Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 a 21

Sesión 1

Propósito

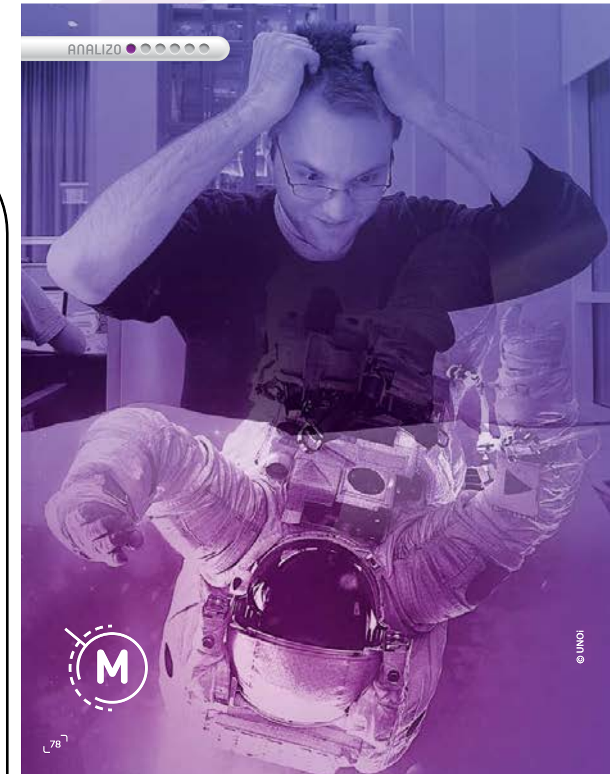
Los alumnos discutirán algunas preguntas sobre la idea intuitiva de las ecuaciones y resolverán algunos planteamientos con el fin de recuperar saberes previos sobre la solución de planteamientos que implican el uso de ecuaciones.

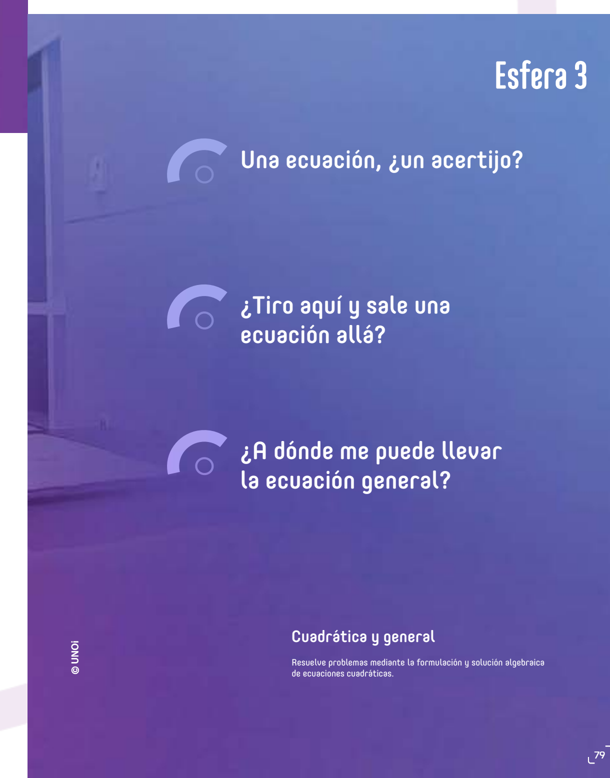
Tip 1. Inste a los alumnos a participar mencionando qué relación existe entre las partes superior e inferior de la imagen de la sección **ANALIZO**, **página 78** con la finalidad de desarrollar su curiosidad sobre el tema. Como apoyo, sugiérales que utilicen las siguientes palabras: transformación, relación, acertijo, similitud, ecuación, igualdad, entre otras semejantes.

- Para responder de una forma dinámica las preguntas detonadoras de la **página 79**, aviente una pelota al azar a un alumno para que dé su opinión de cualquier pregunta que elija. Después, el alumno tiene que aventar la pelota a otro alumno y así sucesivamente hasta que todos hayan participado. Si en algún caso, un alumno no está de acuerdo con alguna respuesta, el profesor animará al debate para escuchar distintas perspectivas.

Tip 2. Luego, pregunte a los alumnos cómo fue la trayectoria al lanzar el objeto (recta o curva) y si sería posible describir o representar esa trayectoria mediante una ecuación.

Tip 3. Cuestione a los colegiales sobre qué es una ecuación y si recuerdan cómo se define el grado de un polinomio y cómo se puede obtener una a partir del otro. Organice las ideas que den en el pizarrón, anotando de un lado los polinomios y de otro las ecuaciones que se mencionen, para que visualmente perciban las semejanzas y diferencias entre unos y otros.





Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 a 21

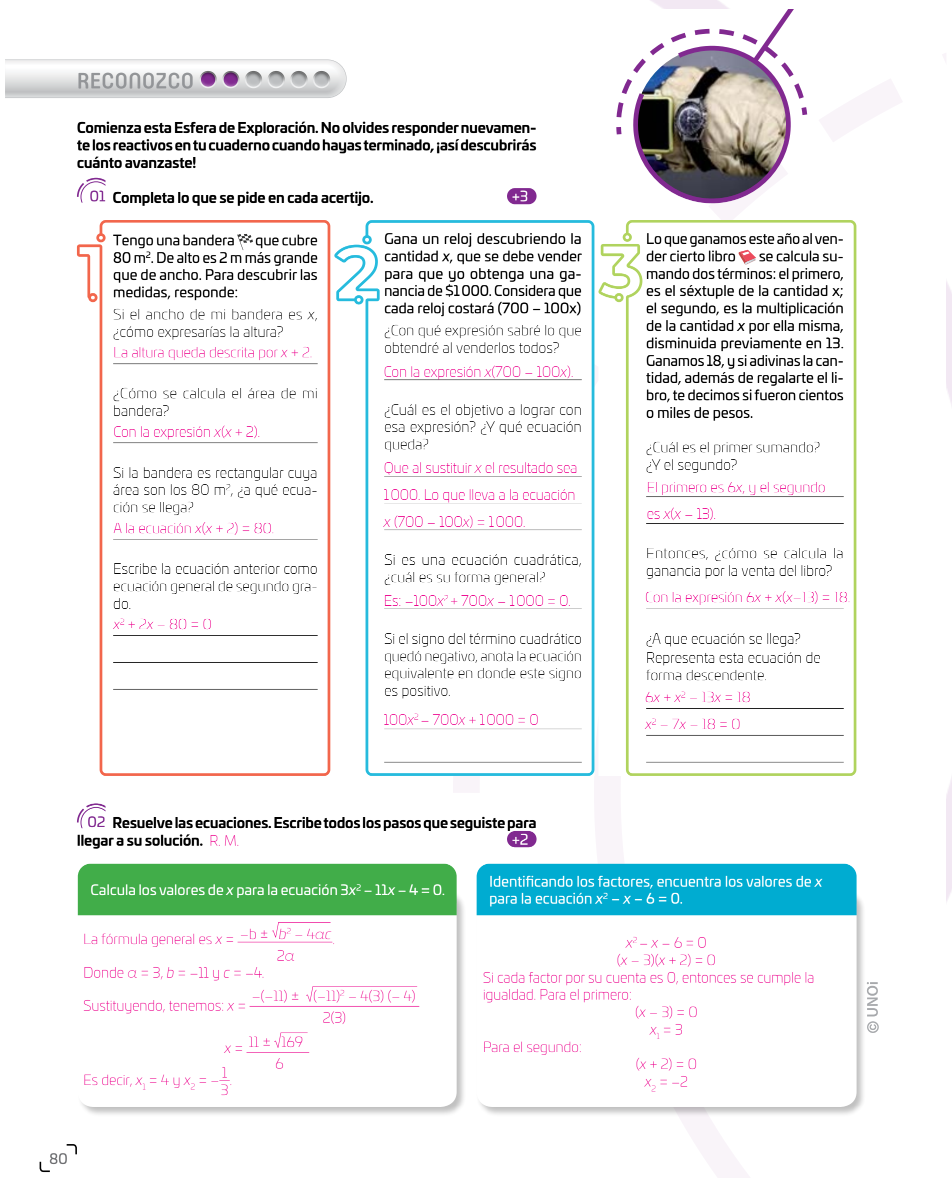
Sesión 1

Tip 4. Invite a los alumnos a que escriban en el pizarrón, sin borrar lo anterior, ejemplos de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Luego, en los espacios libres, proponga que se mencionen qué gráficas, de las ecuaciones anotadas, ya conocen, aunque no sean de segundo grado, pero guiándolos para que reconozcan estas al final.

Tip 5. Para resolver las **actividades 01** y **02** de la sección **RECONOZCO**, **página 80**, permita a los alumnos que trabajen en parejas, seleccionadas aleatoriamente, y otorgue un tiempo para trabajar en cada ejercicio y así evitar distracciones.

Tip 6. Una vez resueltas las actividades **01** y **02** , proponga a los colegiales que comparen sus resultados con el resto del grupo y que den sus argumentos, cuando otras parejas digan que obtuvieron resultados distintos, para propiciar el debate y participación de todos.

Tip 7. Para la **actividad 02** de la **página 80**, pida a los estudiantes que comparen el método que se solicita para resolver ambos planteamientos y propicie el debate para que digan sus principales diferencias.



RECONOZCO

Comienza esta Esfera de Exploración. No olvides responder nuevamente los reactivos en tu cuaderno cuando hayas terminado, ¡así descubrirás cuánto avanzaste!

01 **Completa lo que se pide en cada acertijo.** +3

1 Tengo una bandera que cubre 80 m². De alto es 2 m más grande que de ancho. Para descubrir las medidas, responde:

Si el ancho de mi bandera es x, ¿cómo expresarías la altura?

La altura queda descrita por $x + 2$.

¿Cómo se calcula el área de mi bandera?

Con la expresión $x(x + 2)$.

Si la bandera es rectangular cuya área son los 80 m², ¿a qué ecuación se llega?

A la ecuación $x(x + 2) = 80$.

Escribe la ecuación anterior como ecuación general de segundo grado.

$x^2 + 2x - 80 = 0$

2 Gana un reloj descubriendo la cantidad x, que se debe vender para que yo obtenga una ganancia de $1000. Considera que cada reloj costará $(700 - 100x)$

¿Con qué expresión sabré lo que obtendré al venderlos todos?

Con la expresión $x(700 - 100x)$.

¿Cuál es el objetivo a lograr con esa expresión? ¿Y qué ecuación queda?

Que al sustituir x el resultado sea 1000. Lo que lleva a la ecuación $x(700 - 100x) = 1000$.

Si es una ecuación cuadrática, ¿cuál es su forma general?

Es: $-100x^2 + 700x - 1000 = 0$.

Si el signo del término cuadrático quedó negativo, anota la ecuación equivalente en donde este signo es positivo.

$100x^2 - 700x + 1000 = 0$

3 Lo que ganamos este año al vender cierto libro se calcula sumando dos términos: el primero, es el séxtuple de la cantidad x; el segundo, es la multiplicación de la cantidad x por ella misma, disminuida previamente en 13. Ganamos 18, y si adivinas la cantidad, además de regalarte el libro, te decimos si fueron cientos o miles de pesos.

¿Cuál es el primer sumando? ¿Y el segundo?

El primero es $6x$, y el segundo es $x(x - 13)$.

Entonces, ¿cómo se calcula la ganancia por la venta del libro?

Con la expresión $6x + x(x-13) = 18$.

¿A que ecuación se llega? Representa esta ecuación de forma descendente.

$6x + x^2 - 13x = 18$

$x^2 - 7x - 18 = 0$

02 **Resuelve las ecuaciones. Escribe todos los pasos que seguiste para llegar a su solución.** R. M. +2

Calcula los valores de x para la ecuación $3x^2 - 11x - 4 = 0$.

La fórmula general es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Donde $a = 3$, $b = -11$ y $c = -4$.

Sustituyendo, tenemos: $x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6}$$

Es decir, $x_1 = 4$ y $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Identificando los factores, encuentra los valores de x para la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$.

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Si cada factor por su cuenta es 0, entonces se cumple la igualdad. Para el primero:

$$(x - 3) = 0$$
$$x_1 = 3$$

Para el segundo:

