

## Sesión 1


**Propósito**

Los estudiantes tendrán una primera aproximación a las razones trigonométricas, sus valores y cómo se relacionan entre sí.

**Tip 1.** Solicite que un voluntario lea las preguntas de la sección **ANALIZO**, **páginas 120 y 121**, y anime a que otros las respondan. Para la segunda pregunta, sugiera que usen, por ejemplo, un color para los números y otro para los signos de operación en alguna suma, resta, multiplicación o división que usted proponga en ese momento, o un color para números pares y otro para impares, y pida a los alumnos que hagan otras propuestas parecidas, todo con la finalidad de discutir si les parece más claro el procedimiento o visualmente entienden mejor el desarrollo, que si utilizaran un solo color. Para la tercera pregunta, explore con ellos los distintos significados o usos que pueden darle a la palabra “unitario” y su relación con “unidad”.



## Esfera 6

 ¿Trigo... qué? ¿Puedo hacer cálculos con colores? ¿El círculo unitario tiene radio 1 o diámetro 1?

Trigonometría para principiantes  
Determina las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, y las utiliza para hallar valores faltantes en triángulos.

### Sesión 1

**Tip 2.** Invite a los alumnos a consultar algunos conceptos en Internet que puedan ayudarles a contestar las preguntas o tener más herramientas para hacerlo.

**Tip 3.** Indique a los alumnos que intenten responder de manera individual todas las actividades de la sección **RECONOZCO**, páginas 122 y 123, incluyendo la rúbrica que aparece al final de la sección. Recuérdeles que esta sección es una herramienta para evaluar su progreso: al terminar la **Esfera** regresarán a ella para revisar cuánto aprendieron.

RECONOZCO

Comienza una nueva Esfera de Exploración. No olvides responder otra vez los reactivos en tu cuaderno cuando hayas terminado, ¡así descubrirás cuánto avanzaste!

01 Escribe las razones trigonométricas indicadas en cada triángulo.

$\tan(\alpha) = \frac{BC}{AB}$ 
 $\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC}$ 
 $\sin(\alpha) = \frac{BC}{AC}$ 
 $\cot(\alpha) = \frac{AB}{BC}$ 
 $\sec(\alpha) = \frac{AC}{AB}$ 
 $\csc(\alpha) = \frac{AC}{BC}$

11 Describe una de las razones trigonométricas anteriores.

En un triángulo rectángulo, el coseno de un ángulo agudo es la razón del cateto adyacente entre la hipotenusa.

02 Relaciona las razones trigonométricas que dan el mismo valor. Considera que  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

$\sin(\alpha)$ 
 $\cos(\alpha)$ 
 $\tan(\alpha)$ 
 $\csc(\alpha)$ 
 $\sec(\alpha)$ 
 $\cot(\alpha)$

$\frac{1}{\cos(\alpha)}$ 
 $\frac{1}{\csc(\alpha)}$ 
 $\frac{1}{\sin(\alpha)}$ 
 $\frac{1}{\cot(\alpha)}$ 
 $\frac{1}{\sec(\alpha)}$ 
 $\frac{1}{\tan(\alpha)}$

03 Usa funciones trigonométricas para obtener la medida de los lados y ángulos del triángulo. Anota todas las operaciones y los resultados en el recuadro.

Con el teorema de Pitágoras:

$\sqrt{3.2^2 + 2.55^2} = 2.67$

El lado b mide 2.67 unidades.

$\cos\left(\frac{2.67}{3.2}\right) = 46.29^\circ$

El ángulo inferior mide  $46.29^\circ$ .

$\sin\left(\frac{2.67}{3.2}\right) = 43.71^\circ$

El ángulo superior mide  $43.71^\circ$ .

El ángulo recto mide  $90^\circ$ .

2.1 Anota una V si la igualdad es verdadera o F si es falsa.

$\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$ 
 $\cos(\alpha) + \sin(\alpha) = 0$

04 Usa funciones trigonométricas para obtener la medida de los lados y ángulos del triángulo. Anota todas las operaciones y los resultados en el recuadro.

Con el teorema de Pitágoras:

$\sqrt{3.2^2 + 2.55^2} = 2.67$

El lado b mide 2.67 unidades.

$\cos\left(\frac{2.67}{3.2}\right) = 46.29^\circ$

El ángulo inferior mide  $46.29^\circ$ .

$\sin\left(\frac{2.67}{3.2}\right) = 43.71^\circ$

El ángulo superior mide  $43.71^\circ$ .

El ángulo recto mide  $90^\circ$ .

Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo.

	Antes de la Esfera de Exploración		Al terminar la Esfera de Exploración	
	Sí	No	Sí	No
1. Defino las razones seno, coseno y tangente, con apoyo del círculo unitario y de triángulos rectángulos.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2. Reconozco identidades trigonométricas con apoyo del círculo unitario.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. Encuentro medidas faltantes en triángulos rectángulos utilizando las razones trigonométricas.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Puntos obtenidos:

INVESTIGO

Aprendizaje esperado

- Determina las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, y las utiliza para hallar valores faltantes en triángulos.

Keys

- Círculo unitario
- Identidades trigonométricas
- Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

### Sesión 2

#### Propósito

Los estudiantes obtendrán, mediante su indagación en los Key, los conceptos fundamentales para el desarrollo de la Esfera de Exploración.

