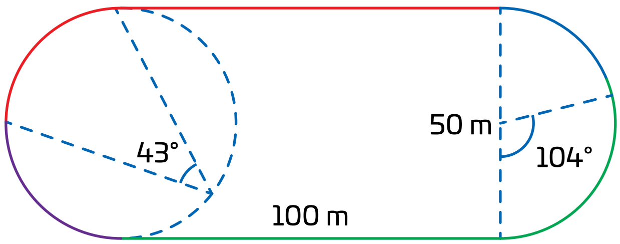
b. En un jardín redondo se quiere colocar plantas decorativas que cubra un arco de 12.56 m. Si el arco abarca un ángulo central de 157°, ¿cuál es el radio del jardín?

$$r = \frac{180°(12.56)}{(3.1416)(157°)} \approx 4.58 \text{ m}$$

c. Una escultura circular tiene un radio de 1.5 metros. Si una luz proyecta un ángulo central de 142° sobre su borde, ¿cuál es la longitud del arco iluminado?

$$L = \frac{(3.1416)(1.5)(142°)}{180°} \approx 3.71 \text{ m}$$

d. Santiago (de rojo) y Carlos (de verde) realizan los recorridos que se marcan en la siguiente pista.



¿Cuánto mide el arco de color rojo?

$$L = \frac{(3.1416)(25)(43°)}{90°} \approx 37.52 \text{ m}$$

¿Cuántos metros ha recorrido Santiago?

37.52 m + 100 m = 137.52 m

¿Cuánto mide el arco de color verde?

$$L = \frac{(3.1416)(25)(104°)}{180°} \approx 45.37 \text{ m}$$

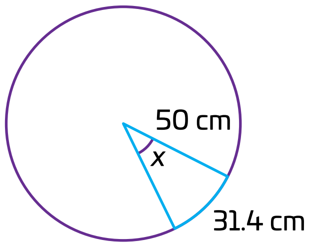
¿Cuántos metros ha recorrido Carlos?

45.37 m + 100 m = 145.37 m

SUBE NIVEL

¡Pon a prueba tu destreza matemática! Registra el tiempo que requieres para resolver cada ejercicio. ¡Hazlos lo más rápido que puedas!

01 **Determina el ángulo central correspondiente al arco azul.**

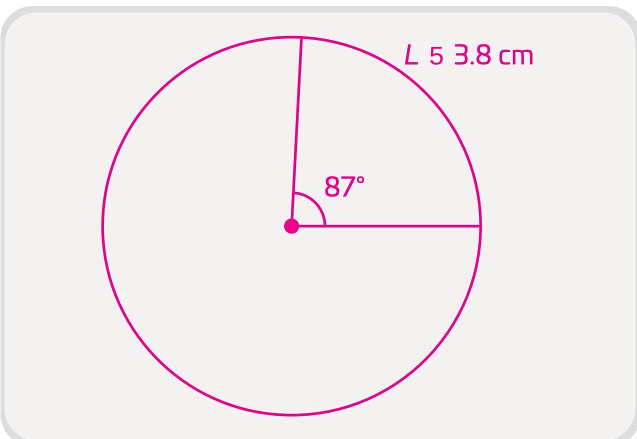


Operaciones:

$x = \frac{180° \, (31.4)}{(3.1416)(50)} \approx 35.98°$

Tu tiempo (en minutos): R. L.

02 **Dibuja una circunferencia de 5 cm diámetro y remarca sobre esta un arco de 3.8 cm, apóyate del calculo del ángulo central necesario.**



Operaciones:

$\alpha = \frac{180° \, (3.8)}{(3.1416)(2.5)} \approx 87°$

Tu tiempo (en minutos): R. L.

03 **En un parque con forma circular, un sendero curvo mide 10.47 metros y corresponde a un ángulo inscrito de 30°. ¿Cuánto mide el diámetro del parque?**

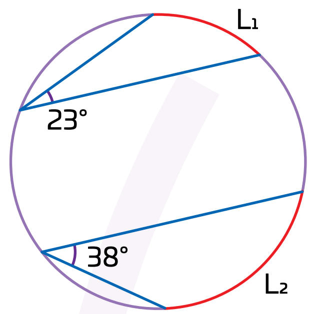
Operaciones:

$r = \frac{90° \, (10.47)}{(3.1416)(30°)} \approx 10 \text{ m}$

$d = 2(10 \text{ m}) = 20 \text{ m}$

Tu tiempo (en minutos): R. L.

04 **Calcula la suma de las longitudes de los arcos subtendidos por los ángulos inscritos en la circunferencia de 15 cm de radio.**



Operaciones:

$L_1 = \frac{(3.1416)(15)(23°)}{90°} \approx 12.04 \text{ cm}$

$L_2 = \frac{(3.1416)(15)(38°)}{90°} \approx 19.89 \text{ cm}$

Suma = 12.04 cm + 19.89 cm = 31.93 cm

Tu tiempo (en minutos): R. L.

Calcula tus puntos en cada ejercicio.

- Menos de 10 minutos: 10 puntos
- Entre 10 y 20 minutos: 5 puntos
- Más de 20 minutos: 1 punto
- Cinco puntos adicionales por no cometer ningún error.

Tabla de registro de puntos	
Puntos totales	R. L.

APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección ANALIZO, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R. L.

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R. L.

¡Regresa de nuevo a la página 139 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!