$$(x + 2) = 0$$
$$x_2 = -2$$

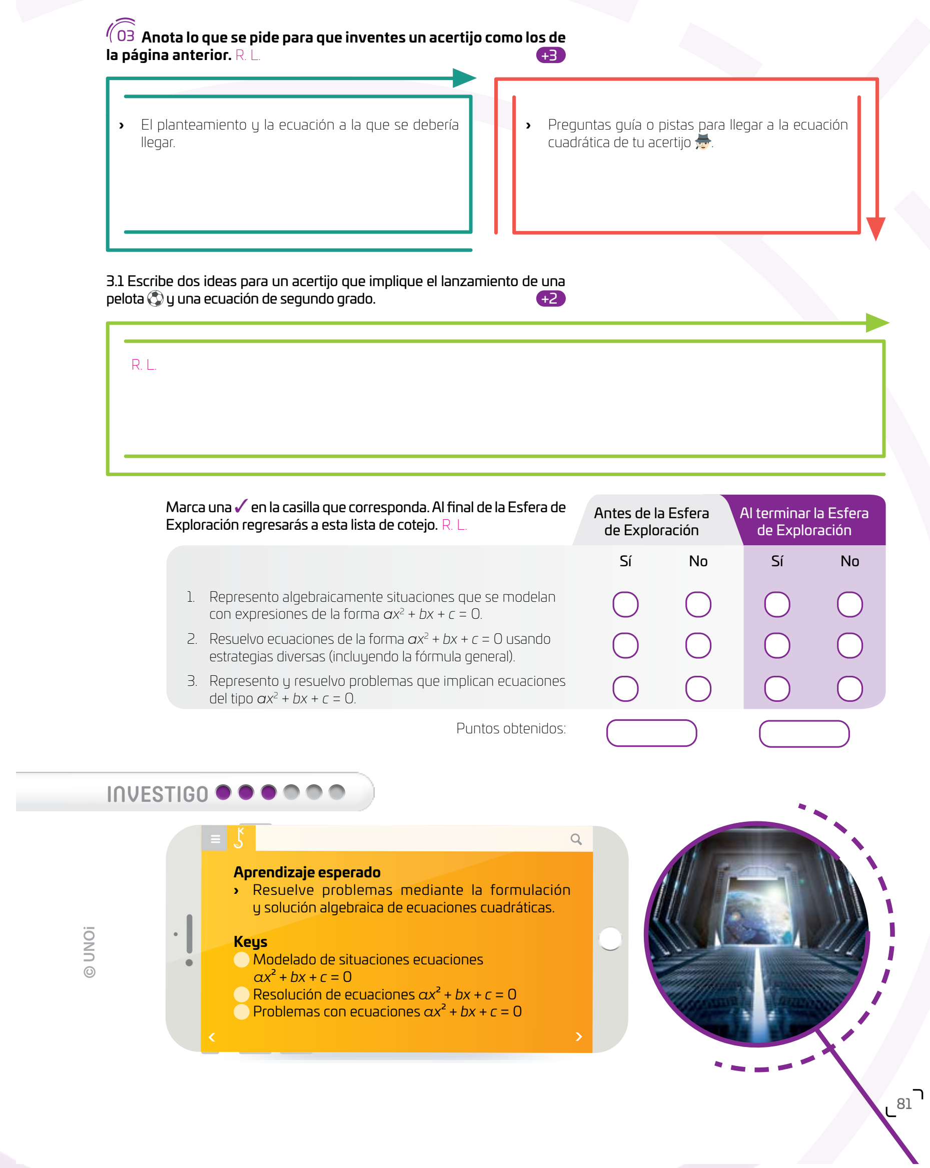
Sesión 2

Propósito

Los alumnos identificarán en distintas situaciones la representación, el planteamiento y la solución de ecuacionesde la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Además, indagarán cómo resolver problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.

Tip 1. Una vez resuelta la **actividad 03** de la **página 81**, inste a los estudiantes a intercambiar opiniones sobre lo que anotaron.

Tip 2. Para la identificación de los ejercicios más problemáticos, solicite a los colegiales marcarlos con un lápiz de color. Pida que resuelvan las cuatro actividades de los **Key:** *Modelado de situaciones mediante ecuaciones* $ax^2 + bx + c = 0$, *Resolución de ecuaciones* $ax^2 + bx + c = 0$ y *Problemas con ecuaciones* $ax^2 + bx + c = 0$, en la sección **Investigo**.



03 **Anota lo que se pide para que inventes un acertijo como los de la página anterior.** R. L. +3

› El planteamiento y la ecuación a la que se debería llegar.

› Preguntas guía o pistas para llegar a la ecuación cuadrática de tu acertijo.

3.1 Escribe dos ideas para un acertijo que implique el lanzamiento de una pelota y una ecuación de segundo grado. +2

R. L.

Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo. R. L.

	Antes de la Esfera de Exploración		Al terminar la Esfera de Exploración	
	Sí	No	Sí	No
1. Represento algebraicamente situaciones que se modelan con expresiones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.				
2. Resuelvo ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ usando estrategias diversas (incluyendo la fórmula general).				
3. Represento y resuelvo problemas que implican ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$.				
Puntos obtenidos:				

INVESTIGO

Aprendizaje esperado

› Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.

Keys

- Modelado de situaciones ecuaciones $ax^2 + bx + c = 0$
- Resolución de ecuaciones $ax^2 + bx + c = 0$
- Problemas con ecuaciones $ax^2 + bx + c = 0$

Sesión 3

Propósito

Los alumnos imaginarán aplicaciones futuristas de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ a través de una lectura recreativa, y darán otras soluciones al problema planteado en la historia.

Tip 1. Pida a los colegiales leer la sección **COMPRENDO**, **página 82**, y luego pregúnteles cómo reaccionarían ante dicha situación de peligro en la que se encuentran los personajes Juanilla, Boris y Blue ZE. Guíelos para debatir si su indagación de la sesión previa es aplicable a esta situación.

Tip 2. Anime a los alumnos a ver el video: "Trayectoria del cometa NEOWISE" https://esant.mx/ac_unoi/sumt3-037, para motivarlos a considerar otras aplicaciones, de un ámbito semejante, de las ecuaciones. Dedique un tiempo para que comenten noticias o datos que tengan sobre cometas y naves espaciales u otros relacionados.

Tip 3. Inste a los estudiantes a reunirse en equipos para discutir y comparar las distintas trayectorias que propusieron en la **página 83**. Promueva la reflexión sobre la importancia de los elementos que afectan una trayectoria y cómo esto está presente en todos los fenómenos semejantes; retome el juego del lanzamiento del peluche o pelota de la primera sesión para analizar qué afectaba la ruta que seguía el objeto cada vez.

Tip 4. Para que los alumnos vean más aplicaciones de la ecuación cuadrática, realice una dinámica durante un tiempo breve: en equipos harán un listado de las aplicaciones de esta ecuación en los deportes (futbol, rugby, voleibol, clavados, por ejemplo), arquitectura (cúpulas de iglesia, puentes, Oceanografic en Valencia, puente viejo de Teruel, entre otros), lanzamiento de proyectil, salto de una ardilla o de una rana, montaña rusa, los faros de un auto, antena parabólica y demás. El equipo que más aplicaciones tenga será el ganador.

COMPRENDO

Los motores de la lanzadera están por apagarse, así lo marca el panel de control que Boris tiene frente a él. Nuestros héroes están cayendo sobre 2120 Étime, un pequeño planeta amarillo con tenue gravedad; su superficie amarilla indica el óxido de azufre que sus volcanes emanan constantemente, ambiente hostil para toda vida humana. Su única opción para sobrevivir es aterrizar en la pequeña colonia minera que se encuentra directamente bajo su trayectoria. Mientras caen, trazan su plan: apagar los motores en el momento propicio para alcanzar su objetivo, su cálculo tiene que ser exacto.

Blue ZE: —No se preocupen, compañeros, he calculado la trayectoria de la nave, todo lo que nos queda es esperaaaa...—el pequeño robot queda inmóvil.

Boris: —Creo que se le terminó la batería, solo quedó esto en su pantalla:

$$-1.26438x^2 - 0.17633x + 0.30000$$

Juanilla: —¿¡¡Qué vamos a hacer!!? ¿¡¡Qué vamos a hacer!!? ¿¡¡Qué vamos a hacer!!?

Boris: —Tranquila, estas cosas son muy sencillas, justo ahora la nave se mueve en una línea recta por efecto de los motores; cuando se apaguen, comenzaremos a caer. Como el planeta tiene una atmósfera muy tenue, la trayectoria de la nave será suave, y podremos planear cómodamente, siguiendo la curva descrita por la ecuación que aparece en la pantalla de Blue.

Juanilla: —Sí, claro. Seguro cada parte de la fórmula es importante y considera al ángulo, la velocidad, la gravedad del planeta. Pero, ¿¡eso cómo nos ayuda a llegar a nuestro destino!?

Boris: —Es como si jugáramos un videojuego: cada trayectoria de la nave tiene su ecuación, y lo entretenido es encontrar el punto preciso en el que debemos apagar los motores, antes de que lo hagan solos. La única diferencia es que aquí no podemos ganar vidas extra; si apagamos los motores muy pronto, no llegaremos a la colonia, y si los apagamos muy tarde, la pasaremos... En fin... solo tenemos una oportunidad. Necesitamos resolver en qué punto apagar los motores para llegar a la zona de aterrizaje de emergencia de la colonia.

