EXPLORO

Cubriendo esferas

01 Observa la imagen y responde.

a. ¿Qué tipo de figuras se forman al hacer cortes en una esfera? ¿Siempre es la misma?

Se forman círculos, no importa si el corte es inclinado, siempre serán círculos.

b. Ordena de menor a mayor los radios de las circunferencias obtenidas en cada corte.

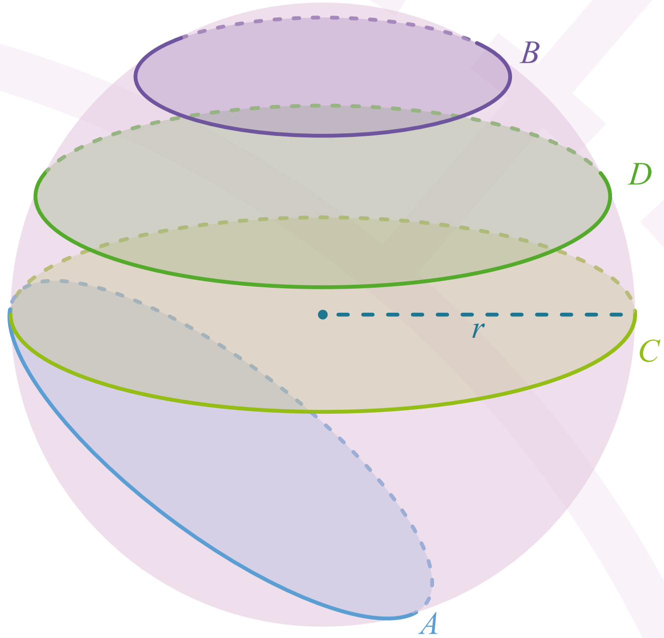
B, A, D, C

c. ¿Cómo cambia el tamaño de los círculos conforme los cortes se alejan del centro?

Cuanto más se alejan del centro, menor es su radio y, por lo tanto, el área de cada círculo.

d. Considera el origen de la esfera en su centro. ¿Qué relación hay entre la altura del corte y el radio del círculo formado?

Cuanto mayor es la altura, menor es el radio.



CONSULTO

Una esfera puede definirse como el conjunto de todos los puntos en el espacio que están a la misma distancia de un punto central llamado *centro*. Esta distancia se conoce como *radio*. Para calcular el volumen de la esfera mediante la fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

Al conjunto de todos los puntos que forman la esfera se llama *superficie esférica*. Si conocemos el valor del radio, el área de su superficie se puede calcular con la fórmula:

$$S = 4\pi r^2$$

Por ejemplo, si una esfera tiene radio $r = 5$ cm, entonces:

- Su superficie esférica es:

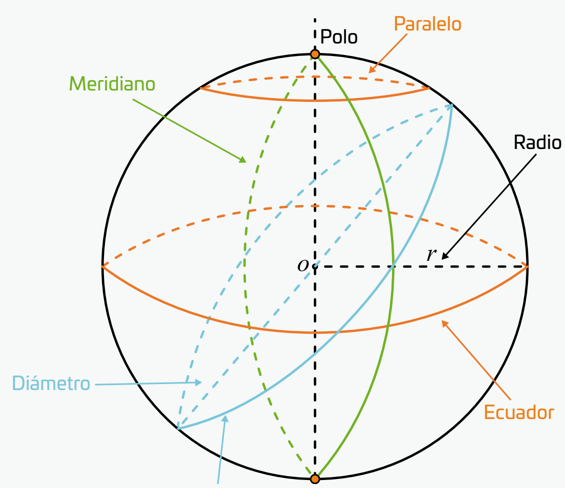
$$S = 4\pi(25) = 314.16 \text{ cm}^2$$

- Su volumen resulta:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi(5^3) = 523.59 \text{ cm}^3$$