**Tip 1.** Antes de pasar a la lectura de la sección *Investigo* de los **Key** *Círculo unitario*, *Identidades trigonométricas* y *Razones trigonométricas en triángulos rectángulos*, organice una breve lluvia de ideas para recordar propiedades sobre los triángulos rectángulos, como las relaciones entre los ángulos complementarios y el teorema de Pitágoras. Esto ayudará a que los estudiantes identifiquen más fácilmente la información clave para resolver los ejercicios de las próximas sesiones.

**Tip 2.** Pida a los estudiantes que hagan un resumen de los conceptos, técnicas y fórmulas principales que encuentren en los **Keys**.

**Tip 3.** Invite a los alumnos a resolver las 4 actividades de ejercitación de cada **Key** utilizando su cuaderno y una calculadora y esbozando dibujos y diagramas para realizar los cálculos necesarios.

2.1 Anota una V si la igualdad es verdadera o F si es falsa. +2

$$\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$$

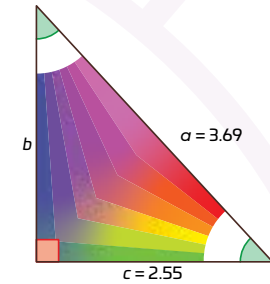
V

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 0$$

F

03 Usa funciones trigonométricas para obtener la medida de los lados y ángulos del triángulo. Anota todas las operaciones y los resultados en el recuadro. +3

Con el teorema de Pitágoras:  
 $\sqrt{3.69^2 - 2.55^2} = 2.67$   
 El lado *b* mide 2.67 unidades.  
 $\cos\left(\frac{2.55}{3.69}\right) = 46.29^\circ$   
 El ángulo inferior mide  $46.29^\circ$ .  
 $\sin\left(\frac{2.55}{3.69}\right) = 43.71^\circ$   
 El ángulo superior mide  $43.71^\circ$ .  
 El ángulo recto mide  $90^\circ$ .



Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

- Defino las razones seno, coseno y tangente, con apoyo del círculo unitario y de triángulos rectángulos.
- Reconozco identidades trigonométricas con apoyo del círculo unitario.
- Encuentro medidas faltantes en triángulos rectángulos utilizando las razones trigonométricas.

Antes de la Esfera de Exploración

Sí No

☐ ☐

☐ ☐

☐ ☐

Al terminar la Esfera de Exploración

Sí No

☐ ☐

☐ ☐

☐ ☐

Puntos obtenidos:

INVESTIGO ● ● ● ● ● ● ● ●

© UNOi

#### Aprendizaje esperado

- Determina las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, y las utiliza para hallar valores faltantes en triángulos.

#### Keys

- Círculo unitario
- Identidades trigonométricas
- Razones trigonométricas en triángulos rectángulos



### Sesión 3

#### Propósito

Los alumnos conocerán algunas aplicaciones de las razones trigonométricas, usadas en la antigua Grecia, y la relación con los triángulos rectángulos.

**Tip 1.** Lean el texto del **COMPRENDO**, deteniéndose en cada una de las cuatro partes para que los alumnos cuenten las experiencias que han tenido con estos fenómenos, como al observar una luna en cuarto creciente o un eclipse total de Sol.

**Tip 2.** Para complementar el trabajo de esta sección, pida a los escolares que comenten para el grupo qué otras aplicaciones piensan que tienen estos conceptos para medir los elementos del cosmos, como la distancia a otros sistemas solares, cúmulos de estrellas, o galaxias, por ejemplo.

**Tip 3.** Otorgue suficiente tiempo a los alumnos para que contesten las preguntas de la **página 125**. Al terminar, comenten en grupo las respuestas. Por otro lado, solicíteles que anoten de manera individual qué dudas tienen aún o qué no les queda claro de lo que han visto hasta el momento, para regresar a ello al final de la esfera.

### Aprendizaje aumentado



Proponemos añadir al finalizar la lectura del **Comprendo** de la **página 124** el uso de la aplicación **PizarraBlanca Whiteboard**. Pida a los alumnos abrir la aplicación e indique que en la parte superior derecha está el menú de herramientas y que pueden cambiar el color del plumón pulsando en él. Pida que en una parte de la hoja dibujen un círculo que representará al Sol y que en otra parte de esta dibujen alguna figura sencilla. Pídales que, basados en la lectura del Comprendo dibujen la sombra que proyectaría dicha figura. Invite a los estudiantes a compartir sus dibujos y discuta con ellos que incluso en la pintura son importantes las matemáticas y la trigonometría; por ejemplo, en los ángulos de iluminación.

**COMPRENDO**

¿A quién no le gustan los fenómenos celestes? Cielos tornasoles, voluminosas nubes, la Luna brillante, el cielo estrellado, un cohete  $\uparrow$  llevando algún satélite artificial a su órbita (bueno, si solo si estás cerca del lugar de lanzamiento). ¿Cuál de ellos disfrutas más? ¿Alguno podría servirte para calcular distancias entre los cuerpos celestes? Aristarco de Samos (310 a. n. e.) describe cómo medir la distancia del Sol a la Luna durante la fase de cuarto menguante o creciente. Creyó que las estrellas estaban infinitamente lejos, y en esto vio la razón de por qué no había paralaje visible.

Eratóstenes, otro griego antiguo como Aristarco, calculó la circunferencia de la Tierra. Para ello inventó un método trigonométrico, además de las nociones de latitud y longitud. Analiza  $\uparrow$  estos logros en **cuatro partes u observaciones astronómicas**. Considera que aparecerán las medidas  $d_s$ , distancia al Sol (desde la Tierra);  $d_l$ , distancia a la Luna (desde la Tierra);  $D_s$ , diámetro del Sol;  $R_s$ , radio del Sol;  $D_l$ , diámetro de la Luna;  $R_l$ , radio de la Luna;  $D_t$ , diámetro de la Tierra; y  $R_t$ , radio de la Tierra.

