

ANALIZO



120

© UNOI



¿Trigo... qué?



¿Puedo hacer cálculos  
con colores?



¿El círculo unitario  
tiene radio 1 o  
diámetro 1?

## Trigonometría para principiantes

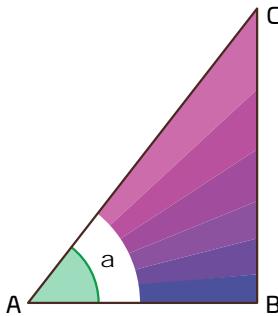
Determina las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, y las utiliza para hallar valores faltantes en triángulos.



Comienza una nueva Esfera de Exploración. No olvides responder otra vez los reactivos en tu cuaderno cuando hayas terminado, ¡así descubrirás cuánto avanzaste!



01 Escribe las razones trigonométricas indicadas en cada triángulo.

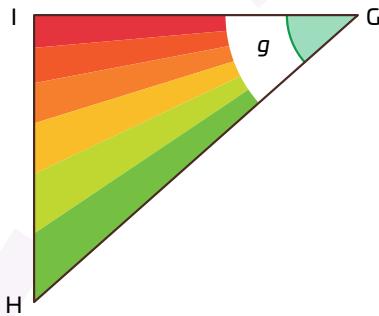


$\tan(\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$

$\cos(\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$

$\operatorname{sen}(\alpha) = \underline{\hspace{1cm}}$

+2



$\cot(g) = \underline{\hspace{1cm}}$

$\sec(g) = \underline{\hspace{1cm}}$

$\csc(g) = \underline{\hspace{1cm}}$

1.1 Describe una de las razones trigonométricas anteriores.

+1



02 Relaciona las razones trigonométricas que dan el mismo valor. Considera que  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

+2

$\operatorname{sen}(\alpha)$

$\frac{1}{\cos(\alpha)}$

$\cos(\alpha)$

$\frac{1}{\csc(\alpha)}$

$\tan(\alpha)$

$\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$

$\csc(\alpha)$

$\frac{1}{\cot(\alpha)}$

$\sec(\alpha)$

$\frac{1}{\tan(\alpha)}$

$\cot(\alpha)$



Johann Wolfgang Von Goethe, como parte de su extensa obra, escribió en 1810 el libro Teoría de los colores.



2.1 Anota una **V** si la igualdad es verdadera o **F** si es falsa.

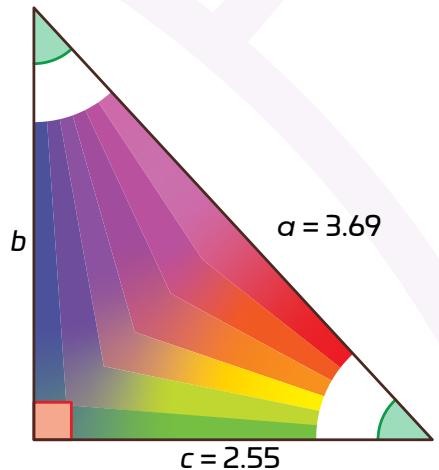
+2

$$\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 0$$

03 Usa funciones trigonométricas para obtener la medida de los lados y ángulos del triángulo. Anota todas las operaciones y los resultados en el recuadro.

+3



Marca una **✓** en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo.

Antes de la Esfera de Exploración

Al terminar la Esfera de Exploración

1. Defino las razones seno, coseno y tangente, con apoyo del círculo unitario y de triángulos rectángulos.
2. Reconozco identidades trigonométricas con apoyo del círculo unitario.
3. Encuentro medidas faltantes en triángulos rectángulos utilizando las razones trigonométricas.

Sí

No

Sí

No

Puntos obtenidos:

## INVESTIGO

### Aprendizaje esperado

- › Determina las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, y las utiliza para hallar valores faltantes en triángulos.