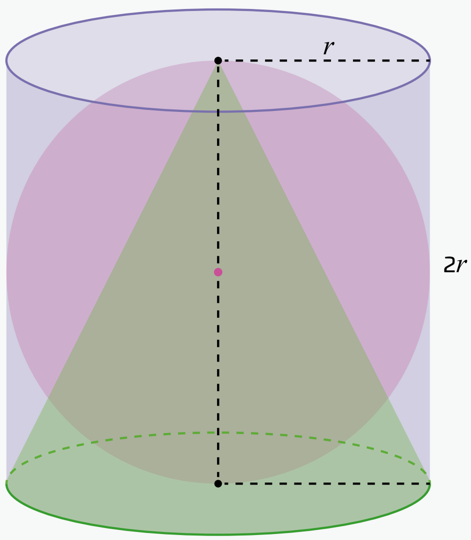
Algunos de los elementos más importantes de la esfera son:

- **Centro (O):** Punto central de la esfera. Todos los puntos de la superficie esférica están a la misma distancia de él.
- **Radio (r):** Segmento que une el centro con un punto de la superficie. Es la medida clave para calcular su área y volumen.
- **Diámetro:** Segmento que pasa por el centro y conecta dos puntos opuestos de la esfera. Es el doble del radio.
- **Circunferencia máxima:** Es el círculo más grande que puede obtenerse al cortar la esfera. Pasa por el centro y divide a la esfera en dos hemisferios iguales.
- **Ecuador:** Es el paralelo que coincide con la circunferencia máxima, la de mayor radio.
- **Paralelos:** Círculos formados por cortes horizontales a diferentes alturas. Cuanto más lejos del ecuador, menor es su radio.
- **Meridianos**: Semicircunferencias que van de un polo al otro, pasando por el centro.
- **Polos:** Puntos extremos sobre el eje vertical que atraviesa la esfera.



Un resultado clásico de la geometría se atribuye a Arquímedes, este resultado muestra una relación sorprendente entre tres sólidos: la esfera, el cilindro que la contiene y un cono con la misma base y altura.

Imagina una esfera de radio r colocada dentro de un cilindro que la circunscribe, como se muestra en la figura:



El cilindro tiene radio r y altura $2r$.

La esfera encaja perfectamente entre las paredes del cilindro y sus bases. Al calcular sus volúmenes, se obtiene:

$$V_{cilindro} = 2\pi r^3 \qquad V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Si divides el volumen de la esfera entre el volumen del cilindro obtienes que:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{3}$$

Esto significa que la esfera ocupa exactamente dos tercios del volumen del cilindro que la contiene. El tercio restante corresponde al espacio que queda libre.

Ahora bien, ¿qué representa ese espacio sobrante? Arquímedes demostró que equivale al volumen de un cono con la misma base y la misma altura que el cilindro:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2(2r) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Es decir, es un tercio del volumen del cilindro. De modo que la relación completa puede escribirse como:

$$V_{cilindro} = V_{esfera} + V_{cono}$$

Este resultado no es solo una igualdad numérica: revela una simetría geométrica muy especial, ya que para una esfera, cilindro y cono con el mismo radio se cumple que:

$$V_{esfera} = \frac{2}{3}\cdot V_{cilindro}$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\cdot V_{cilindro}$$