**Parte 1. Cuarto creciente o menguante de la Luna... O lo que vio Aristarco**  
La Tierra, el Sol y la Luna forman un triángulo rectángulo como el mostrado  $\uparrow$ . Pon atención en la fase de la Luna, como lo hizo Aristarco. Con observaciones actuales sabemos que  $\theta = 89.853^\circ$ , ¿cuál es el valor del cociente  $\frac{d_s}{d_l}$ ? ¿Y para qué te serviría saberlo? No te agobies, avanza para descubrir más.

**Parte 2. Eclipse total de Sol**  
Un eclipse total de Sol  $\uparrow$  tiene el afortunado hecho de la casi coincidencia de los discos del Sol y la Luna (solo se observa la corona solar). Esto se usa para establecer la semejanza de triángulos rectángulos mostrados en la figura. ¿Puedes concluir de ella que  $\frac{d_s}{R_s} = \frac{d_l}{R_l}$ ?

**Parte 3. Eclipse total de Luna**  
Los usualmente prolongados eclipses totales de Luna  $\uparrow$  permiten establecer de manera sencilla que el radio de la sombra de la Tierra es aproximadamente 3.6 veces el radio de la Luna. ¿Esto te sirve para obtener  $\frac{R_t}{R_l}$ ?

**Parte 4. La luna llena... O algo antiguo hoy en día**  
Usa una moneda, aléjala con la mano  $\uparrow$  frente a tu cara y genera un "eclipse lunar artificial" delante de tu ojo. Mide la distancia que alejaste la moneda y su radio para establecer el ángulo visual  $\alpha$  de la Luna.

**Une las partes... O trabaja lo antiguo con lo moderno**  
Si reúnes las medidas anteriores, con paciencia y atención, llegarás a que  $D_s = 1.2730$  km, y de ahí  $R_s = 6365$  km;  $d_s \approx 150$  millones de km;  $d_l \approx 390.000$  km. Sea que lo logres con poco o mucho esfuerzo, ten presente que harás lo que otras personas durante milenios disfrutaron: fenómenos astronómicos y tratar de comprenderlos, con ayuda de las matemáticas. Y, en este caso, usando razones trigonométricas.

Eugenio Díaz Barriga Arceo

Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer, reflexiona sobre ello y reproduce los triángulos de la página anterior, sin dibujar los cuerpos celestes, indicando las medidas, y sus nombres.

- Completa los valores que faltan  $\uparrow$  y verifica su validez, realizando las operaciones necesarias.
- Al terminar, compara tu trabajo con al menos dos compañeros, corrijan e investiguen lo que haga falta.

¿De qué manera intervienen las funciones trigonométricas en esos triángulos? ¿Simplifican el trabajo o son complementarias y prescindibles? Discútelos en el aula y explica las ideas más importantes. R. L.

¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, escríbelo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución. R. L.





### Sesión 4

#### Propósito

Los estudiantes conocerán las razones trigonométricas en términos de los lados de un triángulo rectángulo, y calcularán su valor para algunos ángulos. También conocerán el círculo unitario, una identidad trigonométrica y aprenderán a calcular el valor de razones trigonométricas con la calculadora.

**Tip 1.** Pida a los alumnos que trabajen la **actividad 01** de la sección **PRACTICO**, **página 126**, y, al terminar, solicite que se reúnan con un compañero para revisar las respuestas. Posteriormente, revísenlas en grupo y aclare las dudas que se presenten. Para concluir esta actividad, pregunte a los estudiantes cómo pueden generalizar el trabajo hecho, es decir, qué conclusiones podrían generar a partir del análisis de las medidas de los triángulos.

**Tip 2.** Si lo considera pertinente, trace en el pizarrón otros triángulos, entre estos algunos semejantes entre sí, para que los colegiales midan los lados y ángulos, y calculen los cocientes entre los lados. Usarán los resultados para consolidar o reformular las conclusiones que hayan obtenido en el punto anterior.

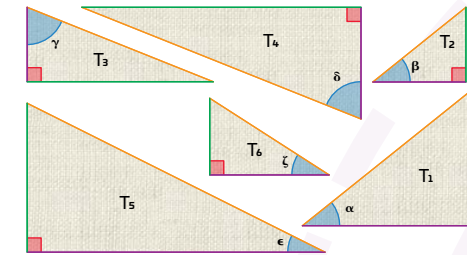
**Tip 3.** Indique a los alumnos que contesten la **actividad 02**, verifiquen en grupo que no haya errores y, posteriormente, comente que hay nemotécnicas para recordar las razones trigonométricas, como “*SOH CAH TOA*”, que corresponde a “seno es igual a cateto opuesto sobre hipotenusa”, “coseno es igual a cateto adyacente sobre hipotenusa” y “tangente es igual a cateto opuesto sobre cateto adyacente”.

#### PRACTICO

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

**01** Usa el código de colores para completar la tabla. **R. M.**

• Mide los lados y el ángulo marcado de cada triángulo; redondea a centésimos los resultados de los cocientes.