### Keys

- Círculo unitario
- Identidades trigonométricas
- Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

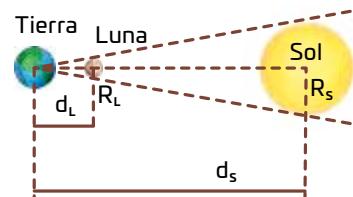
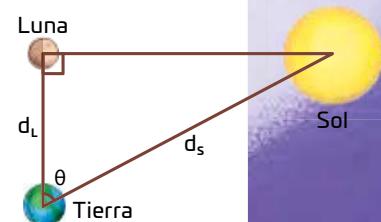


¿A quién no le gustan los fenómenos celestes? Cielos tornasoles, voluminosas nubes, la Luna brillante, el cielo estrellado, un cohete 🚀 llevando algún satélite artificial a su órbita (bueno, sí, solo si estás cerca del lugar de lanzamiento). ¿Cuál de ellos disfrutas más? ¿Alguno podría servirte para calcular distancias entre los cuerpos celestes? Aristarco de Samos (310 a 230 a. n. e.) describe cómo medir la distancia del Sol a la Luna durante la fase de cuarto menguante o creciente. Creyó que las estrellas estaban infinitamente lejos, y en esto vio la razón de por qué no había paralaje visible.

Eratóstenes, otro griego antiguo como Aristarco, calculó la circunferencia de la Tierra. Para ello inventó un método trigonométrico, además de las nociones de latitud y longitud. Analiza 🔎 estos logros en **cuatro partes u observaciones astronómicas**. Considera que aparecerán las medidas:  $d_s$ , distancia al Sol (desde la Tierra);  $d_L$ , distancia a la Luna (desde la Tierra);  $D_S$ , diámetro del Sol;  $R_S$ , radio del Sol;  $D_L$ , diámetro de la Luna;  $R_L$ , radio de la Luna;  $D_T$ , diámetro de la Tierra; y  $R_T$ , radio de la Tierra.

### Parte 1. Cuarto creciente o menguante de la Luna... O lo que vio Aristarco

La Tierra, el Sol y la Luna forman un triángulo rectángulo, como el mostrado 🖐️. Pon atención en la fase de la Luna, como lo hizo Aristarco. Con observaciones actuales sabemos que  $\theta = 89.853^\circ$ , ¿cuál es el valor del cociente  $\frac{d_s}{d_L}$ ? ¿Y para qué te serviría saberlo? No te agobies, avanza para descubrir más.



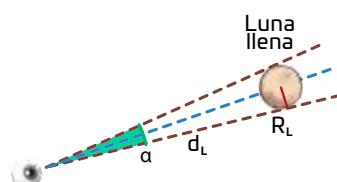
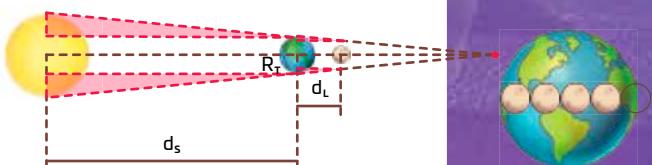
### Parte 2. Eclipse total de Sol

Un eclipse total de Sol ☀ tiene el afortunado hecho de la casi coincidencia de los discos del Sol y la Luna (solo se observa la corona solar). Esto se usa para establecer la semejanza de triángulos rectángulos mostrados en la figura.

¿Puedes concluir de ella que  $\frac{d_s}{d_L} = \frac{R_S}{R_L} = \frac{D_S}{D_L}$ ?

### Parte 3. Eclipse total de Luna

Los usualmente prolongados eclipses totales de Luna 🌙 permiten establecer de manera sencilla que el radio de la sombra de la Tierra es aproximadamente 3.6 veces el radio de la Luna. ¿Esto te sirve para obtener  $\frac{R_T}{R_L}$  y  $\frac{R_S}{R_T}$ ?



### Parte 4. La luna llena... O algo antiguo hoy en día

Usa una moneda, aléjala con la mano 🤲 frente a tu cara y genera un "eclipse lunar artificial" delante de tu ojo. Mide la distancia que alejaste la moneda y su radio para establecer el ángulo visual  $\alpha$  de la Luna.