Juanilla: —Tengo miedo, Boris...

Boris: —No te preocupes, Juanilla, lo vamos a lograr— sin embargo, mientras lo dice, Boris empieza a sudar, no sabe si es por la enrarecida atmósfera de la lanzadera o por la tensión. Respira hondo, muy hondo. Y entonces dice: —Desconectando motores en tres, dos, uno...

David y Daniel Herrera Pérez (ahora, el menor primero).

© UNOi

82

Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer, reflexiona sobre ello y realiza lo siguiente. R. L.

- Haz un bosquejo de la situación en la que se encuentran nuestros héroes: Juanilla, Boris y Blue ZE.
- Propón otras soluciones, marcando qué otras trayectorias podrían seguir y a dónde llegarían. Por ejemplo, ¿qué pasaría si tuvieran un paracaídas y lo activaran cuando se apaguen los motores?
- Dibuja tres opciones y explica con qué elementos se obtienen.

- Discute con tus compañeros si este tipo de situaciones, relacionadas con caídas o lanzamientos de objetos, son de ciencia ficción o pueden ser reales y se presentan en diferentes momentos y lugares del mundo. Anota las conclusiones.

R. L.

- ¿Y qué hay del espacio? Comenten cómo descienden las sondas espaciales en planetas, cometas y asteroides. Anota los comentarios que te parecieron más interesantes.

R. L.

¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, escríbelo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución.

R. L.

© UNOi

83

Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 a 21

Sesión 4

Propósito
Los alumnos identificarán los elementos que conforman las expresiones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y aprenderán qué pasa cuando modifican algún término. También resolverán casos concretos de las ecuaciones cuadráticas y conocerán antecedentes de soluciones particulares a lo largo de la historia.

Tip 1. En la **actividad 01** de la **página 84**, sección **PRACTICO**, pregunte a los alumnos qué sucede si el signo del primer término es el contrario. Inste a los alumnos responder las siguientes preguntas:

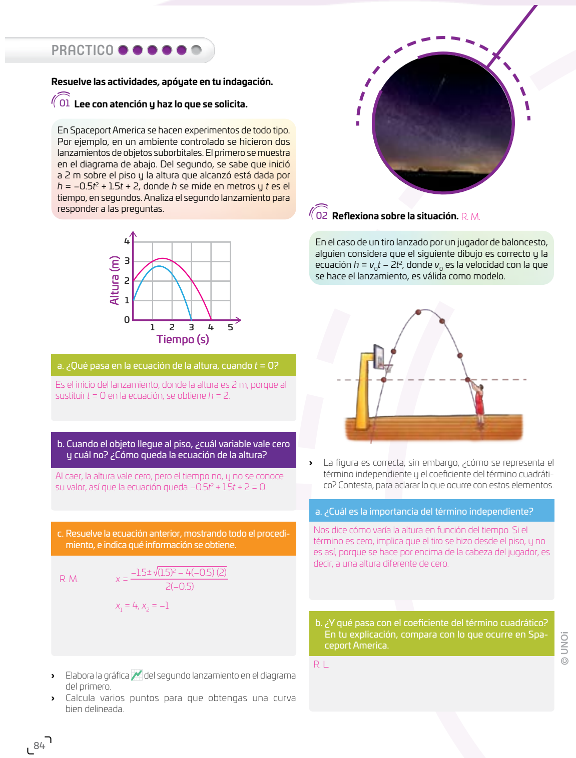
- ¿La nueva ecuación describe un movimiento parecido a la trayectoria que hubiese seguido?
- ¿Qué sucede si dejo la misma ecuación, pero el tercer término no es igual a 2 sino a 0?
- ¿Qué pasa si el factor del segundo término en vez de ser $1.5t$ es $3t$?

Tip 2. Para ayudar a escolares a responder las preguntas anteriores, sugiérales que grafiquen los cambios señalados en cada una para después dar una respuesta que consideren plausible.

Tip 3. Anime a los alumnos a cambiar los factores de los coeficientes de la ecuación de la **actividad 02** de la **página 84**, y graficar el resultado en programas como GeoGebra. De este modo, explorarán las gráficas que resultan, y podrán analizar de mejor manera el planteamiento propuesto.

Tip 4. Para la **página 85**, en **El Pasado a prueba**, inste a los escolares a trabajar en equipos para buscar información, opinar, discutir y responder a las siguientes preguntas (esto puede realizarlo antes, durante o después de la lectura de la información en esta página):

- ¿Cuál podría ser la aportación que llevó a la ecuación cuadrática como la conocemos hoy en día?
- ¿Qué acontecimientos importantes ocurrieron de manera paralela, históricamente, en la época de ese descubrimiento?


PRACTICO

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 Lee con atención y haz lo que se solicita.

En Spaceport America se hacen experimentos de todo tipo. Por ejemplo, en un ambiente controlado se hicieron dos lanzamientos de objetos suborbitales. El primero se muestra en el diagrama de abajo. Del segundo, se sabe que inició a 2 m sobre el piso y la altura que alcanzó está dada por $h = -0.5t^2 + 1.5t + 2$, donde h se mide en metros y t es el tiempo, en segundos. Analiza el segundo lanzamiento para responder a las preguntas.

a. ¿Qué pasa en la ecuación de la altura, cuando $t = 0$?

Es el inicio del lanzamiento, donde la altura es 2 m, porque al sustituir $t = 0$ en la ecuación, se obtiene $h = 2$.

b. Cuando el objeto llegue al piso, ¿cuál variable vale cero y cuál no? ¿Cómo queda la ecuación de la altura?

Al caer, la altura vale cero, pero el tiempo no, y no se conoce su valor, así que la ecuación queda $-0.5t^2 + 1.5t + 2 = 0$.

c. Resuelve la ecuación anterior, mostrando todo el procedimiento, e indica qué información se obtiene.

R. M. $x = \frac{-1.5 \pm \sqrt{(1.5)^2 - 4(-0.5)(2)}}{2(-0.5)}$

$x_1 = 4, x_2 = -1$

- Elabora la gráfica del segundo lanzamiento en el diagrama del primero.
- Calcula varios puntos para que obtengas una curva bien delineada.

02 Reflexiona sobre la situación. R. M.

En el caso de un tiro lanzado por un jugador de baloncesto, alguien considera que el siguiente dibujo es correcto y la ecuación $h = v_0t - 2t^2$, donde v_0 es la velocidad con la que se hace el lanzamiento, es válida como modelo.

- La figura es correcta, sin embargo, ¿cómo se representa el término independiente y el coeficiente del término cuadrático? Contesta, para aclarar lo que ocurre con estos elementos.

a. ¿Cuál es la importancia del término independiente?

Nos dice cómo varía la altura en función del tiempo. Si el término es cero, implica que el tiro se hizo desde el piso, y no es así, porque se hace por encima de la cabeza del jugador, es decir, a una altura diferente de cero.

b. ¿Y qué pasa con el coeficiente del término cuadrático? En tu explicación, compara con lo que ocurre en Spaceport America.