Triángulo	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	T <sub>5</sub>	T <sub>6</sub>
Medida del	39°	39°	68°	68°	26.5°	33°
Resultado de	$\frac{34 \div 53}{= 0.64}$	$\frac{17 \div 27}{= 0.63}$	$\frac{42 \div 45}{= 0.93}$	$\frac{62 \div 67}{= 0.93}$	$\frac{33 \div 75}{= 0.44}$	$\frac{17 \div 32}{= 0.53}$
Resultado de	$\frac{42 \div 53}{= 0.79}$	$\frac{21 \div 27}{= 0.78}$	$\frac{17 \div 45}{= 0.37}$	$\frac{25 \div 67}{= 0.37}$	$\frac{66 \div 75}{= 0.88}$	$\frac{27 \div 32}{= 0.84}$
Resultado de	$\frac{34 \div 42}{= 0.8}$	$\frac{17 \div 21}{= 0.8}$	$\frac{42 \div 17}{= 2.47}$	$\frac{62 \div 25}{= 2.48}$	$\frac{33 \div 66}{= 0.5}$	$\frac{17 \div 27}{= 0.62}$

• Registra en qué triángulos los cocientes resultaron iguales.

En los triángulos semejantes, en los que el ángulo marcado es igual.

• Verifica e indica el color en los triángulos de arriba.

Cateto opuesto al ángulo marcado: verde

Cateto adyacente al ángulo marcado: morado

Hipotenusa del triángulo: anaranjado

**02** Escribe las razones trigonométricas con los colores de la actividad anterior.

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha) &= \frac{\text{cateto opuesto (verde)}}{\text{hipotenusa (anaranjado)}} \\ \text{cos}(\beta) &= \frac{\text{cateto adyacente (morado)}}{\text{hipotenusa (anaranjado)}} \\ \text{tan}(\gamma) &= \frac{\text{cateto opuesto (verde)}}{\text{cateto adyacente (morado)}} \end{aligned}$$



### Sesión 4

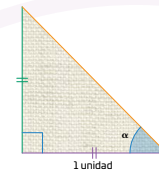
**Tip 4.** Para la **actividad 03, página 127**, pida a los alumnos trabajar en parejas o equipos. Invítelos a comparar con otro equipo sus resultados y pregunte si estos dependen del tamaño de los triángulos o qué factores creen que los determinan. Deben concluir que los resultados son independientes de las medidas de los lados del triángulo rectángulo, pero están determinados por sus ángulos agudos.

**Tip 5.** Para complementar el trabajo de la **actividad 04 de la página 128** analicen en grupo cómo varían las razones trigonométricas a medida que el punto  $C$  se desplaza sobre el círculo unitario. Comente que, aunque no existen medidas negativas en el triángulo, el uso de los signos negativos permite referirse a la ubicación de este vértice del triángulo en el plano cartesiano, y esto es útil para definir diferentes orientaciones del triángulo.

**Tip 6.** Pida a los colegas que resuelvan la **actividad 05, página 128**, de manera individual y revisen en grupo las respuestas. Comente que esa igualdad,  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ , es una identidad trigonométrica, es decir, es una igualdad que siempre es cierta, sin importar el valor del  $\alpha$ . Aclare que hay muchas identidades trigonométricas e incítelos a buscar algunas en internet.

03 Completa la información requerida para cada figura.

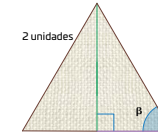
Triángulo rectángulo isósceles



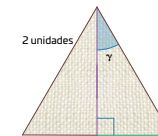
Medida de  $\sqrt{2}$  unidades  
Justificación: Como es un triángulo rectángulo con catetos de 1 unidad, puede usarse el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la hipotenusa es  $1^2 + 1^2 = 2$ , es decir, mide  $\sqrt{2}$ .  
Medida del ángulo  $\alpha$ :  $45^\circ$   
 $\sin(\alpha) \rightarrow \sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $\cos(\alpha) \rightarrow \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $\tan(\alpha) \rightarrow \tan(45^\circ) = \frac{1}{1} = 1$

Triángulos equiláteros

Medida de  $\sqrt{3}$  unidades  
Justificación: Los triángulos interiores son triángulos rectángulos con hipotenusa de 2 y un cateto de 1, entonces, por el teorema de Pitágoras, se tiene  $2^2 - 1^2 = 3$ , es decir, el otro cateto mide  $\sqrt{3}$ .  
Medida del ángulo  $\beta$ :  $60^\circ$   
 $\sin(\beta) \rightarrow \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\cos(\beta) \rightarrow \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} = 0.5$   
 $\tan(\beta) \rightarrow \tan(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$



Medida de  $\sqrt{3}$  unidades  
Medida del ángulo  $\gamma$ :  $30^\circ$   
 $\sin(\gamma) \rightarrow \sin(30^\circ) = \frac{1}{2} = 0.5$   
 $\cos(\gamma) \rightarrow \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\tan(\gamma) \rightarrow \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

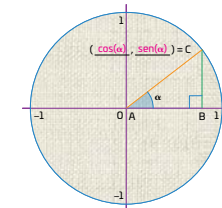


Ahora, con las respuestas anteriores completa las igualdades.

$\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ)$   
 $\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ)$   
 $\sin(60^\circ) = \cos(30^\circ)$

Comenta con un compañero si los resultados que obtuviste solo son iguales en triángulos del mismo tamaño o si son los mismos para triángulos semejantes.

04 Observa la imagen del llamado círculo unitario y contesta.



En una circunferencia de radio 1, la hipotenusa del triángulo medirá 1, sin importar el ángulo  $\alpha$ . Explica.