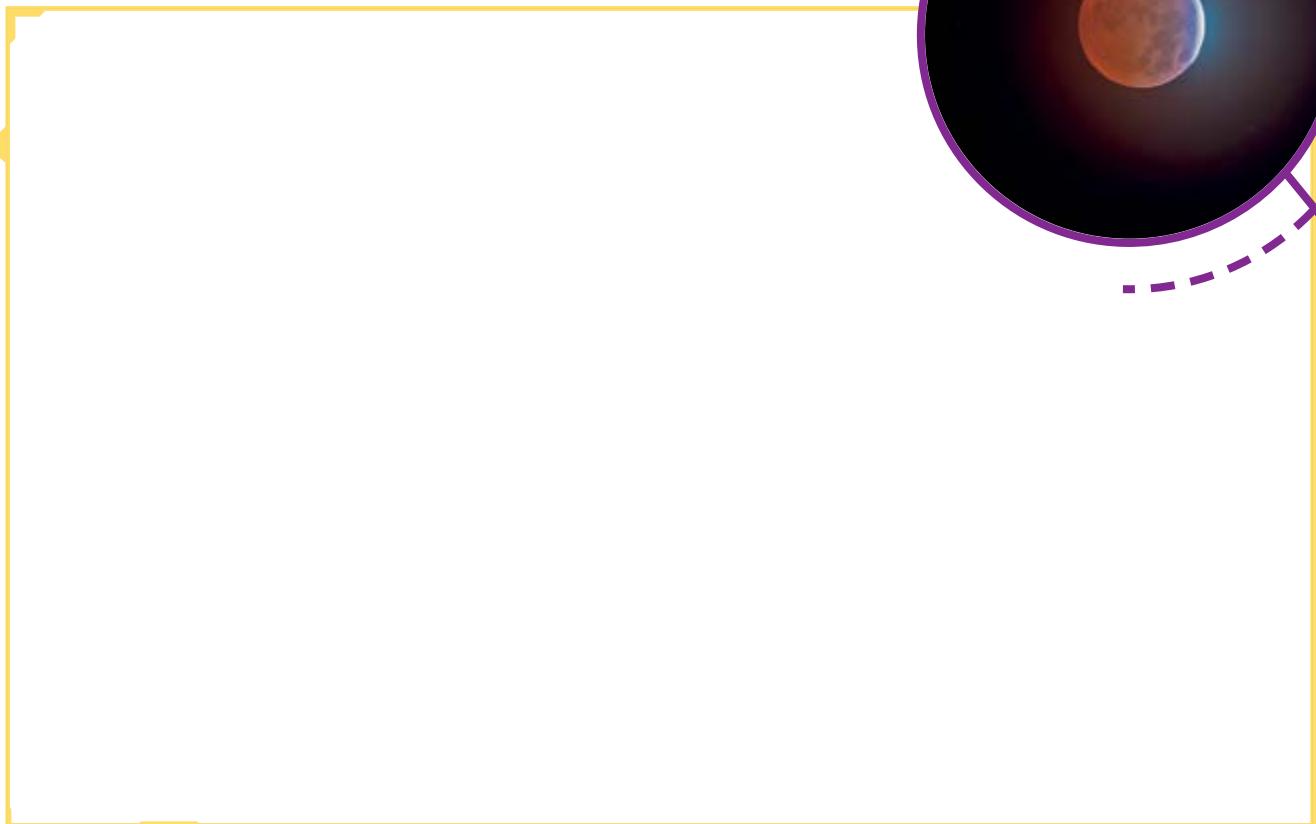
### Une las partes... O trabaja lo antiguo con lo moderno

Si reúnes las medidas anteriores, con paciencia y atención, llegarás a que  $D_T = 12730$  km, y de ahí:  $R_T = 6365$  km;  $d_s \approx 150$  millones de km;  $d_L \approx 390\,000$  km. Sea que lo logres con poco o mucho esfuerzo, ten presente que harás lo que otras personas durante milenarios: disfrutar fenómenos astronómicos y tratar de comprenderlos... con ayuda de las matemáticas. Y, en este caso, usando razones trigonométricas.

**Eugenio Díaz Barriga Arceo**

**Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer, reflexiona sobre ello y reproduce los triángulos de la página anterior, sin dibujar los cuerpos celestes, indicando las medidas, y sus nombres.**

- › Completa los valores que faltan  y verifica su validez, realizando las operaciones necesarias.
- › Al terminar, compara tu trabajo con al menos dos compañeros, corrijan e investiguen lo que haga falta.



- › ¿De qué manera intervienen las funciones trigonométricas en esos triángulos? ¿Simplifican el trabajo o son complementarias y prescindibles? Discútelo en el aula y explica las ideas más importantes.

**¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, escríbelo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución.**

---

---

---

---

---

---

---

---

---

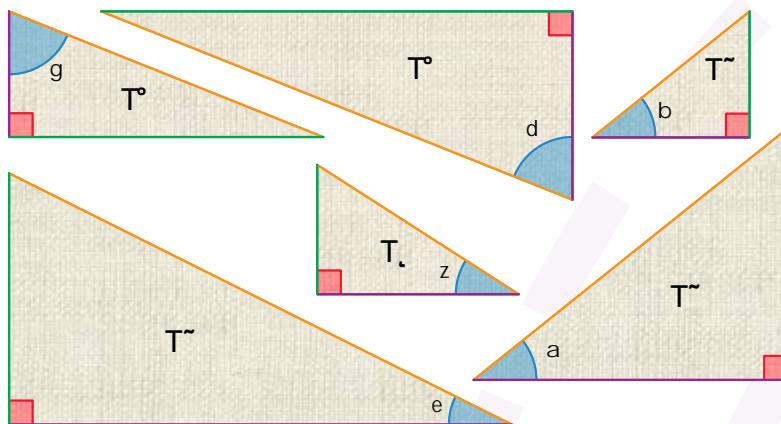


## PRACTICO

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

### 01 Usa el código de colores para completar la tabla.

- Mide los lados y el ángulo marcado de cada triángulo; redondea a centésimos los resultados de los cocientes.



Triángulo	$T^o$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T^i$	$T_5$	$T_6$
Medida del								
Resultado de  ÷								
Resultado de  ÷								
Resultado de  ÷								

- Registra en qué triángulos los cocientes resultaron iguales.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- Verifica e indica el color en los triángulos de arriba.

Cateto opuesto al ángulo marcado: \_\_\_\_\_

Cateto adyacente al ángulo marcado: \_\_\_\_\_

Hipotenusa del triángulo: \_\_\_\_\_

### 02 Escribe las razones trigonométricas con los colores de la actividad anterior.

$$\text{sen}(\alpha) = \text{_____}$$

$$\cos(\beta) = \text{_____}$$

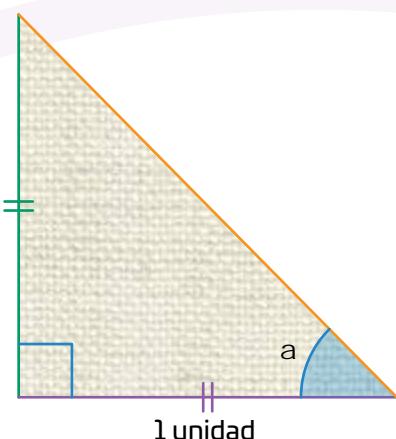
$$\tan(\gamma) = \text{_____}$$



03

### Completa la información requerida para cada figura.

- Triángulo rectángulo isósceles



Medida de  $\underline{\hspace{2cm}}$ :

Justificación:

---



---

Medida del ángulo  $\alpha$ : \_\_\_\_\_

$$\text{sen}(\alpha) \rightarrow \text{sen}(\quad {}^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\alpha) \rightarrow \cos(\quad {}^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\alpha) \rightarrow \tan(\quad {}^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} =$$

- ▼ Triángulos equiláteros ▲

Medida de  $\underline{\hspace{2cm}}$ :

Justificación:

---



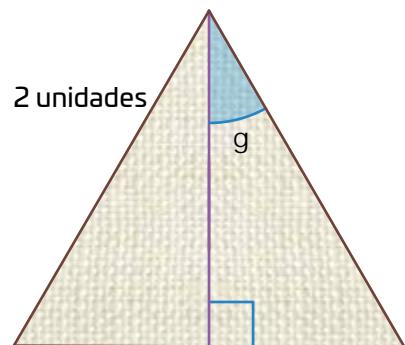
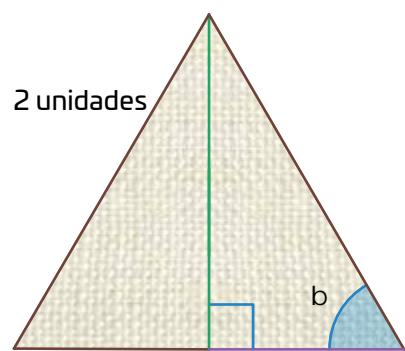
---

Medida del ángulo  $\beta$ : \_\_\_\_\_

$$\text{sen}(\beta) \rightarrow \text{sen}(\quad {}^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\beta) \rightarrow \cos(\quad {}^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\tan(\beta) \rightarrow \tan(\quad {}^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} =$$



Medida de  $\underline{\hspace{2cm}}$ :