R. L.

© UNOi

84


EL PASADO A PRUEBA

Dibujo

Ecuaciones cuadráticas... ¿De dónde salieron los procedimientos que usamos hoy para resolverlas?

Babilonios (2000–600 a.n.e.)

En tablillas de arcilla se han encontrado problemas o situaciones que, trasladadas al lenguaje matemático actual, se refieren a ecuaciones del tipo:

$x^2 + bx = c \qquad x^2 = bx + c \qquad x^2 + c = bx$

con b y c positivos, y no valores cualquiera sino dentro de ciertos intervalos, que permitían encontrar soluciones enteras casi siempre, o fraccionarias. No se han encontrado evidencias de que resolvieran la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Y esto solo sucederá hasta la época moderna.

En la Tabla BM 13901 se encuentran veintiún problemas que dan origen a ecuaciones de segundo grado, e incluso a sistemas de ecuaciones donde una de ellas es de segundo grado. ¿Te imaginas un sistema así? ¿Ya resolviste alguno?

El ojo de Horus. Egipcio, mágico, protector, purificador, y con él se hacían matemáticas.

Euclides (cerca del 300 a.n.e.)

Desarrolló un método geométrico para hallar una longitud que en nuestra notación actual es la raíz de una ecuación cuadrática. Es decir, los griegos de esa época lograron construir un cuadrado igual a una figura geométrica dada (entendiendo como figuras iguales a las que tienen igual área).

Otros hechos de su época se relacionan también con las ecuaciones cuadráticas, como la cuadratura del círculo y su negación inicial por los números irracionales.

Mohammed Ibn Musa Abu Djafar Al-Khwarizmi

(Sí, el trimestre pasado leíste sobre él, recuerda en qué época vivió.) En su obra, ¿la recuerdas?, trabajó con algunos casos de ecuaciones cuadráticas con coeficientes y soluciones racionales y positivas. Usó siempre 1 como coeficiente del término cuadrático.

François Viète. Matemático francés, uno de los precursores del Álgebra.

François Viète (1540–1603)

Introduce el uso de letras para expresar en forma general los datos (consonantes) y las incógnitas (vocales). El plan era copiar de la geometría (es decir de los griegos clásicos) el tratamiento de lo general con la utilización de estas letras, como hacía Euclides en las demostraciones. Así logró identificar los objetos con que trataba y también establecer condiciones de existencia y unicidad a través del cálculo algebraico. ¿Te recuerda en algo el lenguaje técnico con el que te expresas según la situación en la que te encuentres?

Galileo Galilei (1564–1642)

Aunque no trabajó en el desarrollo o métodos de solución de ecuaciones cuadráticas, sí descubrió una de sus aplicaciones más importantes (al menos para ti, en esta etapa escolar): el estudio del movimiento de proyectiles u objetos lanzados.

Siglo XIX

Con el desarrollo de la Geometría analítica y la consolidación de la simbología algebraica moderna, para este siglo ya se contaban diversos procedimientos para resolver una ecuación cuadrática, sea que sus valores fueran enteros, racionales o irracionales. Los nombres en general son descriptivos de cómo fucionan:

Agrupamiento
Inspección
Método de Lyszkowski
Método de rejilla
Mónico
Suma en diagonal
Védico

La historia de las soluciones en las que las raíces son imaginarias o complejas es eso: otra historia.

© UNOi

85

Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 a 21

Aprendizaje aumentado

Curaduría de Apps

Proponemos adaptar la **actividad 2** de la sección **Practico** de la **página 85** con el uso de la aplicación **ShowMe Interactive Whiteboard**. Para ello, pida a los alumnos crear una línea de tiempo con dibujos y palabras clave utilizando la información del Diario de Aprendizaje. Invítelos a compartir sus creaciones y completar sus líneas sus líneas de tiempo si es que omitieron alguna información.

EL PASADO A PRUEBA

Dibujo

Ecuaciones cuadráticas... ¿De dónde salieron los procedimientos que usamos hoy para resolverlas?

Babilonios (2000–600 a.n.e.)

En tablillas de arcilla se han encontrado problemas o situaciones que, trasladadas al lenguaje matemático actual, se refieren a ecuaciones del tipo:

$x^2 + bx = c \qquad x^2 = bx + c \qquad x^2 + c = bx$

con *b* y *c* positivos, y no valores cualquiera sino dentro de ciertos intervalos, que permitían encontrar soluciones enteras casi siempre, o fraccionarias. No se han encontrado evidencias de que resolvieran la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Y esto solo sucederá hasta la época moderna.

En la Tabla BM 13901 se encuentran veintiún problemas que dan origen a ecuaciones de segundo grado, e incluso a sistemas de ecuaciones donde una de ellas es de segundo grado. ¿Te imaginas un sistema así? ¿Ya resolviste alguno?

El ojo de Horus. Egipcio, mágico, protector, purificador, y con él se hacían matemáticas.

François Viète (1540–1603)

Introduce el uso de letras para expresar en forma general los datos (consonantes) y las incógnitas (vocales). El plan era copiar de la geometría (es decir de los griegos clásicos) el tratamiento de lo general con la utilización de estas letras, como hacía Euclides en las demostraciones. Así logró identificar los objetos con que trataba y también establecer condiciones de existencia y unicidad a través del cálculo algebraico. ¿Te recuerda en algo el lenguaje técnico con el que te expresas según la situación en la que te encuentres?

Euclides (cerca del 300 a.n.e.)

Desarrolló un método geométrico 📏 para hallar una longitud que en nuestra notación actual es la raíz de una ecuación cuadrática. Es decir, los griegos de esa época lograron construir un cuadrado igual a una figura geométrica dada (entendiendo como figuras iguales a las que tienen igual área).

Otros hechos de su época se relacionan también con las ecuaciones cuadráticas, como la cuadratura del círculo y su negación inicial por los números irracionales.

Galileo Galilei (1564–1642)

Aunque no trabajó en el desarrollo o métodos de solución de ecuaciones cuadráticas, sí descubrió una de sus aplicaciones más importantes (al menos para ti, en esta etapa escolar): el estudio del movimiento de proyectiles u objetos lanzados.

Mohammed Ibn Musa Abu Djafar Al-Khwarizmi

(Sí, el trimestre pasado leíste sobre él, recuerda en qué época vivió.) En su obra, ¿la recuerdas?, trabajó con algunos casos de ecuaciones cuadráticas con coeficientes y soluciones racionales y positivas. Usó siempre 1 como coeficiente del término cuadrático.

François Viète. Matemático francés, uno de los precursores del Álgebra.

Siglo XIX

Con el desarrollo de la Geometría analítica y la consolidación de la simbología algebraica moderna, para este siglo ya se contaban diversos procedimientos para resolver una ecuación cuadrática, sea que sus valores fueran enteros, racionales o irracionales. Los nombres en general son descriptivos de cómo fucionan:

Agrupamiento
Inspección
Método de Lyszkowski
Método de rejilla
Mónico
Suma en diagonal
Védico

La historia de las soluciones en las que las raíces son imaginarias o complejas es eso: otra historia 😮.

Sesión 5

Propósito
Los alumnos pondrán a prueba su agudeza visual y geométrica para aplicar la ecuación cuadrática formando cuadrados de rectángulos de cartoncillo. Además, aprenderán a completar y resolver un binomio al cuadrado, para consolidar conocimientos previos, tanto de esta esfera como de anteriores. Y, finalmente, explorarán más aplicaciones modernas de las ecuaciones cuadráticas.