R: M. Si, porque la hipotenusa va siempre del centro del círculo a su circunferencia.

Los triángulos estudiados en las dos páginas anteriores, ¿pueden identificarse en esta circunferencia? Discútelo con tu grupo y explica aquí.

R: L. Los estudiantes discuten sobre que los únicos triángulos que pueden trazarse en la circunferencia tienen hipotenusa igual a 1, pero, por criterios de semejanza se podrían conocer las razones trigonométricas de cualquier triángulo rectángulo.

¿Con cualquier ángulo  $\alpha$  puede dibujarse un triángulo como los de las páginas anteriores, para calcular con él las funciones trigonométricas?

R: L. El estudiante concluye que los ángulos con los que debe trabajar las funciones trigonométricas son los mayores a  $0^\circ$ , pero menores a  $90^\circ$ .

¿Cuáles son las coordenadas de C en términos del coseno y el seno del ángulo  $\alpha$ . Discútelo con el grupo, anota sus conclusiones y esos valores en la imagen.

R: M. Las coordenadas del punto C son las medidas horizontal y vertical que corresponden a los valores del coseno y seno del ángulo  $\alpha$ , respectivamente.



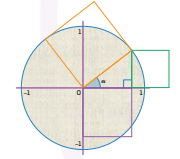
Analiza el comportamiento de los lados del triángulo del círculo unitario a medida que el ángulo  $\alpha$  se acerca a  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , para indicar los valores siguientes:

$\sin(0^\circ) = \frac{0}{1} = 0$   
 $\sin(90^\circ) = \frac{1}{1} = 1$   
 $\cos(0^\circ) = \frac{1}{1} = 1$   
 $\cos(90^\circ) = \frac{0}{1} = 0$   
 $\tan(0^\circ) = \frac{0}{1} = 0$

Comenta en el grupo por qué la tangente de  $90^\circ$  no puede calcularse con un cociente y escribe una conclusión. R: M.

La tangente de  $90^\circ$  no puede calcularse del porque en ese ángulo el cateto adyacente mide 0 unidades, es decir, se tendría que hacer  $1 \div 0$ , pero esa división no está definida.

05 Usa el círculo unitario siguiente para justificar que  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ . R: M.



Como la hipotenusa mide 1 y los catetos miden  $\cos(\alpha)$  y  $\sin(\alpha)$ , respectivamente, entonces por el teorema de Pitágoras se cumple  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ .

### Sesión 5

#### Propósito

Los estudiantes determinarán el valor numérico de razones trigonométricas y calcularán valores faltantes en un triángulo rectángulo. Además, repasarán las relaciones entre las razones trigonométricas y algunas identidades básicas.

**Tip 1.** Al final del **Espacio Procedimental** de la **página 129** revise que los alumnos no tengan dudas acerca de cómo usar las funciones trigonométricas en su calculadora, proponiendo algunos valores de ángulos (distintos a los propuestos en la **actividad 06**) en el pizarrón para que, en grupo, calculen el resultado numérico.

**Tip 2.** Como complemento a la **actividad 06** de la **página 129**, pida a los escolares que escriban cinco medidas de ángulos agudos y los intercambien con un compañero, para calcular el seno, el coseno y la tangente. Comenten en grupo sus resultados y establezcan una conclusión.

**Tip 3.** Permita que los alumnos trabajen la **actividad 07** en parejas o tercias. Comente la importancia de escribir con claridad el procedimiento empleado, con el fin de no cometer errores al resolver la actividad.

### 1 Espacio 2 3 procedimental

¿Cómo uso las funciones trigonométricas en la calculadora de mi celular?

- Ingreso a la opción "Calculadora científica", puede estar en "Ajustes" o dentro de la calculadora sencilla.
- Reviso que la calculadora esté en grados (*degrees* o *deg*).
- Determino si conozco la medida de un ángulo o la razón entre dos lados:
  - Si conozco el ángulo, escribo ese número seguido de la función deseada (o en orden inverso, según sea el funcionamiento de mi aplicación); el resultado será el valor de la razón correspondiente. Por ejemplo, para  $\cos(27^\circ)$  presiono:  $[27] + [\cos] + [=]$  (o  $[\cos] + [27] + [=]$ )

El resultado, 0.89, en un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto adyacente a ese ángulo y la hipotenusa.

- Por otro lado, si conozco el valor de la razón, escribo ese número, y elijo la opción "inversa" (la tecla *inv*,  $2^{nd}$  u otra que muestre  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$  y  $\tan^{-1}$ ) seguido de la función deseada (o al revés, según como trabaje mi aplicación); el resultado será la medida del ángulo correspondiente. Por ejemplo, para  $\sin^{-1}(0.75)$  escribo:  $[0.75] + [\sin^{-1}] + [=]$  (o  $[\sin^{-1}] + [0.75] + [=]$ )

El resultado,  $48.59^\circ$ , es la medida del ángulo opuesto al cateto usado. Y no olvido que 0.75 es la razón entre este cateto y la hipotenusa.