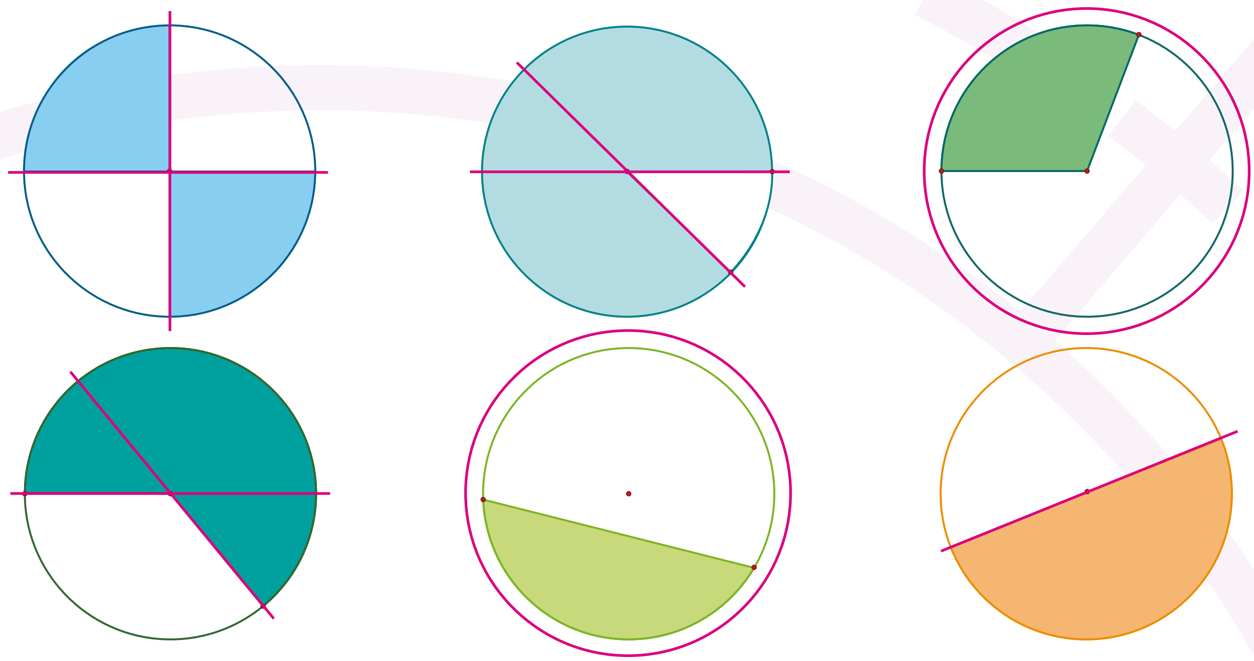
$$V_{cono} = \frac{1}{2}\cdot V_{esfera}$$

RESUELVO

02 Determina si las oraciones son verdaderas o falsas. Considera que la esfera y el cono están inscritos en un cilindro de radio r y altura $2r$.

Si se conoce el volumen del cilindro, es posible calcular el volumen de cualquier esfera.	F
El volumen de la esfera es dos veces el volumen del cono.	V
Si el volumen de la esfera es de $\frac{3}{4}$ u³ el volumen del cilindro será de $\frac{9}{8}$ u³.	V
La suma del volumen del cono y el cilindro es igual al volumen de la esfera.	F
Si $r = 5$, entonces el volumen del cono es aproximadamente 250π cm³.	V
Si el volumen del cono 250π cm³, entonces el volumen del cilindro será la mitad que el de la esfera.	F
El volumen de la esfera es $\frac{4}{6}$ el volumen del cilindro.	V
El volumen del cilindro es tres veces el volumen del cono.	V
Si el volumen del cilindro es $\frac{1}{3}$ u³ el volumen del cono será $\frac{3}{3}$ u³ .	F
1.5 veces el volumen de la esfera igualan el volumen del cilindro.	V
El volumen del cono es el doble del volumen del cilindro.	F
Dos veces el volumen del cilindro es igual a tres veces el volumen de dos esferas.	F

03 **Traza los ejes sobre los círculos de modo que, al rotar sobre de dichos ejes, los segmentos coloreados generen una esfera. En caso contrario, rodea el círculo.**



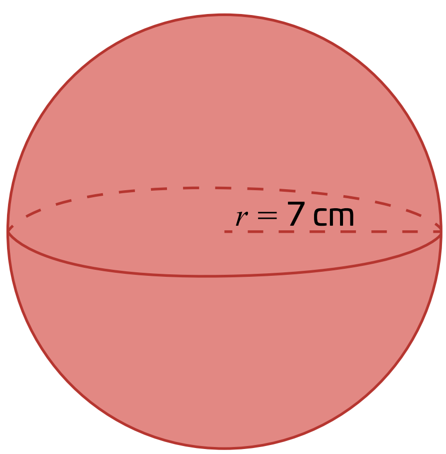
a. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que, al rotar los segmentos sobre cada eje puedan generar una esfera?

Que el eje de rotación de la figura pase por el diámetro y el trazo debe cubrir al menos medio círculo..

b. ¿Por qué algunas figuras tienen más de dos ejes de rotación para formar una esfera?

Porque no son círculos completos. Dado que les faltan partes, como cuartos eliminados, al girar sobre un solo eje se debe garantizar que con todos los segmentos coloreados se forme el círculo.