Tip 1. En la **actividad 03** de la **página 86**, sugiera a los alumnos que reutilicen cartoncillo y lo compartan con un compañero, para hacer eficiente el uso del material y evitar desperdicios. Una vez resuelta la actividad, forme equipos para que comparen los distintos cuadrados que formaron e intercambien opiniones sobre qué ecuaciones obtuvieron y cuál es el área que cubren cada composición.

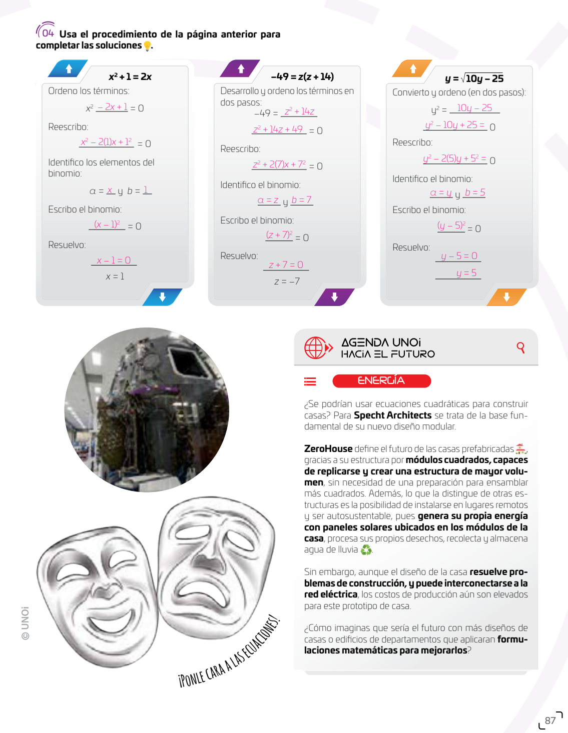
Tip 2. Para ampliar el trabajo en la **actividad 03** de la **página 86**, anime a los estudiantes a analizar y responder las preguntas:

- ¿Cuántos cuadrados pudiste formar con las figuras?
- ¿Qué relación tiene el ejercicio con la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$?

Tip 3. Para el mejor entendimiento de los estudiantes, antes de que trabajen en el **Espacio procedimental**, realice un recordatorio de lo que es un binomio al cuadrado : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Tenga presente que en la **Esfera** 1, los colegiales relacionaron directamente un binomio al cuadrado con el área resultante de la descomposición de un cuadrado.

Tip 4. Pida a los estudiantes trabajar en parejas o equipos de tres integrantes, para resolver la **actividad 04** de la **página 87**. Luego, en plenaria aclare dudas y verifique los pasos en cada ecuación.

Tip 5. Una vez leída la **Agenda UNOi hacia el futuro** de la **página 87**, invite a los alumnos a discutir cómo aplicar la ecuación cuadrática en el diseño de casas, después pídales visitar la página https://esant.mx/ac_unoi/sumt3-038 para constrastar ideas.



Matemáticas

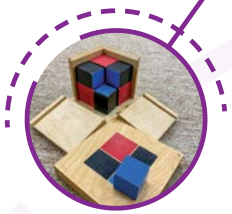
Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 a 21

Aprendizaje aumentado

Curaduría de Apps

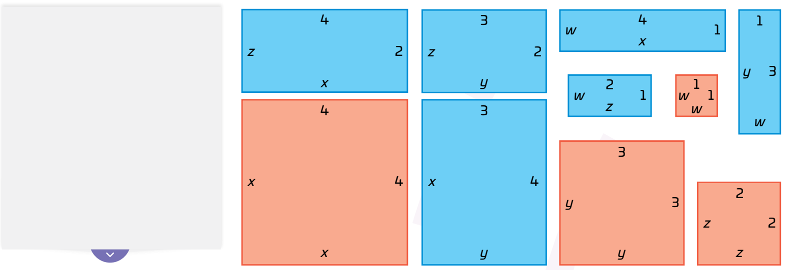
Proponemos añadir al finalizar el **Espacio Procedimental** de la **página 86** el uso de la aplicación **Escuela Secundaria de álgebra** (en el iPad aparecerá como "álgebra"). Para ello, solicite a los estudiantes abrir la aplicación y seleccionar, del temario de la derecha, el contenido "12.- completa...el cuadrado" y luego elegir la opción "30 segundos desafío". Deberán resolver, con la mayor velocidad posible y de manera correcta, los ejercicios sobre binomios al cuadrado que se plantean. Podría darle más emoción a la actividad solicitando a los estudiantes que hagan varias veces el ejercicio, a fin de que poco a poco sean más rápidos. Para que no solo memoricen las respuestas, luego de la primera vez, pídales que escriban qué se les facilitó y qué se les dificultó, para que establezcan una estrategia para mejorar en ejercicios como este. Para finalizar, pida a algunos estudiantes que compartan la estrategia que utilizaron para solucionar estos ejercicios.

03 **Copia, recorta y fíjate qué tan buen ojo tienes.**



Pon a prueba tu agudeza geométrica para identificar piezas que forman cuadrados. Cada uno se forma con cuatro piezas. Para ello, realiza lo siguiente:

- Copia las figuras geométricas en papel o cartoncillo de un solo color. Aquí hay azules porque de ellas debes hacer dos piezas de cada una.
- Anota las letras y los números en una sola cara. Recorta con cuidado.
- Revuelve las piezas con números y letras hacia abajo y extiéndelas.
- Elige cuatro piezas que creas que forman un cuadrado y trata de ensamblarlo. Si no puedes, prueba de nuevo.
- Cuando logres formar un cuadrado, voltea las piezas y escribe su área en términos de esas letras y números. Comenta esas expresiones con tus compañeros.
  R. L.



Espacio procedimental

¿Cómo completo y resuelvo un binomio al cuadrado?

Curaduría de Apps

1. Ordeno los términos de la ecuación cuadrática para que queden de una forma cercana a la expresión $a^2 \pm 2ab + b^2 = 0$. Por ejemplo, $-4w + w^2 = -4$ queda:

$$w^2 - 4w + 4 = 0$$

2. Reescribo los términos segundo y tercero para que se parezcan aún más a la expresión anterior. Si es necesario, divido entre el coeficiente del primer término cuadrático. En mi ejemplo:

$$w^2 - 2(2)w + 2^2 = 0$$

3. Identifico entonces quiénes son a y b. En este caso:

$$a = w \text{ y } b = 2$$

4. Así, uso el hecho de que $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, y en lugar de $\pm$ usaré el signo del término lineal de mi expresión.

Para mi ejemplo resulta:

$$w^2 - 2(2)w + 2^2 = (w - 2)^2$$

5. Como ordené los términos y quedó cero del otro lado de la igualdad, ahora tengo la ecuación:

$$(w - 2)^2 = 0$$

6. Y para resolverla solo es necesario reconocer que el binomio dentro de los paréntesis debe ser cero para que la igualdad se cumpla. Es decir,

$$w - 2 = 0$$

Así, en este caso: $w = 2$

Y esa es la solución de mi ecuación original.