Medida del ángulo  $\gamma$ : \_\_\_\_\_

$$\text{sen}(\gamma) \rightarrow \text{sen}(\quad {}^\circ) = \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\cos(\gamma) \rightarrow \cos(\quad {}^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\gamma) \rightarrow \tan(\quad {}^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Ahora, con las respuestas anteriores completa las igualdades.

$$\text{sen}(30^\circ) = \cos(\quad {}^\circ)$$

$$\text{sen}(45^\circ) = \cos(\quad {}^\circ)$$

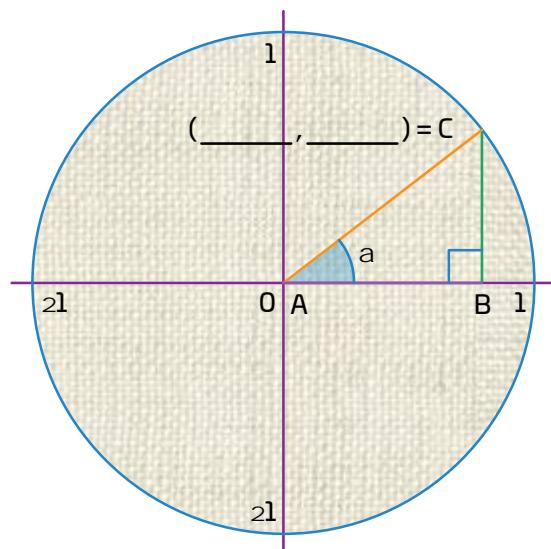
$$\text{sen}(60^\circ) = \cos(\quad {}^\circ)$$



Comenta con un compañero si los resultados que obtuviste solo son iguales en triángulos del mismo tamaño o si son los mismos para triángulos semejantes.



**04** Observa la imagen del llamado círculo unitario y contesta.

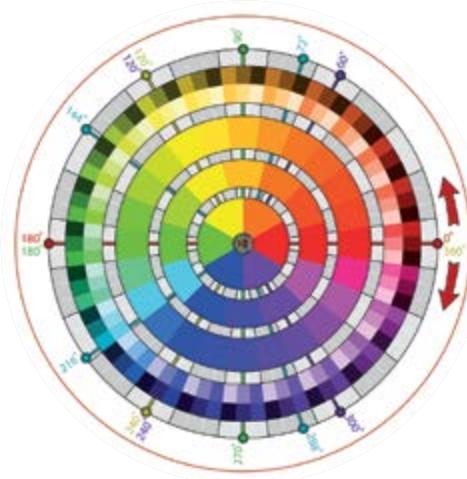


En una circunferencia de radio 1, ¿la hipotenusa del triángulo medirá 1, sin importar el ángulo  $\alpha$ ? Explica.

Los triángulos estudiados en las dos páginas anteriores, ¿pueden identificarse en esta circunferencia? Discútelo con tu grupo y explica aquí.

¿Con cualquier ángulo  $\alpha$  puede dibujarse un triángulo como los de las páginas anteriores, para calcular con él las funciones trigonométricas?

¿Cuáles son las coordenadas de  $C$  en términos del coseno y el seno del ángulo  $\alpha$ . Discútelo con el grupo, anota sus conclusiones y esos valores en la imagen.



- Analiza el comportamiento de los lados del triángulo del círculo unitario a medida que el ángulo  $\alpha$  se acerca a  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , para indicar los valores siguientes:

$$\sin(0^\circ) = \underline{\hspace{1cm}} =$$

$$\cos(0^\circ) = \underline{\hspace{1cm}} =$$

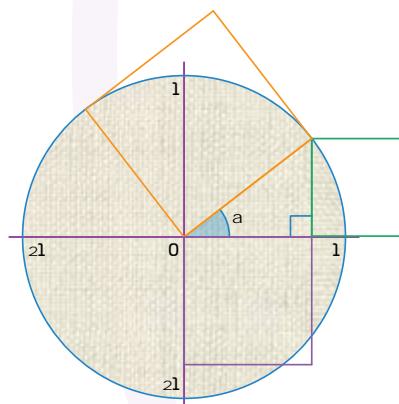
$$\sin(90^\circ) = \underline{\hspace{1cm}} =$$

$$\cos(90^\circ) = \underline{\hspace{1cm}} =$$

$$\tan(0^\circ) = \underline{\hspace{1cm}} =$$

- Comenta en el grupo por qué la tangente de  $90^\circ$  no puede calcularse con un cociente y escribe una conclusión 😊.