06 Calcula lo siguiente, redondeando a centésimos.

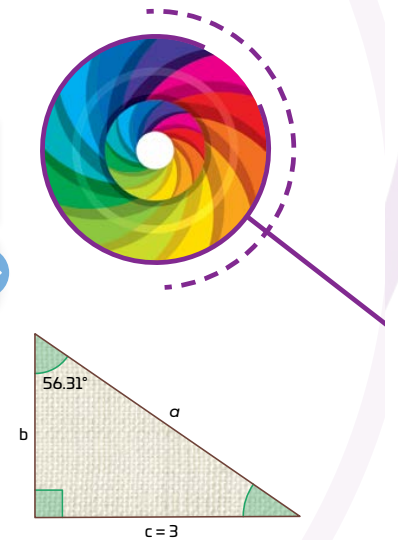
$$\begin{array}{lll} \sin(48^\circ) = 0.74 & \sin(81^\circ) = 0.99 & \sin(0.6^\circ) = 0.01 \\ \cos(9^\circ) = 0.99 & \cos(62^\circ) = 0.47 & \cos(59^\circ) = 0.52 \\ \tan(73^\circ) = 3.27 & \tan(28^\circ) = 0.53 & \tan(13^\circ) = 0.23 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \sin^{-1}(0.1) = 5.74^\circ & \sin^{-1}(0.78) = 51.26^\circ & \sin^{-1}(0.045) = 2.58^\circ \\ \cos^{-1}(0.28) = 73.74^\circ & \cos^{-1}(0.03) = 88.28^\circ & \cos^{-1}(0.9) = 25.84^\circ \\ \tan^{-1}(1.8) = 60.95^\circ & \tan^{-1}(0.75) = 36.87^\circ & \tan^{-1}(1.001) = 45.03^\circ \end{array}$$

Comenta con el grupo cuáles son los posibles resultados al calcular senos, cosenos y tangentes de ángulos. Después, revisa con la calculadora que los cocientes que hiciste en las páginas anteriores sean correctos.

07 Determina las medidas del ángulo y de los lados del triángulo. Anota tu procedimiento.

La medida del ángulo inferior es  $90^\circ - 56.31^\circ = 33.69^\circ$ .  
 Para la hipotenusa:  $\sin(56.31^\circ) = \frac{3}{\text{hipotenusa}}$   
 entonces hipotenusa =  $\frac{3}{\sin(56.31^\circ)} \approx 3.61$   
 Para el cateto desconocido:  $\tan(56.31^\circ) = \frac{3}{\text{cateto}}$   
 entonces cateto =  $\frac{3}{\tan(56.31^\circ)} \approx 2$ .  
 El lado *a* mide 3.61 unidades.  
 El lado *b* mide 2 unidades.



## Sesión 5

**Tip 4.** Sugiera a los colegiales que trabajen las **actividades 01 y 02** del **#Subenivel, página 130** dibujando un círculo unitario.

**Tip 5.** Sugiera a los alumnos que resuelvan la **actividad 06** de la **página 131** y comprueben sus resultados sin usar la calculadora, sino a partir del dibujo de un triángulo rectángulo (en el círculo unitario o no) y aplicando las definiciones de seno y coseno a los ángulos complementarios.

**Tip 6.** Solicite que, como complemento de la **actividad 07** de la **página 131**, tracen los triángulos de los incisos a y b. Después pida que comparen con un compañero sus respuestas y trazos. Aproveche este momento para recordar, en grupo, los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.

**Tip 7.** Solicite a los alumnos trabajar la **actividad 08** del **#Subenivel**, **página 131** por su cuenta, y revise en grupo las respuestas. Luego, pídale que se reúnan en parejas para que cada alumno escriba indicaciones, similares a las de la actividad, e intercambien su trabajo con su compañero: uno se encargará de construir el triángulo del otro. En plenaria revise algunos de los ejercicios.

**SUBE NIVEL**

¡Pon a prueba tu destreza matemática! Realiza lo indicado, anotando tus respuestas con claridad y limpieza. Usa dos cifras decimales de precisión. Obtienes un punto por cada valor o respuesta correcta.

**Q1** Completa las igualdades.

$$\sec(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \rightarrow \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} \rightarrow \cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

$$\csc(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \rightarrow \csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$$

Puntos obtenidos: **R L**

Bono de un punto. Analiza la figura para explicar por qué  $\alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta$ .

Los ángulos internos del triángulo suman  $180^\circ$  y un ángulo es recto, entonces, los otros dos ángulos suman  $90^\circ$ , es decir,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , lo que implica  $\alpha = 90^\circ - \beta$ .

**Q2** Relaciona las columnas.

$\cos(90^\circ)$   $\rightarrow$  0  
 $\sin(90^\circ)$   $\rightarrow$  1  
 $\cos(0^\circ)$   $\rightarrow$  0  
 $\tan(0^\circ)$   $\rightarrow$  1  
 $\tan(45^\circ)$   $\rightarrow$  1  
 $\tan(60^\circ)$   $\rightarrow$  1

Puntos obtenidos: **R L**

**Q3** Calcula los valores de las funciones trigonométricas.

$\sin(24^\circ) \approx 0.41$   $\sin(9^\circ) \approx 0.16$   
 $\cos(5^\circ) \approx 0.99$   $\cos(23^\circ) \approx 0.92$   
 $\tan(47^\circ) \approx 1.07$   $\tan(35^\circ) \approx 0.7$   
 $\sin(10.14^\circ) \approx 0.18$   $\sin(10.67^\circ) \approx 0.18$   
 $\cos(10.82^\circ) \approx 0.98$   $\cos(10.31^\circ) \approx 0.98$   
 $\tan(11.02^\circ) \approx 0.19$   $\tan(10.61^\circ) \approx 0.19$

Puntos obtenidos: **R L**

**Q4** Calcula las medidas faltantes.

Ángulo faltante:  $90^\circ - 18.43^\circ = 71.57^\circ$   
 Hipotenusa:  $\sin(18.43^\circ) \approx 0.32$   
 Cateto desconocido:  $\cos(18.43^\circ) \approx 0.94$   
 El lado  $a_2$  mide 0.94.  
 El lado  $c_2$  mide 1.