Sesión 6

Propósito
Los alumnos pondrán a prueba su destreza matemática en la resolución de ejercicios que llevan o consisten en ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en la sección #Subenivel.

Tip 1. Antes de resolver las actividades de las **páginas 88** y **89** de la sección **#Subenivel**, pregunte a los alumnos qué método utilizarían para resolverlos. Explore con ellos los ejercicios y escuche sus opiniones. Resalte que, como han estudiado, la factorización es una forma sencilla de obtener las soluciones, pero en muchas ocasiones no se puede aplicar fácilmente y es ahí donde la fórmula general permite obtener las raíces o concluir algo al respecto.

Tip 2. Para la **actividad 01** de la **página 88**, mencione a los estudiantes que la ecuación debe tener la forma $ax^2 + bx + c = 0$ para poder aplicar la fórmula general, el procedimiento presentado en el **Espacio procedimental** o buscar una factorización que satisfaga la ecuación.

Tip 3. Traiga a la memoria de los colegiales lo que estudiaron en su indagación, que no todas las ecuaciones cuadráticas tienen soluciones reales; el término $\sqrt{b^2 - 4ac}$ permite saber esto: si esta raíz resulta mayor o igual a cero, no tendremos problemas, pero si tiene solución menor que cero, tendremos un resultado imaginario. Ejemplifique con la ecuación $x^2 - 6x + 25 = 0$, en la que $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-64}$.

Tip 4. Una vez resueltos los ejercicios de **#Subenivel**, pida a los escolares que formen equipos para analizar y discutir los resultados, posteriormente que participen en el pizarrón para verificar las respuestas.

Tip 5. Revise con los escolares que tengan un puntaje de 12 o menor, qué opciones tienen para reforzar su trabajo. Considere que una buena opción es revisar de nuevo, el **Key**.

#SUBE NIVEL

¡Pon a prueba tu destreza matemática! Realiza lo que se indica. Anota en tu cuaderno las operaciones y procedimientos que necesites. Corrobora los resultados hasta que hayas terminado y anotado tus respuestas 😎.

01 Reduce las ecuaciones para que tomen la forma: $ax^2 + bx + c = 0$. Anota el inciso que les corresponde.

Ecuación	Inciso
$x(2x - 17) - x(x - 11) = 16$	(f)
$x = \frac{36}{x + 5}$	(b)
$5x(x - 2) = 33 + 4x(x + 1)$	(e)
$2x - 5 = \frac{-20}{x} + 4x$	(a)
$x = \sqrt{2(8 - 3x)}$	(h)
$x = \sqrt{3(4x - 12)}$	(g)

a) $-2x^2 - 5x + 20 = 0$
b) $x^2 + 5x - 36 = 0$
c) $x^2 - 5x - 7 = 0$
d) $x^2 - x + 4 = 0$
e) $x^2 - 14x - 33 = 0$
f) $x^2 - 6x - 16 = 0$
g) $x^2 - 12x + 36 = 0$
h) $x^2 + 6x - 16 = 0$

Respuestas correctas: R. L.

02 Encuentra a qué ecuación corresponden las soluciones, anotando el inciso en la tabla.

a) $x_1 = 20$, $x_2 = -16$
b) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
c) $x_1 = 3$, $x_2 = 3$
d) $x_1 = -\frac{1}{20}$, $x_2 = -\frac{1}{20}$
e) $x_1 = 14$, $x_2 = 1$
f) $x_1 = 14$, $x_2 = -12$
g) $x_1 = -26$, $x_2 = 14$
h) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

Ecuación	Inciso
$x^2 - 2x - 168 = 0$	(f)
$400x^2 + 40x + 1 = 0$	(d)
$x^2 + 12x - 364 = 0$	(g)
$x^2 - 2x + 1 = 0$	(h)
$\left(\frac{1}{2}\right)x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)x + 3 = 0$	(b)
$x^2 - 6x + 9 = 0$	(c)

Respuestas correctas: R. L.

03 Resuelve las ecuaciones cuadráticas y señala sus soluciones en la columna de la derecha.

Ecuación	Soluciones
$\frac{x^2}{9} + 2x + 9 = 0$	$x_1 = -4$, $x_2 = 9$
$0.1x^2 - x + 2.5 = 0$	$x_1 = -9$, $x_2 = -9$
$x^2 - 5x - 36 = 0$	$x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$
$0.25x^2 - 0.25x - 1.5 = 0$	$x_1 = 5$, $x_2 = 5$
$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$	$x_1 = -\frac{6}{25}$, $x_2 = -\frac{6}{25}$
$\frac{1}{25} + \frac{x}{3} + \frac{25}{36}x^2 = 0$	$x_1 = -2$, $x_2 = 3$

Respuestas correctas: R. L.

04 Escribe la ecuación que representa a cada situación, y encuentra sus soluciones. Apóyate con un bosquejo.

Descubre las medidas de un cuaderno de 368 cm², del que se sabe que uno de sus lados, el largo, mide 7 cm más que el otro.

$x(x + 7) = 368$
$x^2 + 7x - 368 = 0$
$(x + 23)(x - 16) = 0$
$x_1 = -23$
$x_2 = 16$

$x + 7$ / x

El ancho del papel es $x = 16$ cm y su largo $x + 7 = 23$ cm.

Respuestas correctas: R. L.

Encuentra las medidas de un trozo rectangular de madera de 36 cm², del que solo sabes que un lado mide cierto valor más 2 m. El otro lado mide ese valor más 7 m.

$(x + 7)(x + 2) = 36$
$x^2 + 9x - 22 = 0$
$(x + 11)(x - 2) = 0$
$x_1 = -11$
$x_2 = 2$

$x + 7$ / $x + 2$

La tabla mide, de ancho $x + 2 = (2) + 2 = 4$ cm, y su largo es $x + 7 = (2) + 7 = 9$ cm.

Respuestas correctas: R. L.

- Cada respuesta correcta de las actividades 1 y 2 te dan un punto, la actividad 3 te da 2 puntos y las respuestas correctas de cada ejercicio de la actividad 4 te dan tres puntos, si tienes el procedimento completo.

Puntaje final: R. L.

- Compara tus puntos con dos compañeros cercanos. Si tienes más puntos que ellos, el reto es que revisen tus procedimientos para que verifiquen que los comprenden. ¡No dejes de ayudarles 🤝!

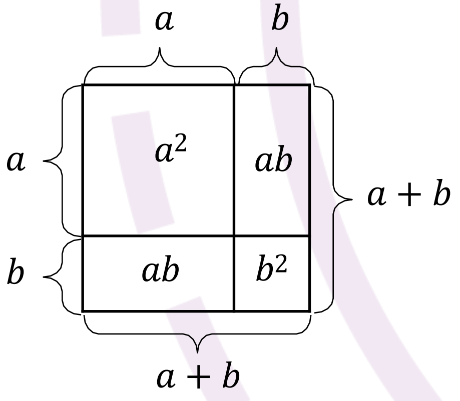
Sesión 7

Propósito
Los alumnos aplicarán los conocimientos adquiridos previamente en la realización de un objeto en 3D con ayuda del *software* Tinkercad.