04 **Observa la esfera y calcula lo que se te pide. Usa $\pi = 3.1416$.**



a. Calcula la superficie esférica.

$S = 4\pi r^2 = 4\pi(7^2)$

$S = 615.7536 \text{ cm}^2$

b. Calcula el volumen

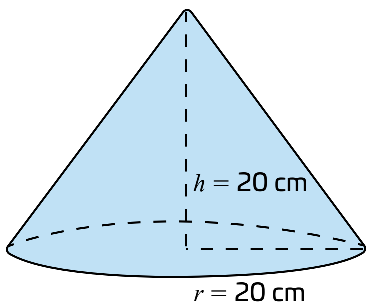
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi(7^3)$

$V = 4310.2752 \text{ cm}^3$

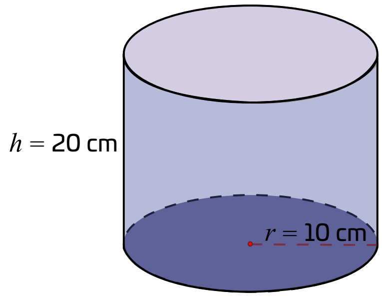
c. Si el radio aumenta al doble, ¿qué crece más rápido la superficie o el volumen? Explica tu respuesta.

R. M. El duplicar el radio, el área se multiplica por 4, pero el volumen se multiplica por 8, entonces el volumen crece más rápido.

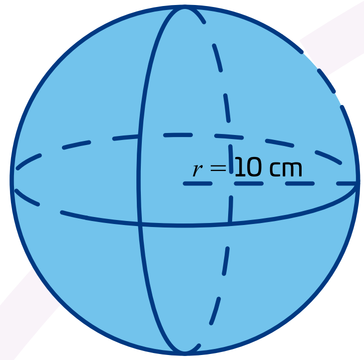
05 Calcula los volúmenes de las figuras. Luego responde. R. M.



$$V_{cono} = \frac{2}{3}\pi r^3$$
$$V_{cono} = \frac{2}{3}\pi(20)^3$$
$$V_{cono} = \frac{2}{3}\pi(8000)$$
$$V_{cono} = 16\,755.1608\text{ cm}^3$$



$$V_{cilindro} = 2\pi r^3$$
$$V_{cilindro} = 2\pi(10)^3$$
$$V_{cilindro} = 2\pi(1000)$$
$$V_{cilindro} = 6\,283.1853\text{ cm}^3$$



$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi(10)^3$$
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi(1000)$$
$$V_{esfera} = 4\,188.7902\text{ cm}^3$$

a. Ordena los volúmenes de las figuras de menor a mayor. ¿Se cumple la relación entre volúmenes?

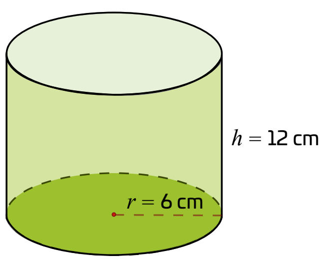
No se cumple, ya que la base del cono es el doble que la base del cilindro.

Volumen de la esfera, volumen del cilindro, volumen del cono.

b. ¿Qué condiciones se necesitaría para que se conserve la relación del cono, la esfera y el cilindro?

Que los cuerpos tengan el mismo radio asociado y la altura de las figuras sea de $2r$.

06 Analiza la figura y responde.



a. Calcula el volumen del cilindro en términos de π.

$$V_{cilindro} = 2\pi r^3$$
$$V_{cilindro} = 2\pi(6)^3$$
$$V_{cilindro} = 432\pi\text{ cm}^3$$

b. Si dentro del cilindro se inscribe un cono y una esfera a modo que compartan el mismo radio. ¿Cuál será el volumen de los otros cuerpos geométricos?

Se sabe que:

$$V_{esfera} = \frac{2}{3}\cdot V_{cilindro} \text{ y } V_{cono} = \frac{1}{3}\cdot V_{cilindro}$$

Entonces:

$$V_{esfera} = \frac{2}{3}(432\pi)\text{ cm}^3 = 288\pi$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\cdot V_{cilindro} = \frac{1}{3}(432\pi)\text{ cm}^3 = 144\pi$$