**05** Usa el círculo unitario siguiente para justificar que  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ .



# 1 Espacio 2 procedimental

## ¿Cómo uso las funciones trigonométricas en la calculadora de mi celular?

1. Ingreso a la opción "Calculadora científica", puede estar en "Ajustes" o dentro de la calculadora sencilla.
2. Reviso que la calculadora esté en grados (*degrees* o deg).
3. Determino si conozco la medida de un ángulo o la razón entre dos lados:
  - › Si conozco el ángulo, escribo ese número seguido de la función deseada (o en orden inverso, según sea el funcionamiento de mi aplicación); el resultado será el valor de la razón correspondiente. Por ejemplo, para  $\cos(27^\circ)$  presiono: [27] + [cos] + [=] (o [cos] + [27] + [=])

El resultado, 0.89, en un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto adyacente a ese ángulo y la hipotenusa.

- › Por otro lado, si conozco el valor de la razón, escribo ese número, y elijo la opción "inversa" (la tecla **inv**, **2<sup>nd</sup>** u otra que muestre  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$  y  $\tan^{-1}$ ) seguido de la función deseada (o al revés, según como trabaje mi aplicación); el resultado será la medida del ángulo correspondiente. Por ejemplo, para  $\sin^{-1}(0.75)$  escribo:  
[0.75] + [inv] + [sen] + [=]  
(o [inv] + [sen] + [0.75] + [=])

El resultado,  $48.59^\circ$ , es la medida del ángulo opuesto al cateto usado. Y no olvido que 0.75 es la razón entre este cateto y la hipotenusa.

## 06 Calcula lo siguiente, redondeando a centésimos.

$$\sin(48^\circ) =$$

$$\sin(81^\circ) =$$

$$\sin(0.6^\circ) =$$

$$\cos(9^\circ) =$$

$$\cos(62^\circ) =$$

$$\cos(59^\circ) =$$

$$\tan(73^\circ) =$$

$$\tan(28^\circ) =$$

$$\tan(13^\circ) =$$

$$\sin^{-1}(0.1) =$$

$$\sin^{-1}(0.78) =$$

$$\sin^{-1}(0.045) =$$

$$\cos^{-1}(0.28) =$$

$$\cos^{-1}(0.03) =$$

$$\cos^{-1}(0.9) =$$

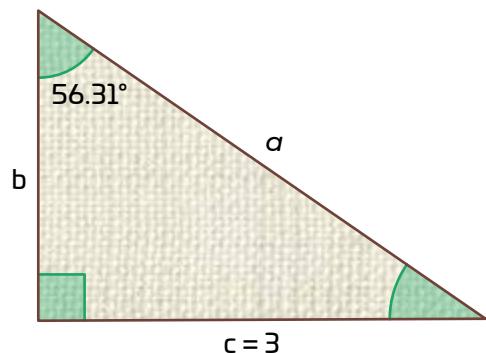
$$\tan^{-1}(1.8) =$$

$$\tan^{-1}(0.75) =$$

$$\tan^{-1}(1.001) =$$

Comenta con el grupo cuáles son los posibles resultados al calcular senos, cosenos y tangentes de ángulos. Despues, revisa con la calculadora que los cocientes que hiciste en las páginas anteriores sean correctos.

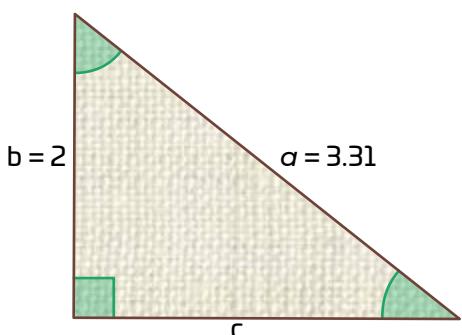
## 07 Determina las medidas del ángulo y de los lados del triángulo. Anota tu procedimiento .







**05 Resuelve el triángulo.**




---

---

---



Puntos obtenidos:



**06 Anota V si la igualdad es verdadera, o F si es falsa.**

- sen( $60^\circ$ ) = cos( $30^\circ$ )
- sen( $30^\circ$ ) = cos( $30^\circ$ )
- sen( $45^\circ$ ) = cos( $45^\circ$ )
- sen( $60^\circ$ ) = cos( $60^\circ$ )

Puntos obtenidos:



**07 Calcula lo que se pide.**

Los lados y ángulos de un triángulo rectángulo que tiene un cateto de 4.44 unidades y un ángulo de  $61.63^\circ$  opuesto a este cateto.