Tip 1. En la primera instrucción de la **Zona Maker**, **página 90**, pida a los alumnos que el signo del binomio sea positivo para que el valor de la derecha sea directamente una medida y que, además, no sea necesario reinterpretar el término de en medio del trinomio cuadrado perfecto. Esto es, en esencia, revisar la interpretación del significado negativo al momento de realizar medidas (en donde, un número negativo implicaría medir "hacia el otro lado" de donde se realizan las mediciones positivas).

Tip 2. Para el desarrollo de la segunda instrucción de la **Zona Maker**, sugiera a los estudiantes que primero hagan un boceto del área del binomio al cuadrado como se muestra a continuación:

$(a+b)^2 = a^2 + 2\text{ab} + b^2$:



DO

ZONA MAKER

Binomio al cuadrado tangible

A pesar de que los objetos no demuestran un teorema, sí permiten ver con más claridad algunas propiedades o hechos relevantes de las matemáticas. En esta **Zona Maker** te proponemos utilizar una impresora 3D para imprimir la descomposición de un binomio al cuadrado en un trinomio cuadrado perfecto 😉.

01 Elige el binomio con el que trabajarás.

R. L.

02 Desarrolla tu binomio para obtener tres términos. Apóyate en el espacio procedimental para lograrlo.

R. L.

Vista satelital del cráter Acraman. Creado por un meteorito hace 590 millones de años.

03 Genera tus piezas en *Tinkercad* u otro *software*. Anota sus características y las de impresión que usaste.

R. L.

04 Escribe qué tan bien ensamblaron tus piezas y qué factores fueron los más importantes durante el proceso de diseño e impresión.

R. L.

© UNOi

90

Matemáticas

Esfera de Exploración 3 – Semanas 19 a 21

Sesión 8

Propósito
Los alumnos reflexionarán sobre sus avances en el aprendizaje esperado de la esfera y resolverán las actividades del material imprimible sobre la solución de ecuaciones completando cuadrados.

Tip 1. Para la sección **APLICO** de la **página 91**, realice una recapitulación de los temas estudiados. Reflexione con los alumnos y pregunte qué tema les pareció más complicado, para ello realice una votación y aclare dudas y comentarios.

Tip 2. Realice una encuesta entre los alumnos para identificar las áreas de oportunidad de cada uno de ellos, en cuanto al estudio que podrían requerir . Un cuestionario sugerido es el siguiente:

- ¿Crees que las ecuaciones cuadráticas sirven para resolver acertijos?
- ¿Las ecuaciones cuadráticas te ayudan a identificar tendencias en gráficas?
- ¿Cuántos métodos para resolver las ecuaciones cuadráticas conoces?
- ¿Cuál es el procedimiento para resolver ecuaciones cuadráticas es el que más se te complica y el que más se te facilita?
- ¿Qué relación hay entre el área de un cuadrado y el binomio al cuadrado?
- ¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación cuadrática?

Tip 3. Solicite a los estudiantes que regresen a la **página 83** para solucionar las dudas que en su momento tuvieron y anotaron, o usar ese espacio para debatir nuevas con sus compañeros.


APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección ANALIZO, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R. L.

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros! R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

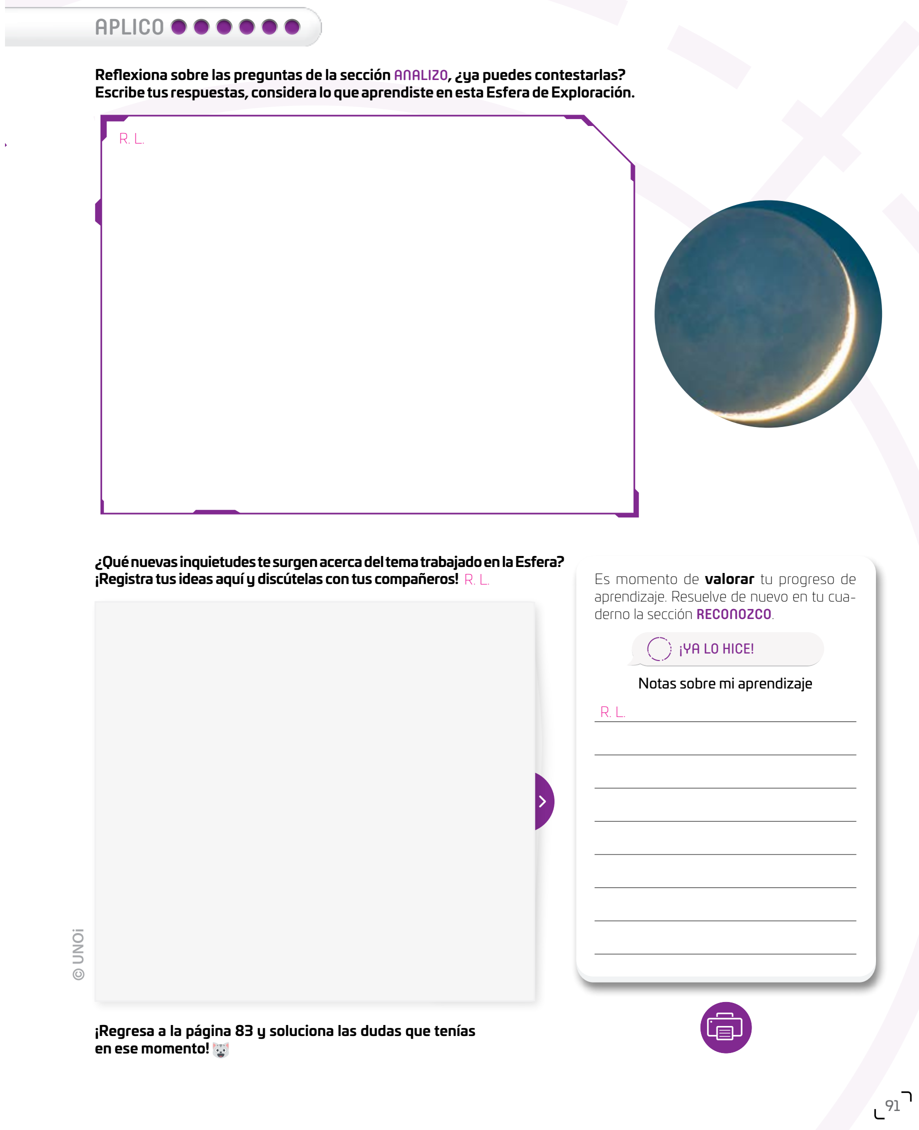
R. L.

¡Regresa a la página 83 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!

Sesión 8

Tip 4. Pida a los alumnos que resuelvan las cuatro actividades, en la sección **Practico más**, de los **Key:** *Modelado de situaciones mediante ecuaciones* $ax^2 + bx + c = 0$, *Resolución de ecuaciones* $ax^2 + bx + c = 0$ y *Problemas con ecuaciones* $ax^2 + bx + c = 0$, donde encontrará actividades retadoras que los llevarań al siguiente nivel taxonoḿ ico del aprendizaje.

Tip 5. Para finalizar la **Esfera**, pida que realicen el imprimible **Maths Mastery T2_4**, que permitirá ejercitar el tema aprendido.



APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección ANALIZO, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R. L.

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros! R. L.

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R. L.

¡Regresa a la página 83 y soluciona las dudas que tenías en ese momento!

© UNOi

91