Puntos obtenidos: **R L**

**Q5** Resuelve el triángulo.

Ángulo superior:  $\cos\left(\frac{2}{c}\right) = 52.83^\circ$

Ángulo inferior:  $\sin\left(\frac{2}{c}\right) = 37.17^\circ$

Para el cateto:  $3.31 \times \sin(52.83^\circ) = 2.64$

El lado  $c$  mide 2.64 unidades.

Puntos obtenidos: **R L**

**Q6** Anota V si la igualdad es verdadera, o F si es falsa.

$\sin(60^\circ) = \cos(30^\circ)$  **V**

$\sin(30^\circ) = \cos(30^\circ)$  **F**

$\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ)$  **V**

$\sin(60^\circ) = \cos(60^\circ)$  **F**

Puntos obtenidos: **R L**

**Q7** Calcula lo que se pide.

Los lados y ángulos de un triángulo rectángulo que tiene un cateto de 4.44 unidades y un ángulo de  $61.63^\circ$  opuesto a este cateto.

La hipotenusa es:  $\frac{4.44}{\sin(61.63^\circ)} \approx 5.05$

El otro cateto es:  $\frac{4.44}{\tan(61.63^\circ)} \approx 2.4$

Un ángulo es recto.

El otro es de  $90^\circ - 61.63^\circ = 28.37^\circ$

Los ángulos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1.75 y 3.28 unidades, respectivamente.

Un ángulo es recto.

Para el otro, se calcula una de las razones entre los lados:

$\frac{3.28}{1.75}$ , entonces vale  $\tan^{-1}\left(\frac{3.28}{1.75}\right) \approx 66.06^\circ$

Para el otro ángulo, se tiene  $\frac{1.75}{3.28}$  y de ahí:

$\tan^{-1}\left(\frac{1.75}{3.28}\right) \approx 28.37^\circ$

Puntos obtenidos: **R L**

**Q8** Dibuja el triángulo.

Un triángulo rectángulo que tenga un cateto de 1.8 unidades y un ángulo de  $35.7^\circ$ .

(El estudiante dibuja un triángulo con un lado de 1.8 unidades, otro lado de 2.5 unidades, e hipotenusa de 3.1 unidades, aproximadamente. El ángulo faltante es de  $54.3^\circ$ .)

Puntos obtenidos: **R L**

Puntaje total: **R L**

Compara tu puntaje con algunos compañeros. ¿Qué tan lejos estás de ellos? Y en tiempo, ¿cómo andas? Si fuiste de los más altos, ¡platicales qué ejercicios te parecieron más fáciles y por qué. También ganas el derecho a que todos intenten aclararte una duda (procura que no sea muy difícil, ¡ehh!)



### Sesión 6

#### Propósito

Los estudiantes integrarán y aplicarán de manera autónoma los conocimientos adquiridos sobre la esfera, resolviendo ejercicios de mayor complejidad que pongan en práctica su comprensión de las razones trigonométricas y su utilidad para resolver triángulos rectángulos con elementos faltantes.

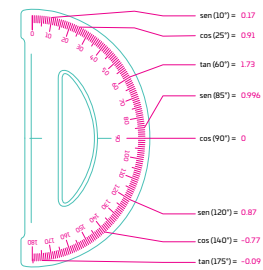
**Tip 1.** Indique a los estudiantes que resuelvan la **actividad 09** de la **página 132**. Como apoyo, primero comenten en grupo cómo podrían dibujar el transportador. Luego, permita que usen la calculadora para obtener las razones trigonométricas que se piden. Para terminar, invítelos a escribir dos o tres razones más y que las identifiquen en el transportador.

**Tip 2.** Lean en grupo la **actividad 10**, **página 132**, y solicite que la trabajen de tarea para la próxima sesión. Tenga presente que se trata de entrevistar a personas ajenas a la clase.

**Tip 3.** Organice una lluvia de ideas para escuchar la opinión de los estudiantes acerca de la **Agenda UNOi Hacia el futuro** de la **página 132**. Intervenga al final para asentar las ideas vertidas y comentar la importancia de promover la inclusión.

**Tip 4.** Pida a los alumnos que resuelvan las cuatro actividades de la sección **Practico más**, de los **Keys**: *Círculo unitario*, *Identidades trigonométricas* y *Razones trigonométricas en triángulos rectángulos* y aprovechen la oportunidad de identificar sus puntos fuertes y débiles, en términos, de su comprensión del tema estudiado.

09 Dibuja un transportador y une los valores indicados con el ángulo que les corresponde en él.



Si el transportador fuera perfectamente circular, ¿dónde se medían, en él, los resultados de las funciones trigonométricas que calculaste? ¿Es más fácil dibujar los de seno y coseno que los de tangente? Comenta y revisa esto con tus compañeros.

10 Realiza la siguiente encuesta y haz lo que se pide. R L

- Pregunta a 10 adultos si conocen tablas de funciones trigonométricas (muchos las conocerán simplemente como "tablas matemáticas").
- Registra un sí o no, pero no dejes de entretenerlos oyendo tus experiencias.
- Representa las respuestas en un triángulo rectángulo. En el cateto horizontal una unidad será un "S" y en el vertical será un "No". Usa el círculo negro en la esquina de la página para el vértice del ángulo recto.
- Completa el triángulo al final, o ve dibujando, el que resulte de marcar la respuesta de cada persona encuestada. Agrégale color para hacerlo más llamativo. Y, si puedes, consigue más respuestas!
- Compara tu dibujo con tus compañeros y comenten las experiencias más interesantes que escucharon.