Los ángulos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1.75 y 3.28 unidades, respectivamente.



Puntos obtenidos:



**08 Dibuja el triángulo.**

Un triángulo rectángulo que tenga un cateto de 1.8 unidades y un ángulo de  $35.7^\circ$ .

Puntos obtenidos:



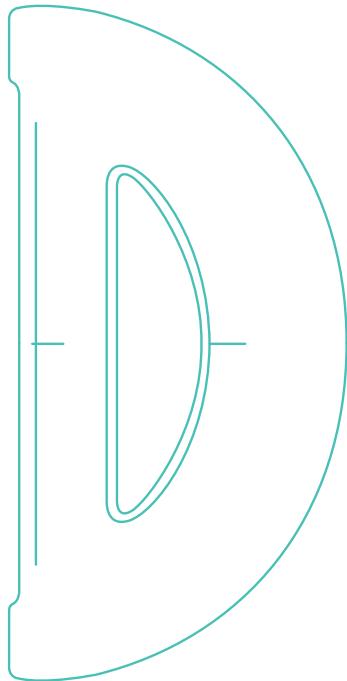
Puntaje total:



Compara tu puntaje con algunos compañeros. ¿Qué tan lejos estás de ellos? Y en tiempo, ¿cómo andas? Si fuiste de los más altos, plátícales qué ejercicios te parecieron más fáciles y por qué. También ganas el derecho a que todos intenten aclararte una duda (procura que no sea muy difícil, jeh!). 😊

09

Dibuja un transportador y une los valores indicados con el ángulo que les corresponde en él.



$\text{sen}(10^\circ) =$

$\cos(25^\circ) =$

$\tan(60^\circ) =$

$\text{sen}(85^\circ) =$

$\cos(90^\circ) =$

$\text{sen}(120^\circ) =$

$\cos(140^\circ) =$

$\tan(175^\circ) =$



EQUIDAD

¿Crees que **las matemáticas puedan lograr un mundo más inclusivo?** Suena exagerado, pero es posible.

El proyecto **Colors of the World** de Crayola lo sabe y lanzó una nueva paleta de colores, que **busca aumentar la representatividad racial con 40 nuevas tonalidades que plasman la diversidad en el mundo**. Para esta nueva composición cromática se incluyeron personas reales, por lo que hay tonos claros, medios y profundos para dar matices más reales al momento de colorear.

Con **estos colores, que se producen matemáticamente mediante la combinatoria tricromática de los colores primarios**, se espera que aumente la representación y se fomente un sentido de pertenencia entre los niños, al poder representar su color de piel o el de sus compañeros.

Sin embargo, aunque **el proyecto es un avance importante hacia la inclusión y fomenta la eliminación de la discriminación**, no es suficiente para erradicarla pues esto debería ser un ejercicio continuo.

Imagina un futuro en el que las diferencias raciales dejen de ser objeto de discriminación entre las personas.

- › Si el transportador fuera perfectamente circular, ¿dónde se medirían, en él, los resultados de las funciones trigonométricas que calculaste? ¿Es más fácil dibujar los de seno y coseno que los de tangente? Comenta y revisa esto con tus compañeros.

10

Realiza la siguiente encuesta y haz lo que se pide.

- › Pregunta a 10 adultos si conocen tablas de funciones trigonométricas (muchos las conocerán simplemente como "tablas matemáticas").
- › Registra un sí o no, pero no dejes de entretenerte oyendo sus experiencias.
- › Representa las respuestas en un triángulo rectángulo. En el cateto horizontal una unidad será un "Sí" y en el vertical será un "No". Usa el circulito negro en la esquina de la página para el vértice del ángulo recto.
- › Completa el triángulo al final, o ve dibujando el que resulte de marcar la respuesta de cada persona encuestada. Agrégale el color para hacerlo más llamativo. Y, si puedes, ¡consigue más respuestas!
- › Compara tu dibujo con tus compañeros y comenten las experiencias más interesantes que escucharon.

## APLICO

Reflexiona sobre las preguntas de la sección **ANALIZO**, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

MEZCLA LOS COLORES DE TU VIDA.



¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera?  
¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

 ¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

---

---

---

---

---

---

---