AGENDA UNOI HACIA EL FUTURO

EQUIDAD

¿Crees que las matemáticas puedan lograr un mundo más inclusivo? Suena exagerado, pero es posible.

El proyecto **Colors of the World** de **Crayola** lo sabe y lanzó una nueva paleta de colores, que **busca aumentar la representatividad racial con 40 nuevas tonalidades que plasman la diversidad en el mundo**. Para esta nueva composición cromática se incluyeron personas reales, por lo que hay tonos claros, medios y profundos para dar matices más reales al momento de colorear.

Con **estos colores, que se producen matemáticamente mediante la combinatoria tricomática de los colores primarios**, se espera que aumente la representación y se fomente un sentido de pertenencia entre los niños, al poder representar su color de piel o el de sus compañeros.

Sin embargo, aunque **el proyecto es un avance importante hacia la inclusión y fomenta la eliminación de la discriminación**, no es suficiente para erradicarla pues esto debería ser un ejercicio continuo.

Imagina un futuro en el que las diferencias raciales dejen de ser objeto de discriminación entre las personas.

© UNOI

APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección **ANALIZA**, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

MEZCLA LOS COLORES DE TU VIDA.



¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R L

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R L

© UNOI

¡Regresa a la página 125 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!



133

### Sesión 7

#### Propósito

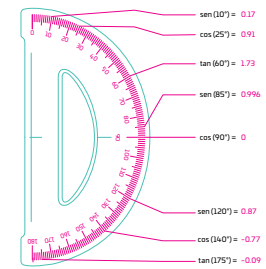
Los estudiantes reflexionarán sobre los aprendizajes adquiridos a lo largo de la Esfera, poniendo a prueba sus conocimientos y resolviendo dudas pendientes para consolidar su comprensión sobre la definición y el cálculo de las razones trigonométricas y el uso de las mismas para calcular elementos faltantes en triángulos rectángulos.

**Tip 1.** Revisen y comenten en grupo las respuestas de la **actividad 10** de **página 132** que trabajaron de tarea. Después, comenten cómo el avance de la tecnología nos ha ayudado a mejorar los cálculos numéricos y qué aplicaciones o *software* conocen para realizar estos cálculos, de las razones trigonométricas, en particular.

**Tip 2.** En la sección **APLICO**, **página 133**, los alumnos ya deberían contar con el conocimiento necesario para responder a las preguntas de **ANALIZO**, **página 121**, resolver correctamente las actividades de la sección **RECONOZCO**, **páginas 122 y 123**. Verifique, mediante cuestionos y ejercicios que esto realmente es así.

**Tip 3.** Para finalizar la esfera, pida que realicen el imprimible **Maths Mastery T2\_7**, que permitirá ejercitar el tema aprendido.

99 Dibuja un transportador y une los valores indicados con el ángulo que les corresponde en él.



Si el transportador fuera perfectamente circular, ¿dónde se medían, en él, los resultados de las funciones trigonométricas que calculaste? ¿Es más fácil dibujar los de seno y coseno que los de tangente? Comenta y revisa esto con tus compañeros.

10 Realiza la siguiente encuesta y haz lo que se pide. R L

- Pregunta a 10 adultos si conocen tablas de funciones trigonométricas (muchos las conocerán simplemente como "tablas matemáticas").
- Registra un sí o no, pero no dejes de entretenerlos oyendo tus experiencias.
- Representa las respuestas en un triángulo rectángulo. En el cateto horizontal una unidad será un "S" y en el vertical será un "No". Usa el círculo negro en la esquina de la página para el vértice del ángulo recto.
- Completa el triángulo al final, o ve dibujando el que resulte de marcar la respuesta de cada persona encuestada. Agrégale color para hacerlo más llamativo. Y, si puedes, consigue más respuestas!
- Compara tu dibujo con tus compañeros y comenten las experiencias más interesantes que escucharon.

AGENDA UNOI  
HACIA EL FUTURO

EQUIDAD

¿Crees que las matemáticas puedan lograr un mundo más inclusivo? Suena exagerado, pero es posible.

El proyecto **Colors of the World** de **Crayola** lo sabe y lanzó una nueva paleta de colores, que busca aumentar la representatividad racial con 40 nuevas tonalidades que plasman la diversidad en el mundo. Para esta nueva composición cromática se incluyeron personas reales, por lo que hay tonos claros, medios y profundos para dar matices más reales al momento de colorear.

Con estos colores, que se producen matemáticamente mediante la combinatoria tricomática de los colores primarios, se espera que aumente la representación y se fomente un sentido de pertenencia entre los niños, al poder representar su color de piel o el de sus compañeros.

Sin embargo, aunque el proyecto es un avance importante hacia la inclusión y fomenta la eliminación de la discriminación, no es suficiente para erradicarla pues esto debería ser un ejercicio continuo.

Imagina un futuro en el que las diferencias raciales dejen de ser objeto de discriminación entre las personas.

© UNOI

APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección **ANALIZO**, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R L

MEZCLA LOS COLORES DE TU VIDA.



¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? Escribe tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros! R L

R L

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Retiéntalo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡HA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R L

¡Regresa a la página 125 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!

